

N° Ordre...../Faculté FHC/UMBB/2013

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES



Faculté des **H**ydrocarbures et de la **C**himie

Mémoire de Magister

Présenté par

SAIFI REDHA

Filière : Génie Pétrolier et Gazier

Option : Production des Hydrocarbures et Forage des Puits

Adaptation de la méthode de régularisation au traitement des données de well test

Devant le jury :

M ^r KESSAL. M	Prof	UMBB	Président
M ^r MELLAK. A	Prof	UMBB	Examineur
M ^{me} AMOURA. M	MCA	USTHB	Examinatrice
M ^r GARECHE. M	MCB	UMBB	Examineur
M ^r ZERAIBI. N	Prof	UMBB	Encadreur

Année Universitaire : 2013/2014

RESUME

L'interprétation des essais de puits a pour objectif principal l'identification des paramètres caractéristiques d'un modèle représentant le réservoir. En effet, durant des décennies, de nombreux chercheurs ont tenté d'élargir les conditions d'interprétation des essais de puits (wellbore storage, traitement des réservoirs d'un type particulier...etc.) en utilisant la méthode de superposition des résultats expérimentaux à l'une des courbes d'un modèle près donné.

L'utilisation de cette méthode traditionnelle (superposition sur un modèle prédéfinie) pour interpréter les résultats d'un essai du puits, présente malheureusement plusieurs inconvénients :

- Il est parfois difficile de trouver un modèle représentatif à cause de la géométrie complexe du réservoir.
- L'existence d'une certaine erreur sur l'estimation des paramètres de modèle.
- Les tests sont limités pour un seul puits et pour des essais de Drawdown ou bluid-up.

Afin de remédier à ces problèmes, Durant les années 1990, une nouvelle méthode a été mise en point par Economides et al [42]. Cette méthode consiste à ajuster les paramètres initiaux obtenus à partir de l'interprétation traditionnelle d'une réponse impulsionnelle en utilisant la régression non linéaire.

Le but de notre travail est de calculer la réponse impulsionnelle du réservoir et sa dérivée pour n'importe quel historique de production en utilisant un algorithme basé sur le principe de régularisation qui nous permettra d'avoir de meilleurs résultats même avec des erreurs importantes sur les mesures expérimentales.

Pour atteindre notre objectif, nous avons mené cette étude en distinguant la partie suivante :

- L'étude de l'influence des erreurs de mesure sur un problème mal-posé.
- Le développement d'un code de calcul pour :
 - ✓ Simuler la pression de fond en utilisant l'équation de convolution.
 - ✓ Calculer la réponse impulsionnelle d'un réservoir par la technique de régularisation
 - ✓ Calculer la dérivée de la pression par la technique de régularisation.
- L'application de la méthode de régularisation sur un test multi-rate.
- Amélioration d'une fonction objective sur le terme de régularisation qui nous permet d'avoir une courbe bien lissée de la réponse impulsionnelle et sa dérivée.

Mots clés : régularisation, convolution, problème mal posé, essais de puits, réponse impulsionnelle

الهدف من تحليل بيانات إختبار الأبار هو تحديد نموذج الخزان وخواصه الفيزيائية، في الواقع على مدى عقود من الزمن حاول العديد من الباحثين توسيع نطاق النماذج وخواصها (السعة الخزنية للبئر، التعامل مع نماذج خاصة... إلخ) وذلك عن طريق مطابقة المخطط البياني لإستجابة البئر مع مخططات معينة سابقا. إستعمال هذه الطريقة الكلاسيكية (المطابقة مع مخططات معينة سابقا) لتحليل بيانات إختبار البئر تحوي للأسف العديد من العيوب:

- الصعوبة في بعض الأحيان من العثور على نماذج تمثيلية بسبب الشكل الهندسي المعقد للخزان.
- وجود بعض الأخطاء في تقدير خصائص النموذج.
- إقتصار الإختبار على بئر واحدة و إختبارات تنامي أو تنازل الضغط.

لتعدي هذه الصعوبات، خلال فترة 1990 قام إيكونوميدي و مجموعة من الباحثين بتطوير أسلوب جديد لتحليل البيانات حيث تعتمد هذه الطريقة على تعديل خصائص النموذج الأولي الذي حصلنا عليه عبر التحليل الكلاسيكي للإستجابة النبضية عن طريق التراجع اللاخطي بين النموذج وإستجابة البئر.

الهدف من هذا العمل هو حساب الإستجابة النبضية ومشتقتها للخزان لأي نوع من تاريخ تغير معدل جريان البئر بإستعمال خوارزمية تعتمد على مبدأ التعديل التي تسمح لنا بالحصول على بيانات مستقرة حتى مع وجود أخطاء معتبرة في التسجيلات.

لتحقيق هذا الهدف تطلب منا القيام بالخطوات التالية:

- دراسة تأثير أخطاء القياسات على مسائل سيئة الطرح
- وضع برنامج ل:
 - ✓ محاكات إستجابة الضغط بإستعمال معادلة الإلتفاف.
 - ✓ حساب الإستجابة النبضية للخزان بإستعمال مبدأ التعديل
 - ✓ حساب مشتقة الإستجابة النبضية بإستعمال مبدأ التعديل
- إستعمال مبدأ التعديل على إختبار متعدد الجريان
- تحسين وظيفة حد التعديل للحصول منحنى ممد للإستجابة النبضية ومشتقتها

الكلمات المفتاحية: التعديل، الإلتفاف، مسائل سيئة الطرح، إختبار الأبار، الاستجابة النبضية

ABSTRACT

Well test interpretation's main objective is the identification of the characteristic parameters of a model representing the reservoir. Indeed, for decades, many researchers have attempted to extend the terms of interpretation of well tests (wellbore storage, processing reservoirs of a particular type ... etc.) Using "the method of superposition" results to one of the experimental curves of a given close model.

Using this traditional method (the superposition on a given close model) to interpret the results of a well test, presents unfortunately several disadvantages:

- It is sometimes difficult to find a representative model because of the complex geometry of the reservoir.
- The existence of a certain error in the estimation of the model parameters.
- The tests are limited to a single well and only for drawdown or bluid-up tests.

In order to cure these problems, During the 1990s, a new method has been developed by Economides et al [42], This method consists of adjusting the initial parameters obtained from the traditional interpretation of an impulse response using nonlinear regression.

The aim of our work is to calculate the impulse response of the reservoir and its derivative for any production history using an algorithm based on the principle of regularization that will allow us to have better results even with large errors on experimental measurements.

To achieve our goal, we conducted this study by distinguishing the following section:

- The study of the influence of measurement errors on an ill-posed problem.
- The development of a computing code to:

- ✓ Simulate the down-hole pressure using the convolution equation.
- ✓ Calculate the impulse response of a reservoir by the regularization technique
- ✓ Calculate the derivative of the pressure by the regularization technique.
- The application of the regularization method on a multi-rate test.
- The improvement of an objective function on the regularization term that allows us to have a well smoothed impulse response and its derivative curve.

Keywords: regularization, convolution, ill-posed problem, well test, impulse response.

DEDICACE

J'ai le grand plaisir de dédier ce travail :

À ma très chère mère, qui me donne toujours l'espoir de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.

À mon très cher père, pour ses encouragements, son soutien.

À tous mes frères et sœurs.

À mes meilleurs amis.

À tous ceux que j'aime et je respecte.

Saïfi Redha

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, nous tenons à remercier Allah, le clément et le miséricordieux de nous avoir donné la force et la patience de mener à bien ce modeste travail.

Je remercie également mes parents pour leur soutien et leur encouragement au cours de mes études.

*Je voudrais exprimer mes vifs remerciements à mon promoteur le Pr : **ZERAIBI NOUREDDINE** pour sa disponibilité, son sérieux et ses conseils judicieux.*

J'adresse aussi mes sincères remerciements à l'ensemble des enseignants de l'INIM et de l'INH qui ont contribué à mon formation.

En définitive, je remercie toute personne qui a participé de près ou de loin, de façon directe ou indirecte, à la réussite de ce travail.

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I-1 : historique de production de puits	25
Tableau II-1 : propriétés des différents régimes d'écoulements	40
Tableau V-1: Historique de pression de test Draw down	104

LISTE DES FIGURES

Figure I-1 : Evolution de la perte de charge en fonction de la vitesse de filtration de fluide.....	11
Figure I-2: Variation de volume des fluides en fonction de la pression.....	14
Figure I-3: la variation de produit μz en fonction de la pression de fluide..	18
Figure I-4: Variation de produit en fonction de la pression de fluide	19
Figure I-5 : Evolution de la pression de fond lors d'un test multi-rate.....	24
Figure I-6 : Historique de production de puits.....	26
Figure II-1 : Schémas de l'interprétation moderne	34
Figure II-2 : calcul de la réponse impulsionnelle à partir d'un test multi-rate	39
Figure II-3 : Schémas d'identification de modèle de réservoir.....	46
Figure III-1: La réponse de système à une impulsion	51
Figure III-2: La réponse de système à une impulsion retardé	51
Figure III-3: la réponse de système à un signal d'entrée $x(\theta) * \delta(t - \theta)$	51
Figure III-4: la réponse de système à un signal d'entrée $x(t)$	52
Figure III-5: Réponse impulsionnelle de réservoir	54
Figure III-6: historique de débit (signal d'entrée).....	54
Figure III-7: Evolution de la perte de charge	55
Figure III-8: Descriptisation du signal par la méthode de point milieu.....	56
Figure III-9: interpolation par des splines cubique	65
Figure III-10: Interpolation par des morceaux linéaires.....	66
Figure III-11: Historique de la pression	67
Figure III-12: Historique de débit.....	67
Figure III-13: Réponse impulsionnelle de réservoir (puits à débit constant)	68
Figure IV-1 : Variation de la norme de solution en fonction de résidu.....	78
Figure IV-2 : Courbe L de Tikhonov.....	80
Figure IV-3 : Représentation graphique de courbure moyenne	81
Figure IV-4 : Calcul de la dérivée en utilisant des points adjacents de point i	87
Figure IV-5: Calcul de la dérivée avec L=0.1.....	88
Figure IV-6 : Calcul de la dérivée avec L=0.2.....	88
Figure IV-7: Calcul de la dérivée avec L=0.5.....	89

Figure IV-8: Méthode de trapèze composé	90
Figure V-1: Solution exacte de problème	97
Figure V-2: Influence de l'erreur d'observation sur la solution approchée ..	99
Figure V-3: Variation de la solution avec le choix de paramètre α	101
Figure V-4: Courbe L	102
Figure V-5: Solution approchée de problème calculé par la régularisation	102
Figure V-6 : Représentation de la réponse impulsionnelle de réservoir en échelle cartésienne	106
Figure V-7: Représentation de la réponse impulsionnelle de réservoir en échelle log-log.....	106
Figure V-8 : Dérivée de la pression calculée par les points adjacente de point i.....	107
Figure V-9: Calcul de la dérivée avec L=0.2	108
Figure V-10: Calcul de la dérivée avec L=0.3.....	108
Figure V-11: Calcul de la dérivée avec L=0.5.....	109
Figure V-12: variation de la dérivée en fonction de paramètre de régularisation	111
Figure V-13 : Variation de la solution (réponse impulsionnelle) en fonction de paramètre de régularisation α	111
Figure V-14: la courbe L pour le calcul de la dérivée	112
Figure V-15: Comparaisons de la dérivée calculée par la régularisation avec la dérivée calculé par bourdet.....	113
Figure V-16: Réponse impulsionnelle calculé sans faire de régularisation	116
Figure V-17: Courbe L de test multi-rate (L=1)	117
Figure V-18: Réponse impulsionnelle de test multi-rate (L=1)	118
Figure V-19: Courbe L de test multi-rate après le changement de la fonction objectif	119
Figure V-20: Réponse impulsionnelle de test multi-rate après le changement de la fonction objectif.	119

SOMMAIRE

Sommaire.....	1
Revue Bibliographique.....	3
Introduction générale.....	8
I. Chapitre I : Equations de base de la physique en milieux poreux.....	10
I.1 Introduction	11
I.2 Équation de filtration des fluides.....	15
I.3 Principe de Duhamel (Principe de superposition)	24
I.4 Conclusion.....	27
II. Chapitre II : Identification des paramètres et le modèle du réservoir.....	28
II.1 Introduction	29
II.2 Modèle du réservoir	29
II.3 Algorithme général d'identification.....	32
II.4 Conclusion	46
III. chapitre III : Théorie sur la convolution et la déconvolution	48
III.1 Convolution	49
III.2 Déconvolution	58
III.3 conclusion.....	68
IV. Chapitre IV : La régularisation : la méthode de Tikhonov	69
IV.1 Introduction	70
IV.2 Étude de la stabilité	71
IV.3 Calcul de la réponse.....	75
IV.4 Calcul de la dérivée	85
IV.5 Conclusion.....	94
V. Chapitre V : Application de la régularisation aux Tests Draw down et Multi- rate	95
VIII.1 Application sur une transformation linéaire :	96
VIII.2 Application sur un test draw down.....	103

VIII.3	Application sur un test multi-rate	114
VIII.4	Conclusion.....	120
	Conclusion générale	121
	References.....	122

La régularisation est une procédure ad-hoc abondamment utilisée pour la résolution des problèmes inverses qui sont à leurs tours des problèmes mal-posés suivant le principe d'Hadamard [1]. Cette méthode a trouvé des applications de grande envergure dans diverses sciences tandis que son utilisation dans le domaine d'interprétation des essais était tardive. Effectivement, le premier article faisant appel à cette technique a été publié dans le journal scientifique en 2001 par **Thomas Von Schroeter** [2].

Cette technique s'introduit naturellement comme moyenne nécessaire d'aller encore plus loin dans le domaine d'interprétation des essais de puits.

Interprétation par des droites :

Ce sont des méthodes basées sur la régression paramétrique généralement de la forme d'une droite $y = ax + b$ où a et b sont des constantes en fonction des paramètres du réservoir. Au cours d'un écoulement caractéristique, l'évolution de la pression est représentée par une fonction du temps. Cette représentation se traduit par une droite qui permet de déterminer ces deux constantes après une régression des données au sens des moindres carrées [3].

Ces techniques sont apparues depuis l'année 1937 par **Muskat** [4] et restent les seules disponibles jusqu'aux années 1970. Muskat a présenté pour la première fois une théorie d'identification des paramètres du réservoir à partir de la mesure de pression de remontée (BUILD-UP). Cette méthode a été par la suite améliorée par plusieurs auteurs [5, 6, 7,...] en ce qui concerne la compressibilité du fluide, la limite du réservoir, l'historique de production de puits etc... .

La décennie entre 1950 et 1960 était très productive, la plupart des publications dans cette période ont étudié le comportement des fluides dans le réservoir et aux abords du puits [8]. D'autres phénomènes ont été mis en évidence durant cette période : la notion de skin [9,10,11] pour représenter la perte de charge supplémentaire observée au niveau du puits due aux endommagements du réservoir pendant le forage et la complétion du puits, le skin géométrique [12,13,14] pour représenter la perte de charge due à la

pénétration partielle du puits, le well bore storage [15] pour tenir en compte la variation de volume du fluide dans le puits sur l'évolution de la pression.

Les modèles d'hétérogénéités du réservoir ont attiré beaucoup d'attention durant les années 1960, mais l'utilisation de ces derniers n'était généralisée qu'après l'apparition de la dérivée des courbes types [3].

La notion de la double porosité a été introduite la première fois par **Barenblatt et al.** en 1960 [16]. Plusieurs améliorations ont été faites par les différents auteurs sur le modèle [17, 18, 19, 20, 21] en considérant que :

- La taille des blocs est très petite par rapport à l'extension du réservoir, et la répartition des blocs et des fissures est uniforme dans tout le réservoir.
- Seules les fissures transportent les fluides vers le puits.

À côté de la notion de double porosité, est apparue aussi la notion de double perméabilité ou bien les réservoirs multicouches afin de se rapprocher de plus en plus de la réalité. [22, 23, 24, 25, 26, 27].

Interprétation par les planches des courbes types :

L'interprétation par les méthodes conventionnelles présente plusieurs inconvénients :

- Tracer une droite parfaite est souvent délicat : il est souvent difficile de déterminer la droite correspondant à l'interprétation recherchée ; certaines apparences des droites ne sont souvent que des tangentes à une courbe de faible courbure.
- L'interprétation ne prend que les points situés sur la droite, de ce fait, seule une faible partie des données sert à l'interprétation.

Afin de remédier aux limites d'utilisation de la méthode conventionnelle, la méthode d'interprétation par les planches des courbes types sera introduite à partir de 1970 par **Ramey [28]**, qui a étudié le problème de l'influence du well bore storage et du skin sur les datas des essais de puits. Ramey a proposé une planche de courbes types généré à l'aide d'un modèle analytique représenté en grandeur sans dimensions $P_D(t_D, C_D, S)$, sur laquelle on superpose les points de mesure afin de tirer la courbe correspondant à notre modèle de puits.

Plusieurs courbes types sont proposées pour l'interprétation des essais de puits verticaux pour les réservoirs homogènes infinis [29, 30, 31, 32], ainsi que pour les modèles des puits [33, 34, 35] et du réservoir [36]. Remarquons que, pour l'instant, trois sortes de problèmes ont été résolues par les planches des courbes types, correspondant à trois systèmes réservoir/puits :

- Milieu homogène
- Milieu à double porosité
- Milieu homogène et puits fracturé.

Interprétation par les planches des courbes dérivatives :

Malgré l'avantage lié à la prise en compte d'une seule courbe de la totalité d'un essai de puits, cette méthode présente une réelle difficulté à observer les faibles variations de pression à cause de la présentation log-log.

Pour remédier à ce problème, différentes formes de dérivées ont été proposés dans la littérature [37, 38, 39]. Parmi ces approches, la plus intéressante est celle de Bourdet en 1983.

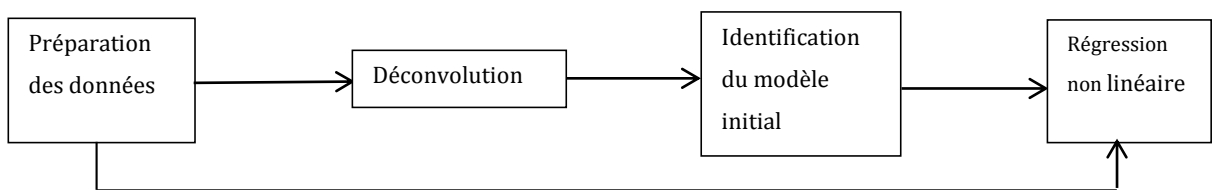
Les méthodes utilisant la dérivée de la pression exploitent les avantages de la représentation par les courbes types et remédient aux inconvénients de la représentation logarithmique. [3]. L'utilisation de la dérivée de la pression a facilité la détermination des paramètres du réservoir et l'identification du modèle représentatif en utilisant la succession de différents régimes d'écoulement dans le réservoir. De ce fait, à partir de 1983 la méthode des courbes types sera fortement améliorée par l'utilisation simultanée de la dérivée de la pression [39, 40, 41, 37]. Elles ont en commun d'interpréter en un seul coup la globalité de l'évolution de pression enregistrée au cours d'un essai de puits.

Interprétation assisté par ordinateur :

L'interprétation des essais de puits par les méthodes traditionnelles (conventionnelle et courbes types) repose sur les procédés d'analyse graphique (droite, superposition). Malgré, le nombre impressionnant de publications dans le monde, ces méthodes demeurent toujours limitées :

- Le matching est parfois délicat
- Appliqué seulement pour :
 - ✚ Modèle simple
 - ✚ Débit constant
- Une certaine erreur sur l'estimation des paramètres.
- Pression initiale connue

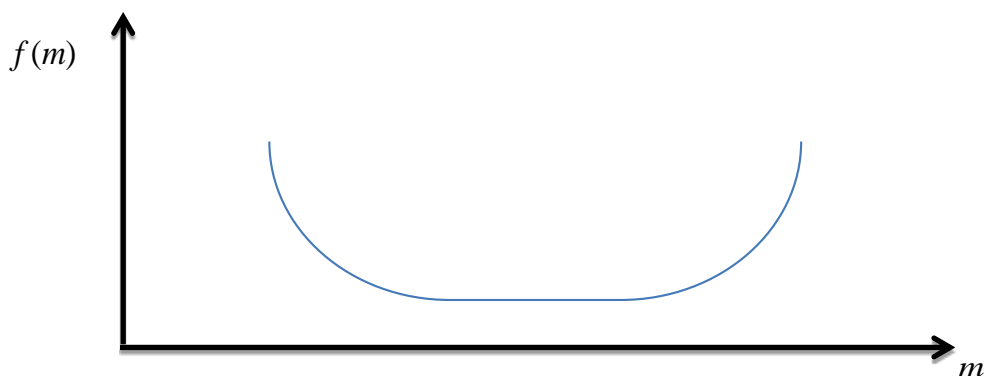
Afin de remédier à ces limitations, en 1990 Economides et al. ont fait la première structure d'une interprétation moderne qui repose sur le schéma suivant :



Après la mise en évidence de cette nouvelle approche La plupart des théories et des travaux concentrent sur le développement des procédés et des algorithmes de déconvolution et de régression non linéaire [42, 43].

Trois problèmes qui peuvent apparaître dans la régression non linéaire [44] :

1. La fonction $f(m)$ où bien l'une des deux premières dérivées n'est pas continue.
2. La fonction $f(m)$ a un fond plat c'est-à-dire qu'il y a plusieurs solutions m qui sont près de donner les mêmes observations d , c'est le cas d'un problème mal posé.



3. La fonction $f(m)$ n'est pas convexe et à plusieurs minimums locaux alors il faut utiliser d'autres méthodes pour chercher un minimum global.

Par conséquent, un choix judicieux du modèle initial permet d'atténuer les problèmes de la régression non linéaire en réduisant le domaine sur lequel on cherche les solutions possibles.

Pour cela, les chercheurs se sont beaucoup penchés sur l'amélioration d'un algorithme de déconvolution. Ainsi, plusieurs algorithmes de déconvolution ont été présentés dans les littératures [45], certains sont basés sur des méthodes d'interpolation et d'intégration [46,47, 48, 49, 46, 50] et d'autres utilisent les technique de déconvolution dans le domaine fréquentiel [51, 46, 52]. Malheureusement, tous ces algorithmes présentent un problème majeur de stabilité aux erreurs de mesures qui sont faites au niveau du champ, ce qui rend ainsi, le problème mal posé.

Pour diminuer l'impact de ces erreurs de mesure sur le résultat, une nouvelle technique de déconvolution présentée en 2001 par **Von Schroeter et al. [2]**, basée sur la technique de régularisation. Plus tard, cette méthode sera étendue et révisée par d'autres auteurs.[53, 54, 55, 56, 57, 58].

INTRODUCTION GENERALE

Pour établir un projet de développement et réussir à prendre une bonne décision du mode d'exploitation et d'extraction d'hydrocarbures dans le cadre d'une politique économique, nous sommes contraints à connaître et bien définir les paramètres de notre gisement (le potentiel, les propriétés pétrophysiques, le volume etc...). Les études se poursuivent durant la vie du gisement afin d'en tirer les informations nécessaires à l'exploitation optimale du gisement.

Le fait que le spécialiste du gisement travaille sur un système qui lui est matériellement quasi inaccessible. Il doit alors se contenter des renseignements partiels, fournis notamment par le puits. Pour cela, des essais de puits (well testing) sont mis en œuvre, dont le principe consiste à mesurer les débits et les pressions des fluides en surface et au fond du puits pour connaître :

- la capacité de production du puits.
- L'aire de drainage du puits.
- La qualité du réservoir.
- Le degré d'altération ou d'amélioration de la zone proche du puits ;
- L'hétérogénéité des roches et de la structure.
- Les limites du réservoir.

L'analyse des essais du puits passe par les étapes suivantes :

1. Calculer la réponse du réservoir à partir des données prises au niveau du puits (pression et débit des fluides).
2. Trouver à partir de la bibliothèque des courbe-types, le modèle reproduisant la même réponse.
3. Calculer les paramètres initiaux de réservoir (C, K, S.....).
4. Ajustement des paramètres par une méthode de régression non linéaire.

L'objectif de notre travail est de calculer la réponse du réservoir pour n'importe quel historique de production au moyen d'un algorithme basé sur le principe de régularisation qui nous permettra d'avoir de meilleurs résultats et ce malgré, en présence de fortes erreurs lors de l'enregistrement des mesures expérimentales.

Dans cette optique, ce mémoire est composé de quatre chapitres : Le **premier chapitre** dédié à une synthèse bibliographique concernant la description mathématique des écoulements dans le réservoir. L'importance de cette étude est d'établir un modèle mathématique qui fait le lien entre les entrées et les sorties du système (réservoir + fluide). Ces résultats nous permettront de faire une interprétation physique et d'accéder aux paramètres du système à partir d'une comparaison des données enregistrées en surface et celle obtenue par le modèle mathématique. Dans le **deuxième chapitre**, on présente une description du mode de choix d'un modèle de réservoir et les différentes étapes utilisées pour identifier un tel système ainsi qu'une explication de la procédure d'interprétation des essais du puits pour estimer les paramètres de notre système tout en mettant, en évidence les avantages et les inconvénients de cette méthode. Dans le **troisième chapitre** nous présentons la notion de la convolution et la déconvolution et leurs nécessités lors de la résolution de problème de la propagation de la pression dans un réservoir produit avec un débit variable. Le **quatrième chapitre** est consacré à la compréhension de ce qu'est un problème inverse et ses principales difficultés de résolution. Nous présenterons aussi quelques algorithmes d'inversion pour résoudre de tel problème mal posé concernant les essais de puits. Enfin, le dernier **chapitre concerne** les résultats numériques obtenus afin de valider les différents algorithmes établis au cours de ce mémoire. Dans un premier temps, nous ferons une comparaison entre les résultats obtenus sur une transformation linéaire mal conditionnée avec la solution exacte, puis, nous procéderons à l'application de ces algorithmes sur un test Draw-Down et un test multi-rate.

CHAPITRE I : EQUATIONS DE BASE DE LA PHYSIQUE EN MILIEUX POREUX

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

I.1 INTRODUCTION

Un problème de mécanique des fluides est résolu si l'on connaît en tout point du domaine occupé par le fluide et à tout instant t la pression p dans le fluide, sa masse spécifique ρ et les composantes de sa vitesse V_x , V_y , V_z . Ces cinq fonctions en coordonnées x, y, z doivent satisfaire à des conditions générales résultant de l'application des principes fondamentaux de la mécanique, à savoir :

- Le principe de la proportionnalité des forces et des accélérations.
- Le principe de la conservation de la masse.

Ces principes se traduisent par la loi élémentaire de perte de charge en milieux poreux, et l'équation de la continuité.

À ces équations il faut ajouter l'équation d'état du fluide et la loi de l'évolution thermodynamique du fluide au cours de son mouvement, ces quatre équations peuvent être combinées pour donner une équation aux dérivées partielles en p .

✚ La loi de la perte de charge.

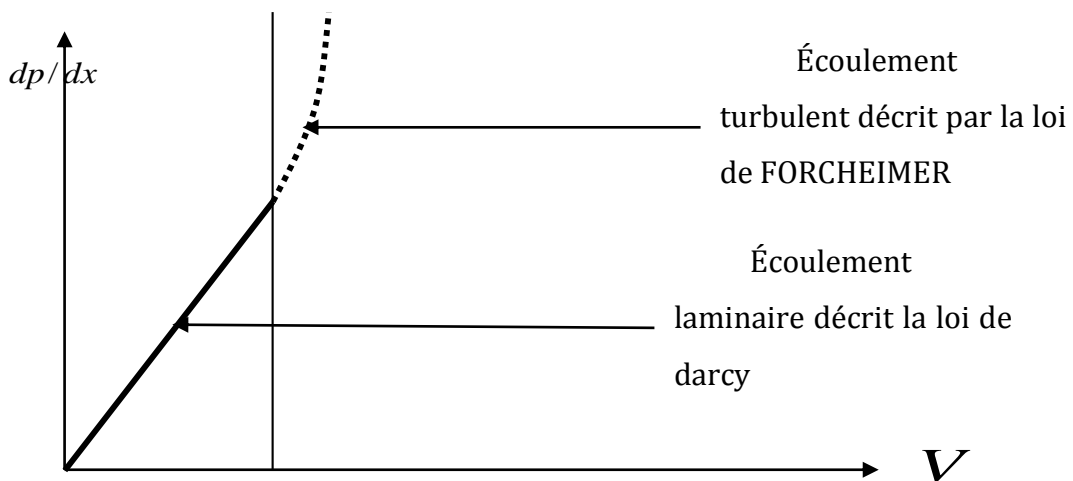


Figure I-1 : Evolution de la perte de charge en fonction de la vitesse de filtration de fluide

L'étude expérimentale de l'écoulement des fluides à travers les milieux poreux sont décrits par deux lois : la loi de darcy dans le cas des écoulements laminaires (faible vitesse), et la loi de Forchheimer dans le cas des écoulements turbulents.

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

La loi quadratique proposée par Forchheimer est une loi générale pour exprimer la filtration du fluide en régime laminaire ou turbulent.

Dans le cas d'un écoulement permanent à travers une carotte horizontale de longueur L , l'équation de Forchheimer est

$$-\frac{dp}{dL} = \frac{\mu_g}{K}V + \beta\rho V^2 \dots\dots\dots I-1$$

p : la pression, atm

L : la longueur, cm

μ : la viscosité, cp

K : la perméabilité, darcy

V : la vitesse, cm/s

ρ : la densité g/cm³

β : le coefficient de turbulence atm-s/g

Pour les gaz, Katz et d'autre auteur ont exprimé l'équation (I.1) en termes de débit massique

$$q_m = \rho q = \rho VA = \left(\frac{pM}{ZRT}\right)VA \dots\dots\dots I-2$$

$$-\frac{dp}{dL} = \frac{ZRT}{pM} \left[\frac{\mu_g q_m}{KA} + \beta \left(\frac{q_m}{A}\right)^2 \right] \dots\dots\dots I-3$$

La substitution de cette équation de Forchheimer par l'équation de Darcy, donne dans le cas réel l'écoulement de pétrole dans le gisement. Le terme quadratique est parfaitement négligeable devant le terme de viscosité, alors qu'il devrait être pris en considération dans le cas du gaz car les viscosités et les débits rencontrés couramment le rendant 500 fois plus grand.

En général, pour que la loi de Darcy soit valable, on se fixe à une valeur

$$\text{limite Re} = \frac{\rho V d}{\mu \phi} < 1.$$

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

✚ L'équation de continuité :

L'équation de continuité traduit le principe de la conservation de la masse :

La variation de la masse du fluide contenu dans l'élément de volume est égale à la différence entre les quantités de fluide entrées et sorties pendant l'intervalle de temps.

Le bilan massique s'écrit alors :

Débit massique entrant - débit massique sortant = débit d'accumulation.

Considérons le parallélépipède $dx dy dz$ pris dans le milieu poreux de porosité ϕ

Durant l'intervalle dt la variation de masse est :

$$dx dy dz \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt$$

D'autre part, sur les faces d'abscisses x et $x + dx$, entre une masse de fluide $(\rho V_x)_x dy dz dt$ et sort $(\rho V_x)_{x+dx} dy dz$, alors le parallélépipède acquiert par les

faces x et $x + dx$ la masse : $-\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) dx dy dz dt$

Comptant la masse acquise par les quatre autres faces nous avons après simplification par $dx dy dz dt$:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) = \text{div}(\rho\vec{V}) \dots\dots\dots 1-4$$

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

✚ L'équation d'état.

Généralement les fluides du réservoir sont classés dans trois groupes :

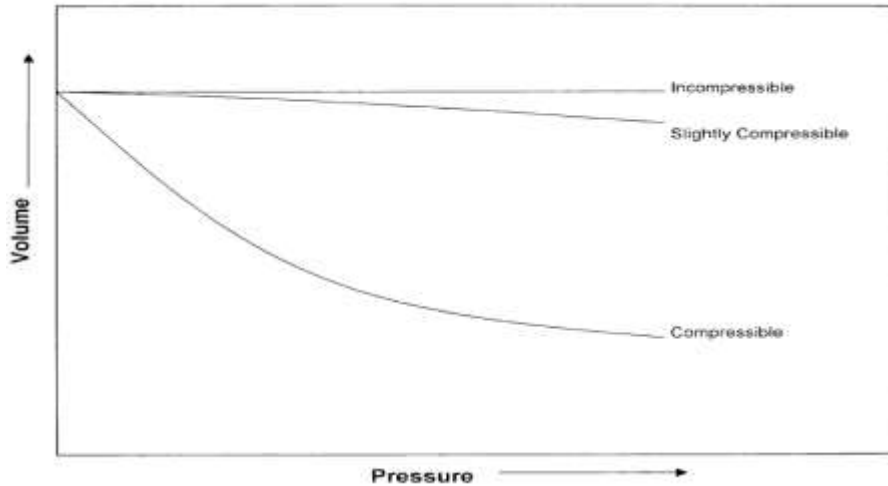


Figure I-2: Variation de volume des fluides en fonction de la pression

I.1.1 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si le volume du fluide ne change pas avec le changement de la pression.

$$\frac{\partial V}{\partial p} = 0 \dots\dots\dots I-5$$

Le fluide incompressible n'existe pas en réalité, mais on l'utilise parfois pour simplifier la forme de l'équation finale de l'écoulement.

I.1.2 Fluide légèrement compressible

Un fluide est dit légèrement compressible si le volume du fluide change légèrement avec le changement de la pression, par exemple : l'eau de gisement et l'huile.

$$c = \frac{-1}{V} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{T=cst} \dots\dots\dots I-6$$

En vue d'obtention d'une expression analytique manipulable, nous négligerons la variation de la compressibilité en fonction de la pression ; cette attitude est d'ailleurs d'autant plus raisonnable que la pression s'écarte peu de la pression de référence p_0 .

Dans ces conditions l'équation d'état s'écrit :

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

$$-c \int_{P_{ref}}^P dp = \int_{V_{ref}}^V \frac{dV}{V} \dots\dots\dots I-7$$

$$V = V_{ref} [1 + c(p_{ref} - p)] \dots\dots\dots I-8$$

Connaissant le volume du fluide à une pression donné on peut avoir le volume du fluide sous une autre pression.

I.1.3 Fluide compressible

Ce sont les fluides qui présentent un grand changement de volume avec le changement de la pression, tous les gaz sont considérés comme des fluides compressibles.

La compressibilité iso-thermale est donnée par la relation suivante.

$$c_g = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_{T=cst} \dots\dots\dots I-9$$

I.2 ÉQUATION DE FILTRATION DES FLUIDES

I.2.1 Filtration d'un fluide légèrement compressible

Pour développer l'équation différentielle qui gouverne l'écoulement du fluide légèrement compressible dans le milieu poreux on se base sur :

1. l'équation de continuité : $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$

2. l'équation de darcy : $\vec{V} = \frac{K}{\mu} (\nabla p + \rho g)$

Cas d'un écoulement horizontal $\vec{V} = \frac{K}{\mu} (\nabla p)$

3. l'équation d'état : $c = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T, \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = c \frac{\partial p}{\partial x}$

On combine l'équation de la continuité, l'équation de darcy et l'équation d'état :

$$\nabla \left(\rho \frac{K}{\mu} \nabla p \right) = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \nabla \left(\rho \frac{K}{\mu} \right) \nabla p + \rho \frac{K}{\mu} \nabla^2 p \dots\dots\dots I-10$$

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

Cas linéaire :

$$\nabla \cdot \nabla a = \nabla^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \dots\dots\dots I-11$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + c \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\phi \mu c}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots I-12$$

Cas radial :

$$\nabla \cdot \nabla a = \nabla^2 a = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial a}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \dots\dots\dots I-13$$

0 si a ne dépend pas de θ et z

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + c \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \frac{\phi \mu c}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mu}{K} \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots\dots\dots I-14$$

Cette équation peut être simplifiée si on utilise la définition de la compressibilité de la roche :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots I-15$$

Cas linéaire :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu c_t}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots I-16$$

Cas radial :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\phi \mu c_t}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots I-17$$

Les conditions de validité de cette équation sont :

1. Un milieu poreux homogène.
2. Écoulement laminaire.
3. Écoulement monophasique.
4. Un fluide légèrement compressible.
5. Les propriétés de la roche ne dépendent pas de la pression.

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

I.2.2 Filtration d'un fluide compressible

Pour développer l'équation différentielle gouvernant l'écoulement du fluide compressible dans le milieu poreux on se base sur :

1. l'équation de continuité : $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$ cas radial :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r) = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$$

2. l'équation de Darcy : $\vec{V} = \frac{K}{\mu} (\nabla p + \rho g)$ cas écoulement radial :

$$u_r = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}$$

3. l'équation d'état : $\rho = \frac{pM}{zRT}$ et $c_g = \frac{1}{p} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial p}$

La combinaison de ces trois termes donne $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{p}{\mu z} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{p}{\mu z} \frac{\partial p}{\partial t}$

En 1966, Ramey et al. ont procédé à la linéarisation de cette dernière équation par l'introduction de terme :

$$m(p) = \int_0^p \frac{2p}{\mu z} dp \dots\dots\dots I-18$$

$$\frac{\partial m(p)}{\partial p} = \frac{2p}{\mu z} \dots\dots\dots I-19$$

$$\frac{\partial m(p)}{\partial r} = \frac{\partial m(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial r} \dots\dots\dots I-20$$

$$\frac{\partial m(p)}{\partial t} = \frac{\partial m(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots I-21$$

L'équation finale devient:

$$\frac{\partial^2 m(p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial m(p)}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial m(p)}{\partial t} \dots\dots\dots I-22$$

Cette équation est semblable à l'équation monophasique pour les liquides légèrement compressibles ce que implique que la solution de l'équation de

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

diffusivité pour un fluide légèrement compressible est applicable pour un fluide compressible mais on prenant $m(p)$ à la place de p

L'approximation par p^2

L'application de la forme p^2 dans l'équation de diffusivité a été l'une des méthodes les plus discutées dans la technologie de réservoir de gaz.

Plusieurs ouvrages considèrent le produit μZ approximativement constant pour $p < 2000$ psia

Alors on écrit :

$$m(p) = \int_0^p \frac{2p}{\mu Z} dp = \frac{p^2}{\mu Z}$$

On introduit cette relation dans l'équation de diffusivité du gaz on obtient :

$$\frac{\partial^2(p^2)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(p^2)}{\partial r} = \frac{1}{K} \frac{\partial(p^2)}{\partial t} \dots\dots\dots I-23$$

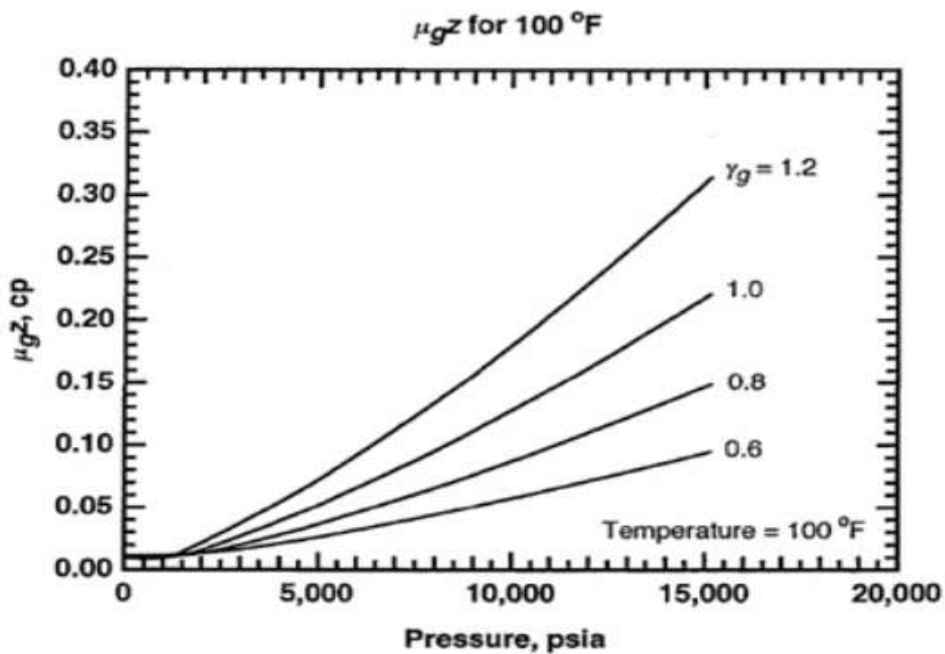


Figure I-3: la variation de produit μZ , en fonction de la pression de fluide

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

L'approximation par p :

En 1973 Fetkovitech a estimé que pour une pression supérieure à 3000 psi, le produit μB_g est presque constant.

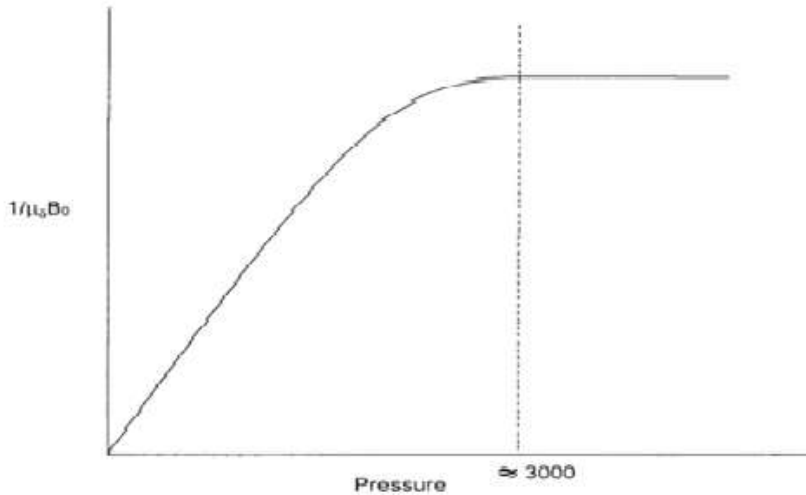


Figure I-4: Variation de produit en fonction de la pression de fluide

$$B_g = \frac{\text{volume de gaz(condition standard)}}{\text{volume de gaz(condition fond)}} = \left(\frac{p_{sc} z T}{p T_{sc}} \right)$$

$$\frac{p}{Z} = \frac{T p_{sc}}{T_{sc}} \frac{1}{B_g} \dots\dots\dots I-24$$

On introduit cette relation dans l'équation de diffusivité et on obtient :

$$\frac{\partial^2(p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(p)}{\partial r} = \frac{1}{K} \frac{\partial(p)}{\partial t} \dots\dots\dots I-25$$

I.2.3 Filtration poly-phasique

Actuellement, la meilleure façon d'interpréter les essais de puits dans le cas des écoulements poly-phasiques dans le réservoir est d'utiliser la méthode de Perrine-martin.

Développement de Perrine-martin

Premièrement, nous devons établir l'équation de continuité de chaque phase

$$\nabla(\rho_i v_i)_T = - \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_i)_T \dots\dots\dots I-26$$

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

- eau :

$$\nabla(\rho_w v_w) = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_w s_w) \dots\dots\dots I-27$$

- huile :

$$\nabla(\rho_w v_w) = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_w s_w)$$

- gaz :

Pour le gaz, le flux total est la somme du gaz libre et du gaz dissous dans l'huile et l'eau, alors

$$\begin{aligned}
 (\rho_g v_g)_T &= \underbrace{\rho_g v_g}_{\text{Le flux de gaz libre}} + \underbrace{\frac{v_o}{B_o} R_{so} \rho_{gsc}}_{\text{Le flux de gaz dissous dans l'huile}} + \underbrace{\frac{v_w}{B_w} R_{sw} \rho_{gsc}}_{\text{Le flux de gaz dissous dans l'eau}} = \rho_{gsc} \frac{v_g}{B_g} + \frac{v_o}{B_o} R_{so} \rho_{gsc} + \frac{v_w}{B_w} R_{sw} \rho_{gsc} \\
 (\rho_g \phi)_T &= \phi \rho_g s_g + \phi s_o \frac{R_{so}}{B_o} \rho_{gsc} + \phi s_w \frac{R_{sw}}{B_w} \rho_{gsc} = \phi \rho_{gsc} \left[\frac{s_g}{B_g} + R_{so} \frac{s_o}{B_o} + R_{sw} \frac{s_w}{B_w} \right] \\
 &\dots\dots\dots I-28
 \end{aligned}$$

Alors l'équation de continuité de gaz est :

$$\nabla \left(\rho_{gsc} \frac{v_g}{B_g} + \frac{v_o}{B_o} R_{so} \rho_{gsc} + \frac{v_w}{B_w} R_{sw} \rho_{gsc} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \rho_{gsc} \left[\frac{s_g}{B_g} + R_{so} \frac{s_o}{B_o} + R_{sw} \frac{s_w}{B_w} \right] \right) \dots\dots\dots I-29$$

Rappel de la loi générale de darcy :

$$v_i = -\frac{k_i}{\mu_i} \nabla p_i \dots\dots\dots I-30$$

Si on néglige la pression capillaire c.-à-d. $p_o = p_w = p_g$ alors

$$\nabla p_o = \nabla p_w = \nabla p_g$$

La combinaison des résultats précédents donne :

- huile :

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

$$\nabla \left(\frac{k_o}{\mu_o B_o} \nabla p \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{s_o}{B_o} \right) \dots\dots\dots I-31$$

- eau :

$$\nabla \left(\frac{k_w}{\mu_w B_w} \nabla p \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{s_w}{B_w} \right) \dots\dots\dots I-32$$

- gaz :

$$\nabla \left(\left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + R_{so} \frac{k_o}{\mu_o B_o} + R_{sw} \frac{k_w}{\mu_w B_w} \right) \nabla p \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \left(\frac{s_g}{B_g} + R_{so} \frac{s_o}{B_o} + R_{sw} \frac{s_w}{B_w} \right) \right) \dots\dots\dots I-33$$

Maintenant, on considère le terme du gradient qui a la forme de $\nabla(a\nabla p)$ avec $a = a(s_o, s_g, p)$

On utilise le gradient d'un produit :

$$\nabla(a\nabla p) = \nabla a \nabla p + a \nabla^2 p \dots\dots\dots I-34$$

En néglige le terme $\nabla a \nabla p$ on trouve :

- huile :

$$\frac{k_o}{\mu_o B_o} \nabla^2 p = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s_o}{B_o} \right) \dots\dots\dots I-35$$

- eau :

$$\frac{k_w}{\mu_w B_w} \nabla^2 p = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s_w}{B_w} \right) \dots\dots\dots I-36$$

- gaz :

$$\left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + R_{so} \frac{k_o}{\mu_o B_o} + R_{sw} \frac{k_w}{\mu_w B_w} \right) \nabla^2 p = \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s_g}{B_g} + R_{so} \frac{s_o}{B_o} + R_{sw} \frac{s_w}{B_w} \right) \dots\dots\dots I-37$$

Maintenant, on développe le second membre (la dérivée par rapport au temps) :

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s_o}{B_o} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{s_o}{B_o} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{B_o} \left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots I-38$$

On substitue cette relation dans l'équation de l'huile et on trouve :

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu_o}{k_o} \left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots I-39$$

Le même raisonnement pour l'eau :

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu_w}{k_w} \left(s'_w - \frac{s_w B'_w}{B_w} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots I-40$$

Pour le gaz :

$$\left(\frac{k_g}{\mu_g B_g} + R_{so} \frac{k_o}{\mu_o B_o} + R_{sw} \frac{k_w}{\mu_w B_w} \right) \nabla^2 p = \phi \left(\begin{array}{l} \frac{R_{so} s'_o}{B_o} + \frac{R'_{so} s_o}{B_o} - \frac{R_{so} s_o B'_o}{B_o} + \frac{R_{sw} s'_w}{B_w} + \frac{R'_{sw} s_w}{B_w} - \frac{R_{sw} s_w B'_w}{B_w} \\ + \frac{s'_g}{B_g} - \frac{s_g B'_g}{B_g} \end{array} \right) \frac{\partial p}{\partial t}$$

..... I-41

Nous définissons maintenant la mobilité comme le rapport entre la perméabilité effectif et la viscosité du fluide.

$$\lambda_i = \frac{k_i}{\mu_i} \dots\dots\dots I-42$$

L'indentification entre l'équation de l'huile et de l'eau donne :

$$\frac{\lambda_w}{\lambda_o} \left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o} \right) = \left(s'_w - \frac{s_w B'_w}{B_w} \right) \dots\dots\dots I-43$$

L'identification entre l'équation de l'huile et l'équation du gaz donne :

$$\frac{1}{\lambda_o} \left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o} \right) \left(\frac{R_{so} \lambda_o}{B_o} + \frac{R_{sw} \lambda_w}{B_w} + \frac{\lambda_g}{B_g} \right) = \left(\begin{array}{l} \frac{R'_{so} s_o}{B_o} + \frac{R'_{sw} s_w}{B_w} + \frac{s'_g}{B_g} - \frac{s_g B'_g}{B_g^2} + \left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o} \right) \frac{R_{so}}{B_o} + \\ \left(s'_w - \frac{s_w B'_w}{B_w} \right) \frac{R_{sw}}{B_w} \end{array} \right)$$

..... I-44

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

On groupe le terme identique $\left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o}\right)$:

$$\left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o}\right) \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_o}\right) = \left(\frac{R'_{so} s_o B_g}{B_o} + \frac{R'_{sw} s_w B_g}{B_w} + s'_g - \frac{s_g B'_g}{B_g}\right) \dots\dots\dots I-45$$

On a $\lambda_g = \lambda_t - \lambda_o - \lambda_w$ et $s'_g = -s'_o - s'_w$

On ajoute et retranche $\left(\frac{s_o B'_o}{B_o}\right)$ et $\left(\frac{s_w B'_w}{B_w}\right)$ puis en regroupe les termes

$\left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o}\right)$ on trouve

$$\left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o}\right) \left(\frac{\lambda_t}{\lambda_o}\right) = \left(\frac{R'_{so} s_o B_g}{B_o} - \frac{s_o B'_o}{B_o} + \frac{R'_{sw} s_w B_g}{B_w} - \frac{s_w B'_w}{B_w} - \frac{s_g B'_g}{B_g}\right) \dots\dots\dots I-46$$

$$\left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o}\right) \left(\frac{\lambda_t}{\lambda_o}\right) = c_o s_o + c_w s_w + c_g s_g = c_t \dots\dots\dots I-47$$

On remplace $\left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o}\right)$ dans l'équation de l'huile on trouve :

$$\nabla^2 p = \frac{\phi}{\lambda_o} \left(s'_o - \frac{s_o B'_o}{B_o}\right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\phi}{\lambda_o} \frac{\lambda_o c_t}{\lambda_t} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots I-48$$

L'équation finale est :

$$\nabla^2 p = \frac{\phi c_t}{\lambda_t} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots I-49$$

Cette équation est semblable à l'équation monophasique pour les liquides légèrement compressible ce qui implique que la solution de l'équation monophasique est applicable pour l'équation poly-phasique mais on prend c_t et λ_t .

I.3 PRINCIPE DE DUHAMEL (PRINCIPE DE SUPERPOSITION)

I.3.1 Introduction

Les solutions de l'équation de diffusivité présentées dans les ouvrages sont applicables seulement pour décrire la distribution de la pression lors d'une production par un seul puits à débit constant, par contre le réservoir réel contient plusieurs puits produisant avec des débits variables, alors une approche plus généralisée est nécessaire pour étudier la distribution de la pression dans le réservoir.

Le principe de superposition est un outil puissant qui peut être appliqué pour résoudre divers problèmes comme :

- Production à débit variable
- Plusieurs puits en production.
- La présence d'une faille dans le réservoir.

I.3.2 Cas de plusieurs puits :

La baisse totale de la pression dans n'importe quel point du réservoir est la somme des baisses de pression provoquées par chaque puits dans le réservoir.

$$(\Delta p)_T = (\Delta p)_{well1} + (\Delta p)_{well2} + (\Delta p)_{well3} + \dots \dots \dots I-50$$

I.3.3 Cas de débit variable q_i :

Pour développer le principe de superposition et comprendre son utilisation, nous allons considérer le cas le plus simple, un puits produit avec un débit q_1 jusqu'au temps t_1 puis on change le débit de ce puits à q_2 .

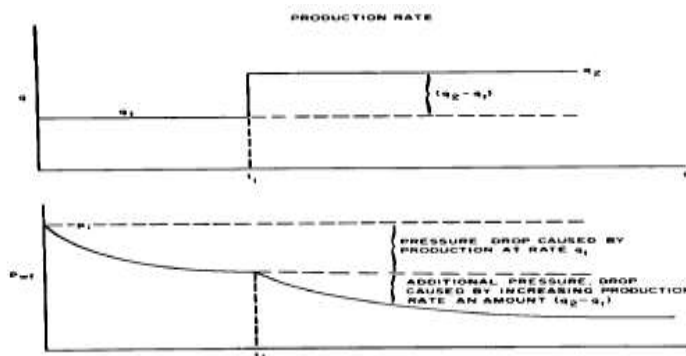


Figure I-5 : Evolution de la pression de fond lors d'un test multi-rate

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

Pendant la production avec un débit q_1 la pression au fond du puits est donnée par :

$$\Delta p(t) = p_i - p_{wf} = \frac{q_1 \mu}{2\pi k h} \Delta p_D(t) \dots\dots\dots I-51$$

Lorsqu'on augmente la production avec un débit $(q_2 - q_1)$ à l'instant t_1 on constate une diminution de la pression au fond du puits.

La pression de fond pendant cette période est calculée par l'addition d'une perte de charge provoquée par $(q_2 - q_1)$ à la perte de charge provoquée par q_1 .

$$\Delta p(t) = \frac{q_1 \mu}{2\pi k h} \Delta p_D(t) + \frac{(q_2 - q_1) \mu}{2\pi k h} \Delta p_D(t - t_1) \dots\dots\dots I-52$$

C'est à dire :

$$0 \leq t \leq t_1 :$$

$$\Delta p(t) = \frac{q_1 \mu}{2\pi k h} \Delta p_D(t)$$

$$t_1 < t$$

$$\Delta p(t) = \frac{q_1 \mu}{2\pi k h} \Delta p_D(t) + \frac{(q_2 - q_1) \mu}{2\pi k h} \Delta p_D(t - t_1)$$

Maintenant on suppose qu'on a un historique complexe de production.

Tableau I-1: Historique de production de puits

i	t	q
0	$t_0 = 0$	$q_0 = 0$
1	t_1	q_1
2	t_2	q_2
3	t_3	q_3
.	.	.
n	t_n	q_n

Comme le changement de la pression est dû à la variation de débit de production, on considère le graphe de variation de débit.

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

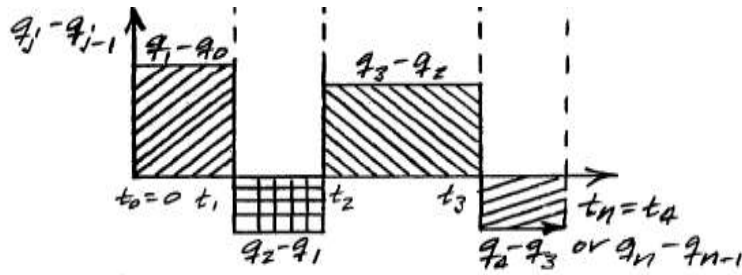


Figure I-6 : Historique de production de puits

La perte de charge totale au fond du puits est donnée par la relation suivante :

$$(\Delta p)_{total} = (\Delta p)_{due\ to\ (q_1 - 0)} + (\Delta p)_{due\ to\ (q_2 - q_1)} + (\Delta p)_{due\ to\ (q_3 - q_2)} + (\Delta p)_{due\ to\ (q_4 - q_3)} + \dots + (\Delta p)_{due\ to\ (q_n - q_{n-1})}$$

..... I-53

$$\Delta p(t) = \frac{(q_1 - q_0)\mu}{2\pi kh} \Delta p_D(t) + \frac{(q_2 - q_1)\mu}{2\pi kh} \Delta p_D(t - t_1) + \frac{(q_3 - q_2)\mu}{2\pi kh} \Delta p_D(t - t_2) + \dots + \frac{(q_n - q_{n-1})\mu}{2\pi kh} \Delta p_D(t - t_{n-1})$$

..... I-54

$$\Delta p(t) = \frac{\mu}{2\pi kh} \sum_{i=1}^n (q_i - q_{i-1}) \Delta p_D(t - t_{i-1}) \dots\dots\dots I-55$$

$$\Delta p(t) = \sum_{i=1}^n (q_i - q_{i-1}) \Delta p_D(t - t_{i-1}) \frac{\mu}{2\pi kh} \dots\dots\dots I-56$$

$$\Delta p(t) = \sum_{i=1}^n (q_i - q_{i-1}) \Delta p_u(t - t_{i-1}) \dots\dots\dots I-57$$

Avec :

$\Delta p_u(t - t_{i-1})$: La perte de charge provoquée par un débit unitaire.

Le principe de superposition peut être exprimé sous la forme continue :

$$\Delta p(t) = \int_0^t \frac{dq(\tau)}{d\tau} \Delta p_u(t - \tau) d\tau \dots\dots\dots I-58$$

I. Equations de base de la physique en milieux poreux

I.4 CONCLUSION

La modélisation des problèmes d'écoulement du fluide dans le milieu poreux nous permet de d'obtenir une équation différentielle aux dérivées partielles (équation de diffusivité) $\frac{\partial p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = K \frac{\partial p}{\partial t}$ qui décrit la propagation dans l'espace et dans le temps des perturbations apportées par les différents régimes d'exploitation.

Toutes les solutions et les méthodes qui ont été établies pour des puits à huile en écoulement monophasique sont applicable directement aux puits à gaz en remplaçant la pression par la pseudo-pression et aux puits à fluide polyphasique en remplaçant le fluide par un fluide monophasique équivalent.

Enfin, le principe de superposition est un outil puissant qui peut être appliqué pour résoudre divers problème : Production à débit variable, Plusieurs puits en production, La présence d'une faille dans le réservoir etc...

CHAPITRE II : IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

II.1 INTRODUCTION

Le problème de prendre une décision par les spécialistes devant une grande multitude d'informations et de variables reste toujours l'un des grands problèmes à résoudre. En effet, les décideurs ont besoins d'indicateurs et d'outils d'aide où de diagnostic pour effectuer, valider, justifier, évaluer où corriger les décisions importantes qu'ils doivent prendre.

Autrefois, l'aide de décision reposait sur l'expérience individuelle, sur le savoir et l'expérience des conseillers ainsi que sur l'analyse historique. Dans la vie courante et notamment dans le domaine pétrolier, le volume d'information et de variables sont tellement énormes que l'être humain trouve des difficultés à considérer plus de 10 à 20 facteurs à la fois pour le traitement d'un problème quelconque. Ainsi, des outils plus performants sont apparus tel que le simulateur pour y remonter à cette contrainte.

Le problème de prise de décision par l'ingénieur pour le développement du champ en vue de la production du pétrole et dans lequel, plusieurs variables peuvent interagir rende impérativement, le simulateur comme un outil nécessaire pour l'étude et l'analyse des résultats sans avoir recours aux expériences sur le terrain qui sont très couteuses.

La simulation numérique repose donc sur la représentation d'un phénomène par un modèle mathématique, elle permet d'étudier les propriétés et le fonctionnement actuel et au futur. Il ne s'agit pas de représenter le phénomène réellement, mais de reproduire le phénomène dans les conditions idéales (plus proche de la réalité).

II.2 MODELE DU RESERVOIR

On distingue deux sortes de modèles en fonction des informations mises en jeu pour leur conception :

II.2.1 Le modèle de connaissance

L'élaboration d'un modèle de connaissance comporte généralement quatre étapes principales :

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

1. Structuration du problème qui permet de définir les phénomènes physiques Dominants pour l'étude envisagée et d'en déduire les grandeurs caractéristiques du modèle (entrée ou variables indépendantes, sorties ou Variables dépendantes). Dans cette étape de structuration, la contribution principale de l'ingénieur consiste à distinguer les éléments importants de ceux qui peuvent être négligés.
2. Mise en équations en utilisant des lois connues, par exemple :
 - Des lois de conservation
 - Des relations constitutives qui mettent en relation des grandeurs de nature différente, par exemple, la pression, le volume et la température d'un gaz dans un système fermé ($PV = nRT$) ...etc. Ces relations sont le plus souvent de type algébrique. On obtient ainsi un système d'équations différentielles et algébriques qui décrivent le comportement dynamique du système.
 - Identification des paramètres (porosité, perméabilité,...) à partir des données physiques ou des mesures expérimentales.
3. Validation du modèle dans le cadre de l'étude considérée, en comportant les prévisions qu'il fournit avec certaines données mesurées expérimentalement.

II.2.2 Le modèle de représentation

C'est une technique de l'automatique consistant à obtenir un modèle mathématique d'un système à partir des mesures. L'identification peut se faire soit dans le temps (espace temporel) ou en fréquence (espace de Laplace). En général, le modèle est représenté sous forme de fonction de transfert utilisant la transformée en Z.

Ce modèle ne permet pas le plus souvent, l'interprétation physique des phénomènes étudiés. Les entrées et sorties du processus sont liées par un ensemble de relations mathématiques. Cet ensemble peut être composé de relations algébrique, d'équation différentielle, et de relation récurrente. Dans le cas de processus linéaires stationnaire, les relations entrée-sortie peuvent être définies par des matrices de transfert. Les

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

paramètres de tels modèles peuvent n'avoir aucun sens physique particulier connu.

II.2.3 Le choix de modèle

Le simulateur moderne basé sur le modèle de connaissance représente une avance très importante par rapport au modèle homogène ancien : le réservoir est découpé en quelque millier de mailles auxquelles on affecte des valeurs différentes des propriétés de la roche.

Dans la pratique, il est toujours souhaitable d'établir un modèle de connaissance des processus que l'on étudie pour reproduire le comportement du gisement au cours de son exploitation. Néanmoins, on peut distinguer certaines limites :

- Les informations disponibles (par le forage et le carottage) sont insuffisantes pour donner une information exacte de la variation spatiale des différentes propriétés et surtout à cause de l'éloignement entre les puits nécessitant alors plusieurs années de production (historique) pour avoir enfin un modèle fiable et par conséquent, la réalisation d'une complétion de puits à l'aide d'un simulateur ne donne pas toujours le meilleur choix possible.
- Par ailleurs, il existe aussi une autre limite telle que le nombre d'opérations nécessaires à la résolution d'un modèle qui croît exponentiellement en fonction du degré de précision fixé. Pour cette raison, on ne peut pas utiliser le modèle de connaissance pour résoudre certains problèmes en temps réel tel que le contrôle de venues (de gaz,...etc.) pendant le forage.
- Certaines propriétés et caractéristiques du gisement sont encore mal comprises : elles sont donc difficilement convertibles à des équations et par conséquent le modèle de connaissance ne permet pas d'étudier le fonctionnement actuel et future des paramètres (altération ou amélioration du gisement, l'interférence entre les puits).

Malgré les connaissances, exprimables sous forme d'équations, qui sont disponible, elles restent insuffisantes pour concevoir un modèle de

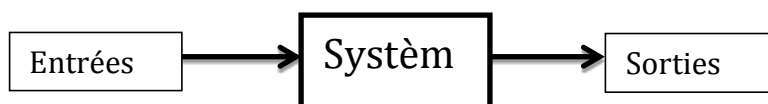
II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

connaissance, alors on est amené à une modélisation semi-physique qui prendre en considération le modèle de représentation i.e. l'ajustement des paramètres fait par le modèle représentatif. cette technique peut réduire le problème de la variation spatiale des paramètres et rend le simulateur plus fiable .Mais, pour la deuxième limitation nous sommes obligés de travailler avec le modèle de représentation parce que il est plus rapide.

II.3 ALGORITHME GENERAL D'IDENTIFICATION

Le réservoir est un objet dans lequel les variables de différents types (porosité et perméabilité de la roche, viscosité de fluide...etc.) interagissent et produisent des signaux observables (débit, pression). Comme, le réservoir est matériellement inaccessible, il est nécessaire de procéder à son identification.

L'identification, ou la recherche d'un modèle du réservoir à partir des mesures faites sur ce dernier est une préoccupation majeure des ingénieurs de champs dès la découverte du gisement, et aussi pendant sa durée de vie. Elle désigne à la fois une démarche scientifique et un ensemble de techniques visant à déterminer des modèles mathématiques capables de reproduire aussi fidèlement que possible le comportement d'un système physique, chimique, biologique, économique...



Dans ce chapitre, le problème que nous étudierons consiste à déterminer le modèle représentatif du réservoir à partir de la mesure de la pression et du débit en fonction du temps sur une courte durée de temps.

Durant des décennies, les modèles de réservoir considérés par l'interprétation des essais de puits étaient limités à de géométries simples se comportant comme un réservoir homogène. Dans les années 1970, les chercheurs ont tenté d'élargir les conditions d'interprétation en prenant en compte par exemple la capacité d'expansion ou encore en traitant les réservoirs de type particuliers (fissurés, fracturés...etc.).

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

Dans la littérature, nous pouvons classer ces méthodes en deux grandes familles :

1. Méthode conventionnelles

Elles ont été mises au point à partir des années 30. Elles étaient les seules disponibles jusqu'aux années 70. Elles consistent à repérer sur l'évolution de pression les différentes périodes d'écoulement caractéristiques qui se succèdent.

Au cours d'un écoulement caractéristique (radial circulaire, linéaire...etc.) l'évolution de la pression est représentée par une fonction du temps $f(t)$. La représentation de la pression en fonction du temps se traduit par une droite qui permet de déterminer selon l'écoulement certaines caractéristiques du puits et du réservoir.

2. Méthode utilisant les courbes types

Ces méthodes sont apparues dans les années 70 mais n'ont pas été diffusées et ni pris toutes leurs extension que dans les années 80.

Dans un premier temps, elles sont apparues sous la forme de planches de courbes utilisant des paramètres sans dimension. Pour permettre la représentation sous forme de planches, les courbes types font l'objet des hypothèses simplificatrices qui limitent parfois sévèrement leurs conditions d'utilisation.

Les méthodes des courbes types ont été fortement améliorées par l'utilisation simultanée de la dérivée de la pression à partir de l'année 83. Elles ont en commun d'interpréter d'un seul coup la globalité de l'évolution de pression enregistrée au cours d'un essai de puits. Cette propriété permet à l'interpréteur de déterminer la succession des écoulements visibles dans l'essai. Il peut ainsi porter un diagnostic sur son puits et son réservoir.

Ces méthodes reposent principalement sur les procédés d'analyse graphiques (droite, superposition) et présentent malgré tout plusieurs limitations :

- Le matching est parfois délicat

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

- Appliqué seulement pour :
 - Un modèle simple
 - Un débit constant
- Une certaine erreur sur l'estimation des paramètres.

À partir de 1990, une nouvelle méthode moderne a été mise au point par Economides et al. qui consiste à unifier une méthodologie d'interprétation des essais de puits. Elle repose principalement sur le calcul de la réponse impulsionnelle du réservoir et de la régression non linéaire entre la pression enregistrée au fond du puits et la pression calculée à partir d'un modèle du puits implanté sur un micro-ordinateur. Cette méthode a permis de remédier à une bonne partie des limitations des courbes types.

Depuis que les méthodes modernes ont été introduites dans les essais de puits, le déroulement d'une interprétation a été sensiblement modifié et amélioré.

Le problème d'identification du réservoir peut être subdivisé en quatre problèmes élémentaires :

1. Préparation des données.
2. Déconvolution (désuperposition).
3. Identification du modèle initial.
4. Régression non linéaire et validation.

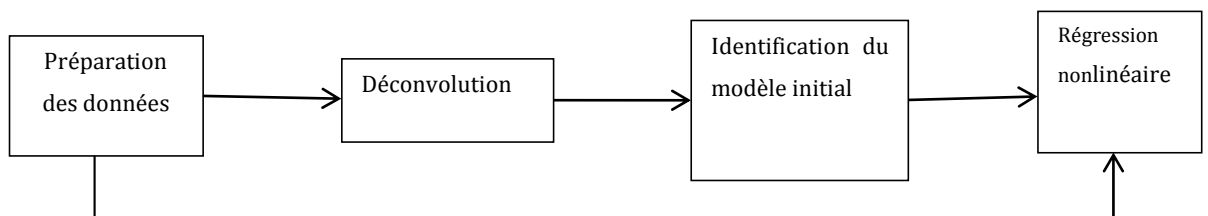


Figure II-1 : Schémas de l'interprétation moderne

II.3.1 Préparation des données

Pour avoir un bon modèle représentatif du réservoir, il est clairement important que les données enregistrées soient correctes avant l'analyse. Comme le débit et la pression représentent des signaux analogiques (continues) ayant une précision infinie, on est obligé de faire l'échantillonnage, en captant juste

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

des valeurs à des intervalles de temps donnés, pour permettre une définition exacte du signal en temps et de le stocker numériquement. C'est donc une étape nécessaire pour réduire ce signal à une suite de points discrets. Cela entraîne deux conséquences distinctes :

1. seules les informations présentes sur les points de capture sont enregistrées ;
2. tout le reste est perdu.

Intuitivement, on peut se rendre compte que, si la fréquence d'échantillonnage est très faible, les acquisitions seront très espacées et, de ce fait si le signal original comporte des détails entre deux positions de capture, ils ne seront pas enregistrés. C'est pour cela que la fréquence d'échantillonnage doit être bien choisie, suffisamment grande pour restituer correctement l'ensemble des informations transportées par le signal analogique.

Il est recommandé de faire des mesures supérieures à 1 HZ (mesure par second) pour restituer correctement la période transitoire de test. Dans ce cas, des milliers de valeurs seront enregistrées par le capteur pendant le test. L'analyse et le traitement de cette quantité présente malheureusement un grand problème du point de vu « temps de calcul ».

Il est souhaitable de ramener tout l'ensemble de donnée à une taille maniable en prélevant un sous-ensemble représentatif de quelque centaine de valeur.

L'approche de l'échantillonnage logarithmique nous permet d'enregistrer plus de données au début du test où la variation de la pression est plus rapide et peu de donnée à la fin du test où la variation de la pression est lente ce qui fait réduire considérablement le nombre de valeur à traiter. Dans le cas d'un test multi-rate, nous sommes obligés de réutiliser l'échantillonnage logarithmique à chaque période de débit.

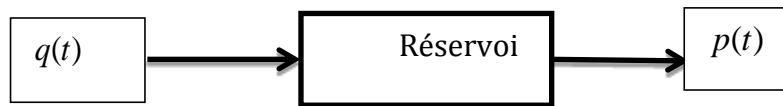
II.3.2 Déconvolution (désuperposition)

Les méthodes d'interprétation des essais de puits présenté dans les ouvrages utilisent les solutions de l'équation de diffusivité qui prennent en considération un débit constant au fond du puits. Dans la pratique, on ne peut

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

pas maintenir un débit constant pendant un test de puits ce qui rend les valeurs obtenues pendant le test peu significatives et présente des difficultés lors de l'interprétation à cause des perturbations dans les valeurs enregistrées. Dans cette section, nous allons décrire une méthode de désuperposition pour calculer la réponse impulsionnelle pour n'importe quel historique de production.

Une réponse impulsionnelle est définie comme l'évolution de la pression dans le puits lorsque le débit est maintenu à une valeur constante. Cette réponse peut être analysée par les méthodes d'interprétation habituelles (conventionnelle et courbe type).



D'après le principe de superposition (principe de Duhamel) l'entrée (débit) $q(t)$ et la sortie $\Delta p(t)$ ($p_i - p(t)$) : perte de charge dans le réservoir) sont reliés par un produit de convolution (principe de Duhamel) :

$$\Delta p(t) = \int_0^t q(t - \tau) \Delta p_u(\tau) d\tau \dots\dots\dots II-1$$

$\Delta p_u(t)$: La réponse impulsionnelle.

$q(t)$: Le débit de puits.

$\Delta p(t)$: La chute de pression.

Considérons l'intervalle de temps $\{0, T\}$ (T : temps test), discrétisé en intervalles de temps $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots\dots\dots < t_{i-1} < t_i < t_{i+1} \dots\dots\dots < t_{n+1} = T$, l'équation de convolution peut être écrite sous la forme :

$$\Delta p(t_i) = \int_0^{t_i} q(t_i - \tau) \frac{d}{d\tau} \Delta p(\tau) d\tau \dots\dots\dots II-2$$

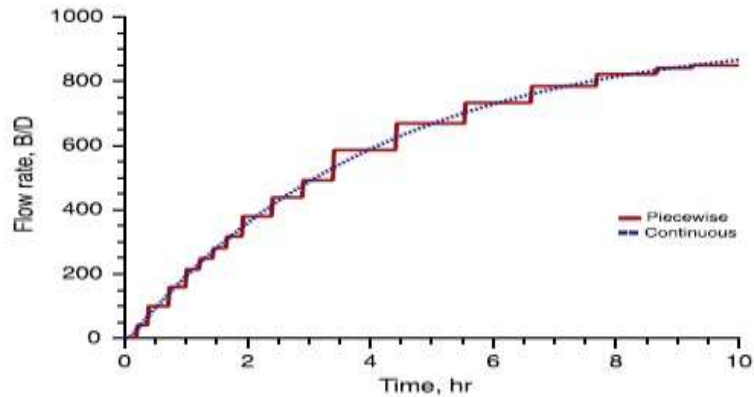
Comme l'intervalle de temps $\{0, t_i\}$ est discrétisé en intervalles de temps $0 < t_0 < t_1 < t_2 \dots\dots\dots < t_{i-1} < t_i$

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

L'équation précédente peut être écrite sous la forme :

$$\Delta p(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} q(t_i - \tau) \frac{d}{d\tau} \Delta p_u(\tau) d\tau \dots\dots\dots II-3$$

Si on considère que notre débit est constant pendant l'intervalle t_j, t_{j+1}



II-1 : Discrétisation de l'historique de débit

Alors :

$$\Delta p(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} q(t_i - t_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{d}{d\tau} \Delta p_u(\tau) d\tau \dots\dots\dots II-4$$

Comme $\int_j^{j+1} \frac{d}{d\tau} \Delta p_u(\tau) d\tau = \Delta p_u(t_{j+1}) - \Delta p_u(t_j)$ alors

$$\Delta p(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} q(t_i - t_j) [\Delta p_u(t_{j+1}) - \Delta p_u(t_j)] \dots\dots\dots II-5$$

Sous forme d'équation algébrique :

$$\Delta p(t_0) = 0$$

$$\Delta p(t_1) = q(t_1 - t_0) [\Delta p_u(t_1) - \Delta p_u(t_0)]$$

$$\Delta p(t_2) = q(t_2 - t_0) [\Delta p_u(t_1) - \Delta p_u(t_0)] + q(t_2 - t_1) [\Delta p_u(t_2) - \Delta p_u(t_1)]$$

$$\Delta p(t_3) = q(t_3 - t_0) [\Delta p_u(t_1) - \Delta p_u(t_0)] + q(t_3 - t_1) [\Delta p_u(t_2) - \Delta p_u(t_1)] + q(t_3 - t_2) [\Delta p_u(t_3) - \Delta p_u(t_2)]$$

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

$$\begin{aligned} \Delta p(t_i) = & q(t_i - t_0)[\Delta p_u(t_1) - \Delta p_u(t_0)] + q(t_i - t_1)[\Delta p_u(t_2) - \Delta p_u(t_1)] + \dots\dots\dots \\ & q(t_i - t_j)[\Delta p_u(t_{j+1}) - \Delta p_u(t_j)] + \dots\dots\dots \\ & q(t_i - t_{i-1})[\Delta p_u(t_i) - \Delta p_u(t_{i-1})] \end{aligned}$$

.
.

.

$$\begin{aligned} \Delta p(t_{n+1}) = & q(t_{n+1} - t_0)[\Delta p_u(t_{n+1}) - \Delta p_u(t_0)] + q(t_{n+1} - t_1)[\Delta p_u(t_2) - \Delta p_u(t_1)] + \dots\dots\dots \\ & q(t_{n+1} - t_j)[\Delta p_u(t_{j+1}) - \Delta p_u(t_j)] + \dots\dots\dots \\ & q(t_n - t_{n-1})[\Delta p_u(t_n) - \Delta p_u(t_{n-1})] \end{aligned}$$

Alors nous avons obtenu un système linéaire d'équation :

$$\Delta p = Q \Delta p_u \dots\dots\dots \text{II-6}$$

Avec :

$$\Delta p = \begin{pmatrix} \Delta p(t_1) \\ \Delta p(t_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p(t_i) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p(t_{n+1}) \end{pmatrix} \dots\dots\dots \text{II-7}$$

Et

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

$$\Delta p_u = \begin{pmatrix} \Delta p_u(t_1) \\ \Delta p_u(t_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p_u(t_i) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p_u(t_{n+1}) \end{pmatrix} \dots\dots\dots II-8$$

$$Q_{ij} = q(t_i - t_{j-1}) - q(t_i - t_j) \dots\dots\dots II-9$$

Avec : $q(t_i - t_j) = 0$ si $t_i - t_j \leq 0$

La figure suivante montre l'extraction d'une réponse impulsionnelle à partir d'un test multi-rate.

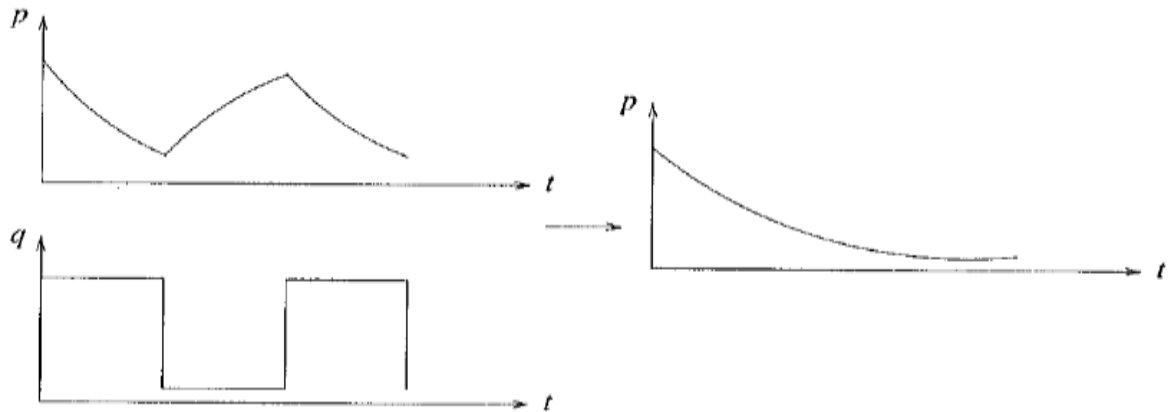


Figure II-2 : calcul de la réponse impulsionnelle à partir d'un test multi-rate

Alors le calcul de la réponse impulsionnelle revient à un calcul inverse.

$$\Delta p_u = Q^{-1} \Delta p$$

II.3.3 Identification du modèle initial

Cette étape sert à déterminer le modèle initial injecté dans la régression non linéaire afin de limiter le nombre de modèles candidats à être représentatif du modèle réel et diminuer le temps de calcul lors de l'ajustement des paramètres.

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

La démarche utilisée est la suivante :







II.3.3.1 Diagnostic

Le diagnostic sert à déterminer la succession des écoulements visibles au cours de l'essai. Le repérage de ces écoulements détermine la configuration du réservoir puits qui sera ensuite réutilisée dans l'interprétation. Le diagnostic est réalisé à l'aide de la dérivée de la pression.

$$\Delta p' = \frac{dp}{d \ln \Delta t}$$

La majorité des écoulements visibles au cours d'un essai de puits se traduit par une évolution de la pression soit linéairement en fonction du logarithme du temps, soit linéaire d'une puissance du temps, voir la figure suivante

Tableau II-1 : propriétés des différents régimes d'écoulements

Geometry	Log-log scale		Early	Time range	
	Shape	Slope		Intermediate	Late
Radial :		No 0	Double porosity restricted	Homogeneous behavior	Semi-infinite reservoir
Linear :		1/2 1/2	Infinite conductivity fracture	Horizontal well	Two parallel sealing boundaries
Bi-linear :		1/4 1/4	Finite conductivity fracture	Finite conductivity fault	Double porosity unrestricted with linear flow
Spherical :		No -1/2		Well in partial penetration	
Pseudo Steady State :		1 1	Wellbore storage	Layered no crossflow with boundaries	Closed reservoir (drawdown)
Steady State :		0 -1 (-∞)		Conductive fault	Constant pressure boundary

L'allure caractéristique prise par la dérivée dans ces deux cas est en fait un outil de diagnostic privilégié :

- tous les écoulements sont visibles sur le même graphique.
- Chaque écoulement se traduit soit par une droite horizontale, soit par une droite de pente n.

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

La détermination des différentes périodes d'écoulement, nous permettra ensuite d'appliquer des méthodes d'interprétations conventionnelles adaptées à chaque écoulement.

II.3.3.2 Interprétation

L'interprétation vise à quantifier les paramètres de la configuration réservoir/puits. Elle est réalisée avec les courbes types, la dérivée de la pression et les méthodes conventionnelles.

II.3.4 Régression non linéaire (calage automatique)

La régression non linéaire est une forme des moindres carrés spécialisée dans l'estimation d'un modèle non linéaire en n paramètres à partir de m observations ($m > n$). Une façon d'estimer ce type de problème est de considérer des itérations successives se basant sur une version linéarisée du modèle initial. Cette étape sert à ajuster les paramètres initiaux déterminés lors de la phase d'interprétation par un algorithme mathématique pour valider le modèle adapté à la configuration réservoir/puits. Cet ajustement est réalisé en changeant les valeurs des paramètres (perméabilité, w , λ , le rayon d'investigation, la pression initial, etc...) jusqu'à l'obtention de la réponse du modèle simulé au mieux la pression mesurée au sens des moindres carrés.

Considérons les m couples d'observation $(t_1, p_1), (t_2, p_2), (t_3, p_3), \dots, (t_m, p_m)$, on cherche les paramètres $(k, w, \lambda, \dots \text{etc.})$ de sorte que la somme des carrés des déviations

$$S(k, w, \lambda, p_i \dots) = \sum_{i=1}^{i=m} (p_{\text{mesuré}} - p_{\text{calculé}}(t_i | k, w, \lambda, p_i, \dots))^2 \dots\dots\dots II-10$$

soit minimale.

$p_{\text{calculé}}(t | k, w, \lambda, p_i, \dots)$, représente l'évolution de la pression en fonction du temps, est obtenue en résolvant l'équation de diffusivité sous les conditions de :

1. L'état des pressions au début de l'essai.
2. L'état du puits.
3. L'hétérogénéité du réservoir.
4. Les limites du réservoir.

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

Le minimum de la somme des carrés des résidus \mathbf{S} est atteint lorsque le gradient s'annule (condition nécessaire).

Puisque le problème est formulé avec n paramètres, il y a donc n équations normales :

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{i=m} (p_{\text{mesuré}}(t_i) - p_{\text{calculé}}(t_i|k, w, \lambda, p_i, \dots)) * \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_i|k, w, \lambda, p_i, \dots)}{\partial k} &= 0 \\
 \sum_{i=1}^{i=m} (p_{\text{mesuré}}(t_i) - p_{\text{calculé}}(t_i|k, w, \lambda, p_i, \dots)) * \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_i|k, w, \lambda, p_i, \dots)}{\partial w} &= 0 \\
 \sum_{i=1}^{i=m} (p_{\text{mesuré}}(t_i) - p_{\text{calculé}}(t_i|k, w, \lambda, p_i, \dots)) * \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_i|k, w, \lambda, p_i, \dots)}{\partial \lambda} &= 0 \\
 \sum_{i=1}^{i=m} (p_{\text{mesuré}}(t_i) - p_{\text{calculé}}(t_i|k, w, \lambda, p_i, \dots)) * \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_i|k, w, \lambda, p_i, \dots)}{\partial p_i} &= 0 \\
 \cdot & \\
 \cdot &
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{c} \mathbf{n} \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

Écrivons ce système d'équation non linéaire sous forme abrégée. L'ensemble des arguments k, w, λ, \dots etc. peut être considéré comme un vecteur de dimension n.

$$\beta = \begin{bmatrix} k \\ w \\ \lambda \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{II-11}$$

De façon analogue, on utilise la matrice jacobienne

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

$$J(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{calculé}(t_1|\beta)}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial p_{calculé}(t_1|\beta)}{\partial \beta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial p_{calculé}(t_m|\beta)}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial p_{calculé}(t_m|\beta)}{\partial \beta_n} \end{bmatrix} \dots\dots\dots II-12$$

Et le vecteur des résidus

$$F(\beta) = \begin{bmatrix} p_{mesuré}(t_1) - p_{calculé}(t_1|\beta) \\ p_{mesuré}(t_2) - p_{calculé}(t_2|\beta) \\ p_{mesuré}(t_3) - p_{calculé}(t_3|\beta) \\ \vdots \\ p_{mesuré}(t_m) - p_{calculé}(t_m|\beta) \end{bmatrix} \dots\dots\dots II-13$$

Le système peut s'écrire sous une forme abrégée

$$J(\beta)^T * F(m) = 0 \dots\dots\dots II-14$$

Supposons qu'on a trouvé la k-ième approximation $\beta^k = (k^k, w^k, \lambda^k, \dots)$ d'une solution $\beta = (k, w, \lambda, \dots)$ du modèle et que la pression $p_{calculé}(t_i|\beta)$ soit continûment dérivable dans un certain domaine convexe qui contient β et β^k , le **développement de Taylor** autour de β^k donne:

$$p_{calculé}(t_i|\beta) \approx p_{calculé}(t_i|\beta^k) + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial p_{calculé}(t_i|\beta^k)}{\partial \beta_j} (\beta - \beta^k) \dots\dots\dots II-15$$

Alors le terme $F(\beta)$ devient :

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

$$F(\beta) = \begin{bmatrix} p_{\text{mesuré}}(t_1) - p_{\text{calculé}}(t_1|\beta) \\ p_{\text{mesuré}}(t_2) - p_{\text{calculé}}(t_2|\beta) \\ p_{\text{mesuré}}(t_3) - p_{\text{calculé}}(t_3|\beta) \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{\text{mesuré}}(t_m) - p_{\text{calculé}}(t_m|\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{\text{mesuré}}(t_1) - p_{\text{calculé}}(t_1|\beta^k) + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_1|\beta^k)}{\partial \beta_j} (\beta - \beta^k) \\ p_{\text{mesuré}}(t_2) - p_{\text{calculé}}(t_2|\beta^k) + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_2|\beta^k)}{\partial \beta_j} (\beta - \beta^k) \\ p_{\text{mesuré}}(t_3) - p_{\text{calculé}}(t_3|\beta^k) + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_3|\beta^k)}{\partial \beta_j} (\beta - \beta^k) \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{\text{mesuré}}(t_m) - p_{\text{calculé}}(t_m|\beta^k) + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_m|\beta^k)}{\partial \beta_j} (\beta - \beta^k) \end{bmatrix}$$

..... II-16

$$= \begin{bmatrix} p_{\text{mesuré}}(t_1) - p_{\text{calculé}}(t_1|\beta^k) \\ p_{\text{mesuré}}(t_2) - p_{\text{calculé}}(t_2|\beta^k) \\ p_{\text{mesuré}}(t_3) - p_{\text{calculé}}(t_3|\beta^k) \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{\text{mesuré}}(t_m) - p_{\text{calculé}}(t_m|\beta^k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_1|\beta^k)}{\partial \beta_j} (\beta - \beta^k) \\ \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_2|\beta^k)}{\partial \beta_j} (\beta - \beta^k) \\ \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_3|\beta^k)}{\partial \beta_j} (\beta - \beta^k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial p_{\text{calculé}}(t_m|\beta^k)}{\partial \beta_j} (\beta - \beta^k) \end{bmatrix}$$

..... II-17

Écrivons ce système sous forme abrégée :

$$F(\beta) = F(\beta^k) + J(\beta) * (\beta - \beta^k) \dots \dots \dots \text{II-18}$$

Les formules (II-13) et (II-17) donnent :

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

$$J(\beta)^T * F(m) = J(\beta)^T * (F(\beta^k) + J(\beta) * (\beta - \beta^k)) = 0 \dots\dots\dots II-19$$

$$J(\beta)^T * F(\beta^k) + J(\beta)^T J(\beta) * (\beta - \beta^k) = 0 \dots\dots\dots II-20$$

Par conséquent,

$$\beta^{k+1} = \beta^k + (J(\beta^k)^T J(\beta^k))^{-1} * J(\beta^k)^T * F(\beta^k) \dots\dots\dots II-21$$

(Méthode de Newton).

On prend pour approximation initiale β^0 les valeurs déterminées lors de la phase d'interprétation.

Algorithme de newton :

1. étant donné ε , un critère d'arrêt
2. étant donné N, le nombre maximal d'itérations
3. étant donné β^0 , une valeur initiale de la solution
4. résoudre $J(\beta^k)^T * J(\beta^k) * \Delta\beta = -J(\beta^k)^T F(\beta^k)$
5. calculer β^{k+1} , $\beta^{k+1} = \beta^k + \Delta\beta$
6. si $\frac{\|\beta^{k+1} - \beta^k\|}{\|\beta^{k+1}\|} < \varepsilon$:
 - convergence atteinte
 - écrire la solution β^{k+1}
 - arrêt
7. si le nombre maximal d'itération N est atteint :
 - convergence non atteinte en N itérations
 - arrêt
8. retour à l'étape 4.

II.4 CONCLUSION

Le processus d'identification des paramètres du réservoir est itératif. L'identification du jeu de paramètres caractéristiques du modèle physique est obtenue par minimisation de l'écart entre le jeu de donnée synthétique générée par le modèle numérique et le jeu de données réelles.

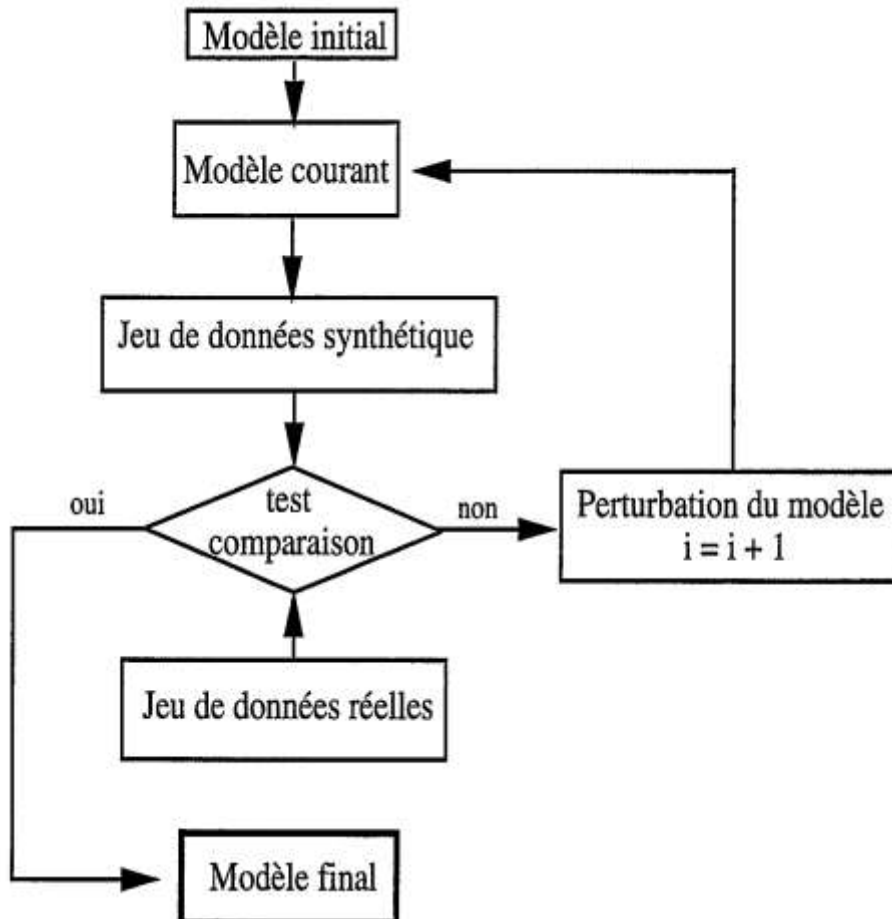


Figure II-3 : Schémas d'identification de modèle de réservoir

Un tel processus d'inversion présente toujours le problème de non unicité du modèle final obtenu, même si la convergence est assurée du point de vue mathématique et la solution ainsi peut être dépendante du modèle initial choisi. Par conséquent, un choix judicieux du modèle initial permet d'atténuer ce problème en réduisant le domaine sur lequel on cherche les solutions possibles.

Ces dernières années, les techniques d'interprétation des essais de puits ont suivi une évolution très rapide. À côté des méthodes d'interprétation dites conventionnelles, souvent assimilées aux analyses semi-log, les méthodes des

II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES ET LE MODELE DU RESERVOIR

planches de courbes types permettent de résoudre le problème de la non unicité des solutions par un meilleur choix du modèle initial basé sur le diagnostic de la réponse impulsionnelle pour localiser les différents régimes apparus au cours du test.

CHAPITRE III : THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

III.1 CONVOLUTION

Les équations différentielles aux dérivées partielles sont omniprésentes dans les sciences. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasi-totalité des problèmes.

Trois catégories importantes d'EDP sont les équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes du second-ordre dites elliptiques, hyperboliques et paraboliques.

La filtration du pétrole et des gaz dans le milieu poreux nous conduit à l'étude de l'équation de type parabolique (équation de diffusivité) qui décrit l'évolution de la pression dans le réservoir en fonction du temps et de la distance au puits.

La résolution explicite des équations différentielles, à l'aide des fonctions usuelles, est rarement possible. A l'heure actuelle le calcul opérationnel, introduite par Heaviside [75], est l'un des domaines importants de l'analyse mathématique.

La transformation de Laplace a été appliquée aux problèmes des écoulements monophasiques plans à symétrie radiale circulaire par A.F van Everdingen et Hurst en 1949. Cette transformation permet d'éliminer une des variables, En particulier, une équation aux dérivées partielles à deux variables est transformée en une équation différentielle ordinaire : c'est ce qui fait tout l'intérêt de cette méthode.

Lors de la résolution des équations différentielles par la méthode du calcul opérationnel on se sert souvent du

Théorème de convolution : si $F_1(p)$ et $F_2(p)$ sont les images des fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ alors $F_1(p) F_2(p)$ est l'image de la fonction

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots III-1$$

L'intégrale de convolution est basée sur le principe de superposition introduit par Duhamel 1833 pendant son travail sur la propagation de la chaleur dans les solides soumissent à une température variable.

En réservoir engineering l'intégrale de convolution est une représentation mathématique de la perte de charge dans le réservoir par le débit sortie et la réponse impulsionnelle de réservoir (chapitre I):

$$\Delta p(t) = \int_0^t \frac{dq(\tau)}{d\tau} \Delta p_u(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots III-2$$

Dans cette section, nous présentons un traitement fondamental de la convolution et ses applications dans le domaine des essais de puits parce qu'il a été employé couramment dans le domaine pétrolière pour dériver des solutions pour des équations différentielles partielles avec des conditions aux limites dépendant du temps ex : test multi-rate.

III.1.1 : Produit de convolution

Dans l'analyse des systèmes linéaires, les réponses temporelles sont souvent étudiées en passant par la résolution des équations différentielles ou l'utilisation de la transformation de Laplace; c'est-à-dire que l'analyse et la résolution se font dans un espace autre que le domaine temporel.

Or, comme on le verra à l'aide d'un diagramme, le produit de convolution permet de calculer la réponse $y(t)$ d'un système à un signal quelconque $x(t)$ en restant dans l'espace de temps. Ceci est très important pour les applications temps réel réalisées à l'aide d'un processeur numérique par exemple.

Considérons pour cela un système linéaire et temporellement invariant auquel on applique une impulsion de Dirac (t) . La réponse à ce signal est la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système (figure III.1). Elle représente ce dernier de manière complète, comme le font la fonction de transfert $H(s)$ ou l'équation différentielle.

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

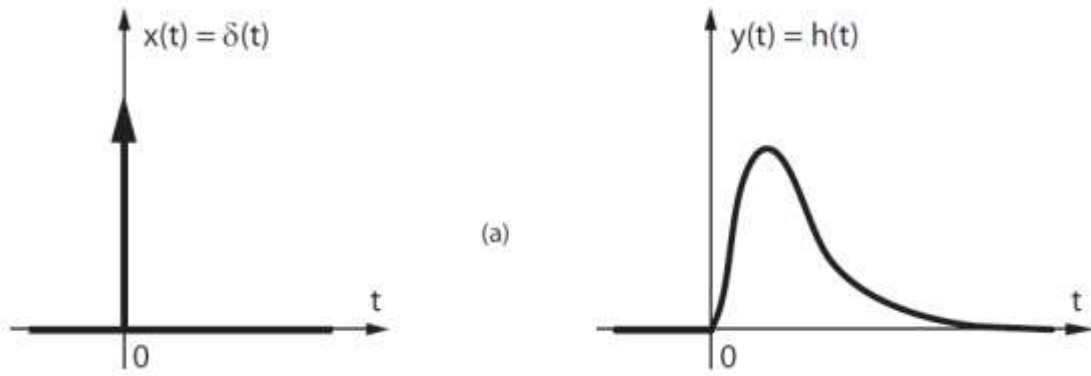


Figure III-1: La réponse de système à une impulsion

Puisque le système est temporellement invariant, le décalage de l'impulsion d'une valeur θ , entraînera le même décalage de la réponse impulsionnelle qui vaut alors $h(t - \theta)$ (figure III.2).

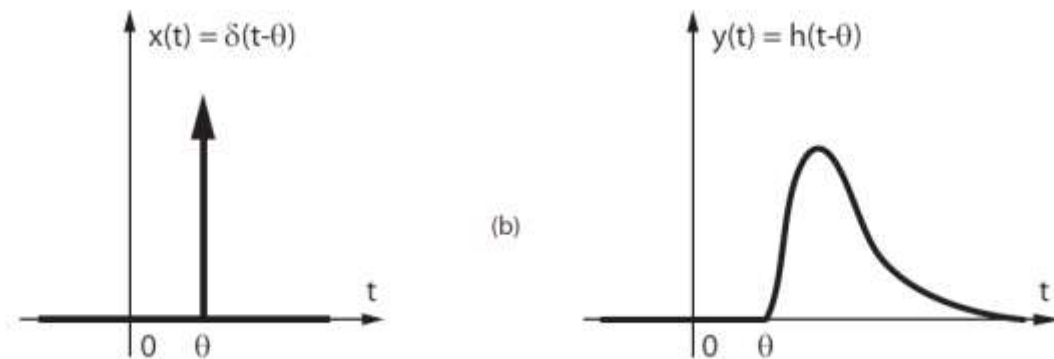


Figure III-2: La réponse de système à une impulsion retardé

Comme le système est également linéaire, une modification de l'amplitude de l'impulsion de Dirac entraînera une modification de l'amplitude de la réponse impulsionnelle : à un signal d'entrée $x(\theta) * \delta(t - \theta)$ le système répondra par $x(\theta) * h(t - \theta)$. (Figure III.3)

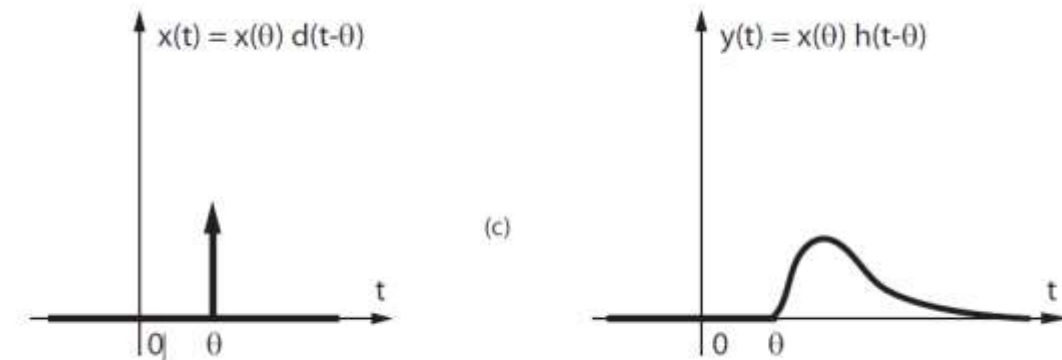


Figure III-3: la réponse de système à un signal d'entrée $x(\theta) * \delta(t - \theta)$

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

On ne connaît que signal d'entrée $x(t)$ peut être décrit à l'aide d'une somme d'impulsion de Dirac.

$$x(t) = \int_0^t x(\tau) \delta(t - \tau) \dots\dots\dots III-3$$

Donc, comme le système est linéaire, la réponse à cette somme d'impulsions est la somme des réponses impulsionnelles (figure III.4) :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau)$$

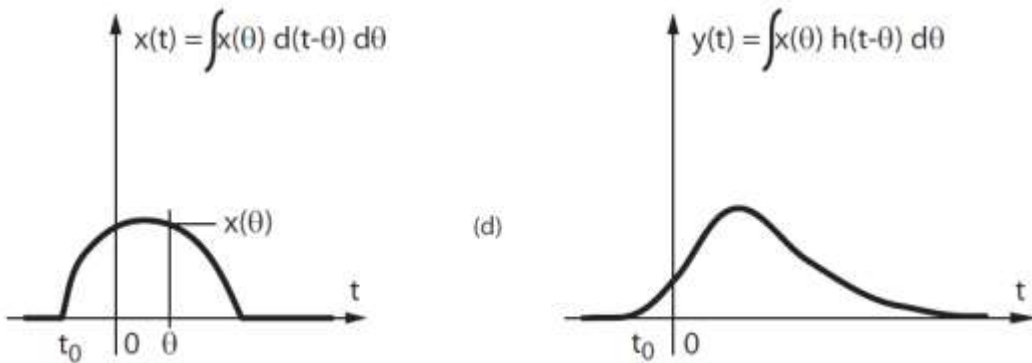


Figure III-4: la réponse de système à un signal d'entrée $x(t)$

Ce résultat est important parce qu'il permet de calculer directement la réponse $y(t)$ à partir du signal d'entrée $x(t)$ et la représentation du système $h(t)$. Cette expression porte le nom de produit de convolution.

Un changement de variable permet de montrer que le produit de convolution est commutatif. On a alors :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau \dots\dots\dots III-4$$

Le produit de convolution est souvent écrit sous la forme symbolique suivante :

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

III.1.2 Convolution numérique

Comme on l'a déjà dit, le produit de convolution est nécessaire pour calculer une réponse temporelle sans devoir passer par la résolution des équations différentielles ; la connaissance de la réponse impulsionnelle $h(t)$ suffit. Si cette démarche est peu utilisée, c'est simplement parce que le calcul analytique de cette intégrale est souvent peu aisé.

Dans le cas où le calcul analytique de l'intégrale est difficile où bien on n'a pas une expression analytique de la réponse impulsionnelle de système, on doit alors effectuer un calcul numérique de la réponse de système, il suffit pour cela de remplacer l'intégrale par une somme algébrique.

En considérant que les signaux temporels $x(t)$ et $h(t)$ sont échantillonnés avec une période Δt pendant une durée finie allant de 0 à t_{\max} , le calcul de $y(t)$ peut alors se faire comme suit :

$$y(n) = \sum_0^{i=k_{\max}} x[n-k]h[k]\Delta t \dots\dots\dots III-5$$

Ce qui, algorithmiquement, se traduit par les quelques lignes de code (langage pascal) suivantes :

```

deltaT = tmax / kmax ;
for n = 0 to kmax
do begin
convol = 0.0 ;
for k = 0 to kmax
do begin
convol = convol + x[n-k] * h[k] ;
end ;
y[n] = convol * deltaT ;
end ;
    
```


III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

Ex :

Dans cet exemple on applique la convolution numérique à notre système (réservoir/puits) pour calculer la perte de charge $\Delta p(t)$ à partir d'un signal $q(t)$ appliqué au réservoir décrit par sa réponse impulsionnelle $\Delta p_u(t)$.

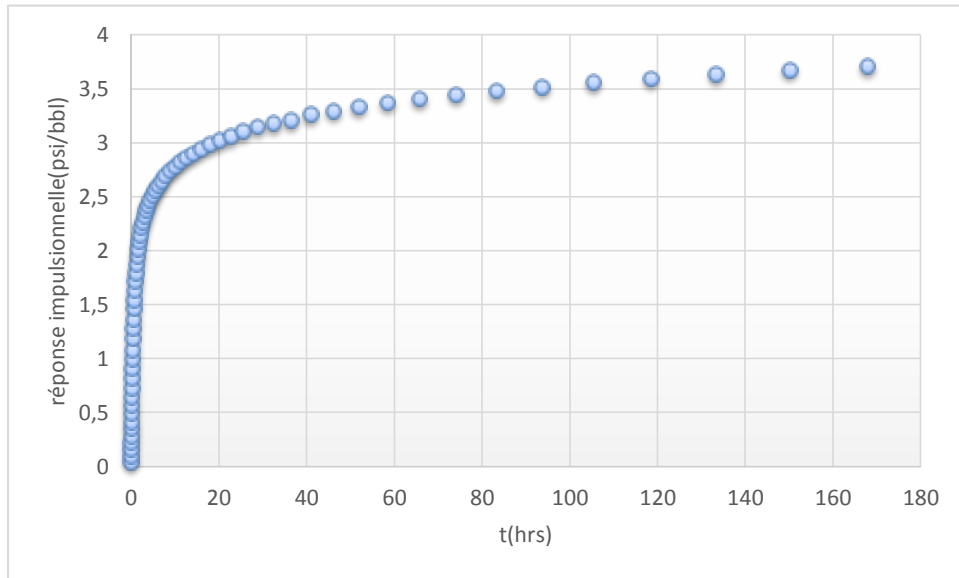


Figure III-5: Réponse impulsionnelle de réservoir

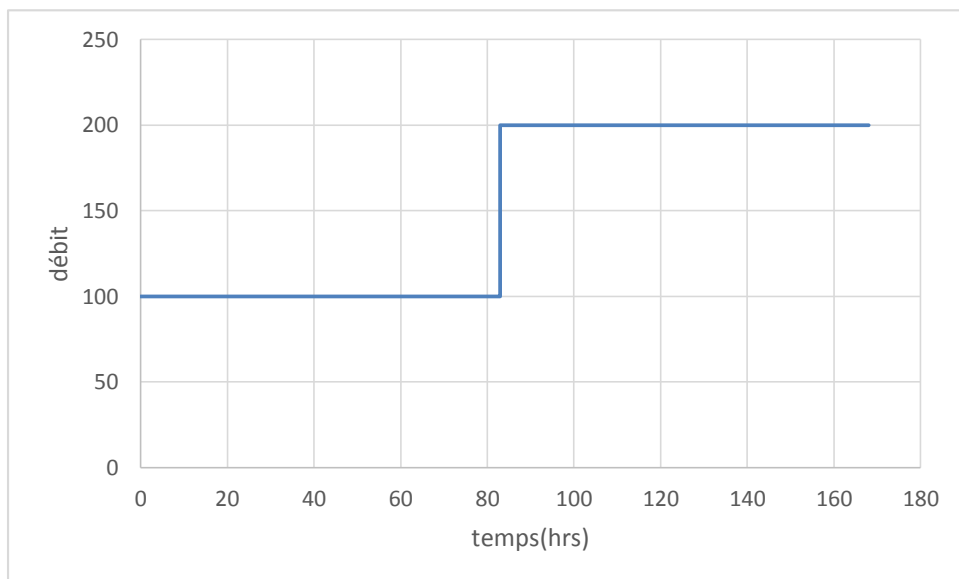


Figure III-6: historique de débit (signal d'entrée)

En utilisant le produit de convolution numérique :

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

$$y(n) = \sum_0^{i=k_{\max}} x[n-k]h[k]\Delta t$$

Avec :

$$x(t) = q(t)$$

Et

$$h(t) = \frac{d}{dt} \Delta p_u(t)$$

La réponse de réservoir est représentée sur le graphe ci-dessous.

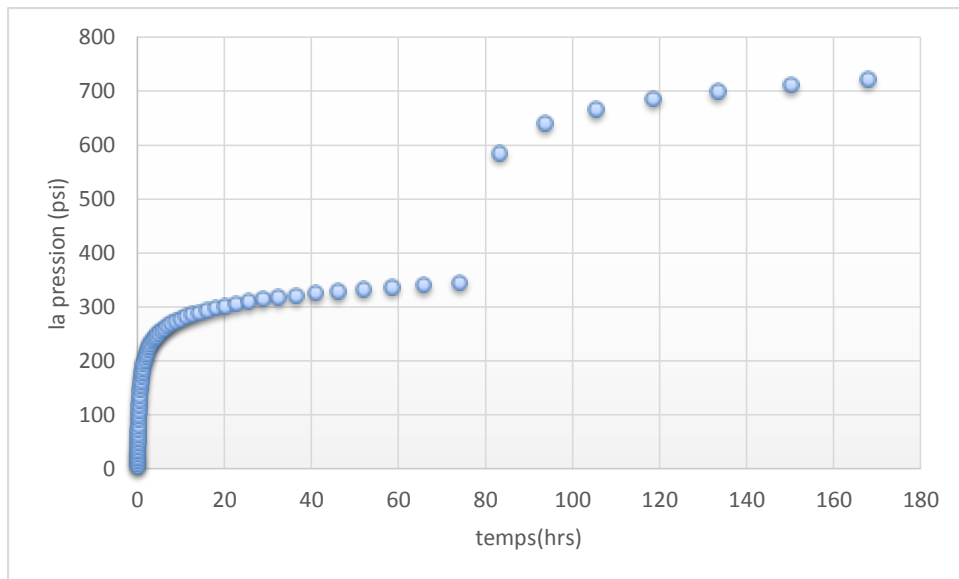


Figure III-7: Evolution de la perte de charge

On remarque que cette méthode nous permettra de faire des calculs de l'output $y(t)$ mais nous ne pouvons pas faire le calcul inverse du problème (déconvolution) pour cela on doit procéder à une représentation matricielle de problème.

L'application des matrices présente plusieurs avantages, rendant plus facile la mise en évidence des principes de nombreux calculs. En outre, les calculateurs puissants actuels réalisent sans peine les opérations matricielles principales. Dans ce sens, on recherchera souvent à discrétiser l'intégrale dans une forme traitable par les méthodes d'algèbre linéaire. Nous supposons d'abord que les signaux

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

temporels $x(t)$ et $h(t)$ sont échantillonnés avec une période Δt pendant une durée finie allant de 0 à t_{max} , le calcul de $y(t_i)$ peut alors se faire comme suit :

$$y(t_i) = \int_0^{t_i} x(\tau)h(t_i - \tau)d\tau \dots\dots\dots III-6$$

Où bien

$$y(t_i) = \int_0^{t_i} x(\tau)h_i(\tau)d\tau \dots\dots\dots III-7$$

Avec

$$h_i(\tau) = h(t_i - \tau) \dots\dots\dots III-8$$

On utilise la méthode de point milieu pour calculer cette intégrale numériquement.

Nous divisons l'intervalle $[0, t]$ en N sous-intervalles, chaque échantillonnage est fait au milieu de chaque intervalle.

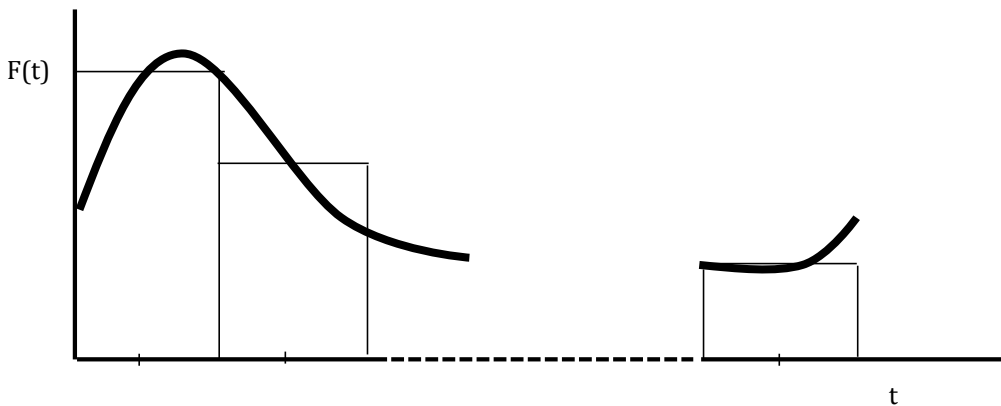


Figure III-8: Descriptisation du signal par la méthode de point milieu

Les point sont données par :

$$t_j = \frac{\Delta t}{2} + (j-1) * \Delta t \dots\dots\dots III-9$$

Avec :

$$\Delta t = \frac{t}{n} \dots\dots\dots III-10$$

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

Le produit de convolution devient :

$$y(t_i) = \sum_{j=1}^n x(t_j)h_i(t_j)\Delta t \dots\dots\dots III-11$$

Sous forme matricielle :

$$Y = HX \dots\dots\dots III-12$$

Avec :

$$Y = \begin{pmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ y(t_3) \\ \vdots \\ y(t_n) \end{pmatrix} \dots\dots\dots III-13$$

$$H_{i,j} = h_i(t_j)\Delta t \begin{pmatrix} i = 1,2,3,\dots, m \\ j = 1,2,3,\dots, n \end{pmatrix} \dots\dots\dots III-14$$

$$X = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ x(t_3) \\ \vdots \\ x(t_n) \end{pmatrix} \dots\dots\dots III-15$$

III.2 DECONVOLUTION

Ces dernières années, des techniques de déconvolution ont été utilisées de plus en plus en interprétation des essais du puits. La déconvolution est un procédé algorithmique destiné à inverser les effets de la convolution. Le concept de déconvolution est largement utilisé en traitement du signal et traitement d'image, notamment en microscopie et astronomie.

L'objectif de la déconvolution est de déterminer la solution h d'une équation de la forme :

$$x * h = y \dots\dots\dots III-16$$

Dans notre cas :

$$x = q(t) \dots\dots\dots III-17$$

$$h = \frac{d}{dt} \Delta p_u(t) \dots\dots\dots III-18$$

$$y = \Delta p(t) \dots\dots\dots III-19$$

La déconvolution nous permet à reconstruire une réaction équivalente du réservoir à un débit constant pour tout historique de production. Par exemple, si nous produisons pendant 100 hrs à débit constant et réaliser ultérieurement un build-up de 24 hrs, l'ingénieur ne peut utiliser que les mesure de 24 hrs pour interpréter le test de puits, mais en utilisant la déconvolution, nous pouvons calculer la réponse impulsionnelle de réservoir pendant 124 hrs. Malheureusement, l'énoncé de la déconvolution (solution de l'équation intégrale de Volterra) est un problème fortement mal posé suivant le principe d'Hadamard, puisque lorsqu'on a affaire à un processus physique d'acquisition, la mesure h est souvent entachée d'un bruit de mesure ε :

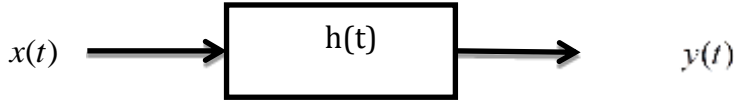
$$(x * h) + \varepsilon = y \dots\dots\dots III-20$$

Par conséquent, un grand nombre de méthode de régularisation tel que la méthode de Tikhonov a été utilisée dans les techniques d'optimisation pour la déconvolution.

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

Dans cette section, nous allons présenter l'application de l'inverse analytique et numérique de déconvolution et l'amélioration de ces algorithmes lors de la présence du bruit au niveau des mesures de signal en utilisant le filtrage.

III.2.1 Déconvolution analytique



Considérons pour cela un système linéaire et temporellement invariant auquel, on applique une impulsion de $x(t)$. La réponse à ce signal est $y(t)$ donné par la relation suivante :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau \dots\dots\dots III-21$$

Dans le domaine fréquentiel :

$$\bar{y}(s) = \bar{x}(s)\bar{h}(s) \dots\dots\dots III-22$$

La réponse impulsionnelle $h(t)$ peut être trouvée facilement en utilisant l'équation III-22 :

$$\bar{h}(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{y}(s)} \dots\dots\dots III-23$$

On remplace $\frac{1}{\bar{y}(s)}$ par $\bar{f}(s)$ pour faciliter le calcul.

Alors :

$$h(t) = \int_0^t x(\tau)f(t - \tau)d\tau \dots\dots\dots III-24$$

Avec :

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{\bar{y}(s)}\right) \dots\dots\dots III-25$$

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

Un certain nombre d'algorithmes de déconvolution direct peut être utilisé pour inverser l'effet de convolution si le signal d'excitation est remplacé des fonctions approximatives appropriées ex : polynôme, exponentiel ...etc.

Cas polynôme :

$$x(t) = \beta t^k \dots\dots\dots III-26$$

Avec :

$$\beta > 0$$

$$k > -1$$

En utilisant le transformé de Laplace sur l'équation III-26, on obtient :

$$\bar{x}(s) = \beta s^{-(k+1)} \Gamma(k+1) \dots\dots\dots III-27$$

Portant cette formule dans la formule 1 nous obtenons la relation suivante :

$$\bar{y}(s) = \beta s^{-(k+1)} \Gamma(k+1) \bar{h}(s) \dots\dots\dots III-28$$

Alors la réponse impulsionnelle dans le domaine fréquentiel est donné par :

$$\bar{h}(s) = \frac{1}{\beta \Gamma(k+1)} s^{k+1} y(s)$$

Dans le domaine temporel:

$$h(t) = \frac{1}{\beta \Gamma(k+1)} L^{-1}(\bar{y}(s) s^{k+1}) \dots\dots\dots III-29$$

Dans le cas spécial : k est un entier.

$$h(t) = \frac{1}{\beta n!} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} y(t) \dots\dots\dots III-30$$

Cas exponentiel :

$$x(t) = 1 - e^{-\beta t} \dots\dots\dots III-31$$

Avec :

$$\beta > 0$$

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

En utilisant la transformée de Laplace sur l'équation III-31, on obtient :

$$\bar{x}(s) = \frac{\beta}{s(\beta + s)} \dots\dots\dots III-32$$

Portant cette expression dans la formule III-22, nous obtenons la relation suivante :

$$\bar{y}(s) = \frac{\beta}{s(\beta + s)} \bar{h}(s) \dots\dots\dots III-33$$

Alors la réponse impulsionnelle dans le domaine fréquentiel est donné par :

$$\bar{h}(s) = y(s) \left(s + \frac{s^2}{\beta} \right) \dots\dots\dots III-34$$

Dans le domaine temporel :

$$h(t) = L^{-1} \left[y(s) \left(s + \frac{s^2}{\beta} \right) \right] = y'(t) + \frac{1}{\beta} y''(t) \dots\dots\dots III-35$$

On remarque que la déconvolution analytique est applicable seulement pour des cas spécial d'excitation (historique de débit).

L'opération de déconvolution analytique sera rendue plus difficile par la présence de bruit, il est alors nécessaire d'inclure la connaissance statistique du bruit et du signal pour améliorer le résultat, en utilisant par exemple le filtrage de winner pour éliminer ou atténuer une partie des bruits dans un signal.

III.2.2 Déconvolution numérique :

Puisqu'il n'existe pas de relation générale analytique pour n'importe quel signal d'entrée $x(t)$ (historique de débit), il faudra donc recourir aux méthodes numériques. Plusieurs algorithmes de déconvolution ont été présentés dans la littérature dont certains basés sur des méthodes d'interpolation et d'intégration et d'autres utilisent les techniques de déconvolution dans le domaine fréquentiel. Dans le cas général, on peut aborder la déconvolution numérique par deux groupes [9] :

1. déconvolution en domaine temporel.

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

2. Déconvolution en domaine fréquentiel.

III.2.2.1 : Déconvolution en domaine temporel

Ces méthodes sont basées sur la discrétisation de produit de convolution en utilisant les fonctions d'interpolation pour le débit et la réponse impulsionnelle, puis on procède à la résolution du système linéaire établis.

Soit donné deux fonction d'interpolation θ_j et ψ_k pour le débit et la réponse impulsionnelle respectivement.

$$x(t) = \sum_j q_j \theta_j(t) \dots\dots\dots III-36$$

$$h(t) = \sum_k h_k \psi_k(t) \dots\dots\dots III-37$$

Avec :

q_j : Débit mesuré à l'instant t_j

h_k : La valeur de la réponse impulsionnelle à l'instant t_j

La substitution des formules III-36 et III-37 dans la formule (produit de convolution) donne le système linéaire suivant :

$$X = QH \dots\dots\dots III-38$$

Avec :

$$X = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ x(t_3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x(t_n) \end{pmatrix} \dots\dots\dots III-39$$

Et

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

$$H = \begin{pmatrix} h(t_1) \\ h(t_2) \\ h(t_3) \\ \vdots \\ h(t_n) \end{pmatrix} \dots\dots\dots III-40$$

$$Q_{ik} = \sum_j q_j \{ \theta_j * \psi_k \}(t_i) \dots\dots\dots III-41$$

Le système établit peut être résolu directement s'il est inversible bien conditionné. Mais en pratique, la matrice Q souvent mal conditionnée et les mesures du signal d'entrée et de sortie sont entachés d'erreurs. Ces deux facteurs rendent les résultats obtenus par la résolution directe du problème non interprétable, ce qui nous amène à utiliser la méthode de régularisation pour éliminer l'effet des erreurs sur le résultat de la déconvolution.

III.2.2.2 Déconvolution en domaine fréquentiel :

En appliquant la transformée de Laplace aux deux côté de l'équation de convolution, on obtient la relation suivante :

$$\bar{y} = \bar{x}\bar{h} \dots\dots\dots III-42$$

Alors, la réponse en domaine fréquentiel est donnée par :

$$\bar{h} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \dots\dots\dots III-43$$

La valeur de \bar{y} et \bar{x} sont obtenues par la transformée de Laplace de la fonction d'interpolation de y et de x respectivement.

Finalement pour calculer la valeur de la réponse impulsionnelle en domaine temporel on peut employer une inversion numérique de Laplace (algorithme de Stehfest).

III. THEORIE SUR LA CONVOLUTION ET LA DECONVOLUTION

Méthode de Stehfest :

$$f(t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^N V_j F\left(\frac{j \ln(2)}{t}\right) \dots\dots\dots III-44$$

$$V_i = (-1)^{\frac{N}{2}+1} \sum_{k=\lceil \frac{i+1}{2} \rceil}^{\min(i, \frac{N}{2})} \frac{k^{\frac{N}{2}} (2k)!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!} \dots\dots\dots III-45$$

$N = 10$ (simple précision)

$$V_1 = \frac{1}{12}$$

$$V_2 = -\frac{385}{12}$$

$$V_3 = 1279$$

$$V_4 = -468713$$

$$V_5 = 5054656$$

$$V_6 = -4739152$$

$$V_7 = 11277353$$

$$V_8 = -10202153$$

$$V_9 = 3281252$$

$$V_{10} = -656252$$

Méthode 1 (splines cubique) :

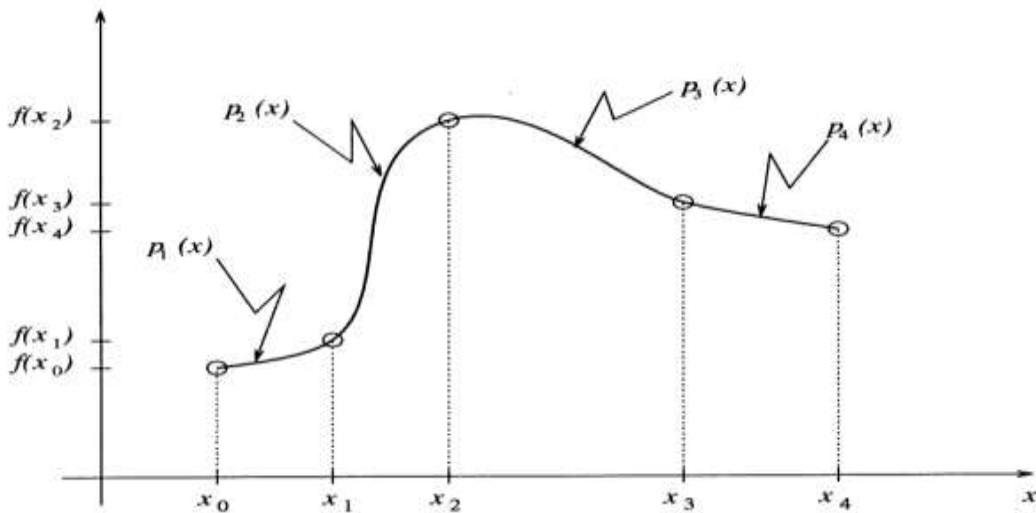


Figure III-9: interpolation par des splines cubique

Cette méthode consiste à relier chaque paire de points par un polynôme de degré 3.

Soit f_1, f_2, f_3, \dots représentent les valeurs d'un tel signal échantillonné (excitation, réponse). En utilisant la fonction de spline cubique à chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ on obtient :

$$f_i(t) = f_{i-1} + a_i(t - t_{i-1}) + b_i(t - t_{i-1})^2 + c_i(t - t_{i-1})^3 \dots \dots \dots \text{III-46}$$

Alors la fonction d'interpolation de signal f peut être écrite sous forme :

$$f(t) = \sum_{i=2}^n f_i(t)[u(t - t_{i-1}) - u(t - t_i)] \dots \dots \dots \text{III-47}$$

Où

$u(t)$: représente la fonction de Heaviside.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Les coefficients a_i, b_i, c_i sont déterminés par la condition sur la continuité de la fonction f et son dérivé.

Méthode 2 (morceaux linéaire) :

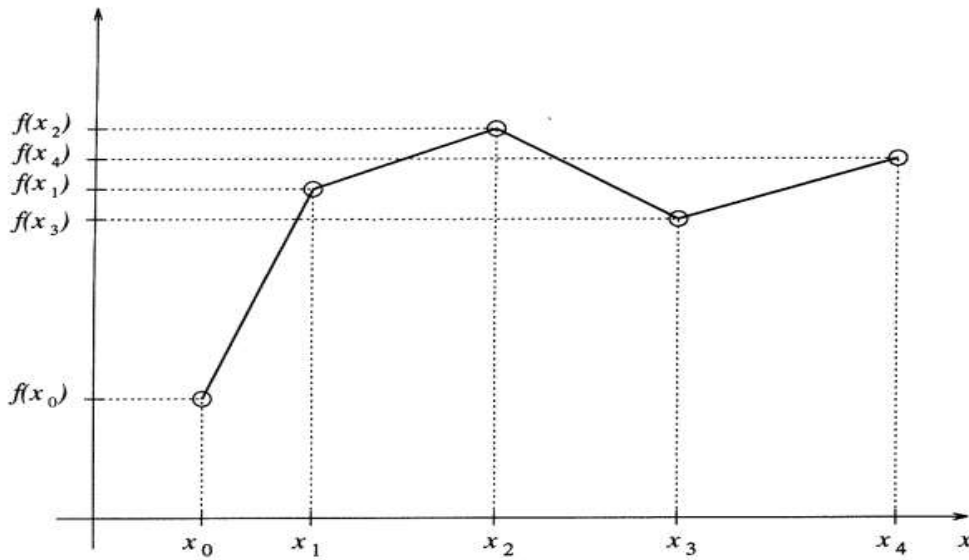


Figure III-10: Interpolation par des morceaux linéaires

Cette méthode consiste à relier chaque paire de point par un segment droite (polynôme de degré 1).

En chaque intervalle de mesure $t_{i-1} < t < t_i$ la fonction f s'écrit sous la forme :

$$f_i(t) = f_{i-1} + a_i(t - t_{i-1}) \dots \dots \dots \text{III-48}$$

Alors la fonction d'interpolation de signal f peut être écrite sous forme :

$$f(t) = \sum_{i=2}^n f_i(t) [u(t - t_{i-1}) - u(t - t_i)] \dots \dots \dots \text{III-49}$$

Avec :

$$a_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \dots \dots \dots \text{III-50}$$

Ex :

Dans cet exemple nous allons appliquer la méthode de déconvolution sur un test multi-rate afin d'entrer la réponse impulsionnelle de réservoir (système).

Théorie sur la convolution et la déconvolution

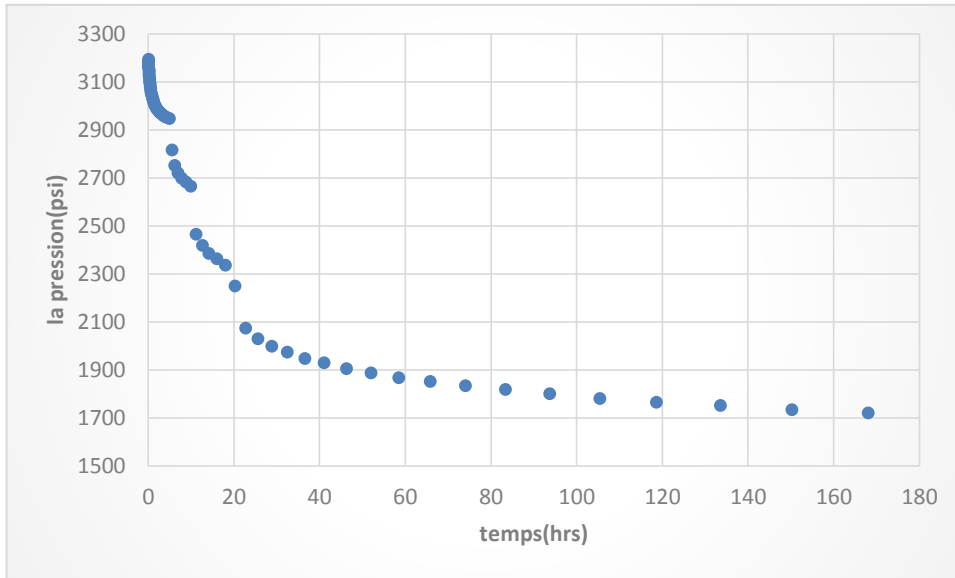


Figure III-11: Historique de la pression

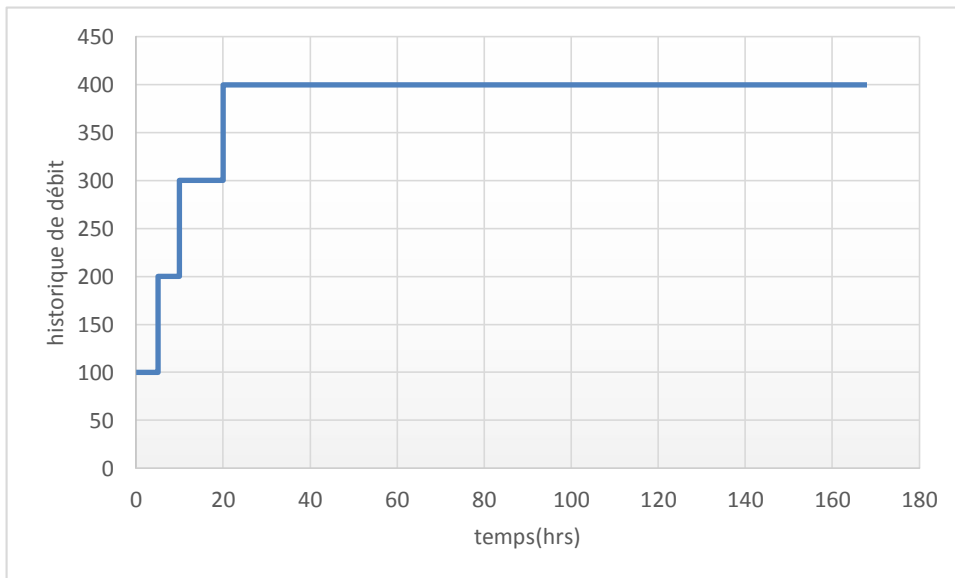


Figure III-12: Historique de débit

Comme le test multi-rate est une succession des débits constants pendant une période de temps, on va utiliser la fonction d'interpolation linéaire pour la discrétisation de l'équation de convolution.

Le résultat de la déconvolution est présenté par le graphe suivant :

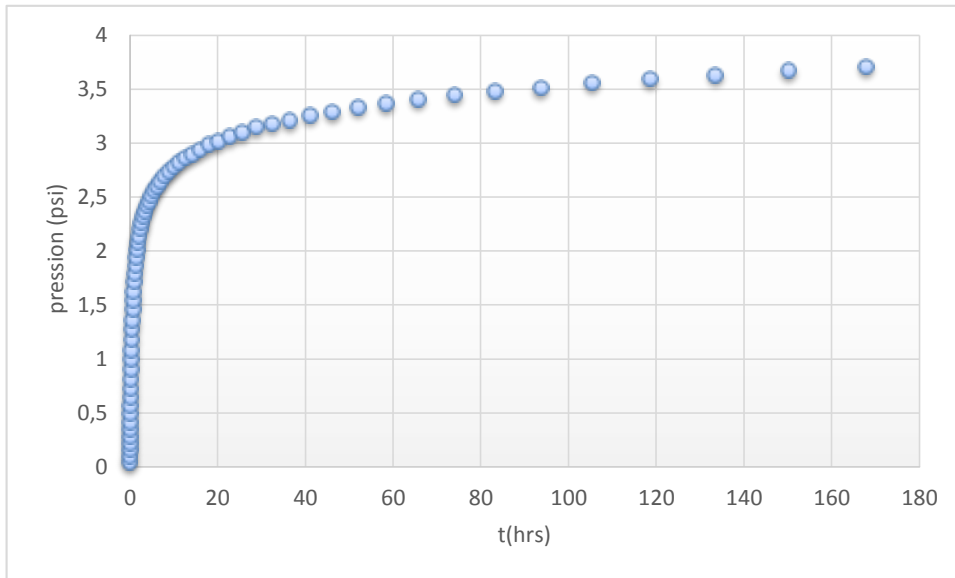


Figure III-13: Réponse impulsionnelle de réservoir (puits à débit constant)

III.3 CONCLUSION

On peut décrire un système linéaire par sa réponse à une percussion ou impulsion, c'est-à-dire une excitation intense pendant une courte durée. Toute excitation peut être considérée comme une succession d'impulsions de faible intensité. Du fait de la linéarité, la réponse est alors une somme de réponses impulsionnelles de faible intensité décalées dans le temps. Ce raisonnement permet d'explicitier dans le domaine temporel la réponse d'un système linéaire à une excitation quelconque, au prix de calculs généralement laborieux.

Cette somme étant utilisée pour décrire l'excitation $f(t)$, le remplacement de l'impulsion par la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système linéaire permet de calculer la réponse $x(t)$ selon la formule de Duhamel qui renvoie à la notion mathématique de convolution :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t x(t)h(t - \tau)d\tau \dots\dots\dots III-51$$

CHAPITRE IV : LA REGULARISATION : LA METHODE DE TIKHONOV

IV. Application de la régularisation

IV.1 INTRODUCTION

Les scientifiques et les ingénieurs essaient toujours d'établir une relation mathématique reliant les paramètres physiques qu'on appelle paramètre du modèle « m », avec une certaine observation « d ».

La relation générale est donnée par :

$$G(m) = d \dots\dots\dots IV-1$$

G peut être une équation différentielle ordinaire, équation différentielle aux dérivées partielles ou une équation intégrale ex : convolution, dans le cas discret G peut être une équation algébrique linéaire ou non linéaire.

« m » est l'ensembles des paramètre qui caractérisent le système de nombre fini.

« d » peut être fonction de temps et/ou de l'espace, ou peut être une collection des observations discrètes. Cette collection des observations contient toujours des perturbations venant par les instruments de lecture utilisées.

On distingue trois problèmes à partir de cette équation :

1. Le problème direct : trouver le résultat ou bien le vecteur « d » à partir du modèle donné.
2. Le problème inverse : trouver le modèle « m » à partir de la collection des observations d.
3. Identification de système : trouver la fonction « G » à partir des paramètres m et de collection des résultats « d ».

Dans notre cas, nous nous intéressons seulement à chercher les paramètres du modèle « m » qui peuvent être des quantités physiques (la densité, la perméabilité, la capacité...) ou bien des constantes qui définissent le processus physique. Ainsi, on peut exprimer le modèle par un vecteur « m » de dimension « n » et d'autre part, nous avons un nombre fini de data ou bien d'observations « d » que l'on peut exprimer par un vecteur « d » de dimension « m ». Dans ce dernier cas, le problème est dit : **problème inverse discret, ou**

IV. Application de la régularisation

alors : problème inverse continue, dans le cas où le modèle est les data sont des fonctions du temps et de l'espace.

Le problème est dit correctement posé s'il possède les propriétés suivantes :

1. Existence de la solution.
2. Unicité de la solution.
3. La stabilité : c'est-à-dire qu'une variation infinitésimale du second membre ne vas pas perturber la solution plus que de manière infinitésimale.

Les problèmes qui ne possèdent pas l'une de ces propriétés sont appelés problèmes mal-posés.

En réservoir engineering, les essais du puits représentent l'un des problèmes inverse dans lequel on tente à déterminer les caractéristiques du réservoir (k, w, λ, \dots) à partir des enregistrements de la pression et du débit. Le schéma d'interprétation moderne (voir chapitre II), nous permettra de résoudre le problème de non unicité des solutions, mais la stabilité reste encore posée pendant la phase de la Déconvolution.

IV.2 ÉTUDE DE LA STABILITE

D'après le principe de superposition (voir chapitre I) l'entrée (débit) $q(t)$ et la sortie $\Delta p(t)$ ($\Delta p(t) = p_i - p(t)$: perte de charge dans le réservoir) sont reliés par un produit de convolution (principe de Duhamel) :

$$\Delta p(t) = \int_0^t q(t-\tau) \Delta p_u(\tau) \dots \dots \dots IV-2$$

Notre objectif est d'inverser les effets de superposition afin d'extraire la réponse impulsionnelle du système.

La méthode de déconvolution décrite dans le chapitre II nous permettra de calculer cette réponse en utilisant une inversion numérique du système linéaire suivant :

IV. Application de la régularisation

$$\Delta p = Q \Delta p_u \dots\dots\dots IV-3$$

Considérons ce système linéaire et notons Δp_u (réponse impulsionnelle) la solution exacte et Δp_u^* la solution approximative obtenue en résolvant l'équation IV-3. Ces vecteurs devraient être près l'un de l'autre, c'est-à-dire la norme de l'erreur :

$$\|e\| = \|\Delta p_u - \Delta p_u^*\| \dots\dots\dots IV-4$$

Soit petite si l'erreur d'observation $\|\Delta p\|$ est petite (mais ce n'est toujours le cas).

Définissons le résidu par :

$$r = \Delta p - Q \Delta p_u^* \dots\dots\dots IV-5$$

On a alors :

$$r = \Delta p - Q \Delta p_u^* = Q \Delta p_u - Q \Delta p_u^* = Q(\Delta p_u - \Delta p_u^*) = Qe \dots\dots\dots IV-6$$

Ce qui signifie que $e = Q^{-1}r$.

Si on utilise des normes vectorielles et matricielles compatibles, on a en vertu de la relation précédente :

$$\|e\| \leq \|Q^{-1}\| \|r\| \dots\dots\dots IV-7$$

De façon analogue, puisque $Qe = r$:

$$\|r\| \leq \|Q\| \|e\| \dots\dots\dots IV-8$$

Qui peut s'écrire :

$$\frac{\|r\|}{\|Q\|} \leq \|e\| \dots\dots\dots IV-9$$

En regroupant les relations IV.7 et IV.9, on obtient :

IV. Application de la régularisation

$$\frac{\|r\|}{\|Q\|} \leq \|Q^{-1}\| \|r\| \dots\dots\dots IV-10$$

Par ailleurs, en refaisant le même raisonnement avec les égalités $Q\Delta p_u = \Delta p$ et $\Delta p_u = Q^{-1}\Delta p$, on trouve :

$$\frac{\|\Delta p\|}{\|Q\|} \leq \|Q^{-1}\| \|\Delta p\| \dots\dots\dots IV-11$$

Après avoir inversé cette inégalité, on trouve :

$$\frac{1}{\|Q^{-1}\| \|\Delta p\|} \leq \frac{\|Q\|}{\|\Delta p\|} \dots\dots\dots IV-12$$

En multipliant les inégalités IV.10 et IV.12, on obtient le résultat fondamental suivant.

$$\frac{\|\bar{e}\|}{\|\Delta p_u\|} \leq \text{cond}(Q) \frac{\|\bar{r}\|}{\|\Delta p\|} \dots\dots\dots IV-13$$

Avec :

$$\text{cond}(A) = \|Q\| \|Q^{-1}\| \dots\dots\dots IV-14$$

Remarque :

1. Si le conditionnement de la matrice Q est près de 1, l'erreur relative sur l'estimation de la réponse impulsionnelle est comprise entre deux valeurs très près l'une de l'autre, si la norme du résidu $(\Delta p - \Delta p^*)$ est petite, l'erreur relative est également petite et la précision de la solution (Δp_u) approximativement a toute la chance d'être satisfaisante.
2. Par contre, si le conditionnement de la matrice Q est très grand, la valeur de l'erreur relative est comprise entre 0 et un nombre possiblement très grand. Il est à craindre que l'erreur relative soit alors très grande, donc que la solution approximative soit de faible précision et même dans certain cas complètement fausse.

IV. Application de la régularisation

Le conditionnement mesure la dépendance de la solution d'un problème numérique par rapport aux données du problème et ceci afin de contrôler la validité d'une solution calculée par rapport à ces données. En effet, les données d'un problème numérique dépendent en général des mesures expérimentales et sont donc entachées d'erreurs, Il s'agit le plus souvent d'une quantité numérique. De façon plus générale, on peut dire que le conditionnement associé à un problème est une mesure de la difficulté du calcul numérique du problème. Un problème possédant un conditionnement bas est dit bien-conditionné et un problème possédant un conditionnement élevé est dit mal conditionné

Nous pouvons illustrer à titre exemple le cas suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 11 & 10 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ 8 & 11 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cond}(A) = 1.4250e+03$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 29 \\ 15 \\ 30 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Si on substitué dans le deuxième terme une perturbation $\Delta b = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$

La solution approchée x^* correspondante sera

IV. Application de la régularisation

$$x^* = \begin{pmatrix} 6.2222 \\ 0.1333 \\ 1.6333 \\ -3.2556 \end{pmatrix}$$

L'erreur relative de b et x sont respectivement de 0.004 et 3.4108 ce qui représente une multiplication par environ 860.

Ce nombre est du même ordre que le conditionnement de la matrice A qui est de 1425.

IV.3 CALCUL DE LA REPONSE

Dans le but de récupérer la précision perdue sur l'estimation de la réponse impulsionnelle Δp_u^* , une nouvelle procédure appelée régularisation a été mise au point à partir de 1963 par le mathématicien russe **Andreï Nikolaïevitch Tikhonov**. Elle consiste à modifier une grandeur physique qui présente une singularité afin de la rendre régulière.

IV.3.1 Sélection de la bonne solution

Les méthodes de résolution du système d'équations linéaires suivant :

$$Q\Delta p_u = \Delta p \dots\dots\dots IV-15$$

peuvent être rangées en principe en deux groupes :

- 1) Méthodes exactes qui sont des algorithmes finis de calcul des solutions du système (inverse de la matrice, règle de Cramer, méthode de Gauss, ...etc.).
- 2) Méthodes itératives qui permettent d'obtenir les solutions du système avec la précision imposé à l'aide des processus convergents infinis (méthode des approximations successives, méthode de Seidel, méthode de relaxation etc...).

Remarquons que les calculs par les méthodes de résolution classique supposent que le système est d'une précision infinie, c'est-à-dire que l'erreur sur l'estimation de Δp (perte de charge) est nulle.

Ce qui donne que :

IV. Application de la régularisation

$$\|\Delta p_u^* - Q^{-1}\Delta p^*\| = 0 \dots\dots\dots IV-16$$

(Méthode exacte)

Où

$$\|\Delta p_u^* - Q^{-1}\Delta p^*\| < \varepsilon \dots\dots\dots IV-17$$

(ε Dépend de la précision imposée)

Si on remplace Δp^* par $\Delta p + r$ dans la relation(IV.5) on obtient :

$$\Delta p_u^* - Q^{-1}(\Delta p + r) = \Delta p_u^* - Q^{-1}\Delta p - Q^{-1}r = 0 \dots\dots\dots IV-18$$

On a $Q^{-1}\Delta p = \Delta p_u$ et $Q^{-1}r = e$

Alors :

$$\Delta p_u^* = \Delta p_u + e \dots\dots\dots IV-19$$

En utilisant la norme matricielle et vectorielle cette relation devient :

$$\|\Delta p_u^*\| \leq \|\Delta p_u\| + \|e\| \dots\dots\dots IV-20$$

On remplace le terme d'erreur par la relation (IV.13)

On obtient :

$$\|\Delta p_u^*\| \leq \|\Delta p_u\| + \text{cond}(Q) \frac{\|\vec{r}\|}{\|\Delta p\|} \|\Delta p_u\| \leq \|\Delta p_u\| * \left(1 + \text{cond}(Q) \frac{\|\vec{r}\|}{\|\Delta p\|} \right) \dots\dots\dots IV-21$$

En effet :

$$\|\Delta p_u^*\| \leq \|\Delta p_u\| * \left(1 + \text{cond}(Q) \frac{\|\vec{r}\|}{\|\Delta p\|} \right) \dots\dots\dots IV-22$$

Cette relation montre que plus le conditionnement de la matrice Q est grand plus la norme de la solution obtenue est loin de la norme de la solution exacte.

IV. Application de la régularisation

Il devient évident que la solution exacte est incluse dans l'ensemble des solutions où $\|Q\Delta p_u^* - \Delta p^*\| \leq \delta$ avec δ est suffisamment grand.

Pour chaque valeur de δ on obtient un ensemble de solutions on l'appelle E

Pour : $\delta = \delta_1$ on a l'ensemble de solutions E_1

$\delta = \delta_2 > \delta_1$ on a l'ensemble de solutions E_2

Puisque $\delta_2 > \delta_1$ alors l'ensemble de solution $E_1 \subset E_2$

Par analogie :

$$\delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \dots < \delta_n \Rightarrow E_1 \subset E_2 \subset E_3 \dots \subset E_n \dots \dots \dots IV-23$$

D'après cette relation, on peut dire que la norme minimale des solutions de l'ensemble E_1 est inférieure ou égale à la norme minimale des solutions dans l'ensemble E_2 .

Par conséquent :

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \dots \subset E_n \Rightarrow \|\Delta p_{u1}^*\| \geq \|\Delta p_{u2}^*\| \geq \|\Delta p_{u3}^*\| \dots \geq \|\Delta p_{un}^*\| \dots \dots \dots IV-24$$

Ou bien :

$$\|Q\Delta p_{u1}^* - \Delta p^*\| \leq \|Q\Delta p_{u2}^* - \Delta p^*\| \leq \dots \leq \|Q\Delta p_{un}^* - \Delta p^*\| \Rightarrow \|\Delta p_{u1}^*\| \geq \|\Delta p_{u2}^*\| \geq \dots \geq \|\Delta p_{un}^*\| \dots \dots \dots IV-25$$

La valeur minimum de la norme de Δp_u^* diminue lorsqu' on augmente la valeur de δ , voir la figure suivante :

IV. Application de la régularisation

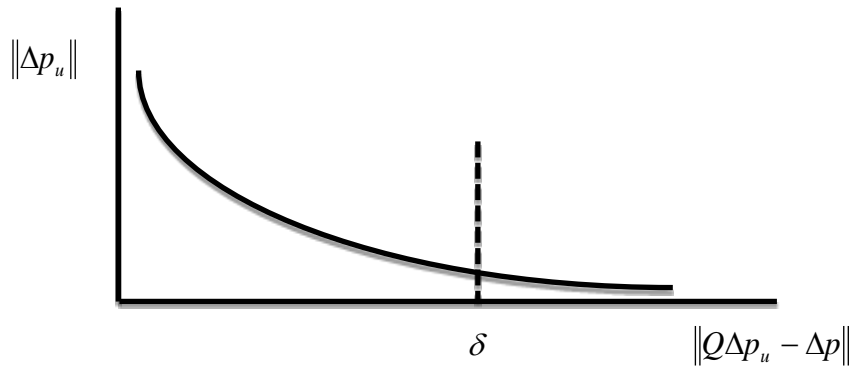


Figure IV-1 : Variation de la norme de solution en fonction de résidu

Maintenant le problème est posé sur la valeur de δ où doit-on s'arrêter ?

Tikhonov a considéré que le problème est composé de deux sous problèmes

$$\min \|\Delta p_u^*\|_2 \text{ et } \|Q\Delta p_u^* - \Delta p^*\|_2 \leq \delta$$

$$\min \|Q\Delta p_u^* - \Delta p^*\|_2 \text{ et } \|\Delta p_u^*\|_2 \leq \varepsilon$$

En utilisant la méthode de Lagrange pour le calcul des extremums liés, le problème peut être réduit au problème suivant :

$$\min(\|Q\Delta p_u - \Delta p\|_2^2 + \alpha \|\Delta p_u\|_2^2) \dots\dots\dots IV-26$$

α Est appelé paramètre de régularisation (multiplicateur de Lagrange).

Calcul de la bonne solution :

Le problème maintenant est revient à minimiser :

$$\left\| \begin{bmatrix} Q \\ \alpha I \end{bmatrix} \Delta p_u - \begin{bmatrix} \Delta p \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \dots\dots\dots IV-27$$

Ce problème est équivalent au problème des moindres carrés suivant :

$$Gm = d \dots\dots\dots IV-28$$

Avec :

$$G = \begin{bmatrix} Q \\ \alpha I \end{bmatrix} \dots\dots\dots IV-29$$

IV. Application de la régularisation

$$m = \Delta p_u$$

$$d = \begin{bmatrix} \Delta p \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots IV-30$$

Notre objectif est de minimiser le résidu entre les données calculées et les données observées.

Le vecteur résiduel est défini par la relation suivante :

$$r = d - Gm \dots\dots\dots IV-31$$

Sous la forme matricielle, la méthode des moindres carrés revient à minimiser $\|r\|_2$

$$\|r\|_2^2 = (Gm - d)^T (Gm - d) \dots\dots\dots IV-32$$

$$= m^T G^T Gm - 2m^T G^T d - d^T d \dots\dots\dots IV-33$$

Le minimum de résidu $\|r\|_2$ est atteint lorsque le gradient de $\|r\|_2^2$ s'annule (condition nécessaire) :

$$\frac{\partial \|r\|_2^2}{\partial m} = 2G^T Gm - 2G^T d = 0 \dots\dots\dots IV-34$$

$$m = (G^T G)^{-1} G^T d \dots\dots\dots IV-35$$

On remplace m, G et d par ces valeurs on obtient :

$$m = \left(\begin{bmatrix} Q^T & \alpha I \\ Q & \alpha I \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} Q^T & \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots IV-36$$

$$m_\alpha = (Q^T Q + \alpha^2 I)^{-1} Q^T \Delta p \dots\dots\dots IV-37$$

En utilisant la décomposition en valeur singulière USV^T , la solution peut être écrite de cette forme :

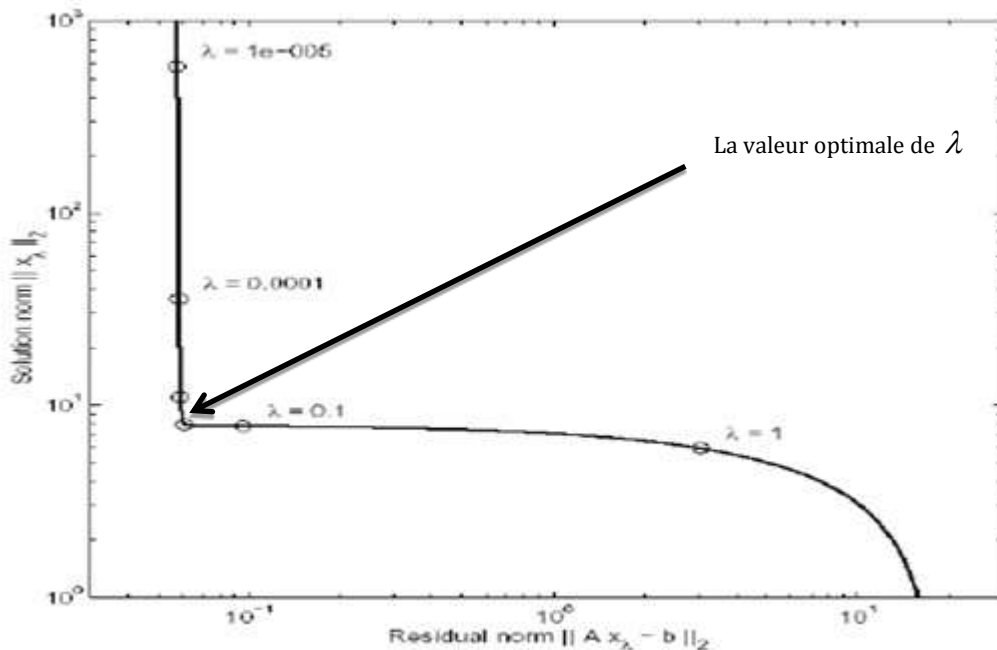
$$m_\alpha = \sum_{i=1}^k \frac{s_i^2}{s_i^2 + \alpha^2} \frac{(U_{.i})^T d}{s_i} V_{.i} \dots\dots\dots IV-38$$

IV. Application de la régularisation

La quantité $f_i = \frac{s_i^2}{s_i^2 + \alpha^2}$ est appelée le facteur de filtre.

IV.3.2 Le choix du paramètre α

Pour déterminer la valeur de α on trace sur une échelle log-log la courbe des valeurs optimaux de $\|m\|_2$ vs $\|Gm - d\|_2$ de chaque valeur de α , souvent on obtient une courbe de forme L, voir la figure suivante :



La valeur optimale de α représente la valeur de coin de **L-curve**.

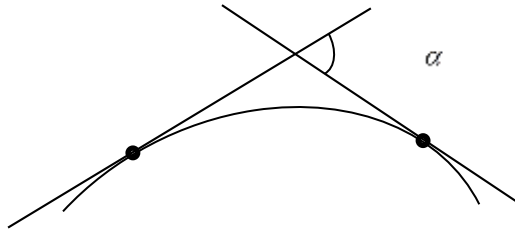
Calcul du paramètre α :

Un des éléments qui caractérise la forme d'une courbe est son degré de flexion, d'incurvation.

Le calcul de paramètre α revient au calcul du point du maximum de flexion de la courbe-L.

Soit une courbe donnée qui n'a pas de point doubles mais ayant une tangente déterminée en chaque des points. Menons les tangentes en ces points sur la courbe en deux point quelconques **A** et **B** et désignons par α l'angle formé par l'intersection de ces tangentes.

IV. Application de la régularisation



On appelle courbure au point **A** la limite vers laquelle tend le rapport de l'angle α à la longueur de l'arc AB quand la longueur de cet arc tend vers zéro :

$$k = \lim_{AB \rightarrow 0} K_m = \lim_{AB \rightarrow 0} \frac{\alpha}{AB} \dots\dots\dots IV-39$$

Notons :

$$x = \log(\|Q\Delta p_u - \Delta p\|_2)$$

$$y = \log(\|\Delta p_u\|)$$

$$\Delta S = MM_0$$

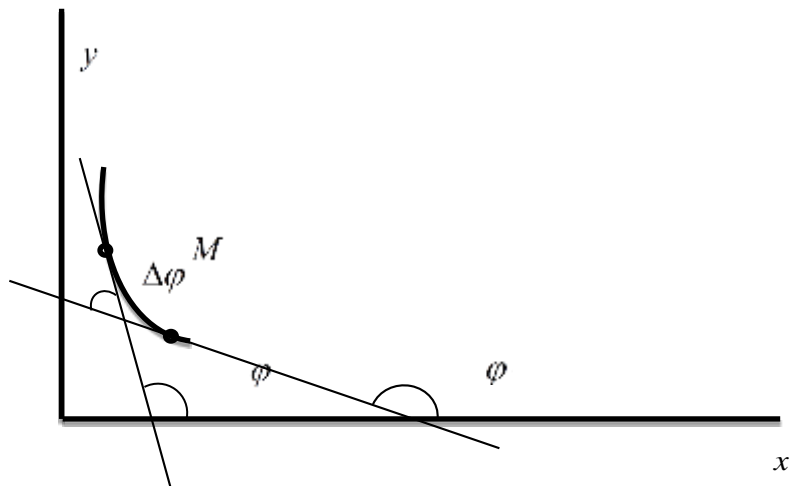


Figure IV-3 : Représentation graphique de courbure moyenne

En vertu de la définition de la courbure moyenne, nous avons pour l'arc MM_1 :

$$K_m = \frac{|\Delta \varphi|}{|\Delta S|} \dots\dots\dots IV-40$$

Pour calculer la courbure au point **M**, il faut trouver la limite de cette expression quand la longueur de l'arc MM_1 tend vers zéro.

IV. Application de la régularisation

Comme φ et S dépendent de x , nous pouvons considérer φ comme une fonction de S et supposer que cette fonction est exprimée par des équations paramétriques à l'aide du paramètre x . alors :

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS} \dots\dots\dots IV-41$$

Et, par conséquent,

$$K = \left| \frac{d\varphi}{dS} \right| \dots\dots\dots IV-42$$

Pour calculer $\frac{d\varphi}{dS}$ on utilise la formule de dérivation des fonctions paramétriques :

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dS}{dx}} \dots\dots\dots IV-43$$

On a $tg \varphi = \frac{dy}{dx}$ alors :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \dots\dots\dots IV-44$$

En ce qui concerne la formule $\frac{dS}{dx}$, nous avons :

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \dots\dots\dots IV-45$$

Alors :

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \dots\dots\dots IV-46$$

Puisque $K = \left| \frac{d\varphi}{dS} \right|$, nous trouvons en définitive :

IV. Application de la régularisation

$$K = \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \dots\dots\dots IV-47$$

Avec :

$$x = \log(\|Q\Delta p_u - \Delta p\|_2) \dots\dots\dots IV-48$$

$$y = \log(\|\Delta p_u\|_2) \dots\dots\dots IV-49$$

Pour chaque valeur de α on a une valeur de $x (\log(\|Q\Delta p_u - \Delta p\|_2))$ et une valeur de $y (\log(\|\Delta p_u\|_2))$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f tel que :

$$x = f(\alpha) \dots\dots\dots IV-50$$

Et une fonction g tel que :

$$y = g(\alpha) \dots\dots\dots IV-51$$

En substituant ces deux expressions dans la formule de rayon de courbure, nous avons :

$$K(\alpha) = \frac{|g''f' - g'f''|}{[f'^2 + g'^2]^{\frac{3}{2}}} \dots\dots\dots IV-52$$

Alors le rayon de courbure de la courbe L dépend seulement du paramètre de régularisation α .

La recherche du maximum de courbure de la courbe revient résoudre le problème suivant :

$$\max(K(\alpha)) \dots\dots\dots IV-53$$

Avec :

IV. Application de la régularisation

$$K(\alpha) = \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \dots\dots\dots IV-54$$

$$y = \log(\|\Delta p_u\|_2) \dots\dots\dots IV-55$$

$$x = \log(\|Q\Delta p_u - \Delta p\|_2) \dots\dots\dots IV-56$$

La solution du problème est faite par un algorithme basé sur la recherche exhaustive ou recherche par force brute amélioré par l'algorithme de bisection.

IV.3.3 Le choix de la fonction objective

La méthode d'interprétation par les planches des courbes types repose essentiellement sur le principe de superposition, c'est-à-dire chercher la portion d'une courbe type sur laquelle se superposent les points de mesure Δp_u . Cela nous amène à choisir une autre condition sur le terme de régularisation afin d'éliminer la variation rapide de Δp_u et avoir une bonne représentation visuelle de celle-ci pour en faciliter l'analyse et l'interprétation.

La solution établie lors de la déconvolution représente l'évolution de la chute de pression lors de la mise en production du puits par un débit unitaire, ce qui rend que les portions de la solution soit : une fonction de t^n ou bien de $\log(t)$.

Afin d'avoir un bon lissage de l'évolution de la chute de pression en fonction du temps, on propose d'introduire une fonction objective sur la dérivée logarithmique de la pression i.e. le problème revient à la minimisation de :

$$\|Q\Delta p_u - \Delta p\|^2 + \lambda \|L\Delta p_u\|^2 \dots\dots\dots IV-57$$

L : opérateur de différence logarithmique

On a:

$$\left(\frac{d\Delta p_u}{d \ln t} \right)_i = \left(t * \frac{d\Delta p_u}{dt} \right)_i = t_i * \left(\frac{d\Delta p_u}{dt} \right)_i \dots\dots\dots IV-58$$

IV. Application de la régularisation

$$L = \begin{pmatrix} -t_1 & t_1 & & & & \\ \cdot & -t_2 & t_2 & & & \\ \cdot & \cdot & -t_3 & t_3 & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & -t_{n-1} & t_{n-1} \end{pmatrix} \dots\dots\dots IV-59$$

La solution est donnée par la relation suivante :

$$\Delta p_u = (Q^T Q + \alpha^2 L^T L) Q^T \Delta p \dots\dots\dots IV-60$$

IV.4 CALCUL DE LA DERIVEE

L'interprétation des essais de puits a été fortement améliorée par l'introduction de la notion de dérivée par Bourdet en 1983. Son avantage est souligné par le fait qu'elle peut mettre en évidence dans un seul graphe les différentes successions des écoulements dans le réservoir ce qui facilite l'établissement du modèle initiale du réservoir.

La dérivée de la pression est calculée par rapport au logarithme du temps, son expression est donnée par la relation suivante :

$$\Delta p' = \frac{dp}{d \ln t} = t \frac{dp}{dt} \dots\dots\dots IV-61$$

- **Écoulement en fonction puissance :**

Chaque fois qu'un écoulement se traduit par une évolution de la forme :

$$\Delta p = a t^n + b \dots\dots\dots IV-62$$

La dérivée de la pression pendant cet écoulement vaut :

$$\Delta p' = n t^n$$

C'est-à-dire que la dérivée se traduit sur un graphe log-log par une droite de pente n.

- **Écoulement en fonction logarithmique :**

IV. Application de la régularisation

De la même façon, chaque fois qu'un écoulement se traduit par une évolution de la pression de la forme :

$$\Delta p = a \ln t + b \dots\dots\dots IV-63$$

La dérivée de la pression pendant cet écoulement vaut :

$$\Delta p' = a \dots\dots\dots IV-64$$

C'est-à-dire que la dérivée se traduit sur un graphique log-log par une droite horizontale d'ordonnée a.

Le fait que l'évolution de la pression est connue seulement en quelques points, le problème alors consiste à obtenir des approximations de cette dérivée par une différentiation numérique.

Le calcul de la dérivée exige un certain soin du fait que la différenciation numérique amplifie n'importe quel bruit présent au niveau des mesures de la pression. On peut aborder la différentiation numérique d'au moins deux façons. La première approche consiste à utiliser le développement de Taylor, et la seconde est fondée sur l'interpolation polynomiale. Nous utiliserons la deuxième approche, ce qui nous permettra d'avoir des calculs assez compliqués.

Soit maintenant les points $(\ln t_{i-1}, \Delta p_{i-1})$, $(\ln t_i, \Delta p_i)$, $(\ln t_{i+1}, \Delta p_{i+1})$, le polynôme de degré 2 passant par ces points est :

$$\Delta p_2(\ln t) = \Delta p(\ln t_{i-1}) + \Delta p[\ln t_{i-1}, \ln t_i](\ln t - \ln t_{i-1}) + \Delta p[\ln t_{i-1}, \ln t_i, \ln t_{i+1}](\ln t - \ln t_{i-1})(\ln t - \ln t_i) \dots\dots\dots IV-65$$

Dont la dérivée est :

$$\Delta p'_2(\ln t) = \Delta p[\ln t_{i-1}, \ln t_i] + \Delta p[\ln t_{i-1}, \ln t_i, \ln t_{i+1}](2 * \ln t - (\ln t_{i-1} + \ln t_i)) \dots\dots\dots IV-66$$

$\Delta p[\ln t_{i-1}, \ln t_i]$: 1^{ère} différence divisé

$\Delta p[\ln t_{i-1}, \ln t_i, \ln t_{i+1}]$: 2^{ème} différence divisé

On pose $\ln t = \ln t_i$ pour obtenir la dérivée de la pression au point i

IV. Application de la régularisation

Après simplification de l'équation IV-66, la dérivée de la pression est donnée par la relation suivante :

$$\left(\frac{dp}{d \ln t}\right)_i = \frac{\frac{\Delta p(t)_i}{\ln\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)} * \ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right) + \frac{\Delta p(t)_{i+1}}{\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right)} * \ln\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)}{\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_{i-1}}\right)} \dots\dots\dots IV-67$$

L'utilisation des points adjacents du point i produira une courbe très bruitée, voir la figure suivante :

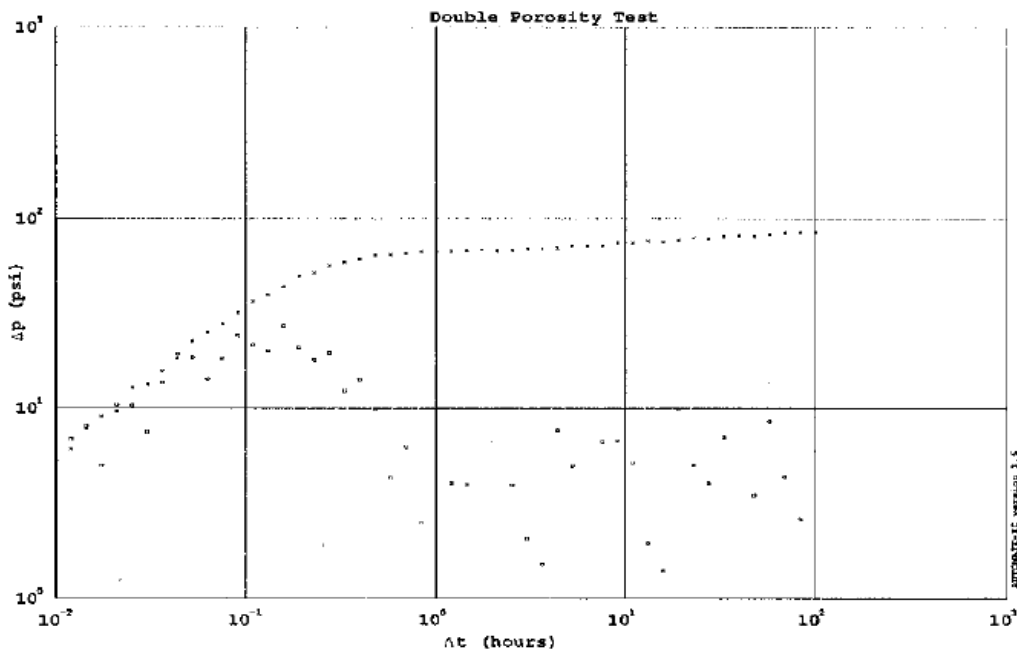


Figure IV-4 : Calcul de la dérivée en utilisant des points adjacents de point i

Si la dérivée est très bruitée, le lissage de la courbe est recommandé par une augmentation de la distance entre les points $\ln t_{i-1}, \ln t_i, \ln t_{i+1}$ (méthode de Bourdet). Mais, le problème de cette méthode est que si la distance entre ces points dépasse une certaine valeur, généralement $L = 0.5$, la courbe subit une torsion.

IV. Application de la régularisation

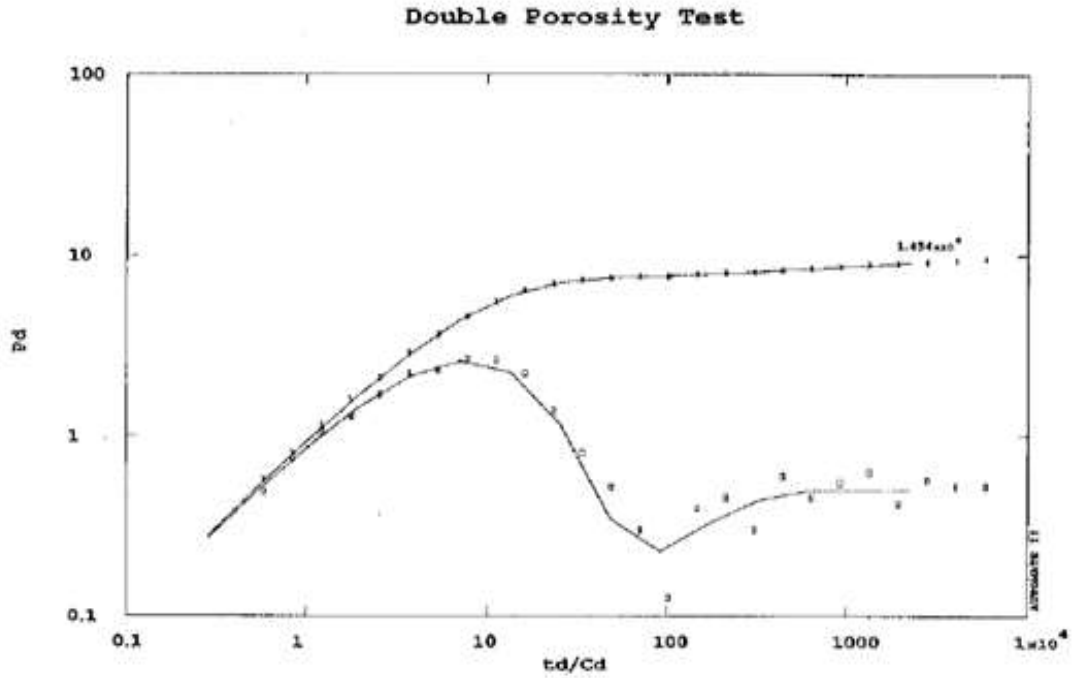


Figure IV-5: Calcul de la dérivée avec $L=0.1$

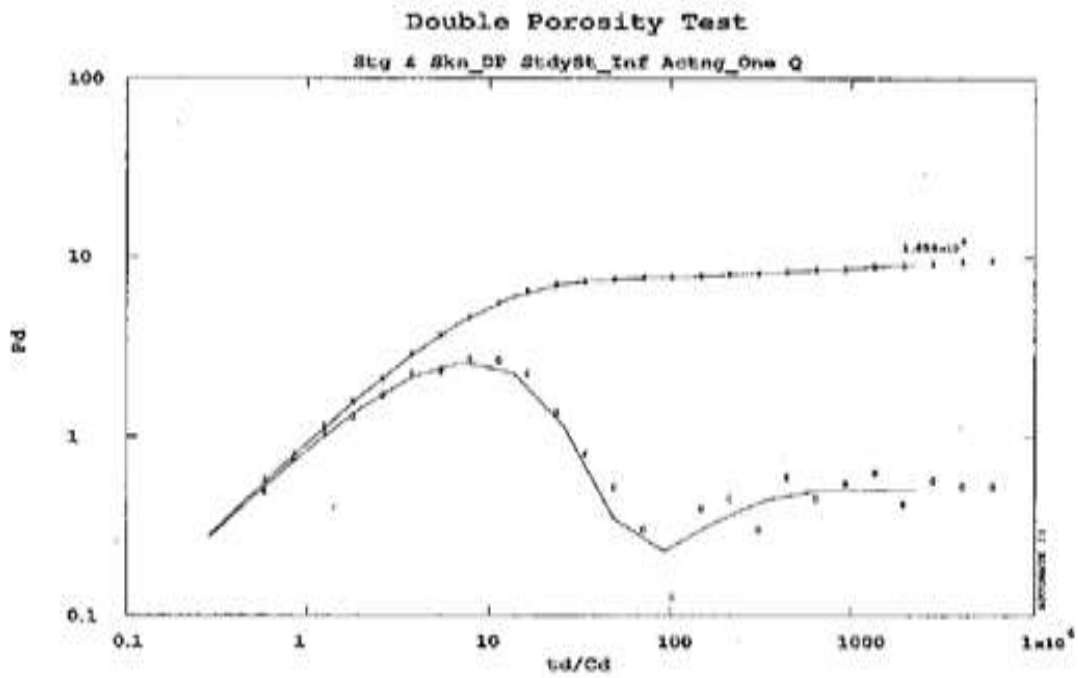


Figure IV-6 : Calcul de la dérivée avec $L=0.2$

IV. Application de la régularisation

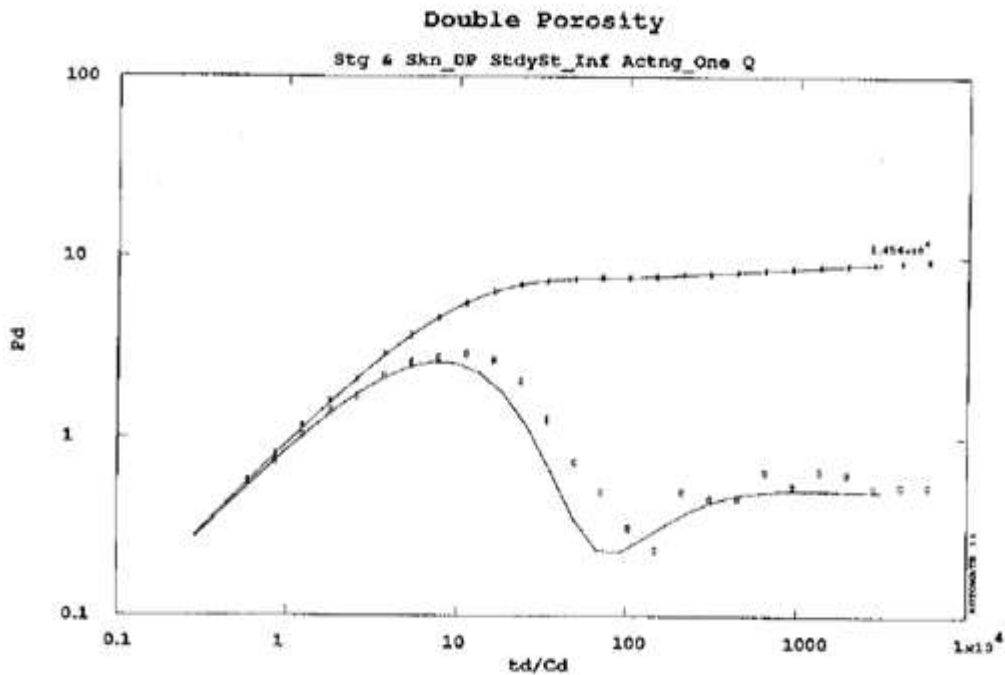


Figure IV-7: Calcul de la dérivée avec $L=0.5$

Méthode de régularisation

Le problème du calcul numérique de la dérivée d'une fonction est un problème mal posé.

Dans le but d'avoir des expressions moins compliquées, on fait le changement de variable suivant :

$$x = \ln t$$

On définit l'opérateur linéaire :

$$I : R \rightarrow R \text{ par :}$$

$$\Delta p(x) = I \Delta p'_u(x) = \int_0^x \Delta p'_u(s) ds \dots\dots\dots IV-68$$

Considérons l'intervalle de temps $\{0, x\}$ ($x = \ln t$: t : temps test), discrétisé en intervalles de temps :

$$x_0 = \ln t_0 < x_1 = \ln t_1 < x_2 = \ln t_2 \dots\dots\dots < x_{i-1} = \ln t_{i-1} < x_i = \ln t_i < x_{i+1} = \ln t_{i+1} \dots\dots\dots < x_n = \ln t_n = x \dots\dots\dots IV-69$$

IV. Application de la régularisation

Si la fonction $\Delta p'_u(x)$ est continue sur le segment $[x_0, x]$, l'intégrale définie de cette fonction dans les limites de a à b peut être calculée d'après la formule de Newton-Leibniz :

$$\int_{x_0}^{x_i} \Delta p'_u(x) dx = \Delta p(x_i) - \Delta p(x_0) \dots \dots \dots IV-70$$

Alors :

$$\Delta p(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} \Delta p'_u(x) dx + \Delta p(x_0) \dots \dots \dots IV-71$$

On utilise la méthode de Trapèze composé pour calculer l'intégrale IV-71, alors :

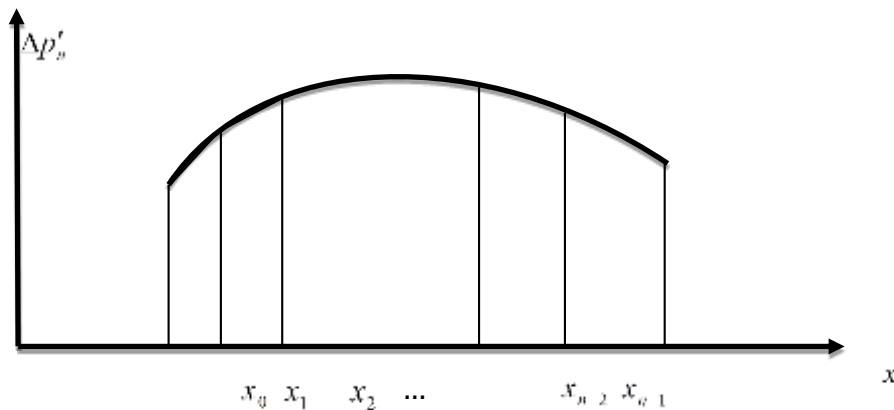


Figure IV-8: Méthode de trapèze composé

$$\Delta p_u(x) = \int_{x_0}^x \Delta p'_u(s) ds + \Delta p_u(x_0) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Delta p'_u(s) ds \approx \sum_{i=0}^{i=n-1} (\Delta p'_u(x_{i+1}) + \Delta p'_u(x_i)) * \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) + \Delta p_u(x_0) \dots \dots \dots IV-72$$

IV. Application de la régularisation

Sous forme d'équation algébrique :

$$\Delta p_u(x_0) = \Delta p_u(x_0)$$

$$\Delta p_u(x_1) = \frac{x_1 - x_0}{2} \Delta p'_u(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{2} \Delta p'_u(x_1) + \Delta p_u(x_0)$$

$$\Delta p_u(x_2) = \frac{x_1 - x_0}{2} \Delta p'_u(x_0) + \frac{x_2 - x_0}{2} \Delta p'_u(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{2} \Delta p'_u(x_2) + \Delta p_u(x_0)$$

$$\Delta p_u(x_3) = \frac{x_1 - x_0}{2} \Delta p'_u(x_0) + \frac{x_2 - x_0}{2} \Delta p'_u(x_1) + \frac{x_3 - x_1}{2} \Delta p'_u(x_2) + \frac{x_3 - x_2}{2} \Delta p'_u(x_3) + \Delta p_u(x_0)$$

.

.

$$\begin{aligned} \Delta p_u(x_i) = & \frac{x_1 - x_0}{2} \Delta p'_u(x_0) + \frac{x_2 - x_0}{2} \Delta p'_u(x_1) + \frac{x_3 - x_1}{2} \Delta p'_u(x_2) + \frac{x_3 - x_2}{2} \Delta p'_u(x_3) \\ & \dots + \frac{x_i - x_{i-2}}{2} \Delta p'_u(x_{i-1}) + \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \Delta p'_u(x_i) + \Delta p_u(x_0) \end{aligned}$$

.

.

$$\begin{aligned} \Delta p_u(x_n) = & \frac{x_1 - x_0}{2} \Delta p'_u(x_0) + \frac{x_2 - x_0}{2} \Delta p'_u(x_1) + \frac{x_3 - x_1}{2} \Delta p'_u(x_2) + \frac{x_3 - x_2}{2} \Delta p'_u(x_3) \\ & \dots + \frac{x_i - x_{i-2}}{2} \Delta p'_u(x_{i-1}) + \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \Delta p'_u(x_i) + \dots \\ & \dots + \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \Delta p'_u(x_n) + \Delta p_u(x_0) \end{aligned}$$

Alors, nous obtenons un système linéaire d'équation

$$\Delta p = I \Delta p'_u \dots \dots \dots IV-73$$

Avec :

IV. Application de la régularisation

$$\Delta p_u = \begin{pmatrix} \Delta p_u(x_1) - \Delta p_u(x_0) \\ \Delta p_u(x_2) - \Delta p_u(x_0) \\ \vdots \\ \Delta p_u(x_n) - \Delta p_u(x_0) \end{pmatrix} \dots\dots\dots IV-74$$

Et

$$\Delta p'_u = \begin{pmatrix} \Delta p'_u(x_0) \\ \Delta p'_u(x_1) \\ \Delta p'_u(x_2) \\ \vdots \\ \Delta p'_u(x_n) \end{pmatrix} \dots\dots\dots IV-75$$

$$I_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i+1 \\ \frac{x_j - x_{j-1}}{2} & \text{si } j = i+1 \\ \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} & \text{si } 1 < j < i+1 \end{cases} \dots\dots\dots IV-76$$

On a au total n+1 inconnues pour n équations. On doit donc fixer de façon arbitraire deux inconnues. Il existe plusieurs possibilités, mais la plus simple consiste à imposer une condition naturelle sur la courbe :

$$\Delta p''(x_0) = 0$$

Mais la pente de la dérivée de pression est toujours égale à 1 au début de test (wellbore storage) alors on peut prendre $\Delta p''_u(x_0) = 1$ comme équation supplémentaire pour résoudre le système IV-73

Après la simplification, le système devient :

$$\Delta p_u^* = I \Delta p'_u \dots\dots\dots IV-77$$

Avec :

IV. Application de la régularisation

$$\Delta p_u^* = \begin{pmatrix} \Delta p_u(x_1) - \Delta p_u(x_0) - \frac{x_1 - x_0}{2} \\ \Delta p_u(x_2) - \Delta p_u(x_0) - \frac{x_1 - x_0}{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p_u(x_n) - \Delta p_u(x_0) - \frac{x_1 - x_0}{2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots IV-78$$

Et

$$\Delta p_u' = \begin{pmatrix} \Delta p_u'(x_1) \\ \Delta p_u'(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p_u'(x_n) \end{pmatrix} \dots\dots\dots IV-79$$

$$I_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \frac{x_j - x_{j-1}}{2} & \text{si } j = i \\ \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} & \text{si } 1 < j < i \leq n \end{cases} \dots\dots\dots IV-80$$

Alors le calcul de la dérivée revient à résoudre le système suivant :

$$\Delta p_u' = I^{-1} \Delta p_u^* \dots\dots\dots IV-81$$

Nous allons appliquer la méthode de Tikhonov pour résoudre le problème de la déviation numérique présenté précédemment.

Comme notre but est d'avoir une courbe bien lissée, alors il faut faire une condition sur la seconde dérivée de $\Delta p_u'$. Cela veut dire que nous calculerons la dérivée en résolvant le problème suivant :

$$\min(\|I\Delta p_u' - \Delta p_u^*\| + \alpha \|L\Delta p_u'\|) \dots\dots\dots IV-82$$

L : Opérateur de différence d'ordre 2.

IV. Application de la régularisation

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & -2 & 1 & . & . & . \\ & & \dots & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots IV-83$$

IV.5 CONCLUSION

- le conditionnement d'un problème mesure la dépendance de la solution d'un problème numérique par rapport aux données du problème pour contrôler la validité d'une solution calculée par rapport à ces données. En effet, les données d'un problème numérique dépendent en général des mesures expérimentales qui sont entachées d'erreurs.
- L'établissement de la courbe type et sa dérivée est un problème mal posé à cause de sa sensibilité aux erreurs de mesure.
- La régularisation est une procédure ad-hoc très importante et très adaptée à l'étude des problèmes mal-posés ainsi que les problèmes inverses.

**CHAPITRE V : APPLICATION DE LA REGULARISATION AUX TESTS DRAW
DOWN ET MULTI-RATE**

L'objectif de ce chapitre est d'illustrer l'application de la méthode de régularisation pour le calcul de la réponse impulsionnelle et sa dérivée concernant des applications réelles puis nous procéderons à la validation des différentes formulations de problèmes choisis pour interpréter un essai de puits.

V.1 APPLICATION SUR UNE TRANSFORMATION LINEAIRE :

L'objectif de cette application est de mettre en évidence l'importance de la technique de régularisation pour résoudre les problèmes mal-posés.

Considérons un problème inverse mal-posé par l'application linéaire suivante :

$$A: X \rightarrow Y$$

A : matrice d'application

$$A = \begin{pmatrix} 0.0002 & 0.0130 & 0.0223 & 0.1008 & 0.3899 & 0.1403 \\ 0.0130 & 0.0493 & 0.0018 & 0.7196 & 1.0472 & 0.3899 \\ 0.0223 & 0.0018 & 0.7366 & 1.9541 & 0.7196 & 0.1008 \\ 0.1008 & 0.7196 & 1.9541 & 0.7366 & 0.0018 & 0.0223 \\ 0.3899 & 1.0472 & 0.7196 & 0.0018 & 0.0493 & 0.0130 \\ 0.1403 & 0.3899 & 0.1008 & 0.0223 & 0.0130 & 0.0002 \end{pmatrix}$$

X : Vecteur de solution.

Y : Vecteur d'observation.

$$\text{cond}(A) = 210.16$$

Soit donnée la solution exacte de problème :

$$x = t^2$$

Avec :

$$t = 0.1 * i \quad i = 0,1,2,3,4,5$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0.04 \\ 0.09 \\ 0.16 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

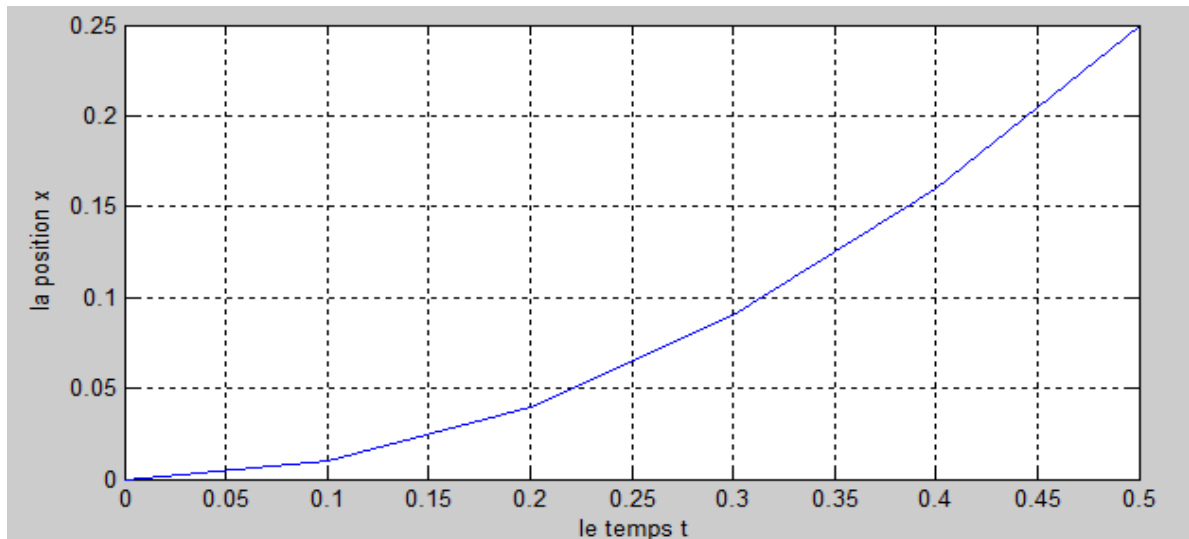


Figure V-1: Solution exacte de problème

Supposons que la solution du problème est donnée avec une précision infinie, alors le système perturbé peut être résolu de manière exacte.

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 0.0002 & 0.0130 & 0.0223 & 0.1008 & 0.3899 & 0.1403 \\ 0.0130 & 0.0493 & 0.0018 & 0.7196 & 1.0472 & 0.3899 \\ 0.0223 & 0.0018 & 0.7366 & 1.9541 & 0.7196 & 0.1008 \\ 0.1008 & 0.7196 & 1.9541 & 0.7366 & 0.0018 & 0.0223 \\ 0.3899 & 1.0472 & 0.7196 & 0.0018 & 0.0493 & 0.0130 \\ 0.1403 & 0.3899 & 0.1008 & 0.0223 & 0.0130 & 0.0002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0.04 \\ 0.09 \\ 0.16 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1076 \\ 0.3304 \\ 0.3457 \\ 0.1575 \\ 0.0505 \\ 0.0121 \end{pmatrix}$$

Calcul de la solution approchée x^* sans faire de régularisation (méthode classique) :

On fera un calcul inverse i.e. en déterminant la solution approchée x^* pour les différentes erreurs relatives commises sur le vecteur d'observation y .

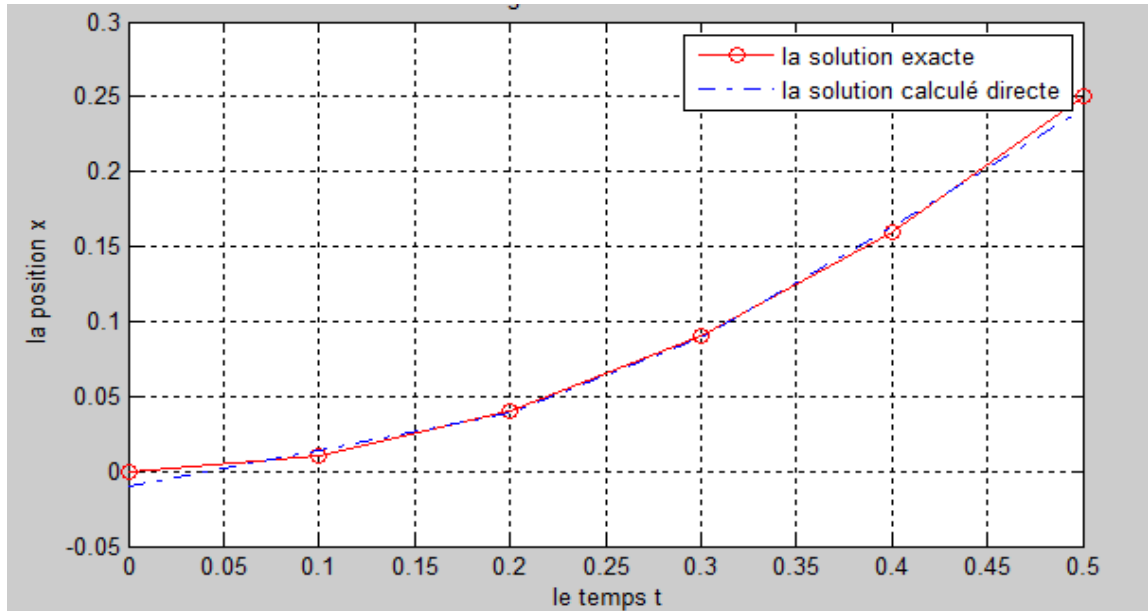
V. APPLICATION DE LA REGULARISATION AUX TESTS DRAW DOWN ET MULTI-RATE

La solution est donnée par la relation suivante :

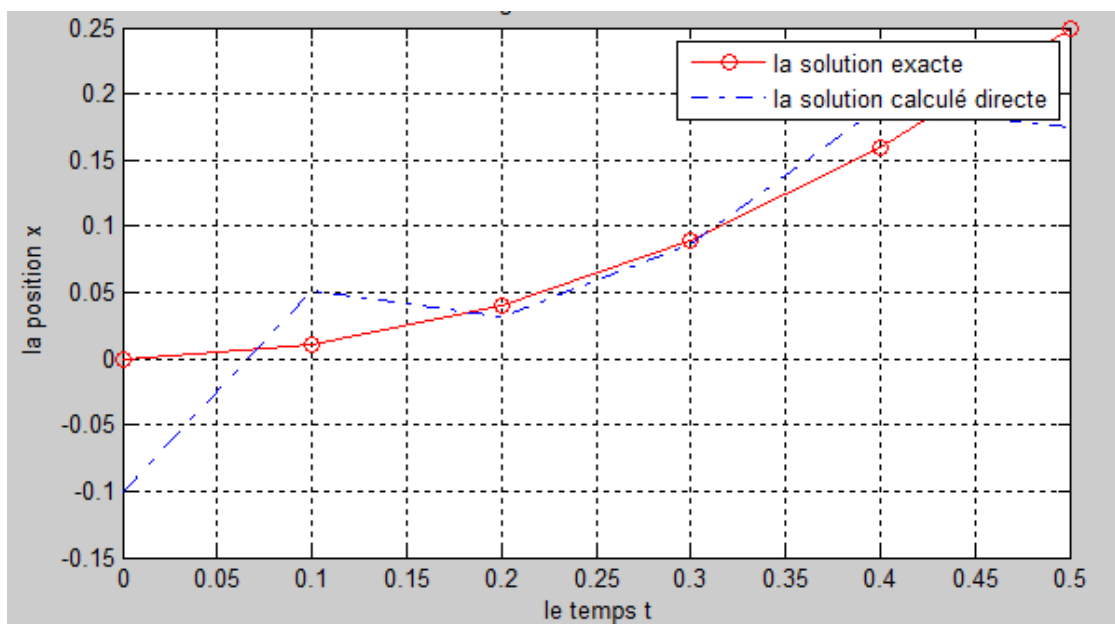
$$x^* = A^{-1}ye$$

A^{-1} : La matrice de transformation inverse.

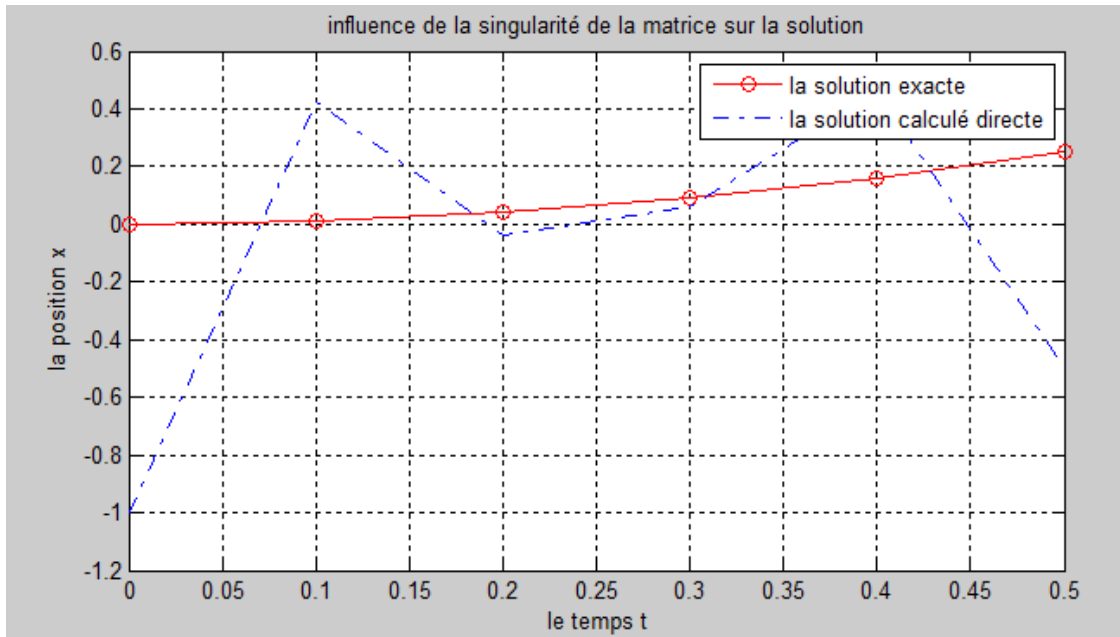
ye : Vecteur d'observation entaché d'une erreur.



$$\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} = 4.4247e-04$$



$$\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} = 4.4247e-03$$



$$\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} = 4.4247e-03$$

Figure V-2: Influence de l'erreur d'observation sur la solution approchée

Le calcul effectif de l'inversion du système $AX = Y$ où la valeur du second membre Y est entachée d'une erreur ΔY qui produira une erreur relative théorique sur la solution approchée X majorée par :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) * \frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} = 210.16 \frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}$$

Cette relation montre que pour avoir une erreur relative sur la solution x d'ordre 10^{-2} , il faut avoir une précision de mesure sur le vecteur d'observation d'ordre $4.7 * 10^{-5}$ i.e. qu'on a perdu 3 chiffres significatifs par les méthodes classiques d'inversion.

Application de la régularisation

Dans le but de récupérer la précision perdue sur l'estimation de la solution et privilégier une solution particulière dotée de propriétés pertinentes, un terme de régularisation est introduit dans la minimisation :

$$\|Ax - y\| + \lambda \|Lx\|$$

L , la matrice de Tikhonov qui doit être judicieusement choisie pour le problème considéré : comme la solution x est une fonction de t^2 alors l'opérateur de différence d'ordre 2 peut être utilisé pour éliminer les variations rapides de la solution x en fonction de t .

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & -2 & 1 & . & . & . \\ & & & \dots & & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette régularisation améliore le conditionnement du problème et permet d'avoir une solution approchée avec une erreur relative d'un ordre de grandeur de la précision de l'observation.

La solution numérique que l'on va appeler \hat{x}_λ est donnée par :

$$\hat{x}_\lambda = (A^T A + \lambda^2 L^T L) A^T y e$$

Choix de paramètre λ :

Les figures suivantes montrent l'influence du paramètre λ sur l'estimation de la solution x .

V. APPLICATION DE LA REGULARISATION AUX TESTS DRAW DOWN ET MULTI-RATE

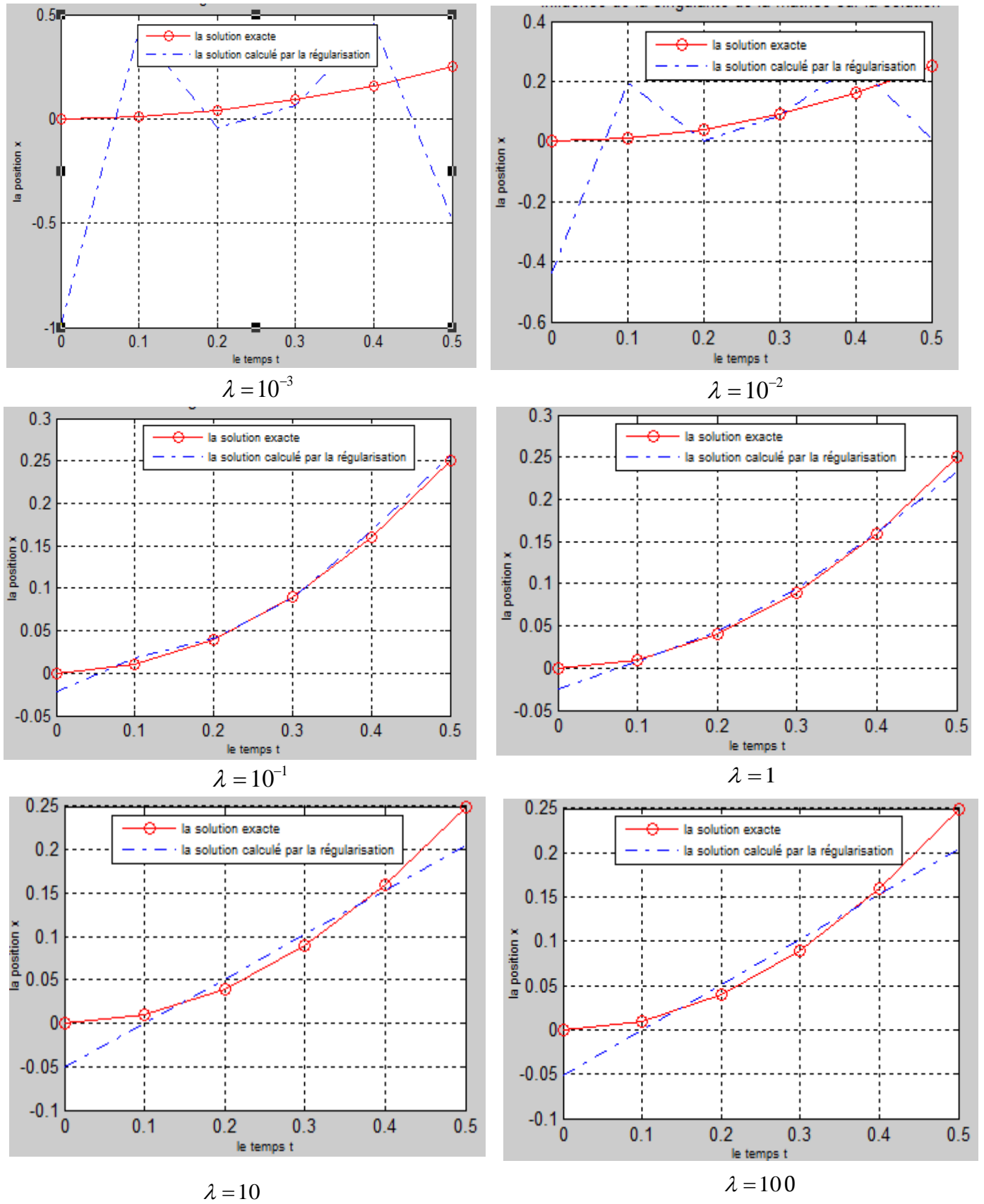


Figure V-3: Variation de la solution avec le choix de paramètre α

V. APPLICATION DE LA REGULARISATION AUX TESTS DRAW DOWN ET MULTI-RATE

Lorsque nous traçons la courbe $\log\|Lx\|$ vs $\log\|Ax - y\|$ nous obtenons une courbe sous forme L.

Le paramètre λ optimale représente le point de corner de L_curve i.e. le point qui représente de maximum courbure.

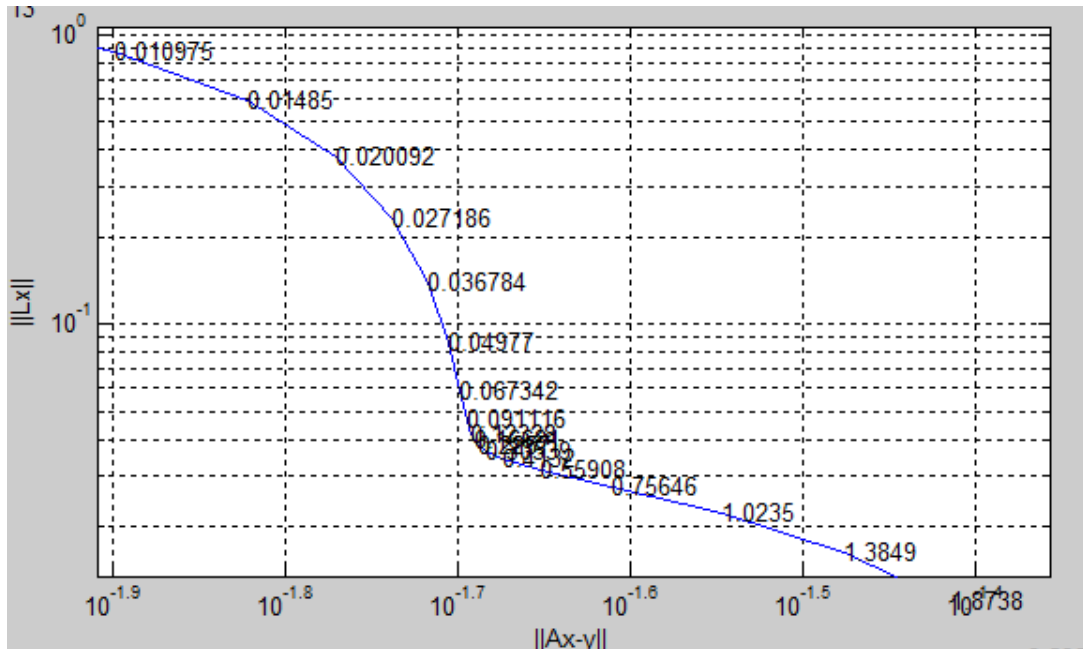


Figure V-4: Courbe L

Le calcul de λ optimal par un code qui calcule le maximum de courbure de L-curve donne : $\lambda = 0.28559$

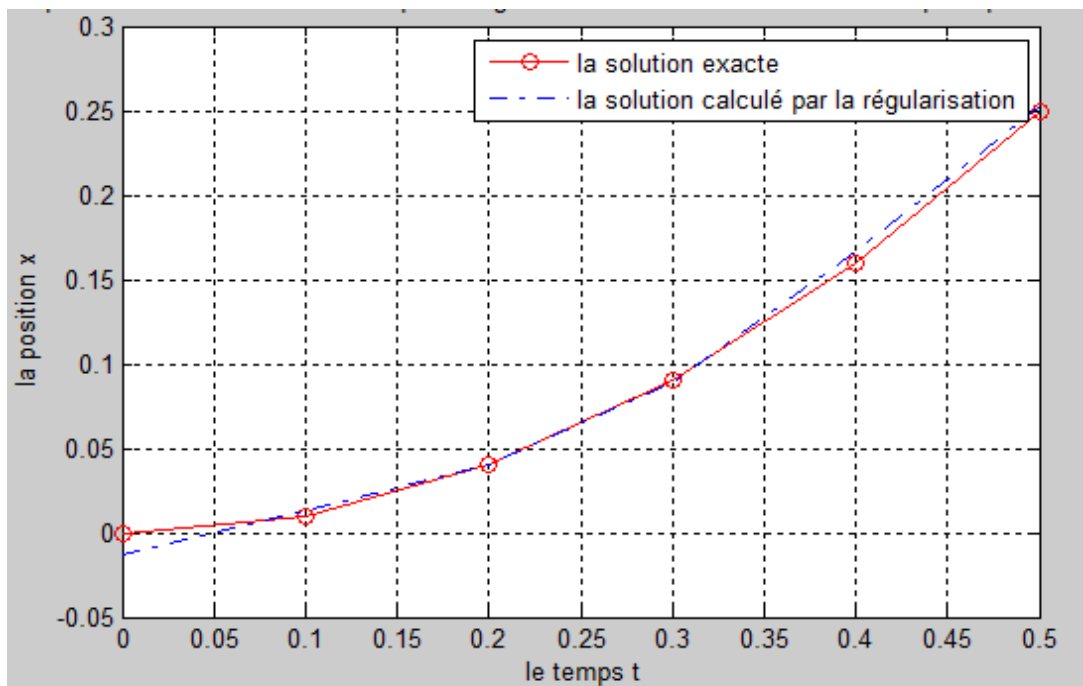


Figure V-5: Solution approchée de problème calculé par la régularisation

L'erreur relative faite sur l'estimation de la solution est : $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 0.048$

Avec une erreur relative sur le vecteur d'observation y : $\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} = 0.044$

On remarque que

- la technique de régularisation rend le system stable
- L'erreur faite sur l'estimation de la solution est de l'ordre de grandeur de l'erreur faite sur l'observation.

V.2 APPLICATION SUR UN TEST DRAW DOWN

V.2.1 Données de base :

Nous avons à interpréter un draw down. Le puits est complété dans un réservoir supposé a priori homogène avec un écoulement monophasique (huile). Les données de base sont :

Propriétés de fluide :

$$B_o = 1 \quad bbl / STB$$

$$c_t = 3 * 10^{-6} \quad psi$$

$$\mu_o = 0.3 \quad cp$$

Propriétés de réservoir :

$$\phi = 0.333$$

$$r_w = 0.29 \quad ft$$

$$h = 12 \quad ft$$

Historique de débit :

Début de test : 0.0000 hrs

Débit de production : 1245 .00 STB /day

Historique de pression :

Tableau V-1: Historique de pression de test Draw down

t(hrs)	p(psia)	deltaT	deltaP
0,0000	1002,61	0,0000	0,390
0,0100	997,664	0,0100	5,336
0,0145	995,634	0,0145	7,366
0,0209	992,771	0,0209	10,229
0,0302	988,992	0,0302	14,008
0,0437	984,125	0,0437	18,875
0,0631	977,709	0,0631	25,291
0,0912	970,368	0,0912	32,632
0,1318	962,072	0,1318	40,928
0,1906	953,743	0,1906	49,257
0,2754	946,352	0,2754	56,648
0,3981	941,058	0,3981	61,942
0,5754	937,854	0,5754	65,146
0,8318	936,121	0,8318	66,879
1,2023	935,123	1,2023	67,877
1,7378	934,516	1,7378	68,484
2,5119	933,647	2,5119	69,353
3,6308	932,406	3,6308	70,594
5,2481	931,280	5,2481	71,720
7,5858	929,681	7,5858	73,319
10,9648	928,121	10,9648	74,879
15,8489	926,529	15,8489	76,471
22,9087	924,734	22,9087	78,266
33,1131	923,194	33,1131	79,806
47,8630	921,528	47,8630	81,472
69,1831	919,857	69,1831	83,143
100,0000	918,287	100,0000	84,713

V.2.2 Calcul de la réponse impulsionnelle :

Nous rappelons l'équation de Duhamel

$$\Delta p(t) = \int_0^t q(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \Delta p_u(\tau) d\tau \dots\dots\dots V-1$$

En discrétisant cette équation on obtient :

$$\Delta p(t_i) = \int_0^{t_i} q(t_i-\tau) \frac{d}{d\tau} \Delta p(\tau) d\tau \dots\dots\dots V-2$$

L'essai est un Draw-down, c'est-à-dire que le débit est constant et donc on peut le faire sortir le débit de l'intégral :

$$\Delta p(t_i) = q \int_0^{t_i} \frac{d}{d\tau} \Delta p(\tau) d\tau \dots\dots\dots V-3$$

Comme on a :

$$\int_0^{t_i} \frac{d}{d\tau} \Delta p(\tau) d\tau = \Delta p(t_i) \dots\dots\dots V-4$$

Alors l'équation IV-1 devient :

$$\Delta p(t_i) = q \Delta p_u(t_i) \dots\dots\dots V-5$$

L'identification des deux équations III-6 e V-5 donne :

La matrice débit Q s'écrit comme suit :

$$Q = qI \dots\dots\dots V-6$$

Avec :

$$q = 2500 \text{ STD/day}$$

I : matrice identité de dimension 51x51

D'après la relation IV-14 on a :

$$\text{cond}(Q) = \|Q\| \|Q^{-1}\| = q * \frac{1}{q} = 1 \dots\dots\dots V-7$$

V. APPLICATION DE LA REGULARISATION AUX TESTS DRAW DOWN ET MULTI-RATE

Comme Le conditionnement de problème est égal à 1 alors le calcul de la réponse impulsionnelle à partir d'un test draw down est un problème bien-posé, son expression est donnée par la relation suivante :

$$\Delta p_u = \frac{1}{q} \Delta p \dots\dots\dots V-8$$

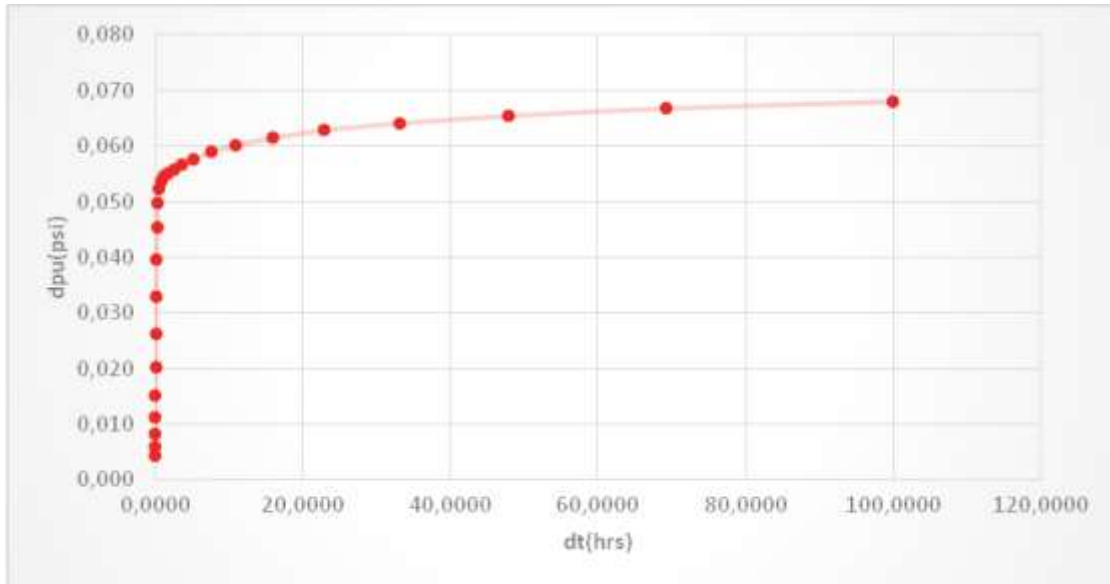


Figure V-6 : Représentation de la réponse impulsionnelle de réservoir en échelle cartésienne

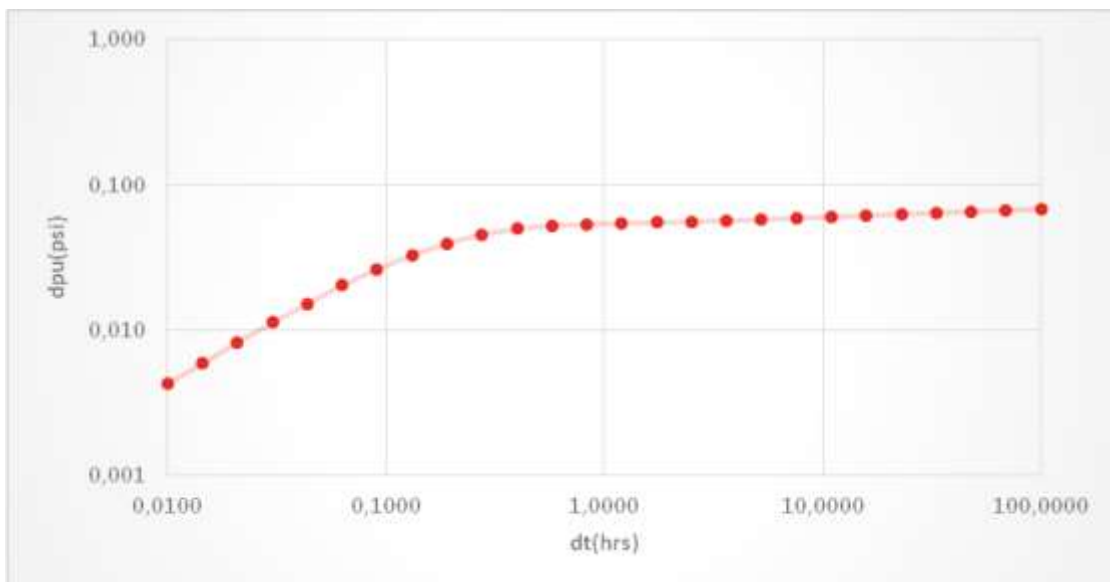


Figure V-7: Représentation de la réponse impulsionnelle de réservoir en échelle log-log

V.2.3 Calcul de la dérivée

L'intérêt principal de la dérivée réside dans l'aide importante apportée à l'étape de calage et à la visualisation des écoulements au cours d'un essai de puits.

D'après la formule de Bourdet, la dérivée est donnée par la relation suivante :

$$\left(\frac{dp}{d \ln t}\right)_i = \frac{\frac{\Delta p(t)_{i_i}}{\ln\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)} * \ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right) + \frac{\Delta p(t)_{i+1}}{\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right)} * \ln\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)}{\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_{i-1}}\right)} \dots\dots\dots V-9$$

Le calcul de la dérivée par les points adjacents du point i produit une courbe très bruitée (voir fig V-8)

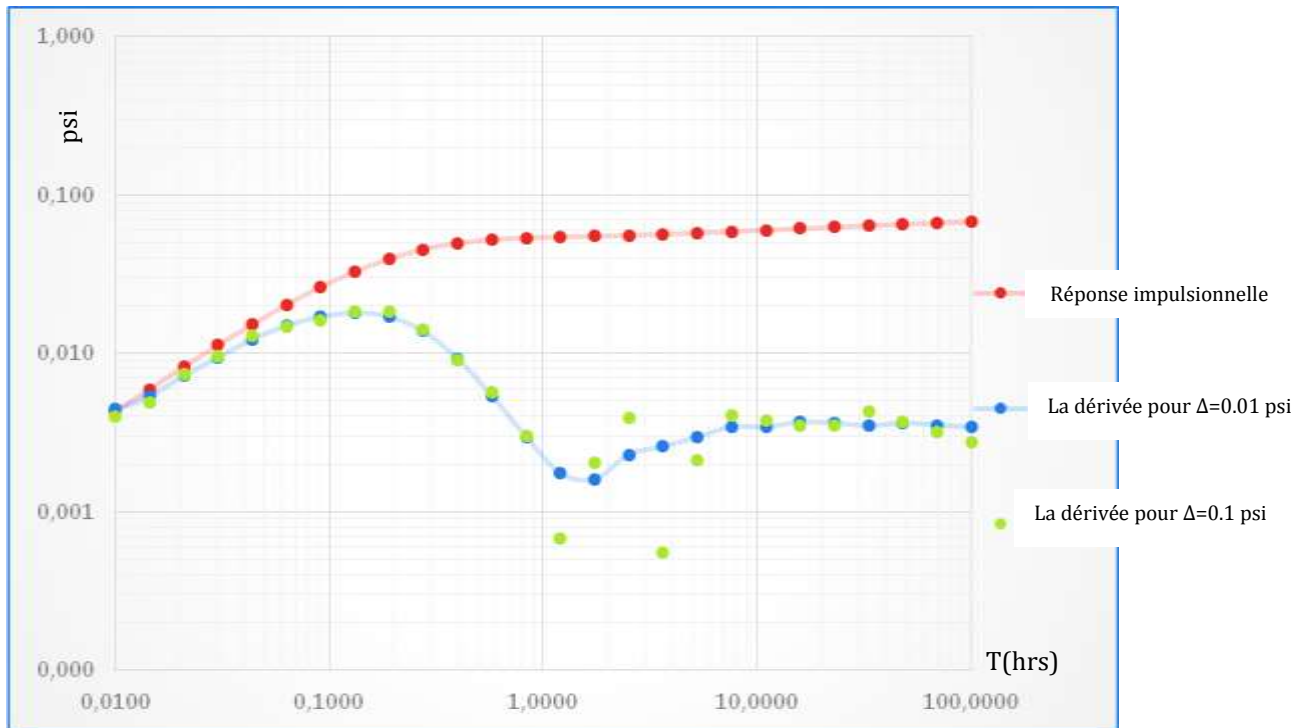


Figure V-8 : Dérivée de la pression calculée par les points adjacents de point i

On remarque que la limitation principale à l'utilisation de la dérivée est due au bruit du signal qui nécessite des algorithmes de lissage pour s'en affranchir même si les mesures présentent une faible erreur.

V. APPLICATION DE LA REGULARISATION AUX TESTS DRAW DOWN ET MULTI-RATE

On utilise la méthode de lissage par une augmentation de la distance entre les points $i-1$, i , $i+1$, proposée par Bourdet, pour réduire le niveau de bruit lors de l'établissement de la dérivée.

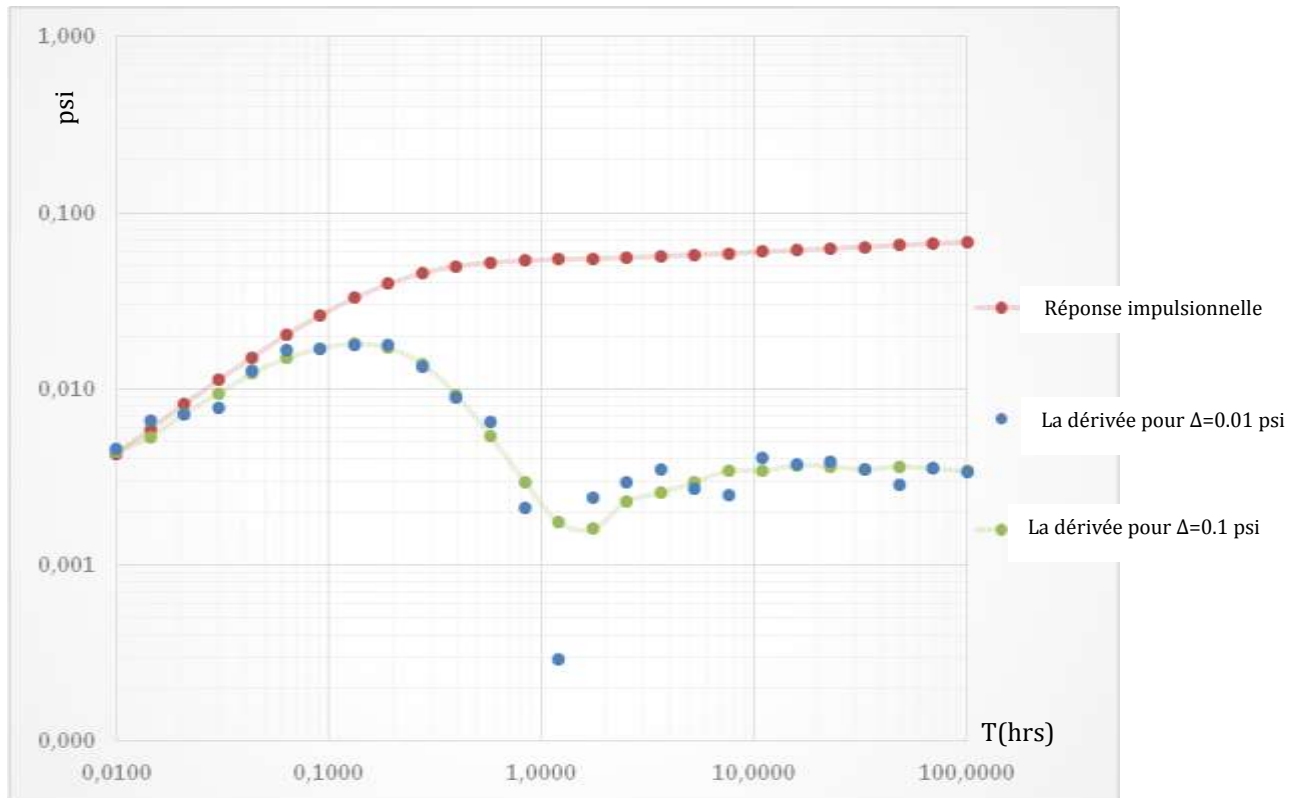


Figure V-9: Calcul de la dérivée avec $L=0.2$

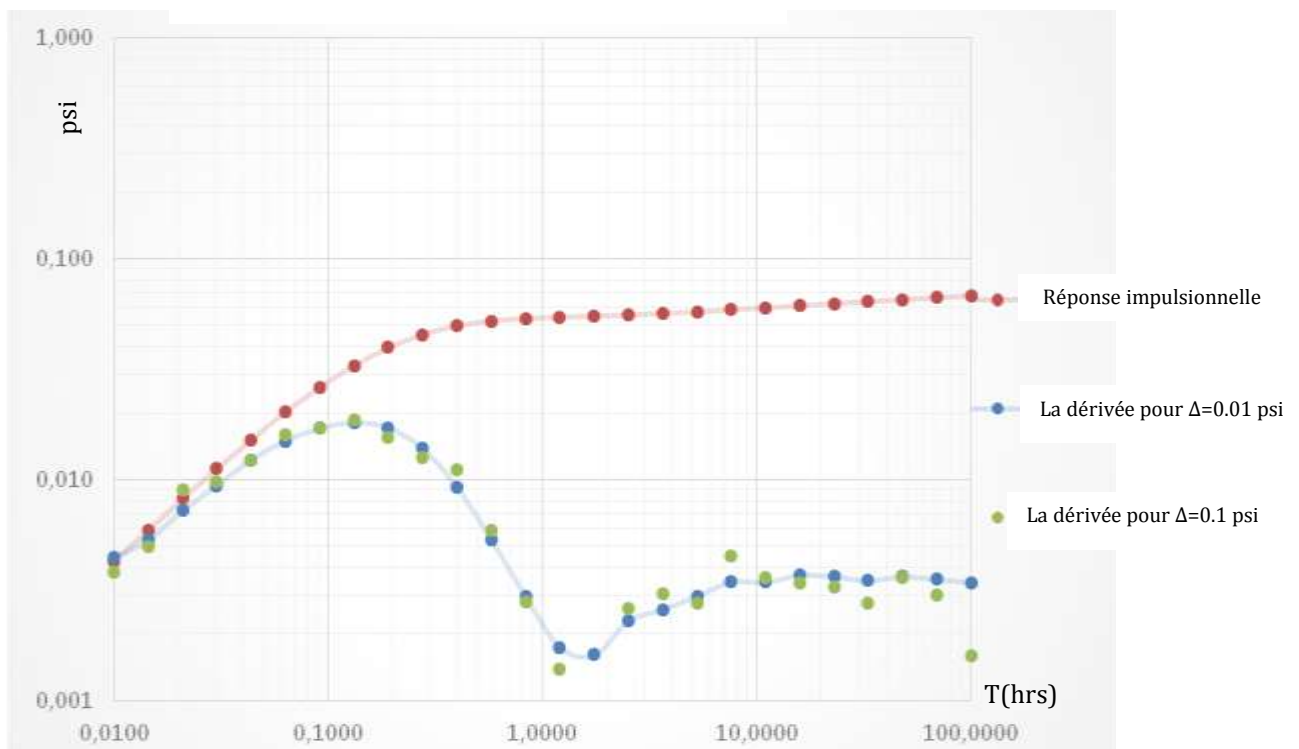


Figure V-10: Calcul de la dérivée avec $L=0.3$

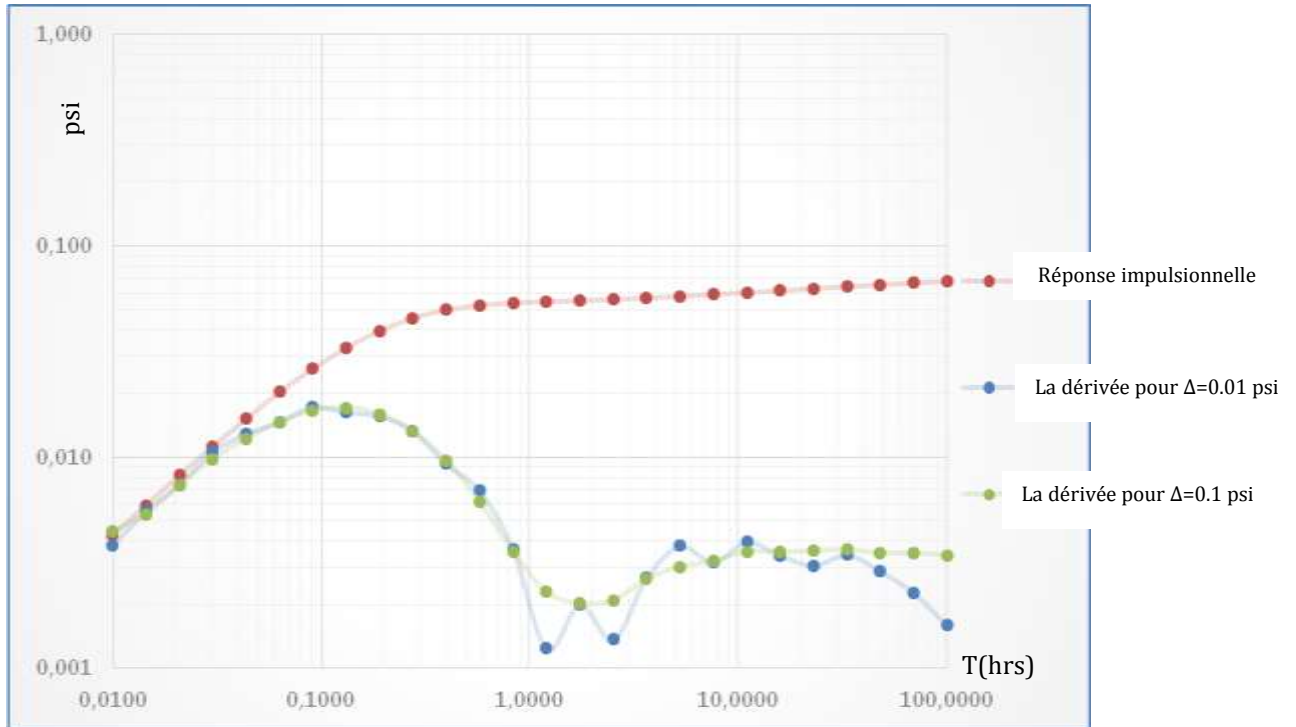


Figure V-11: Calcul de la dérivée avec $L=0.5$

Les figures V-9, V-10 et V-11 illustrent que l'algorithme de lissage proposé par Bourdet est bien adapté pour le calcul de la dérivée lorsque l'erreur de mesure de la pression est trop petite. Le fait d'augmenter l'ordre de grandeur de l'erreur rend cet algorithme inutilisable comme outil de calcul de la dérivée.

Dans le but de résoudre le problème de déviation numérique et récupérer la précision perdue sur l'estimation de la dérivée nous allons procéder à la régularisation par Tikhonov

Application de la régularisation au calcul de la dérivée :

Nous rappelons de la formulation choisie pour traduire le problème de calcul de la dérivée par Tikhonov (voir IV-4):

$$\min(\|I\Delta p'_u - \Delta p'_u\| + \alpha \|L\Delta p'_u\|) \dots\dots\dots V-10$$

L : Opérateur de différence d'ordre 2.

α : Paramètre de régularisation.

I : Matrice d'application linéaire définit par :

$$I: R \rightarrow R$$

$$\Delta p'_u(x) \rightarrow \Delta p_u^*(x)$$

$$x = \log t \dots\dots\dots V-11$$

$$\Delta p_u^* = \begin{pmatrix} \Delta p_u(x_1) - \Delta p_u(x_0) - \frac{x_1 - x_0}{2} \\ \Delta p_u(x_2) - \Delta p_u(x_0) - \frac{x_1 - x_0}{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p_u(x_n) - \Delta p_u(x_0) - \frac{x_1 - x_0}{2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots V-12$$

$$\Delta p'_u = \begin{pmatrix} \Delta p'_u(x_1) \\ \Delta p'_u(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p'_u(x_n) \end{pmatrix} \dots\dots\dots V-13$$

$$I_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \frac{x_j - x_{j-1}}{2} & \text{si } j = i \\ \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} & \text{si } 1 < j < i \leq n \end{cases} \dots\dots\dots V-14$$

En calculant le conditionnement de la matrice I on trouve $cond(I) = 1.0125e+03$, ce qui explique la difficulté du calcul de la dérivée par les méthodes directes sans faire de régularisation.

Nous remarquons qu'une erreur relative de 0.01% faite sur la mesure de la pression peut provoquer une erreur relative de l'ordre de 100%.

De fait que le conditionnement de la matrice est de l'ordre de 10^3 , la méthode de régularisation est recommandée, pour cela nous avons développé un code sur MATLAB qui nous permettra d'améliorer le conditionnement de la

V. APPLICATION DE LA REGULARISATION AUX TESTS DRAW DOWN ET MULTI-RATE

matrice I et d'avoir une solution approchée avec une erreur relative de l'ordre de grandeur de la précision de l'observation.

La solution numérique que l'on va appeler $\Delta \hat{p}'_u$ est donnée par la relation suivante :

$$\Delta \hat{p}'_u = (I^T I + \alpha^2 L^T L) I^T \Delta p_u^* \dots\dots\dots V-15$$

Choix de paramètre α :

Les figures suivantes montrent l'influence de paramètre α sur l'estimation de la solution approché $\Delta \hat{p}'_u$:

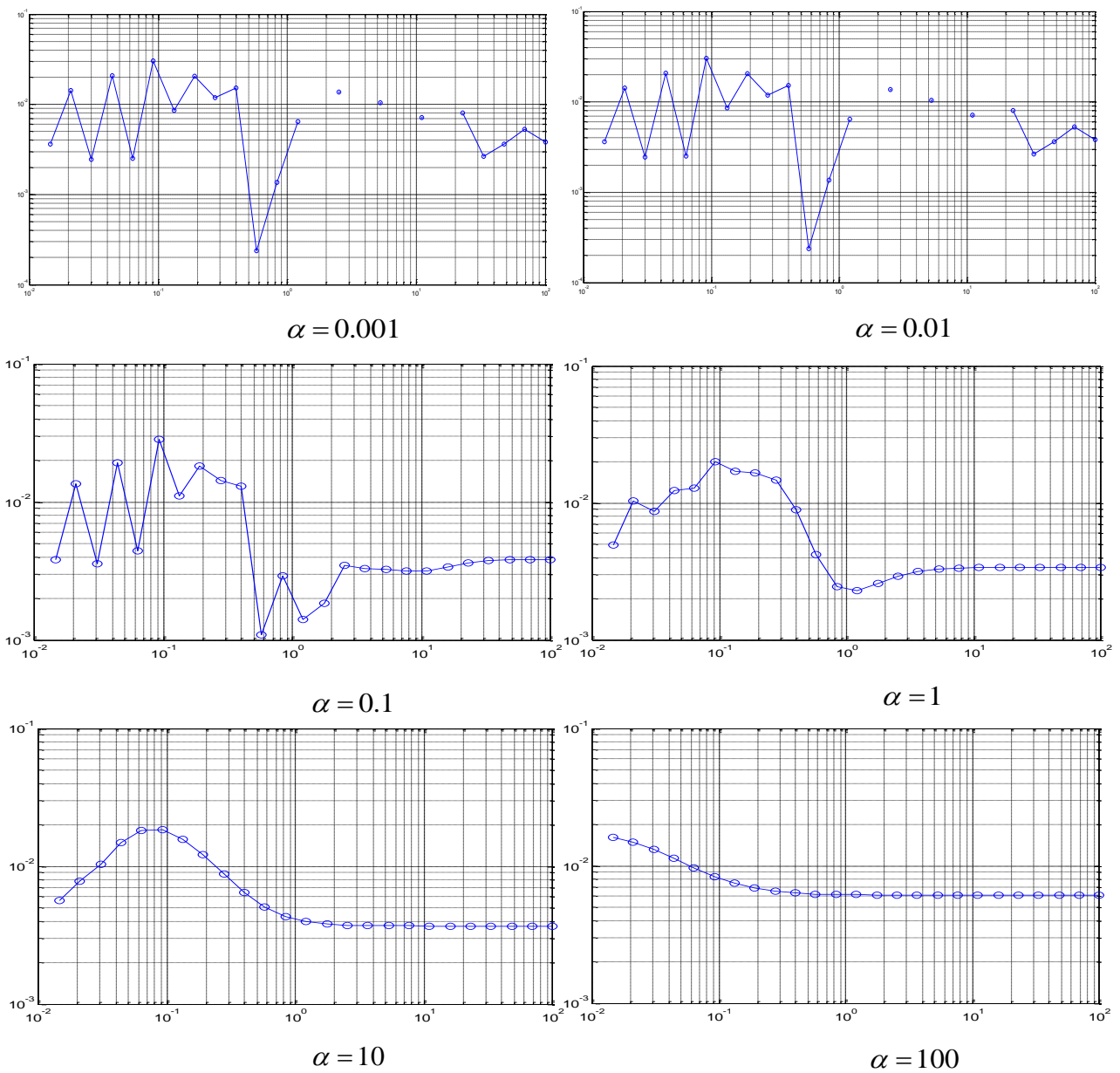


Figure V-13 : Variation de la solution (réponse impulsionnelle) en fonction de paramètre de régularisation α

V. APPLICATION DE LA REGULARISATION AUX TESTS DRAW DOWN ET MULTI-RATE

Lorsque nous traçons la courbe $\log\|Lx\|$ vs $\log\|Ax - y\|$ nous obtenons une courbe sous forme L.

Le paramètre λ optimale représente le point de corner de L_curve i.e. le point qui représente de maximum courbure.

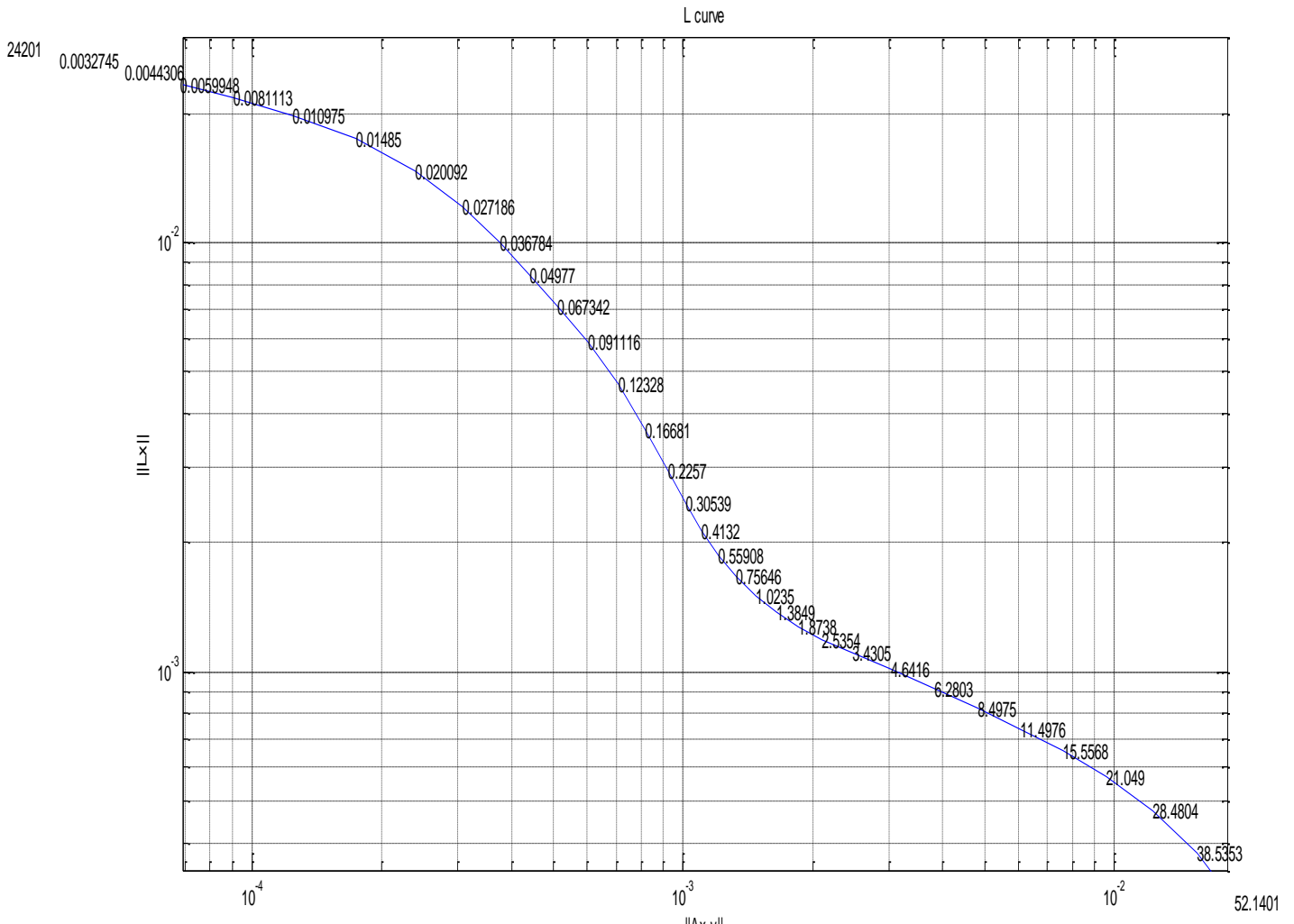


Figure V-14: la courbe L pour le calcul de la dérivée

Le calcul de α optimal par un code qui calcule le maximum de courbure de L-curve donne : $\lambda = 1.539$

V. APPLICATION DE LA REGULARISATION AUX TESTS DRAW DOWN ET MULTI-RATE

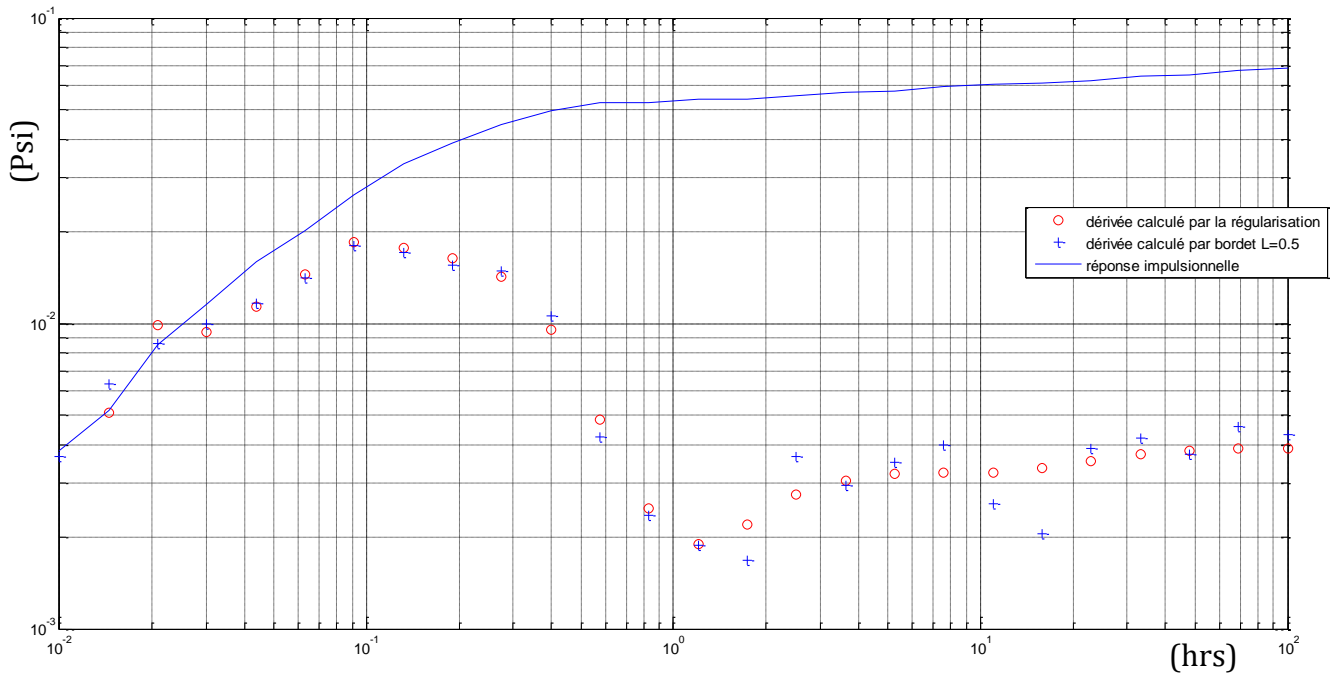


Figure V-15: Comparaisons de la dérivée calculée par la régularisation avec la dérivée calculé par bordet

V.3 APPLICATION SUR UN TEST MULTI-RATE

V.3.1 Données de base

Soit le test est multi-rate avec écoulement monophasique compressible (gaz) dans un réservoir supposé homogène ayant les données suivantes :

Propriétés de fluide :

$$B_o = 1.222 \text{ bbl/Mscf}$$

$$c_t = 1.155 \cdot 10^{-5} \text{ psi}^{-1}$$

$$\mu_o = 1.061 \text{ cp}$$

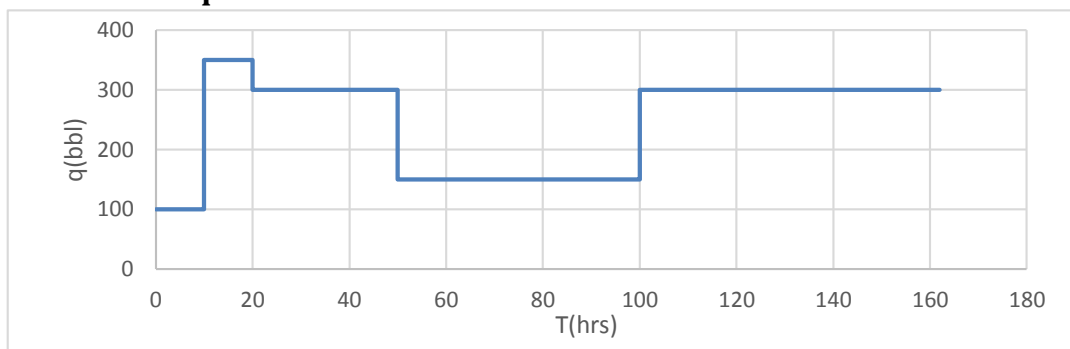
Propriétés du réservoir :

$$\phi = 0.19$$

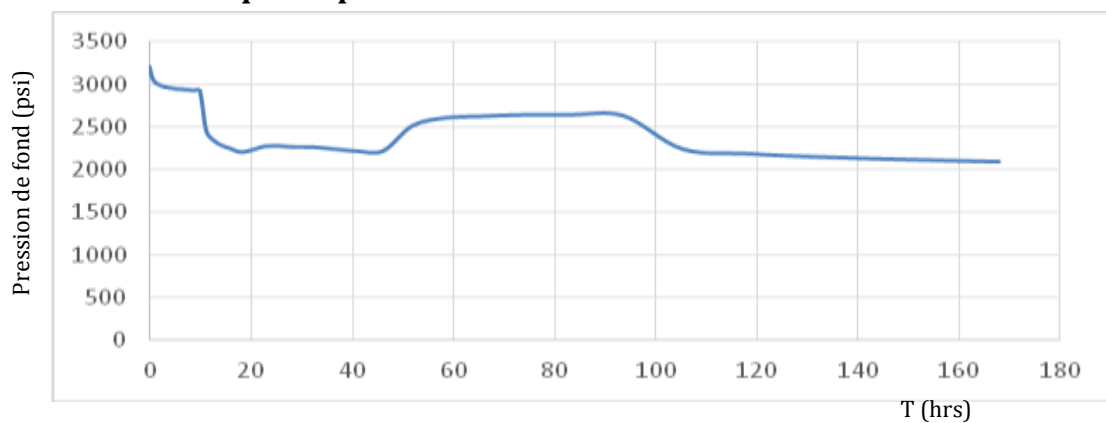
$$r_w = 0.333 \text{ ft}$$

$$h = 17 \text{ ft}$$

Historique de débit :



Historique de pression :



V.3.2 Calcul de réponse impulsionnelle :

Nous rappelons l'équation de Duhamel :

$$\Delta p(t) = \int_0^t q(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \Delta p_u(\tau) d\tau \dots\dots\dots V-16$$

En discrétisant ce produit de convolution on obtient le système suivant :

$$\Delta p = Q \Delta p_u \dots\dots\dots V-17$$

Avec :

$$\Delta p = \begin{pmatrix} \Delta p(t_1) \\ \Delta p(t_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p(t_i) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p(t_{n+1}) \end{pmatrix} \dots\dots\dots V-18$$

Vecteur de perte de charge.

$$\Delta p_u = \begin{pmatrix} \Delta p_u(t_1) \\ \Delta p_u(t_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p_u(t_i) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta p_u(t_{n+1}) \end{pmatrix} \dots\dots\dots V-19$$

Vecteur de la réponse impulsionnelle.

$$Q_{ij} = \begin{cases} q(t_i - t_{j-1}) - q(t_i - t_j) & \text{si } t_i \geq t_j \\ 0 & \text{si } t_i < t_j \end{cases} \dots\dots\dots V-20$$

Le calcul de la réponse impulsionnelle revient à résoudre le système linéaire V-17 :

Alors :

$$\Delta p_u = Q^{-1} \Delta p \dots\dots\dots V-21$$

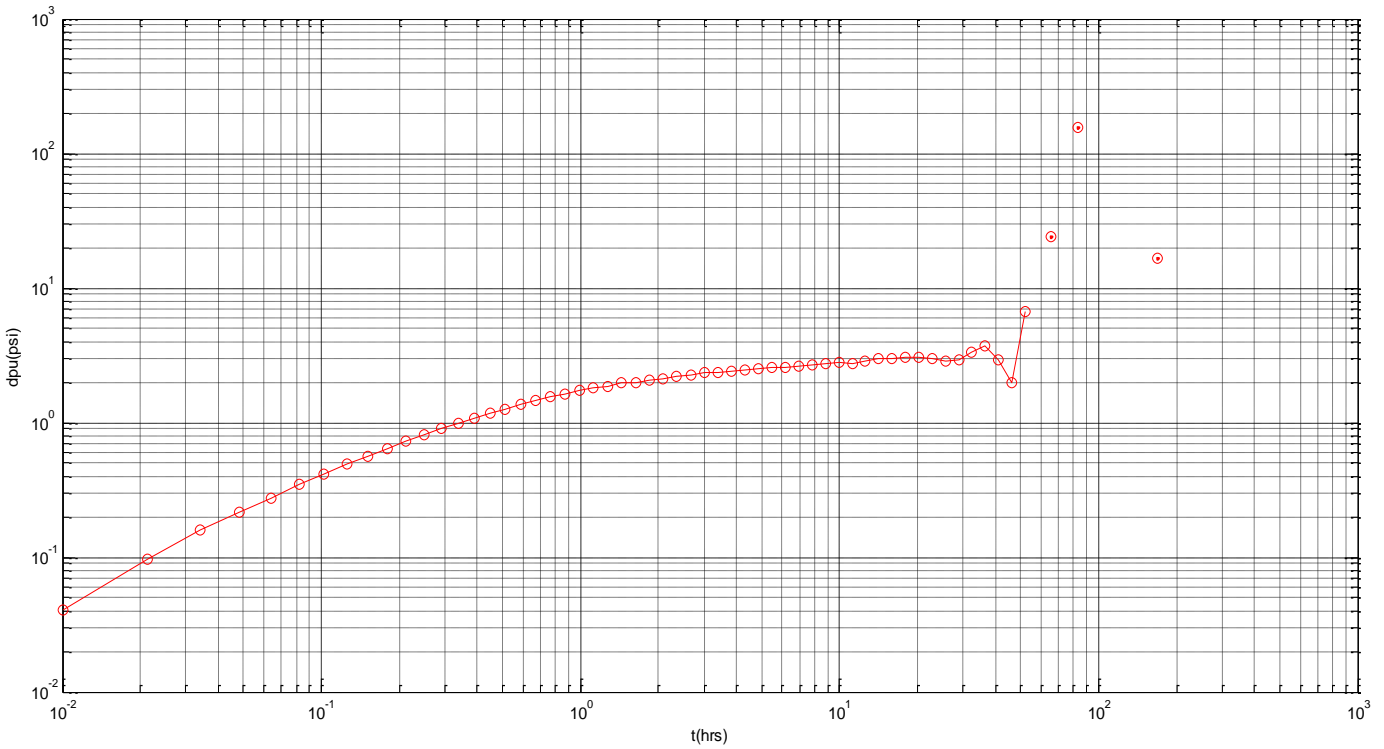


Figure V-16: Réponse impulsionnelle calculé sans faire de régularisation

On remarque que la résolution classique de l'équation V-17 donne une courbe bruitée non interprétable.

En calculant le conditionnement de la matrice Q on trouve $cond(Q) = 7.5363 \cdot 10^4$ ce qui explique la difficulté de calcul de la solution par les méthodes classique (directe ou itérative).

Du fait que le conditionnement de la matrice Q est de l'ordre 10^4 , une erreur relative de 0.01% faite sur la mesure de pression peut provoquer une erreur relative d'ordre de 100% sur l'estimation de la réponse impulsionnelle.

Application de la régularisation :

Le calcul de la réponse impulsionnelle revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min \left(\|Q \Delta p_u - \Delta p\|_2 + \lambda \|L \Delta p_u\|_2 \right)$$

L : Opérateur de différence logarithmique.

λ : Paramètre de régularisation.

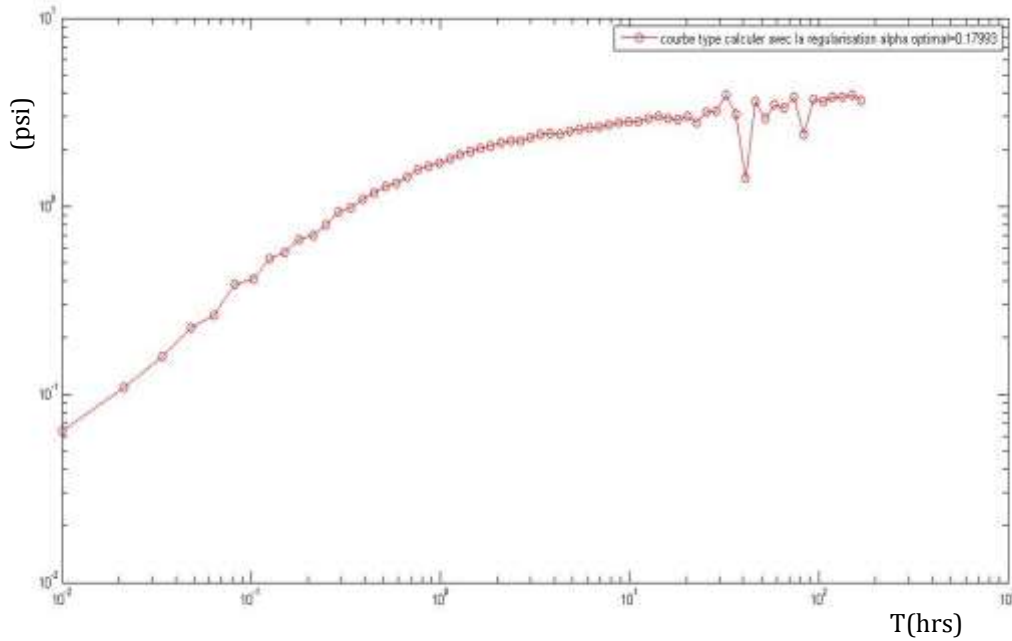


Figure V-18: Réponse impulsionnelle de test multi-rate ($L=I$)

Nous constatons que la courbe représente des variations brusques et cela est dû au choix de la fonction objective $L = I$.

Pour avoir un bon lissage de la courbe, il faut bien choisir la fonction objective. Comme l'écoulement présent dans le réservoir est une fonction de t^n où bien $\log t$, alors on propose d'introduire une fonction objective sur la dérivée logarithmique de la pression i.e. le problème revient à la minimisation de :

$$\|Q\Delta p_u - \Delta p\|_2 + \lambda \|L\Delta p_u\|_2$$

Avec :

$$L = \begin{pmatrix} -t_1 & t_1 & & & & \\ \cdot & -t_2 & t_2 & & & \\ \cdot & \cdot & -t_3 & t_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & -t_{n-1} & t_{n-1} \end{pmatrix}$$

Après le changement de la fonction objective on obtient une nouvelle courbe L avec un $\lambda_{optimal} = 0.049224$

V. APPLICATION DE LA REGULARISATION AUX TESTS DRAW DOWN ET MULTI-RATE

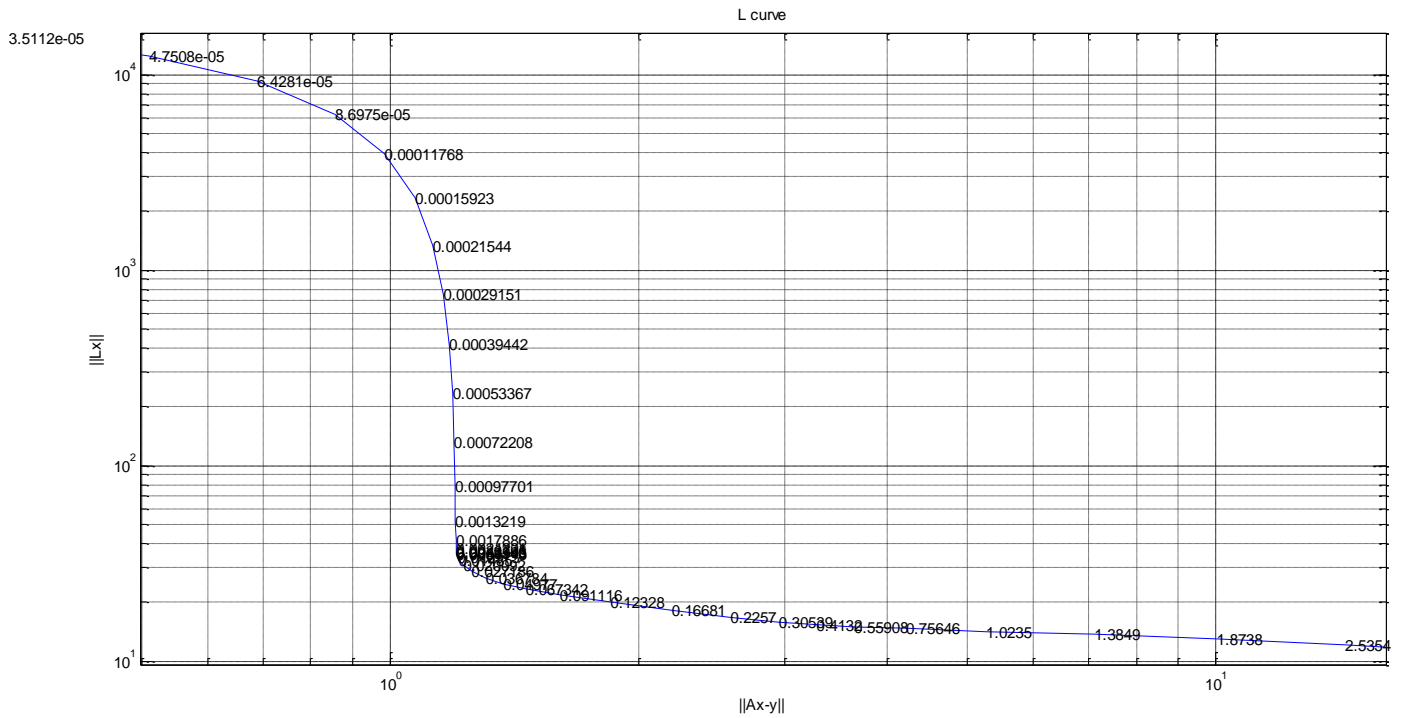


Figure V-19: Courbe L de test multi-rate après le changement de la fonction objectif

La nouvelle solution obtenue est présentée par le graphe suivant :

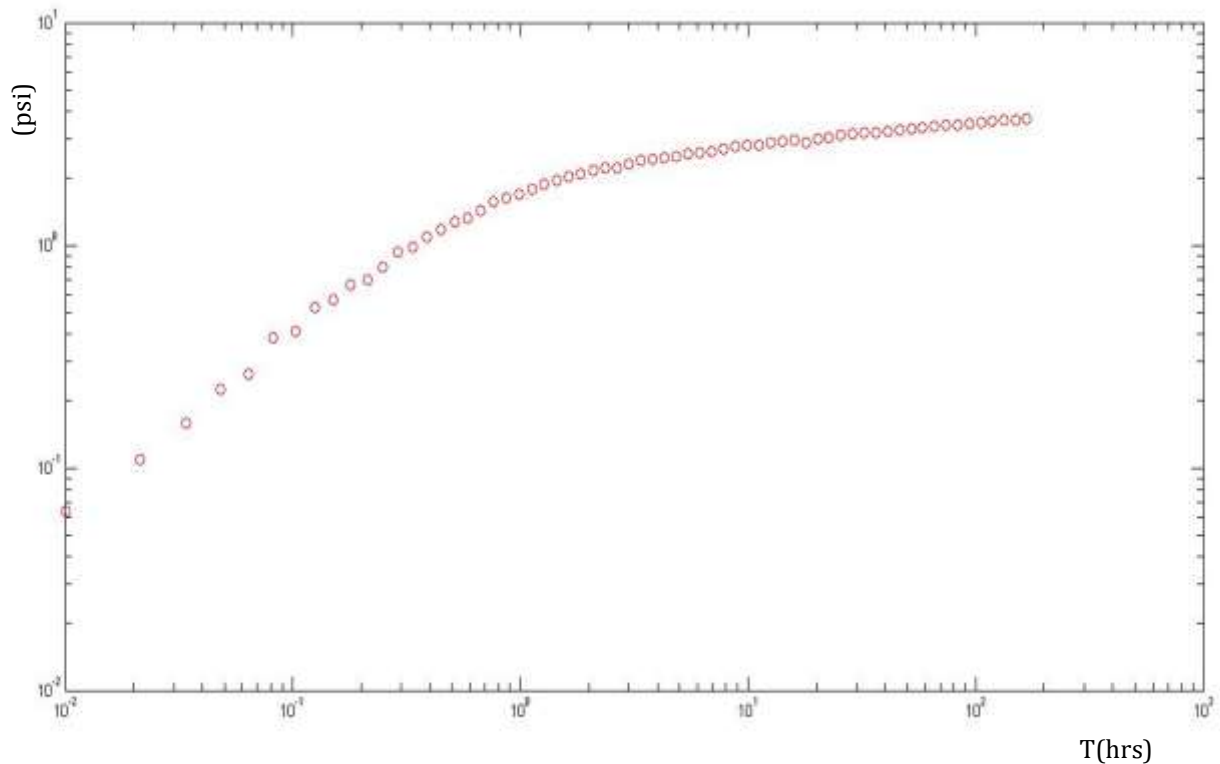


Figure V-20: Réponse impulsionnelle de test multi-rate après le changement de la fonction objectif.

On remarque que la fonction objective proposée élimine la variation rapide de la solution et rend la courbe lisse.

V.4 CONCLUSION

Pour conclure cette partie, nous dirons que par rapport aux méthodes classiques de calcul de la réponse impulsionnelle et sa dérivée, les méthodes de régularisation sont les plus précises et présentent un grand avantage dans la robustesse du calcul des résultats. En effet, les variations des sorties sont peu sensibles à de faibles fluctuations des entrées (données du problème).

Les méthodes de régularisation présentent cependant une difficulté majeure qui décourage bien souvent leur mise en œuvre, car elles nécessitent en effet, la détermination du coefficient α dit de régularisation qui dépend de la justesse des résultats.

Enfin, tous les problèmes des essais du puits peuvent être considérés comme des problèmes mal-posés, soit pour le calcul de la réponse impulsionnelle et sa dérivée (test multi-rate), soit pour le calcul de la dérivée (test draw-down ou build-up). Pour cela, il est recommandé de considérer les solutions à base des méthodes de régularisation qui apparaissent pratiques et performantes.

CONCLUSION GENERALE

Au cours de ce travail, nous avons vu que l'application de la méthode de déconvolution nous permet d'avoir la réponse du réservoir pour n'importe quel historique de débit produit par le puits. Cette réponse demeure toujours une étape essentielle pour la caractérisation.

Les erreurs engendrées lors de l'enregistrement des mesures de pression de fond rende l'algorithme de déconvolution mal-posé et donne une solution non interprétable par l'ingénieur. De ce fait, l'application de la technique de régularisation pour l'obtention d'une bonne réponse est considérée comme un outil très puissant pour résoudre ce type de problème mal posé.

Nous avons démontré dans cette étude pour le cas de nos applications, que le choix de la dérivée logarithmique de pression comme une fonction objective est un très bon choix pour éliminer les variations rapides de la pression, ce qui rend la courbe plus lisse et facile à l'interprétation.

L'utilisation de la technique de régularisation pour le calcul de la dérivée de la pression est bien plus adaptée que la méthode de Bourdet.

L'association des méthodes conventionnelles et modernes conduit à des interprétations très fines, donc très sensibles à la qualité des mesures. Il est particulièrement important de choisir des appareils de mesures adaptés aux informations qu'on veut tirer d'un essai. Par exemple, sans parler des tests d'interférences, la recherche d'un effet de fissuration peut justifier l'emploi de capteurs de pression très sensibles. Dans tous les cas, il faut rechercher les essais les plus simples possibles (une seule période de débit suivie d'une fermeture).

L'objectif projeté initialement dans ce travail a été atteint. Nous avons d'une part, développé et implémenté un code de calcul de la réponse impulsionnelle et sa dérivée relative à n'importe quel historique de production et d'autre part, éliminer ou alors minimiser dans les meilleurs des cas possibles l'influence de l'erreur sur le résultat calculé.

REFERENCES

- [1]. Resolution of ill-posed problems and the regularization method. Tikhonov, A. 1963, Doklady Akademii Nauk SSSR, pp. 501-504.
- [2]. Deconvolution of Well Test Data as a Nonlinear Total Least Squares Problem. von Schroeter, T, Hollaender, F et Gringarten, A. C. 71574, 2001, SPE.
- [3]. Daviau, F. Interprétation des essais de puits: les méthodes nouvelles. Paris : Technip, 1986. 2.7 108-0510-3.
- [4]. Use of data on the buildup of bottom hole pressures. Muskat, Morris. 1936, AIME, pp. 44-48.
- [5]. Pressure buildup in wells. HORNER, D. R. 1951.
- [6]. The estimation of permeability and reservoir. Miller, C, Dyes, A et Hutchinson, C. 1953, AIME, pp. 91-104.
- [7]. Determination of average pressure in a bounded reservoir. Matthews, C, Brons, F et Hazebroek, P. 1954, AIME, pp. 182-191.
- [8]. Matthews, C et Russell, D. Pressure buildup and flow tests in wells. Texas : SPE, 1967.
- [9]. A note on the skin effect. Hawkins, M. 1956, Journal of Petroleum Technology, pp. 65-66.
- [10]. The skin effect and its influence on the productive capacity of a well testing. van Everdingen, A. 1953, AIME, pp. 14-27.
- [11]. Establishment of the skin effect and its impediment to fluid flow into a wellbore. Hurst, W. 1953, SPE, pp. 6-16.
- [12]. The effect of restricted fluid entry on well productivity. Brons, F et Marting, V. E. 1961, Journal of Petroleum Technology, pp. 172-174.
- [13]. Non-steady flow to a well partially penetrating an infinite leaky aquifer. Hantush, M. S. 1957, Proceedings of the Iraqi Scientific Societies,, pp. 10-19.

- [14]. The effect of partial penetration on pressure build-up in oil wells. Nisle, R. G. 1958, AIME, pp. 85-90.
- [15]. The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs. van Everdingen, A et Hurst, W. 1949, AIME, pp. 305-324.
- [16]. Basic Concepts in the Theory of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks. Barenblatt, G, Zheltov, I.P. et Kochina. 1960, USSR, pp. 1286-1303.
- [17]. Behavior of Naturally' Fractured Reservoirs. Warren, J. E et Root, P. J. 1986, SPE, pp. 245-255.
- [18]. Well Pressure Behavior of a Naturally Fractured Reservoir. Streltsova, T.D. 1983, SPEJ.
- [19]. Unsteady-State Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. Odeh, A.S. 1965, SPE, pp. 60-64.
- [20]. Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distribution. Kazemi, H. 1969, SPE, pp. 451-462.
- [21]. A Theory for Pressure Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoirs. Najurieta, H.L. 1980, J. P. T.
- [22]. The Practical Aspects of Interlayer Crossflow. Russell, D.G et Prats, M. 1962, J. Pet. Tech, pp. 53-67.
- [23]. Polubarinova, Kocina. Theory of groundwater Movement. Princeton Univ : Princeton, 1962.
- [24]. Single-Phase Fluid Flow in a Stratified Porous Medium With Crossflow. Gao, C-T. 1984, SPEJ, pp. 97-106.
- [25]. Single-Well Pressure Testing Solutions for Naturally Fractured Reservoirs With Arbitrary Fracture Connectivity. Wijesinghe, A.M et Culham, W.E. 1984, SPE.
- [26]. Pressure Behavior of Layered Reservoirs with Crossflow. Bourdet, D. 1985, SPE.

- [27]. Well Test Analysis for Wells Producing Layered Reservoirs With Crossflow. Prijambodo, R, Raghavan, R et Reynolds, A.C. 1985, SPEJ, pp. 380-396.
- [28]. Short-Time Well Test Data Interpretation in The Presence of Skin Effect and Wellbore Storage. Ramey, H. J. 1970, SPE.
- [29]. An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effect in Unsteady Liquid Flow. I: Analytical Treatment. Agarwal, R.G, Al-Hussainy, R et Ramey, H. J. 1970, SPE.
- [30]. Wellbore Transmissibility from Afterflow Dominated Pressure Build-up data. McKinley, R. M. 1971, J. Pet. Tech.
- [31]. Analysis of Short-Time Transient Test Data by Type-Curve Matching. Earlougher, R. C et Kersh, K. M. 1974, J. Pet. Tech, pp. 793-800.
- [32]. A Comparison between Different Skin and Wellbore Storage Type-Curves for Early-Time Transient Analysis. Gringarten, A.C, et al. 1979, SPE.
- [33]. An Approximate Infinite Conductivity Solution for a Partially Penetrating Line-Source Well. Gringarten, A. C et Ramey.H. 1975, SPE, pp. 347-360.
- [34]. Transient Pressure Analysis for Fractured Wells. Cinco-Ley, H et Samaniego-V, F. 1978, SPE.
- [35]. Reservoir Limit Testing for Fractured Wells. Gringarten, A. C. 1978, SPE.
- [36]. Determination of Fissure Volume and Block Size in Fractured Reservoirs by Type-Curve Analysis. Bourdet, D et Gringarten, A. C. 1980, SPE.
- [37]. Pressure-Derivative Type Curves for Vertically Fractured wells. Tiab, D et Puthigai, S. K. 1988, SPE.
- [38]. Application of PD' Function to Interference Analysis. Tiab, D et Kumar, A. 1980, J.Pet.Tech.
- [39]. A new set of type curves simplifies well test analysis. Bourdet, D, Whittle, T et Douglas, A. 1983, World Oil, pp. 95-106.
- [40]. How to Simplify The Analysis of Fractured Well Tests. Alagoa, A, Bourdet, D et Ayoub, J.A. 1985, World Oil.

- [41]. New Skin and Wellbore Storage Type Curves for Partially Penetrated Wells. Kuchuk, F.J et Kirwan, P.A. 1987, SPE, pp. 546-554.
- [42]. A modern approach to reservoir testing. Ehlig-Economides, C, et al. 1990, J.Pet.Tech.
- [43]. Computer-Aided Well Test Analysis. Gringarten, A.C. 1986, SPE, pp. 429-444.
- [44]. Richard C, Aster, Brochers, Brian et H.Thurber, Clifford. Parameter Estimation and Inverse Problems. oxford : Elsevier, 2005. 0-12-065604-3.
- [45]. Kuchuk, F.J, Onur, M et Hollaender, F. PRESSURE TRANSIENT FORMATION AND WELL TESTNG. Oxford : Elsevier, 2010. 978-0-444-52953-4.
- [46]. A deconvolution algorithm for analysis of variable-rate well test pressure data. Mendes, L, Tygel, M et Correa, A. 1989, SPE.
- [47]. Combined analysis of postfracturing performance and pressure buildup data for evaluating an MHF gas well. Bostic, J, Agarwal, R et Carter, R. 1980, J.Pet.Tech.
- [48]. Unit response function from varying-rate data. Jargon, J et van Poolen, H. 1965, J.Pet.Tech.
- [49]. Analysis of simultaneously measured pressure and sandface flow rate in transient testing. Kuchuk, F et Ayestaran. 1983, SPE.
- [50]. Analysis of variable-rate well-test pressure data using Duhamels principle. Thompson, L et Reynolds, A. 1986, SPE, pp. 453-469.
- [51]. Well-test-model recognition with Laplace space. Bourgeois, M et Horne, R. 1993, SPE, pp. 17-25.
- [52]. Numerical Laplace transformation of sampled-data for well test analysis. Onur, M et Reynolds, A. C. 1998, SPE.
- [53]. Deconvolution of well-test data as a nonlinear total least-squares problem. von Schroeter, T., Hollaender, F et Gringarten, A. 2004, SPE.

- [54]. Practical application of pressure/rate deconvolution to analysis of real well tests. Levitan, M.M. 2005, SPE, pp. 113-121.
- [55]. Practical considerations for pressure-rate deconvolution of well-test data. Levitan, M. M, Crawford, G. E et Hardwick. 2006, SPE, pp. 35-47.
- [56]. A new robust algorithm for solution of pressure/rate deconvolution problem. Pimonov, E, Onur, M et Kuchuk, F. 2009, Journal of Inverse and Ill-posed Problems.
- [57]. A new pressure/rate deconvolution algorithm to analyze wireline formation tester and well-test data. Pimonov, E, et al. 2009, SPE.
- [58]. An investigation of recent deconvolution methods for well-test data analysis. Onur, M, et al. 2008, SPE, pp. 226-247.
- [59]. Mukat, Morris. The flow of homogeneous fluids through porous media. Michigan : J.W Edwards, 1937.
- [60]. Démodovitch, B et Maron, I. élément de calcul numérique. moscou : mir, 1979.
- [61]. Pressure analysis of multiple-sealing-fault systems and. Tiab, D et Crichlow, H. B. 1979, SPE.
- [62]. Interpreting Well Test in Fractured Reservoirs. Bourdet, D, et al. 1983, World Oil.
- [63]. —.Mendes, L, Tygel, M et Correa, A. 1989, SPE.
- [64]. The analysis of gas well test data distorted by wellbore storage using an explicit deconvolution method. Blasingame, T, et al. 1989, SPE.
- [65]. Roland, Horne. MODERN WELL TEST ANALYSIS. standford : Petroway, 1990. 0-9626992-0-9.
- [66]. Qingchang, Ren. PREDICTION ERROR METHOD FOR IDENTIFICATION OF A HEAT EXCHANGER. Eindhoven : Eindhoven, 1990. 90-6144-237-0.
- [67]. RAGHAVAN, RAJAGOPAL. Well Test Analysis. New jersey : Prentice Hall, 1993. 0-13-953365-6.

- [68]. Fortin, André. Analyse numérique pour ingénieurs. Montréal : école polytechnique de montréal, 1994.
- [69]. Mokhari, M et Mesbah, A. Apprendre et Maîtriser MATLAB. Berlin : Springer, 1997. 3-540-62773-1.
- [70]. Ahmed, Tarek. reservoir engineering. Texas : Gulf Professional Publishing, 2001. 0-88415-770-9.
- [71]. BOURDET, DOMINIQUE. THE USE OF ADVANCED INTERPRETATION MODELS. paris : elsevier, 2002. 0-444-50968-2.
- [72]. Application of different optimization techniques to parameter estimation from interference well test data. Mengen, A et Onur, M. 2004, Turkish Journal of Oil and Gas.
- [73]. Henryk, Gzyl et Yurayh, Velásquez. LINEAR INVERSE PROBLEMS. London : World Scientific Publishing, 2011. 978-981-4338-77-6.
- [74]. PISKONOV.N. Calcul Différentiel et intégral:tome1. MOSCOU : MIR, 1980.
- [75]. DITKINE.V et PROUODNIKOV.A Transformations intégrales et calcul opérationnel .MOSCOU : MIR, 1978