MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ M'HAMED BOUMERDES
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse

Par

Haddar Zineb

THÈME

Application de la Théorie des Espaces de Hilbert sur les Équations Intégrales

Soutenu publiquement, le 25/09/2021 devant le jury composé de :

Mme.	**K. Laoubi**	U.M.B.B.	Président.
Mr.	**R. GUETTAF**	U.M.B.B.	Encadreur.
Mr.	**D. Seba**	U.M.B.B.	Examinateur.

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance envers Monsieur ***R.Guettaf*** *mon Encadreur pour pour toutes les orientations et les conseils qu'il m'a prodigué tout le long de ce travail.*

J'adresse mes plus vifs remerciements à Madame ***K.Laoubi.****, à l'U.M.B.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.*

Je suis très honoré que madame ***D.Seba*** *à l'U.M.B.B.pour l'importance qu'elle a accordé à mon travail en acceptant de faire partie du jury.*

Je ne saurais oublier exprimer ma profonde gratitude a mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je souhaite enfin remercier ma famille et mes amis je leur adresse ici ma gratitude la plus profonde, pour tous les encouragements et leur soutien continu.

Application De La Théorie Des Espaces De Hilbert Sur Les Equations Intégrales

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude de quelques applications linéaires définies sur un espace de Hilbert dans lui même dont les opérateurs intégraux. Nous considérons quelques équations intégrales plus précisément les équations intégrales de Fredholm et Volterra, puis nous citerons des conditions suffisantes et nécessaires pour l'existence et l'unicité de la solution de quelque type d'entre elles. Enfin, nous aborderons la résolution de ces équations intégrales par différentes méthodes de calcul à savoir la méthode de décomposition d'Adomian et les méthodes d'approximation successive.

Mots-clés : *Espaces de Hilbert, Opérateur intégral, équations de Volterra, équations de Fredholm, méthodes de décomposition.*

Table des matières

Notations

- Si A est un ensemble de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, on note par $\overline{A}$ l'adhérence de A.

$C(A)$ l'espace des fonctions continues sur A.

$C^1(A)$ l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur A.

- Si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbf{N}^*$, on utilise les notations suivantes:

$(.,.)_H$ le produit scalaire de H.

$\|.\|_H$ la norme de H.

H^* l'espace dual de H.

$\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés définis sur H dans H.

$\mathcal{K}(H)$ l'ensemble des opérateurs compact définis sur H dans H.

$\ddot{u}$ (resp.$\dot{u}$) représente la dérivée seconde (resp.première)de la fonction u.

$L(u(t))$ La transformation de Laplace d'une fonction $u(t)$.

$p.p.$ presque partout.

.

Introduction générale

La théorie des équations intégrales qui s'est développée très rapidement à la suite des travaux de Volterra et de Fredholm constitue aujourd'hui une importante branche de l'analyse mathématique. Une équation intégrale est une équation dans laquelle une fonction inconnue à déterminer apparaît dans une intégrale. La fin du XIXe siècle a vu un intérêt croissant pour les équations intégrales, principalement en raison de leur lien avec certaines des équations différentielles de physique mathématique. Joseph Fourier (1768 - 1830) a était l'initiateur des équations intégrales, puis J. Liouville (1809-1882) a publié en 1837 un article établissant la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles. En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés [20]. Dans la première décennie du vingtième siècle, Ivar Fredholm (1903), David Hilbert (1904) et Erhard Schmidt (1907) ont publié trois articles sur les équations intégrales qui, ensemble, ont fait avancer le sujet à partir d'études de cas particuliers à une théorie générale bien développée. Ivar Fredholm (1866 - 1927) publia à Acta Mathematica la théorie d'équation intégrale qui joué un rôle majeur dans l'établissement de la théorie des opérateurs et la théorie spectrale [8], [9], les travaux de Fredholm sont a l'origine de travaux de David Hilbert (1862 - 1943) sur le même sujet qui allait conduire celui-ci à la notion fondamentale d'espace de Hilbert et a posé les premières bases de la théorie spectrale, cadre dans le quel Frigyes.Riesz (1880 - 1956) développa la théorie des opérateurs compact (1918).

De ces travaux ont émergé quatre formes générales d'équations intégrales, appelées équations de Volterra et Fredholm de premier et deuxième type et un troisième type a été ajouté au canon plus tard. Bien qu'en principe les quatre formes puissent être considérées comme cas particuliers de l'équation de Fredholm du deuxième type, en fait ils ont différentes propriétés et sont généralement traités séparément.

Les espaces de Hilbert jouent un rôle d'une importance capitale dans de nombreuses branches mathématiques, en particulier en analyse ou il intervient dans l'étude des équations différentielles et intégrales. Dans ce mémoire on décrit quelques applications de la théorie des espaces de Hilbert aux équations intégrales. On illustre quelques applications possibles des techniques développées en théorie en incluant la classification standard des équations intégrales importantes (équations intégrales de Volterra, Fredholm, Intégro-différentielle) et leur résolvabilité.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Le premier est un rappel de quelques propriétés et les idées de base et des résultats de la théorie de l'espace de Hilbert et de l'analyse fonctionnelle

Le deuxième chapitre concerne l'étude des opérateurs linéaire et intégraux. On introduit les applications linéaires continues d'un espace de Hilbert dans lui-même. Une grande partie des théorèmes est également valable pour les applications linéaires continues définies entre deux espaces vectoriels normés. Puis nous définissons les opérateurs compact et enfin les opérateurs intégraux linéaires et certains caractéristiques tel que la continuité et la compacité en mentionnant quelques types (Fredholm, Volterra, ...)

Dans le troisième chapitre, on procède à la classification des équations intégrales linéaire dont les équations intégrales de Fredholm et Voltera constituent les deux principale catégorie, puis, on étudie l'existence et l'unicité de certaines type d'équation intégrales.

Dans le dernier chapitre, on propose quelques méthodes pour résoudre les équations intégrales à savoir la méthode des approximations successives, la méthode des solutions en série et la méthode de la transformation de Laplace. Nous appliquons aussi les méthodes récemment développées, comme la méthode de décomposition d'Adomian et certaines méthodes de calcul direct, ces méthodes récentes sont employées dans la résolution d'équations intégrales sans utiliser la théorie mathématique étendue et laisse de côté les méthodes abstraites et complètes.

On a aussi abordé une autre méthode qui consiste à convertir l'équation intégrale à une équation différentielle.

Enfin dans le paragraphe intitulé "conclusion et perspective " nous récapitulons l'ensemble des résultats de ce mémoire ainsi les éléments qui reste a développer..

Chapitre **1**

Espace de Hilbert, généralités et préliminaires

Sommaire

Dans ce chapitre, on va parler des espaces de Hilbert qui sont après les espaces vectoriels de dimension finie, les espaces vectoriels normé dont les propriétés sont les plus simples. Les espaces de Hilbert jouent un rôle d'une importance capitale dans de nombreuses branches mathématiques, en particulier en analyse ou il intervient dans l'étude des équations différentielles et intégrales.

David Hilbert (1862 - 1943) a posé les premières bases de la théorie spectrale, cadre dans le quel Frigyes-Riesz (1880 - 1956) développa la théorie des opérateurs compact (1918). Les espaces de Hilbert sont la version de dimension infinie des espaces euclidiens, dont ils gardent beaucoup de ses propriétés, on va citer quelque unes.

1.1 Espace euclidien

1.1.1 Produit scalaire dans un espace euclidien

Définition 1.1. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Un produit scalaire sur E est une application définie de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes:*
pour tout $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
1. $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$.
2. $x, y \in E$ on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. $x \in E$ on a $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si $x = 0$.
E muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ s'appelle espace euclidien.

Exemple 1. *sur $\mathbb{R}^n$ les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont les vecteurs $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et le produit scalaire est donné par :*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

1.1.2 Norme et distance euclidienne

Si $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ est un produit scalaire sur E, la norme euclidienne d'un élément $x \in E$ est

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

et la distance euclidienne associée entre deux éléments x et y de E est la norme euclidienne de leur différence :

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

1.1.3 Orthogonalité, base orthonormale dans un espace euclidien

Définition 1.2. *Soit E un espace euclidien de dimension n. Une base $(e_1, ..., e_n)$ de E est dite orthogonale quand $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i \neq j$ Elle est dite orthonormale si en plus $\|e_i\| = 1$ pour $i = 1, ..., n$ La base $(e_1, ..., e_n)$ est orthonormale si et seulement si* *la matrice du produit scalaire dans cette base est la matrice identité I_{dn}, ou encore si et seulement si le produit scalaire de deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ est donné par $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.*

Un espace euclidien possède toujours une base orthogonale (c'est vrai pour n'importe quelle forme bilinéaire symétrique, en particulier pour le produit scalaire). Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthogonale de l'espace euclidien E, on peut en faire une base orthonormale en remplaçant e_i par $\frac{1}{\|e_i\|}e_i$ Grâce à cette propriété, on peut confirmer que l'étude d'un espace euclidien de dimension n se ramène à celle de $\mathbb{R}^n$ avec son produit scalaire usuel et on a une façon utile de fabriquer une base orthogonale (ou orthonormale) à partir d'une base quelconque d'un espace euclidien.

1.2 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert

1.2.1 Formes sésquilinéaire et formes hermitiennes

Dans tout ce qui suit on considère que $\Bbbk$ désigne le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et $\overline{x}$ désigne le conjugué de x, on rappel qu'une forme linéaire et une application linéaire dont les images sont dans $\Bbbk$

Définition 1.3. *Soit E un espace vectoriel sur $\Bbbk$ et l'application*

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \Bbbk$$
$$(x, y) \longmapsto \varphi(x, y)$$

- φ et dite sésquilinéaire sur E, si pour tout $x, y, z \in E$ et $\alpha, \beta \in \Bbbk$

$$(i) \quad \varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z)$$
$$(ii) \quad \varphi(x, \alpha y + \beta z) = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x, z)$$

-φ est dite hermitienne sur E si φ est sésquilinéaire et antisymétrique :

$$pour \quad tout \quad x, y \in E : \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$$

Remarque 1.1. *Lorsque $\Bbbk = \mathbb{R}$, une forme hermitienne est tout simplement une forme bilinéaire symétrique on aura $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrique)*

Définition 1.4. *Une forme hermitienne φ sur le $\Bbbk$-espace vectoriel E est dite - définie positive si, pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, elle vérifie $\varphi(x, x) > 0$.*

1.2.2 Espace préhilbertien

Un espace préhilbertien sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel E muni d'une forme hermitienne définie positive. Cette forme, souvent notée $(x, y) \to \langle x, y\rangle$, est appelée produit scalaire sur l'espace préhilbertien E et note $(E, \langle ., .\rangle)$

Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a les propriétés suivantes :

$$(a) \quad \langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$

$$(b) \quad \langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\, \langle x, y\rangle$$

$$(c) \quad \langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0 \ \ \forall x \in E$$

$$(d) \quad si \qquad \langle x, t\rangle = \langle y, t\rangle\,, \forall t \in E \quad alors \quad x = y$$

1.2.3 Inégalité de Cauchy Schwarz

Sur tout espace préhilbertien E, le produit scalaire vérifie, pour tous $x, y \in E$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$$

l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Inégalité de Minkowski

— Pour tout élément x, y de l'espace préhilbertien E, on a

$$\langle x + y, x + y\rangle^{\frac{1}{2}} < \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.1. *Soit E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle ., .\rangle$, l'application*

$$x \to \|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

est une norme associée au produit scalaire $\langle ., .\rangle$, E est un espace vectoriel normé et on note $(E, \|.\|_E)$ ou $(E, \langle ., .\rangle_E)$

Pour la démonstration : il faut vérifier que pour tous vecteurs x et y et tout scalaire λ: $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|\,,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire). Les deux premières propriétés découlent immédiatement de la définition du produit scalaire et la troisième découle de l'inégalité de Minkowski.

1.2.4 Espace de Hilbert

Définition 1.5. *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme induite* $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Voici quelques propriétés des espaces de Hilbert:

Soit $(E, \langle ., .\rangle_E)$ un préhilbertien, $\|.\|_E$ la norme associée,

1) pour tout $x, y \in E, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle$

2) pour tout $x, y \in E$, on a : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (Identité du parallélogramme ou formule de la médiane))

3) si $x_n \to x \quad et \quad y_n \to y$ alors $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$

4) si (x_n, y_n) est de Cauchy alors $\langle x_n, y_n\rangle$ est de Cauchy dans tout espace E de Hilbert

Remarque 1.2. *Si E est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|_E$ vérifiant l'identité du parallélogramme, alors E est un préhilbertien*

Exemples d'espace de Hilbert

Exemple 2. *L'archétype des espaces de Hilbert (non de dimension finie) est l'espace des suites dénombrables (c'est-à-dire. indexée par $\mathbb{Z}$ ou, par une bijection convenable, par $\mathbb{Z}$). On définit l'espace des suites de carré sommable:*

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^n, \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire défini par

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \overline{v_n}, \quad u, v \in l^2(\mathbb{N}) \tag{1.2.1}$$

et la norme associée $\|\|_2$ définie par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} {u_n}^2}, \quad u \in l^2(\mathbb{N})$$

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la suite (e_n) de $l^2(\mathbb{N})$ dont le seul coefficient non nul est le $n-$ième valant 1. Alors $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $l^2(\mathbb{N})$. Toute suite $u = (u)_{n\in\mathbb{N}}$ de $l^2(\mathbb{N})$ avec un nombre fini de coordonnées non nulles peut être exprimée suivant

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n e_n$$

, avec

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle u, e_n\rangle^2$$

Exemple 3. *Soit X un ensemble, Ω une tribu de X et μ une mesure sur Ω et notons par $\mathcal{F}$ l'espace mesuré (X, Ω, μ), alors l'espace*

$$L^2(\mathcal{F}) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{k}, \quad \int_X |f(x)|^2 \, d\mu(x) < +\infty \right\}$$

est l'ensemble de classe de fonction f définie sur X et à valeurs dans $\mathbb{k}$ est de carré intégrable où la relation d'équivalence est définie par

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \quad p.p \ x \in X$$

l'ensemble $L^2(\mathcal{F})$ est un espace de Hilbert, muni de produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathcal{F}} f(x)\overline{g(x)} d\mu(x)$$

et de la norme induite

$$\|f\|_2 = (\int_{\mathcal{F}} |f(x)|^2 \, d\mu(x))^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 4. *Si on considère dans l'exemple précédent $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue, on note $L^2(\mathcal{F}) = L^2([a, b])$. Une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2([a, b])$ est définie par*

$$e_n = e^{2\pi i n x}.$$

1.2.5 Orthogonalité dans les espaces de Hilbert

Définition 1.6. *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien, deux éléments x et y de E sont dits orthogonaux s'ils vérifient $\langle x, y\rangle = 0$ et on note dans ce cas $x \perp y$. On note par $x^\perp = \{y \in E$ tel que $x \perp y\}$ l'ensemble de tous les éléments orthogonaux à x*

On remarque que la relation $\perp$ est symétrique ($x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$) et si $x \perp x \Rightarrow x = 0$ et donc tous points est orthogonal a 0.

De plus si x est orthogonal a $y_1, y_2, ..., y_n$, alors x est orthogonal à toute combinaison linéaire de $y_1, y_2, ..., y_n$

Théorème 1.2. (Pythagore) *Si $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est une famille de vecteur orthogonaux alors :*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

En particulier, on a :

$$x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Dans un espace préhilbertien, un sous-ensemble constitué d'une suite de vecteurs $(x_n)_{n\geq 0}$ finie ou infinie vérifiant $x_i \perp x_j \quad, \forall i \neq j$ est appelé suite orthogonale et si $(x_n)_{n\geq 0}$ est constituée de vecteurs non nuls, alors les x_n sont linéairement indépendant.

Remarque 1.3.
1)- Soit $x \in E$, $x^{\perp}$ son orthogonal, x est orthogonal à toute combinaisons linéaire de $x^{\perp}$ et donc $x^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E
2)- Soit A une partie de E et $Vect(A)$ l'espace vectoriel engendré par A, ($Vect(A)$ est l'intersection de tous les sous espace vectoriel fermés contenant A), alors

$$x \perp A \Rightarrow x \perp Vect(A)$$

Orthogonalité d'ensembles Soit A et B deux partie d'un préhilbertien $(E, \langle ., . \rangle)$, on dit que A et B sont orthogonaux et on note $A \perp B$ *si*

$$x \perp y, \forall x \in A, \forall y \in B,$$

On appelle l'orthogonal de A et on note $A^{\perp}$ l'ensemble :

$$A^{\perp} = \{x \in E, \ \forall y \in A, \ \ x \perp y\}$$

Notation 1.1. *1) $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de H (Hilbert) et $A \cap A^{\perp} = \{0_E\}$.*
2) $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
3) $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$
4) $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$
5) $(A^{\perp})^{\perp} \supset A$ et si H est un Hilbert et A un sous espace vectoriel fermé de H, alors $(A^{\perp})^{\perp} = A$
6) $A^{\perp} = Vect(A)^{\perp}$

1.2.6 Base hilbertienne

Famille orthornormale dans un espace de Hilbert

Une suite $(e_i)_{i\in I}$ d'un espace de Hilbert H est dite orthornormale si

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0, \quad \forall i \neq j \quad et \quad \|e_i\| = 1, \forall i \in I$$

et $(e_i)_{i\in I}$ est dite totale si le sous espace engendrée par cette famille est dense dans H, c'est à dire : $\overline{Vect(e_i)} = H$

Définition 1.7. *Soit H un Hilbert et (e_n) une suite orthonormale, si (e_n) totale alors (e_n) est appelée base hilbertienne de H. Pour tout x, on appelle n-ième cordonnée de x par rapport à e_n ou n-ième coefficient de Fourier de x par rapport à (e_n) le nombre*

$$\xi_n(x) = \langle x, e_n\rangle\, e_n$$

Voici un théorème qui résume le résultat précédent en donnant une égalité très importante :

Théorème 1.3. *Soit $(H, \langle ., .\rangle)$ un espace de Hilbert et (e_n) une suite orthonormale de H, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*
1) (e_n) est totale
2) $\forall x \in H$, l'égalité de Parseval est vérifiée:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle^2$$

3) Développement (ou série de Fourier) $\forall x \in H$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n$ converge et on a $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n$
4) $\forall x, y \in H$, $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(x)\xi_n(y) = \langle x, y\rangle$

1.2.7 Théorème de projection

On rappel que dans un espace vectorielle normé E, une partie A de E est dite convexe si

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0, 1] : z = (1-t)x + ty \in A$$

A est dite strictement convexe si $z \in \mathring{A}$. Rappelons aussi que si E est complet, alors toute partie fermée est complète. Un résultat fondamental de l'analyse hilbertienne est le suivant :

Théorème 1.4. (Projection sur un convexe fermé) *Soit E un préhilbertien et $A \subset E$ une partie non vide, convexe, fermé et complète. Soit h un élément de E, il existe un et un seul élément noté $P_r(h)$ de A appelé projection de h sur A défini par :*

$$\|h - P_r(h)\| = \min_{x \in A} \|h - x\|$$

ou encore:

$$\forall x \in A : \|h - P_r(h)\| \leq \|h - x\|$$

de plus, $P_r(h)$ est caractérisé par la propriété suivante :

$$\forall x \in A : \mathrm{Re} \langle x - P_r(h), h - P_r(h) \rangle \leq 0$$

dans le cas réel on a : $\langle x - P_r(h), h - P_r(h) \rangle \leq 0$.

Chapitre 2

Opérateurs linéaires et opérateurs intégraux

Sommaire

Ce chapitre est consacré à l'introduction des applications linéaires continues définies d'un espace de Hilbert dans lui-même. Une grande partie des théorèmes est également valable pour les applications linéaires continues définies entre deux espaces vectoriels normés. Puis nous définissons les opérateurs compact et enfin les opérateurs intégraux linéaires et certains caractéristiques tel que la continuité et la compacité en mentionnant quelques types (Fredholm, Volterra, ...).

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\Bbbk$. Une application $T : E \to F$ est dite linéaire si pour tout u et v dans E et pour tout scalaires α et β,

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$$

Cette application est appelée aussi opérateur linéaire ou transformation linéaire. Lorsque T est défini sur $D \subset E$, ce dernier est appelé le domaine de l'opérateur T et est noté $D(T)$

2.1 Opérateur linéaire borné

Définition 2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire T : $E \to F$ est dit borné s'il existe une constante $M > 0$, telle que $\|Tu\| \leq M \|u\|$ pour tout $u \in E$.*

Exemple 5. *Soit H un espace de Hilbert complexe et $a, b \in H \backslash \{0\}$. On défini l'opérateur $T : H \longrightarrow H$ par $T_x = \langle x, a \rangle b$. On a pour tout $x \in E$, $\|T_x\| = \|\langle x, a \rangle b\| = \langle x, a \rangle \|b\|$ (car $\langle x, a \rangle = \lambda \in \mathbb{C}$), et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient*
$\|T_x\|_H \leq \|a\|_H \|b\|_H . \|x\|_H$, d'où T borné

Il est très important de mentionner que dire qu'un opérateur est borné est équivalent à dire qu'il est continu, c'est-à-dire que l'on a le résultat suivant:

Théorème 2.1. *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux e.v.n et l'opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) T est borné.
2) T est borné sur la sphère unité.
3) T lipschitzien. ($\exists k > 0, \forall x, y \in E,\ \|Ty - Tx\|_F \leq k \|Ty - Tx\|_E$.
4) T est uniformément continu.
5) T est continu en x_0.

2.1.1 Norme d'un opérateur linéaire et espace des opérateurs bornés

Définition 2.2. *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux e.v.n et l'opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$. La plus petite constante positive réalisant $\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E$ s'appelle norme de T et se note $\|T\|$ c'est-à-dire : $\|T\| = \inf \{M > 0,\ \|Tx\|_F \leq M \|x\|_E$ pour tout $x \in E\}$. De plus*

$$\|T\| = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \tag{2.1.1}$$

On note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés définis sur l'$e.v.n$ E dans l'$e.v.n$ F, si $E = F$, il est noté simplement par $\mathcal{L}(E)$

$\mathcal{L}(E, F)$ muni des opérations, somme d'applications et produit par un scalaire est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel et en notant $\|T\| = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$. De plus si F est un espace de Banach, $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi.

2.1.2 Convergence d'une suite d'opérateurs bornés [10]

Soit E et F deux $\mathbb{k}-$espaces vectoriels normés et la suite d'opérateurs $(T_n) \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que :

- (T_n) *converge simplement* vers $T \in \mathcal{L}(E, F)$ si $T_n x \to Tx$ quand $n \to +\infty$ pour tout $x \in E$. (Convergence ponctuelle).

- (T_n) *converge uniformément* vers $T \in \mathcal{L}(E, F)$ si $\|T_n - T\| \to 0$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire que: $\sup\limits_{x \in E} |T_n x - Tx| \to 0$ quand $n \to +\infty$

Il est évident que **si** (T_n)converge uniformément vers $T \in \mathcal{L}(E, F) \Rightarrow (T_n)$converge simplement vers $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

En effet: Pour tout $x \in E, \|T_n x - Tx\|_F \leq \|T_n - T\| \|x\|_E$, donc tend vers zéro si $\|T_n - T\|$tend vers zéro.

Remarque 2.1. *La réciproque est fausse. Voici un exemple :*

Exemple 6. *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de H. Posons*

$$\begin{aligned} T_1 x &= \langle x, e_1 \rangle e_1 \\ T_2 x &= \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 \\ &\ldots \\ T_n x &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \end{aligned}$$

De la continuité du produit scalaire, on en déduit que $T_n \in \mathcal{L}(H)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
Pour tout $x \in H$, $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = x = I_{dH}(x)$. Donc $T_n \longrightarrow I_{dH}$ simplement.
Montrons que la convergence n'est pas uniforme: La suite $(e_n)_{n \geq 1}$ est orthonormée c'est-à-dire $\|e_i\| = 1$ et pour tout $i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$. On a $T_n(e_{n+1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle e_{n+1}, e_i \rangle e_i = 0$ puisque $\langle e_{n+1}, e_i \rangle = 0$ et $T_{n+1}(e_{n+1}) = 0 + 0 + \ldots + \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1} + 0 = e_{n+1}$, donc$\|T_{n+p}(e_{n+1}) - T_n(e_{n+1})\|_H = \|e_{n+1}\|_H = 1$, ce qui implique $\sup\limits_{x \in E} |T_{n+p}(x) - T_n(x)|$ ne tend pas vers 0 c'est-à-dire $\|T_{n+p} - T_n\|$ne tend pas vers 0 et donc n'est pas de Cauchy.

Remarque 2.2. (Opérateurs de Hilbert-Shmidt) *Si H un espace de Hilbert séparable, $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne et $T : H \longrightarrow H$ est un opérateur borné tel que*

$$\|T\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 < +\infty$$

T est appelé opérateur de Hilbert-Shmidt.

2.1.3 Inverse d'un opérateur linéaire

Définition 2.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur $T : E \to F$ est dit inversible s'il existe un opérateur borné $S : F \to E$ de domaine $D(S) = F$, tel que*

$$T \circ S = I_{dF} \qquad et \qquad S \circ T = I_{dD(T)}$$

L'opérateur S est alors unique et on le note $S = T^{-1}$.
Si $T(E) = F$ et T^{-1} existe, $T \circ T^{-1} = I_{dF}$ et si T et T^{-1} sont continus T est dit homéomorphisme et E,F sont dits homéomorphe.

Théorème 2.2. (Homéomorphisme de Banach) *Si E et F sont deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et bijectif, alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*

Un autre résultat important est le suivant

Théorème 2.3. *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Notons $I_d \in \mathcal{L}(E)$ l'opérateur identité, Si $\|T\| < 1$, alors $(I_d - T)$ est inversible et on a*

$$(I_d - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

de plus

$$\left\|(I_d - T)^{-1}\right\| = \frac{1}{1 - \|T\|}$$

De ce dernier et sous les mêmes hypothèses, on confirme que l'équation

$$u - Tu = f, \quad f \in E$$

admet une solution unique dans E telle que

$$u = (I_d - T)^{-1} f, \quad f \in E$$

2.1.4 Théorèmes de point fixe

On termine cette partie par le théorème du point fixe de Banach qui est la base de la théorie de point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour tout application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même, dans le cas des espaces vectoriels normés, on a

Définition 2.4. *Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui même, T est dit contractant s'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x, y \in E$ on ait :*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\|$$

l'opérateur T est dite strictement contractante ssi il existe $k < 1$ telle que pour tout $x, y \in E$ on ait :

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\|$$

Théorème 2.4. (Point fixe de Banach) *Soit T une contraction dans un espace de Banach X, alors T admet un unique point fixe*

Un autre théorème tout aussi important

Théorème 2.5. (Picard) *Toute opérateur T strictement contractant d'un espace de Banach dans lui même admet un unique point x. De plus, x est la limite des itérations de T à partir de n'importe quel point x_0. Enfin la vitesse de convergence est géométrique de rapport k:*

$$\|x - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_0 - x_n\|$$

2.2 Cas d'espaces de Hilbert

Dans le cas des espaces de Hilbert, on a d'autres propriétés de la norme d'un opérateur borné, voici quelques unes:

Proposition 2.6. *1. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, alors $\|T\| = 0$ si et seulement si $T = 0$.*
2. Si $T, S \in \mathcal{L}(H)$, alors $T + S \in \mathcal{L}(H)$ et $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$.
3. Si $\alpha \in \Bbbk$ et $T \in \mathcal{L}(H)$, alors $\alpha T \in \mathcal{L}(H)$ et $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$.
4. Si $T, S \in \mathcal{L}(H)$, alors $T \circ S \in \mathcal{L}(H)$ et $\|T \circ S\| \leq \|T\| . \|S\|$.

Les trois premiers points de la proposition précédente affirment que $\|.\|$ définit bien une norme sur $\mathcal{L}(H)$.

2.2.1 Opérateur de rang fini

Définition 2.5. *Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est dit de rang fini si* $\operatorname{Im} T$ *est de dimension finie.*

2.2.2 Opérateur adjoint d'un Opérateur borné

Définition 2.6. *Soit* H *un espace de Hilbert et* $T \in \mathcal{L}(H)$. *Il existe un unique opérateur* $T^* \in \mathcal{L}(H)$, *appelé adjoint de* T *vérifiant la relation suivante : pour tous* $x, y \in H$,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

avec $\|T\| = \|T^*\|$.

Pour l'opérateur adjoint, on a les propriétés suivantes:

Soit $T, S \in \mathcal{L}(H)$ et $\alpha \in K$. Alors

1. $(\alpha T + S)^* = \alpha T^* + S^*$.
2. $(TS)^* = S^* T^*$.
3. $(T^*)^* = T$.
4. Si T est inversible d'inverse T^{-1}, alors T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
5. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, alors $\|T\| = \|T^*\| = \|TT^*\|^{1/2}$
6. $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$.

Opérateur auto-adjoint

Définition 2.7. *Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est dit hermitien ou auto-adjoint si* $T^* = T$. *Si* T *est auto-adjoint, alors* $\|T\| = \sup\limits_{\|h\|=1} |\langle Th, h \rangle|$.

Remarque 2.3. *Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est dit*

- isométrique si $\|T(x)\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in H$.

- positif s'il est hermitien et si de plus $\langle Th, h \rangle > 0$ *pour tout* $h \in H$.

- unitaire si T *est inversible et* $T^* = T^{-1}$.

- normal si $TT^* = T^*T$.

Proposition 2.7. *Si* $T \in \mathcal{L}(H)$, *les assertions suivantes sont équivalentes*

1. T *est une isométrie.* $(\|Tx\| = \|x\|)$

2. $T^*T = I_d$.

3. $\langle Th, Tg \rangle = \langle h, g \rangle$ *pour tout* $h, g \in H$.

2.2.3 Forme linéaire et espace dual

On appelle forme linéaire continue ou fonctionnelle linéaire d'un $\Bbbk$-espace vectoriel normé E, tout opérateur linéaire borné défini sur E dans le corps $\Bbbk$ L'ensemble de toutes les formes linéaires continues définies sur E est appelé dual topologique de E et est noté E^*.

$$E^* = \{T : E \longrightarrow \Bbbk,\ T \text{ linéaire et borné}\}$$

L'ensemble E^* muni des opérations, somme d'applications et produit par un scalaire est un $\Bbbk$-espace vectoriel. Si le $\Bbbk-$espace vectoriel E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\dim E^* = \dim E = n$$

De plus, si $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E; alors $\{f_1, ..., f_n\}$ définie pour tout $k = 1, ..., n$ par

$$f_k(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}$$

est une base de E^*.

Théorème de représentation de Reisz

Théorème 2.8. *Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) muni de son produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$ et $f \in H^*$ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique y dans H tel que pour tout x de H on ait $f(x) = \langle y, x \rangle$.*

$$\textit{Autrement } \forall f \in H^*,\ \exists! y \in H \quad \textit{tel que} \quad f(x) = \langle y, x \rangle,\ \forall x \in H$$

2.3 Opérateurs compacts

Pour tout espace de Hilbert H, notons B_H la boule unité fermée de H, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in H,\ \|x\| \leq 1\}$ et rappelons qu'une partie A d'un espace métrique est dite compacte si toute suite de A possède une suite extraite convergente.

Définition 2.8. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit que T est compact si l'adhérence de $T(B_H)$ est compacte dans H. (c'est-à-dire que $T(B_H)$ est relativement compacte)*

Notons $\mathrm{K}(H)$ l'ensemble des opérateurs compacts, alors $\mathcal{K}(H)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}(H)$ muni de la norme définie par (2.1.1) et si $T \in \mathcal{L}(H)$ et $S \in \mathcal{K}(H)$, alors TS et ST sont compacts.

Proposition 2.9. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*
(a) T est compact.
(b) T^* est compact.
(c) Il existe une suite (T_n) d'opérateurs de rang fini qui converge vers T (pour la norme (2.1.1)).

Exemple 7. *Soit H un espace de Hilbert, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ une base de H et T l'opérateur défini de H dans H*
par : $T(\varphi_k) = \frac{1}{k}\varphi_{k+1}$
Pour montrer que T est un opérateur linéaire compact, posons pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \langle x, \varphi_k\rangle T(\varphi_k)$,
T_n est de rang fini donc il est compact et montrons en utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $T_n \longrightarrow T$

$$\|(T_n - T)x\| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \langle x, \varphi_k\rangle T(\varphi_k)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k\rangle| \, \|T(\varphi_k)\|$$
$$\leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k\rangle|^2} . \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \|T(\varphi_k)\|^2}$$
$$\leq \|x\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\|\varphi_{k+1}\right\|^2$$
$$\leq \|x\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0.$$

T est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini donc il est compact.

2.3.1 Théorème d'Arscoli-Arzela

Définition 2.9. *Soit E un espace métrique compact et A une partie borné de $C(E)$*
A est dit uniformément équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \textit{tel que } d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \ \forall f \in A$$

Théorème 2.10. (Arscoli-Arzela) *Si A est bornée et uniformément équicontinue, alors A est relativement compacte*

Corollaire 2.1. *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur compact et $(e_1, e_2, ...)$ est une base orthonormale de H, et si on note P_n la projection orthogonale sur $Vect(e_1, e_2, ...)$, alors $\|P_nT - T\| \to 0$.*

2.3.2 Spectre d'un opérateur

Définition 2.10. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.*
Un nombre complexe λ est une valeur propre de T s'il existe un vecteur $h \in H$, $h \neq 0$ tel que $Th = \lambda h$. Un tel vecteur h est appelé un vecteur propre de T.
On appelle spectre ponctuel de T, et on note $\sigma_p(T)$, l'ensemble des valeurs propres de T; ($\sigma_p(T)$ $=\{\lambda \in \mathbb{k}$, λ valeur propre de $T\}$).
On défini aussi le spectre de T par

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad T - \lambda I_d \ \ n'est \ \ pas \ inversible \quad \}$$

Comme tout opérateur inversible est nécessairement injectif, on a $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Proposition 2.11. *Soit T un opérateur compact et $\lambda \in \sigma_p(T)$.*
- Si $\lambda \neq 0$, alors l'espace propre $\ker(T - \lambda I_d)$ est de dimension finie.
- Soit $\lambda \neq 0$. Si $inf\,\{\|(T - \lambda I_d)h\| : \|h\| = 1\} = 0$, alors $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Exemple 8. *On reprend T défini dans l'exemple précédent et déterminant $\sigma_p(T)$*
Supposons que $T(x) = \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in H$. Donc il existe une suite de scalaires $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$
telle que

$$\lambda x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda x_k \varphi_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \varphi_{k+1} = T(x) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda x_1 = 0 \\ \lambda x_k = \dfrac{x_{k-1}}{k-1} \qquad k \geq 2 \end{cases}$$

On a deux cas:
$\cdot$ $\lambda = 0 \implies x_{k-1} = 0 \quad \forall k \geq 2$ *et donc* $x = 0$.
$\cdot$ $\lambda \neq 0 \implies x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 0 \Longrightarrow ....x_k = 0 \ \forall k \geq 1$ *et donc* $x = 0$.

Dans les deux cas $x = 0$ et par conséquent $\sigma_p(T) = \phi$.

2.3.3 Alternative de Fredholm

Théorème 2.12. (Alternative de Fredholm) *Soit E un espace de Banach et $T \in K(E)$ un opérateur compact de E dans lui-même. Alors*
a) $\ker(I_d - T)$ *est de dimension finie.*
b) $\mathrm{Im}(I_d - T)$ *est fermée et* $\mathrm{Im}(I_d - T) = \ker(I_d - T^*)^{\perp}$.
c) L'opérateur $I_d - T$ est injectif si et seulement si il est surjectif.
d) $\dim(I_d - T) = \dim \ker(I_d - T^*)$

Ce résultat est très important puisque il concerne en particulier la résolution des équations de type

$$\begin{aligned} Tu &= f \qquad (2.3.1)\\ u - Tu &= f \qquad (2.3.2)\end{aligned}$$

l'équation (2.3.2) est appelée équation de première espèce et (2.3.1) est appelée équation de deuxième espèce où $T \in \mathrm{K}(E)$, f une fonction donnée et u la fonction inconnue avec $u, f \in E$.

Le théorème précédent indique que

– soit pour tout $f \in E$ il existe une unique solution dans E

– soit $u - Tu = 0$ possède n solutions linéairement indépendantes et l'équation $u - Tu = f$ à une solution si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalité c'est-à-dire que $f \in \ker(I_d - T^*)^{\perp}$.

Le même résultat est vrai pour l'opérateur $\lambda I_d - T$ puisque $\lambda^{-1}T$ est compact si $T \in \mathrm{K}(E)$. Autrement on a :

Soit E un espace de Banach et $T \in \mathrm{K}(E)$ et l'équation

$$Au = u - Tu = f \qquad (2.3.3)$$

Théorème 2.13. *L'équation (2.3.3) admet une solution unique $u \in E$, pour tous $f \in E$ si et seulement si $u = 0$ est solution de l'équation homogène.*

$$Au = u - Tu = 0 \qquad (2.3.4)$$

2.4 Opérateur intégral linéaire

On va définir une classe importante d'opérateurs linéaires définies à l'aide d'une intégrale et dont le domaine d'intégration est un domaine mesurable dans $\mathbb{R}^d$.

Notons tout d'abord qu'on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace $C([a,b],\mathbb{k})$ qui est l'espace des fonctions continues définies sur l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}dx$$

et muni aussi de la norme de la convergence uniforme

$$\|u\| = \sup_{x\in[a,b]} |u(x)|$$

Définition 2.11. *Soit $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on définit sur $C([a, b])$ l'opérateur intégral linéaire par la formule suivante :*

$$T : u \in C([a, b]) \longrightarrow Tu \in C([a, b])$$

$$(Tu)(x) = \int_a^b K(x, t)u(y)dy$$

La fonction K s'appelle noyau de l'opérateur intégral T.

Proposition 2.14. *L'opérateur T est borné et $\|T\| = \max\limits_{x \in [a,b]} \int |K(x, y)|\, dy$.*

De la même façon, on définit

$$T : u \in L^2([a, b]) \longrightarrow Tu \in L^2([a, b])$$

$$(Tu)(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

et si $\left(\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2\, dxdy\right) < \infty$ l'opérateur T est borné et de noyau $K(x, y)$ appelé noyau de Hilbert-Shmidt et sa norme et donné par

$$\|T\| = \left(\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2\, dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$

Plus généralement, on peut aussi définir des opérateurs intégraux sur des espaces mesurés, en voici un exemple

Exemple 9. *Soit $F = (X, \Omega, \mu)$ un espace mesuré et $K : X \times X \to \mathbb{k}$ une fonction $\Omega \otimes \Omega$ mesurable telle qu'il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ vérifiant*

$$\int_X |K(x, y)|\, d\mu(y) \leq c_1 \quad et \quad \int_X |K(x, y)|\, d\mu(y) \leq c_2 \quad p.p\ x \in X$$

Alors l'application $T : L^2(F) \to L^2(F)$ définie par

$$(Tf)(x) = \int_X K(x, y)f(y)d\mu(y)$$

définit un opérateur linéaire continu sur $H = L^2(F)$, avec $\|T\| \leq \sqrt{c_1 c_2}$.
L'opérateur T défini ainsi est un opérateur intégral et K s'appelle le noyau de T

2.4.1 Adjoint d'un opérateur intégral

Théorème 2.15. *Soit $H = L^2([a,b])$ et T un opérateur intégral de noyau K continu sur $[a,b] \times [a,b]$ défini par :*

$$T : L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$$
$$f \longrightarrow Af$$

pour tout $x \in [a,b]$ par

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

Alors, l'opérateur T admet un unique opérateur adjoint $T^* : L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$ définie pour tout $x \in [a,b]$ par

$$T^*(gx) = \int_a^b K(x,y)g(y)dy$$

Pour montrer le théorème (2.15) on aura besoin du lemme suivant

Lemme 2.16. *(théorème de FUBINI)*

Soit f une fonction continue sur $[a,b] \times [c,d]$ alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Preuve. Soit f et g deux fonctions de $C([a,b])$, on a

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle$$

donc

$$\int_a^b f(y)T^*(g(y))dy = \int_a^b Tf(x)g(x)dx$$
$$= \int_a^b (\int_a^b K(x,y)f(y)dy)g(x)dx$$

En vertu du théorème de Fubini on établit que

$$\langle Tf(x), g(x) \rangle = \int_a^b \int_a^b [K(x,y)g(x)dx]f(y)dy$$
$$= \int_a^b f(y) \left[\int_a^b K(x,y)g(x)dx \right] dy$$
$$= \int_a^b f(y)T^*(g)(y)dy$$

il en résulte que l'adjoint T est défini pour tout x dans $[a,b]$ par

$$T^*g(x) = \int_a^b K(y,x)g(y)dy$$

■

2.4.2 Compacité d'un opérateur intégral

La bornitude et la compacité de l'opérateur intégral rendent les théorèmes cités au chapitre 1 et de la section précédente applicables, donc permet de donner des résultats d'existence et d'unicité de la solution de certaines équations intégrales et permet aussi de proposer des méthodes de calcul de la solution. On a le résultat suivant:

Théorème 2.17. *L'opérateur intégral défini par* $(Tu)(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy$ *est compact sur* $(C[a,b], \|.\|_\infty)$.

Preuve. Désignons par B la boule unité de $(C[a,b], \|.\|_\infty)$, pour monter que T est compact on utilisera le théorème d'Ascoli-Arzela, pour cela on d'établi que l'ensemble $A = T(B)$ est équicontinu et borné.

- Pour tout $x \in [a,b]$ posons $A_x = \{u(x) : u \in H\}$ On remarque d'abord que K est uniformément continue sur $[a,b] \times [a,b]$. Pour tout u de B et tout $x, x^{'}$ de $[a,b]$ on écrire

$$\begin{aligned}
|Tu(x) - Tu(x')| &= \left| \int_a^b (K(x,y) - K(x',y))u(y)dy \right| \\
&\leq \left| \int_a^b K(x,y) - K(x',y) \right| |u(y)|\, dy \\
&\leq \|u\|_\infty \left| \int_a^b K(x,y) - K(x',y)dy \right| \\
&\leq \left| \int_a^b K(x,y) - K(x',y)dy \right|
\end{aligned}$$

De la continuité uniforme de K sur $[a,b] \times [a,b]$ pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\left| x - x^{'} \right| \leq \alpha \Rightarrow |K(x,y) - K(x',y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

donc

$$\left| x - x^{'} \right| \leq \alpha \Rightarrow \left| Tu(x) - Tu(x^{'}) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall u \in B$$

d'où H est équicontinu.

2/ Montrons que l'ensemble $A_x = \{g(x) = Tu(x) : u \in B\}$ est borné et calculons à cet effet

$$|Tu(x)| = |g(x)| = \int_a^b K(x,y)u(x) \leq \|u\|_\infty \int_a^b \sup_{x,y \in [a,b]} |K(x,y)|\, dy \leq (b-a)M$$

Avec $M = \sup\limits_{x,y \in [a,b]} |K(x,y)|$ d'où A_x est borné et donc A est borné., ce qui achève la démonstration ■

Remarque 2.4. *Tout opérateur intégral linéaire de noyau de Hilbert-Shmidt est compact.*

2.4.3 Opérateur intégral produit, noyaux itéré

Soient T_1 et T_2 deux opérateurs intégraux linéaires de noyaux K_1 *et* K_2 respectivement, l'opérateur produit noté T_1T_2 est défini par

$$(T_1T_2)u = T_1(T_2u)$$

qui est un opérateur intégral linéaire de noyau.

$$K(x,y) = \int_a^b K_1(x,z)K_2(z,y)dz$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} T_1T_2u(x) &= \int_a^b K_1(x,z)T_2u(z)dz \\ &= \int_a^b K_1(x,z)dz \int_a^b K_2(z,y)u(y)dy \\ &= \int_a^b K(x,y)u(y)dy \end{aligned}$$

Dans le cas $T_1 = T_2 = T$, de noyau $K_1 = K_2 = K$, alors l'opérateur $T_1T_2 = T^2$ admet le noyau $K_2(x,y)$ donné par

$$K_2(x,y) = \int_a^b K(x,z)K_1(z,y)dz$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par récurrence

$$T^n u(x) = T(T^{n-1}u(x))$$

d'où par itération, le noyau $K_n(x,y)$ de l'opérateur itéré T^n est

$$K_n(x,y) = \int_a^b K(x,z)K_{n-1}(z,y)dz$$

Dans la suite le noyau $K_n(x,y)$ est appelé noyau itéré de $K(x,y)$ de l'opérateur intégral produit $T^n u(x) = T(T^{n-1}u(x))$, donné par

$$K_n(x,y) = \int_a^b K(x,z)K_{n-1}(z,y)dz$$

2.4.4 Types d'opérateur intégral

Soient $[a, b]$ un intervalle borné et fermé de $\mathbb{R}$, on définit les types d'opérateurs intégraux suivant :

L'opérateur intégrale de Fredholm: dans ce cas la région d'intégration est finie est:

$$I_d - \int_a^b K(x, y, u(y))dy.$$

L'opérateur intégrale de Volterra: dans ce cas on a:

$$I_d - \lambda \int_a^x K(x, y, u(y))dy.$$

L'opérateur intégral de Wiener-Hoph: c'est tout opérateur de la forme

$$I_d - \lambda \int_a^\infty K(x - y)u(y)dy.$$

L'opérateur intégral de Renwal: l'opérateur intégral de la forme

$$I_d - \lambda \int_a^x K(x - y)u(y)dy.$$

L'opérateur intégral d'Abel: c'est tout opérateur de la forme

$$I_d - \lambda \int_a^x \frac{u(y)}{(x - y)^\alpha}dy.$$

Ceci mène a introduire une classification des équations intégrales, c'est l'objet de chapitre suivant.

Chapitre 3

Classification des équations intégrales

Sommaire

Ce chapitre est consacré à donner une classification des équations intégrales linéaire dont les équations intégrales de Fredholm et Voltera constituent les deux principales catégories. On va aussi considérer deux autres types à savoir les équations intégrales singulières et équation intégro-différentelles. On s'intéresse également à l'existence et l'unicité de certains types d'équations intégrales.

Les équations intégrales apparaissent sous forme de nombreux types. Les types dépendent principalement des bornes de l'intégration et le noyau de l'équation. Dans ce mémoire on s'intéresse aux équations intégrales du type suivant:

3.1 Équations intégrales de Volterra

Dans tout ce qui suit $u : x \longmapsto u(x)$ est une fonction inconnue; $K : (x,t) \longmapsto K(x,t)$ et $f : x \longmapsto f(x)$ sont des fonctions connues; λ un paramètre réel.

3.1.1 Équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce

Cette équation est de la forme

$$\int_a^x K(x,t)u(t)dt = f(x) \tag{3.1.1}$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce

3.1.2 Équation intégrale linéaire de Volterra de deuxième espèce

On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de deuxième espèce une équation de la forme

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt. \tag{3.1.2}$$

Si $f(x) = 0$ l'équation (3.1.1) s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \tag{3.1.3}$$

et est appelée équation intégrale linéaire de Volterra homogène de deuxième espèce.

Exemple 10. *Équations intégrales linéaires homogènes de Volterra de la deuxième et de la première espèce*

$$\lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt = u(x) \tag{3.1.4}$$

$$\lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt = 0 \tag{3.1.5}$$

3.2 Équation intégrale linéaire de Fredholm

3.2.1 Équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce

On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce une équation de la forme

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt. \tag{3.2.1}$$

Si $f(x) = 0$ l'équation (3.2.1) s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.2.2}$$

l'équation intégrale (3.2.2) est dite de Fredholm de deuxième espèce homogène et si $f(x) \neq 0$, (3.2.1) est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de deuxième espèce non homogène

3.2.2 Équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce

Une équation de la forme

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x) \tag{3.2.3}$$

est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

Exemple 11. *les équations intégrales linéaires suivantes*

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - t)u(t)dt, \;\; 0 = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - t)u(t)dt \tag{3.2.4}$$

sont des équations de Fredholm homogènes de la deuxième et de la première espèce respectivement.

Remarque 3.1. *On dit que le noyau $K(x,t)$ d'une équation intégrale est séparable ou dégénéré, s'il s'écrit sous la forme*

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t)$$

où les fonctions α_i , $i = \overline{1,n}$ sont linéairement indépendant. Par exemple, les noyaux : $x-t$, $x+t$, $xt+x^2$, $3x^2t+t^2$, sont séparables

3.3 Équations intégro-différentielles

Dans ce type d'équation intégrale les opérateurs différentiels et intégraux apparaîtront dans la même équation. Ce type d'équations a été introduit par Volterra [1860;1940], en 1900 et se sont apparues dans des travaux de recherche sur la croissance démographique. Dans les équations intégro-différentielles, la fonction inconnue u et une ou plusieurs de ses fonction dérivées ordinaires apparaissent dans l'équation à l'extérieur et sous le signe intégral.

$$u'(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{3.3.1}$$

$$u''(x) = 2x^5 - x + \int_0^x (x-t)u(t)dt,\ u'(0)=1,\ u(0)=0 \tag{3.3.2}$$

$$u'(x) = e^x + \int_0^1 xtu(t)dt,\ u(0)=1 \tag{3.3.3}$$

$$u''(x) = e^x - x\int_0^1 xtu'(t)dt,\quad u'(0)=1,\ u(0)=1 \tag{3.3.4}$$

Les équations intégrales (3.3.1) et (3.3.2) sont des équations intégro-différentielles de Volterra de la deuxième espèce tandis que les équations (3.3.3) et (3.3.4) sont des équations intégro-différentielles de Fredholm de la deuxième espèce.

3.4 Équation intégrale singulière

On dit qu'une équation est singulière si l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des points de l'intégrale.

Définition 3.1. *L'équation intégrale de premier type*

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \tag{3.4.1}$$

ou de second type

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \tag{3.4.2}$$

sont dites singulières si l'une des limites $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ou les deux limites sont infinies.

Quelques exemples des équations intégrales singulières :

$$u(x) = 1 + e^{-x} - \int_0^{+\infty} u(t)dt \tag{3.4.3}$$

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} u(x)dx \qquad (4) \tag{3.4.4}$$

$$L[u(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} u(x)dx \qquad (5) \tag{3.4.5}$$

Les équations intégrales (3.4.4) et (3.4.5) sont respectivement la transformée de Fourier et la transformée de Laplace de la fonction $u(x)$.

De plus, ces équations sont des équations intégrales de Fredholm du premier type avec des noyaux donnés par $K(x,t) = e^{-i\lambda x}$ et $K(x,t) = e^{-\lambda x}$. Il est important de noter que les transformées de Laplace et les transformées de Fourier sont utilisées pour résoudre des équations aux dérivées ordinaires et partielles à coefficients constants

Exemple 12. *Par exemple si le noyau $K(x,t)$ de l'équation intégrale linéaire de Fredholm est de la forme*

$$K(x,t) = \frac{M(x,t)}{|x-t|^{\alpha}} \qquad 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.4.6}$$

Avec $M(x,t)$ une fonction bornée sur $[a,b]\times[a,b]$. ou encore un noyau $K(x,t)$ logarithmique.

$$K(x,t) = M(x,t)ln\,|x-t|$$

si $\alpha = 1$ dans l'exemple (3.4.1) alors $K(x,t)$ est appelé noyau de Cauchy.

$$K(x,t) = \frac{M(x,t)}{|x-t|}$$

3.5 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale

3.5.1 Equation intégrale de Volterra

Il existe beaucoup de résultats qui donnent des conditions nécessaires et suffisantes de l'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégrale et dont la démonstration et basé sur les théorèmes de point fixe de Banach et Picard.

Pour le cas d'une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce, on a le résultat suivant

Théorème 3.1. *Soit l'équation intégrale de Volterra de deuxième type:*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{3.5.1}$$

Si $f \in L^2([a,b])$ et si le noyau K vérifié la condition

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt < +\infty \tag{3.5.2}$$

Alors l'équation (3.5.1) admet une solution unique dans $L^2([a,b])$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et la solution s'écrit sous la forme

$$u(x) = f(x) + \sum_{n\geq 1} \lambda^n \int_0^x K_n(x,t)f(t)dt$$

Où $K_n(x,t)$ est le noyau itéré défini par

$$\begin{cases} K_1(x,t) = K(x,t) \\ K_n(x,t) = \int_a^x K(x,s)ds \int_a^x K_{n-1}(s,t)dt, \quad \textit{pour tout} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Preuve. posons $P(x) = \int_a^x |K(x,t)|^2 \, dt$ et $Q(x) = \int_t^b |K(x,t)|^2 \, dt$
De la condition (3.5.1), on déduit qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\int_a^b \left(\int_a^x |K(x,t)|^2 \, dt \right) dx \leq M \quad \text{et} \quad \int_a^b \left(\int_t^b |K(x,t)|^2 \, dt \right) dx \leq M$$

c'est-à-dire que l'on a

$$\int_a^b P(x)dx \leq M \quad \text{et} \quad \int_a^b Q(x)dx \leq M \tag{3.5.3}$$

Considérons l'opérateur

$$(Tu)(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

alors

$$T^n u = f + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k L^k f$$

L'opérateur L^k peut être sous la forme

$$(L^k g)(x) = \int_a^x K_k(x,t)g(t)dt$$

Où les noyaux K_k sont définie ci-dessus.

En effet, pour $k = 2$ on a

$$(L^2g)(x) = \int_a^x K(x,z)\int_a^z K(z,t)g(t)dtdz$$

Cette intégrale est une intégrale double sur le domaine $a \leq t \leq z$ et $a \leq z \leq x$ et on a

$$(L^2g)(x) = \int_a^x \int_t^x K(x,z)K(z,t)dtdz$$

et on note

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)K(x,t)dt$$

Alors

$$(L^2g)(x) = \int_a^x K_2(x,t)dz$$

par le même raisonnement, on obtient

$$(L^3g)(x) = \int_a^x \int_t^x K(x,z)K_2(z,t)dzg(t)dt$$

$$(L^3g)(x) = \int_a^x K_3(x,t)g(t)dt$$

Et ainsi de suite on obtient pour tout $k \geq 2$

$$(L^kg)(x) = \int_a^x K_k(x,t)g(t)dt$$

Soit la fonction $\omega(x) = \int_a^x P(t)dt$ définie sur $[a,b]$, d'après (3.5.1), on a

$$0 \leq \omega(x) \leq M$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et raisonnement par récurrence, on obtient

$$|K_k(x,t)|^2 \leq P(x)Q(x)\frac{(\omega(x)-\omega(t))^{k-2}}{(k-2)!} \qquad \textit{pour tout} \quad k \geq 2$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\left|(T^ku_1)(x) - (T^ku_2)(x)\right| &= |\lambda|^{2k}\left|\int_a^x K_k(x,t)(u_1(x)-u_2(x))dt\right|^2 \\
&\leq |\lambda|^{2k}\int_a^x P(x)Q(t)\frac{(\omega(x)-\omega(t))^{k-2}}{(k-2)!}dt\int_a^x |u_1(x)-u_2(x)|^2\,dt11111 \\
&\leq \frac{|\lambda|^{2k}\,(\omega(x)-\omega(t))^{k-2M}}{(k-2)!}\,||u_1-u_2||^2
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x sur $[a;b]$, on obtient

$$\left|\left|T^k u_1 - T^k u_2\right|\right|^2 \leq \frac{|\lambda|^{2k} N^k}{(k-2)!} \left|\left|u_1 - u_2\right|\right|^2$$

Par conséquent, puisqu'il existe un $n \geq 2$ tel que

$$\frac{|\lambda|^{2n} N^n}{(n-2)!} < 1$$

T^n est une contraction.

D'après le théorème du point fixe de Banach, l'équation intégrale de Volterra de deuxième type à une solution unique qui s'écrit sous la forme

$$\lim_{n \to +\infty} T^n u = f + \sum_{n \geq 1} \lambda^k L^k f$$

Ce qui est équivalent

$$u(x) = f(x) + \sum_{n \geq 1} \lambda^n \int_a^x K_n(x,t) f(t) dt$$

est la solution unique de (3.5.1). ■

3.5.2 Equation intégrale de Fredholm,

Pour le cas de l'équation intégrale de Fredholm, on a

Théorème 3.2. *Soit l'équation intégrale de Fredholm de deuxième type:*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) u(t) dt. \tag{3.5.4}$$

Si l'équation intégrale homogène de Fredholm $u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$ possède seulement la solution triviale $u(x) = 0$, alors l'équation non homogène (3.5.4) possède toujours une unique solution.

Le théorème s'obtient grâce au théorème de l'alternatif de Fredholm énoncé précédemment.

Un autre théorème assurant une condition nécessaire qui garantira que (3.5.4) n'a qu'une unique solution est donné par le théorème suivant

Théorème 3.3. *Supposons que le noyau $K(x,t)$ de (3.5.4) est une fonction réelle, continue et bornée dans le carré $a \leq x \leq b$ et $a \leq t \leq b$, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $|K(x,t)| \leq M$, $a \leq x \leq b$ et $a \leq t \leq b$*

et que $f(x) \neq 0$ est une fonction continue sur $a \leq x \leq b$. Si (3.5.4) admet une solution unique alors

$$|\lambda| \, M(b-a) < 1 \tag{3.5.5}$$

Si la condition nécessaire n'a pas lieu, alors une solution continue peut exister (la condition est nécessaire pour l'unicité). Pour illustrer cela, on considère l'équation intégrale de Fredholm suivante:

$$u(x) = -2 - 3x + \int_0^1 (3x+t)u(t)dt$$

Il est clair que $\lambda = 1$, $|K(x,t)| = |3x+t| \leq 4$ et $(b-a) = 1$ ce qui donne

$$|\lambda| \, M(b-a) = 4$$

Cependant, l'équation de Fredholm à une solution exacte donnée par $u(x) = 6x$.

Chapitre 4

Méthode de résolution des équations intégrales

Sommaire

Dans ce chapitre, on appliquera certaines des méthodes de calcul, à savoir la méthode des approximations successives, la méthode des solutions en série et la méthode de la transformation de Laplace qui sera également utilisée dans la résolution des équations intégrales. on appliquera aussi des méthodes récemment développées, comme la méthode de décomposition d' Adomian et certaines méthodes de calcul direct.

.

On va appliquer quelques méthodes de résolution des équations intégrales, notons que l'on dispose de théorèmes concernant le cas abstrait à savoir:

Théorème 4.1. *Soit E un espace de Banach, $T \in K(E)$ et l'équation de deuxième espèce*

$$u - Tu = f. \tag{1}$$

Si l'équation homogène $u - Tu = 0$ possède n solutions linéairement indépendantes u_k, $k = \overline{1, n}$, Alors (1) admet une solution de la forme

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k u_i$$

où u_0 est une solution particulière de (1) et α_k, $k = \overline{1, n}$ sont des scalaires arbitraires.

Notons que $u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} T^k f$ et donc $u_{n+1} = Tu_n + f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc ce résultat permet de définir la méthode des approximations successives qui est l'objet de la section suivante

4.1 La méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives également appelée méthode d'itération de Picard fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes à valeurs initiales ou des équations intégrales. Dans cette méthode, on remplace la fonction inconnue $u(x)$ sous le signe intégral de l'équation intégrale par toute fonction continue à valeurs réelles sélectionnée $u_0(x)$, appelée l'approximation zéro. Les valeurs les plus couramment utilisées pour les approximations zéro sont $0, 1$, ou x et bien sur d'autres valeurs réelles peuvent également être sélectionnées. Cette substitution donnera la première approximation $u_1(x)$;

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) u_0(t) dt \tag{4.1.1}$$

Il est évident que $u_1(x)$ est continue si $f(x)$, $K(x,t)$ et $u_0(x)$ sont continues. La deuxième approximation $u_2(x)$ peut être obtenue de la même façon en remplaçant $u_0(x)$ dans l'équation (4.1.1) par $u_1(x)$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) u_1(t) dt \tag{4.1.2}$$

En continuant ainsi, on obtient une suite infinie de fonctions

$$u_0(x),\ u_1(x),\ u_2(x), ...,\ u_n(x), ...$$

qui satisfait la relation de récurrence

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt \qquad ,(n = 1, 2, 3, ...) \tag{4.1.3}$$

Ainsi à la limite la solution $u(x)$ est obtenue comme suit

$$u(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x) \quad , \tag{4.1.4}$$

de sorte que la solution résultante $u(x)$ soit indépendante du choix de l'approximation.

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour la convergence de cette méthode

Théorème 4.2. *Si la fonction f dans (4.1.3) est continue sur l'intervalle $0 \leq x \leq a$, et le noyau $K(x,t)$ est également continu dans le rectangle $0 \leq x \leq a \quad , \quad 0 \leq t \leq x$ alors la suite des approximations successives $u_n(x), n \geq 0$ converge vers la solution $u(x)$.*

Exemple 13. *On va résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode des approximations successives*

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{4.1.5}$$

pour cela on choisit $u_0(x) = 1$: en utilisant ensuite la formule d'itération

$$u_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x u_n(t)dt \quad , \quad n \geq 0 \tag{4.1.6}$$

En substituant $u_0(x) = 1$ dans (4.1.6) on obtient

$$u_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$u_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

d'où :

$$u_n(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

comme $f \equiv 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $K(x,t) = x - t$ est continu sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème des approximations successives, la suite $(u_n)_n$ converge vers la solution exacte

$$u(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n(x) = \cos x$$

Exemple 14. *Dans cet exemple on va résoudre une équation intégrale de Fredholm en utilisant la même méthode*

$$u(x) = x + e^x + \int_0^1 xtu(t)dt \tag{4.1.7}$$

On choisi comme terme initial

$$u_0(x) = 0$$

et on utilise ensuite la formule d'itération en substituant

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^x + x \\ u_2(x) &= e^x - \frac{1}{3}x \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où :

$$u_n(x) = e^x + \frac{(-1)^n}{3^n}x$$

puisque $f(x) = x + e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $K(x,t) = xt$ est continu sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème des approximations successives la suite (u_n) converge vers la solution exacte

$$u(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n(x) = e^x$$

4.2 La méthode de transformation de Laplace

La méthode de transformation de Laplace est une technique puissante qui peut être utilisée pour résoudre des problèmes à valeur initiale et des équations intégrales. Cette méthode consiste à changer les équations intégrales en équations polynomiales qui peuvent être facilement résolues, et donc en utilisant la transformation inverse de Laplace on obtient la solution de l'équation en question.

Définition 4.1. *La transformation de Laplace d'une fonction $\phi(t)$ définie pour $t \geq 0$ est la fonction*

$$f(s) = L(\phi(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\phi(t)dt \tag{4.2.1}$$

avec $s \in \mathbb{R}$ et L est appelé l'opérateur de transformation de Laplace.

Dans (4.2.1) $\phi(t)$ s'appelle la fonction déterminante et $f(s)$ est la fonction génératrice.

Si $\phi \in E$ tel que $E = \{\phi \in C^0(\mathbb{R}^+),\ \exists M_\phi > 0,\ \exists r_\phi > 0 :\ |\phi(t)| \leq M_\phi\ e^{r_\phi\ t}\}$ alors $\forall s > r_\phi$, $L(\phi(t))$ existe

Théorème 4.3. *Si $\phi(t) \in C([0, +\infty[)$ et $f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\phi(t)dt = 0, \quad a < s < 1$; alors $\phi(t) = 0$ pour tout $0 < t < +\infty$.*

De la définition de la transformation de Laplace donnée par (4.2.1), on peut citer les propriétés suivantes

1.) Multiplication par une constante

$$L(af(x)) = aL(f(x)), \quad a \text{ est une constante} \tag{4.2.2}$$

2.) Linéarité

$$L(af(x) + bg(x)) = aL(f(x)) + bL(g(x)), \quad a \text{ et } b \text{ sont deux constantes} \tag{4.2.3}$$

3.) Multiplication par la variable x

$$L(xf(x)) = -\frac{d}{dx}L(\phi(t)) = -f'(s) \tag{4.2.4}$$

4.) Transformé de Laplace de fonctions dérivées

$$L(f'(x)) = sL(f(x)) - f(0)$$
$$L(f"(x)) = s^2L(f(x)) - sf(0) - f'(0)$$
$$L(f^3(x)) = s^3L(f(x)) - s^2f(0) - sf'(0) - f"(0)$$

...

...

d'où

$$L(f^{(n)}(x)) = s^nL(f(x)) - s^{n-1}f(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$$

5.) **Inverse Du Transformé De Laplace** l'inverse du transformé de Laplace de $f(s)$ est $\phi(x)$ et on écrit

$$L^{-1}(f(s)) = \phi(x), \tag{4.2.5}$$

où L^{-1} désigne l'inverse du transformé de Laplace.

Notons que la propriété de linéarité à lieu également pour la transformation inverse de Laplace. c'est-à-dire:

$$L^{-1}(af(s) + bg(s)) = aL^{-1}(f(s)) + bL^{-1}(g(s))$$

$$= a\phi(x) + b\psi(x),$$

On utilise le "théorème de convolution" pour la transformé de Laplace pour résoudre des équations intégrales.

Soit l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} K(x,t)u(t)dt, \tag{4.2.6}$$

le noyau $K(x,t)$ dépend de la différence $x - t$ ainsi, en prenant le transformé de Laplace de l'équation intégrale du deuxième type de Volterra donnée par (3.1.2), on obtient

$$L(u(x)) = L(f(x)) + \lambda L(K(x))L(u(x)) \tag{4.2.7}$$

et la solution pour $L(u(x))$ est donnée par

$$L(u(x)) = \frac{Lf(x)}{(1 - \lambda L(K(x)))} \tag{4.2.8}$$

En inversant cette transformation, on obtient

$$u(x) = \int_0^x \psi(x-t)f(t)dt \tag{4.2.9}$$

la solution de l'équation intégrale du deuxième type de Volterra du type convolution, où

$$L^{-1}(\frac{1}{1 - \lambda LK(x)}) = \psi(x) \tag{4.2.10}$$

Exemple 15. *Pour résoudre l'équation intégrale de Volterra suivante par La méthode du transformé de Laplace*

$$u(x) = sin(x) + cos(x) + 2\int_0^x sin(x-t)u(t)dt \tag{4.2.11}$$

Prenons le transformé de Laplace de l'équation (4.2.11), on obtient

$$L(u(x)) = L(sin(x)) + l(cos(x)) + 2L(sin(x))L(u(x)) \tag{4.2.12}$$

On obtient

$$u(s) = \frac{1+s}{1+s^2}\frac{1+s^2}{s^2-1} = \frac{1}{s-1} \tag{4.2.13}$$

Donc

$$u(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^x \tag{4.2.14}$$

Exemple 16. *Dans cet exemple on souhaite résoudre l'équation intégrale de Volterra de* 1^{er} *type suivante par La méthode du transformé de Laplace*

$$e^x - \sin(x) - \cos(x) = \int_0^x 2e^{x-t}u(t)dt. \tag{4.2.15}$$

Pour résoudre l'équation intégrale de Volterra précédente par La méthode du transformé de Laplace de (4.2.11)

$$L\{e^x\} + L\{-\sin(x)\} + L\{-\cos(x)\} = 2L\{e^{x-t}\}L\{u(t)\}, \tag{4.2.16}$$

on obtient

$$\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{2}{s-1}u(s), \tag{4.2.17}$$

d'où

$$u(s) = \frac{1}{s^2+1}, \tag{4.2.18}$$

donc

$$u(x) = L^{-1}\{u(s)\} = \sin(x). \tag{4.2.19}$$

4.3 La méthode de décomposition D'Adomian

En 1981, le professeur George Adomian (1922 - 1996) présente les bases d'une méthode en évitant la discrétisation du domaine. Cette méthode est basée sur la décomposition en série appelée **la méthode d'Adomian.** Cette méthode permet de résoudre des problèmes fonctionnelle de différents types: les équations algébriques, différentielles, intégrales, intégro-différentiennelles, aux dérivés partielles.

Principe de la méthode:

La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non linéaires. Pour une équation sous la forme:

$$u - Tu = f \tag{4.3.1}$$

où T est un opérateur et f une fonction connue. La méthode d'Adomian consiste à rechercher une solution sous forme de série

$$u = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n, \tag{4.3.2}$$

et à décomposer le terme Tu sous forme d'une série

$$Tu = \sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n \tag{4.3.3}$$

Les termes A_n sont appelés polynôme d'Adomian et sont obtenu grâce à la relation suivante :

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(T\sum_{i=0}^{n} u_i\lambda^i\right) \;=0 \quad , \; n = 0, 1, 2...... \tag{4.3.4}$$

En remplaçant les relation (4.3.2) et (4.3.3) dans (4.3.1), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = f + \sum_{i=0}^{n} A_i \tag{4.3.5}$$

Ce qui entraîne par identification :

$$\begin{aligned} u_0 &= f(x) \\ u_1 &= A_1 \\ u_{n+1} &= A_n \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Il est à noter que cette identification n'est pas unique mais c'est la seul qui permet de définir explicitement les u_n . La relations (4.3.6) permet de calculer tout les termes de la série sans ambiguïté car les A_n ne dépendent que de $u_0, u_1, u_2, ..., u_n$.

Sauf dans certains cas très particulier, en pratique, il est presque impossible de calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n$, donc on se contentant d'une solution approchée ϕ_n, donnée sous forme de la série

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

En résumé après la détermination des terme de la série, une sommation donne la solution approchée de l'équation , cependant la question qu'on peut se poser est comment déterminer les $(A_n)_{n\geq 0}$ et à quelles conditions la méthode converge.

Convergence de la méthode d'Adomian Les fondements mathématiques de la méthode d'Adomian sont dus au professeur *Yves Cherruault* qui a donné la démonstration de la convergence de la méthode d'Adomian en utilisant les théorèmes du point fixe que l'on déjà énoncés au chapitre 1.

Remarquons d'abord que la méthode d'Adomian appliquée à (4.3.1) se ramène à la recherche de la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ (où $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i$). Rappelons qu'une série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge vers S si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge vers S et on a

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = S$$

Des théorèmes important sont établis impliquant des conditions suffisantes de convergence où ces conditions portent sur l'opérateur linéaire T et on a:

Théorème 4.4. *Si la série $\sum_{n\geq 0} A_n$ converge alors la sérié des solutions $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente aussi et réciproquement .*

Autrement $\sum_{n\geq 0} A_n < +\infty \iff \sum_{n\geq 0} u_n < +\infty$

Afin, d'énoncer un autre résultat, remarquons que la méthode d'Adomian appliquée à (4.3.1) se ramène aussi à la recherche.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n} S_i \\ S_n &= u_1 + u_2 + ... + u_n \end{aligned}$$

et donc à la recherche de.

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_1 &= S_0 + S_1 = 0 + u_1 \\ S_2 &= S_0 + S_1 + S_2 = 0 + u_1 + u_2 \\ & \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots. \\ S_{n+1} &= S_0 + (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) \end{aligned}$$

et donc à S_n vérifiant la relation de récurrence suivante:

Théorème 4.5.

$$\begin{Bmatrix} S_0 = 0 \quad , \quad u_0 = f \\ S_{n+1} = T(u_0 + S_n) \qquad , \; n = 0, 1, 2, \ldots.. \end{Bmatrix} \tag{4.3.7}$$

On en déduit le résultat de convergence suivant

Théorème 4.6. *Si l'opérateur T est une contraction, alors la suite (S_n) satisfaisant la relation de récurrence*

$$S_{n+1} = T(u_0 + S_n)$$

avec $S_0 = 0$, $n \geq 0$ converge vers S solution de $S = T(u_0 + S)$.

Preuve. De la relation (4.3.7) on a ;

$$\begin{aligned} \|S_{n+1} - S\| &= \|T(u_0 + S_n) - T(u_0 + S)\| \\ &\leq \|T\| \, \|S_n - S\| \\ &< k \, \|S_n - S\| \\ &\leq k^n \, \|S_1 - S\| \end{aligned}$$

où $k < 1$ puisque T est une contraction.
D'où la convergence de suite (S_n) vers S. ∎

Par ailleurs, on a :

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n$$

et comme $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ est convergente d'après le théorème précèdent. On a alors le résultat suivant

Corollaire 4.1. *Si T est une contraction alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} A_n$ sont convergente. De plus $\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n$ est solution de l'équation $u - Tu = f$*

Application de la méthode d'Adomian sur une équation intégrale de Volterra

Cette méthode consiste à décomposer la fonction inconnu $u(x)$ de n'importe quel équation intégrale en une somme de nombre infini d'éléments définie par

$$u(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n(x) \tag{4.3.8}$$

où $u_0(x)$ choisi comme terme égale au terme figurant à l'extérieure du signe intégral.

Soit l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \tag{4.3.9}$$

Prenons

$$u_0(x) = f(x), \tag{4.3.10}$$

la substitution de (4.3.8) dans l'équation (4.3.9) donne

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)[\sum_{n\geq 0} u_n(t)]dt \tag{4.3.11}$$

Les termes $u_0(x), u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ de la fonction inconnue $u(x)$ seront complètement déterminés de manière récurrente, en effet

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x) \\ u_1(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt \\ u_2(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt \\ ... &= ... \\ u_n(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Cet ensemble d'équations (4.3.12) peut être écrit sous la forme

$$u_0(x) = f(x) \tag{4.3.13}$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)u_n(t)dt, n \geq 0 \tag{4.3.14}$$

Exemple 17. *Résoudre l'équation intégrale de Fredholm de deuxième type par la méthode de décomposition.*

$$u(x) = e^x - x + x\int_0^1 tu(t)dt$$

Solution : Considérons $u(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n(x)$ *est la solution de l'équation. D'où par substitution dans l'équation donnée*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = e^x - x + x\int_0^1 t\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt$$

on a

$$u_0(x) = f(x) = e^x - x$$

$$u_1(x) = x\int_0^1 t(e^t - t)dt = \frac{2}{3}x$$

$$u_2(x) = x\int_0^1 tu_1(t)dt = \frac{2}{9}x$$

$$u_3(x) = \frac{2}{27}x$$

et ainsi de suite, on obtient la série solution

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

$$= e^x - x + \frac{2}{3}x\underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ...\right)}_{S}$$

$$= e^x - x + \frac{2}{3}xS$$

où S *est a somme de la série géométrique de raison* $\frac{1}{3}$ *donnée par*

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

et par conséquent, la série solution converge vers la solution exacte $u(x) = e^x$

Exemple 18. *Résoudre l'équation intégrale de Voltera de deuxième type par la méthode de décomposition.*

$$u(x) = 5x^3 - x^5 + \int_0^x tu(t)dt$$

Solution : Considérons $u(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ *est la solution de l'équation, d'où par substitution dans l'équation donnée*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = 5x^3 - x^5 + \int_0^x t \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt$$

on a

$$u_0(x) = f(x) = 5x^3 - x^5$$
$$u_1(x) = \int_0^1 t(5x^3 - x^5)dt = x^5 - \frac{x^7}{7}$$
$$u_2(x) = \int_0^1 tu_1(t)dt = \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{7 \times 9}$$
$$.....$$

et ainsi de suite. En utilisant cela donne la série solution

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + ...$$
$$= 5x^3 - x^5 + x^5 - \frac{x^7}{7} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{7 \times 9} + ...$$
$$= 5x^3$$

La série solution converge vers la solution exacte $u(x) = 5x^3$

4.4 Méthode de la solution en série

On rappel qu'une fonction réelle u est dite analytique si elle à des dérivées de tout ordre de sorte que la série entière (de Taylor)

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-b)^n \quad , \tag{4.4.1}$$

converge vers u dans un voisinage de x_0 dans son domaine.

Si $x_0 = 0$, la forme de la série entière s'écrit:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n \tag{4.4.2}$$

Pour résoudre les équations intégrales de Volterra ou Fredholm on présente une méthode utile, qui provient principalement du développement en série entière pour les fonctions analytiques.

Alors soit l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{4.4.3}$$

et supposerons que la solution u est analytique et son développement en une série de entière est de la forme donnée dans (4.4.2), où les coefficients a_n sont déterminés de façon récurrente. La substitution (4.4.2) des deux cotés de (4.4.3) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = \mp(f(x)) + \lambda \int_a^b K(x,t)(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t_n)dt \tag{4.4.4}$$

Ou $\mp(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$.

Exemple 19. *Résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode de la solution en série*

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt \tag{4.4.5}$$

En remplaçant $u(x)$ par la série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4.4.6}$$

Dans les deux cotés de l'équation (4.4.5) conduit à

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k x^n = 1 + \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)dt$$

L'évaluation de l'intégrale à droite donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

qui peut être réécrit comme

$$a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$$

De sorte que:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... = 1 + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + ... \tag{4.4.7}$$

ce qui implique que l'on a:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$...$$

$$...$$

$$...$$

$$a_n = \frac{1}{n}a_{n-1}, n > 1$$

d'où ce résultat donne

$$a_n = \frac{1}{n!}, n \geq 0$$

La substitution de ce résultat en (4.4.3) donne la solution en série:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

qui converge vers la solution exacte

$$u(x) = e^x$$

4.5 La méthode de calcul direct

Dans cette section, la méthode de calcul direct sera appliquée pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm. La méthode approche les équations intégrales de Fredholm de manière directe et donne la solution sous une forme exacte et non sous une forme de série. Il est important de souligner que cette méthode sera appliquée pour les noyaux dégénérés ou séparables

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t) \tag{4.5.1}$$

La méthode de calcul direct peut être appliquée comme suit :

1) On remplace d'abord (4.5.1) dans l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \tag{4.5.2}$$

2) Cette substitution donne

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t)u(t)dt \tag{4.5.3}$$

Basé sur ceci, l'équation s'écrit

$$u(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k(x) \tag{4.5.4}$$

où

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)u(t)dt \quad , \quad 1 \leq i \leq n \tag{4.5.5}$$

4) La substitution de (4.5.4) dans (4.5.5) donne un système de n équations algébriques qui peut être résolu pour déterminer les constantes α_i, $1 \leq i \leq n$. En utilisant les valeurs numériques obtenues de α_i en (4.5.4), la solution u de l'équation intégrale de Fredholm (4.5.2) est obtenue.

La méthode du calcul direct a fourni une solution exacte, plutôt qu'une solution sous forme de série. L'évaluation est entièrement dépendante de la structure du noyau $K(x,t)$, et parfois il peut arriver que des difficultés de calcul peuvent survenir dans la détermination de la constante α si l'équation algébrique résultante est de troisième ordre ou plus.

Exemple 20. *On veut résoudre l'équation intégrale de Fredholm en utilisant la méthode de calcul direct*

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 tu(t)dt \tag{4.5.6}$$

Comme le noyau $K(x,t) = x^2t$ est séparable. Alors, cette équation comme suit :

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}x^2\int_0^1 tu(t)dt \tag{4.5.7}$$

L'équation (4.5.7) peut être réécrite comme suit :

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2, \tag{4.5.8}$$

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt \tag{4.5.9}$$

Pour déterminer α, on substitut (4.5.8) dans (4.5.9), on obtient

$$\alpha = \int_0^1 t\left(3t + 3t^2 + \frac{1}{2}\alpha t^2\right)dt = \frac{7}{4} + \frac{1}{8}\alpha \tag{4.5.10}$$

Ce qui donne $\alpha = 2$, substituons la valeur de α dans (4.5.8), on obtient la solution exacte

$$u(x) = 3x + 4x^2 \tag{4.5.11}$$

4.6 La méthode de conversion en équation différentielle

Parmi les méthodes utilisées pour résoudre les équations intégrales, la conversion de l'équation intégrale en une équation différentielle équivalente. La conversion est réalisée en utilisant la règle bien connue de Leibnitz pour la différenciation des intégrales.

4.6.1 Règle de Leibnitz

Soit $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ continue telle que $\frac{\theta f}{\theta t}$continue dans un domaine du plan (x,t) qui comprend le rectangle $a \leq x \leq b$, $t_0 \leq t \leq t_1$ et soit

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)dt \tag{4.6.1}$$

la fonction dérivée de $F(x)$ existe et elle est donnée par

$$F'(x) = h'(x)f(x,h(x)) - g'(x)f'x, g(x)) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\theta f(x,t)}{\theta t}dt \tag{4.6.2}$$

Illustrons la règle par l'exemple suivant:

Exemple 21. *1) Trouver $F'(x)$ pour la fonction définie par :*

$$F(x) = \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \sqrt{1+t^3}dt$$

En utilisant la règle de leibnitz donné par (4.6.2) on trouve que

$$F'(x) = -\sin(x)\ \sqrt{1+\cos^3(x)} - \cos(x)\sqrt{1+\sin^3(x)}$$

2) Considérons les intégrales de la forme :

$$F(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{4.6.3}$$

Dans ce cas,la règle de Leibnitz , donne :

$$F'(x) = K(x,x) + \int_0^x \frac{\theta K(x,t)}{\theta x}u(t)dt$$

4.6.2 Conversion d'une équation intégrale de Fredholm á un problème au bord

Dans cette partie, on présente une méthode qui convertira une équation intégrale de Fredholm á un problème á valeurs au bord équivalente et on examinera deux types de problèmes

Type I:

On considère d'abord l'équation intégrale de Fredholm donnée par

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt \tag{4.6.4}$$

où f est une fonction donnée et le noyau K est défini par

$$K(x,t)=\begin{cases} t(1-x)g(x), & \text{si} \quad 0\leq t\leq x \\ x(1-t)g(x), & \text{si} \quad x\leq t\leq 1 \end{cases} \tag{4.6.5}$$

Pour simplifier, on suppose que g est constante, $g(x)=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$. L'équation (4.6.4) peut être écrite sous la forme

$$u(x)=f(x)+\lambda(1-x)\int_0^x tu(t)dt+\lambda\int_x^1 x(1-t)u(t)dt \tag{4.6.6}$$

ou de manière équivalente

$$u(x)=f(x)+\lambda(1-x)\int_0^x tu(t)dt+\lambda x\int_x^1 (1-t)u(t)dt \tag{4.6.7}$$

Différencions les deux membres de (4.6.7) et en utilisant la règle de Leibnitz, il vient

$$\begin{aligned} u^{'}(x) &= f(x)+\lambda(1-x)u(x)-\lambda\int_0^x tu(t)dt-\lambda x(1-x)u(x)+\lambda\int_x^1(1-t)u(t)dt \\ &= f^{'}(x)-\lambda\int_0^x tu(t)dt+\lambda\int_x^1(1-t)u(t)dt \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

différencions de nouveau les deux membres de (4.6.8) par rapport á x, on trouve

$$u^{''}(x)=f^{''}(x)-\lambda xu(x)-\lambda(1-x)u(x) \tag{4.6.9}$$

ce qui donne l'équations différentielle ordinaire

$$u^{''}(x)+\lambda u(x)=f^{''}(x) \tag{4.6.10}$$

Par substitution de $x=0$ et $x=1$ en (4.6.7), on trouve les conditions au bord:

$$u(0)=f(0),u(1)=f(1) \tag{4.6.11}$$

Remarque 4.1. *Si g n'est pas une constante, on procède de la même manière pour obtenir le problème au bord.*

Pour mieux appréhender la technique utilisée pour le **type I** , on considère l'exemples suivant :

Exemple 22. *On souhaite convertir l'équation intégrale de Fredholm*

$$u(x) = e^x + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt$$
$$\text{où } K(x,t) = \begin{cases} 9t(1-x)g(x), & si \quad 0 \leq t \leq x \\ 9x(1-t)g(x), & si \quad ix \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{4.6.12}$$

á un problème au bord.
alors on écrit l'équation intégrale de Fredholm comme suit

$$u(x) = e^x + 9(1-x)\int_0^x tu(t)dt + 9x\int_x^1 (1-t)u(t)dt$$

Différencions deux fois par rapport á x, on obtient

$$u'(x) = e^x - 9\int_0^x tu(t)dt + 9\int_x^1 (1-t)u(t)dt$$

et ceci donne l'équation différentielle ordinaire :

$$u''(x) + 9u(x) = e^x$$

Les conditions au bord sont données par

$$u(0) = f(0) = 1, u(1) = f(1) = e$$

L'équation intégrale (4.6.12) est équivalente au problème au bord suivant

$$\begin{cases} u''(x) + 9u(x) = e^x \\ u(0) = f(0) = 1 \\ u(1) = f(1) = e. \end{cases} \tag{4.6.13}$$

Type II:

Dans ce type , on considère l'équation intégrale de Fredholm donnée par

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt \tag{4.6.14}$$

oú le noyau $K(x,t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} tg(x), & \text{si} \quad 0 \leq t \leq x \\ xg(x), & \text{si} \quad x \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{4.6.15}$$

Comme le cas précédent, pour simplifier, on suppose que $g(x) = \lambda$ pour tout x. alors (4.6.12) s'écrit

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x tu(t)dt + \lambda x \int_x^1 u(t)dt \tag{4.6.16}$$

Par différenciation deux fois par rapport á x en utilisant la règle de Leibnitz, on obtient

$$u^{'}(x) = f^{'}(x) + \lambda \int_x^1 u(t)dt \tag{4.6.17}$$

puis

$$u^{''}(x) + \lambda u(x) = f^{''}(x) \tag{4.6.18}$$

Les conditions au bord peuvent être obtenues en substituant $x = 0$ et $x = 1$ dans (4.6.16) et (4.6.17) respectivement, ainsi on trouve

$$u(0) = f(0),\ u^{'}(1) = f^{'}(1) \tag{4.6.19}$$

4.6.3 Problèmes á valeurs initiales

4.6.4 Conversion de l'équation intégrale de Volterra en un problème á valeurs initiales

La méthode est réalisée en différenciant les deux membres des équations de Volterra par rapport á x autant de fois pour éliminer le signe

intégral et obtenir une équation différentielle. Le processus de conversion sera illustré par les exemples suivants.

Exemple 23. *Trouvons le problème á valeurs initiales équivalent á l'équation intégrale de Volterra :*

$$u(x) = e^x + \int_0^x u(t)dt \tag{4.6.20}$$

Différencions les deux membres de (4.6.20) en utilisons la règle de Leibnitz on trouve le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u^{'}(x) - u(x) = e^x, \\ \quad u(0) = 1 \end{cases}$$

Exemple 24. *Trouvons le problème á valeurs initiales équivalent á l'équation intégrale de Volterra :*

$$u(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt \tag{4.6.21}$$

Différencions les deux membres de l'équation intégrale trois fois, on obtient

$$\begin{aligned} u^{'}(x) &= \cos(x) - \textstyle\int_0^x (x-t)u(t)dt \\ u^{"}(x) &= -\sin(x) - \textstyle\int_0^x u(t)dt \\ u^{'''}(x) &= -\cos(x) - u(x) \end{aligned} \tag{4.6.22}$$

La substitution $x = 0$ dans (4.6.21) et dans les deux premières équations intégro-différentielles en (4.6.22) donne les conditions initiales :

$$u(0) = 0,\ u^{'}(x) = 1,\ u^{"}(x) = 0 \tag{4.6.23}$$

Compte tenu des derniers résultats, le problème á valeurs initiales équivalent á l'équation intégrale de Volterra (4.6.21) est une E.D.O non homogène de troisième ordre donné par :

$$\begin{cases} u^{'''}(x) + u(x) = -\cos(x) \\ u(0) = 0, \\ u^{'}(x) = 1, \\ u^{"}(x) = 0. \end{cases} \tag{4.6.24}$$

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire on a abordé quelques applications de la théorie des espaces de Hilbert pour la résolution des équations intégrales en commençant par citer quelques éléments de cette théorie notamment l'étude des opérateurs linéaires, compacts et intégraux en rappelant quelques une de leur propriétés. Après on a procédé à la classification des équations intégrales puis, à l'existence et l'unicité de quelques types d'entre elles. Finalement on a procédé à la résolution des équations intégrales par plusieurs méthodes qui aboutissent à des solutions exactes ou approchées.

Par conséquent, la théorie des espaces de Hilbert s'avère très utile pour l'étude des équations intégrales.

dans la continuité directe de ce travail de mémoire, précisément dans la résolution des équations intégrales, on peut s'intéresser aux méthodes de résolution numérique aussi appelée méthode de " quadrature " qui consiste a appliqué les méthodes numériques de calcul d'intégrale pour aboutir à un système linéaire où il s'agit de l'approximation du noyau des équations intégrales par un opérateur de dimension finie par exemple une matrice, on pourra également étendre ses méthodes au cas de systèmes d'équation intégrales.

Bibliographie

[1] **Ali Elhrary A, Shkheam S-A, Mawloud Zali S,** *The Adomian Decomposition Method of Volterra Integral Équation of deuxième Kind.* American Journal of Applied Mathematics, Vol. 6, No. 4, (2018), pp. 141-147.

[2] **Brezis H,** *Analyse fonctionnelle - Théorie et Applications*, Masson, Paris(1987).

[3] **Banali H,** *Introduction Aux Équations Intégrales Linéaire Méthodes Et Applications.* Tiaret (2019).

[4] **Chelbi H,** *Analyse hilbertienne*, CPU. Tunis (2001).

[5] **Cherruault Y, Adomian G**, *Decomposition Methods : A New Proof Of Convergence.*Mathl. Comput. Modelling Vol. 18, No. 12, (1993), pp. 103-106.

[6] **Christol , Cot A, MarleC-M,** *Topologie*, Mathématique. Ellipses Marketing (1998).

[7] **El-Sayed A. M. A, Hashem H. H. G, Ziada E. A. A,** *Picard and Adomian Decomposition Methods for a Quadratic Integral Équation Of Fractional Order,* Comp. Appl. Math. (2014) 33:95–109.

[8] **Fredholm I,** Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Mathematica, 27, (1903),365– 390.

[9] **Fredholm I,** *Les équations intégrales linéaires.* In Compte rendu du Congrés des mathmaticiens tenu à Stockholm 1909, (1910).

[10] **Guettaf R,** *Introduction à la Théorie des Opérateurs Linéaires*, Notes de Cours et exercices. Boumerdes, Avril 2021.

[11] **Hilbert D,** *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen intégralgleichungen.* Nachtrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematische-Physikalische Klasse, (1904), pages 49–91.

[12] **Jian-Qiang Feng, Shiyi Sun**. *Numerical Solution of Volterra Integral Equation by Adomian Decomposition Method*, Asian Research Journal of Mathematics, (2017), pages 1-12.

[13] **Josette Charles, Mostafa Mbekhta et Hervé Queffélec**. *Analyse fonctionnelle et théorie des operateurs*. Dunod, Paris, (2010).

[14] **Lie-jun Xie**, *A New Modification of Adomian Decomposition Method for Volterra Integral Equations of the Second Kind*, J. Appl. Math. (2013) 1-7.

[15] **Rainer Kress**. *Linear Integral Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol 82, Springer-Verlag New York, (2014).

[16] **Rahmoune A,** *Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales*, Thèse-Université de Batna

[17] **Ram P. Kanwal**.*Linear Integral Equations, Theory and Technique,* University Academic Press, (1971).

[18] **Santanu Saha Ray, Prakash Kumar Sahu** . *Novel methods for solving linear and nonlinear integral equations*, Chapman and Hall/CRC, (2018).

[19] **Schmidt E.** *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*. I Teil. Entwicklung willkürlichen Funktionen nach System vorgeschriebener. Mathematische Annalen, 63, (1907), pages 433–476.

[20] **WazWaz A-M** , *A First Course In Integral equations*, Saint Xavier University, USA.