

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : **Mathématiques Financières**

Présenté par : ***Dakiche** Chahinez*

***Attouche** katia*

## THÈME

# Processus stochastique discontinu et application en finance

Soutenu devant le jury composé de :

*Mr.K.Khaldi*                      *UMBB*    *Président*

*Mr.Zitouni*                      *UMBB*    *Examineur*

*Mme.S.MEDDAHI*              *UMBB*    *Promotrice*

# ❀ *Dédicaces* ❀

*Je dédie ce travail*

*A **Dieu** ,source de toute vie et tout amour.*

*Au meilleur des pères.*

*qui a tant travaillé pour moi.*

*A ma très chère maman.*

*Qu'elle trouve en moi la source de fierté.*

*A qui je dois tout.*

*A mes chères sœurs **Imen, Nahla et Hidaya** et leurs enfants **Nissou,***

***Wassim, Ritedj, Miral, M<sup>ed</sup> Amine et Rayane** pour leur soutien*

*moral.*

*A mon seul et cher frère **Krimo** ... pour ses encouragements.*

*A mes chères amies **Hadjer, Ichrak, Madjda et Mimi***

*A tous ceux qui me sont chers.*

Dakiche Chahinez

# ❀ *Dédicaces* ❀

*Je dédie ce travail*

*A Dieu, source de ma vie*

*A mes chers parent qui m'ont soutenu a chaque étape de ma vie et qui m'ont  
encouragés a atteindre mes objectifs .*

*Je suis fier de vous*

*A ma grand mère **FATIMA ZAHRA** à qui je prie Dieu de la faire parmi  
les persons au paradis*

*A ma soeur **Nawel***

*A mon marie **Fares***

*A ma chère amie **Sarra***

*A toute ma famille chacun par son nom*

*A tous ce qui m'aiment*

*Attouche Katia*

# ❀Remerciement❀

*On remercie tout d'abord **DIEU** le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.*

*Nos profonds remerciements et nos vives reconnaissances vont à notre encadreur Madame **Meddahi.S** pour nous avoir encadré et dirigé ce travail et pour son aide, sa disponibilité et ses précieux conseils.. Elle nous a guidée, toujours de façon très positive. Sans elle ce travail ne serait pas aussi riche..*

*Toutes nos reconnaissances aux membres du jury monsieur **Khaldi** et **Zitouni** qui nous feront l'honneur de juger notre modeste travail.*

*Nos remerciements s'adressent à monsieur **Ferrani** pour ses efforts, sa grande patience, sa disponibilité et sa gentillesse. Ses portes étaient toujours ouvertes pour nous. Un très grand merci à vous monsieur...*

*Sans oublier la plus gentille «Ichrak » pour son aide, sa patience et ses conseils. Merci du fond du cœur à toi.*

*Nos sincères sentiments et remerciements vont à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce projet, particulièrement nos chères familles pour leur contribution, leur soutien et leur patience, ainsi qu'à tous nos amis(es).*

# ABRÉVIATIONS

|            |                                             |
|------------|---------------------------------------------|
| <i>EDO</i> | Equation différentielle ordinaire.          |
| <i>EDS</i> | Equation différentielle stochastique.       |
| <i>MB</i>  | Mouvement Brownien.                         |
| <i>BS</i>  | Black-Scholes.                              |
| <i>EMV</i> | Estimation du Maximum de Vraisemblance.     |
| i.i.d      | Indépendantes et identiquement distribuées. |

# LISTE DES SYMBOLES

|                            |                                           |
|----------------------------|-------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$               | Ensemble des nombres réels.               |
| $\mathbb{R}^+$             | Ensemble des réels positifs.              |
| $\Omega$                   | Un Ensemble des resultats possibles .     |
| $\mathcal{F}$              | Une tribu sur $\Omega$ .                  |
| $\mathbb{P}$               | Probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ . |
| $B_t$                      | Mouvement brownien.                       |
| $p.s$                      | Presque sûrement.                         |
| $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ | Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ .       |
| $X$                        | Processus Martingale.                     |
| $t$                        | Temps.                                    |

# LISTE DES TABLEAUX

|               |                                                                                                                                                                                                 |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tableau (4.1) | Prix des options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par la solution analytique du Black-Scholes,<br>$S_0 = 100$ , $K = 100$ , $\sigma = 0.3$ , $r=0.05$ et $T=5$ . |
| Tableau (4.2) | Valeurs de l'option et ses paramètres.                                                                                                                                                          |

# LISTE DES FIGURES

|            |                                                                                     |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Figure 3.1 | Achat d'une option call                                                             |
| Figure 3.2 | Vente d'une option call                                                             |
| Figure 4.1 | Simulation de la Solution Analytique du modèle de Black-Scholes                     |
| Figure 4.2 | Simulation du modèle avec sauts de Merton                                           |
| Figure 4.3 | Simulation de modèle de Black-Scholes (sans sauts) et modèle de Merton (avec sauts) |



# TABLE DES MATIÈRES

|                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>                                | <b>11</b> |
| <b>1 Calcul Stochastique</b>                                | <b>13</b> |
| 1.1 Rappels sur les probabilités . . . . .                  | 14        |
| 1.1.1 Tribu . . . . .                                       | 14        |
| 1.1.2 Probabilité . . . . .                                 | 14        |
| 1.2 Processus stochastique . . . . .                        | 15        |
| 1.2.1 Processus stochastique en temps discontinue . . . . . | 15        |
| 1.2.2 Filtration . . . . .                                  | 16        |
| 1.2.3 Espérance conditionnelle . . . . .                    | 16        |
| 1.2.4 Processus adapté . . . . .                            | 16        |
| 1.2.5 Martingale en temps discret . . . . .                 | 17        |
| 1.2.6 Temps d'arrêt . . . . .                               | 17        |
| 1.3 Mouvement Brownien . . . . .                            | 18        |
| 1.3.1 Définition . . . . .                                  | 18        |
| 1.3.2 Théorème : théorème de Donsker . . . . .              | 18        |

---

|          |                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| 1.3.3    | Propriétés . . . . .                                    | 19        |
| 1.3.4    | Pont brownien . . . . .                                 | 21        |
| 1.3.5    | Brownien géométrique . . . . .                          | 21        |
| 1.4      | Calcul d'Itô . . . . .                                  | 22        |
| 1.4.1    | Processus d'Itô . . . . .                               | 22        |
| 1.4.2    | Formule d'Itô . . . . .                                 | 23        |
| 1.4.3    | Exemple d'utilisation de la formule d'Itô . . . . .     | 24        |
| 1.5      | Equations différentielles stochastiques . . . . .       | 25        |
| 1.5.1    | Définition . . . . .                                    | 26        |
| 1.5.2    | Existence et unicité de solution . . . . .              | 27        |
| <b>2</b> | <b>Options et formule de Black et Scholes</b>           | <b>28</b> |
| 2.1      | Options . . . . .                                       | 29        |
| 2.1.1    | Définition . . . . .                                    | 29        |
| 2.1.2    | Les stratégies de base des Options . . . . .            | 29        |
| 2.1.3    | Parité Put-Call . . . . .                               | 31        |
| 2.1.4    | Les problèmes liés aux options . . . . .                | 33        |
| 2.1.5    | Définitions . . . . .                                   | 33        |
| 2.2      | Modèle de Black et Scholes . . . . .                    | 34        |
| 2.2.1    | Présentation de modèle de Black et Scholes . . . . .    | 35        |
| 2.2.2    | L'obtention de l'équation de Black et Scholes . . . . . | 35        |
| 2.2.3    | Solution de l'équation . . . . .                        | 36        |
| 2.2.4    | Equation aux dérivées partielles . . . . .              | 38        |
| 2.2.5    | Formule de Black et Scholes . . . . .                   | 39        |
| 2.2.6    | Les rendements . . . . .                                | 41        |
| 2.2.7    | Estimation des paramètres . . . . .                     | 41        |
| <b>3</b> | <b>Modèle à sauts de Merton</b>                         | <b>46</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .                                  | 47        |
| 3.2      | Présentation du modèle . . . . .                        | 47        |
| 3.3      | Loi du rendement . . . . .                              | 51        |

---

---

|          |                                                                               |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.4      | Tests de la validité du modèle . . . . .                                      | 53        |
| 3.4.1    | Test d'adéquation du Khi-deux . . . . .                                       | 53        |
| 3.4.2    | Test "up and down" . . . . .                                                  | 54        |
| 3.4.3    | Test du rapport de vraisemblances . . . . .                                   | 55        |
| 3.5      | Estimation des paramètres . . . . .                                           | 55        |
| 3.5.1    | Méthode des moments . . . . .                                                 | 57        |
| 3.5.2    | Maximum de vraisemblance . . . . .                                            | 58        |
| 3.6      | Prix d'option d'achat . . . . .                                               | 59        |
| <b>4</b> | <b>Application en finance</b>                                                 | <b>61</b> |
| 4.1      | Simulations . . . . .                                                         | 62        |
| 4.1.1    | Simulation de modèle du Black-Scholes . . . . .                               | 62        |
| 4.1.2    | Simulation de modèle du Merton . . . . .                                      | 64        |
| 4.2      | Evaluations des options d'achat (Call) et de vente (Put) européenne . . . . . | 68        |
| 4.2.1    | Calcul de Call et Put avec le modèle de Black- Scholes . . . . .              | 68        |
| 4.2.2    | Calcul de Call avec le modèle à sauts de Merton . . . . .                     | 71        |
|          | <b>Conclusion générale</b>                                                    | <b>75</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>                                                          | <b>77</b> |

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les actifs financiers sont régis par des comportements aléatoires qui traduisent la complexité du monde économiques et politique. La mesure et la gestion des risques sont ainsi devenues des enjeux majeurs pour les opérateurs des marchés financiers, et intéressent les chercheurs du laboratoire de probabilités et modèles aléatoires. Les outils mathématiques que ces derniers développent offrent une modélisation et des méthodes quantitatives adaptées à la description et contrôle des risques financiers, en particulier ceux liés aux problèmes des options.

Les actifs financiers sont régis par des comportements aléatoires qui traduisent la complexité du monde économiques et politique. La mesure et la gestion des risques sont ainsi devenues des enjeux majeurs pour les opérateurs des marchés financiers, et intéressent les chercheurs du laboratoire de probabilités et modèles aléatoires. Les outils mathématiques que ces derniers développent offrent une modélisation et des méthodes quantitatives adaptées à la description et contrôle des risques financiers, en particulier ceux liés aux problèmes des options.

Bien que le modèle de Black-Scholes apporte une solution théorique et empirique aux problèmes d'évaluation des contrats d'options, il demeure toute fois tributaire d'un certain nombre d'hypothèses qui ne sont pas en accord avec les conditions concrètes du négoce des

---

options.

De plus, les études empiriques montrent que les trajectoires prises par les cours d'actifs financiers présentent des discontinuités, pour tenir compte des sauts qui peuvent se produire, des modèles à sauts ont été introduits, en décrivant l'arrivée des sauts par le processus de Poisson (Merton (1976)), ou par des processus mixtes Brownien Poisson (Bellamy(1999)), ou encore des martingales discontinues (Dritschel, Protter ((1999))).

Ce mémoire porte sur les modèles à sauts, processus stochastique discontinu de Merton.

Nous nous intéressons dans ce travail aux processus stochastique discontinu : modèle à sauts de Merton.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous nous rappelons les concepts de base de la théorie de probabilité et théorie des processus stochastiques. On introduira le mouvement brownien et ses propriétés principales, intégration stochastique et les équations différentielles stochastiques.

Ensuite dans le deuxième chapitre, on présente le modèle de Black-Scholes, en se basant essentiellement sur l'approche EDP pour valoriser une option européenne sur action, tout en exposant initialement des notions fondatrices liée à la compréhension de ce modèle.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation des actions financières avec le modèle à sauts de Merton (1976) ; nous présentons ce processus et nous tirons en suite la formule de ce modèle. Pour la simplicité, nous limitons notre attention au cas d'une option d'achat européenne. Aussi on présente des tests de validation du modèle.

Le quatrième chapitre présente l'application des méthodes et les graphes de simulation des prix du sous-jacent pour les deux modèles Black-Scholes et modèle à saut de Merton. ainsi les formules de calcul des options d'achat (Call) et de vente( Put) avec le modèle de Black Scholes. On termine avec l'évaluation d'option d'achat européen avec modèle à saut de Merton. Nous utilisons le logiciel MATLAB pour faire les simulations et l'évaluation d'option.

CHAPITRE

1

CALCUL STOCHASTIQUE

## 1.1 Rappels sur les probabilités

### 1.1.1 Tribu

**Définition** Une tribu[1] ( $\sigma$ -algebra en Anglais)  $\mathcal{F}$  est une famille de parties de  $\Omega$ , contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable. Une tribu contient donc l'espace  $\Omega$ . Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu.

- i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$
- ii)  $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- iii)  $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}$

**Exemple**[2] : la tribu des boréliens de  $\mathbf{R}$ . C'est la plus petite tribu contenant tous les intervalles ouverts (ou fermés, ou ouverts à droite fermés à gauche...), On la note  $\mathcal{B}_R$ . On peut trouver des sous ensembles de  $\mathbf{R}$  qui ne sont pas des boréliens, mais ils sont difficiles à exhiber.

### 1.1.2 Probabilité

**Définition**[3] : Une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est une application  $P$  de  $\mathcal{F}$  dans  $[0, 1]$  telle que :

- i)  $P(\Omega) = 1$ ,
- ii)  $P(\bigcup_{n=0}^\infty A_n) = \sum_{n=0}^\infty P(A_n)$  pour des  $A_n$  appartenant à  $\mathcal{F}$  deux à deux disjoints.

Notation :  $P(A) = \int_A dP = \int_\Omega \mathbb{1}_A dP$  ou  $\mathbb{1}$  (fonction indicatrice) est la fonction définie sur  $\Omega$  par  $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$  si  $\omega \in A$  et  $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$  si  $\omega \notin A$

**Propriétés** : On a  $P(A) + P(A^c) = 1$  pour tout  $A$  appartenant à  $\mathcal{F}$ .

Si  $A \subset B$ , alors  $P(A) \leq P(B)$  et  $P(B) = P(A) + P(BA)$ , ou  $BA = B \cap A^c$ .

Si les  $A_n$  forment une suite croissante (resp. décroissante) d'éléments de  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire si  $A_n \subset A_{n+1}$  (resp.  $A_n \supset A_{n+1}$ ), et si  $A = \bigcup A_n$  (resp.  $A = \bigcap A_n$ ) alors  $A$  appartient à  $\mathcal{F}$  et  $P(A) = \lim P(A_n)$ .

**Ensembles négligeables :** Un ensemble est dit négligeable<sup>[5]</sup> s'il est de probabilité nulle. Une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. Une propriété est vraie presque sûrement (p.s.) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.

On dit aussi que la propriété est vraie pour presque tout  $\omega$ . Un espace  $(\Omega, \mathbf{F}, P)$  est dit complet s'il contient tous les ensembles  $G$  tels que  $\inf\{P(F) : F \in \mathbf{F}, G \subset F\}$

## 1.2 Processus stochastique

Les processus stochastiques<sup>[6]</sup> permettent de représenter l'évolution dans le temps de phénomènes aléatoires. Le mouvement d'une particule dans l'espace, la transmission d'un signal, le passage dans le temps d'un système à différents états, la variation des cours d'actifs sur un marché, etc..., en sont des exemples.

Dans la pratique, on se fixe un ensemble  $T \in \mathbf{R}^+$  d'instantants d'observation du phénomène étudié.

1. Si  $T$  est un intervalle  $[a, b]$  on dit que l'étude se fait en temps continu.
2. Si  $T$  est formé d'une suite d'observations  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ , on dit que l'étude se fait en temps discret.

### 1.2.1 Processus stochastique en temps discontinue

Le principe est le suivant : pour chaque temps  $t$  de  $T$ , le phénomène étudié est à un état aléatoire représenté par une v.a.  $X_t$  prenant ses valeurs parmi tous les états a priori possibles pour le phénomène. Le processus stochastique correspondant est alors défini par la donnée de la famille de v.a.  $(X_t)_{t \in T}$ . Un espace de probabilité  $(\Omega, \mathbf{F}, P)$  et une partie  $T$  de  $\mathbf{R}$  étant donnés, un processus stochastique sur l'espace des états  $E \subset R^+$  est une famille  $X = (X_t)_{t \in T}$  de v.a.

$$X_t : \omega \longrightarrow E, \quad t \in T$$



Pour tout  $\omega \in \Omega$  fixé, l'application

$$t \longrightarrow X_t(\omega)$$

s'appelle une trajectoire du processus.<sup>[6]</sup>

### 1.2.2 Filtration

Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité. Une filtration à temps discret  $(F_n)_{n \geq 0}$  sur cet espace est une famille croissante de sous-tribu de  $F$  :  $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F$ . On appelle  $(\Omega, F, (F_n), P)$  un espace de probabilité filtré.

Une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \geq 0)$  est appelée un processus aléatoire. L'indice  $n$  est normalement considéré comme un paramètre temporel.<sup>[3]</sup>

### 1.2.3 Espérance conditionnelle

Pour toute variable aléatoire réelle  $X$  positive (resp. intégrable), et pour toute sous-tribu  $\vartheta$  de  $F$ , il existe une variable aléatoire  $E(X|\vartheta)$ , unique à égalité presque sûre près, positive (resp. intégrable), telle que<sup>[6]</sup> :

- (i)  $E(X|\vartheta)$  est  $\vartheta$ -mesurable ;
- (ii) pour tout  $A \in \vartheta$ ,  $E(\mathbb{1}_A X) = E(\mathbb{1}_A E(X|\vartheta))$

La v.a.  $E(X|\vartheta)$  s'appelle l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\vartheta$ . Elle est définie à égalité presque sûre près ; on considérera le plus souvent la classe de v.a. correspondante (c'est-à-dire que l'on identifie entre elles les variables égales presque sûrement).<sup>[2]</sup>

### 1.2.4 Processus adapté

Soit  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un processus stochastique sur  $(\Omega, F, P)$ . On dit que le processus est adapté à la filtration  $F_n$  si  $X_n$  est mesurable par rapport à  $F_n$  pour tout  $n$ . Un choix

minimal de filtration adaptée est la filtration canonique (ou naturelle)  $F_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ . Dans ce cas,  $F_n$  représente l'information disponible au temps  $n$ , si l'on observe le processus stochastique.

### 1.2.5 Martingale en temps discret

On dit que  $(M_n)$  est une martingale[7] (resp. surmartingale ; sous-martingale) à temps discret par rapport à la filtration  $(F_n)$  si

- (i)  $(M_n)$  est adapté ;
- (ii)  $\forall n, E(|M_n|) < \infty$
- (iii)  $\forall n, E(M_{n+1}|F_n) = M_n$ , p.s (resp.,  $E(M_{n+1}|F_n) \leq M_n$  ;  $E(M_{n+1}|F_n) \geq M_n$ ).

On appellera de temps en temps (iii) l'inégalité caractéristique des sous-martingales (ou surmartingales) , ou l'identité caractéristique des martingales.

### 1.2.6 Temps d'arrêt

**Définition**[3] Un temps d'arrêt est une variable aléatoire  $\Gamma$  à valeur dans  $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  telle que  $\Gamma \leq t \in F_t, \forall t \in \mathbf{R}$ .

Une constante positive est un temps d'arrêt. On associe à un temps d'arrêt  $\Gamma$  la tribu  $F_\Gamma$  dite des événements antérieurs à  $\Gamma$  , définie par  $F_\Gamma = A \in F_\infty \mid A \cap \Gamma \preceq t \in F_t, \forall t \in \mathbf{R}$ .

**Propriété**[8] • Si  $T$  est un temps d'arrêt,  $T$  est  $F_T$  mesurable.

- Si  $S$  et  $T$  sont des temps d'arrêt,  $S \vee T$  est un temps d'arrêt. En particulier  $T \vee t$  est un temps d'arrêt.
- Si  $S$  et  $T$  sont des temps d'arrêt tels que  $S \leq T$ , on a  $F_S \subset F_T$  .
- Soit  $(X_t, t \geq 0)$  un processus et  $T$  un temps d'arrêt fini. On définit  $X_T$  par  $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$ .
- Si un processus  $X$  est continu et adapté,  $X_T$  est  $F_T$  -mesurable.

## 1.3 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien[9] joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines.

Le Mouvement Brownien a été découvert en 1827 par le botaniste Robert Brown (1773-1858).en observant de Pollen au microscope

Il fut introduit par Bachelier en 1900, pour des applications à la finance et a de nouveau, à l'heure actuelle, un rôle important en mathématiques financières. En 1905, Einstein détermine la densité de transition du mouvement Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique.

La même année, Smoluchowski décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires.

Soit l'espace de probabilité  $(\Omega, F, P)$  et le processus  $(B_t, t \geq 0)$  sur cet espace. La définition plus usuelles du mouvement Brownien est la suivante.

### 1.3.1 Définition

On appelle mouvement Brownien (standard) le processus  $(B_t, t \geq 0)$  satisfaisant aux propriétés :

- Le mouvement Brownien est issu de l'origine, c'est-à-dire :  $P(B_0 = 0) = 1$ .
- Le mouvement Brownien est un processus à accroissements indépendants :

$\forall s \preceq t$  , la variable  $B_t - B_s$  est indépendante de la tribu du passé avant  $s$  .

- L'accroissements de mouvement Brownien est une variable aléatoire réelle de loi gaussienne, centrée de variance  $(t - s)$ . Il existe une approche classique du mouvement Brownien, qui consiste à l'obtenir comme limite de marches aléatoires.
- $(B_t)$  est stationnaire.

### 1.3.2 Théorème : théorème de Donsker

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une famille de variable aléatoire réelles indépendantes identiquement distribuées avec  $E(X_n) = 0$  et  $E(X_n^2) = 1$  soit  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  avec  $S_0 = 0$ .  $E(S_n) = 0$  et  $V(S_n) = n$

les processus des sommes normalisées  $Y_i^n = \frac{1}{\sqrt{n}}S_{[nt]}$  ou  $[nt]$  désigne la partie entière de  $(nt)$  converge en loi, en tant que processus, vers le mouvement Brownien. On considère toujours des mouvements Browniens ayant des trajectoires continues et qui sont nuls au temps 0. On appelle souvent un tel processus un mouvement Brownien standard.

### 1.3.3 Propriétés

Soit  $(B_t, t \geq 0)$  un mouvement Brownien et  $F_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$  sa filtration naturelle.

#### Processus gaussien

Le mouvement Brownien est un processus gaussien centré ( $E(B_t) = 0$ ) (pour tout  $t$ ), de covariance  $\min(s, t)(\text{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t)$ .

**Démonstration** Le caractère gaussien résulte de  $\sum_{i=0}^n a_i B_{t_i} = \sum b_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  avec  $a_i = b_i - b_{i+1}, i \leq n-1, a_n = b_n$ . La covariance est égale à  $E(B_t B_s)$  car le processus est centré.

Si  $s \leq t, E(B_t B_s) = E((B_t - B_s)B_s + B_s^2) = E((B_t - B_s)E(B_s) + E(B_s^2)) = s$ , c'est-à-dire  $\text{cov}(B_t, B_s) = s \cap t = s$ .

#### Propriété de Markov

On considère un mouvement Brownien  $B_t$  sur l'espace  $(\Omega, F, P)$  et la filtration  $(F_t)_{t \geq 0}$  qu'il engendre.

Puisqu'il est à accroissements indépendant, la variable  $B_{t-s} - B_s$  est indépendante de la tribu  $F_s$ .

**Théorème** Pour chaque fonction  $f$  borélienne bornée :

$$E(f(B_u)/F_t) = E(f(B_u)/\sigma(B_t)) \quad u \leq t$$

**Définition (Propriété de Markov)** Un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Markov si, étant donné la filtration  $(F_t^X)_{t \geq 0}$  engendrée par le processus, celui-ci vérifie la propriété

de Markov, à savoir que pour tous  $s, t \geq 0$  et pour toute fonction  $f$  borélienne bornée

$$E(f(X_{T+s})/F_t^X) = E(f(X_{T+s})/F_s)$$

.

**Propriété de Markov forte** Soit  $T$  un temps d'arrêt à valeurs finies. On a alors

$$E(f(B_{T+s})/F_t) = E(f(B_{T+s})/\sigma(B_s))$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt fini  $T$ , le processus  $B_{t+T} - B_T$  est un mouvement Brownien indépendant de  $F_T$ .

### Propriété de martingale

**Propositions** Soit  $(B_t, t \geq 0)$  un mouvement Brownien standard et  $F_t$  la tribu engendrée par  $B_t$ .

1. Le processus  $(B_t, t \geq 0)$  est une martingale.
2. Le processus  $(B_t^2 - t, t \geq 0)$  est une martingale et la réciproque est vraie (c'est-à-dire si  $X$  est un processus continu tel que  $X$  et  $(X_t^2 - t, t \geq 0)$  sont des martingales alors  $X$  est un mouvement Brownien).
3. Soit  $B_{t_1}$  et  $B_{t_2}$  deux mouvements Browniens indépendants. Le produit  $B_{t_1}B_{t_2}$  est une martingale.
4. Le processus  $(\exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t), t \geq 0)$  est une martingale, pour tout  $\sigma$  réel, et la réciproque est vraie (c'est-à-dire si  $X$  un processus continu tel que  $(\exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t), t \geq 0)$  est une martingale, le processus  $X$  est un mouvement Brownien).

**Démonstration** En utilisant l'indépendance des accroissements du mouvement Brownien et la définition de martingale (c'est-à-dire si  $s \geq t$ ,  $B_t - B_s$  indépendante de  $F_s$  et  $E((B_t/F_s) = B_s))$  avec les propriétés d'espérance conditionnelle.

**Définition** On dit que  $B$  est un  $(F_t)$ -mouvement Brownien si  $B$  et  $(B_t^2 - t, t \geq 0)$  sont des  $(F_t)$ -martingales.

### 1.3.4 Pont brownien

Soit  $(B_t : t \geq 0)$  un processus brownien standard. On définit le pont brownien<sup>[11]</sup> par le processus :

$$V_t = B_t - tB_1 \quad t \in [0, 1]$$

#### Proposition

On considère le pont brownien défini par  $V_t = B_t - tB_1, t \in [0, 1]$ : On a :

- (i)  $E(V_t) = 0, t \in [0, 1]$
- (ii)  $Cov(V_t; S_s) = \min(s; t) - ts; \quad (s; t) \in [0, 1]^2$

#### Démonstration

(i) En effet  $E(V_t) = E(B_t - tB_1) = E(B_t) - tE(B_1) = 0$

(ii) De même

$$\begin{aligned} E(V_t V_s) &= E\{(B_t - tB_1)(B_s - sB_1)\} = E(B_t B_s) - tE(B_s B_1) - sE(B_t B_1) + tsE(B_1^2) \\ &= \min(s; t) - ts - ts + ts \\ &= \min(s; t) - ts \end{aligned}$$

### 1.3.5 Brownien géométrique

Soit  $B$  un mouvement Brownien et  $b, \sigma$  sont constants, le processus

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right\}$$

est appelée Brownien géométrique<sup>[3]</sup>.

Ce processus est aussi appelé processus "log-normal". En effet, dans ce cas

$$\ln X_t = \left\{b - \frac{1}{2}\sigma^2\right\}t + \sigma B_t + \ln x$$

## 1.4 Calcul d'Itô

Le lemme d'Itô, ou encore formule d'Itô est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Ce lemme offre un moyen de manipuler le mouvement brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).

La formule d'Itô a été démontrée pour la première fois par le mathématicien japonais Kiyoshi Itô dans les années 1940.

On considère un mouvement Brownien standard  $B$  défini sur l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \geq 0}P)$ , et on fixe un horizon de temps  $[0, T]$  où  $T > 0$ .

### 1.4.1 Processus d'Itô

**Définition**<sup>[3]</sup>

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \geq 0}P)$  une espace de probabilité muni d'une filtration (complète) et  $B$  un  $\mathcal{F}_{t \in [0, T]}$  mouvement brownien. On appelle processus d'Itô un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $R$  tel que

$$\forall t \preceq T, X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

où  $b_t$  et  $\sigma_t$  sont des processus  $\mathcal{F}_{t \geq 0}$  adaptés tel que  $\int_0^t |b_s| ds < \infty$  et  $\int_0^t |\sigma_s| ds < \infty$  (au sens Lebesgue) p.s. pour tout  $t$ .

On utilise la notation plus concise suivante

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Le coefficient  $b$  est le drift ou la dérive,  $\sigma$  est le coefficient de diffusion.

L'écriture  $dX_t = b_t dt + \sigma dB_t$  est unique (sous réserve que les processus  $b$  et  $\sigma$  vérifient les conditions d'intégrabilité). Ceci signifie que si

$$dX_t = b_t dt + \sigma dB_t = \tilde{b}_t dt + \tilde{\sigma}_t dB_t$$

alors  $b = \tilde{b}$ ;  $\sigma = \tilde{\sigma}$ . En particulier, si  $X$  est une martingale locale alors  $b = 0$  et réciproquement.

On peut définir un processus d'Itô pour des coefficients de diffusion tels que  $\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty$  P.p.s. mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La partie  $x + \int_0^t b_s ds$  est la partie à variation finie. Si un processus  $A$  à variation finie est une martingale, il est constant. En effet, si  $A_0 = 0$ ,  $A_t^2 = 2 \int_0^t A_s dA_s$  et par suite  $E(A_t^2) = 0$ .

### Propriétés<sup>[3]</sup>

Si  $\sigma$  est un processus  $F_{t \geq 0}$  adapté, on a  $E(X_t) = E(X_0) + \int_0^t E(b_s) ds$  et

$$\forall t \geq s, E(X_t / F_s) = X_0 + \int_0^s (b_u du / F_s) + \int_0^s \sigma_u dB_u = X_s + E\left(\int_s^t b_u du / F_s\right)$$

Si  $b = 0$  et est un processus  $F_{t \geq 0}$  adapté, le processus  $X$  est une martingale continue. On verra que la réciproque est vraie : sous certaines conditions d'intégrabilité et de mesurabilité, toute martingale continue s'écrit  $x + \int_0^t \phi_s dB_s$

### Intégrale par rapport à un processus d'Itô<sup>[3]</sup>

Soit  $X$  un processus d'Itô de décomposition  $dX_t = b_t dt + \sigma dB_t$ . On note (sous réserve de conditions d'intégrabilité)

$$\int_0^t \theta_s dX_s = \int_0^t \theta_s b_s ds + \int_0^t \theta_s \sigma dB_s$$

#### 1.4.2 Formule d'Itô

**Proposition (La formule d'Itô pour le mouvement brownien)**

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que la dérivée seconde  $f''$  est bornée.



Alors

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds$$

### Théorème

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  par rapport à  $t$  et par rapport à  $x$ , aux dérivées bornées. Soit  $X$  un processus d'Itô :  $X_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$ . Alors, le processus  $Y$  défini par  $Y_t = f(t, X_t)$  est un processus d'Itô, avec

$$\begin{aligned} Y_t &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{df}{dt}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{df}{dx}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2 f}{dx^2}(s, X_s)ds \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t \left\{ \frac{df}{dt} + \frac{df}{dx}b_s + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \sigma_s^2 \right\}(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma_s \frac{df}{dx}(s, X_s)dB_s \end{aligned}$$

### Formule d'intégration par partie (IPP)<sup>[14]</sup>

Soit  $X_t$  et  $Y_t$  deux processus d'Itô :<sup>[1]</sup>

$$X_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma'_s dB_s$$

Alors

$$X_t Y_t = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

avec la convention que  $\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds$  <sup>[13]</sup>

### 1.4.3 Exemple d'utilisation de la formule d'Itô

Soit :

$$S_t = x_0 + \int_0^t s_s (\mu dt + \sigma dB_s)$$

Ce type d'équation s'écrit sous la forme :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_s), \quad S_0 = x_0$$

On cherche un processus adapté  $(S_t)_{t \geq 0}$  tel que les intégrales  $\int_0^t S_s ds$  et  $\int_0^t S_s dB_s$  aient un sens, et qui vérifie, pour chaque  $t$  :

$$P.p.s S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

On pose  $S_t = f(t; B_t)$  ou :

$$f(t; x) = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x\right)$$

La formule d'Itô donne :  $S_t = f(t; B_t)$

$$= f(0; B_0) + \int_0^t f'_s(s, B_s) ds + \int_0^t f'_x(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, B_s) d\langle B, B \rangle_s$$

Mais comme  $\langle B, B \rangle_t = t$  :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t S_s \sigma dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t S_s \sigma^2 ds,$$

Et finalement :

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s^{[9]}$$

## 1.5 Equations différentielles stochastiques

Les équations différentielles<sup>[13]</sup> sont des équations d'évolution du type :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.5.1}$$

où l'inconnue est une fonction  $x(t)$  qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée  $x(t)$  et elle-même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (1.5.1) (seule la dérivée 1ère est impliquée) avec  $f(t, x) = a + bx$  indépendant de  $t$  et affine par rapport à  $x$ . Symboliquement, l'équation (1.5.1) se réécrit :

$$dx(t) = f(t, x(t))dt \tag{1.5.2}$$

Les *EDS* sont des généralisations des équations 1.5.2 où la dynamique déterministe d'évolution  $b$  est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit. Il est légitime de considérer que ce bruit est un processus gaussien et en général il est modélisé par un mouvement brownien  $B$  et une intensité de bruit  $\sigma(t, x)$  :

$$dX(t) = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad (1.5.3)$$

où  $\mu(t, X_t)$  et  $\sigma(t, X_t)$  sont les coefficient de l'équation.

En fait, l'écriture (1.5.3) est symbolique car  $dB_t$  n'a pas vraiment de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable ). Il faudrait écrire (1.5.3) sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad (1.5.4)$$

qui, elle a un sens si l'intégrale stochastique  $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$  a un sens.

### 1.5.1 Définition

Soit  $0 \leq t \leq T$ . On appelle équation différentielle stochastique (*EDS*) sur  $[0, T]$ , avec donnée initiale  $x$ , toute relation de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = 0 \end{cases} \quad (1.5.5)$$

où  $X$  est le processus d'Itô sur  $[0, T]$  (appelé l'inconnue), une variable aléatoire  $F_0$ -mesurable,  $\mu(t, X_t)$  et  $\sigma(t, X_t)$  sont deux fonctions données, mesurables définis sur  $R \times [0, T]$  et à valeurs réelles. Le terme  $\mu(t, X_t)$  est appelé dérive ou drift de l'EDS, alors que  $\sigma(t, X_t)$  est appelé coefficient de diffusion.

La solution de l'EDS est une fonction aléatoire. Il s'agit donc d'un processus qu'on note  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ .

### 1.5.2 Existence et unicité de solution

**Théorème<sup>[15]</sup>** Soient  $\mu(t, X_t)$  et  $\sigma(t, X_t)$  deux fonctions mesurables sur  $[o, T] \times R$  et qu'il existe une constante  $K > 0$  auxquelles on impose les hypothèses ci-dessous :

1. (Condition de Lipschitz) : Pour tout  $t \in [o, T]$  et pour tous  $(x, y) \in R \times R$   
$$| \mu(t, x) - \mu(t, y) | + | \sigma(t, x) - \sigma(t, y) | \leq K_1 | x - y |$$
2. Pour tout  $t \in [o, T]$  et pour tout  $x \in R$   
$$| \mu(t, x) |^2 + | \sigma(t, x) |^2 < K_2^2 (1 + | x |^2). \quad 0 < k_2 < \infty \quad \text{avec } k = \max(k_1, k_2)$$
3. (Condition sur la valeur initiale) :  $X_{t_0}$  est  $F_0$ -mesurable avec  $E(| X_0 |^2) \leq \infty$  alors pour tout  $t \leq T$ , l'équation (1.5.5) admet une solution forte unique presque sûrement à trajectoires continues.

## CHAPITRE

# 2

# OPTIONS ET FORMULE DE BLACK ET SCHOLES

## 2.1 Options

### 2.1.1 Définition

Une option<sup>[16]</sup> est un titre qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation d'acheter (ou de vendre) un titre à un prix déterminé à l'avance (le prix d'exercice ou prix de levée de l'option) pendant une certaine période de temps, passe cette période, l'option ne vaut plus rien.

### 2.1.2 Les stratégies de base des Options

Les stratégies<sup>[17]</sup> de base d'une Option dite stratégies de spéculation sont en nombre de quatre :

L'achat de l'option d'achat (achat de call), en fait c'est une spéculation à la hausse et que pour chaque titre sous jacent plusieurs options d'achats ; la vente de l'option d'achat (vente de call) spéculé à la baisse ; l'achat de l'option de vente (achat de put), un acheteur d'option de vente spéculé à la baisse ; alors que le vendeur d'une option de vente (vente de put) spéculé à la hausse.

#### Achat d'un call

Le résultat de la stratégie d'achat du call est formé par :

$$(S_T - K)' - c = \begin{cases} S_T - K - c, & S_T > K \\ -c, & S_T \leq K. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

L'acheteur du call, anticipe une hausse de sous jacent et son gain est illimité tandis que sa perte est limitée.

**Achat d'un put**

Le résultat de la stratégie est donnée par :

$$P - (K - S_T)^+ = \begin{cases} P, & S_T > K \\ K - S_T + P, & S_T \leq K. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Le recours à cette stratégie indique une anticipation à la baisse au niveau du sous jacent.

**Vente du call**

Le résultat de la stratégie de vente du call correspond à :

$$C - (S_T - k)^+ = \begin{cases} c + k - S_T, & S_T > k \\ c, & S_T \leq k. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

**Vente d'un put**

Le résultat de la stratégie de vente d'un put est donnée par :

$$(k - S_T)^+ - P = \begin{cases} P + S_T - K, & S_T < k \\ +P, & S_T \geq K. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

cette stratégie est avantageuse si le sous jacent augmente et ensuite se stabilise.

## Illustration graphique

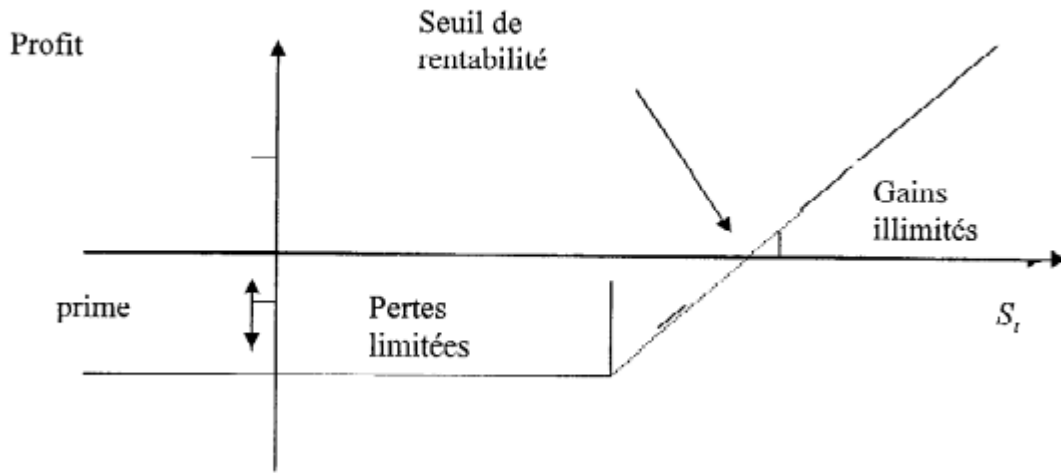


Figure 3.1 :Achat d'une option call

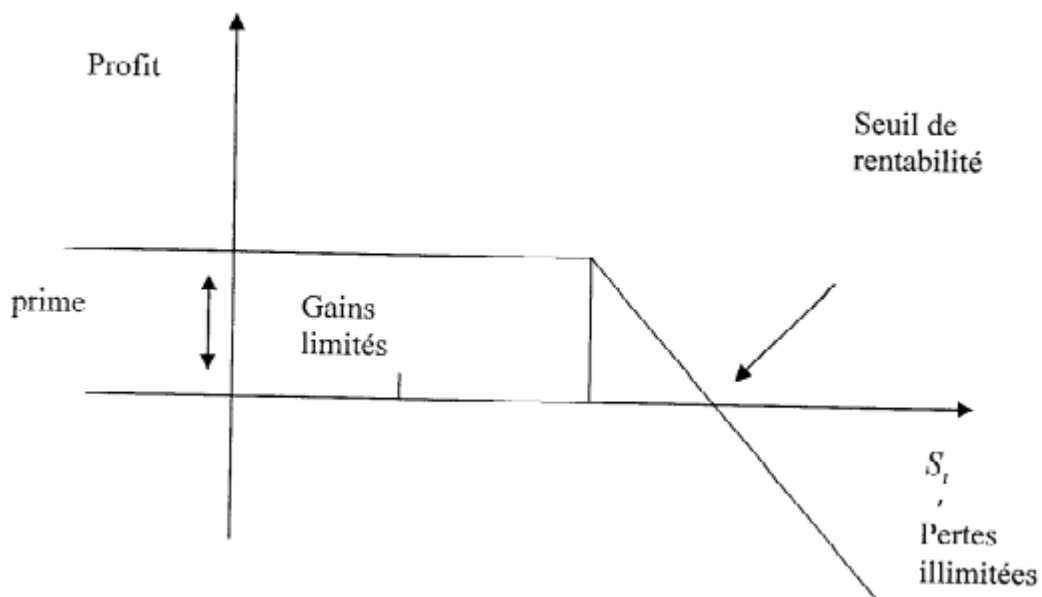


Figure 3.2 :Vente d'une option call

## 2.1.3 Parité Put-Call

La parité <sup>[16]</sup> d'achat est la relation entre les options d'achat européennes (Call) et les options de vente (Put) qui ont le même prix d'option d'exercice et se terminent en même temps.



Cette relation est très utile pour déterminer le prix de l'un des deux dans le modèle Black-Scholes. En effet, il suffit de calculer l'un des deux à partir du modèle de Black-Scholes, la seconde se déduit immédiatement grâce à cette relation.<sup>[16]</sup>

La relation est donnée par :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Avec :

- $S_t$  : est la valeur de l'actif sous-jacent à l'instant  $t$ .
- $C_t$  : est la valeur du Call à un instant  $t$ .
- $P_t$  : est la valeur du Put à un instant  $t$ .
- $K$  : est le prix d'exercice.
- $T$  : est la maturité.

Peut profiter sans risque si nous avons, par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Au temps  $t$ , achetons des actions et des options de vente (Put) et vendons des options d'achat (Call). A l'instant  $t$ , cette opération dégage un profit net égal à

$$C_t - P_t - S_t$$

Si la somme est positive, on la place au taux  $r$  jusqu'à la date  $T$ . A la date  $T$ , nous obtenons deux cas :

- $S_T > K$  : donc, le Call est exercée, on livre l'action, on encaisse la somme  $K$  et on solde l'emprunt ou le prêt, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

- $S_T \leq K$  : donc, on exerce son Put en vendant notre action, on encaisse la somme  $K$  et comme précédemment, on se retrouve avec une richesse :

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

Dans les deux cas, un profit positif est réalisé sans mise de fond initiale : c'est un exemple d'arbitrage.

### 2.1.4 Les problèmes liés aux options

Il est naturel qu'en mathématiques financières le problème de la détermination du prix de l'option (pricing) à toute date ainsi que le problème de la couverture (hedging) soient majeur.<sup>[16]</sup>

#### 1 - Le problème de la couverture (hedging)

La couverture est une protection contre tout risque éventuelle liée à l'exercice de l'option, ce qui garantit à l'investisseur la limitation maximale de ses pertes ; Le problème de couverture d'une option consiste donc à trouver une stratégie basée sur les actifs du marché dont la valeur à chaque date  $t$  est égale au pay-off de l'option.

Pour cela on doit supposer quelques hypothèses qui sont :

Une hypothèse de modélisation des marchés, en particulier du cours des actifs financiers.

Une hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), par conséquent la valeur de l'option est égale à la somme des valeurs de ces positions (observables sur le marché).

#### 2 - Problème de la valorisation (Pricing)

La valorisation (pricing) d'un titre financier est l'évaluation de sa valeur. Quelle est la prime de l'option, c'est-à-dire le prix du contrat payé par l'acheteur au vendeur de l'option ? Autrement dit comment évaluer à la date de signature du contrat, prise comme origine des temps  $t = 0$ , une valeur  $(S_T - E)^+$  (dans le cas du Call) à la maturité  $T > 0$ .

L'évaluation des produits dérivés se ramène souvent au calcul du prix aujourd'hui d'un actif dont on ne connaît le prix qu'à une date future.

### 2.1.5 Définitions

#### Actif sous-jacent

C'est l'actif sur lequel porte l'option de vente ou d'achat. L'actif sous-jacent d'un contrat d'options peut être un actif physique (matières premières ou agricoles), un instrument financier (actions, obligations, taux d'intérêt, cours de change) ou encore un indice boursier ou climatique.

### Echéance

C'est la date de fin de validité du contrat. Pour les contrats d'options, les dates d'échéance sont standardisées (le 3ème vendredi du mois d'échéance).

Par ailleurs, il faut distinguer deux types d'options selon le mode d'exercice :

- Européenne : l'exercice se fait à l'échéance uniquement.
- Américaine : l'exercice se fait jusqu'à l'échéance. L'option peut être exercée pendant toute la durée du contrat.

### Le prix d'exercice (ou Strike)

Il correspond au prix auquel le détenteur de l'option peut exercer son droit, c'est-à-dire au prix auquel l'acheteur peut acquérir l'actif sous-jacent durant la période de vie, c'est un prix de référence, en fonction de l'évolution du prix du sous-jacent, l'option peut être levée si le prix d'exercice est avantageux et que l'investisseur peut réaliser un profit.

### La prime : le prix de l'option

En contrepartie de l'engagement d'acheter ou de vendre des actions à un prix déterminé, le vendeur de l'option demande une rétribution : la prime, c'est-à-dire le prix de l'option. La prime est versée par l'acheteur au vendeur lors de la conclusion de l'engagement et reste acquise au vendeur de l'option même si l'acheteur décide de ne pas exercer son droit. Contrairement au prix d'exercice, la prime de l'option n'est jamais fixe ; elle varie au gré des transactions selon l'offre et la demande

## 2.2 Modèle de Black et Scholes

Le modèle de référence pour la modélisation de l'évolution des actifs risqués est, dans les modèles d'assurance, celui de BLACK et SCHOLLES [1973], qui considère que les cours peuvent être représentés par un mouvement brownien géométrique. Les hypothèses de ce modèle sont très restrictives : continuité des trajectoires, constance de la volatilité, log-normalité des rendements, etc.

### 2.2.1 Présentation de modèle de Black et Scholes

[17] L'incertitude sur les marchés financiers est modélisée par un espace de probabilité  $(\Omega, F, P)$  muni d'une filtration  $F = (\mathbf{F}_t)_{t \geq 0}$  ou

- $\Omega$  représente tous les états du monde.
- la tribu  $\mathbf{F}$  représente la structure d'information globale disponible sur le marché.
- $(\mathbf{F}_t)$  est une filtration croissante décrivant l'information disponible aux agents du marché à la date  $t$ ,  $\mathbf{F}_t \subset \mathbf{F}$ . Dans le cas où l'horizon  $T$  des investisseurs sur le marché est fini, on suppose usuellement  $\mathbf{F}_T = \mathbf{F}$ . La propriété de croissance  $\mathbf{F}_s \subset \mathbf{F}_t$ , si  $s < t$ , traduit le fait que le marché n'oublie rien et donc qu'on dispose de plus en plus d'informations au fur et à mesure du temps.
- une probabilité  $P$  qui donne les probabilités à priori des événements considérés. C'est la probabilité historique ou objective. Comme nous le verrons par la suite, pour les problèmes de pricing en finance qui nous intéressent, l'identification exacte de  $P$  n'est pas un objectif majeur et c'est une caractéristique principale des modèles en finance.

#### Définition d'opportunité d'arbitrage

Une opportunité d'arbitrage se définit comme une stratégie d'investissement financier qui, en combinant plusieurs opérations, assure un profit et ne nécessite aucune mise de fonds initiale.

### 2.2.2 L'obtention de l'équation de Black et Scholes

[17] Certaines hypothèses doivent être faites :

- Les options de style européen.
- Le marché est ouvert en continu et exempt de coûts de transaction et est constitué de deux actifs de base : un actif risqué (action) et un actif non risqué (prêt, emprunt).

- On peut acheter ou vendre à tout instant
- Il n'y a ni taxes, ni impôt, ni coût de transaction.
- Le taux d'intérêt sans risque est constant et identique sur toutes les maturités.
- La vente à découvert est autorisée et il est possible d'utiliser immédiatement la totalité du produit de cette vente.
- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

L'évolution du prix de l'action suit un processus de marché aléatoire.

- Les prix de l'action sous-jacente sont distribués de façon lognormal.
- Il n'y a pas de versement de dividendes durant la vie de l'option.
- La constance de volatilité
- L'évolution de  $S_t^0$  est régie par l'équation différentielle :

$$\begin{cases} dS_t^0 = rS_t^0 dt \\ S_0^0 = 1 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Le modèle proposé pour d'écrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix  $S_t$  à l'instant  $t$ ) et un actif sans risque (de prix  $S_t^0$  à l'instant  $t$ )

de sorte que  $(S_t^0 = S_0^0 \exp^{rt} = \exp^{rt}$  pour  $t \geq 0$  ou  $r$  le taux d'intérêt par unité de temps, supposé constant.

### 2.2.3 Solution de l'équation

On suppose que le prix de l'action  $\{S_t\}_{t \geq 0}$ , est régie par l'équation différentielle stochastique (l'EDS)<sup>[17]</sup> :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 > 0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

avec :

$\mu$  : représente le paramètre de la tendance de l'action.

$\sigma$  : représente la volatilité de l'action.

$\{W_t\}_{t \geq 0}$  : est un mouvement Brownien standard par rapport à  $\mathcal{F}$  sa filtration. L'équation (2.2.2) se résout explicitement grâce à la formule d'Itô :

$$df_t = \left( \frac{df}{dS} u S_t + \frac{df}{dS} + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{df}{dS} \sigma S_t dW_t$$

On considère la variable :

$$Y_t = \log(S_t) \quad d'où \quad S_t = \exp(Y_t)$$

On pose :

$$f(x) = \log(x) \implies f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f'(t) = 0$$

C'est à dire

$$dY_t = \left( \frac{1}{S_t} \mu S_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dW_t$$

$$dY_t = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

$$Y_t = \log(S_0) + \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

$$Y_t = \log(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t$$

On déduit que :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$$

Donc la solution est donnée par l'expression suivante :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$$


---

### 2.2.4 Equation aux dérivées partielles

La valeur de l'option <sup>[17]</sup> est égale à la somme d'argent nécessaire pour construire un portefeuille autofinancé composé d'une quantité d'actif sous-jacent (risqué) et d'une autre d'actif sans risque. On cherche à ce que sa valeur soit constamment égale à celle de l'option. La valeur de portefeuille de réplication s'écrit donc, comme :

$$V_t = \emptyset_t^0 S_t^0 + \emptyset_t S_t$$

En différentiant l'équation précédente du portefeuille, on obtient :

$$dV_t = \emptyset_t^0 dS_t^0 + \emptyset_t dS_t$$

En identifiant les termes en  $dS_t^0$  et  $dS_t$  de (2.2.1) ; (2.2.2) ceci permet d'exprimer la différentielle de  $V_t$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} dV_t &= \emptyset_t^0 (r S_t^0 dt) + \emptyset_t (\mu S_t dt + \sigma dW_t) \\ dV_t &= (\emptyset_t^0 r S_t^0 + \emptyset_t \mu S_t) dt + \emptyset_t \sigma S_t dW_t \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

D'autre part, comme  $S_t$  est un processus d'Itô, et la valeur d'une option d'achat à maturité  $T$  et de prix  $K$  est une fonction  $c(t, S_t)$  : En appliquant donc le lemme d'Itô, on obtien :

$$dc(t, S_t) = (u S_t \frac{dc}{ds}(t, S_t) + \frac{dc}{dt} c(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{d^2 c}{ds^2}(t, S_t)) dt + \sigma S_t \frac{dc}{ds}(t, S_t) dW_t \quad (2.2.4)$$

On veut construire un portefeuille de réplication de l'option. A chaque instant, la variation de valeur de portefeuille de réplication doit être égale à celle de l'option :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour alléger, on note } c_t \text{ pour } c(t, S_t) : c_t = V_t \\ \text{et en supposant la condition d'autofinancement } dc_t = dV_t \end{array} \right.$$

Par identification des termes  $dt$  et  $dW_t$  dans l'équation (2.2.3) et (2.2.4), On obtien :

$$\emptyset_t = \frac{dc}{ds}(t, S_t)$$

Par définition du portefeuille, on a :

$$\emptyset_t^0 S_t^0 = v_t - \emptyset_t S_t \quad \text{donc :} \quad \emptyset_t^0 S_t^0 = c(t, S_t) - \emptyset_t S_t \quad (2.2.5)$$

En remplaçant  $\emptyset_t$  pour ça valeur dans (2.2.5), on trouve :

$$\emptyset_t^0 S_t^0 = c(t, S_t) - \frac{dc}{ds}(t, S_t) S_t$$

On peut alors récrire l'équation (2.2.3) sous la forme suivante :

$$dV_t = (r(C(t, S_t) - \frac{dc}{ds}(t, S_t) S_t) + \frac{dc}{ds}(t, S_t) \mu S_t) dt + \frac{dc}{ds}(t, S_t) \sigma S_t dW_t \quad (2.2.6)$$

D'après l'égalité des termes en  $dt$  des équations (2.2.1) et (2.2.6) :

$$u S_t \frac{dc}{ds}(t, S_t) + \frac{dc}{dt} C(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{d^2 c}{ds^2}(t, S_t) = r(C(t, S_t) - \frac{dc}{ds}(t, S_t) S_t) + \frac{dc}{ds}(t, S_t) \mu S_t$$

Soit en simplifiant :

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} C(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{d^2 c}{ds^2}(t, S_t) + r S_t \frac{dc}{ds}(t, S_t) = r C(t, S_t) \\ C(t, S_t) = \max(S_t - k, 0). \end{cases} \quad (2.2.3)$$

C'est l'équation de Black-Scholes

## 2.2.5 Formule de Black et Scholes

Soit un actif risqué suivant le modèle du brownien géométrique

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma W_t))$$



Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, la résolution de l'EDP dans le cas d'un call européen ( $c(t, S_t) = \max(S_t - k, 0)$ ) de maturité  $T$  et de strike  $K$  donne comme valeur de l'option :

$$c(t : S_t) = S_t N(d_1) - k \exp(-r(T - t)) N(d_2)$$

Avec  $N$  la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite :

$$N(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$d_1$  et  $d_2$  donnés par :

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{k} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T - t)}$$

Le prix d'une option de vente européen  $p(t, S_t)$ , portant sur le même titre de base et ayant la même date d'échéance et le même prix d'exercice, donné par :

$$p(t, S_t) = k \exp(-r(T - t)) N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

En raison de la relation de parité Call-Put :

$$c(t : S_t) - p(t, S_t) = S_t - k \exp(-r(T - t))$$

d'où :

$$p(t, S_t) = c(t : S_t) + k \exp(-r(T - t))$$

En remplaçant  $c(t : S_t)$  par sa valeur :

$$p(t, S_t) = S_t N(d_1) - k \exp(-r(T - t)) N(d_2) - S_t + k \exp(-r(T - t))$$

,

$$= k \exp(-r(T - t)) (1 - N(d_2)) - S_t (1 - N(d_1))$$

. On obtient (1.8)  $d_1$  et  $d_2$  étant définies comme précédemment.<sup>[17]</sup>

Et de l'inégalité  $[N(-u) = 1 - N(u)]$

### 2.2.6 Les rendements

Dans le modèle de BlackScholes, l'expression de la dynamique d'un actif  $S$  s'écrit<sup>[21]</sup> :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB_t. \text{ Elle admet comme solution : } S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right).$$

où :

$/S_t$  désigne la valeur d'un titre à la date  $t \in [0, \infty[$  qui prend la valeur  $S_0$  en  $t=0$ .

$/\mu$  est le paramètre de dérive.

$/\sigma$  est la volatilité.

$/B_t$  est le Brownien standard.

Par conséquent, le rendement de l'actif entre  $t$  et  $t+h$  vaut :

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \frac{S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times (t+h) + \sigma B_{t+h}\right)}{S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)}$$

De plus, comme  $B_{t+h}$  et  $B_t$  sont des mouvements Brownien standard, la différence  $B_{t+h} - B_t$  est de même loi que  $B_t$ . Ceci nous amène à  $\frac{S_{t+h}}{S_t} = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma B_h\right)$ , variable aléatoire log-normale indépendante de  $t$ , de moyenne  $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$  et de variance  $\sigma^2$ .

nous poserons par la suite  $r(h) = \ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma B_h$ .

Ainsi, pour un échantillon  $x_1, \dots, x_n$  iid de rendements, la vraisemblance de rendement sur une période de ce modèle s'écrit :

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}\right)$$

.

### 2.2.7 Estimation des paramètres

<sup>[22]</sup> la méthode du maximum de vraisemblance sera utilisée pour estimer les paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  du modèle utilisé pour les prix. On peut montrer qu'elle donne presque toujours les résultats les plus précis. On aurait aussi pu utiliser la méthode des moments.

**Méthode des moments** Appairer les moments de la population et ceux de la distribution pour obtenir des équations ;

il faut évidemment apparier autant de moments qu'il y a de paramètres. Dans notre cas, il s'agit donc d'apparier les deux premiers moments de population,

soit  $\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$  et  $S^2 = \frac{\sum_1^n (x_i)^2}{n}$  à ceux de la distribution de  $X_j$  (sans égard au  $j$ , puisqu'on a fait l'hypothèse "i.i.d" plus tôt). On obtient alors les paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  en fonction des moments de la population.

Dans le cas gaussien, les deux donnent les mêmes résultats. Par contre, les résultats diffèrent en général.

### Principe du maximum de vraisemblance

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des observations dont la loi jointe possède une densité  $f(\theta)$ , où le paramètre  $\theta$  appartient à un ensemble  $\Omega \in \mathbf{R}^*$ , La fonction de vraisemblance  $L(\theta)$  est définie par :

$$L(\theta) = f(x_1, \dots, x_n; \theta).$$

La méthode du maximum de vraisemblance (MLE) est de prendre comme estimation de  $\theta$ , la valeur  $\hat{\theta}$  qui maximise la fonction de vraisemblance  $L$ , c'est-à-dire

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\tilde{\theta} \in \Omega} L(\tilde{\theta})$$

.

où  $\Omega$  définit les contraintes que  $\tilde{\theta}$  doit respecter, le cas échéant.

**Remarque** Comme la fonction de vraisemblance peut s'exprimer sous forme de produit, il est souvent plus facile de maximiser la log-vraisemblance (logarithme de la fonction de vraisemblance). On obtient alors

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\tilde{\theta} \in \Omega} \ln(L(\tilde{\theta}))$$

.

De façon équivalente, on peut minimiser  $-\ln(L)$ . Dans ce cas, on a

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\tilde{\theta} \in \Omega} -\ln(L(\tilde{\theta}))$$

Il faut se rappeler que les points optimaux d'une fonction sur un ensemble sont ceux dont le gradient est nul. Sinon il faut regarder sur la frontière de l'ensemble. Si  $\tilde{\theta}$  est à l'intérieur de  $\Omega$ , alors on doit avoir, pour tout  $1 \leq i \leq k$

$$\frac{d}{d\theta_i} L(\theta) \big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{d\theta_i} \ln(L(\theta)) \big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

### Estimation des paramètres du modèle de Black-Scholes

Utilisons la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de notre modèle.

Nous avons les données suivantes :

$$Prix \quad S(0) = S_0, S(h) = s_1, \dots, S(nh) = S_n, 1 \leq j \leq n$$

d'où on extrait les rendements  $x_j = \ln s_j - \ln(s_j - 1), 1 \leq j \leq n$

**Proposition** Les estimations de  $\mu$  et  $\sigma$ , par la méthode du maximum de vraisemblance, dépendent seulement des rendements  $X_1, \dots, X_n$  et sont données par

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{x}}{h} + \frac{s_x^2}{2h},$$

$$\hat{\sigma} = \frac{s_x}{\sqrt{h}},$$

où

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

et

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2.$$

**Note** j'ai utilisé  $s$  et  $s_x$  pour, respectivement, le 2eme moment et le 2e moment centré ; c'est un détail d'écriture, mais faire attention.

**Remarque 1** En pratique, on utilise surtout

$$\frac{1}{(n-1)h} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

pour estimer  $\sigma^2$ . La raison est que cet estimateur est très proche de  $\frac{s_x^2}{h}$  et c'est un estimateur **sans Biais** (voir remarque suivante) de  $\sigma^2$  par exemple, avec MATLAB, la fonction std(x) donne

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

et non pas

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

**Attention** : Noter que le biais est petit, dès que  $n$  est le moins grand. Aussi, c'est l'estimateur de maximum de vraisemblance  $\hat{\sigma}$  (i.e. biaisé) qui est utilisé dans le restant du texte.

**Remarque 2 :** (Estimation sans biais)

Supposons qu'on ait un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  de la distribution de la variable aléatoire  $X$ . On utilise l'estimateur  $u(X_1, \dots, X_n)$  pour un paramètre (inconnu)  $\theta$  de la distribution. Alors l'estimateur  $u(X_1, \dots, X_n)$  est dit sans biais si  $E(u(X_1, \dots, X_n)) = \theta$

Ci-haut, l'estimateur  $\hat{\sigma} = \frac{s_x}{\sqrt{h}}$  est un estimateur biaisé, chose qui se vérifie facilement.

**Remarque 3** Lorsque l'on utilisera la méthode du maximum de vraisemblance dans le cas non gaussien, on trouvera rarement des expressions analytiques. Il faudra donc minimiser ou maximiser "numériquement". Dans ce cas, il faut faire très attention aux contraintes sur les paramètres à estimer. Par exemple, ici  $\sigma > 0$ . Un truc simple consiste à remplacer  $\sigma$  par  $\exp(\theta)$  avec  $\theta \in \mathbf{R}$ .

## CHAPITRE

3

# MODÉLE À SAUTS DE MERTON

### 3.1 Introduction

La formule de Black et Scholes est souvent critiquée malgré son succès pour son inadéquation aux réalités des marchés financiers. Plusieurs familles de modèles ont été ainsi proposées pour remédier à ses déficiences, conduisant notamment à relâcher l'hypothèse de continuité des trajectoires des prix. Un certain nombre d'observations empiriques (cf. MANDEBROT[1962],[1963] et FAMA[1965]) contredisent manifestement ces hypothèses : les prix sautent soudainement, les études empiriques montrent que la volatilité n'est pas constante et au surplus les queues de distribution sont plus épaisses que celle d'une loi log-normale.

### 3.2 Présentation du modèle

[24] Soit  $(S_t)$  le processus de prix de l'actif considéré. Merton proposa en 1976 le modèle suivant pour les log-rentabilités  $(X_t)_{t \geq 0}$  de cet actif :

$$dX_t = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + dJ_t$$

où  $\sigma \in \mathbf{R}^+$  est le coefficient de diffusion de la volatilité des rentabilités,  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard sous la probabilité historique, et  $(J_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson composé d'intensité  $\lambda \in \mathbf{R}^+$ . Les sauts du processus  $(J_t)_{t \geq 0}$  sont de loi normale de moyenne  $\mu_J$  et de variance  $\sigma_J^2$ . ainsi :

$$\forall i \geq 0, J_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i$$

avec

$$\forall i \geq 0, \quad Z_i \stackrel{\text{loi}}{=} Z \stackrel{\text{loi}}{=} \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$$

de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_J \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(x - \mu_J)^2}{\sigma_J^2}, \mu_J \in \mathbf{R}, \sigma_J^2 \in \mathbf{R}^+$$

$(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson dont les durées inter-occurences sont de loi  $\text{Exp}(\lambda)$ . Pour avoir une forme explicite de  $X_t$  pour tout  $t \geq 0$ , il suffit d'écrire :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW_s + \int_0^t j_s ds$$



D'où pour tout  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \mu t + \sigma W_t + J_t \\ &= X_0 + \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \end{aligned}$$

Pour avoir une forme explicite de  $\mathbf{S}_t$ , pour tout  $t \geq 0$ , on pose  $\varphi(\mathbf{S}_t) = \log(\mathbf{S}_t)$ . On a d'après la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} d\varphi(\mathbf{S}_t) &= \varphi'_s(\mathbf{S}_t)d\mathbf{S}_t + \frac{1}{2}\varphi''_{ss}(\mathbf{S}_t)(d\mathbf{S}_t)^2 \\ &= \frac{1}{\mathbf{S}_t}d\mathbf{S}_t - \frac{1}{2}\frac{1}{\mathbf{S}_t^2}(d\mathbf{S}_t)^2 \\ &= (\mu dt + \sigma dW_t + dJ_t) - \frac{1}{2}(\mu dt + \sigma dW_t + dJ_t)^2 \\ &= \mu dt + \sigma dW_t + dJ_t - \frac{1}{2}(\sigma^2 dt + 0) \\ &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t + dJ_t \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{S}_t) = \log(\mathbf{S}_t) &= \log(\mathbf{S}_0) + \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)ds + \int_0^t dW_s + \int_0^t dJ_s \\ &= \log(\mathbf{S}_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + J_t \end{aligned}$$

Et par suite en passant à l'exponentielle, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_t &= \mathbf{S}_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + J_t] \\ &= \mathbf{S}_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i] \\ &= \mathbf{S}_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} \log(1 + \mathbf{v}_i)] \\ &= \mathbf{S}_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t + \left\{ \log \prod_{i=1}^{N_t} (1 + \mathbf{v}_i) \right\}] \end{aligned}$$

$$= \mathbf{S}_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right] \prod_{i=1}^{N_t} (1 + \mathbf{v}_i)$$

Avec  $V_i = \exp(Z_i - 1)$  . et la densité de  $Z_i$  est :

$$k[x] = \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(x - \mu_j^2)}{\sigma_j^2}, \mu_j \in \mathbf{R}, \sigma_j^2 \in \mathbf{R}^+$$

$(\mathbf{S}_t)_{t \geq 0}$  est donc un processus mixte brownien-Poisson géométrique. Ainsi :

$$\mu = -\frac{\sigma^2}{2} - \lambda \exp(\mu_J + \frac{\sigma^2}{2})$$

(Noter la différence entre  $\mu$  et  $\mu_j$  ,  $\sigma$  et  $\sigma_j$  ),et on a La fonction caractéristique de  $X_t$  est donnée par :

$$\phi X_t[\mu] = E[\exp(iuX_t)] = E\left[\exp(iu(\mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i))\right]$$

pour  $X_0 = 0$

Ainsi, puisque  $W(t)_{t \geq 0}$ ,  $N(t)_{t \geq 0}$  et  $Z(i)_{i \geq 0}$  sont indépendants :

$$\begin{aligned} E[\exp(i\mu X_t)] &= E\left[\exp(iu(\mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i))\right] \\ &= E[\exp(iu(\mu t + \sigma W_t))] E\left[\exp(iu \sum_{i=1}^{N_t} Z_i)\right] \end{aligned}$$

Or  $\mu t + \sigma W_t \stackrel{\text{loi}}{=} \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$ . donc :

$$E[\exp(i\mu(\mu t + \sigma W_t))] = \exp(iu\mu t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 t)$$

Par ailleurs, pour f définie sur  $\mathbf{R}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , on a :

$$E\left[\exp(iu \sum_{i=1}^{N_t} f(Z_i))\right] = \exp\left(\int_{\mathbf{R}} (\exp(iu f(x)) - 1) \lambda t k[x] dx\right)$$

car :

$$E\left[\exp(iu \sum_{i=1}^{N_t} f(Z_i))\right] = E\left[E\left[\exp(iu \sum_{i=1}^{N_t} f(Z_i)) | N_t\right]\right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{x=0}^{\infty} E \left[ \exp(iu \sum_{i=1}^{N_t} f(Z_i)) | N_t = x \right] p(N_t = x) \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} [E \left[ \exp(iu \sum_{i=1}^{N_t} f(Z_i)) \right] p(N_t = x)] \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} \prod_{i=1}^x E[\exp(iu f(Z_i))] p(N_t = x) \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} E[\exp(iu f(Z))]^x p(N_t = x) \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} E[\exp(iu f(Z))]^x \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^x}{x!} \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t E[\exp(iu f(z))])^x}{x!} \\
 &= \exp(-\lambda t) \exp(\lambda t E[\exp(iu f(z))]) \\
 &= \exp(\lambda t (E[\exp(iu f(z))] - 1)) \\
 &= \exp(\lambda t (E[\exp(iu f(z)) - 1])) \\
 &= \exp(\lambda t \int_{\mathbf{R}} (\exp(iu f(x)) - 1) k[x] dx) \\
 &= \exp(\int_{\mathbf{R}} (\exp(iu f(x)) - 1) \lambda t k[x] dx)
 \end{aligned}$$

On utilise ici notamment le fait que  $N(t)_{t \geq 0}$  et  $Z(i)_{i \geq 0}$  sont indépendants, et les  $Z(i)_{i \geq 0}$  sont de même loi.

Donc

$$\begin{aligned}
 E \left[ \exp(iu \sum_{i=1}^{N_t} Z_i) \right] &= \exp \left( \int_{\mathbf{R}} (\exp(iu x) - 1) \lambda t k[x] dx \right) \\
 &= \exp(\lambda t \int_{\mathbf{R}} (\exp(iu x) - 1) k[x] dx) \\
 &= \exp(\lambda t \int_{\mathbf{R}} (\exp(iu x) - 1) \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x - \mu_j)^2}{\sigma_j^2}) dx) \\
 &= \exp(\lambda t \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \left[ \exp(iu x - \frac{(x - \mu_j)^2}{\sigma_j^2}) - \exp(-\frac{(x - \mu_j)^2}{\sigma_j^2}) \right] dx) \\
 &= \exp(\lambda t \int_{\mathbf{R}} \left[ \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \exp(iu x) \exp(-\frac{(x - \mu_j)^2}{\sigma_j^2}) dx - 1 \right] dx)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(\lambda t \int_{\mathbf{R}} \left[ \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \exp(iux) \exp\left(-\frac{(x - \mu_j)^2}{\sigma_j^2}\right) dx - 1 \right] dx) \\
&= \exp(\lambda t [E[\exp(iuz)] - 1]) \\
&= \exp(\lambda t (\exp(iu\mu_j - \frac{u^2 \sigma_j^2}{2}) - 1))
\end{aligned}$$

On conclut donc que dans le cadre du modèle de Merton, la fonction de répartition des rentabilités géométriques  $X_t$  est :

$$\begin{aligned}
\phi X_t[u] &= E[\exp(iuX_t)] = E[\exp(iu(\mu t + \sigma W_t))] E\left[\exp(iu \sum_{i=1}^{N_t} Z_i)\right] \\
&= \exp(iu\mu t - \frac{1}{2}u^2 \sigma^2 t) \exp(\lambda t (\exp(iu\mu_j - \frac{u^2 \sigma_j^2}{2}) - 1)) \\
&= \exp(iu\mu t - \frac{1}{2}u^2 \sigma^2 t + \lambda t (\exp(iu\mu_j - \frac{u^2 \sigma_j^2}{2}) - 1))
\end{aligned}$$

Puisque le nombre de sauts dans ce modèle est fini, l'équation intégral-différentielle peut être simplifiée. Elle devient alors :

$$g_t - \mu g_s - \frac{1}{2}\sigma^2 g_{ss} + \lambda g - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} g[s+x, t] k[x] dx = 0$$

avec la condition initiale :

$$\begin{aligned}
g[s, 0] &= 0 & si & \quad s(u) \geq \ln(H), \forall u \\
g[s, t] &= 1 & si & \quad s(u) < \ln(H), u < t
\end{aligned}$$

### 3.3 Loi du rendement

[21] D'après le théorème des probabilités totales :

$$p(r = x) = \sum_n p(r = x | (N_s = n)) \times p(N_s = n)$$

. Deux cas se présentent alors :

$$p(r = x) = \sum_n p(r = x | (N_s = 0)) \times p(N_s = 0) + p(r = x | (N_s \geq 1)) \times p(N_s \geq 1)$$

. On note :

$A = p(r = x) = \sum_n p(r = x | (N_s = 0)) \times p(N_s = 0)$  le cas où il n'y a pas de saut entre  $t$  et  $t+s$ .

$B = p(r = x | (N_s \geq 1)) \times p(N_s \geq 1)$  le cas où il se produit au moins un saut (à la hausse ou à la baisse) sur la période  $[t, t+s]$ .

Donc  $B = p(r = x | (N_s = n)) \times p(N_s = n)$ .

Ainsi, grâce aux densités conditionnelles, on trouve la loi de  $r(s)$  :

$$f_r(x) = f_{r|0}(x) \times p(N_s = 0) + \sum_{n=0}^{\infty} f_{r|n}(x) \times p(N_s = n)$$

.

Nous allons maintenant déterminer les lois conditionnelles du rendement connaissant le nombre de sauts afin d'en expliciter la loi.

Cas 1 :  $n=0$

$$r_0(t, t+s) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s + \sigma Z(s) \longrightarrow N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s, \sigma^2 s)$$

.

$$f_{r|0}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi s}} \times \exp(-\frac{1}{2\sigma^2 s} \times (x - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 s))^2)$$

.

Cas 2 :  $n \geq 1$

$$r_n(t, t+s) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s + \sigma Z(s) \sum_{i=1}^n \ln(Y_i)$$

.

$$\ln(Y_i) \longrightarrow N(0, \sigma^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) \longrightarrow N(0, n\sigma^2).$$

$$r_n(s) \longrightarrow N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s, \sigma^2 s + n\sigma^2).$$

$$f_{r|n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times (\sigma^2 s + n\sigma^2)}} \times \exp(-\frac{1}{2 \times (\sigma^2 s + n\sigma^2)} \times ((x - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 s))^2)).$$

Pour écrire la densité de  $r(s)$ , il faut aussi détailler les paramètres de Poisson.  $N_s$  est de paramètre  $\lambda$  d'où  $P(N_s) = \exp(-\lambda) \frac{(\lambda)^n}{n!}$ .

Finalement sur une période :

$$f_r(x) = \exp(-(\lambda)) \times f_{r|0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda) \times \frac{(\lambda)^n}{n!} f_{r|n}(x)$$

$$f_r(x) = \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\lambda^n}{n! \times \sqrt{\sigma^2 s + n\Omega^2}} \times \exp\left(-\frac{(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}s)^2}{2(\sigma^2 s + n\Omega^2)}\right) \right] \right]$$

### 3.4 Tests de la validité du modèle

<sup>[45]</sup>Nous retenons trois tests de base pour nous aider à retenir le modèle le plus pertinent : le classique test du Khi-deux, le test « up and down » et le test du rapport des maximum de vraisemblance.

#### 3.4.1 Test d'adéquation du Khi-deux

Notre objectif est de vérifier que, après estimation des paramètres, l'adéquation des données à la loi théorique estimée. On divise donc la plage des rendements en  $k$  classes. Sous l'hypothèse nulle, si  $N_i$  est le nombre d'observations (aléatoires) appartenant à la classe  $(a_i, a_{i+1})$ , on a  $E[N_i] = np_i$  où  $p_i = \mathbf{pr}[X \in (a_i, a_{i+1})]$ , pour  $i = 1, \dots, k$ . Les variables  $N_i$  suivent des lois binomiales de paramètres  $n$ , et  $p_i$  donc, sous l'hypothèse nulle.

on a :

$$\frac{(N_i - np_i)}{\sqrt{np_i}} \rightarrow N(0, \sqrt{1-p})$$

La statistique  $D^2 = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{(N_i)^2}{np_i} - n$  est donc la somme de carrés de variables aléatoires asymptotiquement normales liées par la relation  $\sum_{i=1}^n N_i = n$ . De plus les  $p = 4$  paramètres indépendants sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance et il est classique que la loi limite de  $D^2$  est encadrée par les lois  $X_{r-p-1}^2$  et  $X_{r-1}^2$  du Khi deux à  $(r - p - 1)$  et  $(r - 1)$  degrés de liberté.

Cette approximation est justifiée si  $n$  est assez grand et les  $p_i$  pas trop petits avec comme règle empirique que  $np_i > 1$  et au moins 80% des  $np_i > 5$  dans le souci du respect du critère de Cochran. Si tel n'est pas le cas à cause d'une valeur de  $p_i$  trop petite, on regroupe les classes contiguës. La p-valeur du test est encadrée par :

$$\mathbf{pr}[X_{r-p-1}^2 > X_{obs}^2] \leq a \leq \mathbf{pr}[X_{r-1}^2 > X_{obs}^2] \quad \text{avec} \quad X_{obs}^2 = D^2$$

### 3.4.2 Test “up and down”

Ce test est utilisé pour vérifier l'indépendance des rendements. Soit  $Y_1, \dots, Y_n$  une suite finie de variables aléatoires réelles telles que :  $\mathbf{pr}(Y_i = Y_j) = 0$  pour  $i \neq j$ . On souhaite tester pour un seuil  $\alpha > 0$ , l'hypothèse nulle que les variables sont indépendantes et identiquement distribuées contre son alternative. On introduit, pour  $i = 1, \dots, n-1$ , les indicatrices  $Z_i = \mathbb{1}_{\{Y_{i+1} > Y_i\}}$ .

On appelle alors séquence de la suite  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  (composée de 0 et de 1) une succession du même symbole (0 ou 1) suivie et précédée de l'autre symbole ou du vide. Soit  $R$  la variable aléatoire réelle nombre total de séquences de 0 et de 1 relevées dans la réalisation  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ . On montre que, sous l'hypothèse  $H_0$  :

(i) : la loi de  $R$  est libre (i. e. indépendante de la loi commune des  $Y_i$ ),

(ii) :  $E(R) = \frac{2n-1}{3}$  et  $V(R) = \frac{16n-29}{90}$ ,

(iii) :  $\frac{R-E(R)}{\sigma(R)} \xrightarrow{loi} N(0,1)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$

Cette approximation normale est utilisable dès que  $n \geq 25$ .

Le test up and down rejette naturellement l'hypothèse  $H_0$  si on observe un nombre trop faible ou trop élevé de séquences. Sa région critique, de seuil asymptotique  $\alpha$  est donc :

$$W_\alpha = (y) : \frac{|R - E(R)|}{\sigma(R)} > q_{1-\alpha/2} \quad (2.11)$$

où  $q_{1-\alpha/2}$  est le quantile de la loi normale. La p-valeur de ce test a pour expression :

$$\alpha = 2\mathbf{pr}\left[N(0,1) > \frac{-E(R)}{\sigma(R)}\right]$$

.

### 3.4.3 Test du rapport de vraisemblances

Il s'agit ici de s'assurer que l'échantillon suit un modèle de Merton plutôt que le sous-modèle constitué par le modèle de Black et Scholes.

Nous voulons donc tester  $H_0 : (\lambda, \Omega) = 0$  contre  $H_1 : (\lambda, \Omega) \neq 0$  soit  $H_0$  le modèle à sauts n'est pas adapté contre  $H_1$  les sauts sont pris en compte par le modèle. Pour cela, on considère la statistique :

$$L = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}\right)}{\prod_{i=1}^n \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\lambda^k}{k! \sqrt{(\sigma^2 + k\sigma_u^2)}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2(\sigma^2 + k\sigma_u^2)}\right) \right] \right] \quad (2.12)$$

où les  $x_i$  sont les observations de l'échantillon de rendements. La distribution de  $-2 \ln L$  est asymptotiquement celle d'un Khi-2 à  $p$  degrés de liberté dans l'hypothèse  $H_0$ , où  $p$  est le nombre de paramètres.

## 3.5 Estimation des paramètres

<sup>[45]</sup> La démarche d'estimation des paramètres suit celle proposée dans RAMEZANI et ZENG [1998] dans le cadre d'un modèle proche. Dans un premier temps des estimateurs sont obtenus par la méthode des moments. Ces estimateurs sont utilisés pour initialiser un algorithme de maximisation de la vraisemblance, et obtenir ainsi des estimateurs plus précis bénéficiant des propriétés classiques des estimateurs du maximum de vraisemblance : convergence, efficacité asymptotique, normalité asymptotique.

Le rendement de l'actif sur  $[t, t+h]$  s'écrit :

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \frac{\exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t+h) + \sigma B_{t+h} + \sum_{i=1}^{N_{t+h}} Z_i)}{\exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i)} \quad (2.1)$$

ce qui conduit après simplification à l'expression :

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sigma (B_{t+h} - B_t) + \sum_{N_t}^{N_{t+h}} Z_i \right\} \quad (2.2)$$



On en déduit que, si l'on dispose de  $n$  observations des cours équiréparties aux instants  $t_i = \frac{iT}{n}$  sur un intervalle  $[0, T]$ , les variables  $x_i = \ln \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$  sont telles que :

$$x_i = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{T}{n} + \sigma \left[ B\left(\frac{iT}{n}\right) - B\left(\frac{(i-1)T}{n}\right) \right] + \sum_{k=1}^{N_{iT/n}} Z_k - \sum_{k=1}^{N_{(i-1)T/n}} Z_k \quad (2.3)$$

Cela prouve que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et identiquement distribuées. En d'autres termes les rendements sur des intervalles disjoints sont indépendants, et la distribution du rendement dépend de la longueur de l'intervalle mais pas de sa position. Au prix d'un changement d'échelle, on peut donc toujours supposer que le pas de la subdivision est égal à un ( $\frac{T}{n} = 1$ ) ; on est ainsi ramené à déterminer la loi de  $R = \ln \frac{S(t+1)}{S(t)}$  qui est indépendante de  $t$ . De plus, comme mélange de loi absolument continues, la loi du rendement est absolument continue. On a dans ces conditions le résultat suivant :

**Proposition** La densité de  $r$  s'écrit :

$$f_R(x) = \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\lambda^n}{n! \times \sqrt{(\sigma^2 + n\sigma_u^2)}} \exp \left( -\frac{(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2(\sigma^2 + n\sigma_u^2)} \right) \right] \right] \quad (2.4)$$

**Démonstration** On utilise un argument de conditionnement par rapport au nombre de sauts du processus de Poisson, qui nous conduit à écrire, avec des notations évidentes  $f_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{r|n}(x) \times \mathbf{pr}[N_s = n]$  ; conditionnellement au fait que le processus a sauté  $n$  fois sur, le rendement suit une loi normale comme somme de variables gaussiennes :  $r_n = (u - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma B(1) + \sum_{i=1}^n U_i$  d'après (3) et les propriétés de stationnarité des accroissements du mouvement brownien et du processus de Poisson ; on en déduit que :

$$f_{r|n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times (\sigma^2 + n\sigma_u^2)}} \times \exp \left( -\frac{1}{2(\sigma^2 + n\sigma_u^2)} \times \left( x - \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \right)^2 \right) \quad (2.5)$$

ce qui permet d'obtenir le résultat.

Incidentement, cela montre que la loi du rendement est un mélange de loi normales, la

loi de mélange étant la loi de Poisson. L'équation (2.2) permet d'ailleurs d'obtenir une expression simple de la transformée de Laplace de  $r$  :

$$E[\exp(-\beta r)] = \exp \left\{ -\beta \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\beta^2 \sigma^2}{2} + \lambda \left[ \exp(\beta^2 \sigma_u^2 / 2) - 1 \right] \right\} \quad (2.6)$$

Nous n'utiliserons toutefois pas cette expression dans la suite.

### 3.5.1 Méthode des moments

Le modèle est décrit par quatre paramètres ; l'égalisation de quatre moments empiriques avec les moments théoriques correspondants conduit à un système de quatre équations à quatre inconnues qui va nous permettre d'en déterminer des estimateurs. Compte tenu de la forme de la loi du rendement, on s'intéresse aux moments centrés. Si  $m = E[r] = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ , on va donc calculer  $m_k = E[(r - m)^k]$  ; un argument de symétrie conduit à conclure que  $m_{2k+1} = 0$ . Il suffit donc de déterminer les moments d'ordre pair. On a alors le résultat suivant :

Le moment centré d'ordre  $2k$  de  $r$  s'écrit :

$$m_{2k} = E(r - m)^{2k} = \exp(-\lambda) \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\sigma_u^2)^k \quad (2.7)$$

**Démonstration** Notons  $\sigma_n^2 = \sigma^2 + n\sigma_u^2$  la variance de la loi conditionnelle à  $N=n$ . D'après ce qui précède, on a :

$$m_{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} x^{2k} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_n^2} (x - m)^2 \right\} dx \quad (2.8)$$

Le changement de variable  $u = \frac{x-m}{\sigma_n}$  conduit à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} (x - m)^{2k} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_n^2} (x - m)^2 \right\} dx = \sigma_n^{2k} c_{2k} \quad (2.9)$$

avec  $c_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{2k} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \right\} du$ . Le calcul du coefficient  $c_{2k}$  s'effectue simplement par récurrence via une intégration par parties et on trouve finalement  $c_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ , ce qui termine la démonstration.

On peut en particulier remarquer avec  $k = 1$  que la variance de  $r$  s'écrit  $V[R] = m_2 = \sigma^2 + \lambda\sigma_u^2$ , qui est une expression naturelle. Cette expression peut également être obtenue directement par application de l'équation de décomposition de la variance.

La résolution du système non linéaire à quatre équations et quatre inconnues pour obtenir les valeurs des paramètres par cette méthode peut être effectuée par un algorithme de type Newton-Raphson et ne pose pas de difficulté particulière.

### 3.5.2 Maximum de vraisemblance

La méthode des moments a permis d'obtenir un premier jeu d'estimateurs pour les paramètres du modèle; nous utilisons ce jeu comme valeur initiale pour déterminer le maximum local de la vraisemblance dans son voisinage. Compte tenu de la proposition 3, on obtient l'expression suivante de la vraisemblance :

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2, \lambda, \sigma_u^2) = \prod_{i=1}^n \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\lambda^n}{n! \sqrt{(\sigma^2 + n\sigma_u^2)}} \exp \left( -\frac{(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2(\sigma^2 + n\sigma_u^2)} \right) \right] \right] \quad (2.10)$$

Le but est de maximiser la vraisemblance (ou de manière équivalente de minimiser  $-\ln L(x, \mu, \sigma^2, \lambda, \sigma_u^2)$ ). Concernant les contraintes, il vient de manière évidente  $\sigma^2 \geq 0$  et  $\sigma_u^2 \geq 0$ . Ensuite, nous allons étudier les valeurs des estimateurs issues de la méthode des moments pour encadrer les autres paramètres.

Nous disposons des estimateurs obtenus par la méthode des moments. Nous considérons que ces estimateurs approchent à plus ou moins 10% les estimateurs du maximum de vraisemblance. Par conséquent, nous retenons d'imposer quatre contraintes d'inégalité pour l'optimisation de la log-vraisemblance. On est ainsi amené à un classique problème de maximisation sous contraintes, dont la résolution numérique n'appelle pas de remarque particulière.

### 3.6 Prix d'option d'achat

Soit l'équation stochastique de Merton :

$$S_t = S_0 \exp \left[ \left( r - \lambda k - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t + \sum_{i=0}^{N_t} U_i \right]$$

. où :

- $r$  est le taux d'intérêts sans risque.
- $\lambda$  est le nombre moyen de sauts dans une années.
- $\sigma$  représente l'écart type de la composante gaussienne.
- $B(t)$  est un mouvement Brownien .
- $N(t)$  est un processus de poisson de paramètre  $\lambda$ .
- $U_i$  est le saut du prix.
- $K = \exp(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}) - 1$ .

Avec la technique de conditionnement, Merton obtient le prix d'une option d'achat européen dans le cadre du modèle de diffusion à saut de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $k$ , Nous considérons le prix en fonction du nombre des sauts dans  $[0, T]$ .

Si nous avons  $n$  sauts dans  $[0, T]$ , sous la condition neutre au risque (c'est à dire avec  $(\mu = r - \lambda k)$ ), le prix est donnée par :

$$\frac{S_n(T)}{S_0} = \exp \left[ \left( r - \lambda k - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t + \sum_{i=0}^n U_i \right]$$

.

Comme  $B_T$  et les sauts  $U_i$  sont indépendant, nous avons :

$$\sigma B_T + \sum_{i=1}^n U_i \sim \mathcal{N}(\alpha n, \sigma^2 T + n\delta^2)$$

.

Le calcul du prix de l'option sous  $Q$  est :

$$C_J = \exp(-rt) E_Q[(S_n(T) - K)^+]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \exp^{(r-\lambda)T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} E_Q[(S_n(T) - K)^+]$$

Merton propose la relation entre ce prix et le prix du modèle de Black et Scholes, il définit :

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n}{T} \delta^2$$

$$r_n = r - \lambda k + \frac{n}{T} \left( \alpha + \frac{\delta^2}{2} \right)$$

et après quelques transformation, on obtient :

$$C_J = \sum_{n=0}^{\infty} \exp^{(r-\lambda')T} \frac{(\lambda' T)^n}{n!} \quad \mathbf{BS}(S, K, T, r_n, \sigma_n)$$

où :

- $\mathbf{BS}(S, K, T, r_n, \sigma_n)$  est le prix Black et Scholes d'une option de vente européenne avec un taux  $r_n$  et une variance  $\Sigma_n$ .
- $\delta^2$  est la variance des sauts  $U$ .
- $\lambda' = \lambda(1 + k) = \lambda \exp(\alpha + \frac{\delta^2}{2})$ .

Le prix d'une option d'achat dans le modèle de diffusion à saut est un mélange de prix de  $\mathbf{BS}$  d'options d'achat, chacun avec taux et volatilité différente, et le coefficient de mélange est lié à la probabilité d'avoir  $n$  sauts<sup>[26]</sup>.

CHAPITRE

4

APPLICATION EN FINANCE

Dans ce chapitre, nous présentons des applications numériques. Nous commençons par la simulation de deux modèles stochastiques : modèle de Black-Sholes et modèle à saut de Merton, nous allons évaluer les options en utilisant les formules de call et put avec les deux modèles précédents. Nous avons utilisé le logiciel MATLAB comme outils de programmation. MATLAB est un environnement idéal pour ce type de traitement, à cause de sa génération de nombre aléatoire de haut niveau et graphisme.

## 4.1 Simulations

### 4.1.1 Simulation de modèle du Black-Scholes

En utilisant les valeurs suivantes pour les paramètres,  $S_0 = 100$  (prix sous-jacent),  $\sigma = 0.3$  (la volatilité);  $\mu = 0.05$  (taux d'intérêt sans risque);  $T = 5$  (Maturité) et le nombre de simulation égale à 100.

♦ Le programme Matlab

```
function Black

%fonction qui simule processus stochastique sans saut

%paramètres initiaux

clearall

randn('state',100);

X0=100;mu=0.05;Div=0.00;lambda=3;sigma=0.3;T=5;

NbPas=50;%Nombre de pas par ans

DeltaT=1/NbPas;

NbJours=T*NbPas;

DeltaW=randn(1,NbJours);

%construction des incrémentations

Increments=(mu-Div-
0.5*sigma^2)*DeltaT*ones(1,NbJours)+sigma*sqrt(DeltaT)*DeltaW;

Sol=exp(cumsum([log(X0),Increments],2));

%Graphe des trajectoires sans saut

figure

holdon

plot(0:1:NbJours,Sol);

legend('Sans saut');

holdoff
```

La figure (Figure 4.1) montre la simulation de la solution analytique de modèle du Black-Scholes appliqué à l'exemple précédent.



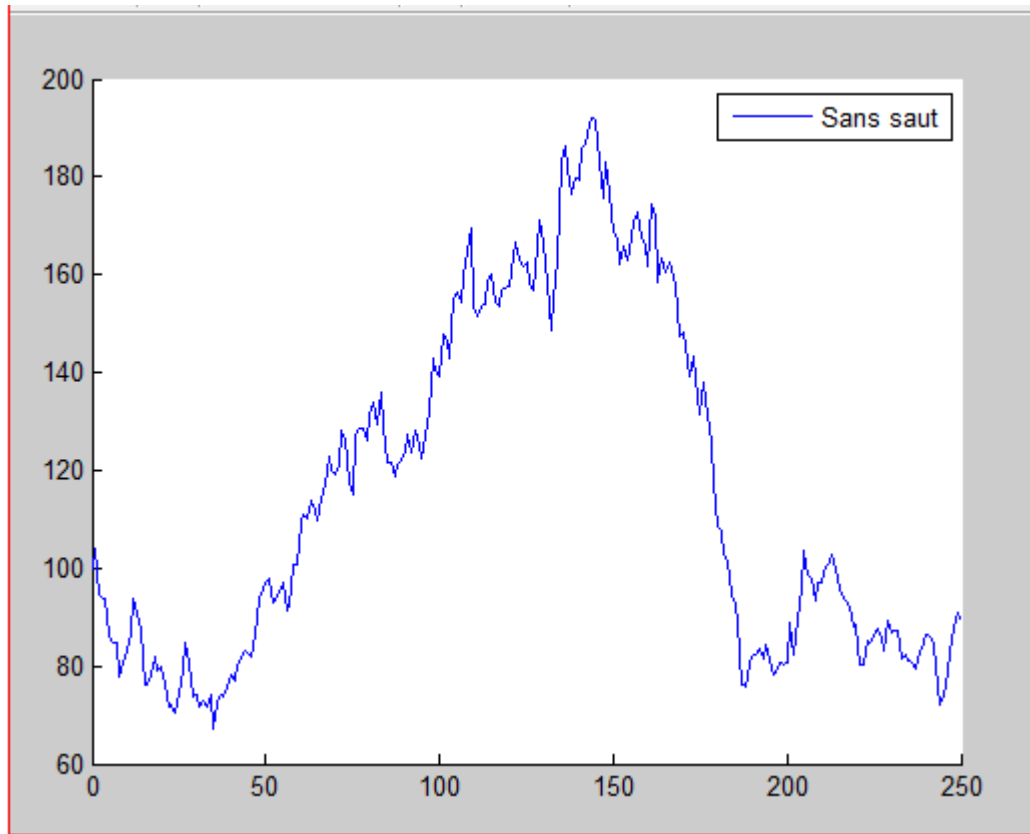


Figure 4.1 : Simulation de la Solution Analytique du modèle de Black-Scholes.

#### 4.1.2 Simulation de modèle du Merton

On garde même valeurs pour les paramètres pour faire la simulation : prix sous-jacent  $S_0 = 100$  ; la volatilité  $\sigma = 0.3$  ; taux d'intérêt sans risque  $\mu = 0.05$  ; Maturité  $T = 5$  et le nombre de simulation égale à 100.

## ♦ Le programme Matlab

```
function Saut

%fonction qui simule processus stochastique avec saut

%paramètres initiaux:

randn('state',100)
X0=100; mu=0.05;
Div=0.00;lambda=3;
sigma=0.3;
muJ=0.02;
sigmaJ=0.10;
T=5; NbPas=50;%Nombre de pas par ans
DeltaT=1/NbPas;
NbJours=T*NbPas;
k=exp(-muJ)-1;

%simulation des variables de poisson et gaussiennes
PoissonZ=poissrnd(lambda/NbPas,1,NbJours);
DeltaW=randn(1,NbJours);
PoissonSauts=zeros(1,NbJours);

%Détermination des sauts selon le processus de poisson
for i=1:NbJours
PoissonSauts(1,i)=sum(randn(PoissonZ(1,i),1));
End
```

---

```

%construction des incrémentations

IncrementsSauts=(mu-Div-lambda*k-
0.5*sigma^2)*DeltaT*ones(1,NbJours)+sigma*sqrt(DeltaT)*DeltaW+(muJ-
0.5*sigmaJ^2)*PoissonZ+sigmaJ*PoissonSauts;

Increments=(mu-Div-
0.5*sigma^2)*DeltaT*ones(1,NbJours)+sigma*sqrt(DeltaT)*DeltaW;

SolSauts=exp(cumsum([log(X0),IncrementsSauts],2));

%Graphe des trajectoires avec et sans saut

figure
holdon
plot(0:1:NbJours,SolSauts);
legend('avec sauts');

holdoff
end

```

Le graphe de simulation de modèle de Merton est représenté dans la figure suivante :

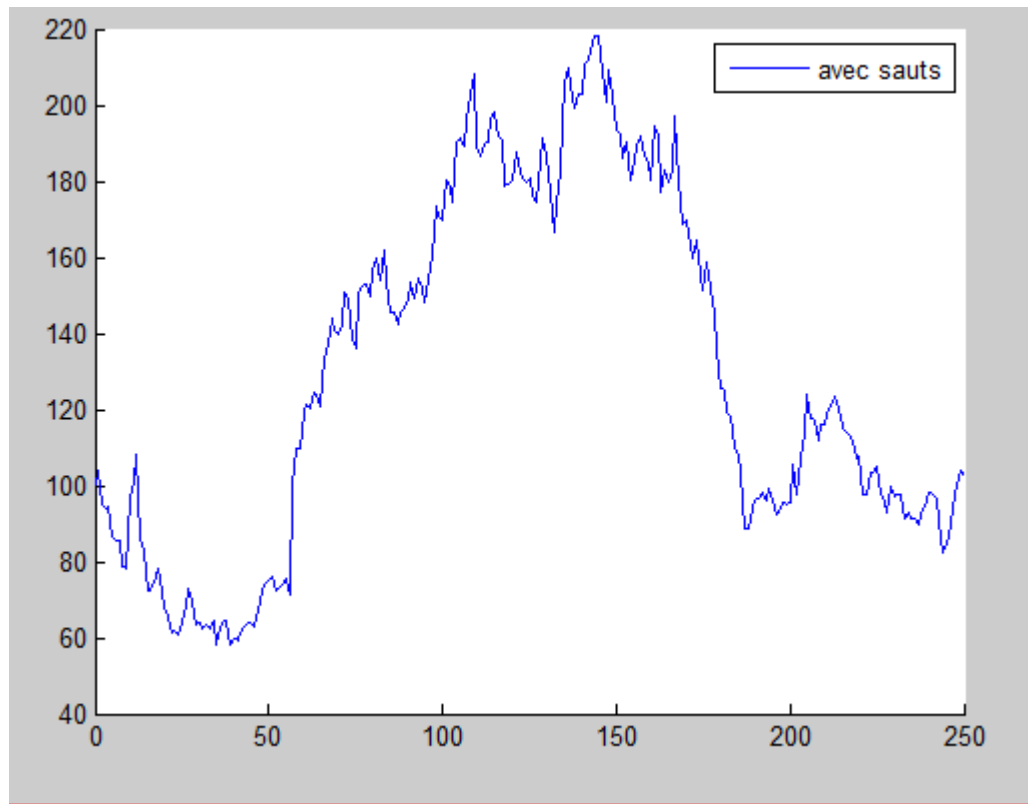


Figure 4.2 : Simulation du modèle avec sauts de Merton

La figure suivante montre les deux simulations, modèle de Black-Scholes et modèle à sauts de Merton.

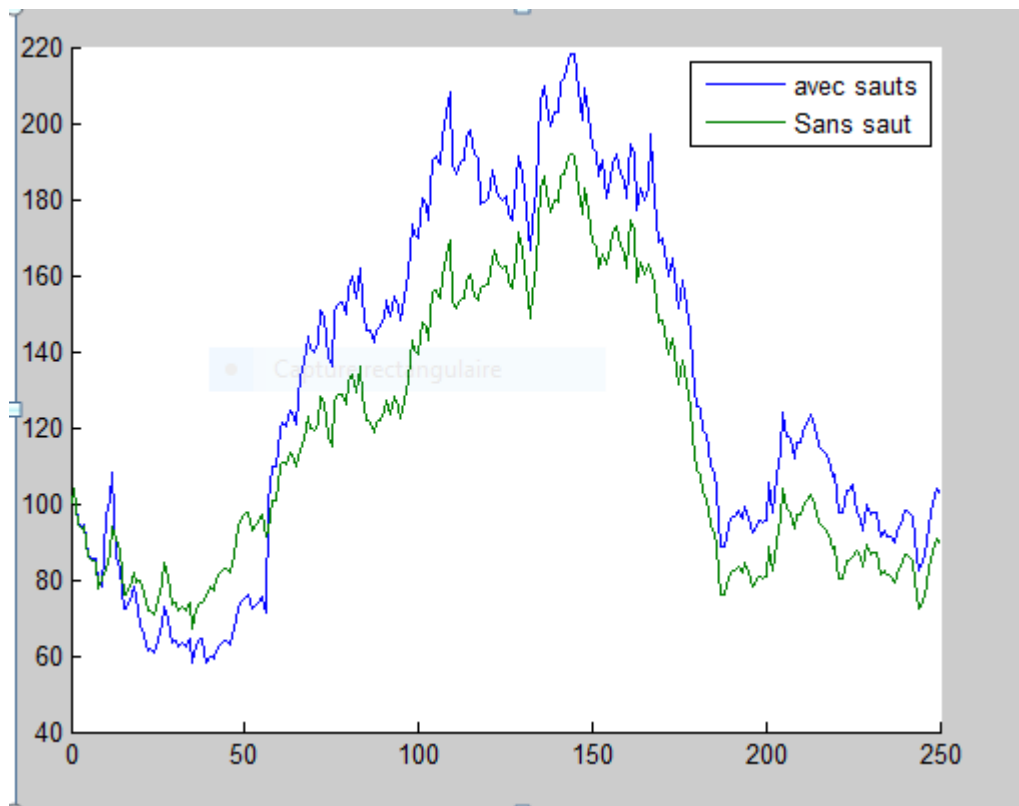


Figure 4.3 : : Simulation de modèle de Black-Scholes (sans sauts) et modèle de Merton (avec sauts).

## 4.2 Evaluations des options d'achat (Call) et de vente (Put) européenne

Afin d'obtenir le prix d'une option d'achat et de vente sur actif sous-jacent de type européen, il faut simuler dynamiquement tout un processus et puis valoriser une option (achat – vente) européenne, nous avons choisis d'utiliser la méthode de simulation de Monte-Carlo.

### 4.2.1 Calcul de Call et Put avec le modèle de Black- Scholes

## ♦ Le programme Matlab

```
clearall
clc
%simulation d'un call européenne pour le modèle de Black-Scholes
S0=100;% la valeur initial de sous-jacent
k=95;%le prix de l'exercice de l'option Strike
T=5; %Maturité
sigma=0.3; %lavolatilié

r=0.05; %taux d'intérêt sans risque
S1=(log(S0/k)+(r)*T)/(sigma*sqrt(T))+sigma*sqrt(T)/2;
S2=S1-sigma*sqrt(T);C=S0*normcdf(S1)-k*exp(-r*T)*normcdf(S2)
clearall

clc
%simulation d'un call européenne pour le modèle de Black-Scholes
S0=100;% la valeur initial de sous-jacent
k=100;%le prix de l'exercice de l'option Strike
T=5; %Maturité
sigma=0.3; %lavolatilié
r=0.05; %taux d'intérêt sans risque
S1=(log(S0/k)+(r)*T)/(sigma*sqrt(T))+sigma*sqrt(T)/2;
S2=S1-sigma*sqrt(T);
put=-S0*normcdf(-S1)+k*exp(-r*T)*normcdf(-S1)
```

Les tableaux suivantes (4.1), (4.2), (4.3) représente les valeurs d'options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent estimé par la solution analytique de l'équation de Black-Scholes pour différentes valeurs du prix d'exercices  $K$ . À l'instant  $t = 0$ ,  $S_0 = 100$ ,  $\sigma = 0.3$  et  $r = 0.05$ .

**Pour  $k = 100$**

| T | Prix Bs  | Call    | Put     |
|---|----------|---------|---------|
| 0 | 100.0000 | 35.9578 | -5.2965 |
| 1 | 103.9402 | 38.9895 | -5.7835 |
| 2 | 94.6038  | 31.9236 | -4.4461 |
| 3 | 93.6585  | 31.2320 | -4.2726 |
| 4 | 93.9415  | 31.4386 | -4.3254 |
| 5 | 86.2338  | 25.9707 | -2.6149 |
| 6 | 84.9205  | 25.0738 | -2.2612 |
| 7 | 84.6368  | 24.8815 | -2.1822 |
| 8 | 77.8260  | 20.4237 | 0.0200  |
| 9 | 80.4805  | 22.1236 | -0.9111 |

Tableau 4.1- Prix des options d'achats et de ventes en fonction du prix du sous-jacent simulé par la solution analytique du Black-Scholes à l'instant  $t = 0$  pour ( $S_0 = 100$ ,  $K = 100$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $r = 0.05$  et  $T = 5$ .)

**Pour  $k = 90$**

| T | Prix Bs  | Call    | Put     |
|---|----------|---------|---------|
| 0 | 100.0000 | 40.2062 | -5.7865 |
| 1 | 103.9402 | 43.4148 | -6.0272 |
| 2 | 94.6038  | 35.9161 | -5.3184 |
| 3 | 93.6585  | 35.1780 | -5.2175 |
| 4 | 93.9415  | 35.3985 | -5.2484 |
| 5 | 86.2338  | 29.5352 | -4.1915 |
| 6 | 84.9205  | 28.5678 | -3.9613 |
| 7 | 84.6368  | 28.3601 | -3.9094 |
| 8 | 77.8260  | 23.5219 | -2.4096 |
| 9 | 80.4805  | 25.3727 | -3.0553 |

Pour  $k = 120$

| T | Prix Bs  | Call    | Put     |
|---|----------|---------|---------|
| 0 | 100.0000 | 28.8053 | -2.1681 |
| 1 | 103.9402 | 31.4811 | -3.2573 |
| 2 | 94.6038  | 25.2780 | -0.4153 |
| 3 | 93.6585  | 24.6774 | -0.0744 |
| 4 | 93.9415  | 24.8566 | -0.1775 |
| 5 | 86.2338  | 20.1528 | 2.9950  |
| 6 | 84.9205  | 19.3899 | 3.6159  |
| 7 | 84.6368  | 19.2267 | 3.7533  |
| 8 | 77.8260  | 15.4801 | 7.4250  |
| 9 | 80.4805  | 16.9001 | 5.9062  |

♦ **Interprétation** D'après le tableau (4.1), (4.2) on remarque pour  $k = 100, k = 90$  les valeurs de **Call** sont supérieures à zéro et les valeurs de **Put** sont inférieures à zéro dans ce cas on exerce l'option de vente (Put) et n'exerce pas l'option d'achat (Call), mais pour  $K = 120$  les valeurs de Call sont supérieures à zéro et les valeurs de Put change le signe. Dans ce cas, on exerce l'option de vente (Put) et n'exerce pas l'option d'achat (Call).

#### 4.2.2 Calcul de Call avec le modèle à sauts de Merton



## ♦ Le programme

```
function c = Merton
%function c = Merton calculates the analytical price
% of a European call under jump diffusion
S0=100; %initial stock price
x=100; %strike
T=5; %time to maturity
Delta=0.4; %std of lognormal jump process
nu=0; %mean of lognormal jump process
lambda=5; %intensity of jump
vola=0.4; %vola of stock price
r=0.05; %interest rate
%the price is given as a series of terms,
%comput the first N terms for the result
N=100;
k=exp(nu+0.5*Delta^2)-1;
c=0;
for n=0:N
    sigma_n =sqrt(vola^2+n*Delta^2/T);
    r_n = r-lambda*k+n*log(1+k)/T;
    S1=(log(S0/x)+(r_n+0.5*sigma_n^2)*T)/(sigma_n*sqrt(T));
    S2=S1-sigma_n*sqrt(T);
    f_n=S0*normcdf(S1,0,1)-x*exp(-r_n*T)*normcdf(S2,0,1);
    c=c+exp(-lambda*(1+k)*T)*(lambda*(1+k)*T)^n*f_n/factorial(n)
end
end
```

Le tableau suivant présente les valeurs d'options d'achats en fonction du prix du sous-jacent et le prix d'exercice  $K$  estimé par la solution analytique de l'équation de Merton.  $S_0 = 100$ ;  $T = 5$ ;  $r = 0.05$  ;  $\lambda = 5$ .

| La date T | le prix d'exercice k | Prix du sous- jacent | Call    |
|-----------|----------------------|----------------------|---------|
| 0         | 90                   | 100.0000             | 78.2271 |
| 1         | 90                   | 104.0637             | 81.8798 |
| 2         | 90                   | 94.8289              | 73.5980 |
| 3         | 90                   | 93.9930              | 72.8518 |
| 4         | 90                   | 94.3890              | 73.2052 |
| 5         | 90                   | 86.7476              | 66.4104 |
| 0         | 100                  | 100.0000             | 76.9954 |
| 1         | 100                  | 104.0637             | 80.6137 |
| 2         | 100                  | 94.8289              | 72.4113 |
| 3         | 100                  | 93.9930              | 71.6725 |
| 4         | 100                  | 94.3890              | 72.0224 |
| 5         | 100                  | 86.7476              | 65.2967 |
| 0         | 120                  | 100.0000             | 74.7728 |
| 1         | 120                  | 104.0637             | 78.3267 |
| 2         | 120                  | 94.8289              | 70.2725 |
| 3         | 120                  | 93.9930              | 69.5475 |
| 4         | 120                  | 94.3890              | 69.8908 |
| 5         | 120                  | 86.7476              | 63.2935 |

Tableau 4.2- Valeurs de l'option et ses paramètres.

♦ **Interprétation** • Les résultats montrent que le prix des options d'achats augmente avec l'augmentation des prix du sous-jacent simulé par le Modèle de Merton (St) et diminué avec l'augmentation du prix d'exercice K.

♦ **Conclusion** On peut conclure que pour une option d'achat (Call), lorsque le prix d'exercice est inférieur au cours du sous-jacent (je peux acheter ce sous-jacent moins cher en exerçant mon Call que si je l'achetais sur le marché) dans ce cas l'option (Call) est dans la monnaie, et si le prix d'exercice est supérieur au cours du sous-jacent (je n'ai pas intérêt à

exercer mon droit d'achat) donc le Call est hors la monnaie.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans l'étude que nous avons abordé dans ce présent mémoire, nous avons vu qu'il existe un nombre important des modèles stochastiques pour l'évaluation des prix des options à fin de prendre une décision de les exercer ou non.

Dans notre cas, on a utilisé deux modèles d'évaluations, un modèle continu de Black-Scholes et un modèle discontinu de Merton.

Dans la première partie, on a simulé les prix de sous-jacent de modèle de Black Scholes et le modèle de Merton avec la méthode de Monte-Carlo. La deuxième partie du calcul des prix des options (achat ou vente) nous avons utilisé les formules mentionnés dans les chapitres précédents.

Nous avons fait varier trois paramètres d'option : la date d'échéance  $T$ , le prix de sous-jacent  $S_t$  et le prix d'exercice  $K$  dans les deux modèles d'évaluations.

Nous constatons que l'option soit d'achat ou de vente, dépend de prix de sous-jacent  $S_t$  et le prix d'exercice  $K$  dans les deux modèles.

Lorsque le prix d'exercice est inférieur au cours du sous-jacent dans ce cas l'option (Call) est dans la monnaie (on exerce l'option), et si le prix d'exercice est supérieur au cours du sous-jacent donc le Call est hors la monnaie.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRAHIMI AMINA , MOUSSAOUI RANIA , «Modèles stochastiques des taux d'intérêt» , 2019, MBB.
- [2] JEAN-JACOD , «Théorie de la mesure» , [www.les-mathématiques.net](http://www.les-mathematiques.net).
- [3] MONIQUE JEANBLANC , «cours de calcul stochastique» , Septembre 2006 , Master 2IF EVRY .
- [4] L.BREIMAN , «Probability.Addison-Wesley» ,1968, Reading MA.
- [5] J.C.Cox.J.E.Ingersoll , and S.A. Ross. «A theory of term structure of interest rates » , 1985, Econometrica .
- [6] YUEYUN HU , LAURENT TOURNIER , «PROCESSUS STOCHASTIQUES A TEMPS DISCRET» , Université Paris 13.
- [7] DAMIEN LAMBERTON , Beranrd LAPEYRE, «Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance», 2012 , (livre) .
- [8] CHAPMAN , HALL , «Financial modeling with jump processes» , 2004, winner of a risk book.
- [9] K. KHALDI , «Mouvements Brownien» , master 2 MMF, 2020 ,UMBB Boumerdes .

- 
- [10] SOUAHLIA AHMED , «Processus de diffusion et equations differentielles stochastiques- Aspects théorique et numérique- Applications», 2007 , UMBB Boumerdes .
  - [11] Mouvements Brownien , «Intégrale stochastique ; séminaire des doctorants» , Mars 2003.
  - [12] D. NUALART , W. SCHOUTENS , «Backward stochastic differential equations and Feynman-Kac formula for Lévy processes with applications in finance» , 2001.
  - [13] MAZOUNI FATIMA , MENDAS KENZA , «Les méthodes d'estimations de la volatilité des indices boursiers» , 2016.
  - [14] Gallardo.L , «Mouvement Brownien et calcul d'Itô avec exercices corrigés» , 2008.
  - [15] COMETS.F , MEYRE.T , «calcul stochastique et modèles de diffusions»,cours et exercices corrigés.
  - [16] DICHOU SOUMAYA , HIRECHE NOUR EL-HOUDA , «Modèle d'évaluation des prix en temps continu à volatilité stochastique» , 2020, UMBB.
  - [17] BENREHAB FADILA , «volatilité stochastique prix d'option et stratégie de couverture» , 2007.
  - [18] M.P.GUINASH , «Les options négociable sur action , Evaluation et gestion» , 2002.
  - [19] DAIBECHE AMINA , MEKLA NAIMA , «Valorisation d'options Théorie-Simulation» , 2017.
  - [20] HUYIN.PHAM, «Introduction aux mathématiques et modèles stochastiques des marchés financiers» , 2007.
  - [21] ELLAa BONI , BORIS GENOT , AUDREY MOMEN , «Un modèle statistique de détection des sauts dans un processus de cours boursiers» , Mai 2005
  - [22] «Les paramètres du modèle de Black et Scholes» , 2005.
  - [23] EDOUARD MAY , XAVIER MILHAUD , THEIRRY MOUDIKI , Project de Théorie Financière , mars 2008
  - [24] KILANI GHOUDI , BRUNO RÉMILLARD, «A nonparametric test of serial independence for time series and residuals» , 2001.
  - [25] AVNER FRIEDMAN « Stochastic Differential Equations and Applications» , 1975.

- [26] LEB CIR KHA OULA , BOUROUIS SARA , Calcul d'options dans les modèles de diffusions à sauts , 2019, UMBB.
- [27] BERNT OKSENDAL « Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications » , 2000.
- [28] CATHERINE HUBER , MIKHAIL NIKULIN , «Remarques sur le Maximum de Vraisemblance» , 1997.
- [29] CELINE LACAUX , « Méthodes probabilistes pour la simulation » , Cours de Mathématiques , 2007- 2008.
- [30] DAMIEN LAMBERTON , BERNARD LAPEYRE , «Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance» , 1996.
- [31] DESMOND , J.HIGHAM , «An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential equations» , 2001.
- [32] FABIEN CAMPILLO , «processus de diffusion » , 1996.
- [33] FIMA CKLEBANER , «Introduction to stochastic calculus with applications» , 2005.
- [34] HUYÊN PHAM , «Introduction aux Mathématique et Modèle stochastiques des marchés financières» , 2006-2007.
- [35] JEAN FRANÇOIS , «Mouvement Brownien et Calcul Stochastique » , 1997.
- [36] JOHN NORSTAD , «Black-Scholes the Easy Way» , 1999.
- [37] J.MICHAEL STEELE, «Stochastic Calculus and Financial Applications» , 2001.
- [38] OLIVIER LÉVÊQUE , de probabilités et calcul stochastique» , 2004-2005.
- [39] PHILIPPE BRIAND , «Le modèle de Black–Scholes» , 2003.
- [40] TOULOUSE « Statistique des processus. Applications aux finances » , 2001-2002.
- [41] VINCENT BARRA , « Modélisation des processus aléatoires : Introduction aux équations différentielles stochastiques » , 2005/2006.
- [42] B.YCART , «Introduction aux équations différentielles stochastiques» , 1998.