

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES**



Faculté de Technologie

**Thèse de Doctorat**

Présentée par :

**M. Kamel RACHEDI**

En vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT** en : **Science**

**Filière : Génie Mécanique**

**Spécialité: Mécanique des Fluides**

**Etude numérique des effets d'évaporation et de  
thermo-capillarité sur la convection naturelle aux sein des  
réservoirs cryogéniques.**

*Soutenue publiquement le Dimanche 18 Septembre 2022*

**Devant le jury composé de :**

M. SACI	Rachid	Professeur	UMBB	Président
M. NOUR	Abdelkader	Professeur	UMBB	Directeur
M. BENKOUSSAS	Bouzid	Professeur	ENP(Alger)	Examineur
M. HANINI	Salah	Professeur	UYFM(Médéa)	Examineur
M. RAGUEB	Haroun	MCB	UMBB	Invité

Année Universitaire 2021/2022

# Résumé

*La quantification de l'évaporation de surface du gaz liquéfié dans un réservoir cryogénique partiellement rempli est importante à la fois dans le processus de conception et dans le contrôle ultérieur des opérations. Cette thèse se concentre sur les effets des pertes de chaleur externes sur l'évaporation de surface et la convection naturelle d'un gaz liquéfié contenu dans un réservoir cylindrique cryogénique en tenant compte de la thermo-capillarité (de l'effet de Marangoni). Le débit massique d'évaporation est supposé négligeable ; cependant, la chaleur absorbée pendant le processus est prise en compte et définie selon le modèle de Hashemi-Wesson. Le problème physique a été formulé sous forme adimensionnelle, puis résolu numériquement en utilisant la procédure des volumes finis. Les pertes de chaleur externe et le flux de chaleur d'évaporation de surface ont été quantifiés au moyen du nombre de Nusselt. Plusieurs simulations ont été réalisées en fonction du nombre de Rayleigh ( $10^4 \leq Ra \leq 10^5$ ), du nombre de Marangoni ( $0 \leq Ma \leq 2000$ ) et du rapport d'aspect de la cavité ( $0,5 \leq AR \leq 2$ ). Les résultats ont montré que lorsque Ra augmente, le taux de transfert de chaleur de la paroi vers le fluide augmente ainsi que le taux d'évaporation. Une grande valeur de Ma peut réduire le flux de chaleur d'évaporation de surface jusqu'à 5% en raison du flux thermo-capillaire. Un niveau de remplissage élevé réduit l'évaporation de surface jusqu'à 42 % pour  $AR = 0,5$ , tandis qu'un faible niveau de remplissage la favorise jusqu'à 46 % pour  $AR = 1,5$ , par rapport à  $AR = 1$ . Les nombres de Nusselt de la surface libre et de la paroi latérale dépendent fortement de Ra, Ma et AR, et les deux ont été corrélés dans des formules simples avec une tolérance technique de  $\pm 5\%$ .*

**Mots clés :** Réservoir cryogénique ; Thermo-capillarité ; Évaporation de surface ; Marangoni ; convection ; Conteneur ouvert, Convection naturelle.

# Abstract

*Quantification of liquefied gas surface evaporation in partially filled cryogenic tank is important in both design process and operations control later. This paper focuses on effects of external heat leaks on the surface evaporation and the natural convection of a liquefied gas contained in cryogenic cylindrical tank with consideration of thermo-capillarity. The evaporation mass flow rate is assumed negligible; however, the absorbed heat during the process is considered and defined according the Hashemi-Wesson model. The physical problem was formulated in dimensionless form, and then solved numerically using finite volume procedure. The external heat leaks and the surface evaporation heat flux were quantified by means of Nusselt number. Several simulations have been conducted based on the Rayleigh number ( $10^{+4} \leq Ra \leq 10^{+5}$ ), Marangoni number ( $0 \leq Ma \leq 2000$ ) and the cavity aspect ratio ( $0.5 \leq AR \leq 2$ ). Results showed that as  $Ra$  increases, the heat transfer rate from wall to fluid increases as well as the evaporation rate. Large value of  $Ma$  can reduce the surface evaporation heat flux up to 5% due to thermocapillary flow. High filling level reduces surface evaporation up to 42% for  $AR = 0.5$ , whereas low filling level promotes it to 46% for  $AR = 1.5$ , with respect to  $AR = 1$ . Free surface and sidewall Nusselt numbers are strongly dependent on  $Ra$ ,  $Ma$  and  $AR$ , and both have been correlated in simple formulas within engineering tolerance  $\pm 5\%$ .*

**Keywords:** *Cryogenic tank; Thermo-capillarity; Surface evaporation; Marangoni ; convection; Open container, Natural convection.*

# ملخص

يعد التحديد لكمية البخار خلال سطح الغاز المسال المخزن في خزان مبرد مملوء جزئياً أمراً مهماً في كل من عملية تصميم الخزان المبرد والتحكم في العمليات المملوءة، التفريخ والتخزين لاحقاً. يركز هذا البحث على آثار تسرب الحرارة الخارجية على التبخر السطحي والحمل الحراري الطبيعي للغاز المسال الموجود في خزان أسطواني مبرد مع مراعاة أثر الحركة الناتجة عن التغير في التوتر السطحي للغاز المسال. نفترض في هذه الدراسة كتلة الغاز المتبخر صغيرة جداً مقارنة بكتلة الغاز المسال؛ ومع ذلك، يتم الأخذ في الاعتبار الحرارة الممتصة أثناء عملية التبخر وتحديداتها وفقاً لنموذج هاشومي و ويسون. تمت صياغة المشكلة الفيزيائية في شكل معادلات رياضية ثم قمنا باختزال الأبعاد الفيزيائية، بعدها تم حلها رقمياً باستخدام طريقة الحجم المحدودة. تم تحديد كمية تسرب الحرارة الخارجية وتدفق حرارة التبخر السطحي عن طريق رقم Nusselt. كذلك تم إجراء العديد من عمليات المحاكاة استناداً إلى رقم Rayleigh ( $10^{+4} \leq Ra \leq 10^{+5}$ )، ورقم Marangoni ( $0 \leq Ma \leq 2000$ ) ونسبة العرض إلى الارتفاع ( $0.5 \leq AR \leq 2$ ). أظهرت النتائج أنه مع زيادة Ra، يزداد معدل نقل الحرارة من الجدار إلى السائل وكذلك معدل التبخر. الزيادة الكبيرة لقيمة Ma يمكن أن تقلل من تدفق حرارة التبخر السطحي بنسبة تصل إلى 5% بسبب التدفق الحراري الشعري الناتج عن الغي في التوتر السطحي. يقل مستوى التعبئة العالي من تبخر السطح بنسبة تصل إلى 42% ( $AR=0.5$ )، في حين أن مستوى التعبئة المنخفض يعززه إلى 46% ( $AR=1.5$ )، وهذا مقارنة بالحالة ( $AR=1$ ). تعتمد أرقام Nusselt السطحية والجدارية الحرة بشدة على Ra و Ma و AR، وقد تم ربط كلاهما في صيغ بسيطة ضمن التسامح الهندسي  $\pm 5\%$ .

**الكلمات المفتاحية:** خزان مبرد؛ التدفق الحراري الشعري، التبخر السطحي، مارانغوني؛ الحمل الحراري. حاوية مفتوحة، الحمل الحراري الطبيعي.

# Remerciements

Le présent travail a été effectué au sein du laboratoire « Dynamics motors and vibro-acoustics Laboratory », de la Faculté de Technologie, Université M'HAMED BOUGARA, Boumerdes, sous la direction de Monsieur **Abdelkader Nour**, professeur à l'UMBB et directeur du laboratoire. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour son soutien constant et ses précieux conseils et de m'avoir fait confiance pour cette longue et ambitieuse étude.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur **Rachid Saci** professeur à l'UMBB pour avoir accepté de présider le jury d'examen de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Messieurs : **Bouzid Benkoussas** professeur à l'ENP, Alger, **Salah Hanini** professeur à l'UYFM Médéa, d'avoir bien voulu participer à mon jury de thèse et d'avoir examiné mon travail.

Je remercie également Monsieur **Ahmed Chellil** professeur et chef de département Génie Mécanique, pour son soutien constant et ses encouragements continus. Je remercie le Docteur **Haroun Ragueb** pour ses précieux conseils, son aide, ses encouragements permanents, sa disponibilité, et d'avoir bien voulu lire cette thèse. Je ne saurais oublier le **Docteur Khelifi-Touhami Mohamed Salah** de m'avoir « poussé » à résoudre mathématiquement ce qu'il a résolu physiquement (Hypothèses), de m'avoir aussi remis : *Ses courbes de Nusselt et d'évaporation*. Que **Mohamed Salah Touhami** trouve à travers ce travail, toute ma reconnaissance, mes vifs et sincères remerciements.

Je souhaite également témoigner ma vive sympathie à l'ensemble de mes collègues, mes anciens étudiants actuellement professeurs, maître de conférence et tous grades confondus d'avoir cru en mes capacités de travail et de recherche.

Que mes parents trouvent en ces lignes toute la reconnaissance qui leur est due. A mon épouse et mes enfants pour leur patience durant toutes ces années de recherche. A tous ceux que je n'ai pu citer, je leur exprime toute ma reconnaissance et ma sympathie.

# Sommaire

Résumé.....	i
Abstract.....	ii
ملخص.....	iii
Remerciements .....	iv
Sommaire.....	v
Liste des Figures et Tableaux.....	viii
Notations et Abréviations .....	xi
Introduction Générale .....	1
Chapitre 1 – Etat de l’art.....	4
1.1 Introduction.....	4
1.2 Convection naturelle dans une cavité.....	5
1.2.1 Convection naturelle dans une cavité rectangulaire .....	6
1.2.2 Convection naturel dans une enceinte cylindrique .....	13
1.3 Thermo-capillarité et évaporation dans les surfaces libres .....	18
1.3.1 Thermo-capillarité.....	18
1.3.2 Evaporation.....	21
1.4 Cas des réservoirs de stockages cryogéniques .....	22
1.5 Epilogue .....	25
Chapitre 2 – Modélisation Mathématique.....	27
2.1 Introduction.....	27
2.2 Les équations gouvernantes .....	28
2.2.1 Les conditions aux limites .....	29
2.3 Adimensionnalisation du système d’équations.....	30

2.3.1 Nombres sans dimensions.....	30
2.3.2 Equations régissant et conditions aux limites adimensionnelles.....	31
2.4 Paramètres d'analyse thermique .....	33
2.5 Conclusion.....	33
Chapitre 3 – Résolution Numérique.....	35
3.1 Introduction.....	35
3.2 Principe de la méthode des volumes finis .....	35
3.3 Application de la méthode des volumes finis.....	36
3.3.1 Discrétisation des équations de continuité, de transport et d'énergie .....	36
3.3.2 Application à l'équation de mouvement suivant l'axe radial.....	41
3.3.3 Schémas d'approximation .....	42
3.3.4 Linéarisation du terme source.....	43
3.3.5 Algorithme de résolution du couplage vitesse-pression .....	44
3.3.5.1 Algorithme SIMPLE.....	45
3.3.5.2 Equation de correction de la vitesse .....	46
3.3.5.3 Equation de correction de la pression.....	47
3.3.5.4 Algorithme de calcul sur machine de « SIMPLE » .....	47
3.3.5.5 Algorithme de calcul SIMPLER.....	48
3.4 Résolution des systèmes d'équations.....	49
3.5 Résolution numérique.....	50
3.5.1 Méthodologie .....	50
3.5.2 Sensibilité du maillage et validation.....	52
3.5.2.1 Sensibilité du maillage.....	52
3.5.2.2 Validation avec la littérature.....	53
3.6 Conclusion.....	56
Chapitre 4 – Résultats et Discussions.....	58
4.1 Introduction.....	58

4.2 Effets du nombre de Rayleigh.....	58
4.3 Effets du taux de remplissage.....	61
4.4 Effets de la tension superficielle.....	63
4.5 Corrélations appliquées.....	68
4.6 Conclusion.....	70
Conclusion Générale et Perspectives.....	72
Références.....	73
Annexe 1 .....	84
A1.1 Détermination de la densité d'évaporation.....	84
A1.2 Adimensionnement de la loi de Hashemi-Wesson .....	84
A1.3 Adimensionnement des conditions aux limites sur la paroi latérale et la surface libre .....	85
Annexe 2 .....	86
A2.1 Bilan Thermique .....	86
Annexe 3 .....	87
A3.1 Nombre de Nusselt .....	87



# Liste des Figures et Tableaux

## Chapitre 1

**Figure 1. 1** Configurations canoniques de la convection induite par la flottabilité. (A) Canal vertical à chauffage différentiel (Differentially heated vertical channel - DHVC). Le fluide le plus chaud monte sur le côté gauche et le fluide le plus froid descend sur le côté droit. (B) Convection de Rayleigh-Benard (RBC). La vitesse moyenne est nulle et la température moyenne est antisymétrique autour du plan médian.  $\theta$  est la température moyenne transformée. .... 5

**Figure 1. 2** Convection naturelle dans une enceinte rectangulaire en 2D avec des côtés isothermes et des parties supérieure et inférieure adiabatiques..... 6

**Figure 1. 3** Régimes d'écoulement et de transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte rectangulaire verticale avec des côtés verticaux isothermes et des côtés horizontaux adiabatiques. D'après Bejan (2013) et Ghiaasiaan (2018)..... 7

**Figure 1. 4** Schéma des motifs d'écoulement de recirculation associés aux régimes d'écoulement de la Figure 1.3 (Ghiaasiaan, 2018). .... 7

**Figure 1. 5** Convection dans un cylindre circulaire (diamètre = 5,7 cm, hauteur = 3 cm) d'huile transparente dont la viscosité dépend de la température. Les parois latérales sont isolées et la surface supérieure est isotherme. (a) Flux descendant au centre,  $Ra = 8000$  ; (b) Flux ascendant au centre,  $Ra = 8200$  (Liang et al., 1969)..... 15

**Figure 1. 6** Convection de Marangoni à petit rapport d'aspect avec limites latérales circulaires d'après Koschmieder and Prahl (1990). (a) État à une cellule :  $M = 330$ . (b) État à deux cellules:  $M = 81$ . (c) État à trois cellules :  $M = 76,5$ . (d) État à quatre cellules :  $M = 78$ . (e) Etat à cinq cellules :  $M = 71$ . ( f ) Etat à six cellules :  $M = 74$ ..... 20

## Chapitre 2

**Figure 2. 1** Schéma du modèle physique ( à gauche) et du domaine de calcul considéré (à droite). ..... 27

**Chapitre 3**

**Figure 3. 1** Discrétisation d'un domaine en volumes de contrôles..... 36

**Figure 3. 2** Volume de contrôle correspondant à l'équation de continuité ..... 40

**Figure 3. 3** Volume de contrôle correspondant à  $U_R$  (à gauche),  $U_Z$  (au centre), la pression  $P$  à droite ..... 42

**Figure 3. 4** Disposition dans le domaine d'étude des vitesse radiale  $U_R$  (carré bleu), axiale  $U_Z$  (triangle rouge), de la pression  $P$  (cercle jaune) et de la température  $\theta (= \phi_{ij})$ ( étoile bleu)..... 44

**Figure 3. 5** Volume de contrôle correspondant à  $U_R$  (a),  $U_Z$  (b), la pression  $P$  (c),et la température  $\theta (= \phi_{ij})$ (d) ainsi que la disposition de ces variables dans chaque volume de contrôle. .... 44

**Figure 3. 6** Influence de la taille de la grille sur la précision. Profils de température sans dimension (a) et de vitesse axiale (b), le long de la section transversale  $Z= 0.5$  avec  $Ra = 10^{+5}$ ,  $Ma = 500$ ,  $AR = 1$ . ..... 52

**Figure 3. 7** Profils des Températures (a) et de la vitesse axiale (b) à  $Z = 0.5$  for  $Ra = 10^{+5}$ ,  $Ma = 100$ , Pour différentes valeurs de l' aspect ratio en comparaison avec les résultats numériques de Kozhevnikov et Sheremet (2018)\*..... 53

**Figure 3. 8** Variation du Nusselt moyen a la surface libre par rapport au nombre de Rayleigh  $Ra$  et à l'aspect ratio  $AR$  ( $Ma = 0$ ). Les données supplémentaires proviennent de \*)Khelifi-Touhami et al. (2010), #)Kozhevnikov and Sheremet (2018)..... 54

**Figure 3. 9** Variation de la densité du flux d'évaporation adimensionnée en fonction du rayon de la cavité au niveau de la surface libre pour  $Ra = 10^{+5}$ ,  $Ma = 0$  et  $AR = 0.5, 1.0, 1.5$  en comparaison avec les résultats numériques de Khelifi-Touhami et al., (2010)..... 55

**Tableau 3. 1** Expressions de la fonction  $A(|P_m|)$  ..... 43

**Tableau 3. 2** Le terme source linéarisé pour toutes les équations..... 43

**Chapitre 4**

**Figure 4. 1** Effet du nombre de Rayleigh sur le champ de vitesse, les lignes de courant et la distribution de la température dans une cavité avec  $AR = 1.0$  et  $Ma = 1000$ ..... 59

**Figure 4. 2** Effet du nombre de Rayleigh sur : a) la température sans dimension à  $Z=0.5$ , b) le flux de chaleur d'évaporation sans dimension à la surface libre ( ici  $AR = 1.0$  et  $Ma = 1000$ ). ..... 60

**Figure 4. 3** Effet du rapport d'aspect sur la distribution de la température: a)  $AR = 0.5$ , b)  $AR = 1.0$ , et c)  $AR = 1.5$  (ici  $Ra = 10^{+5}$  et  $Ma = 1000$ ). ..... 62

**Figure 4. 4** Effet du rapport d'aspect sur la température moyenne de la cavité (a) et le nombre de Nusselt moyen à la surface libre(b),  $Ma = 1000$ . ..... 63

**Figure 4. 5** Effet du nombre de Marangoni sur le champ de vitesse, les lignes de courant et la distribution de température dans une cavité avec  $AR = 1.0$  et  $Ra = 10^{+5}$  ..... 64

**Figure 4. 6** Profile des Températures à mi-hauteur de la cavité  $Z = 0.5$  pour  $AR = 1.0$ ,  $Ra = 10^{+5}$ , et différentes valeurs du nombre de Marangoni. .... 65

**Figure 4. 7** Effet du nombre de Marangoni sur a) sur la vitesse axiale sans dimension à  $Z = 0.5$ , b) la vitesse radiale sans dimension à  $R = 0.5$  avec  $AR = 1.0$  et  $Ra = 10^{+5}$  ..... 66

**Figure 4. 8** Effet du nombre de Marangoni sur le flux de chaleur d'évaporation sans dimension avec  $AR = 1.0$  et  $Ra = 10^{+5}$  ..... 67

**Figure 4. 9** Variation du nombre de Nusselt moyen à la surface libre par rapport aux nombre de Rayleigh et de Marangoni (ici  $AR = 1$ ) ..... 68

**Figure 4. 10** Répartition statistique de l'erreur entre les corrélations de  $Nu_{sw}$  et  $Nu_{fs}$  et les résultats de simulation (180 points) ..... 69

**Figure 4. 11** Comparaison entre différentes corrélations de Nusselt latéraux  $Nu_{sw}$  (\*:Lemembre and Petit (1998), #:Haddar et al. (2020))..... 70

**Tableau 4. 1** Le nombre de Nusselt moyen à la surface libre et sur la paroi latérale ( $Ma = 1000$  and  $AR = 1$ ). ..... 61

# Notations et Abréviations

## Lettres Romandes

$AR$	Rapport d'aspect	
$c, C$	Constantes d'équation	
$g$	Accélération gravitationnelle	$m/s^2$
$\bar{H}$	Hauteur du réservoir	$m$
$L$	Chaleur Latente	$J/kg$
$\dot{m}$	Boil-off rate (taux de gaz d'ébullition)	$kg/m^2.s$
$Ma$	Nombre de Marangoni	
$Nu$	Nombre de Nusselt	
$p$	Pression	<b>Pa</b>
$P$	Pression adimensionnelle	
$Pr$	Nombre de Prandtl	
$q$	Flux de chaleur	$W/m^2$
$Q$	Flux de chaleur adimensionnel	
$r, z$	Coordonnées radiale et axiale	$m$
$\bar{R}$	Rayon du réservoir	$m$
$R, Z$	Coordonnées radiale et axiale adimensionnées	
$Ra$	Nombre de Rayleigh	
$T$	Température	<b>K</b>
$u_r, u_z$	Composantes de vitesses (radiale and axiale, respectivement)	$m/s$
$U_R, U_Z$	Composantes de vitesses adimensionnées (radiale et axiale, respectivement)	

## Lettres grecques

$\alpha$	Diffusivité thermique	$m^2/s$
$\beta$	Coefficient d'expansion thermique	$1/K$
$\theta$	Température adimensionnelle	
$\Theta$	Température moyenne adimensionnelle	
$\lambda$	Conductivité thermique	$W/m.K$

$\varphi$	Coefficient équation	
$\mu$	Viscosité dynamique	<b><i>Pa.s</i></b>
$\nu$	Viscosité cinématique	<b><i>m<sup>2</sup>/s</i></b>
$\rho$	Masse volumique	<b><i>kg/m<sup>3</sup></i></b>
$\sigma$	Tension de Surface	<b><i>J/m<sup>2</sup></i></b>

**Indices**

<i>av</i>	Moyenne (average)
<i>b</i>	Mélange (bulk)
<i>ev</i>	Évaporation
<i>fs</i>	Surface libre (free surface)
<i>sat</i>	Saturation
<i>sw</i>	Latéral (side wall)

# Introduction Générale

La consommation mondiale des gaz liquéfiés stockés a explosé de nos jours. La demande mondiale ne cesse d'augmenter. Cette demande est d'actualité d'autant plus que les sources d'approvisionnement ne cessent de se tarir. Les gaz liquéfiés stockés ont de nombreuses utilisations. L'hydrogène et l'oxygène liquéfiés sont utilisés par l'industrie spatiale. De même que l'hydrogène et l'essence liquéfiés alimentent l'industrie automobile pour les moteurs à combustion, respectueuse de l'environnement. De nos jours les hôpitaux absorbent une grande quantité d'oxygène liquéfié pour sauver des vies humaines en raison de la pandémie de la COVID 19. Des millions de foyers dans le monde consomment le gaz naturel liquéfié (GNL) comme source principale de chaleur et de production d'électricité.

En général, les gaz liquéfiés sont stockés dans des conteneurs cryogéniques à basse température et à pression atmosphérique. Dans ces conditions de stockage, le volume est diminué et le transport facilité. En effet, le volume de stockage liquide est d'environ six cent fois plus petit que celui du gaz naturel stocké aux conditions normales. Il existe plusieurs types de stockage pour le GNL ; le stockage enterré, semi enterré ou aérien. Ce dernier présente certains avantages au profit d'une construction du bac plus couteuse. Le GNL est stocké dans des bacs cylindriques à double paroi entre lesquelles est interposé un isolant (perlite) ; la paroi externe en contact avec l'air atmosphérique, est généralement construite en béton ou en acier, alors que la paroi interne (liner) qui est en contact direct avec le GNL, est fabriquée en acier à 9% de nickel. L'existence d'un isolant de 0.9 m d'épaisseur entre ces parois réduit fortement la conductibilité du bac mais ne l'annule pas, d'où la présence d'infiltrations thermiques provenant de l'extérieur (transfert de chaleur aussi minime soit-il du milieu extérieur vers le milieu intérieur), entraînant une évaporation du GNL par la convection naturelle dans le liquide. Les vapeurs ainsi obtenues à la surface libre du GNL sont évacuées vers l'extérieur par une soupape de sécurité conçue pour maintenir la pression constante à l'intérieur du bac.

L'introduction de la convection thermo-capillaire permet comme nous allons le voir dans la suite de diminuer cette évaporation. Malgré une bonne isolation, la chaleur externe

s'infiltrer dans le conteneur en raison de l'écart de température important entre l'environnement externe et l'intérieur du conteneur. Cette perte de chaleur déclenche un flux convectif dans le fluide stocké. Lorsque le conteneur est partiellement rempli, ce qui est le cas le plus représentatif, le flux de fluide est principalement induit par, d'une part, les forces de flottabilité, d'autre part, les forces de tension superficielle à l'interface entre les phases liquide et gazeuse. La dernière est connue comme la convection thermo-capillaire ou simplement la convection de Marangoni. On considère un liquide contenu dans un récipient cylindrique à surface ouverte et soumis à un chauffage par la paroi latérale. Les propriétés du fluide sont supposées thermo-indépendantes à l'exception de : 1) la densité suit l'approximation de Boussinesq, 2) la tension superficielle est linéairement dépendante de la température. Le débit massique d'évaporation est supposé négligeable ; cependant, la chaleur absorbée pendant le processus est prise en compte et est définie selon la loi de Hashemi-Wesson.

- Tout d'abord, le modèle a été réduit à un problème axisymétrique bidimensionnel sous forme adimensionnelle. Une solution numérique complète du comportement de l'écoulement laminaire et de la réponse thermique en convection naturelle d'un fluide contenu dans une cavité cylindrique à surface libre et soumise au chauffage de la paroi latérale, à l'évaporation de la surface libre et à la thermo-capillarité est abordée.
- L'étude de la convection naturelle et thermo-capillaire dans un bac de stockage GNL est basée sur l'utilisation des conditions aux limites réelles.
- Le mouvement du liquide est généré en imposant une densité de flux de chaleur latérale
- La densité du flux de chaleur évaporée ainsi que celle du flux de chaleur convectif sont calculées au niveau de la surface libre du liquide respectivement par la loi de Hashemi-Wesson (1971). Et par une loi de Newton correspondante au refroidissement convectif.
- Plusieurs simulations ont été réalisées en fonction du nombre de Prandtl  $Pr = 2$ ., du nombre de Rayleigh ( $10^4 \leq Ra \leq 10^5$ ), du nombre de Marangoni ( $0 \leq Ma \leq 2000$ ) et du rapport d'aspect de la cavité ( $0,5 \leq AR \leq 2$ ).
- Un code de calcul basé sur le modèle des volumes finis pour prédire les champs de vitesse et les températures pour les écoulements de convection naturelle et

thermo-capillaire a été conçu en utilisant le langage Intel Fortran parallèle version 19.1

La thèse est subdivisée en quatre chapitres qui se résument comme suit :

**Chapitre 1 :** Ce chapitre est consacré à la présentation d'une revue bibliographique concernant la convection naturelle et thermo-capillaire dans des cavités cartésiennes, cylindriques et dans des réservoirs de stockage d'une façon générale.

**Chapitre 2 :** Il présente la modélisation mathématique des équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie ainsi que leurs conditions aux limites appliquées au stockage du GNL.

**Chapitre 3 :** Ce chapitre donne une explication détaillée de la méthode des volumes finies pour la discrétisation des équations, son application à notre étude ainsi que la validation du code de calcul réalisé à travers l'indépendance des solutions par rapport aux maillage et la comparaison de nos résultats avec la littérature. Les coefficients de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction radiale ont été données d'une façon détaillée.

**Chapitre 4 :** Dans ce chapitre nous présentons les résultats obtenus. Plus de cent quatre-vingt (180) simulations ont été réalisées. Nous présentons celles qui n'ont pas été étudiées par la littérature. Deux corrélations ont été effectuées pour les nombres de Nusselt moyen à la surface libre et sur la paroi latérale. Nous comparons nos résultats avec ceux de la littérature pour les Nusselt de la paroi latérale.

**Conclusion générale :** Nous terminons cette thèse par des conclusions générales qui résument les principaux résultats obtenus



# Chapitre 1 – Etat de l’art

## 1.1 Introduction

La convection libre ou naturelle est le mode de transfert de chaleur qui a lieu d'une surface vers un fluide, en présence d'une différence de température entre la surface et le fluide, mais en l'absence de tout flux imposé de l'extérieur. Même lorsque le fluide peut être considéré comme incompressible, les différences de densité en présence de différences de température créent un écoulement dû à l'effet de la flottabilité. Bien entendu, il est essentiel qu'un champ de force externe comme la gravité soit présent pour que cela se produise.

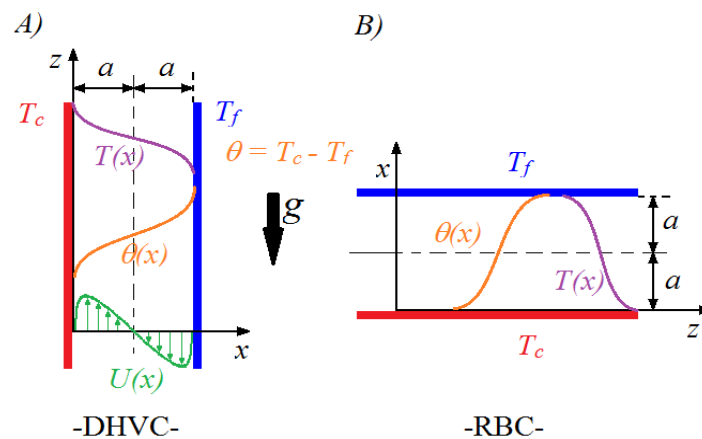
D'une manière générale, un fluide se dilate lorsqu'il est chauffé, ce qui entraîne une diminution de sa densité. L'inhomogénéité de la densité peut également être générée par le mélange de fluides de densités différentes. En présence d'un champ gravitationnel, il existe une force nette qui pousse vers le haut un fluide léger entouré d'un fluide plus lourd, et cette force ascendante est appelée la force de flottabilité. La force de flottabilité donne lieu à la montée du fluide léger et à la descente du fluide plus lourd. Le mouvement du fluide induit par la force de flottabilité est communément appelé convection due à la flottabilité. Si le mouvement du fluide est uniquement dû à la flottabilité, la convection est également appelée convection naturelle ou convection libre. Si le mouvement du fluide est induit à la fois par la flottabilité et le cisaillement ou la pression, la convection est appelée convection mixte (Wei, 2020).

Les convections induites par la flottabilité se produisent dans une variété de phénomènes naturels et d'applications industrielles. Parmi les exemples, citons la convection atmosphérique et océanique, le chauffage et le refroidissement des locaux, la propagation de la fumée et des incendies, le confinement des réacteurs nucléaires et les capteurs solaires. Il existe une quantité énorme d'études sur les effets de la flottabilité sur l'écoulement et le transport de chaleur (ou de masse). Il est impossible de donner dans un seul chapitre de thèse une revue exhaustive de l'écoulement et du transport de chaleur induits par la flottabilité, qui peut être trouvée dans des livres consacrés au sujet, par exemple : Turner (1979), Jaluria (1980), Kakac et al. (1985), Martynenko and Khramtsov (2005), Verma (2018) et plus récent Wei (2020).

La façon dont la flottabilité affecte l'écoulement et le transfert de chaleur ou de masse est d'un grand intérêt pratique, mais aussi d'un grand intérêt théorique. À ce jour, il n'existe toujours pas d'outils fiables pour prédire le coefficient de transfert de chaleur ou de masse dans la turbulence induite par la flottabilité (Hanjalić, 2002).

## 1.2 Convection naturelle dans une cavité

Pour comprendre la physique essentielle de la convection due à la flottabilité, on utilise généralement des expériences physiques ou des simulations numériques de convection à géométrie simple. Deux convections à géométrie simple sont illustrées à la Figure 1.1 : le canal vertical à chauffage différentiel (Differentially Heated Vertical Channel – DHVC) et la convection de Rayleigh-Benard (Rayleigh-Benard Convection – RBC). Dans les deux cas, l'écoulement et le transport de chaleur se produisent entre deux plaques parallèles, qui sont maintenues à des températures différentes. Dans le DHVC, le gradient de température est perpendiculaire à la gravité, mais dans le RBC, le gradient de température est aligné avec la gravité. Dans le DHVC, le fluide le plus chaud monte du côté de la plaque chaude, et en même temps, le fluide le plus froid descend du côté de la plaque froide. Dans le RBC turbulent, une caractéristique importante est la montée du fluide chaud sous forme de panaches et la descente du fluide froid sous forme de panaches inversés.



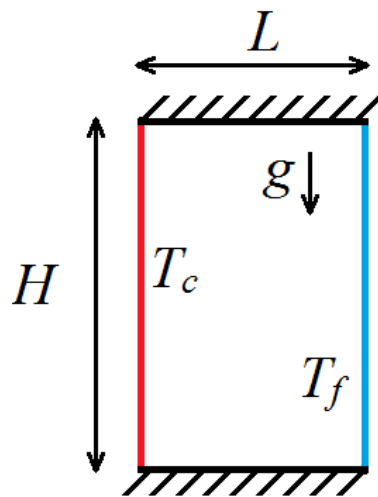
**Figure 1. 1** Configurations canoniques de la convection induite par la flottabilité. (A) Canal vertical à chauffage différentiel (Differentially heated vertical channel - DHVC). Le fluide le plus chaud monte sur le côté gauche et le fluide le plus froid descend sur le côté droit. (B) Convection de Rayleigh-Benard (RBC). La vitesse moyenne est nulle et la température moyenne est antisymétrique autour du plan médian.  $\theta$  est la température moyenne transformée.

La RBC a été largement étudiée dans les laboratoires de physique pendant plus de cent ans. Au cours des trente dernières années, la simulation numérique est devenue un outil important dans l'étude des écoulements turbulents, y compris la convection induite par

la flottabilité, le RBC et le DHVC. L'analyse des quantités turbulentes n'est souvent possible qu'avec des simulations numériques, en raison des exigences de précision et de résolution.

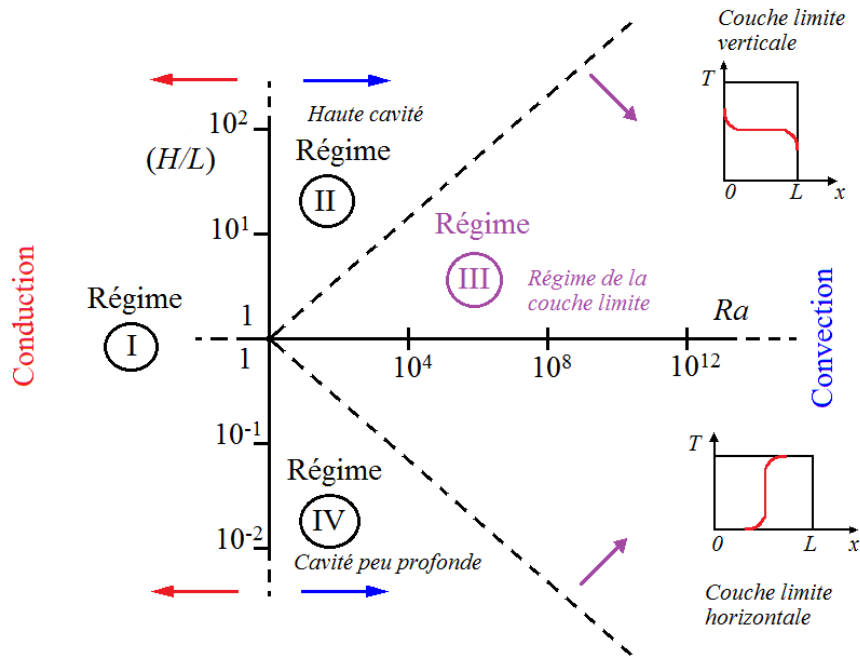
### 1.2.1 Convection naturelle dans une cavité rectangulaire

Ce problème fait partie des problèmes de convection naturelle les plus étudiés. Considérons le système illustré à la Figure 1.2. Une analyse et une discussion détaillées de l'écoulement et du transfert de chaleur peuvent être trouvées dans (Bejan and Kraus, 2003). L'analyse et l'expérience montrent que les caractéristiques de l'écoulement de recirculation dépendent fortement du rapport d'aspect de l'enceinte,  $H/L$ , et du nombre de Rayleigh,  $Ra$ , basé sur la hauteur  $H$ .

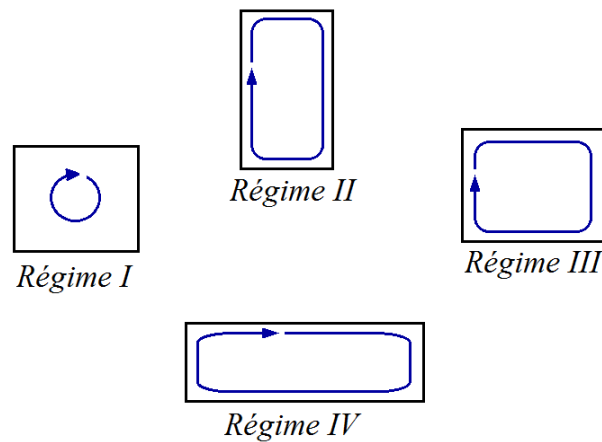


**Figure 1. 2** Convection naturelle dans une enceinte rectangulaire en 2D avec des côtés isothermes et des parties supérieure et inférieure adiabatiques.

De manière générale, pour un écoulement laminaire, quatre régimes d'écoulement et de transfert de chaleur différents peuvent être définis, comme le montre la carte des régimes d'écoulement de la Figure 1.3. Les régimes d'écoulement sont représentés schématiquement sur la Figure 1.4.



**Figure 1.3** Régimes d'écoulement et de transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte rectangulaire verticale avec des côtés verticaux isothermes et des côtés horizontaux adiabatiques. D'après Bejan (2013) et Ghiaasiaan (2018).



**Figure 1.4** Schéma des motifs d'écoulement de recirculation associés aux régimes d'écoulement de la Figure 1.3 (Ghiaasiaan, 2018).

Lorsque  $Ra < 1$  (Régime I), l'effet de flottabilité est trop faible pour provoquer une convection significative. Ainsi, à l'exception d'une boucle de recirculation à mouvement lent qui a peu d'effet sur le transfert de chaleur, le fluide est relativement stagnant. La variation de température dans la direction horizontale est approximativement linéaire, et le flux de chaleur (taux de transfert de chaleur par unité de surface de la paroi latérale) est de (Ghiaasiaan, 2018) :

$$q'' = \lambda \frac{T_c - T_f}{S} \quad (1.1)$$

Ceci est équivalent à :

$$Nu = \frac{q''}{T_c - T_f} \cdot \frac{S}{\lambda} = 1 \quad (1.2)$$

Le régime de haute enceinte (Régime II) couvre la gamme :

$$\begin{cases} Ra > 1 \\ (H / L) > Ra^{1/4} \end{cases} \quad (1.3)$$

Dans ce régime, le profil latéral de température reste linéaire, et  $Nu > 1$ . Des couches distinctes de fluide peuvent être observées près des frontières horizontales supérieure et inférieure.

Le régime de la couche limite (Régime III), se produit dans la plage de paramètres suivante :

$$\begin{cases} Ra > 1 \\ Ra^{-1/4} < (H / L) < Ra^{1/4} \end{cases} \quad (1.4)$$

Il s'agit d'un régime dominé par la convection. Des couches limites distinctes se forment à côté des surfaces verticales. Les couches limites constituent ainsi la boucle d'écoulement de recirculation tandis que le cœur de l'enceinte reste approximativement stagnant.

Le régime de l'enceinte peu profonde (Régime IV) se produit dans la plage de paramètres :

$$\begin{cases} Ra > 1 \\ (H / L) < Ra^{-1/4} \end{cases} \quad (1.5)$$

Ce régime est également dominé par la convection. Il est caractérisé par une configuration à contre-courant dans la direction horizontale et des couches limites thermiques sur les côtés verticaux. Les couches limites ainsi que le long noyau horizontal contribuent à la résistance thermique pour le transfert de chaleur entre les deux côtés isothermes.

Généralement, les équations empiriques du nombre de Nusselt sont données sur la base du nombre de Rayleigh,  $Ra_L$ , qui est définie en fonction de la largeur  $L$ , comme suivant :

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_c - T_f)L^3}{\nu\alpha} \quad (1.6)$$

Pour  $Ra_L < 1$ , le champ d'écoulement dans l'enceinte ressemble à celui décrit précédemment dans la Figure 1.4. On observe une grande cellule en rotation lente, mais le transfert de chaleur à travers l'enceinte se fait essentiellement par conduction, ce qui conduit à  $Nu_L = 1$ .

Pour la gamme de paramètres  $2 < H/L < 10$ ,  $Pr < 10$ , et  $Ra_L < 10^{10}$ , Catton (1978) a proposé

$$\langle Nu_L \rangle_H = 0.22 \left( \frac{H}{L} \right)^{-1/4} \cdot \left[ \frac{Pr}{0.2 + Pr} Ra_L \right]^{0.28} \quad (1.7)$$

Pour la plage de paramètres  $1 < H/L < 2$ ,  $10^{-3} < Pr < 10^5$ , et  $[Ra_L Pr / (0.2 + Pr)] > 10^3$ , Catton (1978) recommande :

$$\langle Nu_L \rangle_H = 0.18 \cdot \left[ \frac{Pr}{0.2 + Pr} Ra_L \right]^{0.29} \quad (1.8)$$

Pour la fourchette  $10 < H/L < 40$ ,  $1 < Pr < 2 \cdot 10^4$ , et  $10^4 < Ra_L < 10^7$ , MacGregor and Emery (1969) ont proposé cette corrélations :

$$\langle Nu_L \rangle_H = 0.18 Ra_L^{0.25} Pr^{0.012} (H/L)^{-0.3} \quad (1.9)$$

Les mêmes auteurs recommandent la corrélation suivante pour la fourchette  $1 < H/L < 40$ ,  $1 < Pr < 20$ , et  $10^6 < Ra_L < 10^9$  :

$$\langle Nu_L \rangle_H = 0.046 Ra_L^{0.33} \quad (1.10)$$

Plusieurs auteurs se sont intéressés aux effets des différentes conditions aux limites du model défini dans la Figure 1.2. Calcagni et al. (2005) ont placé un élément chauffant sur la paroi inférieure tandis que les parois verticales étaient refroidies dans la configuration montrée à la Fig. 1(f). Ils ont utilisé l'interférométrie à double exposition pour l'analyse expérimentale. Ils ont conclu que la conduction prédomine pour  $Ra < 10^4$ , alors que la convection domine complètement au-delà de  $Ra \geq 10^5$ . La longueur de la source de chaleur

devient significative à un nombre de Rayleigh plus élevé. Ils ont également comparé les résultats expérimentaux avec les résultats numériques, qui ont montré un bon accord.

Basak et al. (2006) ont étudié l'effet des conditions aux limites continues et discontinues sur la convection naturelle à l'intérieur d'enceintes carrées avec des parois inférieures chauffées uniformément et non uniformément. Ils ont proposé une étude paramétrique basée sur une méthode de pénalité finie avec  $10^3 < Ra < 10^5$  et  $0.7 < Pr < 10$ . La fonction de courant a montré des caractéristiques très faibles dues au transfert de chaleur se déroulant purement par conduction à  $Ra = 10^3$  et est restée la même jusqu'à  $Ra = 5 \cdot 10^3$ . Au-delà de ce nombre de Rayleigh, des cellules de circulation plus fortes sont apparues dans la cavité car la convection a commencé à participer au transfert de chaleur global. Une couche limite thermique s'est formée à  $Ra = 10^5$  dans le cas de la paroi inférieure uniformément chauffée. Dans le cas de la paroi inférieure non uniformément chauffée, la conduction a dominé jusqu'à  $Ra = 2 \cdot 10^4$ . Les forces de flottabilité étaient assez faibles par rapport au cas précédent. L'augmentation du nombre de Nusselt n'était pas significative lorsque  $Pr$  passait de 0,7 à 10. Pour les deux cas, le nombre de Nusselt sur les parois latérales et la paroi de fond n'a pas beaucoup varié jusqu'à  $Ra = 5000$  pour la paroi de fond chauffée uniformément et jusqu'à  $Ra = 2 \cdot 10^4$  pour la paroi de fond non uniformément chauffée.

Nithyadevi et al. (2007) ont considéré l'effet des deux parois verticales partiellement actives pour  $10^3 < Gr < 10^5$  et  $AR = 0.5, 1, 2, 3, \text{ et } 5$  ( $AR$  : aspect ratio, rapport de forme). Ils ont considéré neuf cas différents avec différentes zones actives le long des parois verticales. L'écoulement avait une structure unicellulaire avec deux cellules secondaires dans le sens des aiguilles d'une montre pour  $AR = 2$ ,  $Gr = 10^5$ , et des zones actives au sommet. La majeure partie de la cavité est restée stagnante pour les zones actives haut-milieu et milieu-inférieur. Le transfert de chaleur était le plus faible pour les zones actives du haut et du bas et le plus élevé pour les zones actives du bas et du haut. Le taux de transfert de chaleur a augmenté lorsque les zones de refroidissement se sont déplacées vers le haut de la paroi verticale droite et n'a pas varié lorsque l'on changeait l'emplacement du chauffage avec un emplacement de refroidissement fixe sur les parois verticales. Cependant, le transfert de chaleur peut être augmenté en changeant l'emplacement du chauffage du haut vers le bas avec un  $AR$  croissant.

Beya and Lili (2009) ont largement discuté des effets tridimensionnels. Les parois latérales verticales ont été chauffées et refroidies, tandis que les autres parois ont été supposées adiabatiques. L'écoulement à l'intérieur de la cavité passe d'un écoulement symétrique à un écoulement non symétrique en raison d'un transfert de chaleur dominé par la convection à un  $Ra$  plus élevé. Ils ont également mis en évidence les effets de l'inclusion d'une troisième dimension dans leur analyse numérique. Des modèles symétriques ont été obtenus par rapport au plan médian de la troisième dimension. Les flux tridimensionnels à l'intérieur de la cavité empêchent les oscillations pour des nombres de Prandtl supérieurs à 6.

Corvaro et al. (2011) ont considéré trois configurations différentes avec une bande froide à trois endroits différents (le bas, le milieu et le haut de la paroi verticale droite) et une bande chaude au milieu de la paroi verticale gauche. Ces trois configurations ont été nommées MB (Middle Bottom : bas milieu), MM (Middle Middle : milieu milieu) et MT (Middle Top : haut milieu). Ils ont utilisé la PIV et l'interférométrie holographique pour visualiser l'écoulement et déterminer les distributions de température à l'intérieur de la cavité. Deux bains thermostatiques ont été utilisés pour assurer le chauffage et le refroidissement des bandes pendant l'expérience. La bande froide a été réglée à une température constante de 291,15 K, et la température de la bande chaude a été modifiée. Les vitesses moyennes et maximales étaient les plus faibles pour la configuration MB, intermédiaires pour la configuration MM, et les plus élevées pour la configuration MT. Les valeurs de la configuration MM avaient tendance à se rapprocher de celles de la configuration MT lorsque le nombre de Rayleigh augmentait. Ils ont suggéré d'utiliser la configuration MM lorsque le nombre de Rayleigh dépasse  $3 \cdot 10^5$ .

Saravanan and Sivaraj (2011) ont effectué une analyse numérique similaire au cas 1 de Basak et al. (2006). Ils ont comparé les résultats d'un chauffage non uniforme à ceux d'un chauffage uniforme et ont suggéré que le flux symétrique et le profil de température sont déformés dans le cas d'un chauffage non uniforme. Une source chauffée de manière non uniforme a considérablement amélioré le mécanisme de transfert de chaleur à  $Gr = 10^6$ .

Paroncini et al. (2012) ont étudié expérimentalement et numériquement les effets de la longueur et du nombre de sources de chaleur sur les caractéristiques de l'écoulement dans une enceinte carrée. Ils ont analysé deux configurations différentes. Le cas 1 avait une bande chauffée et une bande froide sur les parois verticales gauche et droite, tandis



que le cas 2 avait deux bandes chauffées et deux bandes froides sur les parois verticales gauche et droite, respectivement. Les expériences ont été réalisées avec  $5,73 \cdot 10^4 < Ra < 2,30 \cdot 10^5$ , et l'analyse numérique a été effectuée avec  $6,59 \cdot 10^4 < Ra < 2,35 \cdot 10^5$ . Les isothermes établis à partir des franges obtenues par holographie n'étaient pas intensifiés près de la paroi gauche, ce qui indique que la conduction domine aux faibles nombres de Rayleigh de  $6,19 \cdot 10^4$  et  $5,73 \cdot 10^4$ . Pour des nombres de Rayleigh supérieurs à  $1,21 \cdot 10^5$ , les isothermes se sont concentrées près des parois verticales de gauche, ce qui indique que la convection est le mode dominant de transfert de chaleur.

Belazizia (2013) a effectué une analyse bidimensionnelle de la convection naturelle dans une cavité carrée avec une paroi droite isotherme et une paroi gauche partiellement chauffée dans sa partie supérieure. Ils ont signalé un schéma d'écoulement non uniforme à l'intérieur de la cavité en raison d'une température anormale du film de fluide dans la paroi. Les cellules qui recirculent dans le sens des aiguilles d'une montre se déplacent vers le haut au niveau de la paroi chaude en raison de l'interface paroi-fluide et se déplacent vers le bas au niveau de la paroi froide de droite. La convection a dominé en raison de la forte recirculation due à la différence de température croissante entre les parois et le rapport de conductivité thermique. La distribution de la température a montré des caractéristiques uniformes pour des rapports de conductivité thermique plus élevés. Le nombre moyen de Nusselt a augmenté avec la différence de température entre les parois verticales en raison d'un rapport de conductivité thermique plus élevé.

Malgré le fait que l'étude de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire a fait l'objet de plusieurs centaines d'études, le problème reste toujours d'actualité. Dans une récente étude, Cao et al. (2022) présentent une étude numérique (CFD), sur le mécanisme de convection naturelle du nanofluide à base d'eau et d'oxyde de titane ( $TiO_2$ ), utiliser pour refroidir une plaque chaude inclinée à l'intérieur d'une chambre carrée. Les impacts de deux nombres de Rayleigh ( $10^2 < Ra < 10^4$ ), la fraction volumique des nanoparticules, et quatre angles d'inclinaison (entre  $0^\circ$  et  $45^\circ$ ) ont été analysés par rapport au coefficient moyen de transfert de chaleur par convection. Cette étude a brièvement démontré que les valeurs optimales de la fraction volumique pour les nombres de Rayleigh ( $10^2$  et  $10^4$ ) étaient de 0,06 et 0,02, respectivement. De plus, l'augmentation de la fraction volumique à 6% pour un faible nombre de Reynolds a amélioré le coefficient moyen de transfert de chaleur par convection de 21%.

Alhashash and Saleh (2022) ont étudié le transfert de chaleur par convection libre dans des nanofluides hybrides à l'intérieur d'une enceinte carrée à chauffage différentiel. L'enceinte carrée est soumise à une vitesse angulaire constante et uniforme dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour de sa longueur. L'enceinte est remplie d'un mélange hétérogène de fluide de base et de particules à changement de phase nano-encapsulées (Nano-Encapsulated Phase Change Material – NEPCM). Le noyau NEPCM peut absorber de l'énergie thermique à l'état de charge ou libérer de l'énergie à l'état de décharge. Les équations gouvernantes sont résolues en utilisant la méthode des éléments finis. Les principaux résultats montrent que le paramètre de rotation affecte le nombre de cellules en circulation, le nombre de tourbillons internes et leur intensité. En utilisant une vitesse de rotation plus élevée, moins de NEPCM subit un changement de phase et retarde le transfert de chaleur.

Liu et al. (2022) ont étudié numériquement la convection naturelle MHD de la suspension  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ -eau en présence du champ magnétique d'un solénoïde à l'intérieur d'une enceinte poreuse en utilisant la méthode des volumes finis. Un solénoïde a été incorporé autour de la cavité pour générer un champ magnétique non uniforme. Les parois verticales de l'enceinte ont été maintenues à des températures uniformes de  $T_c$  et  $T_f$  et les parois horizontales ont été isolées. De nombreux cas ont été simulés pour comprendre les impacts des nombres de Rayleigh poreux de 10 à 1000, des fractions volumiques de 0 à 4%, des porosités de 0,5 à 0,9 et des nombres de Hartmann de 0 à 120. Les résultats indiquent que la présence d'un champ magnétique a un effet positif sur le transfert de chaleur dans un nombre de Rayleigh poreux faible et un nombre de Hartmann élevé, pour toutes les porosités. Dans le cas d'une porosité élevée et d'une fraction volumique de 4 %, le nombre de Nusselt a augmenté de 140 %, tandis qu'à un  $Ra$  élevé, la présence d'un faible champ magnétique a diminué le taux de transfert de chaleur.

### 1.2.2 Convection naturel dans une enceinte cylindrique

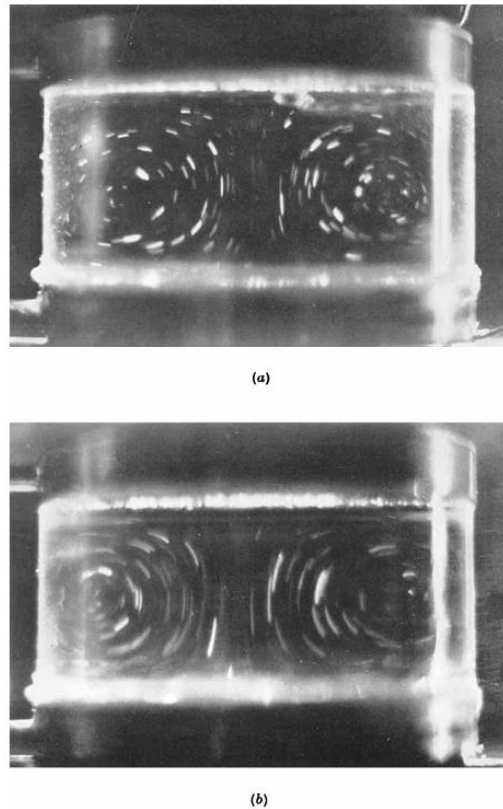
Etant donné que le stockage des fluides (gaz ou liquide) se fait généralement dans des enceintes cylindriques, l'étude des phénomènes de convection naturelle dans ces enceintes a attiré l'attention de plusieurs chercheurs dans le monde vu la large gamme d'applications industrielles. On retrouve ces phénomènes dans les cœurs des réacteurs nucléaires, dans les bacs de stockages des hydrocarbures, dans les petites bouteilles de

GPL des voitures, dans les réacteurs de fabrication de boisson et distilleries, dans la production pharmaceutique, et même dans les cumulus de chauffage d'eau à application domestique.

A notre connaissance, Liang et al. (1969) sont les premiers à mettre en évidence l'existence de la convection axisymétrique dans une cellule cylindrique. Les auteurs ont proposé des solutions numériques aux équations de Boussinesq contenant une viscosité dépendant de la température pour le cas d'un écoulement convectif axisymétrique entraîné par la flottabilité. Deux solutions ont été proposées, l'une avec un écoulement ascendant et l'autre avec un écoulement descendant au centre de la cellule. L'existence de ces deux régimes permanents a été vérifiée expérimentalement pour le cas d'une cellule cylindrique ayant des parois latérales isolantes rigides et des plans supérieur et inférieur isothermes.

Yamaguchi et al. (1984) ont étudié numériquement la structure de la convection axisymétrique induite par la flottabilité dans un cylindre vertical chauffé par le bas en utilisant les éléments finis. Les résultats ont été présentés pour des fluides avec un nombre de Prandtl  $Pr = 1$ , et pour des cylindres avec un rapport d'aspect  $AR$  entre 0,5 et 2,25. L'analyse approfondie des courbes de stabilité montrent un changement continu du mouvement cellulaire primaire d'une seule cellule toroïdale à deux et trois cellules imbriquées radialement dans le cylindre. Les transitions douces de la structure de l'écoulement avec le nombre de Rayleigh et  $AR$  s'expliquent par une connectivité non linéaire entre les deux premières familles d'écoulement bifurquées formées. La transition entre les deux modes peut être décrite par la théorie de la bifurcation à points limites multiples.

Crespo del Arco et al. (1988) se sont intéressés aux écoulements tridimensionnels induits par la flottabilité dans des cylindres verticaux, simulés avec la méthode des différences finies. Des écoulements convectifs asymétriques sont étudiés pour trois valeurs du rapport d'aspect. Des régimes supercritiques complexes (stables et dépendants du temps) ont été simulés dans des cylindres de rapports d'aspect  $A=2$  et  $A=4$  pour  $Pr=0.02$  et dans des plages de  $Ra$  allant jusqu'à  $8Ra_c$  et  $6Ra_c$  (Rayleigh critique) respectivement.



**Figure 1. 5** Convection dans un cylindre circulaire (diamètre = 5,7 cm, hauteur = 3 cm) d'huile transparente dont la viscosité dépend de la température. Les parois latérales sont isolées et la surface supérieure est isotherme. (a) Flux descendant au centre,  $Ra = 8000$  ; (b) Flux ascendant au centre,  $Ra = 8200$  (Liang et al., 1969).

Cotter and Charles (1993) ont analysé numériquement la convection naturelle transitoire du pétrole brut chaud contenu dans un grand réservoir de stockage cylindrique vertical situé dans un environnement froid. L'effet du coefficient de transfert de chaleur externe a été examiné en utilisant quatre valeurs différentes. Les auteurs ont constaté que l'augmentation de ce paramètre augmente le taux de perte de chaleur comme prévu, mais que l'effet sur l'écoulement du fluide résultant est mineur. L'effet du rapport d'aspect du réservoir (hauteur/rayon) sur le processus de convection naturelle est étudié en utilisant quatre rapports d'aspect différents allant de 0,25 à 2,0, et il s'avère qu'il affecte les modèles d'écoulement qui se développent. Deux cellules de recirculation apparaissent pour les rapports d'aspect de 0,25, 0,5 et 1,0, tandis qu'une seule cellule apparaît dans le cas du rapport d'aspect de 2,0.

Leong (2002) a présenté une solution numérique des équations tridimensionnelles de la convection de Rayleigh-Bénard dans un cylindre vertical. Les équations de transport

d'énergie et de vorticité ont été r solv es à l'aide du schéma implicite à direction alternée (ADI). Un algorithme de transformation de Fourier rapide a été utilisé pour résoudre le potentiel vectoriel. Les résultats ont montré l'existence de quatre types principaux de structures d'écoulement : les rouleaux concentriques, radiaux, parallèles et croisés. Le nombre de Nusselt dépend du type de structure d'écoulement.

Oliveski et al. (2005) ont présenté une analyse numérique et expérimentale de la stratification thermique à l'intérieur d'un réservoir contenant de l'huile thermique. A partir d'une condition initiale de température uniforme, le réservoir est soumis à un régime de refroidissement par convection naturelle provoqué par les pertes thermiques dans l'environnement. L'analyse numérique est réalisée avec un modèle bidimensionnel en coordonnées cylindriques avec la méthode des volumes finis. Les résultats ont montré que le réservoir est en régime de convection naturelle. En termes de direction du flux convectif, deux régions distinctes existent : la région d'écoulement descendant a la forme d'un anneau le long de la paroi latérale, représentée par la couche limite hydrodynamique. L'autre est la région centrale, avec un écoulement ascendant très lent, occupant presque la totalité du volume du réservoir. Les gradients thermiques ont leurs valeurs maximales près de la paroi latérale et sont nuls à la ligne centrale du réservoir.

Chen et al. (2009) ont proposé un modèle de Lattice Boltzmann simple pour la résolution du problème de convection naturelle dans un cylindre. Dans cette étude, les auteurs ont montré comment transformer l'équation directrice du champ de température dans le système de coordonnées cylindriques en représentation pseudo-cartésienne, et de la même manière que pour le champ de vitesse. Gr ce à ses caractéristiques intrinsèques, le présent modèle est plus efficace, plus stable et avec beaucoup plus de simplicité d'implémentation.

Fu et al. (2018) ont proposé d'utiliser la technique de transformation intégrale généralisée (GITT), pour étudier le comportement de la convection naturelle dans un cylindre vertical sous différentes conditions aux limites, parois adiabatiques et isothermes et différents rapports d'aspect. GITT a été utilisé pour étudier le comportement de la convection naturelle en régime permanent dans un cylindre vertical avec une génération de chaleur interne uniforme. Les équations directrices de la convection naturelle ont été transférées à un ensemble d'équations différentielles ordinaires en utilisant la méthodologie GITT. Les équations différentielles ordinaires ont

été résolues numériquement et la convergence a été obtenue, de manière raisonnable, en utilisant des ordres de troncature faibles.

Dans de récentes études, plusieurs auteurs se sont penchés sur l'étude de la convection naturelle dans un cylindre pour des applications bien spécifiques. Moldovan et al. (2019) se sont intéressé aux enceintes cylindriques verticales utilisées dans l'industrie de la croissance des cristaux comme réacteurs de croissance. Les cristaux de nitrure de gallium sont cultivés dans des réacteurs de croissance ammonothermiques qui requièrent des températures de l'ordre de 600-1000 K et des pressions de l'ordre de 1000-6000 bar. Les conditions du procédé rendent difficile toute mesure expérimentale, en particulier la visualisation de l'écoulement et les mesures de vitesse. Un réacteur transparent géométriquement similaire et des conditions de dynamique des fluides similaires pour la croissance des cristaux ont été utilisés dans le processus d'observation expérimentale et de mesure de l'écoulement. Les températures de la paroi et du fluide ainsi que les vecteurs de vitesse ont été enregistrés. L'écoulement s'est avéré être de nature oscillante avec des modèles stables et uniformes en moyenne dans le temps.

Mokaddes Ali et al. (2021) ont étudié le cas d'un cylindre à parois ondulées remplie de nano fluide hybride. Le but des ondulations est l'augmentation de la surface d'échange, tandis que les nanoparticules améliorent les propriétés thermiques du fluide. Dutta et al. (2021) se sont intéressé sur l'effet du champ magnétique sur la convection naturelle dans un quadrant d'un cylindre remplis d'un nano fluide. Abdulkadhim et al. (2021) ont analysé la convection naturelle magnétohydrodynamique d'un nano fluide (Cu-eau), contenu dans une enceinte à parois ondulées ayant un cylindre chaud circulaire à l'intérieur. Shahrestani et al. (2021) ont étudiée numériquement la convection naturelle d'un fluide newtonien à l'intérieur d'une enceinte circulaire cloisonnée et en présence d'une paroi flexible (mobile). Les paramètres adimensionnels indiquant le problème sont le nombre de Rayleigh ( $10^4 \leq Ra \leq 10^7$ ), le nombre de Prandtl ( $0,71 \leq Pr \leq 200$ ). Les résultats confirment que Le degré de distorsion (déformation) de la plaque dépend directement de la quantité de forces appliquées par le fluide. Pour les faibles nombres de Rayleigh, la déformation de la plaque ainsi que la puissance tourbillonnaire produite dans les deux moitiés de la cavité sont presque négligeables, et le transfert de chaleur se produit principalement par le mécanisme de conduction. L'augmentation du nombre  $Ra$  de  $10^4$  à  $10^7$  augmente le nombre moyen de Nusselt de plus de 5 fois. De même, l'augmentation du

nombre  $Pr$  de 0,71 à 200 augmentera significativement la contrainte totale appliquée à la plaque de plus de 70 fois.

## 1.3 Thermo-capillarité et évaporation dans les surfaces libres

### 1.3.1 Thermo-capillarité

Une interface entre deux fluides non miscibles possède des propriétés localisées, dont la plus importante est la tension inter faciale  $\sigma$  (ou de surface). Celle-ci représente la magnitude de la force par unité de longueur normale à une partie de l'interface (Davis, 1987).

La tension superficielle  $\sigma$  dépend généralement des champs scalaires dans le système (par exemple, le champ électrique, le champ de température), ainsi que de la concentration de matériaux étrangers sur l'interface (Davis, 1987). Dans la présente section, nous nous concentrons sur un seul de ces champs, la température  $T$ . Ainsi, nous ne considérons que la thermo-capillarité et posons une équation d'état :

$$\sigma = f(T) \quad (1.11)$$

Dans la majorité des cas, la tension superficielle a une relation linéaire avec la température  $T$ , elle diminue avec l'augmentation de la température et s'exprime de la manière suivante :

$$\sigma = \sigma_0 - \gamma(T - T_0) \quad (1.12)$$

avec,  $\sigma_0$  et la tension superficielle a température  $T_0$ .

Pour les liquides courants, nous avons  $\gamma = -d\sigma/dT > 0$ , de sorte qu'il y a un écoulement de surface de l'extrémité chaude vers l'extrémité froide. Comme le liquide principal est visqueux, il est entraîné. Le mouvement du liquide principal résulte des gradients de température inter faciaux, c'est ce qu'on appelle l'effet thermo-capillaire (Davis, 1987).

Les effets thermo-capillaires peuvent dominer la dynamique dans le traitement sans récipient des cristaux, le comportement des zones de soudure, la rupture des films minces, la propagation des flammes sur les combustibles liquides, etc. Dans de nombreuses situations dans la nature ainsi que dans la science et l'industrie, le transport de chaleur à

travers les interfaces peut être considérablement augmenté par la présence d'autres processus de mélange supplémentaires déclenchés par des instabilités. Le contrôle de ces instabilités ne peut être atteint que par la compréhension de celles-ci.

Il est clair que la présence d'une interface avec une tension de surface variable peut modifier les configurations d'écoulements déjà connues. Cependant, la tension superficielle est une force localisée à l'interface, et la capillarité peut provoquer ses propres instabilités. Généralement, cette instabilité due à la thermo-capillarité est connue sous le nom de la convection de Marangoni ou l'effet de Marangoni. Cette convection est caractérisée par un nombre adimensionnel appelé le nombre de Marangoni,  $Ma$ , en honneur au physicien italien Carlo Marangoni (1840 – 1925) :

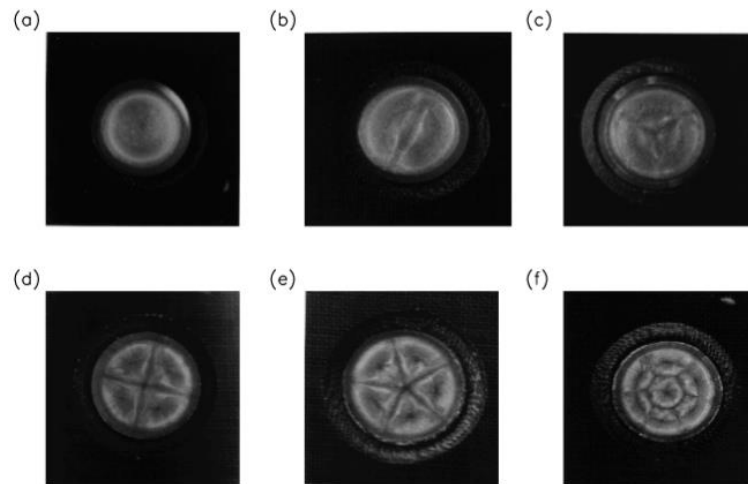
$$Ma = - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \frac{L_c \Delta T}{\mu \alpha} \quad (1.13)$$

La présence du signe négatif (-) permet d'obtenir un nombre sans dimension positif.

L'étude expérimentale de Koschmieder and Prahl (1990) sur l'effet de Marangoni dans des petite cavité a faible rapport d'aspect, a démontré l'existence des instabilités ou la cause principale et la thermo-capillarité comme on peut le voir dans la Figure 1. 6

L'étude de l'effet mixte de la flottabilité et de la thermo-capillarité a attiré l'attention de plusieurs chercheurs. Bergman and Ramadhyani (1986) ont étudié l'écoulement convectif flottant-thermo-capillaire dans une cavité carrée dont les parois latérales sont soumises à des températures différentes et isolées du haut et du bas. Les résultats numériques ont montré que l'effet Marangoni peut modifier de manière significative l'écoulement induit par la flottabilité, ce qui augmente ou diminue les taux de transfert de chaleur dans la cavité.





**Figure 1. 6** Convection de Marangoni à petit rapport d'aspect avec limites latérales circulaires d'après Koschmieder and Prahl (1990). (a) État à une cellule :  $M = 330$ . (b) État à deux cellules:  $M = 81$ . (c) État à trois cellules :  $M = 76,5$ . (d) État à quatre cellules :  $M = 78$ . (e) Etat à cinq cellules :  $M = 71$ . (f) Etat à six cellules :  $M = 74$ .

Carpenter and Homsy (1989) ont analysé la transition de l'écoulement de la dominance thermo-capillaire à la dominance de la flottabilité. En définissant un paramètre  $G$  comme le rapport entre le nombre de Rayleigh sur le nombre de Marangoni, les auteurs ont établi que pour  $G \leq 1$ , l'écoulement est dominé par la convection thermo-capillaire, et lorsque  $G \geq 10$ , l'écoulement est régi par les forces de flottabilité. Jyh-Chen and Farn-Shiun (1993) ont indiqué que lorsque  $Ma$  est supérieur à une certaine valeur critique ( $Ma_c$ ), la surface libre peut connaître un mouvement oscillatoire.

Rudraiah et al. (1995) ont considéré le cas d'une cavité rectangulaire avec différentes températures des parois latérales et remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl ( $Pr = 0,054$ ) soumis aux forces de Lorentz. En utilisant la méthode ADI, les auteurs ont étudié l'effet du champ magnétique sur l'écoulement de flottabilité en tenant compte de la thermo-capillarité à la surface libre. Dans leur étude, l'évaporation de surface a été négligée et les résultats ont montré que pour un nombre de Marangoni élevé, une cellule contre-rotative se forme dans la moitié supérieure.

Plus tard, Hossain et al. (2005) ont étendu le travail de Rudraiah et al. (1995) en incluant la génération de chaleur interne. Dans ce cas, la génération de chaleur interne au sein du fluide est induite par un courant électrique (effet Joule) résultant du champ magnétique et de l'écoulement d'un fluide électriquement conducteur. Les résultats ont montré que l'augmentation de la génération de chaleur interne favorise la croissance du nombre de cellules de convection dans la cavité. Sivasankaran et al. (2011) ont étudié la magnéto-

convection dans une cavité remplie d'eau froide. Contrairement à Rudraiah et al. (1995), Sivasankaran et al. (2011) ont considéré un champ magnétique horizontal et un fluide dont les propriétés dépendent de la température. Les résultats ont montré que le profil de l'écoulement et le taux de transfert de chaleur sont fortement liés de manière non linéaire au nombre de Marangoni.

Akhtaruzzaman et al. (2019) ont imposé un champ magnétique incliné avec un flux chauffant sur une partie de la paroi inférieure et des parois latérales froides. Les résultats ont montré que les effets combinés de la circulation de Marangoni et des forces de Lorentz induisent davantage de boucles de recirculation. Saleem et al. (2011) ont étudié la génération d'entropie dans un écoulement de convection naturelle à l'intérieur d'une cavité à extrémités ouvertes en tenant compte des forces thermo-capillaires. La simulation numérique a montré que le taux de génération d'entropie augmente avec l'augmentation du nombre de Marangoni. Oztop et al. (2014) ont développé une solution numérique tridimensionnelle de la convection naturelle et thermo-capillaire à l'intérieur d'une cavité cubique. Arbin et al. (2016) ont considéré le cas de la convection naturelle double-diffusive. Les auteurs ont supposé que le fluide est partiellement salé et chauffé à partir d'une partie sur la paroi latérale, puis ils ont appliqué la méthode de la ligne de chaleur pour mettre en place la résolution numérique. Les résultats ont montré que dans les unités à petite échelle, les forces thermo-capillaires ont une forte influence sur la dynamique de l'écoulement.

### 1.3.2 Evaporation

L'évaporation est un processus de surface : les molécules de liquide sont arrachées à leurs voisines et s'envolent sous forme de gaz. Les molécules d'un liquide sont liées les unes aux autres, tant dans la masse du liquide qu'à sa surface. Les molécules de surface peuvent voir un moyen de s'échapper, mais communément elles ne peuvent pas réaliser une telle évasion : elles sont liées dans leur voisinage. Pour rompre ce lien, une molécule doit avoir une énergie cinétique élevée, suffisamment élevée pour qu'elle puisse surmonter l'énergie potentielle qui la lie. La probabilité d'évaporation pour une particule donnée n'est pas très élevée, mais elle est non nulle. Cependant, cette probabilité augmente avec la température ; ainsi, il existe toujours des molécules ayant une énergie cinétique suffisante, quelle que soit la température.

Essayez de laisser un verre d'eau pour la nuit : vous le trouverez partiellement vidé un peu le matin. Malgré la faible chance qu'a une particule de se détacher de la surface, de nombreuses molécules le font. Hélas, tous les liquides ne peuvent pas répéter cette astuce, une bouteille de glycérol ouverte ne changera pas de niveau de liquide, même après un an.

La persistance de l'évaporation est la principale distinction entre l'évaporation et l'ébullition : le second processus ne se produit qu'à des températures élevées, tandis que l'évaporation se produit dans n'importe quelle condition de température, bien qu'à une vitesse suffisamment différente.

L'évaporation s'agit d'un processus de « non-équilibre ». En général, lorsque nous observons une évaporation, nous avons affaire à un système qui est loin d'être à l'équilibre. D'après Gerasimov and Yurin (2018), la meilleure recommandation pour traiter l'évaporation peut être d'oublier tous les principes d'équilibre. Nous pouvons dire que l'évaporation est une transition de phase hors équilibre.

Pour simplifier le travail des ingénieurs, les scientifiques généralement modélisent le taux d'évaporation avec des équations empiriques issue des mesures expérimentales. D'après nos recherches, nous avons constaté un nombre important d'articles sur l'évaporation de l'eau et les effets d'autres paramètres tel que : la température, la pression, la salinité, l'humidité atmosphérique, etc. Ceci est due au fait de la large gamme d'applications ou situation physique où l'évaporation d'eau produit, de l'évaporation des goutteles (Mehrizi et al., 2022) à l'évaporation des océans (Mohamed et al., 2021). Pour plus de détails sur la théorie de l'évaporation et ces applications, nous dirigeons les lecteurs à lire ces livres consacrés au sujet : Ahsan (2011), Abteu and Melesse (2012), Wong (2014), Brutin (2015), Gerasimov and Yurin (2018) et Cossali and Tonini (2021).

## 1.4 Cas des réservoirs de stockages cryogéniques

Le stockage des gaz liquéfiés a de nombreux usages. L'industrie spatiale utilise l'hydrogène et l'oxygène liquéfiés pour alimenter ses fusées. L'industrie automobile utilise l'hydrogène liquéfié pour alimenter ses voitures électriques et le gaz de pétrole liquéfié (GPL) pour les voitures à combustion respectueuses de l'environnement. Les hôpitaux utilisent l'oxygène liquéfié pour lutter pour la vie de leurs patients et des

millions de foyers dans le monde utilisent le gaz naturel liquéfié (GNL) comme principale source de chaleur pour les besoins quotidiens ou pour se réchauffer pendant les hivers froids.

En général, les gaz liquéfiés sont stockés dans des conteneurs cryogéniques à basse température et à la pression atmosphérique. Malgré une conception bien isolée, la chaleur externe s'infiltré dans le conteneur en raison de l'écart de température important entre l'environnement externe et l'intérieur du conteneur. Cette chaleur externe déclenche un flux convectif dans le fluide stocké. Lorsque le conteneur est partiellement rempli, ce qui est le cas le plus représentatif, le mouvement du fluide est principalement induit par, d'une part les forces de flottabilité, d'autre part les forces de tension superficielle (convection thermo-capillaire) à l'interface entre les phases liquide et gazeuse.

Dans un conteneur cryogénique partiellement rempli, le GNL est stocké à une température d'environ 113°K (- 160°C) et à une pression de ~1 atm (Khelifi-Touhami et al., 2010). En raison des pertes de chaleur et donc du mouvement convectif créé, un processus d'évaporation lent est initié à la surface libre. L'excès de vapeur créé est extrait du récipient par la soupape de sécurité afin d'éviter une augmentation de la pression à l'intérieur du récipient. Au fil du temps, la quantité de pertes devient économiquement importante.

En anglais, on appelle ce gaz issu de l'évaporation « *Boil-Off Gaz (BOG)* », qui se traduit en français gaz d'ébullition, mais il faut faire attention que l'appellation issue de la pratique industrielle ne traduit pas exactement la physique du phénomène, car l'ébullition n'a rien avoir avec l'évaporation. L'évaporation est un phénomène superficiel et naturel sans présence de bulles, tandis que l'ébullition se produit artificiellement (source de chaleur externe) dans toute la masse de fluide, accompagné des bulles de vapeur. Cependant, ceci n'empêche pas d'utiliser l'abréviation « BOG » pour décrire le phénomène d'évaporation du gaz à l'intérieur du réservoir vu qu'elle est très réponde dans le milieu industriel.

Le phénomène BOG n'est pas limité au GNL mais peut également se produire avec d'autres gaz stockés sous forme liquéfiée (Kumar et al., 2007). La compréhension des phénomènes d'évaporation de surface associés à la convection de flottabilité-thermo-capillaire a des applications industrielles importantes. Kumar et al. (2007) ont étudié l'effet de l'évaporation sur la stratification de l'hydrogène liquide à basse température (20°K), à

l'intérieur d'un cylindre vertical avec différents rapports d'aspect. Les résultats ont montré qu'avant le début de l'évaporation, la stratification est plus prononcée dans les réservoirs à grand rapport d'aspect, cependant, lorsque l'évaporation de surface a lieu, le phénomène de stratification est réduit.

Roh and Son (2012) ont étudié numériquement la convection naturelle du GNL dans un réservoir de stockage au moyen du solveur de volumes finis, FLUENT. Ils ont considéré le modèle de turbulence  $k-\varepsilon$  pour des  $Ra$  élevés ; cependant, la convection de Marangoni et l'effet de refroidissement dû à l'évaporation à l'interface ont été négligés. Les auteurs ont imposé une température constante à l'interface égale à la température de saturation. Leurs résultats ont montré que le taux de BOG et le transfert de chaleur à l'interface sont indépendants de la surface de l'interface et dépendent fortement de la surface de contact solide-liquide. Dans un deuxième article, Roh et al. (2013) ont étudié l'effet de la pression de la phase vapeur sur le taux de génération de BOG et le transfert de chaleur en considérant un modèle transitoire. Les résultats ont montré que le taux de BOG peut être réduit en augmentant la pression soit progressivement, soit par une pressurisation brusque.

Choi et al. (2017) Choi et al. (2017) ont utilisé le modèle de mélange (liquide-vapeur) pour analyser numériquement la convection naturelle dans un réservoir cryogénique de 4,9m<sup>3</sup>. Deux gaz liquéfiés ont été considérés, le gaz naturel et l'azote. Différents niveaux de remplissage et flux de chaleur externe ont été analysés afin de comprendre l'effet de la convection sur la stratification du liquide. Dans leur étude, les auteurs ont négligé la convection thermo-capillaire, et les résultats ont montré qu'une mauvaise isolation et un faible niveau de remplissage augmentent le taux de génération de BOG.

Zakaria et al. (2017) se sont intéressés aux phénomènes de renversement dans les grands réservoirs de stockage de GNL. À l'aide d'un code CFD, les auteurs ont modélisé le taux d'ébullition à l'interface en utilisant la condition limite de Hashemi-Wesson à l'interface (Hashemi and Wesson, 1971). Les résultats ont montré qu'une ébullition lente conduit à une stratification du liquide et donc au phénomène de renversement, ce qui confirme la théorie de Bashiri and Fatehnejad (2006).

Dans (Haddar et al., 2019, Haddar et al., 2020), les auteurs ont proposé d'ajouter un système de refroidissement de cloisons à l'intérieur des réservoirs de GNL afin d'absorber

la perte de chaleur dans l'environnement et de réduire ainsi le taux de BOG. Par le biais d'une étude numérique, les auteurs ont montré que l'utilisation de six déflecteurs verticaux générerait un meilleur transfert de chaleur. Wang et al. (2021) ont étudié les effets de l'ajout de cloisons sur le processus d'évolution de la stratification au renversement. Les résultats ont montré que les déflecteurs influencent l'intensité du renversement et non le temps d'apparition.

Hubert et al. (2019) ont développé un code numérique pour étudier le comportement dynamique du GNL dans un réservoir de stockage. Le modèle de turbulence  $k-\varepsilon$  avec prise en compte des effets de flottabilité a été utilisé, tandis que l'évaporation à l'interface a été modélisée à l'aide de la condition aux limites de Hashemi-Wesson (Hashemi and Wesson, 1971). Les résultats ont montré le potentiel du code et la possibilité qu'il offre d'être adapté à des géométries complexes. Wang et al. (2020) ont analysé les effets des vibrations et des pertes de chaleur sur le BOG du camion-citerne de GNL pendant le transport. Il a été constaté que les BOG provenant des pertes de chaleur sont beaucoup plus importants que ceux induits par les vibrations du transport. Wu and Ju (2021) ont mené une étude CFD sur les effets du remous sur la génération de BOG dans une citerne de type C. Il a été constaté que le remous pendant le transport maritime favorise la production de BOG. Wang et al. (2022) ont développé un modèle thermodynamique multicouche pour étudier les phénomènes de renversement et de stratification dans les réservoirs de GNL. Le modèle montre une bonne précision dans la prédiction du renversement avec un temps de calcul efficace.

## 1.5 Epilogue

L'étude des effets combinés de la convection naturelle, la thermo-capillarité et l'évaporation d'un fluide contenu dans un réservoir cylindrique est importante compte tenu de ses implications industrielles telles que le stockage cryogénique du GNL. À notre connaissance, Kozhevnikov and Sheremet (2018) ont été les premiers à considérer le cas de la convection naturelle avec évaporation de surface et effet thermo-capillaire dans une cavité cylindrique. Les auteurs ont formulé le problème sous forme adimensionnelle en termes de vorticité et de fonction de courant, tandis que la solution a été obtenue au moyen de la méthode des différences finies du second ordre. Bien que la solution qu'ils ont proposée approxime bien le transfert de chaleur et le comportement fluide dans une

cavité dont le rapport d'aspect ( $R/H$ ) est inférieur ou égal à 1, elle ne parvient pas à prédire la réponse thermique pour les cavités dont le  $R/H$  est supérieur à 1. Les auteurs ont déclaré qu'un grand rapport d'aspect n'a aucun effet sur l'écoulement et le transfert de chaleur, ce qui est incorrect comme nous le verrons plus loin dans la section 3.5.2.2 et le Chapitre 4 (figure 4.3).

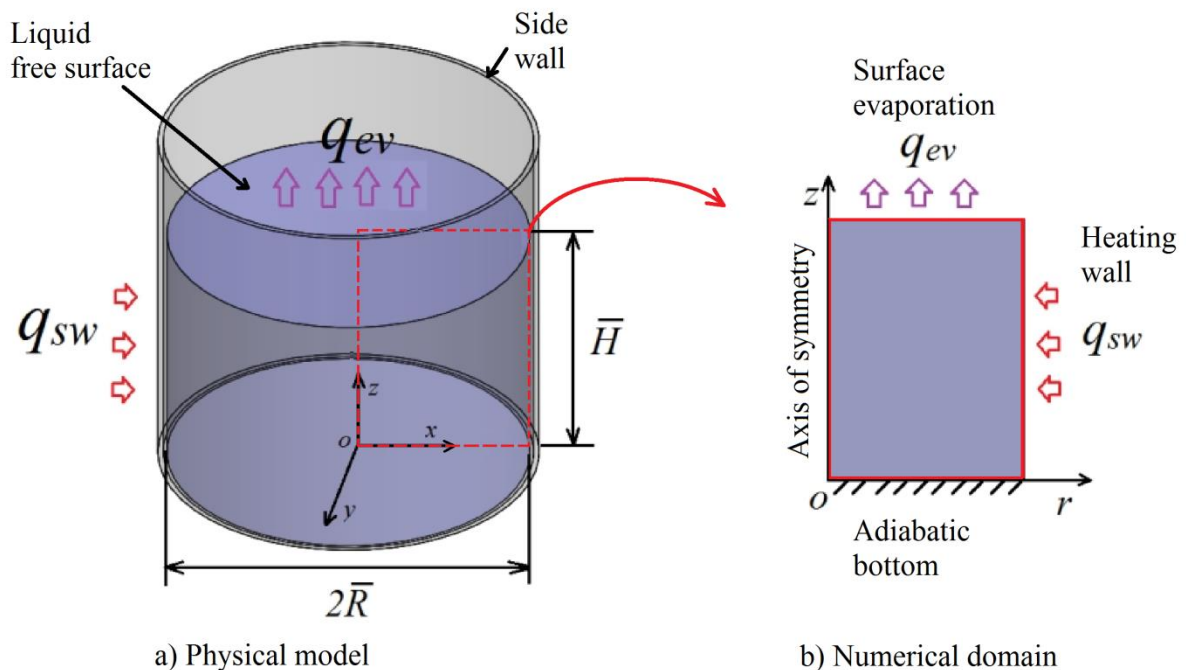
Dans cette thèse, nous étudions numériquement les effets des pertes de chaleur sur le transfert thermique, l'évaporation de surface et la dynamique d'écoulement d'un gaz liquéfié stocké dans un réservoir cylindrique cryogénique partiellement rempli, tout en tenant compte de la thermo-capillarité. La solution est présentée ici sous une forme adimensionnelle; elle peut donc être mise à l'échelle pour tout système physique équivalent. La nouveauté ici est que les taux d'évaporation de surface et de transfert de chaleur ont été corrélés sous forme de formules empiriques simples au moyen du nombre de Nusselt. Ils peuvent donc être facilement utilisés par les ingénieurs dans le processus de conception des réservoirs cryogéniques et le contrôle du fonctionnement plus tard.

# Chapitre 2 – Modélisation

## Mathématique

### 2.1 Introduction

Lorsqu'un gaz est liquéfié, il perd sa compressibilité, ainsi sa densité devient indépendante de la pression et de la température et offre la possibilité de stocker une grande quantité dans un volume réduit à la pression atmosphérique. Dans ce but, des réservoirs cryogéniques sont utilisés pour contenir le gaz en phase liquide à basse température. Habituellement, les réservoirs ne sont pas parfaitement isolés et en raison du gradient de température important entre le milieu environnant et le fluide sous-refroidi, une petite quantité de chaleur peut fuir vers le fluide à partir de la paroi latérale par différents moyens de transfert thermique



**Figure 2. 1** Schéma du modèle physique (à gauche) et du domaine de calcul considéré (à droite).

Pour modéliser le problème physique, nous considérons un récipient cylindrique cryogénique rempli d'un fluide dont le nombre de Prandtl est égal à  $Pr=2$  (Khelifi-



Touhami et al. 2020, Lemembre et Petit,1998), jusqu'à un certain niveau  $\bar{H}$  comme le montre la figure 2.1. Le fluide est soumis à un flux de chauffage de paroi constant  $q_{sw}$ , provenant de la paroi latérale, qui induit : un, une convection due à la flottabilité à l'intérieur du récipient, deux, une évaporation du fluide à la surface libre. La masse du fluide qui s'évapore est considérée comme négligeable par rapport à la masse totale du fluide (le niveau du fluide est constant) ; cependant, la quantité de chaleur absorbée pendant le processus de changement de phase est prise en compte. Dans ce cas, on suppose que le fluide se refroidit à la surface libre supérieure avec un flux de chaleur constant  $q_{ev}$ . En pratique, la quantité de chaleur qui s'échappe est très faible et varie de 10 à 100 W/m<sup>2</sup>, le fluide se déplace donc à une vitesse relativement lente. (Wang et al., 2021). Par conséquent, l'écoulement induit par la tension de surface à la surface libre ne peut être négligé. Dans la présente étude, la tension de surface est supposée varier linéairement avec la température du fluide. En raison du faible taux de chauffage, toutes les autres propriétés thermo-physiques sont supposées être constantes et thermo-indépendantes, à l'exception de la densité ou l'approximation de Boussinesq est considérée. L'écoulement est symétrique par rapport à l'axe z et quasi-stationnaire, il peut être réduit à une étude bidimensionnelle en coordonnées cylindriques (voir Fig. 2.1)

## 2.2 Les équations gouvernantes

Les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie peuvent être écrites comme suit, respectivement (Kozhevnikov et Sheremet, 2018, Lemembre et Petit, 1998) :

$$\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) \quad (2.2)$$

$$u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - g\beta(T - T_0) \quad (2.3)$$

$$u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.4)$$

où  $u_r$  et  $u_z$  sont les vitesses dans les directions  $r$  (radiale) et  $z$  (axiale), et  $T$  est la température. Le dernier terme de l'équation (2.3) est l'approximation de Boussinesq où  $\beta$  est le coefficient de dilatation thermique.

### 2.2.1 Les conditions aux limites

Les équations directrices précédentes doivent être résolues sous l'influence d'un chauffage de la paroi latérale, d'un fond adiabatique et d'un processus de refroidissement dû à l'évaporation avec la prise en compte de la thermo-capillarité à la surface libre supérieure. L'ensemble des conditions aux limites est défini comme suit ;

- A l'axe central ( $r=0$ ), l'écoulement est axial, donc il annule la vitesse radiale, et symétrique, donc il nécessite deux conditions de symétrie. Les conditions aux limites requises sont définies comme l'écoulement, respectivement (Shah et London, 1978a)

$$u_r = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (2.5)$$

- Au niveau de la paroi latérale ( $r = \bar{R}$ ), on applique une condition d'absence de glissement pour les vitesses, et un flux thermique constant, respectivement (Shah et London, 1978a)

$$u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = q_{sw} \quad (2.6)$$

- Au niveau de la paroi du fond ( $z = 0$ ), on suppose qu'il n'y a pas de condition de glissement pour les vitesses et que la paroi est adiabatique. Les conditions aux limites sont données comme suit, respectivement (Shah et London, 1978a)

$$u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

- Au niveau de la surface libre supérieure ( $z = \bar{H}$ ), la vitesse radiale est régie par la thermo-capillarité, la vitesse axiale s'annule en raison de l'écoulement induit par la tension de surface, et un flux de chaleur de refroidissement constant dû à

l'évaporation est pris en considération. Les conditions aux limites associées à ces hypothèses sont, respectivement (Shah et London, 1978a, Velarde, 2002) :

$$\mu \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad u_z = 0, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = q_{ev} \quad (2.8)$$

Ici,  $\sigma$  est la tension de surface. Le flux thermique d'évaporation  $q_{ev}$  est évalué selon le modèle d'ébullition de Hashemi- Wesson (Hashemi et Wesson, 1971). Ce modèle a été validé par (Doyer et al., 1998) et il a été largement utilisé dans la littérature pour modéliser le BOG dans les réservoirs de stockage de GNL. (Hubert et al., 2019, Saleem et al., 2020, Hasan et al., 2009, Deshpande et al., 2011, Maeda et al., 2007). Le taux de BOG  $\dot{m}$  s'écrit comme suit :

$$\dot{m} = C \frac{\lambda}{L} \left( \frac{g\beta}{\alpha\nu} \right)^{1/3} (T - T_{sat})^{4/3} \quad (2.9)$$

Avec une constante  $C = 0,328$  (Hubert et al., 2019). En multipliant l'équation (2.9) avec la chaleur latente,  $L$ , il est possible de dériver le flux de chaleur d'évaporation  $q_{ev}$  :

$$q_{ev} = L\dot{m} = C\lambda \left( \frac{g\beta}{\alpha\nu} \right)^{1/3} (T - T_{sat})^{4/3} \quad (2.10)$$

## 2.3 Adimensionnalisation du système d'équations

### 2.3.1 Nombres sans dimensions

Les nombres adimensionnels minimisent le nombre de variables qui décrivent un système donné, réduisant ainsi la quantité de données de simulation nécessaires pour corréler le système physique. (Fatoyinho, 2013). Pour faciliter la résolution numérique et obtenir une solution générale représentative, le problème précédent est redéfini sous forme adimensionnelle en utilisant les paramètres adimensionnels suivants. (Shah et London, 1978b) :

- Les coordonnées et les vitesses sans dimension :

$$R = \frac{r}{H}, \quad Z = \frac{z}{H} \quad (2.11)$$

$$U_R = \frac{u_r}{\sqrt{g\beta\phi\bar{H}}}, U_Z = \frac{u_z}{\sqrt{g\beta\phi\bar{H}}}, \text{ avec } \phi = \frac{q_{sw}\bar{H}}{\lambda} \quad (2.12)$$

IL s'agit ici d'un coefficient  $\phi$  utilisé pour la clarté de la présentation et pour éviter d'encombrer les formules sans dimension, et il est dépourvu de toute signification physique pertinente.

- La pression et la température sans dimension :

$$P = \frac{P}{\rho g \beta \phi \bar{H}} \quad (2.13)$$

$$\theta = \frac{(T - T_0)}{\phi} \quad (2.14)$$

- Le nombre de Rayleigh, le nombre de Marangoni, le nombre de Prandtl et le rapport d'aspect s'écrivent respectivement comme suit ;

$$Ra = \frac{g\beta\phi\bar{H}^3}{\alpha\nu}, Ma = -\frac{\partial\sigma}{\partial T} \frac{\phi\bar{H}}{\rho\alpha\nu}, Pr = \frac{\nu}{\alpha}, AR = \frac{\bar{R}}{\bar{H}} \quad (2.15)$$

### 2.3.2 Equations régissantes et conditions aux limites adimensionnelles

En introduisant les paramètres sans dimension ci-dessus (Eqs.2.11-2.15), les équations directrices définies par les équations (2.1-2.4) peuvent être écrites sous forme adimensionnées comme suit :

L'équation de continuité :

$$\frac{U_R}{R} + \frac{\partial U_R}{\partial R} + \frac{\partial U_Z}{\partial Z} = 0 \quad (2.16)$$

Les équations de quantités de mouvement:

$$U_R \frac{\partial U_R}{\partial R} + U_Z \frac{\partial U_R}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left( \frac{\partial^2 U_R}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 U_R}{\partial Z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_R}{\partial R} - \frac{U_R}{R^2} \right) \quad (2.17)$$

$$U_R \frac{\partial U_Z}{\partial R} + U_Z \frac{\partial U_Z}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left( \frac{\partial^2 U_Z}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 U_Z}{\partial Z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_Z}{\partial R} \right) - \theta \quad (2.18)$$

Et l'équation de l'énergie:

$$U_R \frac{\partial \theta}{\partial R} + U_Z \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Pr Ra}}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \quad (2.19)$$

De même, les conditions aux limites définies par les équations (2.5-2.9), sont réécrites sous forme adimensionnelles en utilisant les paramètres précédents donnés par les équations (2.11-2.15), donc elles sont exprimées comme :

Sur l'axe central ( $R = 0$ )

$$U_R = 0, \quad \frac{\partial U_Z}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad (2.20)$$

Au niveau de la paroi latérale ( $R = AR$ )

$$U_R = 0, \quad U_Z = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} = 1 \quad (2.21)$$

Sur la paroi inférieure ( $Z = 0$ )

$$U_R = 0, \quad U_Z = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0 \quad (2.22)$$

et à la surface libre supérieure ( $Z = 1$ )

$$\frac{\partial U_R}{\partial Z} = -\frac{Ma}{\sqrt{\text{Pr Ra}}} \frac{\partial \theta}{\partial R}, \quad U_Z = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z} = Q_{ev} \quad (2.23)$$

Ici,  $Q_{ev}$  est le flux thermique d'évaporation sans dimension, et il est défini comme suit :

$$\begin{cases} Q_{ev} = -c \cdot Ra^{1/3} \cdot \theta^{4/3}, & \text{if } \theta > 0 \\ Q_{ev} = 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Ou  $c = 0.13$  (Khelifi-Touhami et al., 2010, Kozhevnikov and Sheremet, 2018).

## 2.4 Paramètres d'analyse thermique

Pour l'analyse du transfert de chaleur, la température globale et la température moyenne de la paroi latérale, sous forme sans dimension, sont calculées comme suit :

$$\Theta_b = \frac{2}{AR^2} \int_0^1 \int_0^{AR} \theta(R, Z) R dR dZ \quad (2.25)$$

$$\Theta_{sw} = \int_0^1 \theta(R = AR, Z) dZ \quad (2.26)$$

Le nombre de Nusselt moyen sur la paroi latérale est donné par (Khelifi-Touhami et al., 2010):

$$Nu_{sw} = \frac{2 \cdot AR}{\Theta_{sw} - \Theta_b} \quad (2.27)$$

Le flux thermique moyen est évalué par l'équation suivante :

$$Q_{ev(av)} = c \cdot Ra^{1/3} \int_0^{AR} \theta(R, Z = 1)^{4/3} R dR \quad (2.28)$$

Pour une meilleure quantification et analyse du processus d'évaporation, il est intéressant de calculer le nombre de Nusselt de la surface libre donné par (Khelifi et al., 2010) :

$$Nu_{fs} = \frac{2 \cdot AR \cdot c \cdot Ra^{1/3}}{\Theta_{sw} - \Theta_b} \int_0^{AR} \theta(R, Z = 1)^{4/3} R dR = Q_{ev(av)} \cdot Nu_{sw} \quad (2.29)$$

## 2.5 Conclusion

La mise en équation des phénomènes physiques est un outil établi en ingénierie pour étudier les problèmes d'interaction complexes. Ce chapitre fournit un exposé général des différents aspects de cette modélisation physique. La première étape consiste à la formulation des équations de mouvements et de transfert de chaleur ainsi que les différentes conditions aux limites, tous en respectant les hypothèses et les phénomènes associées à notre problème. Dans la seconde, une procédure d'adimensionnalisation a été suivie, en considérant des paramètres sans dimensions, et ceci dans le but de : un, réduire le nombre des paramètres intervenants dans la résolution numérique, deux, obtenir une solution plus générale et plus représentatives des cas réels existant dans l'industrie.



# Chapitre 3 – Résolution Numérique

## 3.1 Introduction

Les équations de conservation régissant le problème de la convection naturelle et thermo-capillaire sont des équations aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques et couplées. Ces équations sont résolues par des modèles numériques. Nous pouvons citer les modèles suivant leur ordre croissant d'utilisation dans la littérature : La méthode des différences finies, la méthode des volumes finis, la méthode des éléments finis, la méthode de Lattice Boltzmann.

Nous utilisons la méthode des volumes finis développée par (Patankar,1980,2018, Versteeg Malalasekera, 1995) pour résoudre les équations gouvernantes du chapitre 2. Cette méthode est construite à partir d'une formulation intégrale basée directement sur la forme forte des équations à résoudre. Les intégrales ne portent pas sur tout le domaine dans lequel sont posées les équations, mais sur des cellules disjointes ou décalées appelées volumes de contrôles. Dans cette méthode les termes de divergences apparaissant dans les équations gouvernantes à résoudre sont traités en utilisant le théorème de divergence. Ainsi les intégrales de volumes d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surfaces. Ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes de contrôle et les flux aux interfaces sont approchées par une fonction de flux numérique.

## 3.2 Principe de la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis s'applique à l'intérieur d'un domaine de calcul sur un ensemble ou une grille de point appelés nœuds. Chaque nœud est entouré par un volume élémentaire sur lequel nous allons intégrer les équations gouvernantes aux dérivées partielles (fig. 3.1). Pour deux points voisins, les volumes de contrôle respectifs doivent posséder un coté commun. La réunion de tous les volumes de contrôle va couvrir tout le domaine de calcul.



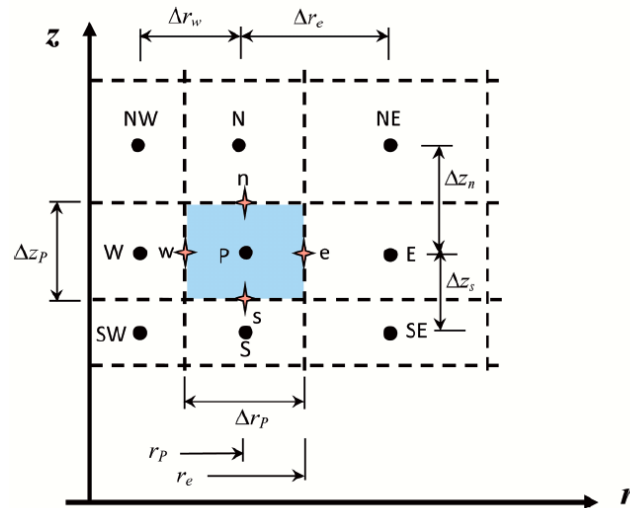


Figure 3. 1 Discrétisation d'un domaine en volumes de contrôles

Pour créer le maillage ou le réseau de points et leurs volumes de contrôles associés, nous devons définir d'abord la grille de points, puis placer les faces des volumes à mi-distance de deux nœuds consécutifs (figure 3.1). Cette procédure convient pour notre cas, car le maillage est uniforme.

### 3.3 Application de la méthode des volumes finis

#### 3.3.1 Discrétisation des équations de continuité, de transport et d'énergie

Nous observons que les équations de continuité, de transport et d'énergie régissant la convection naturelle s'écrivent sous la forme suivante :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ Ru\phi - R\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right] + \frac{\partial}{\partial R} \left[ u\phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right] = S_{\phi} \quad (3.1)$$

Avec  $\phi$  prenant les valeurs  $1, U_R, U_Z, \theta$  respectivement. Nous posons :

$$J_R = Ru\phi - R\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial R} \quad (3.2)$$

et

$$J_Z = U\phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \quad (3.3)$$

ou :

$$\mathbf{J} = J_R \vec{i} + J_Z \vec{j} \quad (3.4)$$

Nous avons

$$\nabla = \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial Z} \vec{j} \right) \quad (3.5)$$

L'équation (3.1) s'écrit sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = S_\phi \quad (3.6)$$

Nous intégrons l'équation (3.6) sur un élément de volume en supposant que :

- La température est uniforme à travers le volume de contrôle.
- Pour une position radiale  $R$ , de même qu'une position axiale  $Z$ , le flux est uniforme le long de la face correspondante.
- Le terme source  $S_\phi$  est supposé uniforme sur le volume de contrôle.

$$\iiint_{vol} \nabla \mathbf{J} \cdot dvol = \iiint_{vol} S_\phi \cdot dvol \quad (3.7)$$

En appliquant le théorème de divergence, nous obtenons pour le premier terme de l'équation (3.7) :

$$\iiint_{vol} \nabla \mathbf{J} \cdot dvol = 2\pi \iint_A \left( \frac{1}{R} \frac{\partial J_R}{\partial R} + \frac{\partial J_Z}{\partial Z} \right) dA \quad (3.8)$$

avec :  $dA = R \cdot dR \cdot dZ$

De même pour l'intégrale du terme source sur le volume de contrôle :

$$\iiint_{vol} S_\phi \cdot dvol = 2\pi \iint_A S_\phi \cdot R \cdot dR \cdot dZ \quad (3.9)$$

D'où l'égalité des équations (3.8) et (3.9) :

$$2\pi \iint_A \left( \frac{1}{R} \frac{\partial J_R}{\partial R} + \frac{\partial J_Z}{\partial Z} \right) dA = 2\pi \iint_A S_\phi \cdot R \cdot dR \cdot dZ \quad (3.10)$$

Ce qui donne :

$$\iint_A \left( \frac{1}{R} \frac{\partial J_R}{\partial R} + \frac{\partial J_Z}{\partial Z} \right) dA = \iint_A S_\phi \cdot R \cdot dR \cdot dZ \quad (3.11)$$

Nous développons le premier terme de l'équation (3.11) en l'intégrant :

$$\begin{aligned} \iint_A \left( \frac{1}{R} \frac{\partial J_R}{\partial R} + \frac{\partial J_Z}{\partial Z} \right) dA &= \int_s^e \left( \int_w^n \left( \frac{\partial J_R}{\partial R} \right) \cdot dR \right) \cdot dZ + \int_w^n \left( \int_s^e \left( \frac{\partial J_Z}{\partial Z} \right) \cdot dZ \right) \cdot R \cdot dR \\ \Leftrightarrow \cdot &= \int_s^e [J_R]_w^e dZ + \int_w^n [J_Z]_s^n R \cdot dR = (J_{Re} \cdot A_e + J_{Rw} \cdot A_w) + (J_{Zn} - J_{Zs}) \left( \frac{R^2}{2} \right)_w^e \\ &= (J_{Re} \cdot A_e + J_{Rw} \cdot A_w) + (J_{Zn} \cdot A_n + J_{Zs} \cdot A_s) \left( \frac{R_e + R_w}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Avec  $A_e = dZ$ ,  $A_w = -dZ$ ,  $A_n = dR$ ,  $A_s = -dR$  (figure 3.2)

$$\begin{aligned} J_{Re} &= \left( RU\phi - R \cdot \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_e, & J_{Rw} &= \left( RU\phi - R \cdot \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_w \\ J_{Zn} &= \left( U\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_n R_m, & J_{Zs} &= \left( U\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_s R_m \\ R_m &= \frac{R_e + R_w}{2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

On pose:

$$\begin{aligned} J_e = J_{Re} A_e &= \left( RU\phi - R \cdot \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_e dZ, & J_w = J_{Rw} A_w &= - \left( RU\phi - R \cdot \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_w dZ \\ J_n = J_{Zn} A_n &= \left( U\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_n R_m \cdot dR, & J_s = J_{Zs} A_s &= - \left( U\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_s R_m \cdot dR \end{aligned} \quad (3.14)$$

De même, l'intégration du terme source est effectuée en supposant que  $S_\phi$  est uniforme sur le volume de contrôle :

$$\iint_A S_\phi \cdot R \cdot dR \cdot dZ = \overline{S_\phi} \cdot \left( \frac{R^2}{2} \right)_w^e dZ = \overline{S_\phi} \cdot \frac{(R_e^2 - R_w^2)}{2} dZ = \overline{S_\phi} \cdot R_m \cdot dR \cdot dZ \quad (3.15)$$

En égalisant le premier et le second terme de l'intégrale, nous obtenons la relation :

$$J_e + J_w + J_n + J_s = \overline{S_\phi} \cdot R_m \cdot dR \cdot dZ \quad (3.16)$$

Le terme source obtenu  $\overline{S_\phi}$  est approximé par la forme linéaire suivante :

$$\overline{S_\phi} = S_c + S_p \phi \quad (3.17)$$

Les dérivées premières de  $\phi$  aux nœuds s'écrivent :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial R} \right|_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{dR_e} & \left. \frac{\partial \phi}{\partial R} \right|_w &= \frac{\phi_P - \phi_W}{dR_w} \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right|_n &= \frac{\phi_N - \phi_P}{dZ_n} & \left. \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right|_s &= \frac{\phi_P - \phi_S}{dZ_s} \end{aligned} \quad (3.18)$$

En remplaçant ces dérivées premières dans l'équation (3.16) nous obtenons les termes de convection, de diffusion et de flux total représentés par les notations F, D et P respectivement.

Les termes  $F_k$  ( $k = e, w, n, s$ ), et  $D_k$  ( $k = e, w, n, s$ ) sont donnés par les expressions suivantes :

$$F_e = U_{Re} R_e \cdot dZ; \quad F_w = U_{Rw} R_w \cdot dZ; \quad F_n = U_{Zn} R_n \cdot dR; \quad F_s = U_{Zs} R_s \cdot dR \quad (3.19)$$

$$D_e = \Gamma_{\phi e} \frac{dZ \cdot R_e}{dR_e}; \quad D_w = \Gamma_{\phi w} \frac{dZ \cdot R_w}{dR_w}; \quad D_n = \Gamma_{\phi n} \frac{dR \cdot R_n}{dZ_n}; \quad D_s = \Gamma_{\phi s} \frac{dR \cdot R_s}{dZ_s} \quad (3.20)$$

Alors que les termes  $P_k$  ( $k = e, w, n, s$ ), rapport de transfert par convection au transfert par diffusion sont représentés par les expressions suivantes :

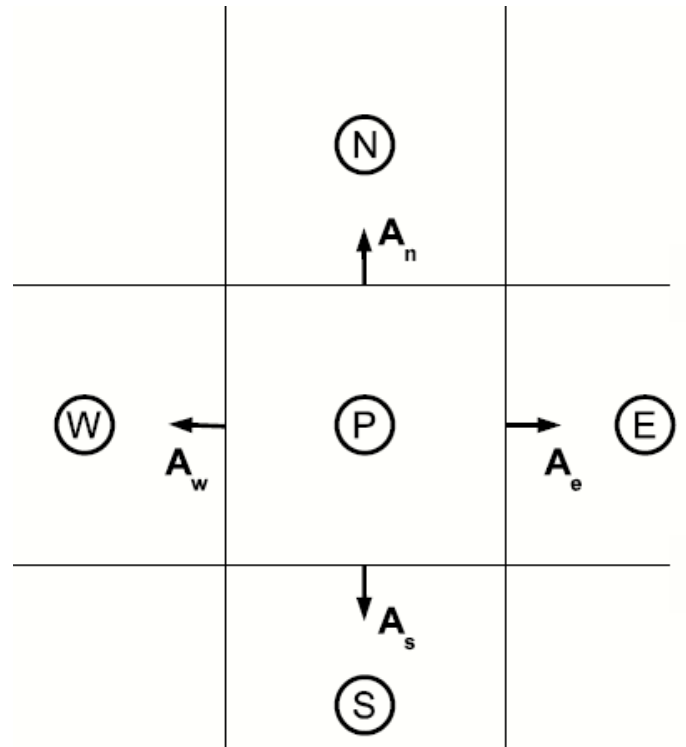
$$P_e = \frac{F_e}{D_e}; \quad P_w = \frac{F_w}{D_w}; \quad P_n = \frac{F_n}{D_n}; \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (3.21)$$

En remplaçant  $\phi$  par 1 et  $S_\phi$  par 0 dans l'équation (3.1), nous obtenons l'équation de continuité. En l'intégrant sur le volume de contrôle (figure 3.2), nous aurons l'équation suivante :

$$(F_e - F_w) + (F_n - F_s) = 0 \quad (3.22)$$

En la multipliant par  $\phi_P$ , elle devient :

$$(F_e - F_w) \phi_P + (F_n - F_s) \phi_P = 0 \quad (3.23)$$



**Figure 3. 2** Volume de contrôle correspondant à l'équation de continuité

En soustrayant l'équation (3.23) de l'équation (3.16), nous aurons:

$$(J_e - F_e \phi_P) + (J_w + F_w \phi_P) + (J_n - F_n \phi_P) + (J_s + F_s \phi_P) = \overline{S_\phi} \cdot R_m \cdot dR \cdot dZ \quad (3.24)$$

En remplaçant les différents termes constituant l'équation (3.16), nous obtenons la relation suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (3.25)$$

Ou encore

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (3.26)$$

$$b = S_c \quad (3.27)$$

Ou l'indice nb désigne un nœud voisin.

Les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_E &= D_e * A(|P_e|) + \|-F_e, 0\|; & a_W &= D_w * A(|P_w|) + \|\+F_w, 0\| \\ a_N &= D_n * A(|P_n|) + \|-F_n, 0\|; & a_S &= D_s * A(|P_s|) + \|\+F_s, 0\| \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + F_e - F_w + F_n - F_s - S_p \cdot R_m \cdot dR \cdot dZ \quad (3.29)$$

Les coefficients  $a_K$  ( $K = E, W, N, S$ ) représentent l'influence de la convection et de la diffusion aux différentes faces du volume de contrôle. En termes de débit massique  $F_k$  ( $k = e, w, n, s$ ) et de conductance thermique  $D_k$  ( $k = e, w, n, s$ ).

### 3.3.2 Application à l'équation de mouvement suivant l'axe radial

Nous explicitons les coefficients obtenus par la méthode des volumes finis, pour l'équation de mouvement radiale. Les coefficients  $F_k$  ( $k = e, w, n, s$ ),  $D_k$  ( $k = e, w, n, s$ ),  $a_K$  ( $K = E, W, N, S, P$ ),  $S_C$  et  $S_p$  sont explicités comme suit :

$$a_p U_p = a_w U_w + a_E U_E + a_S U_S + a_N U_N + S_C$$

avec 
$$S_C = -(P_{i,j} - P_{i-1,j}) * R_i * dZ \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} F_e &= \left( \frac{(U_R)_{i,j} + (U_R)_{i+1,j}}{2} \right) R_{i+\frac{1}{2}} \cdot dZ; & F_w &= \left( \frac{(U_R)_{i,j} + (U_R)_{i-1,j}}{2} \right) R_{i-\frac{1}{2}} \cdot dZ; \\ F_n &= \left( \frac{(U_Z)_{i,j} + (U_Z)_{i-1,j}}{2} \right) R_i \cdot dR; & F_s &= \left( \frac{(U_Z)_{i,j-1} + (U_Z)_{i-1,j-1}}{2} \right) R_i \cdot dR \end{aligned} \quad (3.31)$$

Avec 
$$R_{i\pm\frac{1}{2}} = R_i \pm \frac{dR}{2}$$

$$D_e = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} R_{i+\frac{1}{2}} \frac{dZ}{dR}; \quad D_w = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} R_{i-\frac{1}{2}} \frac{dZ}{dR}; \quad D_n = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} R_i \frac{dR}{dZ} = D_s \quad (3.32)$$

$$Pe_e = \frac{F_e}{D_e}; \quad Pe_w = \frac{F_w}{D_w}; \quad Pe_n = \frac{F_n}{D_n}; \quad Pe_s = \frac{F_s}{D_s}$$

$$\begin{aligned} a_E &= D_e * \max(0., (1. - 0.1 * \text{abs}(Pe_e)) ** 5) + \max(0., -F_e); \\ a_W &= D_w * \max(0., (1. - 0.1 * \text{abs}(Pe_w)) ** 5) + \max(0., F_w); \\ a_N &= D_n * \max(0., (1. - 0.1 * \text{abs}(Pe_n)) ** 5) + \max(0., -F_n); \\ a_S &= D_s * \max(0., (1. - 0.1 * \text{abs}(Pe_s)) ** 5) + \max(0., F_s) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Avec :

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + F_e - F_w + F_n - F_s - S_p R_i dRdZ \text{ avec } S_p = -\frac{(U_R)_{i,j}}{R_i^2}. \quad (3.34)$$

Ces coefficients sont obtenus conformément à la figure 3.3 (gauche).

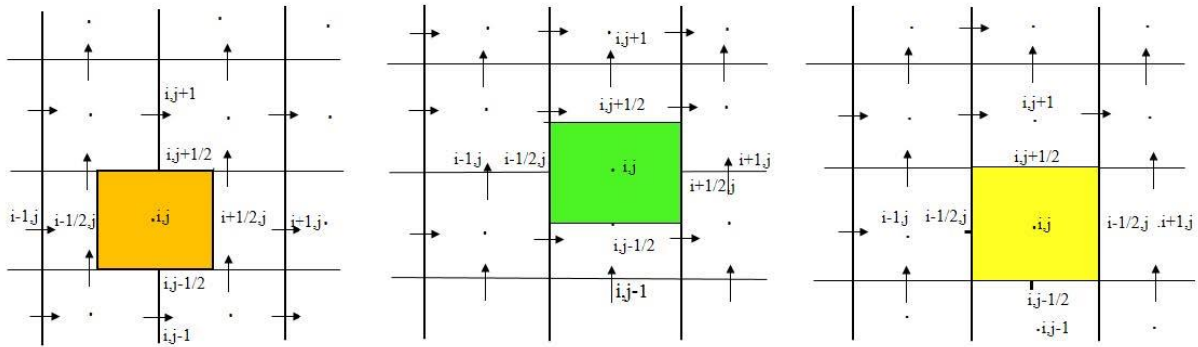


Figure 3.3 Volume de contrôle correspondant à  $U_R$  (à gauche),  $U_Z$  (au centre), la pression  $P$  à droite

Nous nous intéressons aux divers schémas représentant les termes de la convection et de la diffusion.

### 3.3.3 Schémas d'approximation

Plusieurs schémas d'approximation peuvent être associés à cette formulation généralisée de  $\phi$ . En effet selon la nécessité du problème posé, nous pouvons lui affecter un schéma d'approximation : Centré, Upwind, hybride, loi de puissance ou exponentiel. Ces schémas sont définis par les expressions de la fonction  $A(|P_m|)$  regroupées dans le tableau 3.1.

Dans le présent travail, nous avons testé trois schémas : le schéma centré, Upwind et celui de loi de puissance. La précision des calculs étant pratiquement identique. Nous avons opté pour le schéma de loi de puissance car plus économique en temps de calcul et en itérations.

**Tableau 3. 1** Expressions de la fonction  $A(|P_m|)$ 

Schéma	Expression de la fonction $A( P_m )$
Centré	$1-0.5 P_m $
Upwind	1
Hybride	$\ 0,1-0.5 P_m \ $
Loi de puissance	$\ 0,(1-0.1 P_m )^5\ $
Exponentiel (exact)	$\frac{ P_m }{(\exp( P_m )-1)}$

### 3.3.4 Linéarisation du terme source

Les termes sources sont généralement non linéaires et dépendent de la variable  $\phi$ . Pour cela il est utile de les linéariser afin d'avoir une écriture homogène avec les systèmes linéaires associés à la méthode des volumes finis. Le terme source  $\overline{S_\phi}(\phi = u, v, T \dots)$  est linéarisé sous la forme ;

$$\overline{S_\phi} = S_c + S_p \phi \quad (3.35)$$

Les expressions de  $S_c$  et  $S_p$  peuvent elles-mêmes être fonction de  $\phi$ . Le Tableau 3.2 résume les expressions de  $S_c$  et  $S_p$  pour l'ensemble des équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie :

**Tableau 3. 2** Le terme source linéarisé pour toutes les équations

Equation	$S_c$	$S_p$
De continuité	0	0
De quantité de mouvement selon R	$-\frac{\partial P}{\partial R}$	$-\frac{\Gamma_\phi}{R^2}$
De quantité de mouvement selon Z	$-\frac{\partial P}{\partial Z} + \theta$	0
D'énergie	0	0



### 3.3.5 Algorithme de résolution du couplage vitesse-pression

Une grille décalée est choisie où les vitesses sont positionnées au centre des faces (Figure 3.4), les pressions au centre des volumes et les températures aux sommets du volume de contrôle élémentaire.

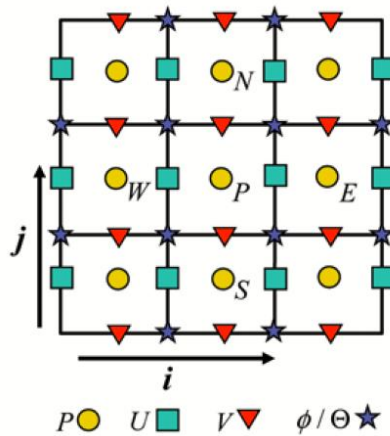


Figure 3. 4 Disposition dans le domaine d'étude des vitesse radiale  $U_R$  (carré bleu), axiale  $U_z$  (triangle rouge), de la pression  $P$  (cercle jaune) et de la température  $\theta (= \phi_{ij})$  (étoile bleue)

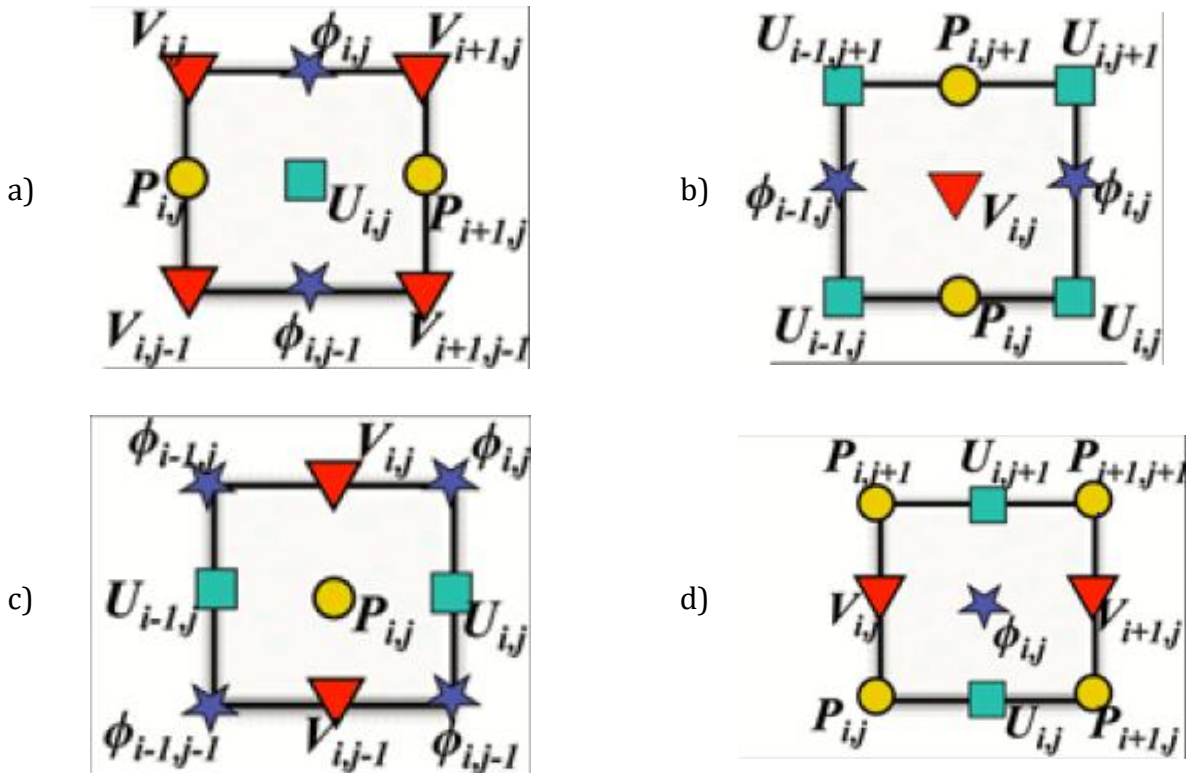


Figure 3. 5 Volume de contrôle correspondant à  $U_R$  (a),  $U_z$  (b), la pression  $P$  (c), et la température  $\theta (= \phi_{ij})$  (d) ainsi que la disposition de ces variables dans chaque volume de contrôle.

Chaque composante de la vitesse est décalée suivant sa propre direction (Figure 3.5a) pour  $U_R$  et (figure 3.5b) pour  $U_Z$ . L'intégration des deux équations de quantité de mouvement suivant les directions R et Z, ou  $\phi$  dans l'équation générale correspond respectivement aux vitesses  $U_R$  radiale et  $U_Z$  axiale entraîne le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} a_e(U_R)_e &= \sum_{nb} a_{nb}(U_R)_{nb} + b + (P_P - P_E)A_e \quad (a) \\ a_n(U_Z)_n &= \sum_{nb} a_{nb}(U_Z)_{nb} + b + (P_P - P_N)A_n \quad (b) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$(P_P - P_E)A_e$  : Force de pression agissant sur la face verticale (perpendiculaire à l'axe R) du volume de contrôle de la composante  $U_R$  (Figure 3.5a)

$(P_P - P_N)A_n$  : Force de pression agissant sur la face horizontale (perpendiculaire à l'axe Z) du volume de contrôle de la composante de la vitesse  $U_Z$  (Figure 3.5b)

$A_e$  et  $A_n$  : surfaces sur lesquelles agissent ces forces (figure 3.2).

### 3.3.5.1 Algorithme SIMPLE

Les équations de quantité de mouvement sont couplées entre elles par l'intermédiaire du champ de pression (Eq.3.36). Cette difficulté de couplage vitesse-pression vient de l'absence d'équations explicites qui gouvernent le champ de pression. On utilise ainsi une méthode itérative dont la plus connue est l'algorithme « SIMPLE ».

1. Un champ de pression initial est choisi au départ  $P^*$
2. Un champ de vitesse correspondant est déduit  $\vec{U}^* = U_R^* \cdot \vec{i} + U_Z^* \cdot \vec{j}$ . Ce champ de vitesse ne satisfait pas en générale l'équation de continuité, la pression  $P^*$  doit être corrigée ce qui entraîne l'ajustement de la vitesse  $\vec{U}^*$  de sorte que l'équation de continuité soit satisfaite.

C'est le principe de l'algorithme « SIMPLE ».

### 3.3.5.2 Equation de correction de la vitesse

Soit  $P'$  la correction de la pression,  $U'_R$  et  $U'_Z$  les variations des composantes de vitesses  $U$  et  $V$ . Les champs corrigés de pression et de vitesse peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} P &= P^* + P' & (a) \\ U_R &= U_R^* + U'_R & (b) \\ U_Z &= U_Z^* + U'_Z & (c) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Pour un champ de vitesse  $\overline{U}^*$  résultant d'un champ de pression  $P^*$  le système d'équations (3.25) s'écrit :

$$\begin{cases} a_e U_{Re}^* = \sum_{nb} a_{nb} U_{Rnb}^* + b + (P_P^* - P_E^*) A_e & (a) \\ a_n U_{Zn}^* = \sum_{nb} a_{nb} U_{Znb}^* + b + (P_P^* - P_N^*) A_n & (b) \end{cases} \quad (3.38)$$

En soustrayant l'équation (3.36a) de l'équation (3.38a), on aboutit à :

$$a_e (U_{Re} - U_{Re}^*) = \sum_{nb} a_{nb} (U_{Rnb} - U_{Rnb}^*) + ((P_P - P_P^*) - (P_E - P_E^*)) A_e \quad (3.39)$$

En remplaçant dans l'équation (3.39) les expressions définies dans l'équation (3.37a), l'équation précédente peut s'écrire :

$$a_e U'_{Re} = \sum_{nb} a_{nb} U'_{Rnb} + (P'_P - P'_E) A_e \quad (3.40)$$

En négligeant le terme  $\sum_{nb} a_{nb} U'_{Rnb}$ , l'équation (3.40) se réduit à :

$$a_e U'_{Re} = (P'_P - P'_E) A_e \quad (3.41)$$

D'où

$$U'_{Re} = (P'_P - P'_E) d_e \quad (3.42)$$

Avec 
$$d_e = \frac{A_e}{a_e}$$

L'équation (3.42) s'appelle « formule de correction de la vitesse ». De la même façon on obtient la relation à la composante de la vitesse axiale  $U_Z$ . Ainsi les équations de correction de  $U_R$  et  $U_Z$  aux mailles e et n (figures 3.5a et 3.5b) sont réécrites comme suit :

$$\begin{cases} U_{Re} = U_{Re}^* + (P'_P - P'_E) d_e \\ U_{Zn} = U_{Zn}^* + (P'_P - P'_N) d_n \end{cases} \quad (3.43)$$

Le même raisonnement s'applique pour les vitesses  $U_{Rw}$  et  $U_{Zs}$ .

### 3.3.5.3 Equation de correction de la pression

L'équation de continuité intégrée dans le volume de contrôle représenté par la figure 3.2 s'écrit sous la forme :

$$\left[ (U_R \cdot R)_e - (U_R \cdot R)_w \right] \cdot dZ + \left[ (U_Z)_n - (U_Z)_s \right] \cdot dR \cdot R_m = 0 \quad (3.44)$$

En remplaçant dans l'équation (3.44) les vitesses  $U_{Re}, U_{Rw}, U_{Zn}$  et  $U_{Zs}$  par leur expressions telles que définies dans l'équation (3.43), on aboutit à l'équation de correction de la pression :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad (3.45)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_E &= d_e \cdot dZ \cdot R_e; \quad a_W = d_w \cdot dZ \cdot R_w; \quad a_N = d_n \cdot dR \cdot R_m; \quad a_S = d_s \cdot dR \cdot R_m \\ b &= \left[ (U_R^* \cdot R)_w - (U_R^* \cdot R)_e \right] \cdot dZ + \left[ (U_Z^*)_s - (U_Z^*)_n \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

### 3.3.5.4 Algorithme de calcul sur machine de « SIMPLE »

On peut résumer l'ordre d'exécution des calculs de l'algorithme « SIMPLE » :

1. Introduction des caractéristiques physiques et géométriques du domaine à étudier et construction de la grille décalée pour le champ de vitesse
2. Introduction d'un champ de pression  $P^*$  estimé de départ
3. Calcul du champ de vitesse  $\vec{U}^* = U_R^* \cdot \vec{i} + U_Z^* \cdot \vec{j}$  en résolvant les équations de quantités de mouvement (Eq.3.36)
4. Résolution de l'équation de la pression (Eq.3.45)

5. Calcul du champ de pression corrigée  $P$  en additionnant  $P^*$  à  $P'$  (Eq.3.37a)
6. Calcul du champ de vitesse corrigé  $\vec{U} = U_R \cdot \vec{i} + U_Z \cdot \vec{j}$  en utilisant la correction de pression  $P'$  (Eq.3.43)
7. Résolution de l'équation discrétisée de l'énergie (variable  $\theta$ )
8. La nouvelle pression  $P$  étant affectée à  $P^*$  ( $P^* \leftarrow P$ ) et refaire l'itération à partir de l'étape 3 jusqu'à ce que la convergence soit atteinte.

### 3.3.5.5 Algorithme de calcul SIMPLER

Nous utilisons la version améliorée de SIMPLE désignée par « SIMPLER » qui signifie SIMPLE révisée (Patankar, 1980, 2018, et Versteeg et Malalasekera, 1995)

1. L'équation des quantités de mouvement est écrite sous la forme suivante :

$$(U_R)_e = \frac{\sum_{nb} a_{nb} (U_R)_{nb} + b}{a_e}; (U_Z)_n = \frac{\sum_{nb} a_{nb} (U_Z)_{nb} + b}{a_n} \quad (3.47)$$

2. On résout l'équation de la continuité avec la pression précédente  $P^* \leftarrow P$

$$a_P P_P^* = a_E P_E^* + a_W P_W^* + a_N P_N^* + a_S P_S^* + b$$

$$a_E = d_e \cdot dZ \cdot R_e; \quad a_W = d_w \cdot dZ \cdot R_w; \quad a_N = d_n \cdot dR \cdot R_m; \quad a_S = d_s \cdot dR \cdot R_m \quad (3.48)$$

$$b = \left[ (U_R \cdot R)_w - (U_R \cdot R)_e \right] \cdot dZ + \left[ (U_Z)_s - (U_Z)_n \right]$$

3. On résout les équations de base en intégrant les gradients de pression :

$$\begin{cases} a_e (U_R)_e^* = \sum_{nb} a_{nb} (U_R)_{nb}^* + b + (P_P^* - P_E^*) A_e & (a) \\ a_n (U_Z)_e^* = \sum_{nb} a_{nb} (U_Z)_{nb}^* + b + (P_P^* - P_N^*) A_n & (b) \end{cases} \quad (3.49)$$

A cette étape la pression n'est pas corrigée comme dans l'algorithme « SIMPLE » mais on utilise une seconde fois l'équation de continuité :

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b$$

$$a_E = d_e \cdot dZ \cdot R_e; \quad a_W = d_w \cdot dZ \cdot R_w; \quad a_N = d_n \cdot dR \cdot R_m; \quad a_S = d_s \cdot dR \cdot R_m$$

$$b = \left[ (U_R^* \cdot R)_w - (U_R^* \cdot R)_e \right] \cdot dZ + \left[ (U_Z^*)_s - (U_Z^*)_n \right]$$

- Les vitesses sont corrigées en ajoutant les gradients de la pression de la façon suivante :

$$\begin{cases} (U_R)_e = (U_R)_e^* + (P_E - P_P)d_e \\ (U_Z)_n = (U_Z)_n^* + (P_P - P_N)d_n \end{cases} \quad (3.50)$$

- On effectue le calcul pour l'équation de l'énergie.
- La Pression obtenue  $P$  est affectée à la pression estimée :  $P^* \leftarrow P$ . Et on réitère les calculs à partir de la première étape jusqu'à ce que la convergence soit atteinte.

### 3.4 Résolution des systèmes d'équations

La forme algébrique finale des équations discrétisées non linéaires est :

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b$$

Au préalable et afin de bien poser le problème avant toute résolution numérique, nous devons respecter quatre règles de base due à la géométrie du domaine étudié, sa discrétisation en volumes de contrôle et les conditions aux limites associés.

*1<sup>ère</sup> Règle : Compatibilité aux frontières des volumes de contrôle*

Quand une face est commune pour deux volumes de contrôle adjacents, le flux qui les traverse doit être représenté par la même expression dans les équations discrétisées pour chacun des volumes de contrôle.

*2<sup>ème</sup> Règle : Positivité des coefficients*

La valeur de la variable  $\phi$  en un point donné est influencée par les valeurs de  $\phi$  aux nœuds voisins. De même toute variation de  $\phi$  en un point doit provoquer la même variation de  $\phi$  aux nœuds voisins. Pour cela, les coefficients  $a_K (K = E, W, N, S, P)$  doivent avoir le même signe

*3<sup>ème</sup> Règle : Négativité de la pente de la Linéarisation du terme source*

Dans l'équation (3.35), les coefficients  $a_K$  sont positifs, les coefficients  $a_p$  peuvent devenir négatifs à travers les termes  $S_p$  entraînant ainsi des instabilités numériques. Par conséquent les termes  $S_p$  doivent être négatifs ou nuls.

4<sup>ième</sup> Règle : Sommation des coefficients voisins

Nous exige que :  $a_p = \sum_{nb} a_{nb}$ .

Les systèmes d'équations (3.25), obtenus après discrétisation de l'équation (3.1), sont tri diagonaux et non linéaires. Pour les résoudre, nous procédons d'abord par l'utilisation d'une méthode de résolution directe de type décomposition LU adaptée par Thomas à ces systèmes tri diagonaux et appelée TDMA (qui porte son nom). Par la suite et au vue de la non linéarité des équations (3.25), nous sommes dans l'obligation de corriger les premiers résultats obtenus en utilisant une sous relaxation pour les vitesses radiale et axiale par le biais de l'algorithme de correction dit de « SIMPLER ». Nous utilisons une méthode itérative de type sous relaxation ligne basée sur la méthode de Gauss Seidel (LSOR). Si nécessaire, pour la température, une simple sous relaxation entre les valeurs précédentes et actuelles suffit.

## 3.5 Résolution numérique

### 3.5.1 Méthodologie

La méthode numérique utilisée dans ce travail est un schéma de volumes finis tel que décrit et développé par Patankar (1980, 2018) et modifié par Versteeg Malalasekera (1995). Cette méthode est utilisée pour la discrétisation des équations gouvernantes (Eqs.2.16-2.19) avec les conditions aux limites (Eqs.2.20-2.23). Le domaine illustré à la figure 2.1 est divisé en petits volumes de contrôle sans chevauchement. Une grille décalée est choisie où les vitesses sont positionnées au centre des faces, les pressions au centre des volumes, et les températures aux sommets des volumes de contrôle élémentaires figure 3.4. Comme l'écoulement est régi par la convection naturelle, le schéma de la loi de puissance est utilisé pour réécrire les termes de convections et de diffusion (Patankar, 1980, 2018, Sivaraj et al. 2022). L'algorithme SIMPLER est utilisé pour corriger la pression jusqu'à ce que l'équation de continuité soit satisfaite. Pour réduire l'occupation de la mémoire virtuelle de la machine, les coefficients non nuls des systèmes linéaires tri-diagonaux obtenus sont stockés. La résolution des systèmes obtenus est effectuée à l'aide de l'algorithme TDMA (Versteeg et Malalasekera, 1995).

La tâche la plus onéreuse dans la résolution numérique est de définir le traitement approprié de la condition de frontière thermique à la surface libre. Le flux de chaleur d'évaporation défini par le modèle de Hashemi-Wesson (Hashemi-Wesson, 1971) dépend de la température avec une puissance de  $4/3$  ( $\theta_{fs}^{4/3}$ ), ce qui en fait une condition aux limites non linéaire. Lemembre et Petit (1998) et Khelifi-Touhami et al., (2010) ont supposé que la température locale de la surface libre supérieure en une position  $R$ , est égale à la température moyenne de la couche supérieure dont la profondeur est égale à  $H/100$ . Dans le présent travail, la température de la surface libre est évaluée comme suit ;

- 1- La condition de Neumann ( $\partial\theta/\partial Z = Q_{ev}$ ) est approximée à l'aide de la différence finie du premier ordre :

$$\frac{\theta(R,1) - \theta(R,1 - \Delta Z)}{\Delta Z} = Q_{ev} \quad (3.51)$$

- 2- En introduisant cette condition aux limites (3.51) dans l'équation (2.24), nous obtenons le schéma de discrétisation suivant

$$\begin{cases} \theta(R,1) - \theta(R,1 - \Delta Z) + \Delta Z \cdot c \cdot Ra^{1/3} \cdot \theta(R,1)^{4/3} = 0, \text{ if } \theta(R,1 - \Delta Z) > 0 \\ \theta(R,1) = \theta(R,1 - \Delta Z), \text{ else} \end{cases} \quad (3.52)$$

- 3- Si  $\theta(R,1 - \Delta Z) > 0$ , la première partie de l'équation (3.52) est évaluée par la méthode itérative de Newton-Raphson, pour chaque point de la surface libre supérieure. Sinon, la deuxième partie de l'équation (3.52) donne la valeur  $\theta(R, H)$  de manière directe.

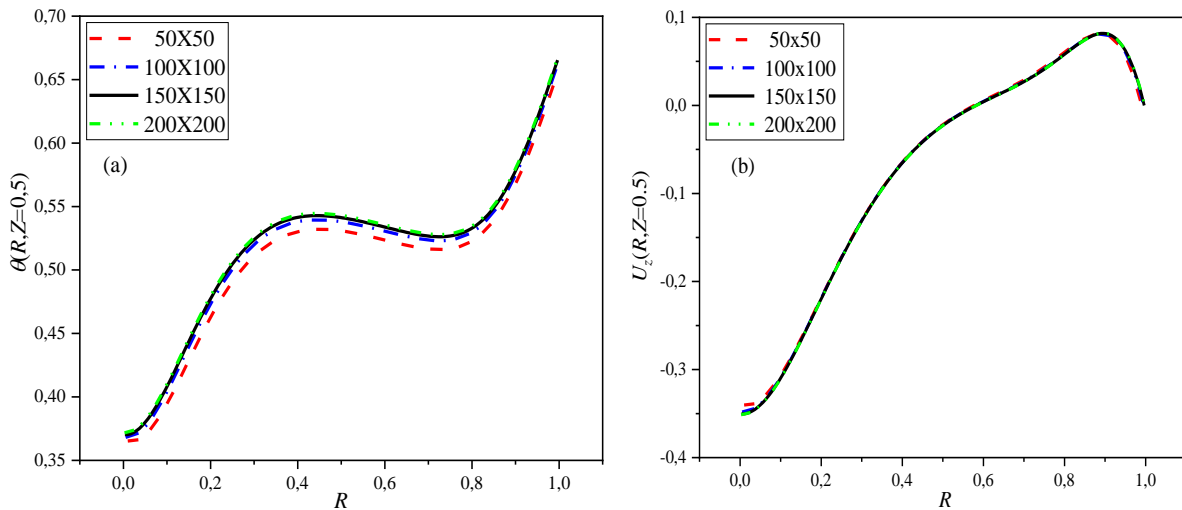
Malgré le fait que cette approche augmente les temps de calcul par rapport à Khelifi-Touhami et al., (2010), elle a la particularité de conserver les caractéristiques non linéaires du modèle d'évaporation de Hashemi-Wesson, la solution résultante est donc plus précise. Le temps de calcul supplémentaire inhérent a été drastiquement réduit en utilisant la technique de calcul parallèle par Open MP. (Chandra et al., 2001) comparativement à Khelifi-Touhami et al., (2010). Les temps de calcul (CPU time) sont compris entre 8 et 45 minutes selon la difficulté du calcul sur PC Toshiba i7, 2.40GHz, x64, 8,00 Go. Le critère de convergence des variables du modèle a été fixé de manière à ce que l'erreur relative soit inférieure à  $10^{-7}$ .



### 3.5.2 Sensibilité du maillage et validation

#### 3.5.2.1 Sensibilité du maillage

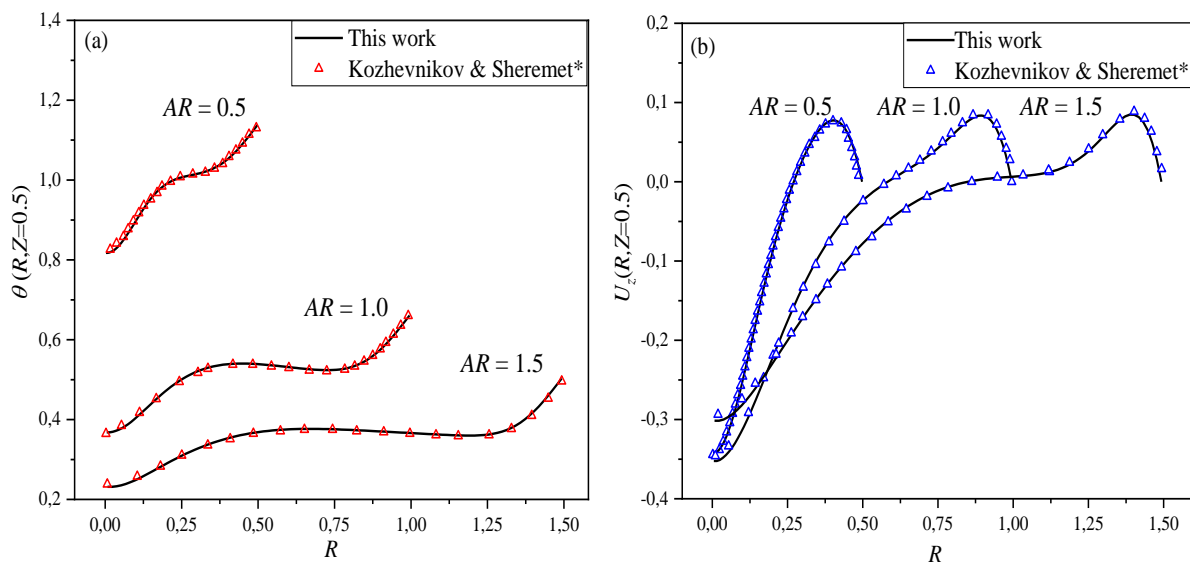
Plusieurs grilles ont été testées afin d'évaluer la sensibilité du code développé sur la taille du maillage. L'objectif est de définir une taille de grille appropriée à partir de laquelle la solution serait indépendante. En fixant  $Ra = 10^{+5}$ ,  $Pr = 2$ ,  $Ma = 500$  et  $AR = 1$ , le code a été exécuté en utilisant les grilles suivantes : 50x50, 100x100, 150x150 et 200x200. Les profils de température sans dimension et la vitesse axiale à mi-hauteur de la cavité ( $Z = 0.5$ ) sont représentées sur les figures 3.6a et 3.6b pour différentes grilles. Comme on peut le voir, à partir de la grille 100x100 et plus, aucune différence ne peut être observée sur les profils de vitesse, cependant, sur les profils de température, seules les grilles 150x150 et 200x200 coïncident. De plus plusieurs combinaisons de  $Ra$ ,  $Ma$  et  $AR$  ont été examinées pour la sensibilité de la grille (résultats non rapportés ici), ou des performances similaires à celles de la figure 3.6 ont été observées. Ainsi pour des raisons de rentabilités des calculs et de l'occupation mémoire sur machine, la grille 150x150 est adoptée et utilisée dans toutes les simulations.



**Figure 3. 6** Influence de la taille de la grille sur la précision. Profils de température sans dimension (a) et de vitesse axiale (b), le long de la section transversale  $Z = 0.5$  avec  $Ra = 10^{+5}$ ,  $Ma = 500$ ,  $AR = 1$ .

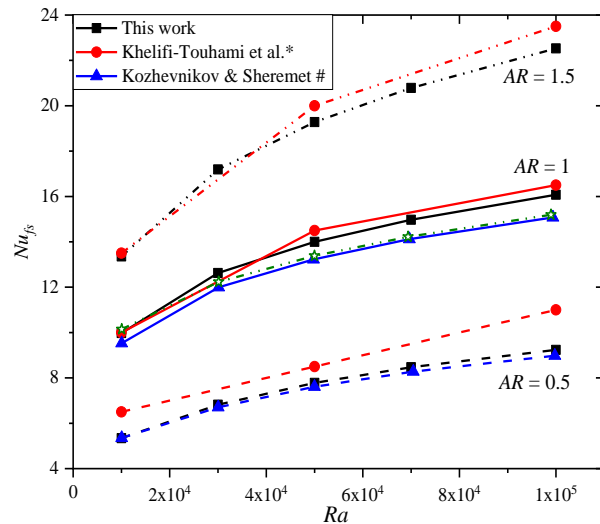
### 3.5.2.2 Validation avec la littérature

Pour vérifier la validité de la présente méthode, des comparaisons avec la littérature ont été effectués. Dans la figure 3.7, une comparaison basée sur les profils de températures et de vitesses sans dimension à mi-hauteur de la cavité ( $Z = 0.5$ ) avec les résultats de Kozhevnikov et Sheremet (2018) est présentée. Comme on peut le voir, nos résultats sont en bon accord avec la référence citée.



**Figure 3. 7** Profils des Températures (a) et de la vitesse axiale (b) à  $Z = 0.5$  for  $Ra = 10^5$ ,  $Ma = 100$ , Pour différentes valeurs de l'aspect ratio en comparaison avec les résultats numériques de Kozhevnikov et Sheremet (2018)\*.

Cependant, lorsque l'on effectue des comparaisons basées sur le nombre de Nusselt moyen à la surface libre (Eq.2.27), des différences peuvent être observées. Comme l'illustre la figure 3.8. Cette dernière montre la variation du nombre de Nusselt moyen à la surface libre en fonction du nombre de Rayleigh. Des résultats supplémentaires de (Khelifi-Touhami et al., 2010) ont été inclus. Pour  $AR = 0.5$ , la présente solution est conforme avec (Kozhevnikov et Sheremet, 2018), cependant, il y a de légères différences par rapport à (Khelifi-Touhami et al., 2010), en particulier à  $Ra$  élevé ou l'écart est d'environ 16%.



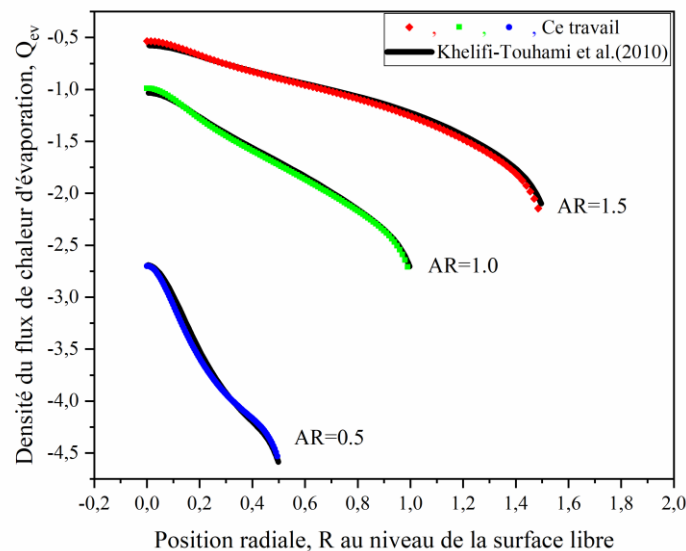
**Figure 3. 8** Variation du Nusselt moyen à la surface libre par rapport au nombre de Rayleigh  $Ra$  et à l'aspect ratio  $AR$  ( $Ma = 0$ ). Les données supplémentaires proviennent de \*)Khelifi-Touhami et al. (2010), #)Kozhevnikov and Sheremet (2018).

Lorsque l'allongement ou le rapport d'aspect augmente, la présente solution tend à être en accord avec les travaux de Khelifi-Touhami et al., (2010) que Kozhevnikov et Sheremet (2018). L'écart maximal entre la présente solution et celle de Kozhevnikov et Sheremet (2018), est de 6% pour  $AR = 1$ , et il atteint 33% pour  $AR = 1.5$ . C'est résultats sont calculés pour  $Ra = 10^5$ . Il est intéressant de noter que le nombre de Nusselt de la surface libre calculé par Kozhevnikov et Sheremet (2018) pour  $AR = 1.5$  est représenté par la courbe étoilée verte.

Le nombre de Nusselt de la surface libre est un paramètre sans dimension qui représente le taux d'évaporation (voir Eq.2.27). Kozhevnikov et Sheremet (2018) ont déclaré que les changements essentiels du nombre de Nusselt à la surface libre se produisent lorsque l'allongement de la cavité est inférieur à 1. Pour des allongements supérieurs à 1, le nombre de Nusselt montre une faible variation par rapport à  $AR$ . Etant donné que le problème est résolu sous une forme adimensionnelle dans cette thèse ainsi que dans la publication de (Kozhevnikov et Sheremet (2018)), techniquement, le rapport d'aspect représente le niveau de remplissage d'un réservoir en relation inverse puisqu'il s'agit du rayon sur la hauteur ( $\bar{R} / \bar{H}$ ). Si nous comparons deux réservoirs ayant le même rayon et un rapport d'aspect différent, plus le nombre  $AR$  est élevé, plus le niveau de remplissage est faible. En fait, des études expérimentales de (Van Dresar et al., 1992, Barsi et Kassemi, 2013a) et numériques (Barsi et Kassemi, 2013b, Hanna et Stephens, 1991, Choi et al.,

2017) ont montré que le taux d'évaporation (gaz d'ébullition) dépend fortement du niveau de remplissage, et qu'il augmente au fur et à mesure que ce dernier diminue. Ce qui réfute les conclusions de (Kozhevnikov et Sheremet (2018)), et approuve la présente solution.

Nous avons aussi simulé numériquement la densité de flux d'évaporation adimensionnée. La densité du flux d'évaporation, calculée par la loi de Hashemi-Wesson (1971), (sans aucune hypothèse physique simplificatrice) permet de confirmer les résultats obtenus par Khelifi-Touhami et al., (2010). En effet la distribution de l'évaporation au niveau de la surface libre est non uniforme ce qui confirme la non-linéarité de la loi de Hashemi-Wesson (1971). Cette distribution réelle fausse tous les calculs effectués auparavant par d'autres auteurs (Lemembre et Petit, (1998)) qui imposent une densité de flux d'évaporation constante. En régime laminaire, une évaporation plus importante est enregistrée près des parois latérales pour tous les nombres de Rayleigh  $10^{+4} \leq Ra \leq 10^{+5}$  et pour tous les rapports d'aspects  $AR = 0.5, 1.0, 1.5$  (figure 3.9). En fixant le rapport d'aspect, l'augmentation du nombre de Rayleigh engendre une évaporation plus intense près de la paroi latérale au profit d'une diminution de celle-ci au niveau du centre de la surface libre.



**Figure 3. 9** Variation de la densité du flux d'évaporation adimensionnée en fonction du rayon de la cavité au niveau de la surface libre pour  $Ra = 10^{+5}$ ,  $Ma = 0$  et  $AR = 0.5, 1.0, 1.5$  en comparaison avec les résultats numériques de Khelifi-Touhami et al., (2010)

Comme nous le constatons sur la figure 3.9, l'allure des courbes est en parfaite concordance avec celles obtenues par Khelifi-Touhami et al., (2010) et cela pour les trois cavités  $AR = 0.5, 1.0, 1.5$ ,  $Ra = 10^5$  et un nombre de Marangoni  $Ma = 0$ .

### 3.6 Conclusion

La méthode des volumes finis (MVF) a été employée comme procédure de discrétisation pour résoudre numériquement les équations différentielles de notre problème. La MVF peut être utilisée sur toutes les équations différentielles, qui peuvent être écrites sous la forme de divergence. L'équation est ensuite intégrée sur le volume. Subséquemment, nous pouvons appliquer le théorème de Gauss qui convertit l'intégrale de volume sur la divergence en une intégrale de surface à travers les frontières.

En se basant sur la MVF détaillée ici, nous avons élaboré un code de calcul en utilisant le langage FORTRAN Intel Parallèle version 19.1 pour résoudre le problème défini dans le chapitre 2. La validité du code a été analysée en deux étapes, la première consiste à vérifier l'indépendance des résultats par rapport à la taille du maillage, et la deuxième étape comporte une confrontation des résultats obtenus avec la littérature. Les résultats de l'analyse de validité du code ont montré que l'usage d'une grille de  $150 \times 150$  est assez suffisant pour obtenir des résultats insensibles à la taille de la grille et avec une bonne concordance avec la littérature.



# Chapitre 4 – Résultats et Discussions

## 4.1 Introduction

Plusieurs simulations ont été réalisées en fonction du nombre de Rayleigh ( $10^4 \leq Ra \leq 10^5$ ), du nombre de Marangoni ( $0 \leq Ma \leq 2000$ ) et du rapport d'aspect de la cavité ( $0.5 \leq AR \leq 2$ ). Les plages sont ici sélectionnées en fonction du régime laminaire. (Lemembre et Petit, 1998, Khelifi-Touhami et al., 2010, Kozhevnikov et Sheremet, 2018)

## 4.2 Effets du nombre de Rayleigh

Dans un premier temps, nous étudions l'effet du nombre de Rayleigh sur la convection naturelle en tenant compte de l'effet Marangoni. Le rapport d'aspect a été fixé à  $AR = 1$ ,  $Ma = 1000$ , et trois nombres de Rayleigh  $Ra$  ont été considérés,  $Ra = 10^4$ ,  $5 \cdot 10^4$  et  $10^5$ .

Comme on peut le voir sur la figure 4.1, le modèle d'écoulement consiste en un tourbillon toroïdal où la vitesse maximale se produit au niveau de l'axe central de la cavité et près des parois et de la surface libre supérieure, tandis que la vitesse minimale se trouve à l'épicentre du tourbillon. Sur le graphique des isothermes, on peut observer que le fluide se refroidit lorsque le nombre de Rayleigh augmente. L'augmentation de la valeur de  $Ra$  peut être considérée comme une augmentation de la chaleur qui s'échappe de la paroi vers le fluide, ainsi une quantité significative de particules de fluide est chauffée au-delà de la température de saturation, ce qui augmente l'évaporation du fluide à la surface libre supérieure, en particulier dans la région proche de la paroi latérale. Lorsque le fluide s'évapore, il absorbe une quantité de chaleur (chaleur latente) des couches de fluide situées sous la surface libre, ce qui contribue au processus de refroidissement du fluide.

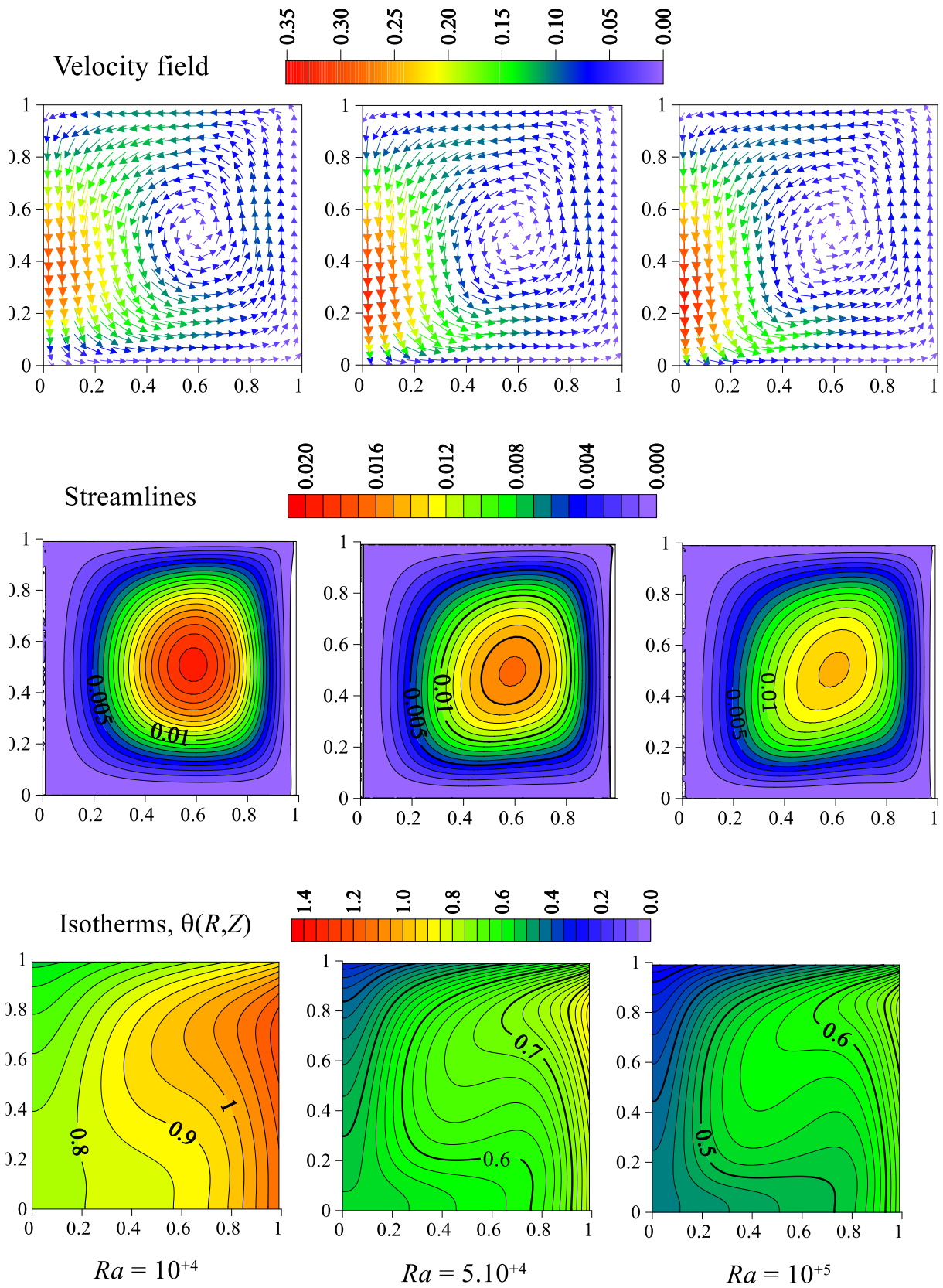
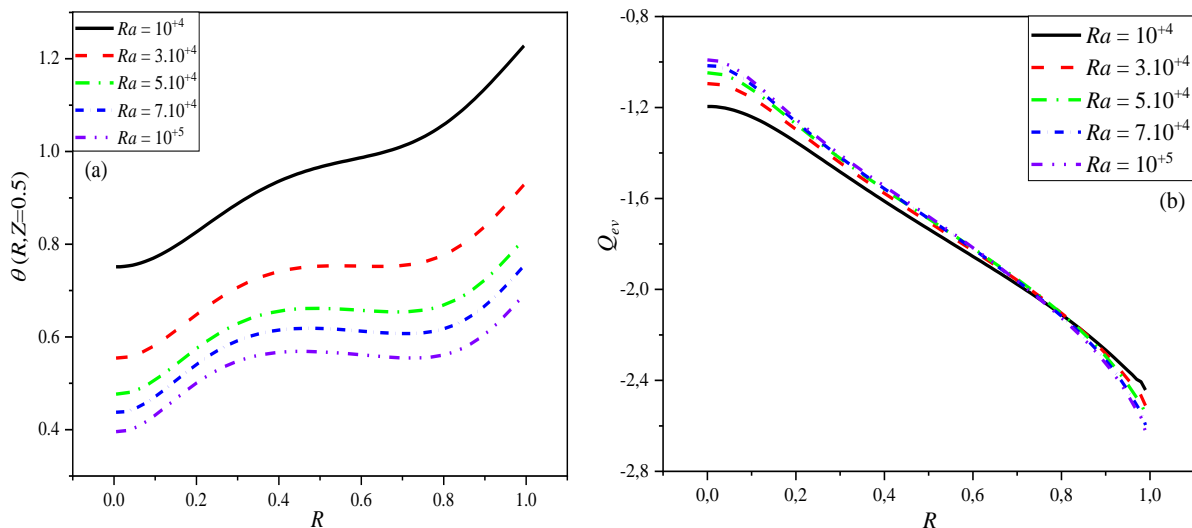


Figure 4. 1 Effet du nombre de Rayleigh sur le champ de vitesse, les lignes de courant et la distribution de la température dans une cavité avec  $AR = 1.0$  et  $Ma = 1000$ .



L'équation (2.24) indique clairement que le taux d'évaporation augmente avec le nombre de Rayleigh et la température du fluide. Ceci est également visible sur le profil de température sans dimension au niveau de la ligne centrale horizontale ( $Z = 0.5$ ) représenté sur la figure (4.2a), la température du fluide diminue lorsque le nombre de Rayleigh augmente. La figure (4.2b) illustre le flux de chaleur d'évaporation à différentes positions radiales sur la surface libre. Ici, les valeurs négatives de  $Q_{ev}$  signifie que la chaleur a été extraite du fluide. La forme des courbes indique que le taux d'évaporation est plus élevé près de la paroi (en raison du chauffage de la paroi latérale), et qu'il diminue lorsque le fluide s'éloigne vers le centre de la cavité en raison de l'effet de refroidissement dû à l'évaporation. En plus, quand le nombre de Rayleigh augmente, on observe que le flux thermique d'évaporation augmente avec  $Ra$  dans la région proche de la paroi, et diminue près du centre du réservoir. Comme la surface libre a une géométrie circulaire, la zone près de la paroi est plus grande que près du centre. En calculant le nombre de Nusselt moyen de la surface libre (voir tableau 4.I), il est clair que l'évaporation s'intensifie avec la valeur de  $Ra$ . De même, le nombre de Nusselt moyen de la paroi latérale augmente avec  $Ra$  en raison de l'augmentation de la perte de chaleur.



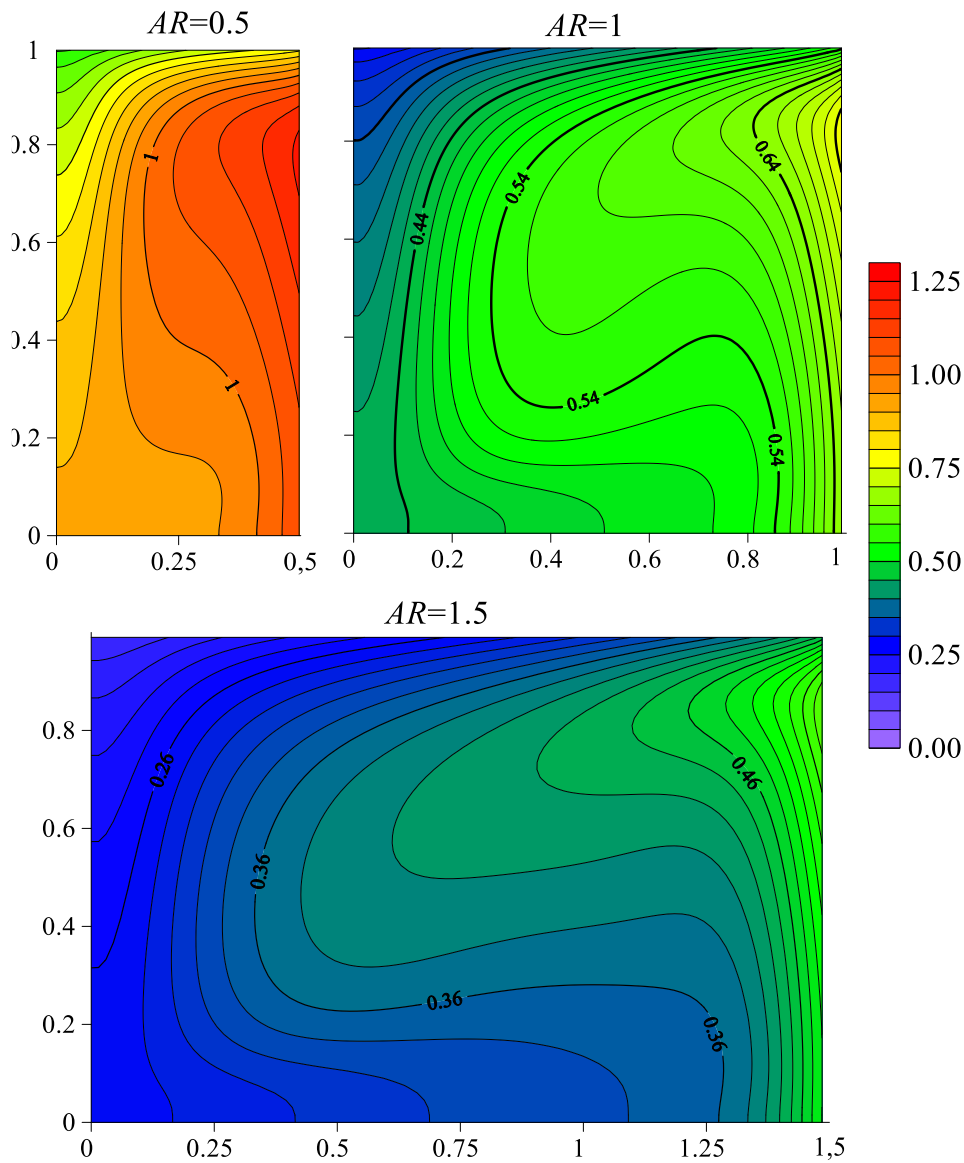
**Figure 4. 2** Effet du nombre de Rayleigh sur : a) la température sans dimension à  $Z=0.5$ , b) le flux de chaleur d'évaporation sans dimension à la surface libre ( ici  $AR = 1.0$  et  $Ma = 1000$ ).

### 4.3 Effets du taux de remplissage

Comme nous l'avons vu précédemment dans la section 3.5.2.2, le rapport d'aspect a un effet significatif sur le taux de transfert de chaleur. La figure 4.3 illustre la distribution de la température sans dimension dans le fluide en isothermes. Comme nous pouvons le voir, le fluide devient plus chaud lorsque le rapport d'aspect diminue. Pour simplifier l'interprétation, supposons que nous avons trois réservoirs avec le même niveau de remplissage  $\bar{H} = 1$  et des rayons différents  $\bar{R} = 0.5, 1, 1.5$ . Les trois réservoirs sont soumis au même nombre de Rayleigh  $Ra$  (le même flux thermique de la paroi latérale). Le réservoir dont le rapport d'aspect est plus élevé contient un volume de fluide plus important que les deux autres. Comme le flux thermique de la paroi est constant, et bien que la surface de la paroi latérale soit plus grande, la puissance de chauffage est insuffisante pour chauffer le fluide à une température comparable à celle des réservoirs ayant un rapport d'aspect plus faible. Il est un fait que le volume d'un cylindre de hauteur fixe est proportionnel au carré du rayon  $\bar{R}^2$ , alors que la surface de la paroi latérale est proportionnelle à  $\bar{R}$ .

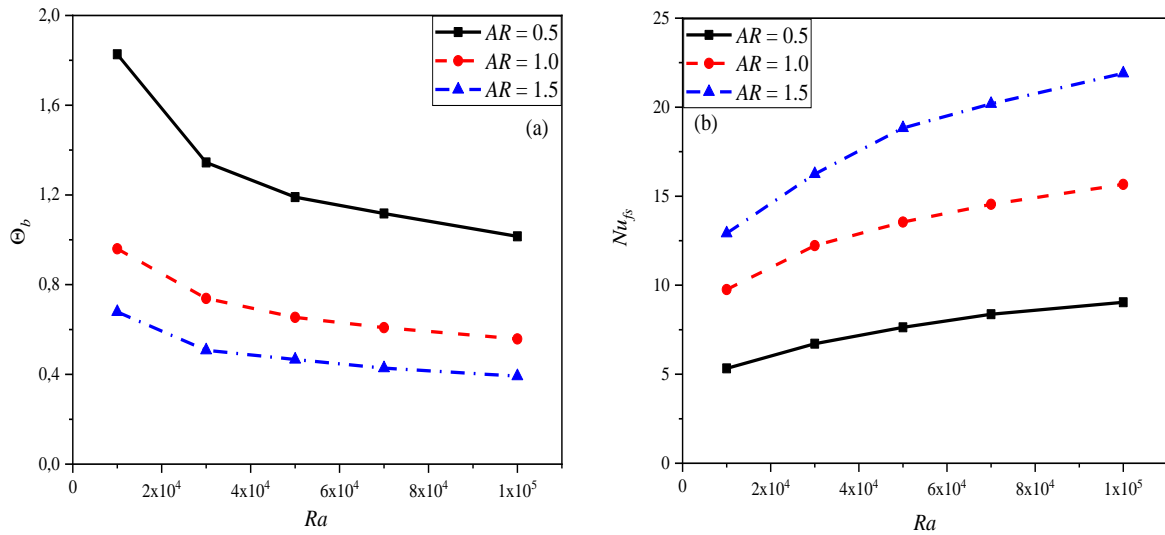
**Tableau 4. 1** Le nombre de Nusselt moyen à la surface libre et sur la paroi latérale ( $Ma = 1000$  and  $AR = 1$ ).

$Ra$	$Nu_{fs}$	$Nu_{sw}$
$10^4$	9.758	10.108
$3.10^4$	12.223	12.732
$5.10^4$	13.547	14.130
$7.10^4$	14.544	15.105
$10^5$	15.665	16.251



**Figure 4.3** Effet du rapport d'aspect sur la distribution de la température: a)  $AR = 0.5$ , b)  $AR = 1.0$ , et c)  $AR = 1.5$  (ici  $Ra = 10^5$  et  $Ma = 1000$ ).

Supposons maintenant que nous ayons trois réservoirs de même rayon avec des niveaux de remplissage différents,  $\bar{H} = 2, 1$  et  $2/3$ , qui correspondent à  $AR = 0.5, 1$ , et  $1.5$ , respectivement. Dans un réservoir avec un rapport d'aspect plus faible, les particules de fluide adjacentes à la paroi latérale doivent parcourir une distance beaucoup plus grande pour atteindre la surface libre via le flux de flottabilité, ce qui leur permet d'accumuler plus de chaleur et de gagner en température par rapport aux autres réservoirs. En termes de température globale, les différences par rapport à l'allongement de la cavité sont également visibles sur la figures 4.4.



**Figure 4. 4** Effet du rapport d'aspect sur la température moyenne de la cavité (a) et le nombre de Nusselt moyen à la surface libre(b),  $Ma = 1000$ .

Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, la température globale dans les trois cavités diminue, comme le montre la figure 4.4a. Ceci est dû à l'augmentation du flux de chaleur d'évaporation qui est proportionnel à  $Ra^{1/3}$  (voir Eq. 2.24). Cela conduit à une augmentation du nombre de Nusselt moyen de la surface libre, comme le montre la figure 4.4b.

#### 4.4 Effets de la tension superficielle

La figure 4.5 illustre les effets du nombre de Marangoni sur le champ de vitesse, les lignes de courant et la distribution de température dans une cavité cylindrique remplie avec  $AR = 1.0$  et  $Ra = 10^5$ . Lorsque la cavité est chauffée à partir de la paroi latérale, un courant chaud ascendant est initié et entraîne l'écoulement du fluide vers une cellule convective toroïdale ou le courant descendant est localisé au centre, comme l'illustrent le champ de vitesse et les lignes de courant (figures du haut et du milieu, respectivement).

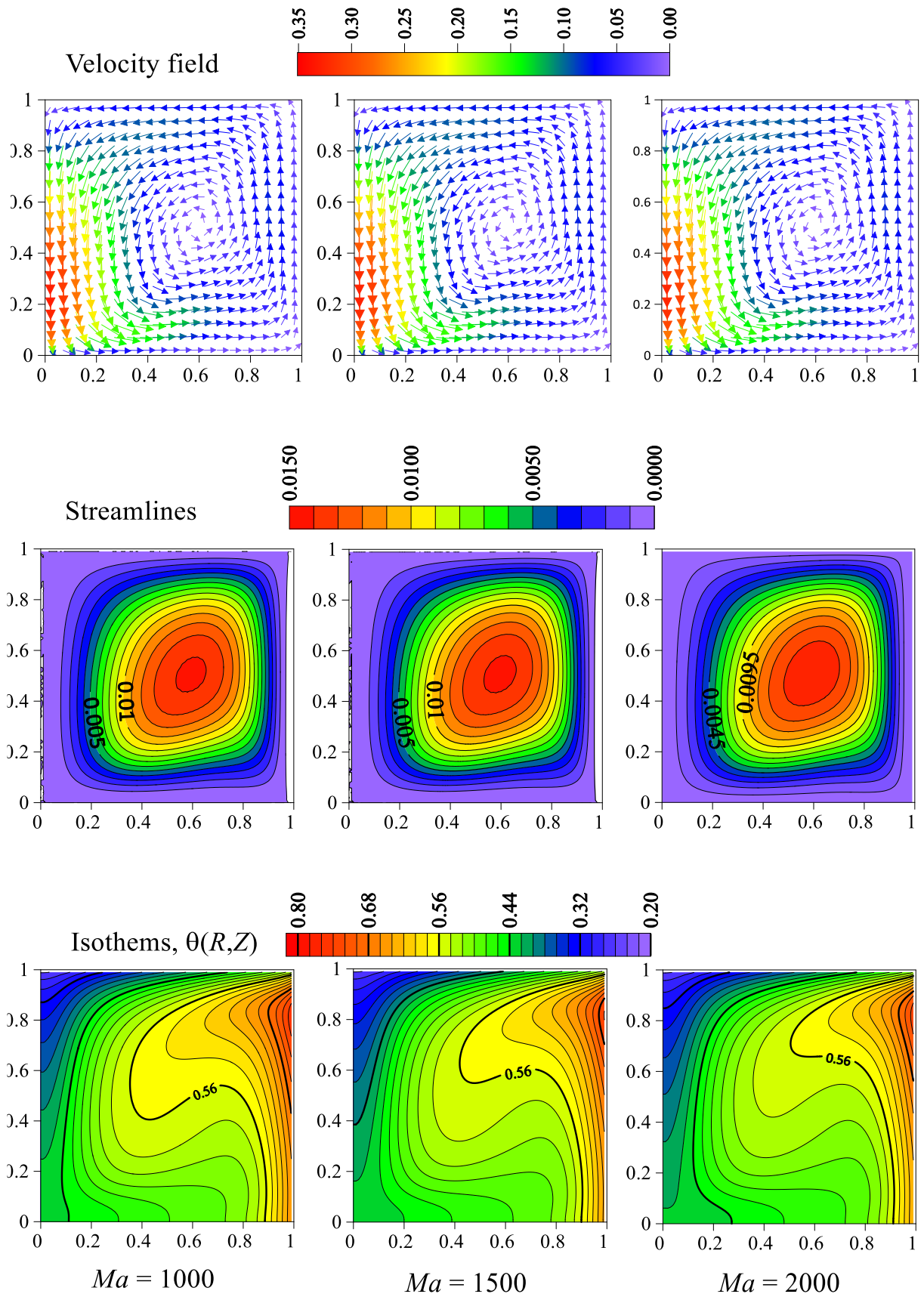
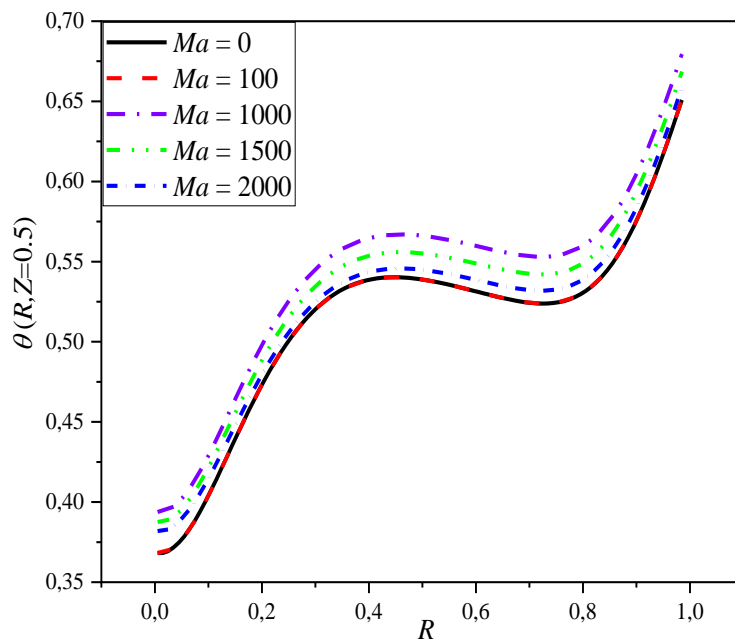


Figure 4. 5 Effet du nombre de Marangoni sur le champ de vitesse, les lignes de courant et la distribution de température dans une cavité avec  $AR = 1.0$  et  $Ra = 10^{+5}$

Les effets du nombre de Marangoni sont à peine visibles sur ces figures, car il influence principalement la vitesse à la surface ouverte, cependant, en inspectant les isothermes, on peut observer que le nombre de Marangoni affecte significativement la distribution de la température. Par exemple, un examen attentif montre que la zone de fluide chaud est délimitée par l'isotherme égale à 0.56 (surface de droite), diminue quand le nombre de Marangoni augmente. Ceci suggère que la température du fluide est inversement proportionnelle au nombre de Marangoni dans la gamme comprise entre 1000 et 2000.

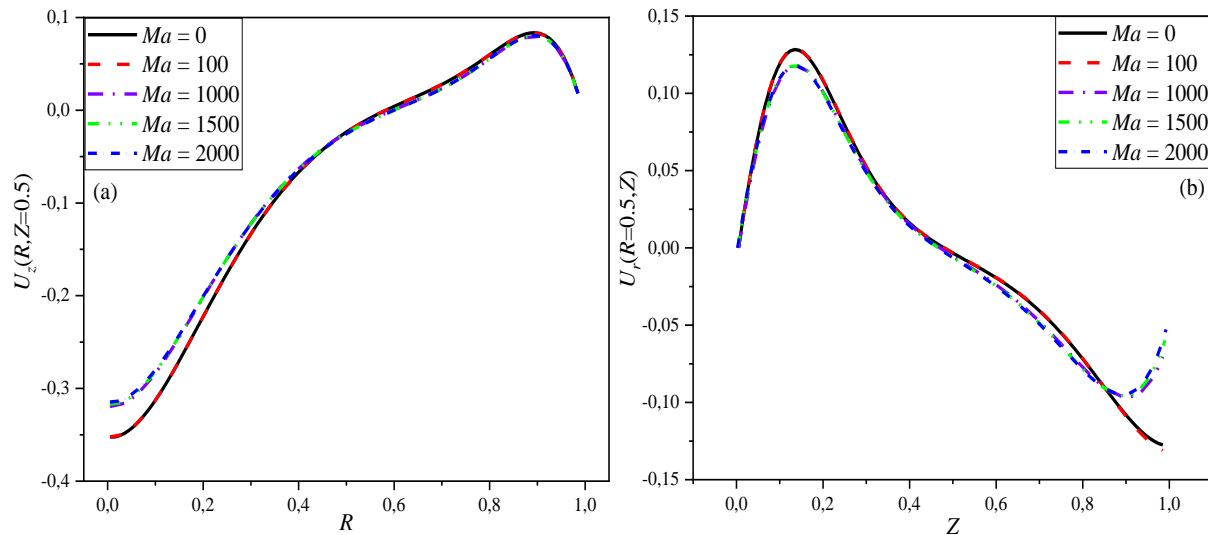


**Figure 4. 6** Profile des Températures à mi-hauteur de la cavité  $Z = 0.5$  pour  $AR = 1.0$ ,  $Ra = 10^5$ , et différentes valeurs du nombre de Marangoni.

La figure 4.6 illustre la variation de température de la ligne centrale horizontale dans la cavité pour différents nombres de Marangoni et pour une valeur fixe de  $Ra = 10^5$ . Pour une faible valeur de  $Ma$ , il n'y a pas d'effet significatif sur la variation de la température, Lorsque  $Ma$  atteint la valeur 1000, une augmentation de la température est observée. Au-delà de la valeur de  $Ma = 1000$ , la température commence à diminuer quand  $Ma$  augmente.

Pour expliquer ce comportement, il est important d'étudier la variation de la vitesse avec  $Ma$ . Les figures 4.7a et 4.7b illustrent les vitesses : axiale à  $Z = 0.5$  et radiale à  $R = 0.5$ , respectivement. Sur les courbes de vitesse axiale (figure 4.7a), on peut observer que lorsque le nombre de Marangoni augmente, la vitesse absolue de l'écoulement descendant

au centre de la cavité diminue, alors que près de la paroi latérale, il n'y a pas de différences significatives pour tous les nombres de Marangoni, car l'écoulement est principalement induit par les forces de flottabilité.

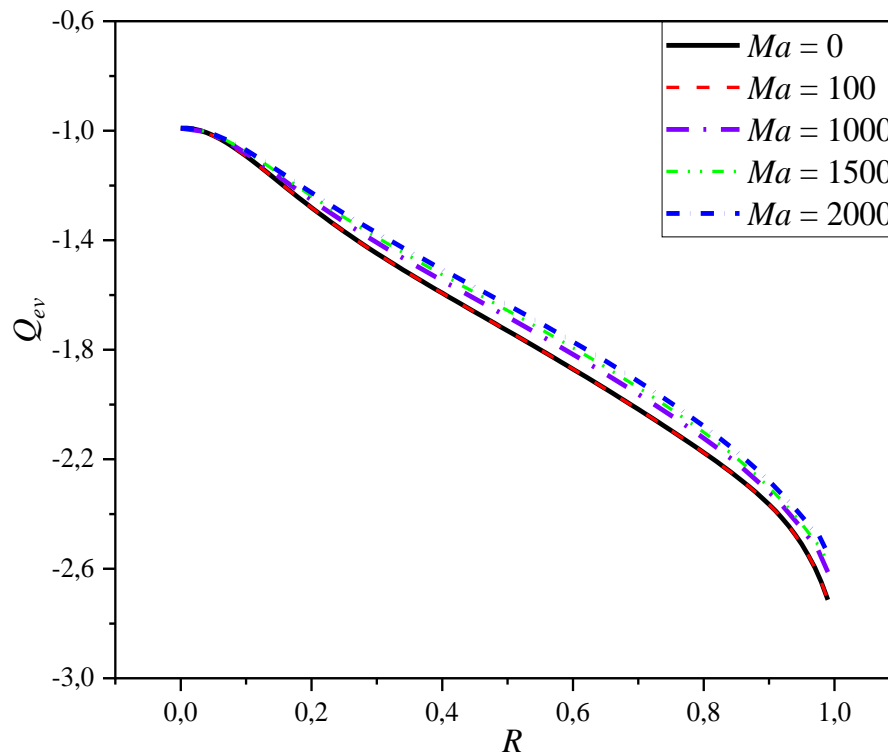


**Figure 4. 7** Effet du nombre de Marangoni sur a) sur la vitesse axiale sans dimension à  $Z = 0.5$ , b) la vitesse radiale sans dimension à  $R = 0.5$  avec  $AR = 1.0$  et  $Ra = 10^{+5}$

Sur la figure 4.7b, on voit que les vitesses maximales (valeur absolue), au sommet près de la surface ouverte supérieure,  $Z = 1$ , et au fond diminuent avec l'augmentation de  $Ma$ . Pour un  $Ma$  élevé, l'écoulement de la surface ouverte supérieure et de sa couche adjacente est principalement dirigé par les forces capillaires induites par le gradient de tension de surface, alors que le dessous est dirigé par les forces induites par la convection de flottabilité. Comme le gradient de température à la surface est de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-4}$  (calculé et non rapporté ici), les forces générées par le gradient de tension superficielle sont plus faibles que les forces de flottabilité dans la couche inférieure, cependant ces forces de flottabilité ne peuvent pas induire de mouvement dans la couche supérieure en raison de la friction, ainsi la vitesse radiale à la surface est inférieure à celle des couches inférieures. En conséquence, le mouvement de la cellule convective toroïdale est ralenti, ce qui explique la diminution de la vitesse absolue au centre de la cavité (vitesse axiale) et près du fond (vitesse radiale). Le processus de chauffage du fluide est assuré par la convection qui dépend du champ de vitesse, puisque la vitesse du tourbillon toroïdal est amortie par l'écoulement de surface de Marangoni, l'ensemble du processus de chauffage

est réduit, ce qui explique la baisse de température pour les nombres de Marangoni  $Ma$  élevés.

La figure 4.8 illustre l'effet du nombre de Marangoni sur le flux thermique d'évaporation sans dimension. Comme on peut le voir, l'augmentation du nombre de Marangoni réduit le flux de chaleur d'évaporation à la surface en raison de la diminution de la vitesse de surface, comme indiqué précédemment.



**Figure 4. 8** Effet du nombre de Marangoni sur le flux de chaleur d'évaporation sans dimension avec  $AR = 1,0$  et  $Ra = 10^{+5}$

Cela affecte également le nombre de Nusselt en surface libre, qui diminue avec l'augmentation du nombre de Marangoni  $Ma$ , comme le visualise la figure 4.9. De plus, les différences deviennent plus prononcées lorsque le nombre de Rayleigh augmente.



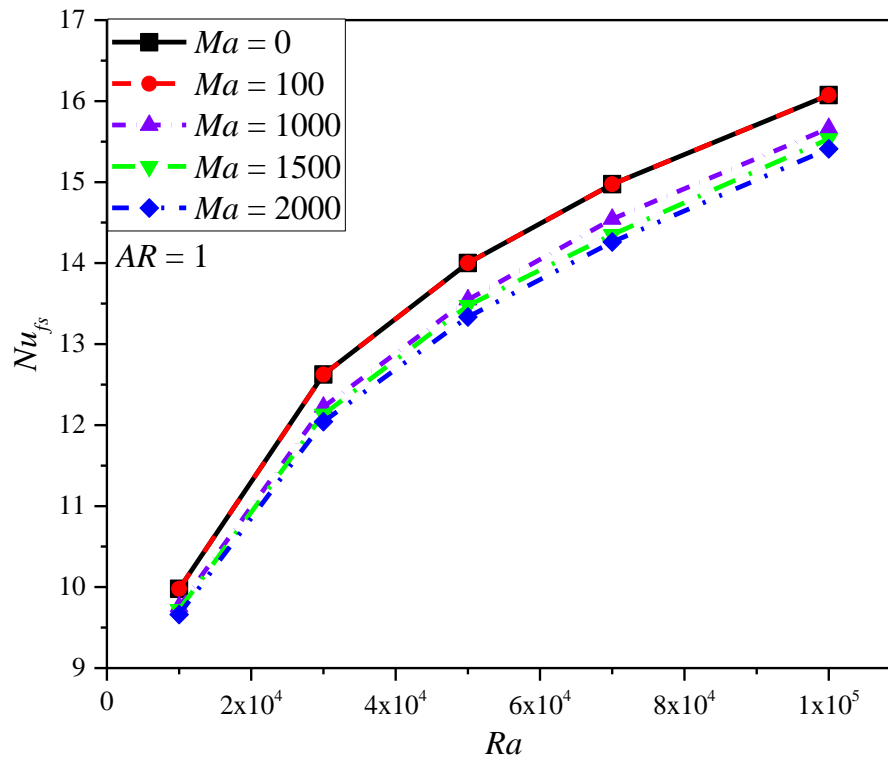


Figure 4. 9 Variation du nombre de Nusselt moyen à la surface libre par rapport aux nombre de Rayleigh et de Marangoni (ici AR =1)

### 4.5 Corrélations appliquées

Pour une application concrète et pratique, deux corrélations ont été proposées pour le Nusselt moyen à la surface libre supérieure  $Nu_{fs}$  et le Nusselt moyen latérale  $Nu_{sw}$  ont été établies :

$$Nu_{fs} = \begin{cases} 1.3278 \cdot AR^{0.8138} Ma^{-0.0044} Ra^{0.2188} & , \text{if } Ma > 100 \\ 1.3083 \cdot AR^{0.8042} Ra^{0.2185} & , \text{else} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$Nu_{sw} = \begin{cases} 1.3703 \cdot AR^{0.7779} Ma^{-0.0060} Ra^{0.2193} & , \text{if } Ma > 100 \\ 1.2979 \cdot AR^{0.8026} Ra^{0.2216} & , \text{else} \end{cases} \quad (4.2)$$

La figure 4.10 illustre la distribution des erreurs des corrélations ci-dessus (équations (4.1) et (4.2)) pour 180 points d'essai. Comme on peut le voir, la plupart des points d'essai sont à  $\pm 2\%$ . L'erreur moyenne est de  $+0.13\%$  avec un écart type de  $2.55\%$ . Ainsi, les équations (4.1) et (4.2) corrént parfaitement le nombre de Nusselt moyen au niveau de la paroi latérale et de la surface libre supérieure dans les tolérances techniques.

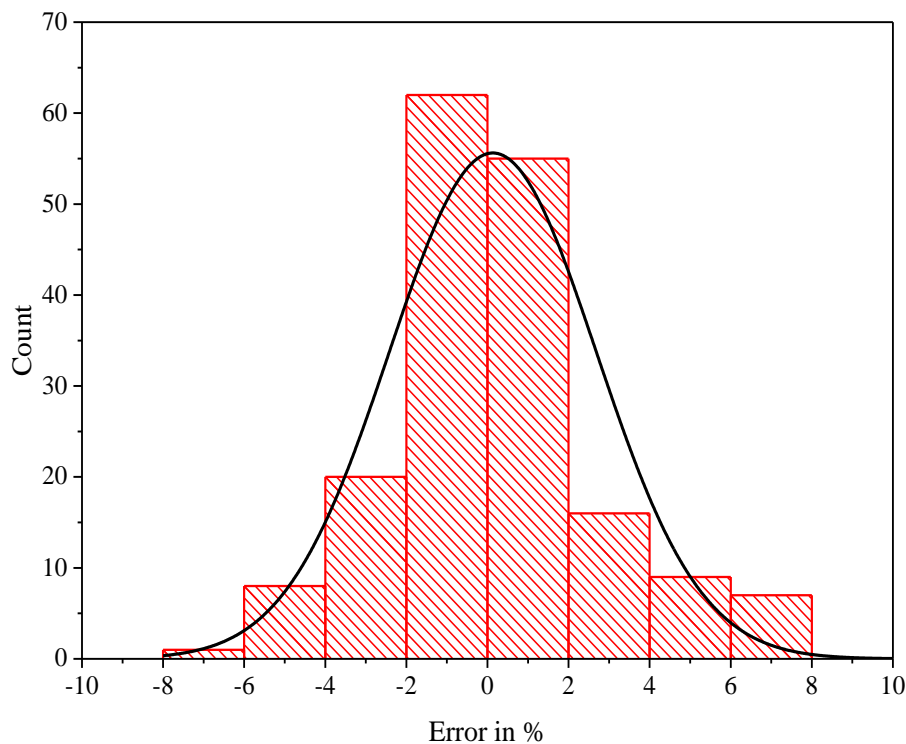
Dans la littérature, il existe deux corrélations pour le nombre de Nusselt de la paroi latérale. La première a été introduite par Lemembre et Petit (1998) comme suit :

$$Nu_{sw} = 0.86 \cdot Al^{-0.75} Ra^{0.2} \quad (4.3)$$

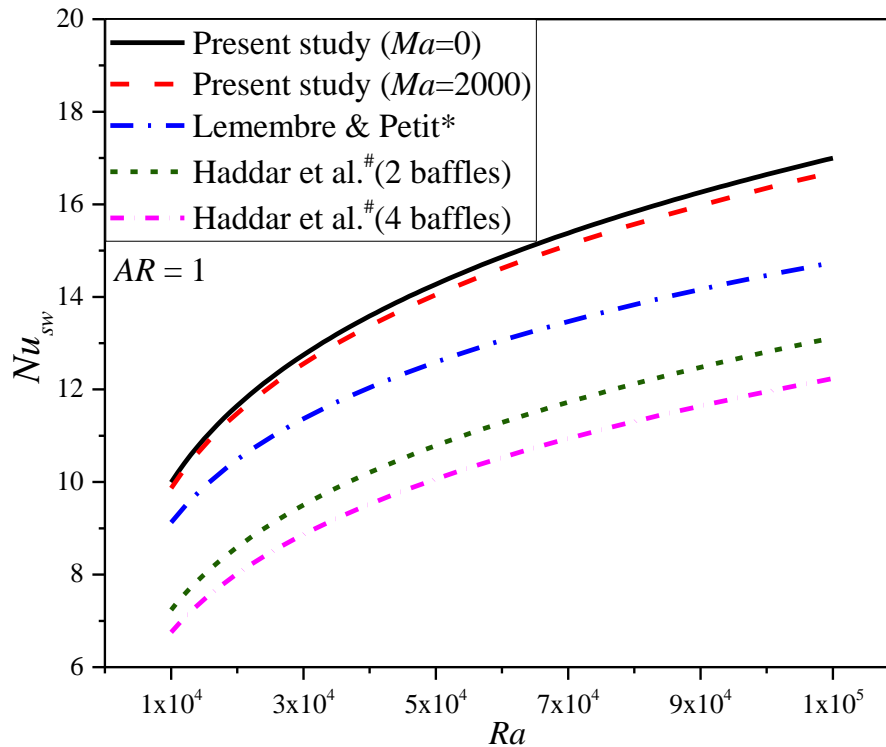
Avec  $Al = H/D$ , la seconde a été proposée par Haddar et al., (2020) pour un réservoir GNL avec un rapport d'allongement  $AR = H/D = \frac{1}{2}$  et équipé d'un nombre  $Nb$  de chicanes afin de réduire le transfert de chaleur de la paroi. Leur corrélation est donnée comme suit :

$$Nu_{sw} = 0.79 \cdot Ra^{0.248} Nb^{-0.1} \quad (4.4)$$

La figure 4.11 illustre le nombre de Nusselt moyen de la paroi latérale en fonction de  $Ra$  des équations (4.1) - (4.4). Comme on peut le voir, il existe des différences distinctes entre les trois corrélations, et cela est principalement dû à la condition aux limites considérée à la surface libre supérieure.



**Figure 4.10** Répartition statistique de l'erreur entre les corrélations de  $Nu_{sw}$  et  $Nu_{fs}$  et les résultats de simulation (180 points)



**Figure 4. 11** Comparaison entre différentes corrélations de Nusselt latéraux  $Nu_{sw}$  (\*:Lemembre and Petit (1998), #:Haddar et al. (2020))

Dans Lemembre et Petit, (1998) les auteurs ont supposé que l'évaporation peut être considérée comme un flux de chaleur sortant égal au flux entrant provenant de la paroi latérale. Haddar et al., (2020) ont considéré que la surface libre est isolée. La condition de la surface libre influence significativement le nombre de Nusselt de la paroi latérale. D'un point de vue pratique, il est important d'avoir une bonne estimation du taux de transfert de chaleur dans un réservoir cryogénique afin d'avoir une conception fiable et un meilleur contrôle des phénomènes d'évaporation. Ainsi, les corrélations proposées dans ce travail sont plus adaptées à la pratique de l'ingénierie.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons analysé l'effet combinée du nombre de Rayleigh, le nombre de Marangoni ainsi que le rapport géométrique du réservoir sur la convection Natural au sein d'un gaz liquéfié contenu dans un réservoir cylindrique. Il a été observé que l'augmentation de la valeur de nombre de Rayleigh  $Ra$  intensifie l'évaporation de surface, ce qui réduit la température de la masse du liquide, en plus de l'accélération de la vitesse de tourbillonnement du tourbillon toroïdal principal. L'augmentation de la valeur du

nombre de Marangoni peut réduire le taux d'évaporation jusqu'à 5%. Le niveau de remplissage du réservoir s'est avéré être un paramètre de contrôle important des phénomènes d'évaporations. Un réservoir avec un faible niveau de remplissage du réservoir présente le taux d'évaporation le plus élevé. En plus, les nombres de Nusselt de la surface libre et de la paroi latérale ont été corrélés. Les corrélations sont valables pour  $10^4 \leq Ra \leq 10^5$ ,  $0.5 \leq AR \leq 2$  et  $Ma \leq 2000$  avec moins de  $\pm 5\%$  d'erreur.

Il y a lieu de dire que la figure 4.7B dévoile, explicite et confirme l'hypothèse physique et le raisonnement effectué par les travaux de Lemembre et Petit (1998) ainsi que Touhami-Khelifi et al. (2010) quant à la zone proche de l'interface  $Z = 1 : H/100$  adoptée dans leurs travaux. Cette zone adjacente à l'interface  $Z= 1$  est en fait beaucoup plus large. Elle s'étend de  $Z = 0.85$  à  $Z = 0.99 (=1-H/100)$ . L'utilisation de la Loi de Hashemi-Wesson (1971) sans aucune hypothèse physique simplificatrice élargie les études effectuées auparavant en apportant plus de rigueur et de clarté.

# Conclusion Générale et Perspectives

Dans ce travail, l'effet d'une perte de chaleur externe sur le taux d'évaporation de surface du gaz liquéfié stocké dans un réservoir cryogénique partiellement rempli en considérant la convection naturelle et la convection de Marangoni a été abordé. Le problème a d'abord été formulé sous forme adimensionnelle, puis résolu par la méthode des volumes finis. Les effets du nombre de Rayleigh, du nombre de Marangoni et du rapport d'aspect sur la réponse thermique et la dynamique de l'écoulement ont été étudiés. Les résultats de cette étude sont les suivants :

- L'augmentation de la valeur de nombre de Rayleigh  $Ra$  intensifie l'évaporation de surface, ce qui réduit la température de la masse du liquide, en plus de l'accélération de la vitesse de tourbillonnement du tourbillon toroïdal principal.
- L'augmentation de la valeur du nombre de Marangoni, qui peut être considérée comme une contribution significative de l'effet de thermo-capillarité, peut réduire le taux d'évaporation jusqu'à 5%.
- Le niveau de remplissage du réservoir, qui est inversement lié au rapport d'aspect dans cette étude, s'est avéré être un paramètre de contrôle important des phénomènes d'évaporations. Un réservoir avec un faible niveau de remplissage du réservoir (rapport d'aspect élevé) présente le taux d'évaporation le plus élevé, tandis que le remplissage du réservoir réduit le taux d'évaporation.
- Différentes combinaisons des nombres de Rayleigh  $Ra$ , de Marangoni  $Ma$  et de rapport d'aspect ont été envisagées, et les résultats ont montré que le taux d'évaporation (exprimé ici en termes de nombre de Nusselt de la surface libre) en dépend fortement.
- Pour les applications d'ingénierie, les nombres de Nusselt de la surface libre et de la paroi latérale ont été corrélés pour faciliter l'approximation du transfert de chaleur dans la conception et le contrôle des réservoirs. Les corrélations sont valables pour  $10^4 \leq Ra \leq 10^5$ ,  $0.5 \leq AR \leq 2$  et  $Ma \leq 2000$  avec moins de  $\pm 5\%$ .

Enfin, pour éviter les phénomènes d'ébullition des gaz, et par mesure de sécurité, nous recommandons de maintenir un niveau de remplissage élevé dans le réservoir cryogénique. Il sera fructueux d'étudier l'applicabilité des corrélations présentées dans la modélisation thermodynamique et l'altération du GNL.

# Références

- ABDULKADHIM, A., HAMZAH, H. K., ALI, F. H., YILDIZ, Ç., ABED, A. M., ABED, E. M. & ARICI, M. 2021. Effect of heat generation and heat absorption on natural convection of Cu-water nanofluid in a wavy enclosure under magnetic field. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 120, 105024.
- ABTEW, W. & MELESSE, A. 2012. Evaporation and evapotranspiration: measurements and estimations, *Springer Science & Business Media*.
- AHSAN, A. 2011. Evaporation, condensation and heat transfer, London, *IntechOpen*.
- AKHTARUZZAMAN, R., AHMED, A., QUAMRUL-ISLAM, M., SAHA, S. & HASAN, M. N. 2019. Numerical modeling of Marangoni convection in the presence of external magnetic field. *AIP Conference Proceedings*, 2121, 030026.  
<http://dx.doi.org/10.1063/1.5115871>
- ALHASHASH, A. & SALEH, H. 2022. Free convection flow of a heterogeneous mixture of water and nano-encapsulated phase change particle (NEPCP) in enclosure subject to rotation. *Journal of Energy Storage*, 51, 104168.
- ARBIN, N., SALEH, H., HASHIM, I. & CHAMKHA, A. J. 2016. Numerical investigation of double-diffusive convection in an open cavity with partially heated wall via heatline approach. *International Journal of Thermal Sciences*, 100, 169-184.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2015.09.017>
- BASAK, T., ROY, S. & BALAKRISHNAN, A. 2006. Effects of thermal boundary conditions on natural convection flows within a square cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49, 4525-4535.
- BARSI, S. & KASSEMI, M. 2013a. Investigation of tank pressurization and pressure control—Part I: experimental study. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, 5, 041005. <http://dx.doi.org/10.1115/1.4023891>

- BARSI, S. & KASSEMI, M. 2013b. Investigation of tank pressurization and pressure control—part II: numerical modeling. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, 5, 041006. <http://dx.doi.org/10.1115/1.4023892>
- BASHIRI, A. & FATEHNEJAD, L. 2006. Modeling and simulation of rollover in LNG storage tanks. *International Gas Union*.
- BEJAN, A. 2013. *Convection heat transfer*, John wiley & sons.
- BEJAN, A. & KRAUS, A. D. 2003. *Heat transfer handbook*, John Wiley & Sons.
- BELAZIZIA, A. Numerical study of conjugate natural convection in a square enclosure with top active vertical wall. Congrès français de mécanique, 2013. AFM, Maison de la Mécanique, 39/41 rue Louis Blanc, 92400 Courbevoie, France ....
- BERGMAN, T. L. & RAMADHYANI, S. 1986. Combined buoyancy-and thermocapillary-driven convection in open square cavities. *Numerical Heat Transfer*, 9, 441-451. <http://dx.doi.org/10.1080/10407788608913487>
- BEYA, B. B. & LILI, T. 2009. Transient natural convection in 3D tilted enclosure heated from two opposite sides. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 36, 604-613.
- BRUTIN, D. 2015. Droplet wetting and evaporation: from pure to complex fluids, *Academic Press*.
- CALCAGNI, B., MARSILI, F. & PARONCINI, M. 2005. Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below. *Applied Thermal Engineering*, 25, 2522-2531.
- CAO, Y., MANSIR, I. B., MOULDI, A., GEPREEL, K. A., DAHARI, M., LE, T. H., BADRAN, M. F., NGUYEN, V. N. & WAE-HAYEE, M. 2022. Using natural convection mechanism of nanofluid for cooling an embedded hot plate in corner of a square enclosure: A numerical simulation. *Case Studies in Thermal Engineering*, 33, 101926.

- CARPENTER, B. M. & HOMSY, G. M. 1989. Combined buoyant-thermocapillary flow in a cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 207, 121-132.  
<http://dx.doi.org/10.1017/S0022112089002521>
- CATTON, I. Natural convection in enclosures. *International Heat Transfer Conference Digital Library*, 1978. Begel House Inc.
- CHANDRA, R., DAGUM, L., KOHR, D., MENON, R., MAYDAN, D. & MCDONALD, J. 2001. *Parallel programming in OpenMP*, Morgan kaufmann.
- CHEN, S., TÖLKE, J. & KRAFCZYK, M. 2009. Simulation of buoyancy-driven flows in a vertical cylinder using a simple lattice Boltzmann model. *Physical Review E*, 79, 016704.
- CHOI, S. W., LEE, W. I. & KIM, H. S. 2017. Numerical analysis of convective flow and thermal stratification in a cryogenic storage tank. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 71, 402-422. <http://doi.org/10.1080/10407782.2016.1264771>
- CORVARO, F., PARONCINI, M. & SOTTE, M. 2011. Experimental PIV and interferometric analysis of natural convection in a square enclosure with partially active hot and cold walls. *International Journal of Thermal Sciences*, 50, 1629-1638.
- COSSALI, G. E. & TONINI, S. 2021. *Drop Heating and Evaporation: Analytical Solutions in Curvilinear Coordinate Systems*, Springer.
- COTTER, M. A. & CHARLES, M. E. 1993. Transient cooling of petroleum by natural convection in cylindrical storage tanks—II. Effect of heat transfer coefficient, aspect ratio and temperature-dependent viscosity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36, 2175-2185.
- CRESPO DEL ARCO, E., BONTOUX, P., SANI, R., HARDIN, G. & EXTRÉMET, G. 1988. Steady and oscillatory convection in vertical cylinders heated from below. Numerical simulation of asymmetric flow regimes. *Advances in Space Research*, 8, 281-292.
- DAVIS, S. H. 1987. Thermocapillary instabilities. *Annual review of fluid mechanics*, 19, 403-435.



- DESHPANDE, K. B., ZIMMERMAN, W. B., TENNANT, M. T., WEBSTER, M. B. & LUKASZEWSKI, M. W. 2011. Optimization methods for the real-time inverse problem posed by modelling of liquefied natural gas storage. *Chemical Engineering Journal*, 170, 44-52. <http://doi.org/10.1016/j.cej.2011.03.025>
- DOYER, H., GABILLARD, M., LE CLOIREC, A. & UZNANSKI, D. Toward an optimized management of the operating pressure in LNG storage tanks. International gas research conference, 1998. Government Institutes Inc., 744-758.
- DUTTA, S., PATI, S. & BARANYI, L. 2021. Numerical analysis of magnetohydrodynamic natural convection in a nanofluid filled quadrantal enclosure. *Case Studies in Thermal Engineering*, 28, 101507.
- FATOYINBO, H. O. 2013. 8 - Microfluidic devices for cell manipulation. In: LI, X. & ZHOU, Y. (eds.) *Microfluidic Devices for Biomedical Applications*. Woodhead Publishing.
- FU, G., AN, C. & SU, J. 2018. Integral transform solution of natural convection in a cylinder cavity with uniform internal heat generation. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*.
- GERASIMOV, D. N. & YURIN, E. I. 2018. *Kinetics of evaporation*, Springer.
- GHIAASIAAN, S. M. 2018. *Convective heat and mass transfer*, CRC Press.
- HADDAR, M., HAMMAMI, M. & BACCAR, M. 2019. Numerical parametric study of a cooling system for an LNG storage tank. *Oil & Gas Science and Technology–Revue d'IFP Energies nouvelles*, 74, 21. <http://dx.doi.org/10.2516/ogst/2018097>
- HADDAR, M., HAMMAMI, M. & BACCAR, M. 2020. Numerical study of steady natural convection in a liquefied natural gas cylindrical storage tank equipped with baffles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*, 234, 709-721. <http://dx.doi.org/10.1177/0957650919870927>

- HANJALIĆ, K. 2002. One-point closure models for buoyancy-driven turbulent flows. *Annual review of fluid mechanics*, 34, 321-347.
- HANNA, G. & STEPHENS, C. Predicted thermal response of a cryogenic fuel tank exposed to simulated aerodynamic heating profiles with different cryogenes and fill levels. National Heat Transfer Conference, 1991. 4007.
- HASAN, M. F., ZHENG, A. M. & KARIMI, I. 2009. Minimizing boil-off losses in liquefied natural gas transportation. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 48, 9571-9580. <http://dx.doi.org/10.1021/ie801975q>
- HASHEMI, H. T. & WESSON, H. R. 1971. Cut LNG storage costs. *Hydrocarbon Processing*, 50, 117-120.
- HOSSAIN, M. A., HAFIZ, M. & REES, D. 2005. Buoyancy and thermocapillary driven convection flow of an electrically conducting fluid in an enclosure with heat generation. *International Journal of Thermal Sciences*, 44, 676-684. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2004.11.005>
- HUBERT, A., DEMBELE, S., DENISSENKO, P. & WEN, J. 2019. Predicting Liquefied Natural Gas (LNG) rollovers using Computational Fluid Dynamics. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 62, 103922. <http://doi.org/10.1016/j.jlp.2019.103922>
- JALURIA, Y. 1980. Natural convection, heat and mass transfer. *Unknown Host Publication Title*. Pergamon Press.
- JYH-CHEN, C. & FARN-SHIUN, H. 1993. Oscillatory thermocapillary flow in a rectangular cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36, 3743-3749. [http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310\(93\)90054-A](http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310(93)90054-A)
- KAKAC, S., AUNG, W. & VISKANTA, R. 1985. Natural convection: fundamentals and applications. *Washington*.

- KHELIFI-TOUHAMI, M., BENBRIK, A., LEMONNIER, D. & BLAY, D. 2010. Laminar natural convection flow in a cylindrical cavity application to the storage of LNG. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 71, 126-132.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2009.12.011>
- KHELIFI-TOUHAMI, M., 2012. SIMULATION NUMERIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UN BAC DE STOCKAGE DE GNL. Thèse de Doctorat. Faculté de Génie Physique des Hydrocarbures, UM'HAMED BOUGARA, Boumerdes,
- KOSCHMIEDER, E. & PRAHL, S. 1990. Surface-tension-driven Bénard convection in small containers. *Journal of Fluid Mechanics*, 215, 571-583.
- KOZHEVNIKOV, D. A. & SHEREMET, M. A. 2018. Natural convection with evaporation in a vertical cylindrical cavity under the effect of temperature-dependent surface tension. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 30, 83-94.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s00161-017-0586-6>
- KUMAR, S. P., PRASAD, B., VENKATARATHNAM, G., RAMAMURTHI, K. & MURTHY, S. S. 2007. Influence of surface evaporation on stratification in liquid hydrogen tanks of different aspect ratios. *International Journal of Hydrogen Energy*, 32, 1954-1960. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijhydene.2006.08.052>
- LEMEMBRE, A. 1999. *Evolution par convection naturelle d'une stratification formée de deux couches liquides dans un réservoir cylindrique*. Doctoral dissertation, Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris.
- LEMEMBRE, A. & PETIT, J. P. 1998. Laminar natural convection in a laterally heated and upper cooled vertical cylindrical enclosure. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41, 2437-2454. [http://doi.org/10.1016/S0017-9310\(97\)00367-0](http://doi.org/10.1016/S0017-9310(97)00367-0)
- LEONG, S. 2002. Numerical study of Rayleigh-Bénard convection in a cylinder. *Numerical Heat Transfer: Part A: Applications*, 41, 673-683.

- LIANG, S., VIDAL, A. & ACRIVOS, A. 1969. Buoyancy-driven convection in cylindrical geometries. *Journal of Fluid Mechanics*, 36, 239-258.
- LIU, C., FAROUK, N., AYED, H., AOUAINI, F., BOUZGARROU, S. M., MOULDI, A., WAE-HAYEE, M., MOHAMED, A. & JIN, G. 2022. Simulation of MHD free convection inside a square enclosure filled porous foam. *Case Studies in Thermal Engineering*, 32, 101901.
- MACGREGOR, R. & EMERY, A. F. 1969. Free convection through vertical plane layers—moderate and high Prandtl number fluids.
- MAEDA, M., TERMINAL, N. L. & SHIRAKAWA, Y. Development of fluid dynamics simulations for LNG storage tanks to enhance safety, operational flexibility, and cost performance. 15 th Int Conf & Exhibition on Liquefied Natural Gas (LNG15), Spain, 2007.
- MARTYNENKO, O. G. & KHRAMTSOV, P. P. 2005. *Free-convective heat transfer: with many photographs of flows and heat exchange*, Springer Science & Business Media.
- MEHRIZI, A. A., KARIMI-MALEH, H., NADDAFI, M., KARAMAN, O., KARIMI, F., KARAMAN, C. & CHENG, C. K. 2022. Evaporation characteristics of nanofuel droplets: A review. *Fuel*, 319, 123731.
- MOHAMED, M. M., PARIMALARENGANAYAKI, S., KHAN, Q. & MURAD, A. 2021. Review on the use of environmental isotopes for groundwater recharge and evaporation studies in the GCC countries. *Groundwater for Sustainable Development*, 12, 100546.
- MOKADDES ALI, M., AKHTER, R. & ALIM, M. A. 2021. Hydromagnetic natural convection in a wavy-walled enclosure equipped with hybrid nanofluid and heat generating cylinder. *Alexandria Engineering Journal*, 60, 5245-5264.
- MOLDOVAN, S. I., BALASOIU, A. M. & BRAUN, M. 2019. Experimental investigation of natural convection flow in a laterally heated vertical cylindrical enclosure. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 139, 205-212.

- NITHYADEVI, N., KANDASWAMY, P. & LEE, J. 2007. Natural convection in a rectangular cavity with partially active side walls. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50, 4688-4697.
- OLIVESKI, R. D. C., MACAGNAN, M. H., COPETTI, J. B. & PETROLL, A. D. L. M. 2005. Natural convection in a tank of oil: experimental validation of a numerical code with prescribed boundary condition. *Experimental thermal and fluid science*, 29, 671-680.
- OZTOP, H. F., LIOUA, K., NACEUR, B. M. & AL-SALEM, K. 2014. Numerical study of three-dimensional combined buoyancy and thermocapillary convection and evaluation of entropy generation. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. <http://dx.doi.org/10.1108/HFF-10-2011-0225>
- PARONCINI, M., CORVARO, F., MONTUCCHIARI, A. & NARDINI, G. 2012. A numerical and experimental analysis on natural convective heat transfer in a square enclosure with partially active side walls. *Experimental thermal and fluid science*, 36, 118-125.
- PATANKAR, S. V. 2018. *Numerical heat transfer and fluid flow*, CRC press.
- ROH, S. & SON, G. 2012. Numerical study of natural convection in a liquefied natural gas tank. *Journal of mechanical science and technology*, 26, 3133-3140.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s12206-012-0820-x>
- ROH, S., SON, G., SONG, G. & BAE, J. 2013. Numerical study of transient natural convection in a pressurized LNG storage tank. *Applied Thermal Engineering*, 52, 209-220. <http://dx.doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2012.11.021>
- RUDRAIAH, N., VENKATACHALAPPA, M. & SUBBARAYA, C. 1995. Combined surface tension and buoyancy-driven convection in a rectangular open cavity in the presence of a magnetic field. *International journal of non-linear mechanics*, 30, 759-770. [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7462\(95\)00026-K](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7462(95)00026-K)

- SALEEM, M., HOSSAIN, M. A., MAHMUD, S. & POP, I. 2011. Entropy generation in Marangoni convection flow of heated fluid in an open ended cavity. *International Journal of Heat*
- SALEEM, A., FAROOQ, S., KARIMI, I. A. & BANERJEE, R. 2020. CFD analysis of stratification and rollover phenomena in an industrial-scale LNG storage tank. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 59, 14126-14144.  
<http://dx.doi.org/10.1021/acs.iecr.0c02546>
- SARAVANAN, S. & SIVARAJ, C. 2011. Natural convection in an enclosure with a localized nonuniform heat source on the bottom wall. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54, 2820-2828.
- SHAH, R. K. & LONDON, A. L. 1978a. Chapter II - Differential Equations and Boundary Conditions. In: SHAH, R. K. & LONDON, A. L. (eds.) *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. Academic Press.
- SHAH, R. K. & LONDON, A. L. 1978b. Chapter III - Dimensionless Groups and Generalized Solutions. In: SHAH, R. K. & LONDON, A. L. (eds.) *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. Academic Press.
- SHAHRESTANI, A. B., ALSHURAIAAN, B. & IZADI, M. 2021. Combined natural convection-FSI inside a circular enclosure divided by a movable barrier. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 126, 105426.
- SIVARAJ, C., GOWTHAM, S., ELANGO, M. & SHEREMET, M. A. 2022. Analysis of thermo-magnetic convection and entropy generation of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-water nanofluid in a partially heated wavy electronic cabinet. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 133, 105955.  
<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.105955>
- SIVASANKARAN, S., BHUVANESWARI, M., KIM, Y., HO, C.-J. & PAN, K. 2011. Numerical study on magneto-convection of cold water in an open cavity with variable fluid

- properties. *International journal of heat and fluid flow*, 32, 932-942.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2011.07.004>
- TURNER, J. S. 1979. *Buoyancy effects in fluids*, Cambridge university press.
- VAN DRESAR, N., LIN, C. & HASAN, M. Self-pressurization of a flightweight liquid hydrogen tank-Effectsof fill level at low wall heat flux. 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 1992. 818.
- VELARDE, M. G. 2002. Benard Layers with Heat or Mass Transfer. In: VELARDE, M. G. & ZEYTOUNIAN, R. K. (eds.) *Interfacial Phenomena and the Marangoni Effect*. Vienna: Springer Vienna.
- VERMA, M. K. 2018. *Physics of buoyant flows: from instabilities to turbulence*, World Scientific.
- VERSTEEG, H. & MALALASEKERA, W. 1995. *An Introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method*, UK, Longman scientific & Technical.
- WANG, X., XU, Y., WANG, S., XU, Q. & HO, T. C. 2020. Comprehensive study on boil-off gas generation from LNG road tankers under simultaneous impacts of heat leakage and transportation vibration. *Fuel*, 275, 117876.  
<https://doi.org/10.1016/j.fuel.2020.117876>
- WANG, Z., HAN, F., LIU, Y. & LI, W. 2021. Evolution process of liquefied natural gas from stratification to rollover in tanks of coastal engineering with the influence of baffle structure. *Journal of Marine Science and Engineering*, 9, 95.  
<http://dx.doi.org/10.3390/jmse9010095>
- WANG, Z., SHARAFIAN, A. & MÉRIDA, W. 2022. Thermal stratification and rollover phenomena in liquefied natural gas tanks. *Energy*, 238, 121994.  
<https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.121994>

- WEI, T. 2020. Analyses of buoyancy-driven convection. *Advances in Heat Transfer*. Elsevier.
- WONG, S.-C. 2014. The evaporation mechanism in the wick of copper heat pipes. *The Evaporation Mechanism in the Wick of Copper Heat Pipes*. Springer.
- WU, S. & JU, Y. 2021. Numerical study of the boil-off gas (BOG) generation characteristics in a type C independent liquefied natural gas (LNG) tank under sloshing excitation. *Energy*, 223, 120001. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.120001>
- YAMAGUCHI, Y., CHANG, C. & BROWN, R. 1984. Multiple buoyancy-driven flows in a vertical cylinder heated from below. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 312, 519-552.
- ZAKARIA, Z., KAMARULZAMAN, K. & SAMSURI, A. 2017. Rollover phenomena in liquefied natural gas storage: Analysis on heat and pressure distribution through CFD simulation. *Int. J. Innov. Eng. Technol*, 8, 392-400. <http://dx.doi.org/10.21172/ijiet.81.053>



# Annexe 1

## A1.1 Détermination de la densité d'évaporation

$$(Nu^* = C \cdot Ra^{1/3})_{strate} \quad (A1.1)$$

$$(Nu_{fs}^*)_{strate} = q_{ev} e^* / (\lambda \Delta T^*) \quad (A1.2)$$

$$(Ra)_{strate} = \left( \frac{g\beta}{av} \right)^{1/3} \Delta T^{*4/3} \quad (A1.3)$$

En remplaçant les valeurs de Nusselt et de Rayleigh nous obtenons l'équation :

$$q_{ev} = L^* \cdot \dot{m}^* = C\lambda \left( \frac{g\beta}{av} \right)^{1/3} \Delta T^{*4/3} \quad (A1.4)$$

Les auteurs (Hashemi-Wesson, 1971) affirment que la densité du flux d'évaporation  $q_{ev}$  est indépendante de l'épaisseur  $e^*$ . La densité de flux massique d'évaporation  $\dot{m}^*$  s'obtient en divisant  $q_{ev}$  par la chaleur latente de vaporisation  $L^*$  ce qui donne l'équation ;

$$\dot{m}^* = \frac{C\lambda}{L^*} \left( \frac{g\beta}{av} \right)^{1/3} \Delta T^{*4/3} \quad (A1.5)$$

## A1.2 Adimensionnement de la loi de Hashemi-Wesson

$$\begin{aligned} q_{ev} = L^* \cdot \dot{m}^* &= C\lambda \left( \frac{g\beta}{av} \right)^{1/3} \Delta T^{*4/3} = C\lambda \left( \frac{g\beta\Delta T_0^*}{av} \right)^{1/3} \theta^{4/3} \Delta T_0^* \\ &= C\lambda \left( \frac{g\beta\Delta T_0^*}{av} \right)^{1/3} \theta^{4/3} \left( \frac{q_{sw}H}{\lambda} \right) \\ &= C \left( \frac{g\beta\Delta T_0^* H^3}{av} \right)^{1/3} \theta^{4/3} \cdot q_{sw} = C \cdot Ra^{1/3} \theta^{4/3} \cdot q_{sw} \end{aligned} \quad (A1.6)$$

On obtient ainsi la valeur de la densité du flux d'évaporation adimensionnelle :

$$Q_{ev} = \frac{q_{ev}}{q_{sw}} = C \cdot Ra^{1/3} \cdot \theta^{4/3} \quad (A1.7)$$

### A1.3 Adimensionnement des conditions aux limites sur la paroi latérale et la surface libre

Sur la paroi latérale :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=AR} = \frac{H \cdot q_{sw}}{\lambda \cdot \Delta T_0^*} = 1$$

(A1.8)

$$\text{Avec : } q_{sw} = \frac{H}{\lambda \cdot \Delta T_0^*}$$

Sur la surface libre :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right|_{Z=1} = -\frac{H \cdot q_{ev}}{\lambda \cdot \Delta T_0^*} + \frac{H \cdot q_{conv}}{\lambda \cdot \Delta T_0^*} = \frac{q_{conv} - q_{ev}}{\lambda \cdot \Delta T_0^* / H} = \frac{q_{conv} - q_{ev}}{q_{sw}} \quad (\text{A1.9})$$

# Annexe 2

## A2.1 Bilan Thermique

La densité du flux convectif est calculée par la loi de Newton et est donné par:

$$q_{conv} = h \cdot \theta \quad (A2.1)$$

Le bilan thermique dans la phase liquide GNL est donné de la façon suivante :

**Le flux latéral = le flux de surface**

**Le flux de surface = le flux convectif + le flux évaporatif**

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot AR \cdot H \cdot q_{sw} &= \int_0^{AR} 2\pi \cdot h \cdot \theta \cdot R \cdot dR + \int_0^{AR} 2\pi \cdot Q_{ev} \cdot R \cdot dR \\ &= AR \cdot H \cdot q_{sw} = h \cdot \int_0^{AR} \theta \cdot R \cdot dR + \int_0^{AR} Q_{ev} \cdot R \cdot dR \end{aligned} \quad (A2.2)$$

Soit :

$$h \cdot \int_0^{AR} \theta \cdot R \cdot dR = AR \cdot H \cdot q_{sw} - \int_0^{AR} Q_{ev} \cdot R \cdot dR \quad (A2.3)$$

Nous avons :  $H = 1$  et  $q_{sw} = 1$ . Nous obtenons le coefficient de convection  $h$  :

$$h = \frac{AR - \int_0^{AR} Q_{ev} \cdot R \cdot dR}{\int_0^{AR} \theta \cdot R \cdot dR} \quad (A2.4)$$

# Annexe 3

## A3.1 Nombre de Nusselt

Les nombres de Nusselt Locaux latéral et de surface adimensionnels sont définis par les formules suivantes :

Sachant que nous avons :

$$\Delta T_0^* = q_{sw} \cdot H / \lambda \quad (A3.1)$$

Le nombre de Nusselt local latéral :

$$Nu_{sw,loc} = \frac{q_{sw}}{\frac{\lambda}{H}(T_{sw}^* - T_0^*)} = \frac{q_{sw} \cdot H / \lambda}{T_{sw}^* - T_0^*} = \frac{\Delta T_0^*}{T_{sw}^* - T_0^*} = \frac{1}{\theta_{sw}} \quad (A3.2)$$

Le nombre de Nusselt local de surface :

$$Nu_{fs,loc} = \frac{q_{sw}}{\frac{\lambda}{H}(T_{fs}^* - T_0^*)} = \frac{q_{sw} \cdot H / \lambda}{T_{fs}^* - T_0^*} = \frac{\Delta T_0^*}{T_{fs}^* - T_0^*} = \frac{1}{\theta_{fs}} \quad (A3.3)$$

Les valeurs des nombres de Nusselt moyen le long de la paroi latérale et le long de la surface libre sont calculées en intégrant les valeurs locales des nombres de Nusselt respectifs :

$$Nu_{sw,moy} = \int_0^1 Nu_{sw,loc} \cdot dZ \quad (A3.4)$$

$$Nu_{fs,moy} = \frac{2}{AR^2} \int_0^{AR} Nu_{fs,loc} \cdot R \cdot dR \quad (A3.5)$$