

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA - BOUMERDES
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT ENERGETIQUE



MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Energétique

Option : Thermique et Combustion

Intitulé du Sujet :

**Etude théorique en régime périodique d'un écoulement
forcé à plan directeur.**

Présenté par : **AHMED HADIOUCHE**

Encadré par : **K.MANSOURI**

Soutenu le : 28 / 06 / 2008

Devant le jury composé de :

PRESIDENT	M. BALISTROU	MAITRE DE CONFERENCES	UMB BOUMERDES
EXAMINATEUR	S. HANCHI	PROFESSEUR	EMP-ALGER
EXAMINATEUR	K. MOHAMMEDI	MAITRE DE CONFERENCES	UMB BOUMERDES
RAPPORTEUR	K. MANSOURI	MAITRE DE CONFERENCES	UMB BOUMERDES

ANNEE UNIVERSITAIRE 2007-2008

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur KACEM MANSOURI qui m'a encadré, pour l'échange permanent de vues, d'appréciables contributions et une aide efficace dans la relecture de ce mémoire.

J'exprime ma reconnaissance aux Messieurs K. MOHAMMEDI, M. BALISTROU et S. HANCHI d'avoir bien voulu juger ce travail.

J'adresse enfin mes remerciements à mon oncle SAID BOURAS pour sa contribution matérielle à la réalisation délicate de ce travail.

Résumé : Nous traitons à travers ce mémoire le problème de Graetz en régime périodique, dans le cas où la conduction transversale dans la paroi solide est tenue en compte. L'étude comprend trois parties essentielles :

Dans la première partie, une solution exacte utilisant la méthode de la transformation intégrale généralisée est développée pour un écoulement piston dans un conduit à deux plaques parallèles. L'analyse de la réponse thermique est établie, à travers cette solution, en fonction des paramètres thermo-physiques affectant le problème. Un nouveau modèle utilisant la méthode de Ritz est également développé dans cette partie, pour les deux formes géométriques du conduit (deux plaques parallèles et/ ou tube cylindrique) et un profil de vitesse parabolique. Les résultats issus de ce modèle (dit M.V.R) sont validés par rapport à la solution exacte précitée et confrontés avec les travaux utilisant l'hypothèse de l'isothermicité.

La deuxième partie est consacrée à la simulation numérique par la méthode des volumes finis du même problème. Le modèle ici développé est validé par rapport à la solution exacte développée dans la première partie.

Dans la troisième partie, une approche quasi-stationnaire (dite simplifiée) du problème est proposée. Une comparaison avec le modèle analytique (M.V.R) est établie en fonction de la fréquence thermique à l'entrée du conduit. En guise d'application, la fin de cette étude est consacrée à l'étude d'un régénérateur à plaques destiné pour le stockage d'énergie.

Mots clefs : la convection forcée laminaire, régime périodique, écoulement à plan directeur, méthodes variationnelles, approche quasi-stationnaire.

Abstract : In this work, an analysis is made of unsteady laminar heat transfer in a duct with periodically varying inlet temperature and time. The transverse heat transfer in the duct wall is considered. The study includes three essentials parts.

In the first part, an exact solution is developed for the slug flow inside the parallel, by using the generalised integral transformation technique. The thermal behaviour of the system is analysed, through this solution, for several thermo-physicals parameters. Here a new solution (called M.V.R) using the variational method of Ritz is developed for the same problem that account for both shapes ducts (parallel plats and cylindrical channel) with parabolic velocity profile. The outlet results are compared with these of the exact solution and the literatures wherein the isothermal hypothesis of the wall is considered.

The second part is consecrated for the numerical simulation of the same problem by using the finites volumes method. The outlet results are compared with these of the exact solution overmentioned.

In the third part, the quasi-steady approach of this problem is proposed, compared with the outlet results of M.V.R and analysed with respect the inlet frequency. Finally, the study of a regenerator intended to the energy stocktaking is established.

Keywords: conjugated forced convection, periodic inlet temperature, variational methods, quasi-steady approach.

ملخص:

نعالج في هذه الأطروحة، موضوع الحمل الحراري الحتمي في نظام دوري داخل قناة. النقل الحراري العرضي على مستوى الحائط اخذ بعين الاعتبار. الدراسة تحتوي على ثلاثة أجزاء مهمة. في الجزء الأول، حل تام طور باستعمال طريقة التحويل المتكامل، في حالة مقطع سرعة متساو داخل قناة من صفيحتين متوازيتين. الوظيفة الحرارية للنظام درست، عبر هذا الحل، بالنسبة إلى العوامل الفيزيائية المؤثرة على النظام. نموذج جديد طور في هذا الجزء لكل شكل القناة (أنبوب اسطواني و صفيحتين متوازيتين) و مقطع سرعة مكافئ. نتائج النموذج الجديد ثبتت بالنسبة إلى الحل التام المذكور أعلاه. الجزء الثاني خصص للتصنع الكمي بطريقة الأحجام التامة. ثبوت نتائج هذا النموذج كانت بالنسبة للحل التام المطور في الجزء الأول.

في الجزء الثالث، نموذج شبه ثابت (مبسط) طور باستعمال عامل الحمل الحراري على مستوى مماس المائع بالحائط، دراسته تمت بالنسبة إلى التردد الحراري على مدخل القناة. و أخيرا، في إطار تطبيقي، تم دراسة مسترجع حراري متكون من صفائح خصص لتخزين الطاقة الحرارية.

كلمات مفتاح : الحمل الحراري الحتمي الرقائقي، نضام دوري، طريقة التغيرات، النموذج شبه ثابت

NOMENCLATURE

$A_m(x^+), A_w(x^+, 1),$ $A_c(x^+, 0)$ et $A_f(x^+, 1)$	Amplitudes adimensionnelles de la température moyenne de fluide, la température interfaciale, la température axiale et le flux thermique pariétal respectivement.
$[A]$	Matrice définie dans l'équation (3.10).
$[A^*]$	Matrice modifiée, définie dans l'expression (3.11).
a_{kj}^*	Eléments de la matrice $[A^*]$.
a_j	Coefficients définis dans l'équation (5.10a).
a_p^0	Coefficient définis dans l'équation (5.10a).
a^+	Rapport des capacités thermiques $(\rho C)_f R_1 / (\rho C)_s (R_2 - R_1)$.
b^+	Rapport δ / a^+ .
$[b]$	Vecteur défini dans l'expression (3.10).
b_k	Eléments du vecteur $[b]$.
$[B]$	Vecteur défini dans l'expression (3.12).
B_n	Eléments du vecteur $[B]$.
Bi_{ext}	Nombre de Biot $h_{ext} R_1 / k_s$ ou $h_{ext} \ell / k_s$.
Bi_{int}	Nombre de Biot interne $h_{int} R_1 / k_s$.
Bi^+	Nombre de Biot modifié $h_{ext} R_1 / k_f$ ou $h_{ext} \ell' / k_f$.
C	Chaleur massique $[J.kg^{-1}.K^{-1}]$.
$[c]$	Vecteur défini dans le système d'équation (3.10).
$c_n(p)$	Coefficients de la solution approchée.
c_j	Coefficients définis dans l'équation (5.10b).
$[D]$	Matrice définie dans l'expression (3.11).
d_{kj}	Eléments de la matrice $[D]$.
$\tilde{E}_{is}$	Energie interne dans le milieu solide du conduit. [J]
$\tilde{F}_n$	Quantité complexe introduite dans l'expression (3.15c) et (4.20b).
$F_n(x^+)$	Fonctions propres de la solution (2.12).
f_s	Fonction du stockage W_s / H_m .
$G_n(z^+)$	Fonctions propres de la solution (2.12).
H_m	Energie maximale transportée par le fluide. [J]
$\tilde{H}$	Coefficient défini par l'équation (2.10d), (3.3d) et (4.5).
$\tilde{H}_0$	Coefficient défini par la limite (2.21).
h_{ext}	Coefficient de transfert convectif avec l'extérieur. $[W.m^{-2}.K^{-1}]$
h_{int}	Coefficient de transfert convectif interne. $[W.m^{-2}.K^{-1}]$
i	$\sqrt{-1}$.

I	Fonctionnelle ou forme variationnelle.
k	Conductivité thermique. $[\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$
L	Longueur du conduit. $[\text{m}]$
L_0	Largeur des plaques d'un conduit à deux plans parallèles. $[\text{m}]$
ℓ	Epaisseur des plaques du canal. $[\text{m}]$
ℓ'	Demi espacement entre deux plaques parallèles. $[\text{m}]$
$Nu(x^+, t^+)$	Nombre du Nusselt.
p	Variable de Laplace.
Pe	Nombre de Péclet.
$\tilde{P}_n$	Quantité complexe introduite dans l'expression (3.15d) et (4.20a).
Pr	Nombre de Prandtl, ν / α_f .
$Q(t^+)$	Flux thermique total transmis aux parois de conduit.
$\tilde{Q}_n$	Quantité complexe introduite dans l'expression (3.15a) et (4.18a).
r	Coordonnée spatiale dans le cas d'un tube cylindrique. $[\text{m}]$
r^+	Variable adimensionnelle r/R_1 .
r_2^+	R_2/R_1 .
r_{th}	$k_s \ell' / k_f \ell$ ou $\gamma / (r_2^+ - 1)$.
R_1	Distance entre l'axe et la paroi interne de conduit. $[\text{m}]$
R_2	Distance entre l'axe et la paroi externe de conduit. $[\text{m}]$
Re	Nombre de Reynolds défini sur le diamètre hydraulique $\bar{u}D_h/\nu$.
$R(Bi_{ext}, \beta_s)$	Fonction donnée par (6.19d) et (6.20d).
T	Température du fluide. $[\text{K}]$
T_w	Température du mur de conduit. $[\text{K}]$
T_∞	Température ambiante. $[\text{K}]$
t	Variable de temps. $[\text{s}]$
t^+	Temps adimensionnel.
u	Vitesse d'écoulement. $[\text{m.s}^{-1}]$
$\bar{u}$	Vitesse moyenne d'écoulement. $[\text{m.s}^{-1}]$
$u^+(x^+)$	Vitesse adimensionnelle.
W_s	Energie stockée dans les parois du conduit. $[\text{J}]$
$\tilde{W}_n$	Quantité complexe introduite dans l'expression (3.15b) et (4.20c).
x, y et z	Coordonnées spatiales dans le conduit. $[\text{m}]$
x^+, y^+ et z^+	Coordonnées spatiales adimensionnelles.
x_s^+	Longueur adimensionnelle du conduit (l'abscisse axiale à la sortie du conduit).

Lettres Grecs

α	Diffusivité thermique. $[\text{m}^2.\text{s}^{-1}]$
β_s	$(R_2 - R_1)\sqrt{\omega / 2\alpha_s}$ et $\ell\sqrt{\omega / 2\alpha_s}$.
χ	Fonction d'amortissement $\exp(-\gamma x^+)$.

δ	Fréquence adimensionnelle.
Δr^+	Pas transversal.
ΔT	Profil de température dans la section droite d'entrée. [K]
Δx^+	Pas axial.
Δv	Volume de contrôle adimensionnel.
γ	k_s/k_f .
η	Caractérise l'amortissement, défini par l'équation (7.5a).
$\phi_m(x^+), \phi_w(x^+,1),$ $\phi_c(x^+,0)$ et $\phi_f(x^+,1)$	Déphasages adimensionnels de la température moyenne de fluide, la température interfaciale, la température axiale et le flux thermique pariétal respectivement.
Γ	$\alpha_f \ell^2 / \alpha_s \ell'^2$.
Γ^+	α_f / α_s .
φ	Flux thermique adimensionnel.
μ_n	Valeurs propres de la matrice $[A^*] [D]$.
$\mu(x^+)$	Définie par l'équation (6.8) et (6.23).
ν	Viscosité cinématique propre du fluide. [m ² .s ⁻¹]
θ	Température adimensionnelle.
ρ	Masse volumique. [kg.m ⁻³]
σ	Valeurs propres (solutions de l'équation transcendante).
τ	Période du signal d'entrée. [s]
ω	Fréquence d'entrée. [rd.s ⁻¹]
ξ	Caractérise le déphasage, défini par l'équation (7.5b).

Indices et symboles

—	Transformées de Laplace sur la direction axiale.
$\sim$	Transformée intégrale et les expressions complexes.
c	Température sur l'axe du conduit.
m	Température moyenne.
w	Température de solide et interfaciale.
f, s	Propriétés physiques du fluide et du solide respectivement.

SOMMAIRE

Remerciements	i
Résumé	ii
NOMENCLATURE	iii
INTRODUCTION	1

CHAPITRE 1

Recherche bibliographique	3
1.1. Etat de l'art	3
1.2. Revue Bibliographique	4
1.2.1. Ecoulement soumis à des conditions transitoires à la paroi	4
1.2.2. Ecoulement soumis à des conditions transitoires à l'entrée du canal	6
<i>a.</i> Méthodes analytiques	7
• Régime laminaire	7
• Régime turbulent	15
<i>b.</i> Méthodes expérimentales	16
1.3. Conclusion	17

CHAPITRE 2

Etude analytique d'un écoulement laminaire entre deux plaques parallèles en régime périodique (vitesse uniforme)	18
2.1. Description du problème	18
2.2. Hypothèses simplificatrices	18
2.3. Formulation du problème	19
2.4. Détermination du champ des températures en régime périodique établi	20
2.5. Résolution du problème	20
2.6. Etude des cas limites	23
2.6.1. Cas d'une paroi isolée de milieu extérieur ($Bi_{ext} = 0$)	23
2.6.2. Cas de température imposée	24
2.6.3. Cas des basses fréquences	24
2.7. Discussion de l'hypothèse d'isothermicité	24
2.8. Résultats et discussion	25

2.8.1.	Température interfaciale	25
2.8.2.	Température moyenne de fluide	26
2.8.3.	Flux thermique à l'interface du contact fluide-paroi	28
2.8.4.	Influence du paramètre a^+ sur les températures de mélange et interfaciale	29
2.8.5.	Diffusion transversale	30
2.8.6.	Influence du nombre de Biot sur les températures	31
2.8.7.	Discussion de l'hypothèse d'isothermicité des plaques du conduit	32
2.9.	Conclusion	33

CHAPITRE 3

Utilisation de la méthode de Ritz pour la résolution du problème de Graetz en régime périodique (cas de deux plaques parallèles)	34
--	----

3.1.	Introduction	34
3.2.	Formulation du problème	34
3.3.	Résolution du problème	36
3.4.	Validation de la méthode	38
3.5.	Résultats et commentaires	40

CHAPITRE 4

Utilisation de la méthode de Ritz pour la résolution du problème de Graetz en régime périodique (cas du tube cylindrique)	44
---	----

4.1.	Introduction	44
4.2.	Description et formulation du problème	44
4.3.	Résolution du problème	46
4.4.	Calcul de la température moyenne de fluide	49
4.4.1.	Cas d'une vitesse parabolique	49
4.4.2.	Cas d'une vitesse uniforme	49
4.5.	Calcul du flux thermique, la température axiale et la température interfaciale	50
4.7.	Cas d'une paroi mince	51
4.8.	Résultats et discussion	52

CHAPITRE 5

Simulation numérique par la méthode des volumes finis	56
---	----

5.1.	Introduction	56
5.2.	Mise en équations	56
5.3.	Adimensionnement du problème	57
5.4.	Résolution du problème	58

5.4.1.	Justification du choix de la méthode	58
5.4.2.	Restriction de la dimension de temps	58
5.4.3.	Principe de la méthode	59
•	1ere étape : le maillage	59
•	2eme étape : l'intégration	60
5.4.4.	Discrétisation du problème	60
5.4.5.	Implémentation des conditions aux limites	62
5.5.	Résolution du système d'équations	65
5.6.	Réapparition de la variable de temps	65
5.7.	Validation des résultats	66
5.8.	Résultats et commentaires	70

CHAPITRE 6

	Etude analytique du modèle quasi-stationnaire	74
6.1.	Introduction	74
6.2.	Modèle quasi-stationnaire du problème de Graetz en régime périodique	75
6.2.1.	Mise en équations et résolution	75
6.2.2.	Résultats et validation du modèle simplifié	76
6.3.	Problème conjugué	78
6.3.1.	Mise en équations	78
6.3.2.	Résolution du problème	80
6.3.3.	Etude des cas limites	81
•	Flux nul et température imposée à la paroi externe	81
•	Paroi mince et/ou capacité thermique du conduit très importante	82
6.3.4.	Résultats et commentaires	83

CHAPITRE 7

	Application : Stockage d'énergie dans un régénérateur à plaques	86
7.1.	Position de problème	86
7.2.	Fonction de transfert	87
7.3.	Bilan énergétique et fonction de stockage	88
7.4.	Etude et discussion des résultats	89
7.4.1.	Filtrage	89
a.	Etude de l'amortissement	89

•	Influence de la surface d'échange	90
•	Influence de l'écartement entre plaques	91
<i>b.</i>	Etude du déphasage	93
<i>c.</i>	Etude comparative entre le modèle simplifié et le modèle variationnel (M.V.R)	95
7.4.2.	Stockage	95
7.5.	Conclusion	98
CONCLUSIONS		99
REFERENCES		101
ANNEXE (1)	Formulation variationnelle et résolution (méthode de Ritz)	105
ANNEXE (2)	Résolution de l'équation transcendante $\sigma \operatorname{tg} \sigma = \tilde{H}$	113

INTRODUCTION

Les transferts thermo-convectifs en régime instationnaire concernent une grande variété de situations industrielles. En particulier, on peut citer les problèmes liés aux phases d'arrêt et de démarrage d'un échangeur de chaleur dans une centrale de puissance ou le fonctionnement périodique de certaines machines telles que les chaudières solaires.

Si le régime permanent a fait l'objet de nombreuses recherches, la littérature scientifique concernant la convection forcée en régime transitoire reste encore limitée. La majorité des travaux effectués à ce jour est d'ordre théorique. Il s'agit essentiellement de développer de nouvelles méthodes (analytiques ou numériques) pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Les cas étudiés se distinguent par la nature des écoulements (laminaire ou turbulent), des conditions aux limites, des hypothèses simplificatrices émises ou encore du choix du signal d'excitation.

Les problèmes d'interactions fluide-paroi nécessitent le traitement simultané des équations de bilan énergétique dans les deux milieux en présence ainsi que la continuité des flux thermiques et des températures à l'interface. Les solutions analytiques pour ce type de problème apparaissent comme l'exception, et des hypothèses simplificatrices parfois physiquement discutables sont nécessaires. Toutefois ces solutions présentent l'intérêt de tester des méthodes numériques qui s'imposent comme la seule voie envisageable.

Dans la pratique industrielle, on réduit considérablement la difficulté d'analyse en transposant aux problèmes instationnaires la notion de coefficient d'échange issue du régime permanent. On traite ce qu'il est convenu d'appeler un modèle quasi-stationnaire. La question qui se pose concerne la limite d'une telle approche simplificatrice dans son pouvoir de prédiction.

Dans la présente étude on traite un cas particulier des régimes variables à savoir la réponse fréquentielle d'un système à plaques parallèles (et tube cylindrique) parcouru par un fluide en régime laminaire. Les paramètres thermo-physiques qui conditionnent la fonction de transfert tels que la fréquence du signal thermique d'entrée, l'épaisseur des parois ou le rapport des capacités thermiques fluide/ solide sont étudiés.

Notre travail comporte trois parties distinctes. Après un exposé bibliographique, la première partie est consacrée à une étude théorique où l'on traite analytiquement le cas de l'écoulement " piston " en régime laminaire. Il nous servira par la suite de référence pour une approche variationnelle utilisant la méthode de Ritz et une modélisation numérique dans des cas plus réalistes. Les deux configurations géométriques (plaques parallèles et conduit cylindrique) sont traitées dans cette partie.

La deuxième partie concerne la résolution numérique du problème couplé et fait intervenir la condition limite rigoureuse de continuité des flux et des températures à l'interface solide-fluide. Dans le régime laminaire le champ des vitesses est considéré établi parabolique.

Dans la troisième partie de notre travail on traite le modèle quasi-stationnaire faisant intervenir le coefficient d'échange à l'interface. Un balayage en fréquence permet une étude comparative avec les solutions exactes développées dans la deuxième partie. En fin une application pratique à un module de stockage d'un régénérateur à plaques est présentée. La fonction de transfert et l'optimisation du stockage d'énergie dans le module sont étudiées. L'utilisation de la méthode variationnelle pour traiter un problème conjugué en régime périodique constitue l'originalité de ce travail.

Recherche bibliographique.

1.1.Etat de l'art :

« La littérature dans ce domaine est limitée », une expression tirée du travail de S. Kakaç et Y. Yener [14]. Depuis, de nombreux travaux ont été effectués dans le domaine de la convection forcée dans un conduit dont l'historique remonte à l'année 1883 avec le problème de **Graetz** [1]. Il s'agit d'un écoulement laminaire, incompressible, permanent, à propriétés thermophysiques constantes, ce qui s'écrit:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1.1)$$

$$f_i(x, r, t) = 0. \quad (1.2)$$

Les équations relatives au régime transitoire sont écrites pour la première fois après 60 ans par Profos en 1943. En fait, de nombreux auteurs ont poursuivi ces travaux avec des applications pratiques. A cette époque, les chercheurs font appel à la notion de coefficient d'échange h (modèle quasi-stationnaire).

Dans les années 60, exactement en 1968, E.M. Sparrow et De Farrias [13] furent les premiers à résoudre analytiquement le problème de convection forcée transitoire. Ils constatent en étudiant un écoulement laminaire entre deux plans parallèles avec une température d'entrée sinusoïdale, que même le coefficient d'échange $h(t)$ varie périodiquement en fonction du temps. Depuis, une course est lancée à la résolution analytique de ce type de problème avec différentes conditions aux limites, voir [14-36].

H. Kawamura [2] développe une solution numérique pour le cas d'un écoulement turbulent dans une conduite cylindrique dont la paroi est soumise à un échelon de température. L'auteur conclut que le coefficient d'échange devient constant après une certaine durée $t^+ > 2$.

P. Pierson et J. Padet [3] ont étudié le comportement du coefficient d'échange « h » sur un cas simple de régime transitoire. Ils constatent que le seul cas où h est constant est dans une phase exponentielle avec un régime final uniforme.

En conclusion, le modèle quasi-stationnaire ne peut être utilisé que par précaution dans les problèmes transitoires. Pour cela, de nombreux travaux ont été entamés sur la résolution analytique complète des problèmes de convection forcée transitoire entre fluide et paroi sans faire intervenir le coefficient d'échange h .

1.2.Revue bibliographique :

Dans ce qui suit, nous avons classé les travaux relatifs aux problèmes de convection forcée dans un conduit, en deux classes :

1.2.1.Ecoulement soumis à des conditions transitoires à la paroi :

Dans cette classe on distingue de nombreux types de conditions à la paroi :

- Echelon de température.
- Echelon de flux.
- Fonctions arbitraires dans l'espace et le temps de la température ou du flux thermique.

R. Siegel et M. Perlmutter [4] traitent le transfert de chaleur en régime transitoire entre deux plans parallèles dont la résistance thermique est négligeable. La variation spatio-temporelle du flux thermique à la paroi est de la forme suivante :

$$\frac{q}{q_r} = (1 - e^{-Ax})(1 - e^{-B\theta}). \quad (1.3)$$

A et B sont des constantes, θ et x sont les expressions adimensionnelles de temps et de l'espace.

La réponse de la paroi est aussi examinée en utilisant un modèle simplifié avec un coefficient d'échange constant ($Nu=12$).

R. Siegel et E. M. Sparrow [5] s'intéressent aux transferts dans la zone de développement de la couche limite thermique d'un fluide en écoulement laminaire dans la zone d'entrée d'un canal. La réponse à un échelon de flux et de température à la paroi est déterminée puis comparée aux résultats d'une approche numérique (différences finies).

M. Perlmutter et R. Siegel [6] consacrent leur travail à l'étude d'un écoulement transitoire entre deux plaques parallèles. Le processus transitoire est déclenché en agissant simultanément sur la pression du fluide et la température de la paroi. Le profil des vitesses est déterminé par les équations :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.4a)$$

$$\frac{u}{\bar{u}_2} = \frac{3}{2}(1-y^2) - 6 \left(1 - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{E_i^3} \exp(-E_i^2 \tau) \cos(E_i y), \quad (1.4b)$$

avec $E_i = (i + 0.5)\pi$, $\bar{u}_1$: La vitesse moyenne initiale et $\bar{u}_2$: La vitesse à l'état stationnaire.

Pour une résistance de paroi négligeable, ils obtiennent pour l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left[(1-y^2) - 4 \left(1 - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{E_i^3} \exp(-E_i^2 \tau) \cos(E_i y) \right] \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (1.5)$$

en utilisant la méthode de séparation de variables, la solution suivante:

$$T = 1 - \sum_{i=0}^4 b_{i0} \Psi_i(y) F_i(x, \tau), \quad (1.6)$$

avec Ψ et F représentent les fonctions propres.

R. M. Cotta et M. N. Ozisik [7] traitent le transfert thermique transitoire des fluides Newtoniens dans un conduit cylindrique et entre deux plans parallèles. La paroi est soumise à des variations par échelon de la température. La résolution a été réalisée par la combinaison de deux techniques, la transformée de Laplace et la technique de transformation intégrale généralisée, voir [33-35]. Une confrontation des résultats a été effectuée avec une solution numérique (différences finies).

Pour le même problème, voici quelques travaux utilisant les méthodes numériques :

T. F. Lin et J. C. Kuo [8] traitent numériquement, par un schéma aux différences finies, un écoulement laminaire dans un tube cylindrique dont la paroi est soumise à un échelon du flux uniforme. Le couplage solide-fluide a été traité par les conditions du contact parfait. La diffusion dans la paroi est prise en considération. L'auteur montre l'influence des paramètres physiques et géométriques sur les variations longitudinales de la température interfaciale, de la température moyenne de fluide et du flux thermique pariétal. Les résultats sont représentés graphiquement pour deux valeurs du nombre de Peclet, des rapports des rayons R_0/R_i , des diffusivités α_w/α_f et des conductivités thermiques k_w/k_f . Les variations radiales des températures sont également représentées pour des abscisses données.

Les indices w et f sont relatifs respectivement au solide et au fluide.

R_0 et R_i sont respectivement les rayons externes et interne du tube.

α et k sont respectivement la diffusivité et la conductivité thermique.

S. Aboudi et F. Pabini [9] traitent numériquement, par un schéma implicite de type Crank Nicholson, le problème d'écoulement fluide entre deux plans parallèles en régime laminaire et turbulent. Le plan supérieur est soumis à une condition de flux instationnaire et le plan inférieur est isolé. Les transferts d'énergie par rayonnement, conduction et convection sont pris en compte. Le profil des températures et le coefficient du transfert métal fluide sont déterminés en tout point du canal. Les résultats obtenus sont ensuite comparés à ceux du modèle quasi-statique ou simplifié (*MS*), en faisant intervenir un coefficient de transfert métal fluide '*H*' utilisé de façon classique.

H. Kawamura [10] étudie le problème d'un écoulement turbulent dans un conduit tubulaire avec une source de chaleur uniforme à la paroi interne et qui croît dans le temps. Dans la référence [11] le même auteur étudie l'écoulement turbulent d'eau dans un conduit cylindrique réchauffé par échelon dans le temps.

Plus récemment, **D. T. W. Lin et al [12]** traitent le problème de convection forcée transitoire d'un écoulement laminaire établi, dans un conduit à deux plaques parallèles. L'entrée du conduit est soumise à une température constante. La plaque inférieure est isolée du milieu extérieur et la plaque supérieure est soumise à un flux thermique variable dans l'espace et dans le temps.

En effet, en considérant la diffusion transversale dans les plaques, l'auteur a proposé un modèle utilisant les méthodes inverses à base de l'algorithme gradient conjugué, pour fournir une meilleure estimation du flux thermique dans la paroi supérieure. L'objectif de cette étude est de réduire les erreurs d'estimation. En remédiant à ce problème, l'auteur a conclu que l'efficacité de ce modèle dépend de la situation des thermocouples implantés dans le fluide et dans le solide. Les solutions inverses sont données, pour différents types du flux thermique, dans la même référence.

1.2.2. Écoulements soumis à des conditions transitoires à l'entrée du canal :

On distingue également dans cette classe plusieurs types de conditions thermiques à l'entrée du conduit. On s'intéresse dans ce qui suit à la condition d'entrée périodique de la température : $T(0, y, t) = T_0 + \Delta T_0 \sin(\omega t)$. (1.7)

De nombreux travaux sont menés pour la résolution de ce type de problème, qu'on peut diviser en deux sous classes selon la méthode de résolution utilisée :

a.Méthodes analytiques:

En effet, dans cette classe on distingue plusieurs travaux [13-29], nous avons choisis un classement par ordre du régime d'écoulement, le régime laminaire puis le régime turbulent.

• Régime laminaire :

La plus grande contribution fut le travail de **E. M. Sparrow et F. N. De Farrias [13]**, qui ont analysé sur le plan théorique la réponse thermique d'un écoulement laminaire soumis à des variations sinusoïdales de la température d'entrée. Le couplage fluide paroi est traité en écrivant un bilan thermique à l'interface (contact parfait). La chaleur massique de la paroi est prise en considération comme indiquée ci-dessous :

$$(\rho C)_w \ell \frac{\partial T_w}{\partial t} = q \quad (1.8a)$$

$$T_w(x, t) = T_f(x, \ell', t) \quad (1.8b)$$

$$q = -k \frac{\partial T_f}{\partial y} \Big|_{y=\ell'} . \quad (1.8c)$$

Le profil de vitesse est supposé uniforme (écoulement piston) et la paroi isotherme.

Le problème conduit à l'équation d'énergie dont la solution s'obtient par la résolution du problème aux valeurs propres complexes. La distribution de température est recherchée sous la forme :

$$\theta_f(x, y, t) = A \exp(i\omega t) X(\chi) Y(\eta), \quad (1.9)$$

avec :
$$\begin{cases} X(\chi) = \exp(-\lambda_n^2 \chi) \exp(-i(\ell'^2/\alpha) \omega \chi) \\ Y(\eta) = \cos(\lambda_n \eta) \end{cases}$$

$$\eta = \frac{y}{\ell'} ; \chi = \frac{4x}{\ell' P_e} \text{ et } \lambda_n = \nu_n + i\delta_n \text{ racines de l'équation transcendante :}$$

$$\lambda \tan(\lambda) = ib^+ . \quad (1.10)$$

La deuxième partie de l'étude concerne l'approche quasi-stationnaire en supposant un coefficient d'échange local h constant. Les résultats sont présentés pour des nombres de Nusselt différents. L'auteur a tiré la conclusion suivante : Dans une gamme de condition opératoire, le modèle quasi stationnaire est capable de prédire avec précision, spécialement lorsqu'il utilise un coefficient de transfert de chaleur variable dans l'espace.

S. Kakaç et Y. Yener [14] proposent une solution exacte de l'équation de la convection forcée pour un écoulement établi entre deux plaques parallèles avec une température d'entrée sinusoïdale. Pour simplifier le problème, le profil de vitesse est considéré uniforme. D'une manière totalement différente à [13], l'épaisseur de la plaque n'apparaît pas, ce qui a conduit à écrire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad 0 < y < \ell'; x > 0; t > 0 \quad (1.11a)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad x > 0; t > 0 \quad (1.11b)$$

$$k \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{\ell'} + h \theta|_{\ell'} = f(x), \quad x > 0; t > 0 \quad (1.11c)$$

$$\theta(0, y, t) = \sin(\omega t), \quad 0 \leq y \leq \ell'; t > 0. \quad (1.11d)$$

La solution est décomposée en une fonction θ_2 décrivant le problème transitoire et la fonction θ_1 relative au régime permanent. En utilisant la technique de la transformation intégrale, ils ont obtenu une solution générale de type :

$$\theta_c(x, y, t) = \exp\left(-i(\omega t - \delta x)\right) \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n^2 x) K_n(y) \bar{\zeta}(0), \quad (1.12)$$

avec : $\bar{\zeta}(0) = \frac{\sin(\lambda_n \ell')}{\lambda_n \sqrt{\frac{\ell'}{2} + \frac{1}{4\lambda_n} \sin(2\lambda_n \ell')}} , K_n(0) = \frac{\cos(\lambda_n y)}{\sqrt{\frac{\ell'}{2} + \frac{1}{4\lambda_n} \sin(2\lambda_n \ell')}} .$

λ_n : sont les valeurs propres.

Les variations d'amplitude et de déphasage sont présentées graphiquement pour différentes valeurs des fréquences et du nombre de Reynolds. Ainsi, les résultats analytiques sont confirmés aux résultats expérimentaux.

R. M. Cotta et M. N. Ozisik [15] ont étudié le problème du transfert de chaleur transitoire en géométries plane et cylindrique. La paroi est considérée sans épaisseur et la température pariétale constante dans l'espace et dans le temps (isotherme). A l'entrée, la température du fluide varie de manière sinusoïdale avec le temps. Contrairement à [14], le profil transversal de vitesse est considéré parabolique établi. Le problème à résoudre s'écrit alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U(R) \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{1}{R^n} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^n \frac{\partial \theta}{\partial R} \right), \quad 0 < R < 1; Z > 0; \tau > 0 \quad (1.13a)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=0} = 0, \quad Z > 0; \tau > 0 \quad (1.13b)$$

$$\theta(1, Z, \tau) = 0, \quad Z > 0; \tau > 0 \quad (1.13c)$$

$$\theta(R, 0, \tau) = \exp(i\Omega t), \quad 0 \leq R \leq 1; \tau > 0. \quad (1.13d)$$

$n=0$ pour une géométrie plane et $n=1$ pour un tube cylindrique.

Les paramètres sans dimension utilisés sont :

$$R = \frac{r}{b}; Z = \frac{\alpha z}{u b^2}; \tau = \frac{\alpha t}{b^2}; U(R) = \frac{u(r)}{u}; \Omega = \frac{\omega b^2}{\alpha} \text{ et } \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_0}.$$

La technique de la transformation intégrale généralisée, voir [33] permet de se ramener au problème suivant :

$$\frac{\partial \bar{\theta}_k(Z)}{\partial Z} + \mu_k^2 \bar{\theta}_k(Z) + i\Omega \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \bar{\theta}_j(Z) = 0, \quad Z > 0 \quad (1.14a)$$

$$\bar{\theta}_k(0) = \bar{f}_k = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{N_k}} R^n u(R) \psi(\mu_k, R) dR, \quad (1.14b)$$

$$\text{avec : } a_{kj} = a_{jk} = \frac{1}{\sqrt{N_k N_j}} \int_0^1 R^n \psi(\mu_j, R) \psi(\mu_k, R) dR.$$

La solution obtenue s'écrit :

$$\theta(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_i}} \bar{f}_i \psi(\mu_i, R) \exp(-i\Omega a_{ii} Z). \quad (1.15)$$

$\psi(\mu_k, R)$ et μ_k sont les fonctions propres et les valeurs propres.

Les résultats concernant les amplitudes et les retards de phase sont données, pour les deux géométries, dans la même référence.

W. S. Kim, R. M. Cotta et M. N. Ozisik [16] ont étudié un problème analogue au précédent, avec une fonction transitoire quelconque de la température d'entrée. La méthode utilisée est la technique de transformée de Laplace suivie de la transformation intégrale généralisée. L'originalité dans cette étude réside dans le fait que les éléments de la matrice a_{ij} (vue précédemment) hors diagonale sont pris en compte. De plus, les résultats concernant la température moyenne de fluide sont représentés graphiquement pour les deux géométries.

D'une manière différente, **W. S. Kim et M. N. Ozisik [17]** traitent un problème similaire avec une température d'entrée périodique, en utilisant les méthodes numériques

(Runge-Kutta et la méthode de tire, voir [36]) pour résoudre le problème adjoint. L'auteur donne une solution généralisée pour les deux cas de géométries du conduit. Les résultats sont présentés (dans la même référence) graphiquement pour les amplitudes de la température moyenne de fluide et la température pariétale et sous forme tabulée pour les valeurs propres et les fonctions propres.

S. Kakaç, W. Li et R. M. Cotta [18] généralisent leurs travaux en essayant d'obtenir beaucoup plus de précision sur ce type de problème, par la prise en compte de la chaleur massique du conduit et l'échange convectif avec l'extérieur, tel est donné par l'équation :

$$h_e(T - T_\infty) + k \frac{\partial T}{\partial y} + (\rho C)_w L \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad y = d; \quad x > 0; \quad t > 0. \quad (1.16)$$

Une solution analytique exacte est obtenue à travers l'extension de la technique de la transformation intégrale généralisée. En évitant complètement le problème complexe de Sturm-Liouville, on est amené face à un autre problème de type :

$$\frac{\partial \bar{\theta}_k}{\partial z} + A_{kj}^+ \bar{\theta}_k = 0, \quad \xi > 0 \quad (1.17a)$$

$$\bar{\theta}_k(0) = \bar{f}_k = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{N_k}} u(\eta) \Delta \theta(\eta) Y_k(\eta) d\eta, \quad (1.17b)$$

où : $A_{ij}^+ = \delta_{ij} \lambda_j + i\Omega a_{ij}$ et $a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N_i N_j}} \left[\frac{Y_i(1) Y_j(1)}{a^*} + \int_0^1 Y_i(\eta) Y_j(\eta) d\eta \right],$

avec $\eta = \frac{y}{d}$; $\xi = (x/D_e)(D_e/d)^2 / (\text{Re Pr})$.

Afin de faciliter l'intégration, le problème différentiel (1.17) est tronqué à l'ordre N, seulement les éléments diagonaux de la matrice $[A^+]$ sont pris en considération. Une analyse expérimentale du phénomène a permis d'étudier l'influence du nombre de Reynolds, de la fréquence d'entrée, du nombre de Biot et des rapports des capacités thermiques sur l'amplitude et le déphasage. Comparés aux résultats analytiques, les résultats expérimentaux présentent des écarts importants, cela est dû à la considération d'une température transversale uniforme dans la section d'entrée du conduit. L'auteur montre en fin que le déphasage au long du conduit est proportionnel au nombre de Reynolds.

W. Li et S. Kakaç [19] présentent une étude théorique de la convection forcée laminaire, comparable à celle présentée dans la référence précédente, avec trois cas de conditions aux limites. Le premier avec un flux pariétal uniforme, le deuxième cas avec la convection externe et le troisième cas en tenant compte de la capacité calorifique de la paroi.

Seulement que, l'auteur dans cette étude prend en considération les autres éléments de la matrice $[A^+]$ et passe à la résolution de l'équation différentielle (1.17) dont la solution est

$$\text{donnée par : } \bar{\theta}_k(\xi) = \sum_{n=1} C_n \theta_{nk} \exp(-\mu_n \xi). \quad (1.18)$$

Les amplitudes et les retards de phase sont présentés graphiquement et sous forme tabulée les valeurs propres μ_n et θ_{kn} .

R. O. C. Guèdes et R. M. Cotta [20] étudient analytiquement le transfert thermique transitoire d'un écoulement laminaire entre deux plans parallèles de longueur L^+ (cf. Fig.1.1). L'entrée du canal est soumise à des perturbations périodiques de température. Le gradient transversal de température dans la plaque est négligé, mais ils retiennent les informations de la conduction axiale dans la plaque, tels que :

Dans la paroi :

$$\bar{\alpha} \frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial R^2} + \frac{1}{16P_e^2} \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial Z^2}, \quad 1 < R < \delta; 0 < Z < L; \tau > 0 \quad (1.19a)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_s}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta_s}{\partial Z} \right|_{Z=L} = 0, \quad 1 \leq R \leq \delta; \tau > 0 \quad (1.19b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_s}{\partial R} \right|_{R=\delta} + Bi^*(\theta_s - \theta_\infty) = 0, \quad 0 < Z < L; \tau > 0. \quad (1.19c)$$

Dans le fluide :

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \tau} + W(R) \frac{\partial \theta_f}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial Z^2}, \quad 0 < R < 1; Z > 0; \tau > 0 \quad (1.19d)$$

$$\theta_f = \exp(i\Omega\tau), \quad 0 \leq R \leq 1; Z = 0; \tau > 0 \quad (1.19e)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial R} \right|_{R=0} = 0, \quad Z > 0; \tau > 0. \quad (1.19f)$$

Les conditions du contact fluide-solide :

$$\theta_f = \theta_s, \quad R = 1; Z > 0; \tau > 0 \quad (1.19g)$$

$$\hat{K} \left. \frac{\partial \theta_f}{\partial R} \right|_{R=1} = \left. \frac{\partial \theta_s}{\partial R} \right|_{R=1}, \quad Z > 0; \tau > 0. \quad (1.19h)$$

Les quantités adimensionnelles introduites sont :

$$R = \frac{r}{r_1}; \quad Z = \frac{\alpha_f z}{\bar{u} D_h^2}; \quad L = \frac{\alpha_f L^*}{\bar{u} D_h^2}; \quad \hat{K} = \frac{k_f}{k_s}; \quad Bi^* = \frac{hr_1}{k_s}; \quad \tau = \frac{\alpha_f t}{r_1^2}; \quad \Omega = \frac{\omega r_1^2}{\alpha_f}; \quad \theta = \frac{T - T_e}{\Delta T_e};$$

$$U(R) = \frac{u(r)}{\bar{u}} \text{ et } W(R) = \left(\frac{r_1}{D_h} \right)^2 U(R).$$

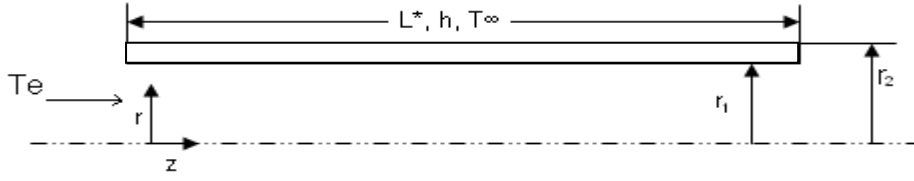


Fig. 1. 1 : Géométrie du canal étudié.

En introduisant les températures complexes pour le fluide et la paroi et en utilisant la technique de la transformation intégrale généralisée, le problème se ramène à la recherche de valeurs et vecteurs propres. Les variations d'amplitude et de déphasage de la température interfaciale, du flux à la paroi et de la température moyenne de fluide sont présentées, le long du conduit, pour différents a^+ .

J. S. Travelho et W. F. N. Santos [21] ont donné une solution d'un problème analogue à celui traité dans [13]. Dans les travaux présentés jusqu'à présent, les solutions sous forme de série sont fonction de valeurs propres et fonctions propres complexes. L'auteur ici tente une résolution évitant complètement cette démarche. La solution générale du problème est donnée par :

$$\tilde{\psi}(x, s) = C_1(s)e^{\sqrt{s}x} + C_2(s)e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s}. \quad (1.20)$$

s: variable de Laplace sur la variable z.

$C_1(s)$ et $C_2(s)$ sont obtenues à l'aide des conditions aux limites.

Une inversion analytique de l'équation (1.20) est obtenue à l'aide des tables des transformées (Roberts et Kaufmann, 1966). La solution originale est donc :

$$\psi(x, z) = 1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{1 \pm x}{2\sqrt{z}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{3 \pm x}{2\sqrt{z}}\right) - 4ib^+ \sqrt{\frac{z}{\pi}} \exp\left(-\frac{(3 \pm x)^2}{4z}\right) + \exp\left(-\frac{(1 \pm x)^2}{4z}\right) \times \\ W\left[-b^+ \sqrt{z} + i\left(\frac{1 \pm x}{2\sqrt{z}}\right)\right] - \left[1 - 2ib^+(3 \pm x + 2ib^+z)\right] \exp\left(-\frac{(3 \pm x)^2}{4z}\right) W\left[-b^+ \sqrt{z} + i\left(\frac{3 \pm x}{2\sqrt{z}}\right)\right].$$

la fonction W est donnée dans la même référence.

Les amplitudes et les déphasages sont présentés graphiquement et comparés aux résultats obtenus par les méthodes décrites auparavant. L'auteur a conclu que la solution est beaucoup plus précise lorsque $z \leq 1$.

K. Mansouri et B. Fourcher [22] présentent une étude du transfert thermique d'un écoulement laminaire entre deux plans parallèles (cf. Fig.1.2) avec une température d'entrée périodique. L'originalité de ce travail se trouve dans l'analyse rigoureuse de l'influence de

l'épaisseur de plaque (qui était autre fois ignorée dans [13-19]), de la fréquence et du nombre de Biot sur la réponse de système. D'une autre manière, l'auteur a considéré la conduction transversale dans la plaque. Ce qui peut se traduire par la formulation suivante :

Dans la paroi :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad 0 < y < \ell; \quad x > 0; \quad t > 0 \quad (1.21a)$$

$$k_s \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(\theta|_{y=0} - T_\infty), \quad x > 0; \quad t > 0. \quad (1.21b)$$

Dans le fluide :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u(z) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_f \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad 0 < z < \ell'; \quad x > 0; \quad t > 0 \quad (1.21c)$$

$$T = T_\infty + \Delta T_\infty \sin(\omega t), \quad 0 \leq z \leq \ell'; \quad x = 0; \quad t > 0 \quad (1.21d)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad x > 0; \quad t > 0. \quad (1.21e)$$

Les conditions de contact :

$$T = \theta, \quad x > 0; \quad t > 0 \quad (1.21f)$$

$$k_s \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=\ell} = k_f \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\ell'}, \quad x > 0; \quad t > 0. \quad (1.21g)$$

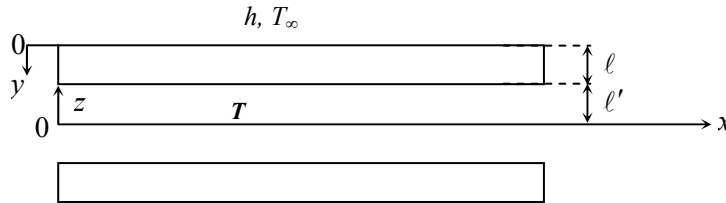


Fig. 1. 2 : Géométrie du canal étudié.

Les amplitudes et les déphasages pour la distribution des températures de mélange, interfaciale et axiale sont présentés graphiquement dans la même référence.

J. S. Travelho et W. F. N. Santos [24] s'intéressent à un écoulement laminaire dans un tube cylindrique où la capacité thermique du solide et la convection externe sont prises en considération. La méthode de résolution utilisée est la même que dans [21]. Les amplitudes et les déphasages de la température du solide sont présentés graphiquement. L'auteur conclut que lorsque la résistance thermique externe diminue, l'amplitude de la température du solide augmente indépendamment de la capacité de ce dernier.

En utilisant les méthodes variationnelles, **B. Fourcher et K. Mansouri [25]** développent une solution approchée par la méthode de Galerkin pour le problème de convection forcée avec un écoulement établi parabolique entre deux plaques parallèles. Le gradient transversal de température dans les plaques est aussi tenu en compte. Afin de résoudre le problème de diffusion dans les plaques, la méthode de Galerkin est mise en œuvre par un couplage avec la transformée de Laplace sur la direction axiale. Ils obtiennent une solution du type :

$$\tilde{T}(x^+, z^+) = \sum_{n=1}^N Q_n \cos(\sigma_n z^+) \exp(-\mu_n z^+), \quad (1.22)$$

où les expressions de Q_n , μ_n et les variables adimensionnelles sont données dans la même référence.

Les amplitudes et les déphasages sont présentés graphiquement, pour des nombres Biot et a^+ différents. Une comparaison avec les résultats de W. Li et S. Kakaç [19], montre que la solution approximative est très acceptable.

S. Cheroto, M. D. Mikhailov, S. Kakaç et R. M. Cotta [26] ont résolu analytiquement au moyen de la technique de la transformée intégrale généralisée (GITT), en utilisant un mélange de calcul symbolique et numérique (à l'aide du logiciel *Mathematica 3.0*) le même problème traité dans [19]. Les conditions imposées correspondent, d'une part à une variation périodique de la température du fluide à l'entrée, et d'autre part à une condition limite à la paroi du canal, qui inclut la convection externe et les effets dus à la capacité thermique des parois. Un algorithme mêlant le calcul symbolique et numérique est construit. Il permet d'obtenir automatiquement les résultats numériques sous forme tabulée ou graphique. Les amplitudes et les déphasages sont représentés et interprétés dans la même référence.

Plus récemment, dans la référence [45], avec une approche variationnelle par la méthode de Ritz, une nouvelle solution est obtenue pour le même problème traité dans [25] pour les deux configurations géométriques du conduit (tube cylindrique et deux plaques parallèles). Une analyse détaillée du modèle quasi-stationnaire est également établie dans la même référence. Un modèle numérique, utilisant la méthode des volumes finis, pour le même problème est fourni pour la première fois dans la référence [46] dont les résultats sont très satisfaisant en comparaison avec le modèle analytique.

- **Régime turbulent :**

W. S. Kim et M. N. Ozisik [27] traitent les échanges thermiques d'un écoulement turbulent entre deux plans parallèles. La température d'entrée varie périodiquement avec le temps. Le modèle théorique utilise la diffusivité thermique turbulente sans faire intervenir un coefficient d'échange fluide paroi, d'où :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u(y) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\alpha + \varepsilon_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad 0 < y < \ell'; x > 0; t > 0 \quad (1.23a)$$

$$T(0, y, t) = T_0 + \Delta T_0 \exp(i\omega t), \quad 0 \leq y \leq \ell'; t > 0 \quad (1.23b)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad x > 0; t > 0 \quad (1.23c)$$

$$T(x, \ell', t) = T_0, \quad x > 0; t > 0. \quad (1.23d)$$

Les variations d'amplitude et de phase pour la température du mélange sont présentées graphiquement pour différents nombres de Reynolds ($Re = 10^4$ à 10^6) et différentes fréquences du signal thermique à l'entrée ($\Omega = 0.1$ à 2) avec un nombre de Prandtl $Pr = 0.7$.

R. O. C. Guèdes, M. N. Ozisik et R. M. Cotta [28] étendent l'étude présentée dans [20] pour un écoulement turbulent, par l'introduction de la diffusivité turbulente dans l'équation d'énergie. En utilisant la technique de la transformation intégrale généralisée, le problème est résolu de même façon que dans [20]. Les résultats obtenus sont présentés graphiquement pour les amplitudes et les déphasages de la température interfaciale le long du conduit pour deux valeurs de nombre de Reynolds ($Re = 10^4$ et 10^5) et ($a^+ = 5.10^{-4}$ et 5.10^{-3}).

S. Kakaç et W. Li [29] reprennent la même étude du problème présenté dans la référence [19] mais cette fois-ci étendue au régime turbulent, où le nombre de Reynolds varie de 10^5 à 2.10^5 . On constate une diminution moins rapide de l'amplitude par rapport au régime laminaire. Autrement dit, pour une même fréquence d'entrée, l'amortissement du signal est d'autant plus faible que le nombre de Reynolds est plus grand. Une comparaison avec les résultats expérimentaux pour les amplitudes sur l'axe du conduit, pour une fréquence adimensionnelle $\beta = 0.08$ et un nombre de Reynolds $Re = 19570$, montre que la variation de la température dans la section d'entrée est parabolique.

b. Méthodes expérimentales :

L'étude expérimentale a pour objectif de fournir des mesures précises qui servent à valider les modèles analytiques et les approches numériques. Le problème de convection forcée dans un conduit avec température d'entrée périodique a été traité expérimentalement, on distingue principalement :

S. Kakaç, Y. Ding et W. Li [30] se sont investis dans un appareillage expérimental construit et utilisé pour l'étude de la convection forcée d'un fluide en écoulement laminaire dans un conduit rectangulaire de section $[254 \times 25 \text{ mm}^2]$ en styrofoam avec une température d'entrée sinusoïdale. Cette étude couvre une gamme très large du nombre de Reynolds ($450 \leq Re \leq 2088$) et fréquence d'entrée ($0.01 \leq \beta \leq 0.16$). Ils ont utilisé comme fluide l'air (incompressible) qui sera soigneusement filtré à l'entrée du dispositif, puis arrive dans la zone de test avec une vitesse entièrement développée après avoir traversé une zone d'établissement dynamique de 2.77m, la chaleur est fournie au système à l'aide des résistances électriques de 8.5Ω constituées de filament très fin de Nichrome de 0.4mm de diamètre, introduit dans le conduit sans perturber l'écoulement.

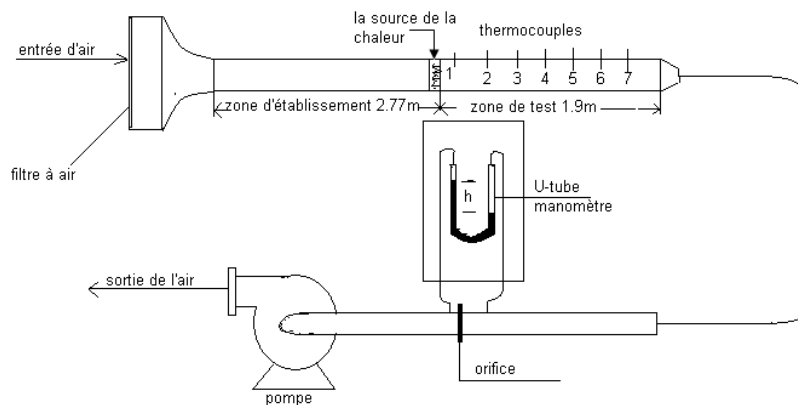


Fig. 1. 3 : Dispositif expérimental de S. Kakaç, Y. Ding et W. Li.

Les variations de températures dans différentes sections le long du conduit sont mesurées et enregistrées à l'aide des thermocouples soudés sur la paroi et placés régulièrement dans la zone de test d'une longueur de 1.9m (cf. Fig.1.3). L'amortissement de l'amplitude est enregistré pour des fréquences Ω variant de 0.01 à 0.16, et deux valeurs de Reynolds égales à 990 et 1396.

Dans un dispositif expérimental similaire à celui utilisé dans [30], **K. Mansouri, D. Sadaoui et B. Fourcher [31]** examinent la réponse thermique d'un écoulement turbulent d'eau dans un canal à deux plans parallèles. Les résultats expérimentaux (amplitude et déphasage au long du conduit) sont comparés à ceux obtenus par le modèle quasi-stationnaire et ceux de modèle turbulent (analytique) introduisant la diffusivité thermique turbulente. L'auteur a conclu que pour des petites valeurs de la fréquence d'entrée, le modèle quasi-stationnaire est capable de prédire les températures de mélange ainsi que celles dans la paroi. Contrairement pour des fréquences très élevées ($\geq 0.05 Hz$), le modèle quasi-stationnaire devient inapplicable.

1.3.Conclusion :

La convection forcée transitoire dans un conduit est un sujet très important, si on observe le nombre des publications présentées dans cette partie. L'ensemble de ces travaux marque une claire préférence pour les approches numériques et analytiques par rapport à l'expérimentation très coûteuse financièrement.

Du point de vue analytique, ces travaux portent sur le développement des méthodologies de résolution, en s'appuyant sur un nombre important d'hypothèses simplificatrices. Parmi les plus contestables, on retiendra celle d'une paroi isotherme et parfois sans épaisseur ou l'écoulement piston.

La recherche de modèles simplifiés comme l'utilisation des corrélations (suffisantes aux yeux des industriels) sont également développés par certains auteurs. Ces solutions sont assujetties à de nombreuses critiques dans certaines conditions particulières.

Notre contribution est l'étude de la réponse thermique en régime périodique en fonction de différents paramètres, tout en développant une nouvelle méthodologie de résolution avec discussion de la validité de certaines hypothèses.

Le manque important de renseignement au sujet du modèle quasi-stationnaire (simplifié), nous a également conduit à étudier le comportement du coefficient d'échange en fonction de la fréquence d'entrée.

Etude analytique d'un écoulement laminaire entre deux plaques parallèles en régime périodique (vitesse uniforme).

2.1. Description du problème:

On considère un conduit à deux plaques parallèles, d'épaisseur ℓ , séparées par une distance $2\ell'$ (cf. Fig.2.1) supposée faible devant la longueur du conduit parcouru par un écoulement fluide en régime laminaire dont la température d'entrée varie périodiquement en fonction du temps. Les faces externes des parois échangent avec le milieu extérieur. Ce qui peut se résumer par :

1. Des échanges convectifs (paroi-milieu extérieur).
2. Des échanges conducto-convectifs (paroi fluide caloporteur)
3. Diffusion dans la paroi (ce qui est ignoré autrefois dans plusieurs recherches)

Nous nous limitons à un profil de température uniforme dans la section d'entrée, et un champ dynamique uniforme (écoulement piston).

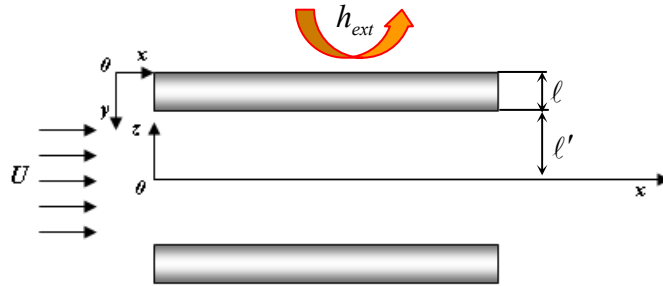


Fig. 2. 1 : Géométrie du conduit à considéré.

La résolution d'un tel problème passe donc par le traitement simultané des équations de bilan dans les deux milieux, liquide et solide, liés par la condition de contact parfait dite condition de continuité.

2.2. Hypothèses simplificatrices :

Voir la complexité du problème décrit ci-dessus, sa résolution analytique est quasiment impossible. Dans ce genre de situation on utilise souvent des hypothèses

simplificatrices dans le but de rendre le problème abordable. Les hypothèses que nous retiendrons sont :

1. Le fluide utilisé est incompressible et l'écoulement monophasique (température inférieure à celle d'ébullition)
2. Les propriétés thermo-physiques du fluide et du solide sont constantes.
3. Le terme de conduction axiale dans le fluide est négligeable dans l'équation d'énergie. Cette hypothèse est vérifiée dès que le nombre de Peclet est supérieur à 100 [13].
4. La conduction axiale dans la paroi est négligeable devant la diffusion transversale.
5. Les termes de dissipation visqueuse et de convection naturelle sont négligeables.
6. Le problème est supposé bidimensionnel (absence d'effet de bords).
7. Le système ne présente aucune source de chaleur interne.
8. Le profil de vitesse est uniforme en toute section droite du conduit.
9. Le milieu solide est considéré homogène et isotrope.

2.3. Formulation du problème:

Compte tenu des hypothèses simplificatrices indiquées ci-dessus, les équations mathématiques régissant le problème sont :

Diffusion dans le solide :

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_w}{\partial t}, \quad 0 < y < \ell; x > 0; t > 0. \quad (2.1a)$$

Condition d'interface plaque-milieu extérieur :

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{h_{ext}}{k_s} (T_w|_{y=0} - T_\infty), \quad x > 0; t > 0. \quad (2.1b)$$

Dans le fluide :

$$\alpha_f \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x}, \quad 0 < z < \ell'; x > 0; t > 0. \quad (2.1c)$$

Condition à l'entrée du conduit :

$$T(0, z, t) = T_\infty + \Delta T \sin(\omega t), \quad 0 \leq z \leq \ell'; t > 0. \quad (2.1d)$$

Condition de symétrie à l'axe du conduit :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad x > 0; t > 0. \quad (2.1e)$$

Conditions d'interface fluide-paroi :

$$-k_f \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\ell'} = k_s \frac{\partial T_w}{\partial y} \Big|_{y=\ell}, \quad x > 0; t > 0 \quad (2.1f)$$

$$T \Big|_{z=\ell'} = T_w \Big|_{y=\ell}, \quad x > 0; t > 0. \quad (2.1g)$$

Condition initiale :

L'ensemble fluide et paroi étaient initialement à température ambiante.

$$T = T_w = T_\infty, \quad (2.2)$$

où T et T_w désignent respectivement les températures dans les milieux fluide et solide.

2.4.Détermination du champ des températures en régime périodique établi :

Dans cette étude, on s'intéresse au régime périodique établi. Donc les températures dans le fluide et dans la plaque sont recherchées en notation complexe sous la forme :

$$T(x, z, t) = \tilde{T}(x, z) \exp(i\omega t) \quad (2.3a)$$

$$T_w(x, z, t) = \tilde{T}_w(x, z) \exp(i\omega t). \quad (2.3b)$$

Par l'utilisation du développement d'Euler de la fonction exponentielle :

$$\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t), \quad (2.4)$$

dans un régime périodique établi, on ne tient compte que de la partie imaginaire de la solution finale, ce qui mène à changer la condition d'entrée en prenant la nouvelle forme :

$$T(0, z, t) = T_\infty + \Delta T \exp(i\omega t). \quad (2.5)$$

2.5.Résolution du problème :

En introduisant dans le problème ci-dessus les quantités adimensionnelles suivantes :

$$y^+ = \frac{y}{\ell}; \quad z^+ = \frac{z}{\ell'}; \quad x^+ = \frac{x\alpha_f}{\ell'^2 \bar{u}}; \quad u^+ = \frac{u}{\bar{u}} = 1; \quad t^+ = \frac{t\alpha_f}{\ell'^2}; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}; \quad \theta_w = \frac{T_w - T_\infty}{\Delta T};$$

$$r_{th} = \frac{k_s \ell'}{k_f \ell}; \quad Bi_{ext} = \frac{h_{ext} \ell}{k_s}; \quad \delta = \frac{\omega \ell'^2}{\alpha_f} \quad \text{et} \quad \Gamma = \frac{\alpha_f \ell^2}{\alpha_s \ell'^2}.$$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial y^{+2}} = \Gamma \frac{\partial \theta_w}{\partial t^+}, \quad 0 < y^+ < 1; x^+ > 0; t^+ > 0 \quad (2.6a)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial y^+} \right|_{y^+=0} = Bi_{ext} \theta_w \Big|_{y^+=0}, \quad x^+ > 0; t^+ > 0 \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{+2}} = \frac{\partial \theta}{\partial t^+} + \frac{\partial \theta}{\partial x^+}, \quad 0 < z^+ < 1; x^+ > 0; t^+ > 0 \quad (2.6c)$$

$$\theta(0, z^+, t^+) = \exp(i\delta t^+), \quad 0 \leq z^+ \leq 1; t^+ > 0 \quad (2.6d)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0, \quad x^+ > 0; t^+ > 0 \quad (2.6e)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} = -r_{th} \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial y^+} \right|_{y^+=1}, \quad x^+ > 0; t^+ > 0 \quad (2.6f)$$

$$\theta \Big|_{z^+=1} = \theta_w \Big|_{y^+=1}, \quad x^+ > 0; t^+ > 0. \quad (2.6g)$$

En introduisant les expressions présentées en (2.3a) et (2.3b), dans le problème (2.6), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}_w}{\partial y^{+2}} = 2i\beta_s^2 \tilde{\theta}_w, \quad 0 < y^+ < 1; x^+ > 0 \quad (2.7a)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial y^+} \right|_{y^+=0} = Bi_{ext} \tilde{\theta}_w \Big|_{y^+=0}, \quad x^+ > 0 \quad (2.7b)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial z^{+2}} = i\delta \tilde{\theta} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x^+}, \quad 0 < z^+ < 1; x^+ > 0 \quad (2.7c)$$

$$\tilde{\theta}(0, z^+, t^+) = 1, \quad 0 \leq z^+ \leq 1 \quad (2.7d)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0, \quad x^+ > 0 \quad (2.7e)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} = -r_{th} \left. \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial y^+} \right|_{y^+=1}, \quad x^+ > 0 \quad (2.7f)$$

$$\tilde{\theta} \Big|_{z^+=1} = \tilde{\theta}_w \Big|_{y^+=1}, \quad x^+ > 0. \quad (2.7g)$$

où $\beta_s = \ell \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_s}}$ présente la diffusion transversale dans la plaque.

La résolution de l'équation (2.7a) permet d'obtenir :

$$\tilde{\theta}_w(x^+, y^+) = A \operatorname{ch}(\tilde{\beta}_s y^+) + B \operatorname{sh}(\tilde{\beta}_s y^+), \quad (2.8)$$

avec $\tilde{\beta}_s = \beta_s(1+i)$.

Par l'utilisation des conditions de contact (2.7b), (2.7f) et (2.7g), la distribution des températures dans la plaque est donnée par :

$$\tilde{\theta}_w(x^+, y^+) = \tilde{\theta}(x^+, 1) \frac{\operatorname{ch}(\tilde{\beta}_s y^+) + \frac{Bi_{ext} \operatorname{sh}(\tilde{\beta}_s y^+)}{\tilde{\beta}_s}}{\operatorname{ch}(\tilde{\beta}_s) + \frac{Bi_{ext} \operatorname{sh}(\tilde{\beta}_s)}{\tilde{\beta}_s}}. \quad (2.9)$$

Après une simple manipulation mathématique, la distribution des températures dans le fluide est définie par le nouveau système :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial z^{+2}} = i \delta \tilde{\theta} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x^+}, \quad 0 < z^+ < 1; \quad x^+ > 0 \quad (2.10a)$$

$$\tilde{\theta}(0, z^+, t^+) = 1, \quad 0 \leq z^+ \leq 1 \quad (2.10b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0, \quad x^+ > 0 \quad (2.10c)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} + \tilde{H} \tilde{\theta}|_{z^+=1} = 0, \quad x^+ > 0, \quad (2.10d)$$

le paramètre complexe $\tilde{H}$ qui intègre complètement le rôle de la plaque, est donné par :

$$\tilde{H} = r_{th} \frac{Bi_{ext} + \tilde{\beta}_s \operatorname{th}(\tilde{\beta}_s)}{1 + \frac{Bi_{ext} \operatorname{th}(\tilde{\beta}_s)}{\tilde{\beta}_s}}. \quad (2.11)$$

A l'aide de la technique de la transformation intégrale [33], la fonction température est recherchée sous la forme :

$$\theta(x^+, z^+) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(x^+) G_n(z^+), \quad (2.12)$$

où $G_n(z^+) = \cos(\sigma_n z^+)$ sont solution du problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 G_n}{\partial z^{+2}} + \sigma_n G_n = 0, \quad 0 < z^+ < 1 \\ \left. \frac{\partial G_n}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial G_n}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} + \tilde{H} G_n|_{z^+=1} = 0. \end{array} \right. \quad (2.I)$$

les valeurs propres σ_n sont recherchées par la résolution de l'équation transcendante $\sigma_n \tan(\sigma_n) = \tilde{H}$ dont la méthode de résolution est donnée dans l'annexe (2)

La solution générale de l'équation (2.10a) est obtenue sous la forme :

$$\tilde{\theta}(x^+, z^+) = \exp(-i\delta x^+) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\sigma_n z^+) \exp(-\sigma_n^2 x^+). \quad (2.13)$$

La solution particulière est donnée par l'utilisation de la condition d'entrée (2.10b), tel que : $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\sigma_n z^+) = 1$. (2.14)

En utilisant les conditions d'orthogonalité et de normalisation, on obtient :

$$A_n = 4 \cdot \frac{\sin(\sigma_n)}{2\sigma_n + \sin(2\sigma_n)}. \quad (2.15)$$

Ainsi, la température en tout points du fluide :

$$\tilde{\theta}(x^+, z^+) = 4 \exp(-i\delta x^+) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sigma_n)}{2\sigma_n + \sin(2\sigma_n)} \cos(\sigma_n z^+) \exp(-\sigma_n^2 x^+). \quad (2.16a)$$

La température moyenne de fluide:

$$\tilde{\theta}_m(x^+) = \int_0^1 \tilde{\theta}(x^+, z^+) dz^+ = 4 \exp(-i\delta x^+) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\sigma_n)}{2\sigma_n^2 + \sigma_n \sin(2\sigma_n)} \exp(-\sigma_n^2 x^+). \quad (2.16b)$$

La température sur l'axe du conduit :

$$\tilde{\theta}_c(x^+, 0) = 4 \exp(-i\delta x^+) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sigma_n)}{2\sigma_n + \sin(2\sigma_n)} \exp(-\sigma_n^2 x^+). \quad (2.16c)$$

La température interfaciale (fluide-plaque) :

$$\tilde{\theta}_w(x^+, 1) = 4 \exp(-i\delta x^+) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sigma_n)}{2\sigma_n + \sin(2\sigma_n)} \cos(\sigma_n) \exp(-\sigma_n^2 x^+). \quad (2.16d)$$

2.6. Etude des cas limites :

L'étude des cas limites consiste à analyser soigneusement le paramètre complexe $\tilde{H}$ qui intègre rigoureusement le rôle de la plaque. On distingue les cas suivants :

2.6.1. Cas d'une paroi isolée du milieu extérieur ($\text{Bi}_{\text{ext}} = 0$): C'est le cas pour lequel la condition d'échange avec le milieu extérieur (2.1b) prend la forme :

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (2.17)$$

Le paramètre $\tilde{H}$ s'écrit :

$$\tilde{H} = r_{th} \tilde{\beta}_s th(\tilde{\beta}_s). \quad (2.18)$$

2.6.2. Cas de température imposée à la paroi: Ce cas correspond à la condition du premier type dite de Dirichlet, alors d'après l'équation (2.1b):

$T_w|_{y=0} = 0$, ce qui conduit à écrire :

$Bi_{ext} \rightarrow \infty$, ainsi :

$$\tilde{H} = r_{th} \tilde{\beta}_s coth(\tilde{\beta}_s). \quad (2.19)$$

2.6.3. Cas des basses fréquences : La limite correspondante à ce cas est celle pour laquelle $\tilde{\beta}_s$ est très petit ($th(\tilde{\beta}_s) \approx \tilde{\beta}_s$).

Le paramètre $\tilde{H}$ devient :

$$\tilde{H} = r_{th} \frac{Bi_{ext} + \tilde{\beta}_s^2}{1 + Bi_{ext}}. \quad (2.20)$$

Les solutions de l'équation transcendante pour ce dernier cas sont données dans l'annexe (2).

2.7. Discussion de l'hypothèse d'isothermicité :

Cette hypothèse est très utilisée par de nombreux auteurs [13-19]. La différence entre cette étude et celle d'une paroi isotherme porte sur le paramètre $\tilde{H}$, qui est fonction de r_{th} , Bi_{ext} et β_s , et du paramètre $\tilde{H}_0$ qui est défini en fonction de b^+ et Bi^+ , tel que :

$$\tilde{H}_0 = Bi^+ + ib^+, \quad (2.21a)$$

qui peut s'écrire :

$$\tilde{H}_0 = r_{th} (Bi_{ext} + \tilde{\beta}_s^2), \quad (2.21b)$$

avec $b^+ = 2 r_{th} \beta_s^2$.

Cette hypothèse d'isothermicité a été contestée, en montrant qu'elle est justifiée si seulement le terme de diffusion β_s et le nombre de Biot Bi_{ext} deviennent simultanément faibles (cf. Eq. 2.20).

2.8. Résultats et discussion :

L'évaluation numérique des solutions présentées par les expressions (2.16), nécessite la connaissance des valeurs propres σ_n . En fait, leurs déterminations dépendent de paramètre β_s et du nombre de Biot Bi_{ext} exprimés dans le paramètre $\tilde{H}$.

Le choix des valeurs de β_s dépend du choix de $b^+ = 2r_{th}\beta_s^2$ qui selon Sparrow et De Farrias [13] varie de 1 jusqu'à 100, pour $a^+ = 0.001$. Ce qui correspond lors de la fixation de $r_{th} = 50$ à des valeurs de β_s allant de 0.1 jusqu'à 1. Ce choix couvre une grande partie de conditions opératoires dans le cas des échangeurs de chaleurs. Les valeurs numériques de β_s ici utilisées sont calculées et extraites de la référence [13], à savoir $b^+ = 1, 2, 10$ et 100, pour lesquelles les valeurs propres sont déterminées (cf. Annexe 2).

2.8.1. Température inter faciale :

L'évolution temporelle des températures interfaciales est présentée dans les figures (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5).

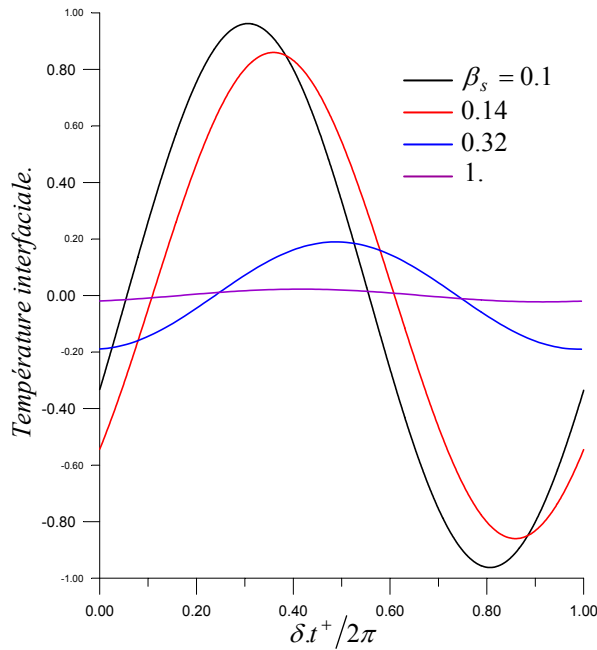


Fig. 2.2 : Température interfaciale en $x^+=0.1$ pour des β_s donnés, $Bi_{ext}=0$, et $a^+=0.001$

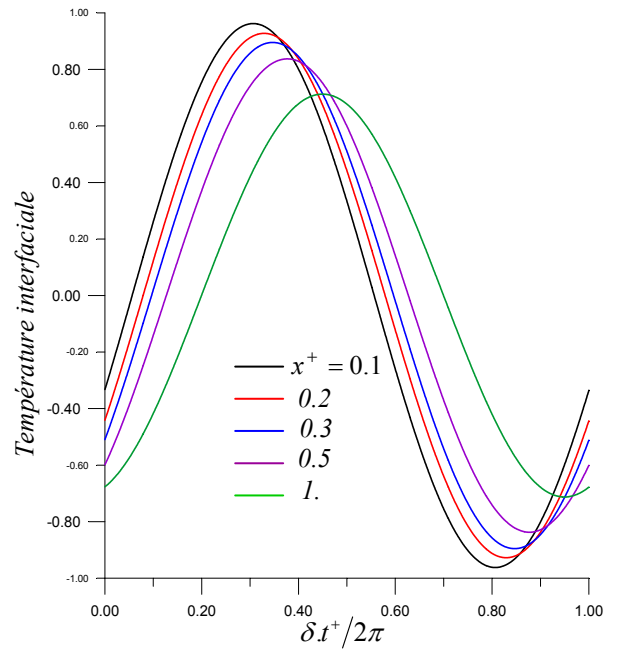


Fig. 2.3 : Température interfaciale pour $\beta_s=0.1$ et des x^+ donnés, $Bi_{ext}=0$, et $a^+=0.001$

Les figure (2.3), (2.4) et (2.5) révèlent que l'amplitude de la température interfaciale diminue de manière monotone et le déphasage augmente avec l'augmentation de x^+ .

Il est intéressant de noter, que le terme $\delta x^+ = \frac{\omega x}{u}$ représente le déphasage lié au temps d'écoulement et l'évolution du déphasage est gouvernée directement par cette grandeur. Sachant que $\delta = 2\beta_f^2$, le paramètre $\beta_f = \ell' \sqrt{\omega/2\alpha_f}$ caractérise la diffusion dans le fluide. Donc, la capacité thermique de fluide à une influence directe sur l'évolution du déphasage. D'un autre côté, pour des petites valeurs de β_s (0.1 et 0.14) ce qui correspond aux faibles valeurs de δ , il est évident que le déphasage est attribué à la capacité thermique du mur (cf. Fig.2.2).

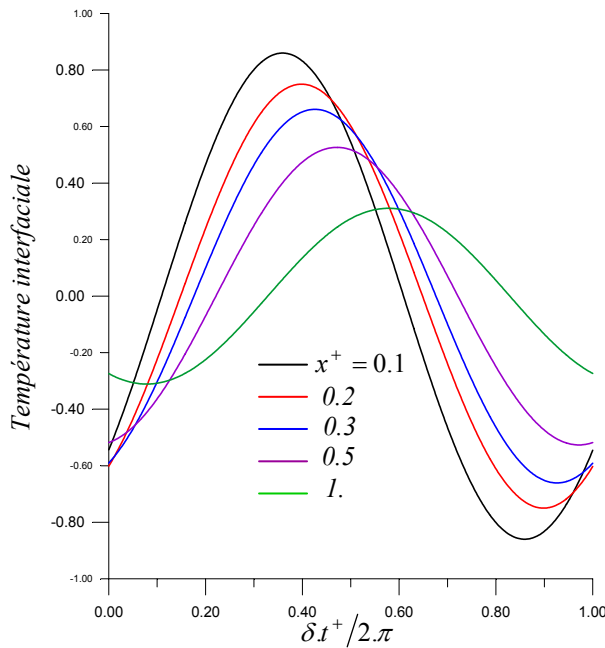


Fig. 2. 4 : Température interfaciale pour $\beta_s=0.14$ et des x^+ donnés, $Bi_{ext}=0$ et $a^+=0.001$.

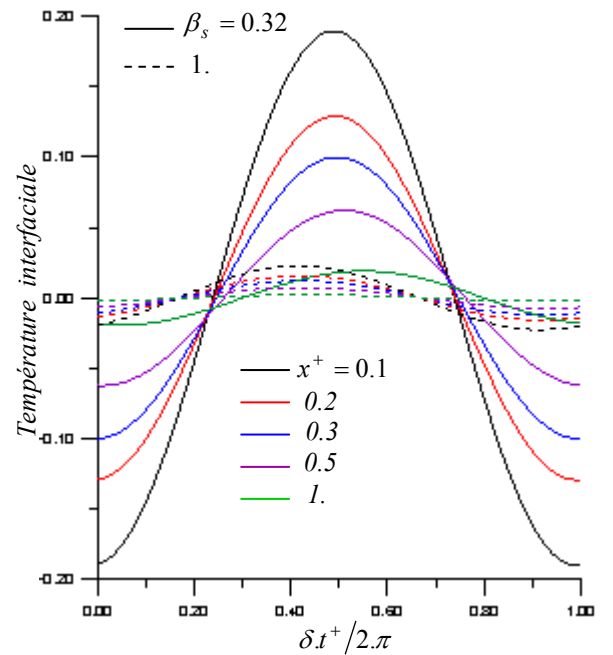


Fig. 2. 5 : Température interfaciale pour des x^+ donnés, $Bi_{ext}=0$ et $a^+=0.001$

Les deux phénomènes sont liés à la capacité thermique du solide, dont l'effet est d'étouffer l'amplitude des oscillations de température le long du conduit.

2.8.2. Température moyenne de fluide :

La température moyenne de fluide est donnée par l'expression (2.16b). L'évaluation numérique est représentée par les figures (2.6), (2.7), (2.8) et (2.9), pour les mêmes valeurs de a^+ , β_s , x^+ , Bi_{ext} et r_{th} . L'allure des courbes est similaire à celle des températures interfaciales. Notons que, dans le cas de grandes valeurs pour β_s , l'atténuation des

amplitudes pour la température moyenne de fluide est moins rapide que celle de la température interfaciale.

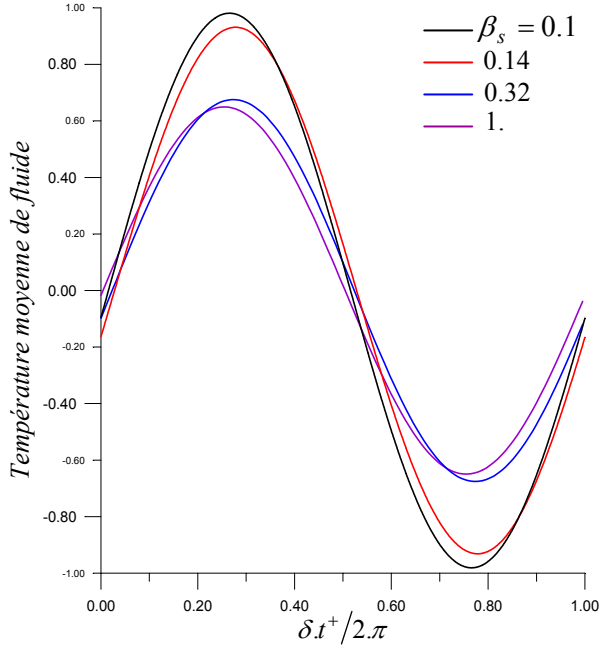


Fig. 2. 6 : Température moyenne de fluide en $x^+=0.1$ pour des β_s donnés, $Bi_{ext}=0$ et $a^+=0.001$.

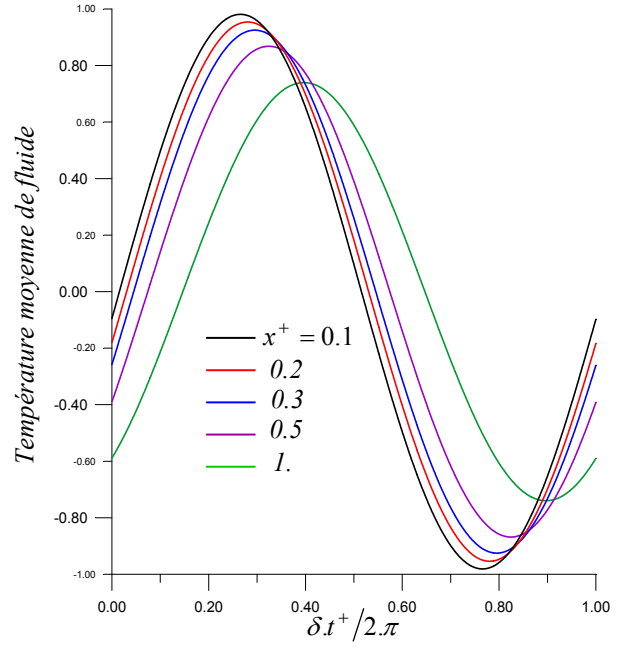


Fig. 2. 7 : Température moyenne de fluide pour $\beta_s=0.1$ et des x^+ donnés, $Bi_{ext}=0$ et $a^+=0.001$.

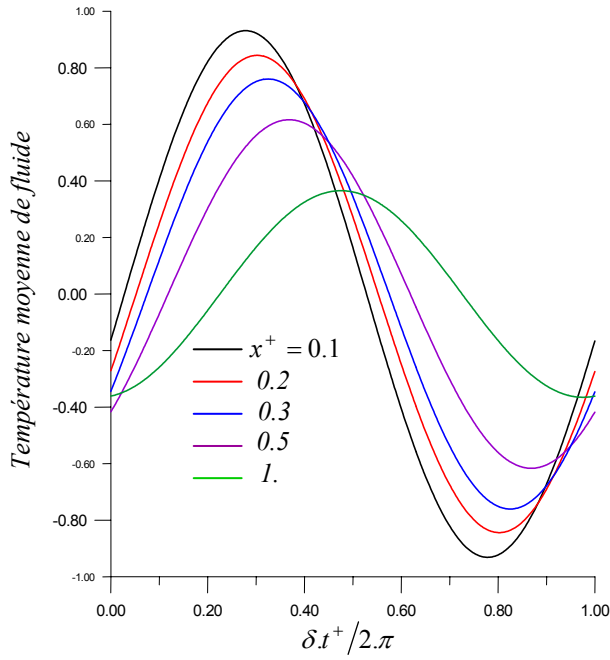


Fig. 2. 8 : Température moyenne de fluide pour $\beta_s=0.14$ et des x^+ donnés, $Bi_{ext}=0$ et $a^+=0.001$.

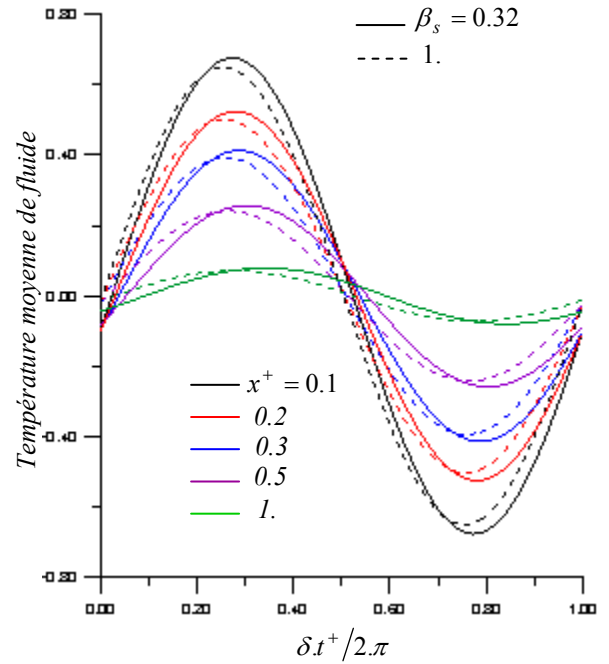


Fig. 2. 9 : Température moyenne de fluide pour des x^+ donnés, $Bi_{ext}=0$ et $a^+=0.001$.

2.8.3. Flux thermique à l'interface fluide-paroi :

Le flux thermique transversal à l'interface fluide-paroi est calculé par :

$$\phi(x^+, 1, t^+) = - \left. \frac{\partial \theta(x^+, z^+, t^+)}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} . \quad (2.22)$$

Son expression est donnée sous la forme :

$$\phi(x^+, 1, t^+) = A_f(x^+, 1) \sin(\delta t^+ + \phi_f(x^+, 1)), \quad (2.23)$$

où $A_f(x^+, 1)$ et $\phi_f(x^+, 1)$ sont respectivement l'amplitude et le déphasage du flux thermique.

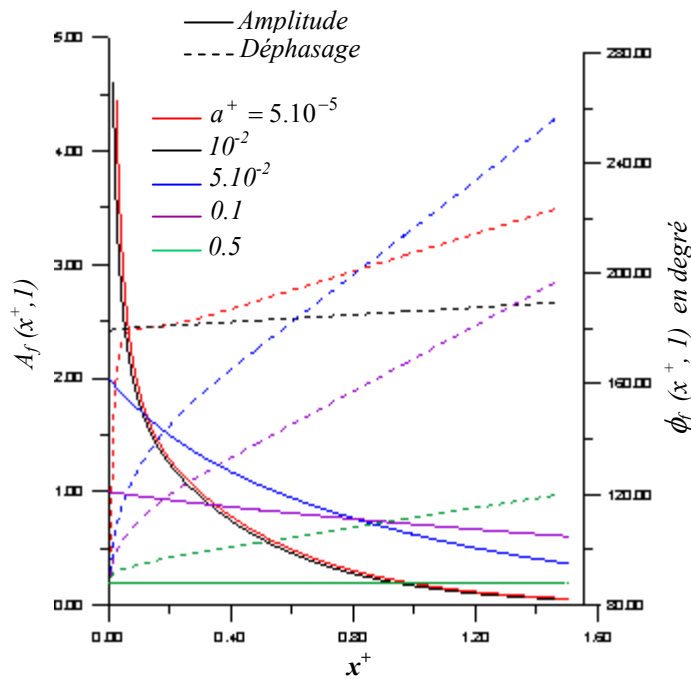


Fig. 2. 10 : Amplitudes et déphasages du flux thermique pariétal le long du conduit pour différents a^+ ($Bi_{ext}=0$ et $\delta = 0.1$)

La figure (2.10) présente les variations de l'amplitude et du déphasage du flux thermique pariétal le long du conduit, pour différents a^+ avec $\delta = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$. On remarque rapidement, que dès l'entrée du conduit (x^+ petit) l'amplitude du flux thermique est très grande pour des β_s grands. Car les gradients des températures, qui sont très raides sont dus aux atténuations des températures interfaciales (cf. Fig.2.3). Lors des grandes distances, l'amplitude du flux thermique diminue avec l'augmentation de β_s .

2.8.4. Influence du paramètre a^+ sur les températures de mélange et interfaciale :

Le paramètre a^+ est définie comme étant le rapport des capacités thermiques de fluide et de solide. Selon Sparrow et De farrias [13], le choix des valeurs de a^+ est souvent inférieur à 1. Alors, dans cette étude, nous nous limitons aux valeurs de a^+ allant de 5.10^{-5} jusqu'à 0.5.

Les variations de l'amplitude et du déphasage des températures de mélange et interfaciale sont présentées par les figures (2.11), (2.12), (2.13) et (2.14) pour les valeurs de $a^+ = 5.10^{-5}$, 10^{-2} , 5.10^{-2} , 0.1 et 0.5 avec $\delta = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$.

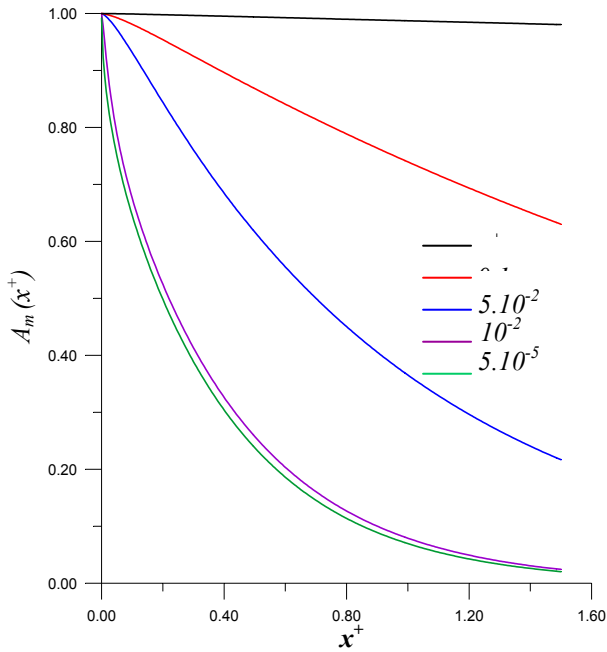


Fig. 2. 11 : Amplitude de la température moyenne de fluide pour différents a^+ ($Bi_{ext}=0$ et $\delta = 0.1$)

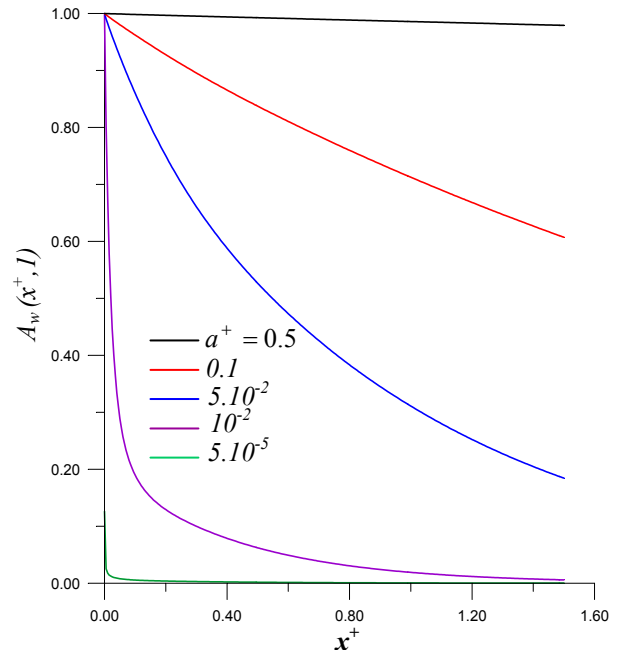


Fig. 2. 12 : Amplitude de la température inter faciale pour différents a^+ ($Bi_{ext}=0$ et $\delta = 0.1$)

Les figures (2.11) et (2.12) montrent que l'atténuation des amplitudes le long du conduit augmente avec la diminution du paramètre a^+ , c'est à dire avec l'augmentation de la capacité thermique du solide. D'un autre coté, cette atténuation est beaucoup plus importante pour la température interfaciale que pour la température moyenne de fluide (cf. Fig.2.2 et 2.6).

Les figures (2.13) et (2.14) présentent respectivement le déphasage de la température moyenne de fluide et de la température interfaciale. On remarque, que le déphasage évolue selon

une fonction linéaire de x^+ , loin de l'entrée du conduit. Pour des valeurs très petites de a^+ (5.10^{-5}), c'est à dire pour des grandes capacités thermiques du conduit, le déphasage est d'une tangente très faible, ce qui correspond à l'état stationnaire (cf. Fig.2.2). Pour des basses capacités thermiques, le déphasage est plus important et augmente avec l'augmentation de x^+ .

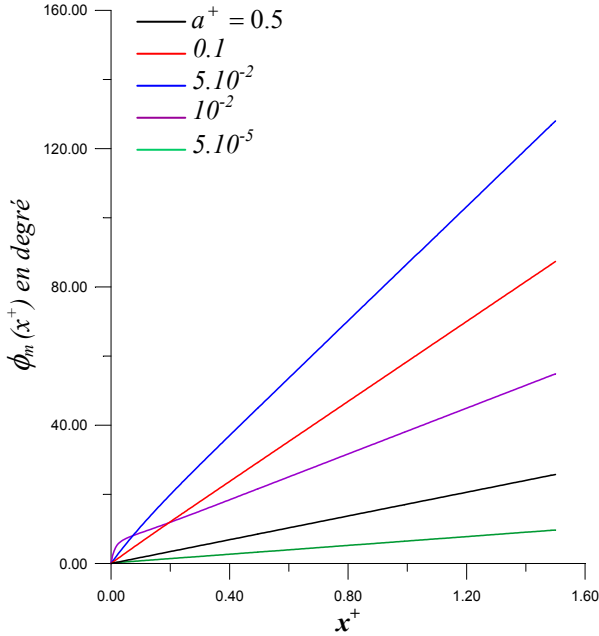


Fig. 2. 13 : Déphasage de la température moyenne de fluide pour différents a^+ ($Bi_{ext}=0$ et $\delta = 0.1$)

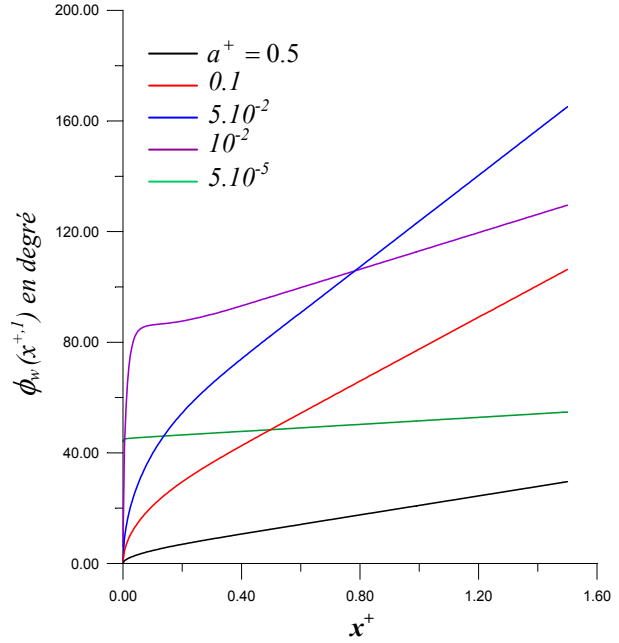


Fig. 2. 14 : Déphasage de la température inter faciale pour différents a^+ ($Bi_{ext}=0$ et $\delta = 0.1$)

2.8.5. Diffusion transversale :

Nous nous intéressons ici à la diffusion transversale dans le fluide pour différentes distances dès l'entrée du conduit. A cet effet, les figures (2.15) et (2.16) représentent respectivement les profils transversaux de l'amplitude et du déphasage de la température de fluide pour différents x^+ dans le cas $\beta_s = 0.1$, $r_{th} = 50$, $a^+ = 0.001$ et $Bi_{ext} = 0$. La figure (2.15) montre que l'amplitude des températures diminue avec l'augmentation de la distance dès le centre du conduit, cela révèle l'existence d'un gradient transversale de température. Ce gradient est d'autant plus important qu'on s'éloigne de l'entrée du conduit. Contrairement, dans la figure (2.16), on montre que le déphasage est moins important à l'entrée du conduit, puis augmente avec l'augmentation de la distance axiale. D'une autre

manière, à partir d'une distance $x^+ = L_{th}$ ces profils sont stabilisés. D'autres essais nous ont montré que cette longueur d'établissement est d'autant plus grande que la période est élevée.

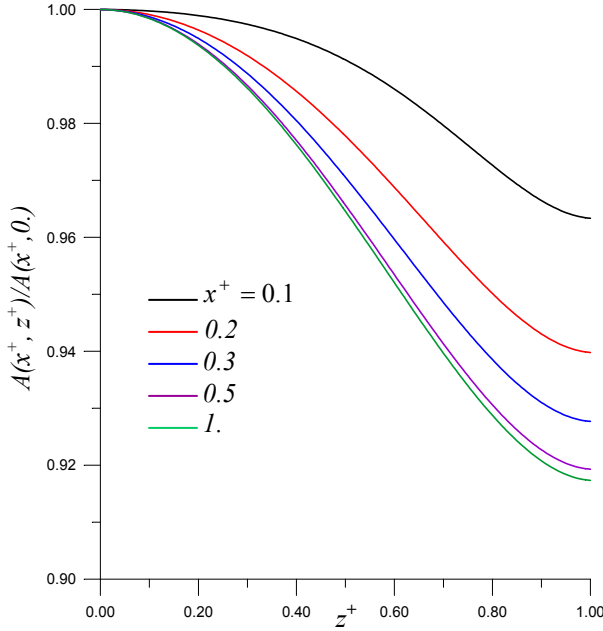


Fig. 2. 15 : Profil transversale de l'amplitude de la température du fluide pour différent x^+

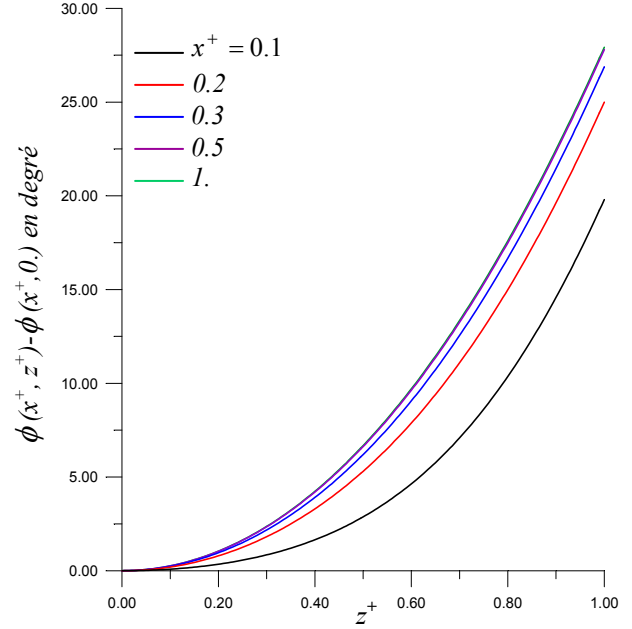


Fig. 2. 16 : Profil transversale du déphasage de la température du fluide pour différent x^+

2.8.6. Influence du nombre de Biot sur les températures :

Tout les résultats présentés jusqu'ici, considèrent que la paroi externe du conduit isolée du milieu extérieur ($Bi_{ext} = 0.$). Pour cette raison, dans les figures (2.17) et (2.18) on montre l'influence du nombre de Biot sur les amplitudes et les déphasages de la température moyenne de fluide le long du conduit pour les deux cas : $\beta_s = 0.1$ et 0.5 et différents Bi_{ext} .

Les figures (2.17) et (2.18) montrent l'influence du nombre de Biot (fuite vers l'extérieur). On remarque rapidement, que pour des faibles capacités thermiques du conduit ($\beta_s = 0.1$), les effets de la convection sur l'amplitude et le déphasage du signal thermique sont importants jusqu'à un nombre de Biot $Bi_{ext} = 8.5$ considérée comme une limite. Par ailleurs, pour des grandes capacités thermiques du conduit ($\beta_s = 0.5$), l'amortissement le long du conduit est important et le nombre de Biot (échange avec l'ambiance) n'a aucune influence notable sur ce dernier. Contrairement au déphasage, les effets du nombre de Biot dans cette situation ($\beta_s = 0.5$) sont similaires à ceux notés pour $\beta_s = 0.1$.

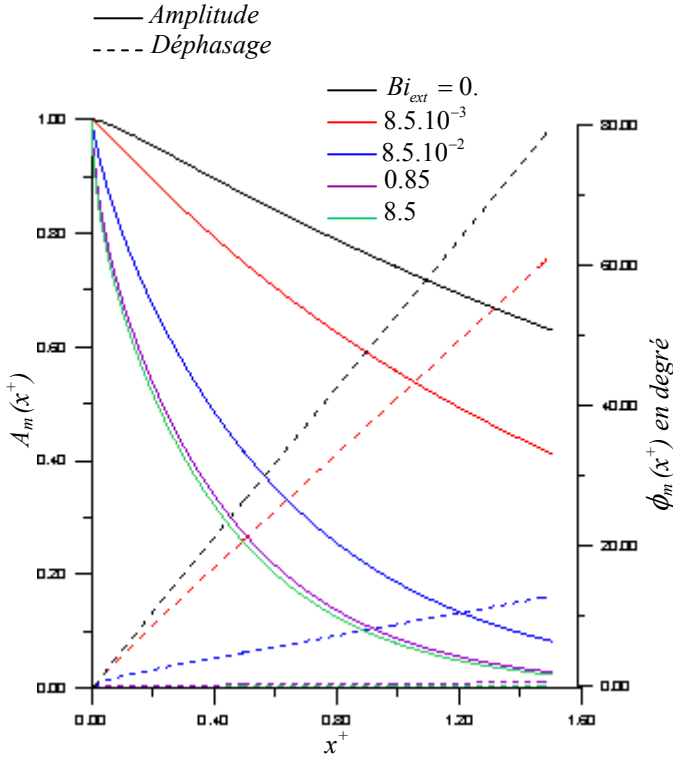


Fig. 2. 17 : Amplitude et Déphasage de la température moyenne de fluide pour différents Bi_{ext} ($\beta_s=0.1$ et $\delta=0.1$)

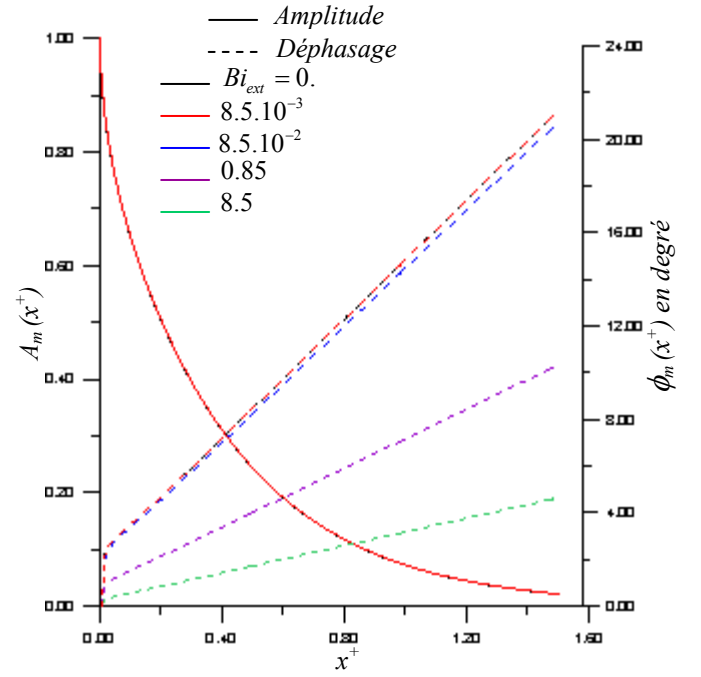


Fig. 2. 18 : Amplitude et Déphasage de la température moyenne de fluide pour différents Bi_{ext} ($\beta_s=0.5$ et $\delta=0.1$)

2.8.7. Discussion de l'hypothèse d'isothermicité des plaques du conduit :

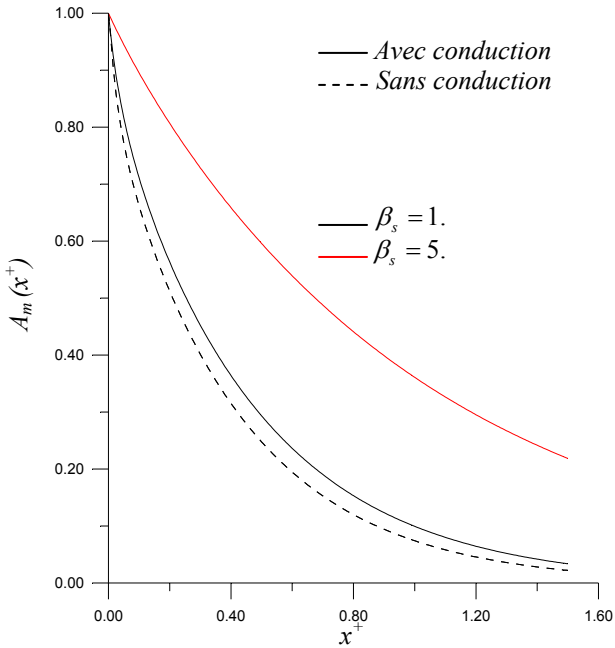


Fig. 2. 19 : Amplitude de la température moyenne de fluide pour $a^+ = 8.5.10^{-3}$, $\delta=0.1$ et $Bi_{ext}=0$.

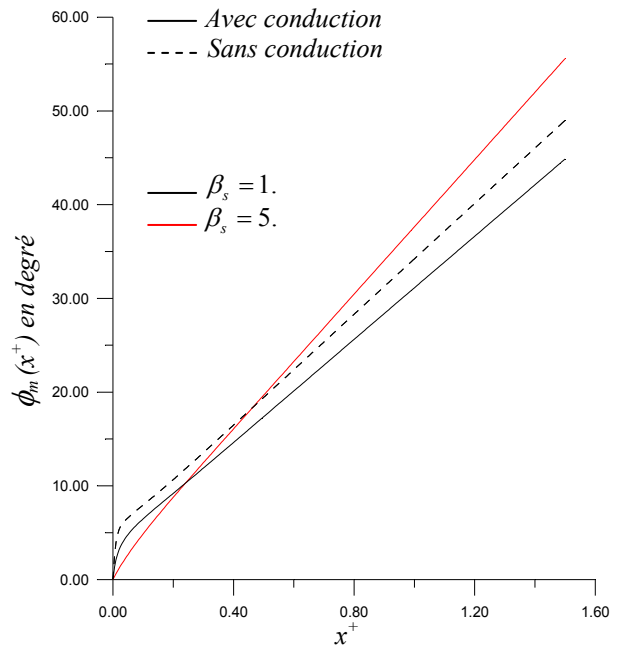


Fig. 2. 20 : Déphasage de la température de mélange pour $a^+ = 8.5.10^{-3}$, $\delta=0.1$ et $Bi_{ext}=0$.

Les figures (2.19) et (2.20) montrent respectivement, l'évolution de l'amplitude et du déphasage de la température moyenne de fluide le long du conduit pour les deux cas limites (avec et sans diffusion dans le mur du conduit). Ces figures dévoilent que l'hypothèse d'isothermicité reste valable, si seulement les valeurs de β_s sont très petites ($\beta_s \ll 1$). Contrairement, dans le cas des valeurs de β_s supérieurs à 1 ($\beta_s = 5$), cette hypothèse n'est plus valable.

2.9.Conclusion :

L'analyse physique des résultats issus du modèle ici développé, peut être suffisante pour comprendre le phénomène de convection forcée en régime périodique. Toutes fois, on montre que :

- L'amortissement des amplitudes suit une fonction exponentielle le long du conduit, il est plus important pour les grandes capacités thermiques du conduit. Contrairement au déphasage, qui est une fonction linéaire loin de l'entrée du conduit, est gouverné par la fréquence du signal thermique.
- L'effet du nombre de Biot est notable pour des faibles capacités thermiques du conduit.

L'hypothèse d'isothermicité des parois du conduit n'est retenue que pour des faibles épaisseurs, faibles fréquences d'entrée et/ou grandes capacités thermiques.

Utilisation de la méthode de Ritz pour la résolution du problème de Graetz en régime périodique (cas de deux plaques parallèles).

3.1.Introduction :

Les solutions analytiques sont recherchées en premier temps pour la résolution des problèmes de l'ingénieur. Souvent, ces solutions exactes sont très difficiles, voir impossible à obtenir pour les problèmes physiques complexes. Pour remédier à cette situation, des modèles simplifiés faisant intervenir des hypothèses (parfois difficilement justifiables) sont utilisées. Des solutions théoriques approximatives ou approchées (méthodes asymptotiques, variationnelles, intégrales, etc...) sont également recherchées pour leur grande précision.

A cet effet, dans ce chapitre, nous allons résoudre le problème de convection forcée pour un écoulement laminaire entre deux plaques parallèles épaisses en régime périodique, tel que décrit dans le chapitre 2. Ici un profil de vitesse parabolique (physiquement réaliste) est pris en considération. Une solution analytique dans ce cas n'existe pas. Pour cela, une méthode variationnelle proposée par Ritz [40] sera utilisée pour ce type de problème conjugué. Les résultats obtenus par cette méthode seront confrontés à ceux obtenus dans le chapitre 2 pour un profil de vitesse uniforme et à ceux de la référence [17] pour une paroi mince et un profil de vitesse parabolique.

3.2.Formulation du problème:

L'étude théorique réalisée dans le chapitre 2, sur la convection forcée d'un écoulement fluide entre deux plaques parallèles est reprise dans ce chapitre en tenant compte du profil de vitesse parabolique. Ce qui peut être substitué, en adimensionnel, par les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}_w}{\partial y^{+2}} = 2i\beta_s^2 \tilde{\theta}_w, \quad 0 < y^+ < 1; \quad x^+ > 0 \quad (3.1a)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial y^+} \right|_{y^+=0} = Bi_{ext} \tilde{\theta}_w \Big|_{y^+=0}, \quad x^+ > 0 \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial z^{+2}} = i\delta \tilde{\theta} + u^+(z^+) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x^+}, \quad 0 < z^+ < 1; \quad x^+ > 0 \quad (3.1c)$$

$$\tilde{\theta}(0, z^+, t^+) = 1, \quad 0 \leq z^+ \leq 1 \quad (3.1d)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0, \quad x^+ > 0 \quad (3.1e)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} = -r_{th} \left. \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial y^+} \right|_{y^+=1}, \quad x^+ > 0 \quad (3.1f)$$

$$\tilde{\theta} \Big|_{z^+=1} = \tilde{\theta}_w \Big|_{y^+=1}, \quad x^+ > 0, \quad (3.1g)$$

avec $u^+(z^+) = 1$ pour un écoulement uniforme et $u^+(z^+) = \frac{3}{2}(1 - z^{+2})$ pour un écoulement parabolique.

Après avoir résolu l'équation (3.1a), on présente ci-dessous la fonction température dans le solide:

$$\tilde{\theta}_w(x^+, y^+) = \tilde{\theta}(x^+, 1) \frac{ch(\tilde{\beta}_s y^+) + \frac{Bi_{ext} sh(\tilde{\beta}_s y^+)}{\tilde{\beta}_s}}{ch(\tilde{\beta}_s) + \frac{Bi_{ext} sh(\tilde{\beta}_s)}{\tilde{\beta}_s}}. \quad (3.2)$$

La distribution des températures dans le fluide est définie par les nouvelles équations :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial z^{+2}} = i\delta \tilde{\theta} + u^+(z^+) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x^+}, \quad 0 < z^+ < 1; \quad x^+ > 0 \quad (3.3a)$$

$$\tilde{\theta}(0, z^+, t^+) = 1, \quad 0 \leq z^+ \leq 1 \quad (3.3b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0, \quad x^+ > 0 \quad (3.3c)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} + \tilde{H} \tilde{\theta} \Big|_{z^+=1} = 0, \quad x^+ > 0, \quad (3.3d)$$

$$\text{avec } \tilde{H} = r_{th} \frac{Bi_{ext} + \tilde{\beta}_s th(\tilde{\beta}_s)}{1 + \frac{Bi_{ext} th(\tilde{\beta}_s)}{\tilde{\beta}_s}}. \quad (3.4)$$

3.3. Résolution du problème :

Par l'introduction de la transformée de Laplace sur la variable x^+ :

$$\tilde{\theta}(z^+, p) = \int_0^\infty e^{-px^+} \tilde{\theta}(z^+, x^+) dx^+, \quad (3.5)$$

dans le problème (3.3), on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial z^{+2}} = (pu^+(z^+) + i\delta) \tilde{\theta} - u^+(z^+), \quad 0 < z^+ < 1 \quad (3.6a)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0 \quad (3.6b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} + \tilde{H} \tilde{\theta} \Big|_{z^+=1} = 0, \quad (3.6c)$$

dont la forme variationnelle est donnée par l'équation ci-dessous :

$$I = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right)^2 + (pu^+(z^+) + i\delta) \tilde{\theta}^2 - 2u^+(z^+) \tilde{\theta} \right] dz^+ + \tilde{H} \tilde{\theta}^2 \Big|_{z^+=1}. \quad (3.7)$$

$\tilde{\theta}$ est la solution approchée du problème (3.6), elle est recherchée sous la forme :

$$\tilde{\theta}(z^+, p) = \sum_{n=1}^N c_n(p) \cos(\sigma_n z^+). \quad (3.8)$$

La fonction $\tilde{\theta}$ doit satisfaire les conditions aux limites (3.6b) et (3.6c), d'où σ_n sont solutions de l'équation transcendante $\sigma_n \tan(\sigma_n) = \tilde{H}$ (cf. Annexe 2).

Les inconnues $c_n(p)$ sont déterminées par la minimisation de l'équation (3.7), en écrivant :

$$\frac{dI(c_n)}{dc_n(p)} = 0. \quad (3.9)$$

On obtient un système d'équations sous la forme :

$$[A][c] = [b] \quad (3.10)$$

Ainsi, on peut écrire :

$$[A] = [A^*] + p [D]. \quad (3.11)$$

Après avoir résolu le système (3.10) par l'utilisation de la définition (3.11), Les coefficients $c_n(p)$ sont donnés sous la forme :

$$c_n(p) = \frac{B_n}{p + \mu_n}, \quad (3.12)$$

avec : $[B] = [b] [D]^{-1}$.

μ_n sont les valeurs propres de la matrice $[A^*] [D]^{-1}$.

Les éléments de $[A^*]$, $[D]$ et $[b]$ sont donnés dans l'annexe (1).

La fonction transformée de la température s'écrit sous la forme :

$$\bar{\theta}(z^+, p) = \sum_{n=1}^N \frac{B_n}{p + \mu_n} \cos(\sigma_n z^+). \quad (3.13)$$

Par inversion et le retour vers le repère original, la distribution de la température dans le fluide est donnée par :

$$\tilde{\theta}(x^+, z^+) = \sum_{n=1}^N B_n \cos(\sigma_n z^+) \exp(-\mu_n x^+). \quad (3.14)$$

On peut écrire sous forme générale les températures moyenne de fluide, interfaciale et axiale et le flux thermique pariétal respectivement par :

$$\tilde{\theta}_m(x^+) = \sum_{n=1}^N \tilde{Q}_n \exp(-\mu_n x^+) \quad (3.15a)$$

$$\tilde{\theta}_w(x^+, 1) = \sum_{n=1}^N \tilde{W}_n \exp(-\mu_n x^+) \quad (3.15b)$$

$$\tilde{\theta}_c(x^+, 0) = \sum_{n=1}^N \tilde{F}_n \exp(-\mu_n x^+) \quad (3.15c)$$

$$\tilde{\varphi}_w(x^+, 1) = \sum_{n=1}^N \tilde{P}_n \exp(-\mu_n x^+), \quad (3.15d)$$

où $\tilde{Q}_n$, $\tilde{W}_n$, $\tilde{F}_n$ et $\tilde{P}_n$ sont des quantités complexes.

Puisque les expressions (3.15) portent des quantités complexes, nous pouvons exprimer conventionnellement les solutions finales pour la température moyenne de fluide, la température interfaciale, la température axiale et le flux thermique pariétal, respectivement par :

$$\theta_m(x^+, t^+) = A_m(x^+) \sin(\delta t^+ + \phi_m(x^+, 1)) \quad (3.16a)$$

$$\theta_w(x^+, 1, t^+) = A_w(x^+, 1) \sin(\delta t^+ + \phi_w(x^+, 1)) \quad (3.16b)$$

$$\theta_c(x^+, 0, t^+) = A_c(x^+, 0) \sin(\delta t^+ + \phi_c(x^+, 0)) \quad (3.16c)$$

$$\phi(x^+, 1, t^+) = A_f(x^+, 1) \sin(\delta t^+ + \phi_f(x^+, 1)), \quad (3.16d)$$

où les paramètres A et ϕ sont respectivement, les amplitudes et les déphasages des oscillations par rapport à la température d'entrée. Nous pouvons donc évaluer les expressions (3.16) en considérant les parties réelles et imaginaires des fonctions (3.15). Par ailleurs, on peut déterminer le nombre local de Nusselt à partir de sa définition :

$$Nu(x^+, t^+) = \frac{\left. \frac{\partial \theta(x^+, z^+, t^+)}{\partial z^+} \right|_{z^+=1}}{\theta_w(x^+, 1, t^+) - \theta_m(x^+, t^+)}. \quad (3.17)$$

3.4. Validation de la méthode :

En absence d'une solution analytique exacte pour un écoulement parabolique, nous avons choisi la validation du modèle variationnel (M.V.R) par celui développé dans le deuxième chapitre, à savoir un écoulement uniforme dans un conduit à deux plaques parallèles. Les résultats de cette validation sont portés par le tableau (3.1) suivant :

Tableau. 3. 1 : Validation du modèle variationnel M.V.R (profil de vitesse uniforme).

a^+	n	$\tilde{F}_n(M.V.R)$	$\tilde{F}_n(anal. exacte)$	$\mu_n(M.V.R)$	$\mu_n(anal. exacte)$
5.10⁻⁵	1	1.2732E+00+ i 6.4443E-06	1.2732E+00+ i 1.5369E-05	2.45638+ i 0.11082	2.45638+ i 0.11082
	2	-0.4244E+00- i 2.0232E-05	-0.4244E+00- i 4.6423E-05	22.10723+ i 0.19784	22.10723+ i 0.19784
	3	0.2547E+00+ i 5.8600E-05	0.2547E+00+ i 7.8575E-05	61.40955+ i 0.37655	61.40953+ i 0.37655
	4	-0.1819E+00- i 1.4886E-04	-0.1819E+00- i 1.0778E-04	120.3609+ i 0.62941	120.3609+ i 0.62941
	5	0.1415E+00+ i 1.5259E-04	0.1415E+00+ i 1.3896E-04	198.9641+ i 0.97774	198.9642+ i 0.97774
8.5.10⁻³	1	1.2834E+00+ i 4.7925E-03	1.2834E+00+ i 4.8175E-03	2.38181+ i 0.50766	2.38179+ i 0.50766
	2	-0.4566E+00- i 1.7911E-02	-0.4567E+00- i 1.7952E-02	21.31151+ i 3.91489	21.31151+ i 3.91489
	3	0.3118E+00+ i 4.7451E-02	0.3118E+00+ i 4.7473E-02	58.15216+ i 11.54125	58.15219+ i 11.54125
	4	-0.2340E+00- i 0.1098E+00	-0.2341E+00- i 0.1098E+00	108.4321+ i 23.53946	108.4321+ i 23.53946
	5	0.1315E+00+ i 0.1439E+00	0.1315E+00+ i 0.1438E+00	169.0712+ i 30.12265	169.0711+ i 30.12263
0.1	1	1.0597E+00+ i 0.1535E+00	1.0597E+00+ i 0.1535E+00	0.32073+ i 1.00858	0.32073+ i 1.00858
	2	-6.3341E-02- i 0.1897E+00	-6.3287E-02- i 0.1896E+00	10.00083+ i 2.14286	10.00083+ i 2.14286
	3	4.3071E-03+ i 5.0913E-02	4.3202E-03+ i 5.0974E-02	39.51906+ i 2.11768	39.51905+ i 2.11768
	4	-9.2381E-04- i 2.2603E-02	-9.1971E-04- i 2.2560E-02	88.85134+ i 2.10326	88.85132+ i 2.10326
	5	3.3043E-04+ i 1.2696E-02	3.2863E-04+ i 1.2744E-02	157.9334+ i 2.11142	157.9334+ i 2.11142

D'une autre manière, par une présentation graphique (cf. Fig.3.1 et 3.2), on remarque que les résultats obtenus par la modèle (M.V.R) pour des ordres de précision $N=1$ et 2, présentent des écarts très importants à l'entrée du conduit en comparaison avec le

modèle exact (cf. Chapitre 2). Contrairement dans le cas $N \geq 5$, les résultats issus de ce modèle (M.V.R) se confondent en tout points du canal avec ceux obtenus par le modèle exact. Même constat en comparant les températures axiales (cf. Fig.3.2).

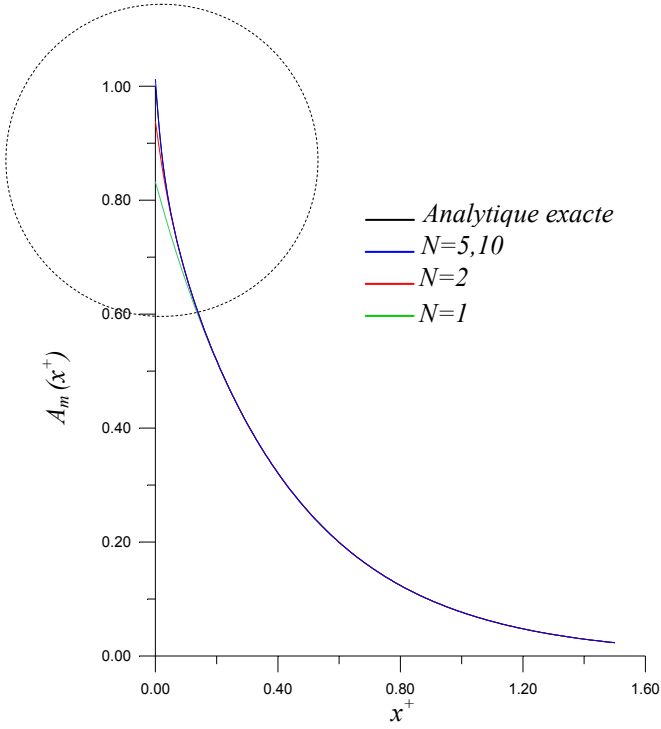


Fig. 3. 1a : Amplitude de la température moyenne de fluide ($a^+ = 8.5.10^{-3}$, $\delta = 0.1$ et $Bi_{ext}=0$).

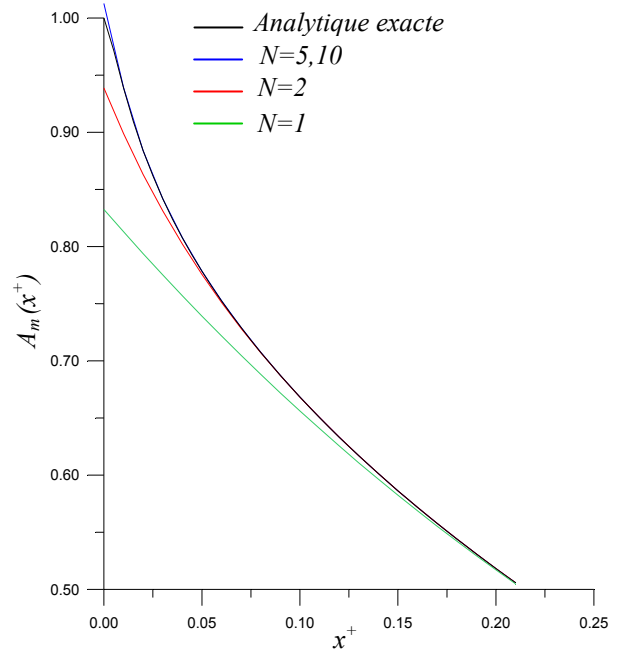


Fig. 3. 1b : Agrandissement de la zone encadrée de la figure (3.1a).

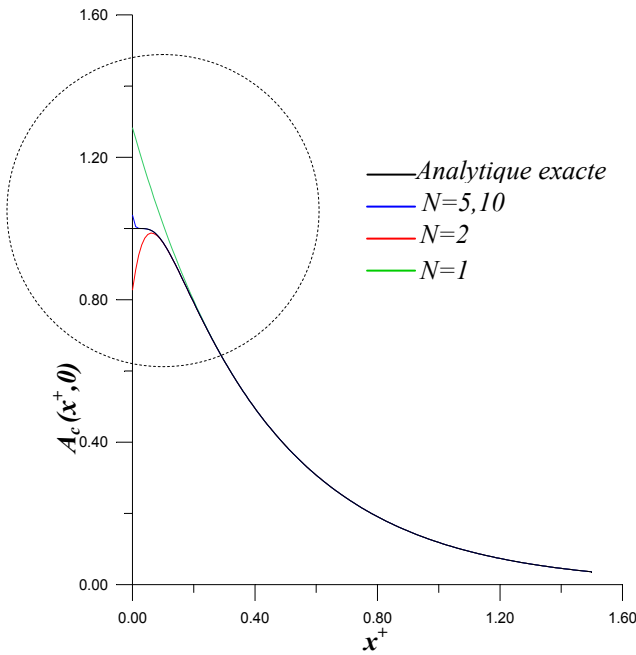


Fig. 3. 2a : Amplitude de la température axiale ($a^+ = 8.5.10^{-3}$, $\delta = 0.1$ et $Bi_{ext}=0$).

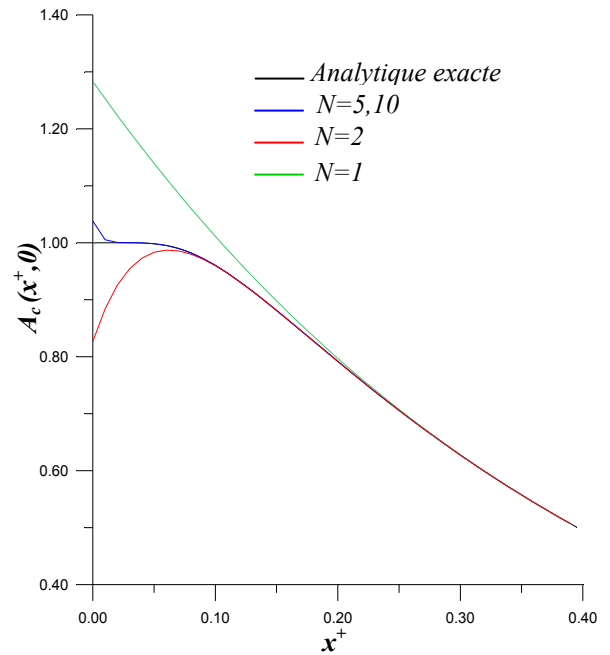


Fig. 3. 2b : Agrandissement de la zone encadrée de la figure (3.2a).

Dans un régime d'écoulement parabolique, le tableau (3.2) est présenté ici à titre de comparaison et de validation des résultats obtenus par la présente analyse dans le cas $a^+ = 0.001$, cela par l'utilisation de paramètre $\tilde{H}_0$ (cf. Chapitre2). La comparaison par rapport à [17] est très satisfaisante.

Tableau. 3. 2 : Comparaison avec la référence [17] (profil de vitesse parabolique).

b^+	n	$\tilde{W}_n \text{ par [17]}$	$\tilde{W}_n \text{ par la présente étude}$	$\mu_n \text{ par [17]}$	$\mu_n \text{ par la présente étude}$
2	1	0.4674E+00– i 0.5492E+00	0.6703E+00– i 0.5898E+00	1.0475E+00+ i 0.9840E+00	1.0494E+00+ i 0.9837E+00
	2	0.3259E+00+ i 7.3753E–02	0.3056E+00+ i 0.3175E+00	1.4692E+01+ i 4.6140E+00	1.4697E+01+ i 4.6047E+00
	3	0.1023E+00+ i 0.1055E+00	1.8792E–02+ i 0.1091E+00	4.7954E+01+ i 6.4429E+00	4.7963E+01+ i 6.4446E+00
	4	3.9448E–02+ i 6.7002E–02	3.3579E–03+ i 4.6863E–02	1.0270E+02+ i 7.4639E+00	1.0270E+02+ i 7.4302E+00
	5	1.9415E–02+ i 4.4246E–02	1.0264E–03+ i 2.5924E–02	1.7893E+02+ i 8.2196E+00	1.7893E+02+ i 8.1930E+00
	6	1.1181E–02+ i 3.1319E–02	4.0681E–04+ i 1.6448E–02	2.7655E+02+ i 8.8429E+00	2.7657E+02+ i 8.8945E+00
	7	7.1376E–03+ i 2.3420E–02	1.9307E–04+ i 1.1361E–02	3.9552E+02+ i 9.3828E+00	3.9555E+02+ i 9.4213E+00
	8	2.7955E–02+ i 1.5357E–02	1.0834E–04+ i 8.3179E–03	5.3588E+02+ i 9.8647E+00	5.3591E+02+ i 9.9748E+00
	9	3.5341E–03+ i 1.4679E–02	6.5423E–05+ i 6.3518E–03	6.9761E+02+ i 1.0302E+01	6.9759E+02+ i 1.0295E+00
	10	2.6564E–03+ i 1.2101E–02	4.2613E–05+ i 5.0088E–03	8.8063E+02+ i 1.0704E+01	8.8062E+02+ i 1.0592E+00
10	1	2.3395E–02– i 0.1700E+00	2.1753E–02– i 0.2025E+00	1.8365E+00+ i 0.3146E+00	1.8223E+00+ i 0.3247E+00
	2	3.5153E–02– i 0.1111E+00	4.5818E–02– i 0.2458E+00	2.0935E+01+ i 2.3772E+00	2.0922E+01+ i 2.3862E+00
	3	2.1994E–02– i 9.6256E–02	0.2034E+00– i 0.3507E+00	6.0751E+01+ i 5.7261E+00	6.0748E+01+ i 5.7401E+00
	4	5.3062E–02– i 7.5254E–02	0.5349E+00+ i 1.1131E–02	1.2110E+02+ i 1.0042E+01	1.2111E+02+ i 1.0046E+01
	5	6.0278E–02– i 6.1690E–02	0.1443E+00+ i 0.2427E+00	2.0187E+02+ i 1.5059E+01	2.0183E+02+ i 1.5052E+01
	6	6.5441E–02– i 4.7869E–02	2.9185E–02+ i 0.1286E+00	3.0290E+02+ i 2.0496E+01	3.0292E+02+ i 2.0504E+01
	7	6.7828E–02– i 3.3957E–02	9.6918E–03+ i 7.6801E–02	4.2425E+02+ i 2.6057E+01	4.2424E+02+ i 2.6068E+01
	8	6.7042E–02– i 2.0645E–02	4.2629E–03+ i 5.1626E–02	5.6596E+02+ i 3.1464E+01	5.6586E+02+ i 3.1402E+01
	9	6.3435E–02– i 8.9791E–03	2.1821E–03+ i 3.7361E–02	7.2816E+02+ i 3.6506E+01	7.2817E+02+ i 3.6465E+01
	10	5.7878E–02+ i 3.3844E–04	1.2491E–03+ i 2.8408E–02	9.1115E+02+ i 4.1062E+01	9.1115E+02+ i 4.0972E+01

3.5.Résultats et commentaires :

Pour les limitations indiquées dans le chapitre 2, nous considérons dans cette section quelques cas de a^+ , extraits de la référence [19] avec $\delta = 0.1$, $r_{th} = 50$ et $Bi_{ext} = 0$.

Les tableaux (3.3a) et (3.3b) présentent l'ensemble des valeurs numériques nécessaires pour calculer les fonctions (3.15), en se limitant à l'ordre 5.

Tableau. 3. 3a : Valeurs propres et fonctions propres (profil de vitesse parabolique).

a^+	n	σ_n	μ_n	Q_n
5.10^{-5}	1	1.5673E+00+ i 3.4511E-03	1.8780E+00+ i 8.3257E-02	0.9824E+00- i 1.0628E-03
	2	4.7018E+00+ i 1.0405E-02	2.1377E+01+ i 0.1484E+00	1.1176E-02+ i 5.0975E-04
	3	7.8364E+00+ i 1.7645E-02	6.2188E+01+ i 0.2388E+00	1.2112E-03+ i 1.8883E-04
	4	1.0971E+01+ i 2.4128E-02	1.2471E+02+ i 0.3223E+00	2.2836E-04+ i 8.2507E-05
	5	1.4106E+01+ i 3.1113E-02	2.7743E+02- i 0.7653E+00	4.5573E-05+ i 3.6371E-05
$8.5.10^{-3}$	1	1.5489E+00+ i 0.1316E+00	1.8309E+00+ i 0.3419E+00	0.9962E+00- i 4.1440E-02
	2	4.6348E+00+ i 0.4116E+00	2.0927E+01+ i 2.0798E+00	1.2486E-02+ i 2.2871E-02
	3	7.6622E+00+ i 0.7466E+00	6.0845E+01+ i 4.8549E+00	-1.2943E-04+ i 1.1024E-02
	4	1.0473E+01+ i 1.1190E+00	1.2365E+02+ i 7.2429E+00	-4.1869E-03+ i 5.6684E-03
	5	1.3054E+01+ i 1.1499E+00	3.6668E+02- i 6.0256E+01	-2.8466E-03+ i 6.5353E-06
$8.5.10^{-2}$	1	0.8803E+00+ i 0.5845E+00	0.5469E+00+ i 0.9709E+00	1.0486E+00+ i 5.5444E-02
	2	3.1945E+00+ i 0.3792E+00	1.3146E+01+ i 3.1990E+00	-4.7692E-02- i 5.0421E-02
	3	6.2905E+00+ i 0.1889E+00	4.6664E+01+ i 4.0194E+00	-8.3199E-04- i 4.1496E-03
	4	9.4275E+00+ i 0.1252E+00	1.0196E+02+ i 4.6963E+00	-6.9808E-05- i 7.1061E-04
	5	1.2568E+01+ i 9.4182E-02	2.7421E+02+ i 1.4375E+01	-1.0940E-05- i 1.6274E-04
0.1	1	0.8013E+00+ i 0.5669E+00	0.4245E+00+ i 0.9003E+00	1.0361E+00+ i 5.2089E-02
	2	3.1787E+00+ i 0.3213E+00	1.2894E+01+ i 2.7759E+00	-3.5431E-02- i 4.7826E-02
	3	6.2885E+00+ i 0.1604E+00	4.6472E+01+ i 3.4544 E+00	-5.9561E-04- i 3.5230E-03
	4	9.4267E+00+ i 0.1063E+00	1.0179E+02+ i 4.0177E+00	-5.0123E-05- i 6.0269E-04
	5	1.2567E+01+ i 8.0025E-02	2.7364E+02+ i 1.2278E+01	-7.8849E-06- i 1.3813E-04

Tableau. 3. 3b : Valeurs propres et fonctions propres (suite).

a^+	n	P_n	W_n	F_n
5.10^{-5}	1	1.9868E+00+ i 4.5681E-03	4.4477E-03- i 4.3744E-03	1.2677E+00+ i 1.0799E-04
	2	1.9154E+00+ i 5.9524E-03	4.2992E-03- i 4.2351E-03	-0.4074E+00- i 3.1980E-04
	3	1.7646E+00+ i 8.7837E-03	3.9593E-03- i 3.9634E-03	0.2252E+00+ i 5.4415E-04
	4	1.5117E+00+ i 1.1928E-02	3.4120E-03- i 3.3066E-03	-0.1378E+00- i 7.0235E-04
	5	1.0909E+00+ i 1.3092E-02	2.4711E-03- i 2.3839E-03	7.7339E-02+ i 6.8136E-04
$8.5.10^{-3}$	1	1.9919E+00+ i 0.1796E+00	2.8558E-02- i 0.1683E+00	1.2759E+00+ i 2.9244E-03
	2	2.1586E+00+ i 0.3136E+00	4.1075E-02- i 0.1817E+00	-0.4327E+00- i 1.0981E-02
	3	2.5022E+00+ i 0.8467E+00	8.8737E-02- i 0.2073E+00	0.2670E+00+ i 2.8637E-02
	4	2.0069E+00+ i 2.4029E+00	0.2179E+00- i 0.1548E+00	-0.1735E+00- i 6.0065E-02
	5	-0.3133E+00+ i 1.9123E+00	0.1606E+00+ i 3.9403E-02	7.8742E-02+ i 5.9772E-02
$8.5.10^{-2}$	1	0.4639E+00+ i 1.0453E+00	0.8917E+00- i 0.3874E+00	1.0817E+00+ i 0.1712E+00
	2	-0.2632E+00+ i 0.1164E+00	9.7128E-02+ i 0.2245E+00	-8.6623E-02- i 0.2112E+00
	3	-6.5356E-02+ i 7.6096E-03	6.0413E-03+ i 5.5635E-02	5.8606E-03+ i 5.4666E-02
	4	-2.4802E-02+ i 1.6386E-03	1.2302E-03+ i 2.1129E-02	-1.2137E-03- i 2.0965E-02
	5	-1.0124E-02+ i 5.3165E-04	3.8351E-04+ i 8.5805E-03	3.8066E-04+ i 8.5426E-03
0.1	1	0.3384E+00+ i 0.9214E+00	0.9237E+00- i 0.3322E+00	1.0593E+00+ i 0.1513E+00
	2	-0.1935E+00+ i 6.9595E-02	6.8335E-02+ i 0.1940E+00	-6.2861E-02- i 0.1853E+00
	3	-4.7010E-02+ i 4.6224E-03	4.2960E-03+ i 4.6987E-02	4.2025E-03+ i 4.6392E-02
	4	-1.7859E-02+ i 9.9851E-04	8.8139E-04+ i 1.7899E-02	-8.7283E-04- i 1.7799E-02
	5	-7.3045E-03+ i 3.2528E-04	2.7627E-04+ i 7.2798E-03	2.7478E-04+ i 7.2565E-03

Dans un but de comparaison, les figures (3.3), (3.4) et (3.5) présentent l'évolution de l'amplitude et du déphasage de la température moyenne de fluide et l'amplitude du flux thermique pariétal le long du conduit. La comparaison entre un profil de vitesse uniforme et un profil de vitesse parabolique montre que les résultats présentent des écarts significatifs. L'hypothèse faite au chapitre 2, supposant un profil de vitesse uniforme (écoulement piston), est rejetée.

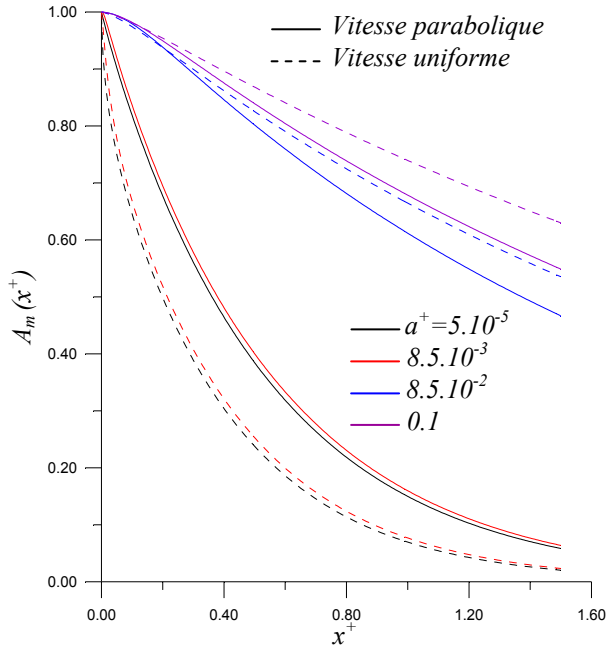


Fig. 3. 3 : Amplitude de la température moyenne de fluide pour différents a^+ ($Bi_{ext}=0, \delta=0.1$)

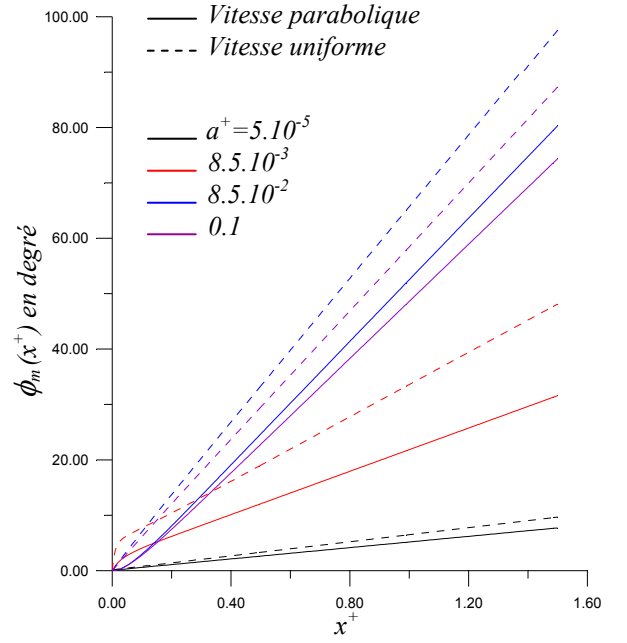


Fig. 3. 4 : Déphasage de la température moyenne de fluide pour différents a^+ ($Bi_{ext}=0, \delta=0.1$)

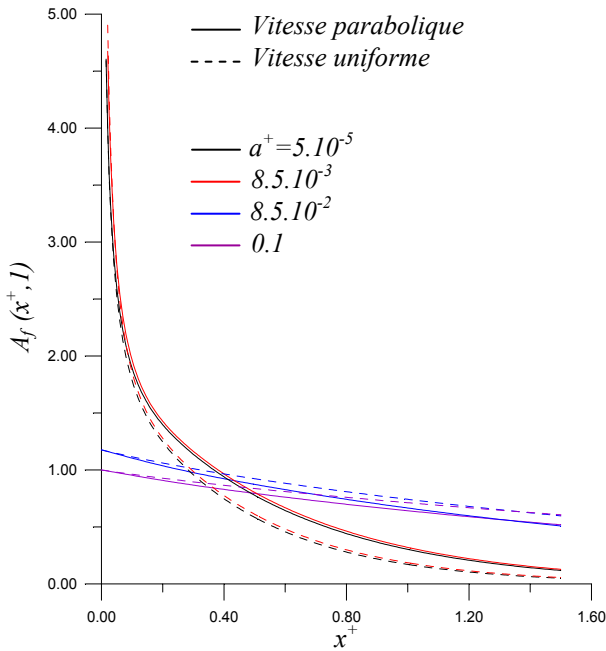


Fig. 3. 5 : Amplitude du flux pariétal pour différents a^+ ($Bi_{ext}=0, \delta=0.1$)

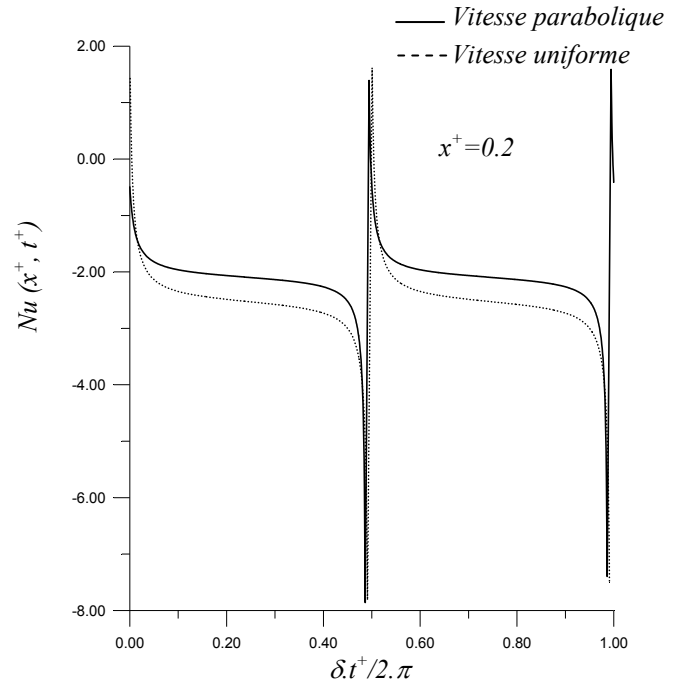


Fig. 3. 6 : Nombre de Nusselt en $x^+ = 0.2$ ($a^+ = 8.5.10^{-3}$, $Bi_{ext} = 0$, $\delta = 0.1$)

La figure (3.6) montre l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du temps, pour $a^+ = 8.5.10^{-3}$ et une position axiale $x^+ = 0.2$ de l'entrée du conduit.

On remarque, que le coefficient d'échange varie périodiquement avec le temps. Notons que, la courbe du nombre de Nusselt se compose de deux phases. Une phase de pulsation, résultat d'égalité de la température moyenne de fluide avec la température interfaciale. Une deuxième phase ou le nombre de Nusselt est une fonction continue, elle indique le sens de la propagation de la chaleur (du fluide vers la paroi de conduit ou vice versa). En comparaison avec les résultats d'un écoulement parabolique (physiquement réaliste), les résultats d'un écoulement piston marquent un décalage important.

En conclusion, le profil de vitesse uniforme (slug flow) n'est pas retenu, vu les écarts constatés dans toutes les fonctions (amortissement, déphasage, flux et nombre du Nusselt), par rapport à un profil de vitesse développé parabolique.

Utilisation de la méthode de Ritz pour la résolution du problème de Graetz en régime périodique (cas du tube cylindrique).

4.1.Introduction :

Les chapitres 2 et 3 ont été consacrés à l'étude de la convection forcée en régime périodique dans un conduit à deux plaques parallèles. Dans la pratique, les conduits cylindriques sont plus répandus. Nous nous intéressons donc, dans ce chapitre, à l'étude du même problème par la même méthode. Seulement ici, nous considérons un écoulement fluide dans un conduit cylindrique.

L'intérêt de cette étude n'est pas seulement pour son utilité sur le plan industriel, mais aussi dans le but de vulgariser cette méthode de résolution (M.V.R) en étudiant sa précision dans une telle géométrie (cylindrique).

4.2.Description et formulation du problème :

Le problème à étudier est celui de la convection forcée d'un écoulement fluide laminaire abordant la section d'entrée d'un conduit, de forme cylindrique (cf. Fig.4.1), avec une température périodique.

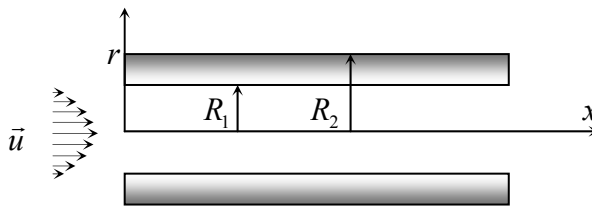


Fig. 4. 1 : Géométrie du conduit à étudier.

Tenant compte des hypothèses décrites dans le chapitre 2, le problème peut être formulé comme suit :

Dans le fluide :

$$\alpha_f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad 0 < r < R_1; x > 0; t > 0. \quad (4.1a)$$

Condition à l'entrée du conduit :

$$T(0, x, t) = T_\infty + \Delta T \sin(\omega t), \quad 0 \leq r \leq R_1; t > 0. \quad (4.1b)$$

Condition de symétrie sur l'axe du conduit :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad x > 0; t > 0. \quad (4.1c)$$

Dans le solide :

$$\alpha_s \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_w}{\partial r} \right) = \frac{\partial T_w}{\partial t}, \quad R_1 < r < R_2; x > 0; t > 0. \quad (4.1d)$$

Condition d'interface paroi-milieu extérieur :

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial r} \right|_{r=R_2} = -\frac{h}{k_s} \left(T_w|_{R_2} - T_\infty \right), \quad x > 0; t > 0. \quad (4.1e)$$

Les conditions de contact fluide-paroi :

$$k_f \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1} = k_s \left. \frac{\partial T_w}{\partial r} \right|_{r=R_1}, \quad x > 0; t > 0 \quad (4.1f)$$

$$T|_{R_2} = T_w|_{R_2}, \quad x > 0; t > 0, \quad (4.1g)$$

T_w et T représentent respectivement la température du solide et la température du fluide.

En introduisant, dans le problème précédent, les variables adimensionnelles suivantes :

$$r^+ = \frac{r}{R_1}; \quad r_2^+ = \frac{R_2}{R_1}; \quad x^+ = \frac{x \alpha_f}{R_1^2 \bar{u}}; \quad u^+ = \frac{u}{\bar{u}}; \quad t^+ = \frac{t \alpha_f}{R_1^2}; \quad \gamma = \frac{k_s}{k_f}; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}; \quad \theta_w = \frac{T_w - T_\infty}{\Delta T};$$

$$Bi_{ext} = \frac{h_{ext} R_1}{k_s}; \quad \delta = \frac{\omega R_1^2}{\alpha_f} \quad \text{et} \quad \beta_s = (R_2 - R_1) \sqrt{\frac{\omega}{2 \alpha_s}},$$

et les températures complexes :

$$\theta_w(x^+, r^+, t^+) = \tilde{\theta}_w(x^+, r^+) e^{-i \delta t^+} \quad (4.2a)$$

$$\theta(x^+, r^+, t^+) = \tilde{\theta}(x^+, r^+) e^{-i \delta t^+}, \quad (4.2b)$$

le problème à résoudre prend alors la forme :

$$\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right) = i \delta \tilde{\theta} + u^+ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x^+}, \quad 0 < r^+ < 1; \quad x^+ > 0 \quad (4.3a)$$

$$\tilde{\theta}(0, r^+) = 1, \quad 0 \leq r^+ \leq 1 \quad (4.3b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right|_{r^+=0} = 0, \quad x^+ > 0 \quad (4.3c)$$

$$\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right) = 2i \left(\frac{\beta_s}{r_2^+ - 1} \right)^2 \tilde{\theta}_w, \quad 1 < r^+ < r_2^+; \quad x^+ > 0 \quad (4.3d)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right|_{r^+=r_2^+} = -Bi_{ext} \tilde{\theta}_w \Big|_{r^+=r_2^+}, \quad x^+ > 0 \quad (4.3e)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right|_{r^+=1} = \gamma \left. \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right|_{r^+=1}, \quad x^+ > 0 \quad (4.3f)$$

$$\tilde{\theta} \Big|_{r^+=1} = \tilde{\theta}_w \Big|_{r^+=1}, \quad x^+ > 0. \quad (4.3g)$$

4.3. Résolution du problème:

La solution de l'équation (4.3d) s'écrit:

$$\tilde{\theta}_w(x^+, r^+) = AJ_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1} \right) + BY_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1} \right), \quad (4.4)$$

où : $\tilde{\beta}_s = \beta_s (1 - i)$.

Ce qui permet, par l'utilisation des conditions aux limites, l'obtention de la nouvelle condition aux limites :

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right|_{r^+=1} = -\tilde{H} \tilde{\theta} \Big|_{r^+=1}. \quad (4.5)$$

Le paramètre complexe $\tilde{H}$, connu comme paramètre de couplage, est donné par :

$$\tilde{H} = \gamma \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} \frac{J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right) + \left[\frac{\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - Bi_{ext} J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right)}{Bi_{ext} Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} Y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right)} \right] Y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right)}{J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right) + \left[\frac{\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - Bi_{ext} J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right)}{Bi_{ext} Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} Y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right)} \right] Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right)}. \quad (4.6)$$

La distribution de la température dans le solide est donnée par la fonction ci-dessous :

$$\tilde{\theta}_w(x^+, r^+) = \tilde{\theta}(x^+, 1) \frac{J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1}\right) + \left[\frac{\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - Bi_{ext} J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right)}{Bi_{ext} Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} Y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right)} \right] Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1}\right)}{J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right) + \left[\frac{\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - Bi_{ext} J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right)}{Bi_{ext} Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} Y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right)} \right] Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right)}. \quad (4.7)$$

Par conséquence, la distribution de la température dans le fluide sera déterminée par la résolution du problème ci-dessous :

$$\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right) = i \delta \tilde{\theta} + u^+ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x^+}, \quad 0 < r^+ < 1; \quad x^+ > 0 \quad (4.8a)$$

$$\tilde{\theta}(0, r^+) = 1, \quad 0 \leq r^+ \leq 1 \quad (4.8b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right|_{r^+=0} = 0, \quad x^+ > 0 \quad (4.8c)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right|_{r^+=1} = -\tilde{H} \tilde{\theta} \Big|_{r^+=1}, \quad x^+ > 0. \quad (4.8d)$$

En introduisant, dans le système (4.8), la transformée de Laplace sur la variable x^+ , tel que:

$$\bar{\bar{\theta}}(r^+, p) = \int_0^\infty e^{-px^+} \tilde{\theta}(x^+, r^+) dx^+, \quad (4.9)$$

on obtient le système d'équations :

$$\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^+} \right) = (i\delta + pu^+) \bar{\bar{\theta}} - u^+, \quad 0 < r^+ < 1 \quad (4.10a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^+} \right|_{r^+=0} = 0 \quad (4.10b)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^+} \right|_{r^+=1} = -\tilde{H} \bar{\bar{\theta}} \Big|_{r^+=1}, \quad (4.10c)$$

dont la forme variationnelle est donnée par :

$$I = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^+} \right)^2 + (i\delta + pu^+) \bar{\bar{\theta}}^2 - 2u^+ \bar{\bar{\theta}} \right] r^+ dr^+ + \tilde{H} \bar{\bar{\theta}}^2 \Big|_{r^+=1}. \quad (4.11)$$

La solution approchée du problème (4.10) comprend des fonctions de base trigonométriques, elle est donnée sous forme :

$$\bar{\bar{\theta}}(r^+, p) = \sum_{n=1}^N c_n(p) \cos(\sigma_n r^+). \quad (4.12)$$

σ_n : représentent les valeurs propres données par la résolution de l'équation transcendante $\sigma \tan(\sigma) = \tilde{H}$, déduite de la condition aux limites (4.10c).

Les coefficients $c_n(p)$ sont à déterminer. Pour cela, on a pu faire des calculs pour les deux cas du profil de vitesse (cf. Annexe 1).

La solution du problème (4.8) prend la forme :

$$\tilde{\theta}(x^+, r^+) = \sum_{n=1}^N B_n \cos(\sigma_n r^+) \exp(-\mu_n x^+), \quad (4.13)$$

les expressions de B_n et μ_n sont déterminés par une méthode similaire que dans le chapitre 3.

4.4. Calcul de la température moyenne de fluide :

Dans une section donnée dans le tube, La température moyenne de fluide est donnée par :

$$\tilde{\theta}_m(x^+) = 2 \int_0^1 u^+ \tilde{\theta}(x^+, r^+) r^+ dr^+. \quad (4.14)$$

Selon le régime d'écoulement, on peut cité deux cas possibles:

5.4.1. Cas d'une vitesse parabolique :

La vitesse adimensionnelle, dans le cas d'un tube cylindrique, est donnée par :

$$u^+(r^+) = 2(1 - r^{+2}). \quad (4.15)$$

Le développement de (4.14) conduit à :

$$\tilde{\theta}_m(x^+) = 4 \sum_{n=1}^N B_n \left[6 \left(\frac{\sin(\sigma_n)}{\sigma_n^3} + \frac{\cos(\sigma_n) - 1}{\sigma_n^4} \right) - \frac{2 \cos(\sigma_n) + 1}{\sigma_n^2} \right] \exp(-\mu_n x^+). \quad (4.16)$$

5.4.2. Cas d'une vitesse uniforme :

La température moyenne de fluide dans ce cas est donnée par :

$$\tilde{\theta}_m(x^+) = 2 \sum_{n=1}^N B_n \left[\frac{\sin(\sigma_n)}{\sigma_n} + \frac{\cos(\sigma_n) - 1}{\sigma_n^2} \right] \exp(-\mu_n x^+). \quad (4.17)$$

D'une autre manière, on peut écrire les résultats ci-dessus (4.16 et 4.17) sous forme :

$$\tilde{\theta}_m(x^+) = \sum_{n=1}^N \tilde{Q}_n \exp(-\mu_n x^+). \quad (4.18a)$$

La solution finale s'écrit :

$$\theta_m(x^+, t^+) = A_m(x^+) \sin(\delta t^+ + \phi_m(x^+)), \quad (4.18b)$$

A_m et ϕ_m représentent respectivement l'amplitude et le déphasage de la température moyenne de fluide.

4.5. Calcul du flux thermique, la température axiale et la température interfaciale :

Dans les nombreux travaux exposés dans le chapitre 1, les auteurs s'intéressent beaucoup plus à l'évaluation des quantités adimensionnelles du flux thermique à la paroi, de la température axiale et de la température interfaciale. Pour cette raison, on s'intéresse ici à ces quantités. Par définition, on peut déterminer :

Le flux thermique par :

$$\bar{\varphi}_w(1, p) = - \left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r^+} \right|_{r^+=1} = \sum_{n=1}^N c_n(p) \sigma_n \sin(\sigma_n) = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{P}_n}{p + \mu_n}. \quad (4.19a)$$

La température axiale et interfaciale respectivement par :

$$\bar{\theta}_c(0, p) = \sum_{n=1}^N c_n(p) = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{F}_n}{p + \mu_n} \quad (4.19b)$$

$$\bar{\theta}_w(1, p) = \sum_{n=1}^N c_n(p) \cos(\sigma_n) = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{W}_n}{p + \mu_n}, \quad (4.19c)$$

avec $\tilde{F}_n$, $\tilde{P}_n$ et $\tilde{W}_n$ sont des quantités complexes. L'inversion des expressions précédentes permet d'obtenir :

$$\tilde{\varphi}(x^+, 1) = \sum_{n=1}^N \tilde{P}_n \exp(-\mu_n x^+) \quad (4.20a)$$

$$\tilde{\theta}_c(x^+, 0) = \sum_{n=1}^N \tilde{F}_n \exp(-\mu_n x^+) \quad (4.20b)$$

$$\tilde{\theta}_w(x^+, 1) = \sum_{n=1}^N \tilde{W}_n \exp(-\mu_n x^+). \quad (4.20c)$$

Puisque les expressions (4.20) représentent des quantités complexes, on peut donc les exprimer sous la forme :

$$\theta_w(x^+, 1, t^+) = A_w(x^+, 1) \sin(\delta t^+ + \phi_w(x^+, 1)) \quad (4.21a)$$

$$\theta_c(x^+, 0, t^+) = A_c(x^+, 0) \sin(\delta t^+ + \phi_c(x^+, 0)) \quad (4.21b)$$

$$\phi(x^+, 1, t^+) = A_f(x^+, 1) \sin(\delta t^+ + \phi_f(x^+, 1)). \quad (4.21c)$$

Les quantités A_{indice} et ϕ_{indice} représentent respectivement les amplitudes et les déphasages des oscillations.

4.6. Cas d'une paroi mince :

Dans le cas d'une paroi mince ou de diffusivité thermique faible, le paramètre $\tilde{H}$ prend la forme suivante :

$$\tilde{H} = -\gamma \frac{\tilde{\beta}_s^2 (r_2^+ - 1) \left(\frac{1}{r_2^+} + 1 \right) - 2Bi_{ext} (r_2^+ - 1)^2 - Bi_{ext} \tilde{\beta}_s^2 \ln \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1} \right)}{2(r_2^+ - 1)^2 \left[1 + \left(\frac{r_2^+ - 1}{r_2^+} \right) + Bi_{ext} \ln \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1} \right) - Bi_{ext} \ln \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} \right) \right]}. \quad (4.22a)$$

Lorsque Bi_{ext} tend vers zéro et $r_2^+ \approx 1$, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, on aura donc :

$$\left(\frac{1}{r_2^+} + 1 \right) \approx 2 \text{ et } \left(\frac{1 - r_2^+}{r_2^+} \right) \approx 0,$$

$$\text{on obtient : } \tilde{H} = -r_{th} \left(\tilde{\beta}_s^2 - Bi_{ext} (r_2^+ - 1) \right), \quad (4.22b)$$

$$\text{avec : } r_{th} = \frac{\gamma}{r_2^+ - 1}.$$

4.7.Résultats et discussion :

Dans un but de comparaison et de validation, le tableau (4.1) portent les valeurs numériques des valeurs propres μ_n et de la fonction $\tilde{W}_n$, obtenues par le présent modèle (M.V.R) et celles obtenues par Kim et Ozisik [17]. La comparaison des résultats révèle une très grande satisfaction sur le plan de précision.

Tableau. 4. 1 : Comparaison avec la référence [17] (profil de vitesse parabolique).

b^*	n	$\tilde{W}_n \text{ par [17]}$	$\tilde{W}_n \text{ par (M.V.R)}$	$\mu_n \text{ par [17]}$	$\mu_n \text{ par (M.V.R)}$
2	1	0.4483E+00- i 0.6148E+00	0.6700E+00- i 0.5898E+00	2.2072E+00+ i 2.0035E+00	2.2070E+00+ i 2.0057E+00
	2	0.3606E+00+ i 0.1191E+00	0.3052E+00+ i 0.3165E+00	1.4957E+01+ i 4.9448E+00	1.4957E+01+ i 4.9474E+00
	3	9.5123E-02+ i 0.1188E+00	1.8746E-02+ i 0.1083E+00	4.3416E+01+ i 5.8603E+00	4.3414E+01+ i 5.8700E+00
	4	3.5644E-02+ i 7.0128E-02	3.3419E-03+ i 4.5905E-02	8.8309E+01+ i 6.4094E+00	8.8301E+01+ i 6.3612E+00
	5	1.7632E-02+ i 4.5363E-02	1.0246E-03+ i 2.5142E-02	1.4935E+02+ i 6.8613E+00	1.4936E+02+ i 6.8501E+00
	6	1.0253E-02+ i 3.1869E-02	4.0763E-04+ i 1.5496E-02	2.2648E+02+ i 7.2569E+00	2.2648E+02+ i 7.3529E+00
	7	6.6056E-03+ i 2.3753E-02	1.9879E-04+ i 1.0575E-02	3.1961E+02+ i 7.6115E+00	3.1963E+02+ i 7.6127E+00
	8	4.5649E-03+ i 1.8483E-02	1.1066E-04+ i 7.3429E-03	4.2878E+02+ i 7.9345E+00	4.2881E+02+ i 8.0856E+00
	9	3.3193E-03+ i 1.4854E-02	7.2128E-05+ i 5.5453E-03	5.5401E+02+ i 8.2322E+00	5.5399E+02+ i 8.0918E+00
	10	2.5083E-03+ i 1.2239E-02	4.6349E-05+ i 3.9874E-03	6.9519E+02+ i 8.5086E+00	6.9521E+02+ i 8.4548E+00
10	1	3.5685E-02- i 0.2358E+00	2.1779E-02- i 0.2024E+00	3.5951E+00+ i 0.5402E+00	3.5951E+00+ i 0.5498E+00
	2	2.7110E-02- i 0.1109E+00	4.5110E-02- i 0.2448E+00	2.1891E+01+ i 2.4064E+00	2.1890E+01+ i 2.4176E+00
	3	3.8818E-02- i 9.4418E-02	0.2001E+00- i 0.3471E+00	5.5729E+01+ i 5.2175E+00	5.5732E+01+ i 5.2374E+00
	4	4.9187E-02- i 8.0948E-02	0.5234E+00+ i 6.7303E-03	1.0496E+02+ i 8.7739E+00	1.0498E+02+ i 8.7784E+00
	5	5.8699E-02- i 6.8354E-02	0.1414E+00+ i 0.2339E+00	1.6930E+02+ i 1.2879E+01	1.6941E+02+ i 1.2877E+01
	6	6.6259E-02- i 5.4563E-02	2.8570E-02+ i 0.1210E+00	2.4909E+02+ i 1.7325E+01	2.4915E+02+ i 1.7359E+01
	7	7.0691E-02- i 3.9651E-02	9.6751E-03+ i 7.1314E-02	3.4387E+02+ i 2.1847E+01	3.4381E+02+ i 2.1836E+01
	8	6.2796E-02- i 3.1338E-02	4.2811E-03+ i 4.5562E-02	4.5382E+02+ i 2.6203E+01	4.5373E+02+ i 2.6170E+01
	9	5.5084E-02- i 2.2021E-02	2.3395E-03+ i 3.2542E-02	5.7912E+02+ i 3.0205E+01	5.7916E+02+ i 3.0199E+01
	10	6.2265E-02- i 3.8948E-04	1.3457E-03+ i 2.2607E-02	7.1999E+02+ i 3.3753E+01	7.1994E+02+ i 3.3587E+01

Nous présentons dans cette section le flux thermique pariétal, la température interfaciale et la température moyenne de fluide donnés par les expressions (4.20) et (4.18). L'ensemble des fonctions précitées dépendent des valeurs propres σ_n qui sont elles même dépendantes des paramètres γ, β_s, r_2^+ et Bi_{ext} . Nous présentons alors, dans les tables (4.2a) et (4.2b), les 5 premières valeurs numériques des valeurs propres σ_n, μ_n et des fonctions $\tilde{Q}_n, \tilde{P}_n, \tilde{W}_n$ et $\tilde{F}_n$ nécessaires pour calculer les expressions (4.20) et (4.18). Le profil de vitesse est considéré parabolique, avec $\delta = 0.1, Bi_{ext} = 0, r_2^+ = 1.5$ et $\gamma = 50$.

Tableau. 4. 2a : Valeurs propres et fonctions propres (profil de vitesse parabolique).

a^+	n	σ_n	μ_n	$\tilde{Q}_n$
5.10^{-5}	1	1.5684E+00+ i 2.2658E-03	3.6485E+00+ i 7.0423E-02	0.8022E+00- i 1.2295E-03
	2	4.7051E+00+ i 6.8449E-03	2.2267E+01+ i 0.1058E+00	0.1943E+00+ i 1.4261E-04
	3	7.8418E+00+ i 1.1731E-02	5.6880E+01+ i 0.1665E+00	-5.8861E-03+ i 3.7416E-04
	4	1.0979E+01+ i 1.5819E-02	1.0748E+02+ i 0.2034E+00	9.4305E-03+ i 1.5783E-04
	5	1.4115E+01+ i 2.0443E-02	1.7408E+02+ i 0.2705E+00	-1.8383E-03+ i 1.181E-04
$8.5.10^{-3}$	1	1.5584E+00+ i 0.1059E+00	3.6125E+00+ i 0.4308E+00	0.8131E+00- i 5.5820E-02
	2	4.6707E+00+ i 0.3275E+00	2.2043E+01+ i 1.7028E+00	0.2089E+00+ i 1.2049E-02
	3	7.7647E+00+ i 0.5806E+00	5.6252E+01+ i 3.5979E+00	-5.9254E-03+ i 2.3022E-02
	4	1.0795E+01+ i 0.9017E+00	1.0619E+02+ i 6.0063E+00	1.0468E-02+ i 1.7190E-02
	5	1.3591E+01+ i 1.2664E+00	1.7182E+02+ i 8.8952E+00	-1.4716E-02+ i 1.0819E-02
$8.5.10^{-2}$	1	0.9988E+00+ i 0.5983E+00	1.5474E+00+ i 2.0660E+00	1.0356E+00- i 3.5012E-02
	2	3.2262E+00+ i 0.4763E+00	1.3899E+01+ i 3.8997E+00	-2.8955E-02+ i 6.0898E-02
	3	6.2937E+00+ i 0.2375E+00	4.2697E+01+ i 4.4124E+00	-6.2886E-03- i 2.2426E-02
	4	9.4282E+00+ i 0.1569E+00	8.7738E+01+ i 4.7818E+00	-2.6325E-04- i 1.3134E-03
	5	1.2568E+01+ i 0.1179E+00	1.4886E+02+ i 5.1255E+00	-1.0139E-04- i 1.4250E-03
0.1	1	0.9112E+00+ i 0.5915E+00	1.2091E+00+ i 1.9660E+00	1.0292E+00- i 2.2057E-02
	2	3.2003E+00+ i 0.4038E+00	1.3562E+01+ i 3.3426E+00	-2.4399E-02+ i 4.4119E-02
	3	6.2906E+00+ i 0.2010E+00	4.2468E+01+ i 3.7623E+00	-4.4866E-03- i 1.9126E-02
	4	9.4272E+00+ i 0.1331E+00	8.7548E+01+ i 4.0532E+00	-1.8839E-04- i 1.1106E-03
	5	1.2568E+01+ i 0.1001E+00	1.4869E+02+ i 4.3623E+00	-7.2674E-05- i 1.2092E-03

Tableau. 4. 2b : Valeurs propres et fonctions propres (suite).

a^+	n	$\tilde{P}_n$	$\tilde{W}_n$	$\tilde{F}_n$
5.10^{-5}	1	1.9968E+00+ i 2.8745E-03	3.0968E-03- i 2.8848E-03	1.2732E+00+ i 8.2328E-06
	2	1.9968E+00+ i 2.9913E-03	3.1031E-03- i 2.9049E-03	-0.4244E+00- i 2.9867E-05
	3	1.9959E+00+ i 3.4568E-03	3.0964E-03- i 2.9854E-03	0.2545E+00+ i 4.1896E-05
	4	1.9958E+00+ i 4.1814E-03	3.1053E-03- i 2.8745E-03	-0.1818E+00- i 8.2543E-05
	5	1.9939E+00+ i 4.2619E-03	3.1015E-03- i 2.8866E-03	0.1413E+00+ i 4.3770E-05
$8.5.10^{-3}$	1	2.0054E+00+ i 0.1427E+00	1.6266E-02- i 0.1359E+00	1.2801E+00+ i 2.3129E-03
	2	2.1886E+00+ i 0.2222E+00	2.2282E-02- i 0.1482E+00	-0.4460E+00- i 8.0605E-03
	3	2.6447E+00+ i 0.4934E+00	4.2218E-02- i 0.1782E+00	0.2948E+00+ i 1.8622E-02
	4	3.5097E+00+ i 1.5373E+00	0.1161E+00- i 0.2337E+00	-0.2447E+00- i 4.5741E-02
	5	2.7666E+00+ i 4.9258E+00	0.3442E+00- i 0.1721E+00	0.1983E+00+ i 0.1053E+00
$8.5.10^{-2}$	1	0.7006E+00+ i 1.2145E+00	0.8282E+00- i 0.4725E+00	1.1255E+00+ i 0.1999E+00
	2	-0.4049E+00+ i 0.2355E+00	0.1588E+00+ i 0.2761E+00	-0.1333E+00- i 0.2534E+00
	3	-0.1138E+00+ i 1.4728E-02	9.6561E-03+ i 7.7466E-02	9.2044E-03+ i 7.5363E-02
	4	-4.9618E-02+ i 3.0277E-03	1.9009E-03+ i 3.3803E-02	-1.8628E-03- i 3.3392E-02
	5	-2.7791E-02+ i 1.0689E-03	6.3389E-04+ i 1.8846E-02	6.2277E-04+ i 1.8720E-02
0.1	1	0.5159E+00+ i 1.0976E+00	0.8798E+00- i 0.4092E+00	1.0921E+00+ i 0.1819E+00
	2	-0.3035E+00+ i 0.1400E+00	0.1110E+00+ i 0.2432E+00	-9.7615E-02- i 0.2273E+00
	3	-8.1357E-02+ i 8.7823E-03	6.7699E-03+ i 6.5149E-02	6.5516E-03+ i 6.3868E-02
	4	-3.5636E-02+ i 1.8365E-03	1.3559E-03+ i 2.8562E-02	-1.3342E-03- i 2.8313E-02
	5	-2.0022E-02+ i 6.4645E-04	4.5104E-04+ i 1.5969E-02	4.5183E-04+ i 1.5889E-02

Dans les tableaux (4.3a) et (4.3b) les mêmes coefficients sont présentés pour $\delta = 0.1$, $a^+ = 8.5.10^{-3}$ et des valeurs du nombre de Biot variant de 0.1 à 10.

Tableau. 4. 3a : Valeurs propres et fonctions propres pour des nombres de Biot différents (profil de vitesse parabolique).

Bi_{ext}	n	σ_n	μ_n	$\tilde{Q}_n$
0.1	1	1.5188E+00+ i 8.1561E-02	3.4884E+00+ i 0.3466E+00	0.8308E+00- i 3.9774E-02
	2	4.5495E+00+ i 0.2433E+00	2.1478E+01+ i 1.2833E+00	0.1949E+00+ i 1.6545E-02
	3	7.5598E+00+ i 0.3968E+00	5.5101E+01+ i 2.5967E+00	-1.6167E-02+ i 1.4509E-02
	4	1.0539E+01+ i 0.5270E+00	1.0439E+02+ i 4.1927E+00	3.5765E-03+ i 7.6949E-03
	5	1.3493E+01+ i 0.6101E+00	1.6935E+02+ i 5.9867E+00	-7.0639E-03+ i 1.8731E-03
0.5	1	1.5249E+00+ i 1.6825E-02	3.5034E+00+ i 0.1216E+00	0.8247E+00- i 8.3243E-03
	2	4.5755E+00+ i 4.9849E-02	2.1605E+01+ i 0.3244E+00	0.1893E+00+ i 2.9087E-03
	3	7.6269E+00+ i 8.0530E-02	5.5468E+01+ i 0.6065E+00	-1.3047E-02+ i 2.7331E-03
	4	10.682E+01+ i 0.1079E+00	1.0513E+02+ i 0.9462E+00	5.9973E-03+ i 1.3735E-03
	5	13.739E+01+ i 0.1311E+00	1.7059E+02+ i 1.3328E+00	-3.9206E-03+ i 5.9001E-04
1.	1	1.5392E+00+ i 6.0427E-03	3.5456E+00+ i 8.4029E-02	0.8175E+00- i 3.0779E-03
	2	4.6177E+00+ i 1.8047E-02	2.1828E+01+ i 0.1609E+00	0.1913E+00+ i 8.4044E-04
	3	7.6969E+00+ i 2.9673E-02	5.5910E+01+ i 0.2734E+00	-1.0666E-02+ i 1.0032E-03
	4	1.0778E+01+ i 4.0881E-02	1.0588E+02+ i 0.4058E+00	7.1841E-03+ i 4.9757E-04
	5	1.3859E+01+ i 5.1018E-02	1.7172E+02+ i 0.5601E+00	-3.2783E-03+ i 2.6567E-04
5.	1	1.5541E+00+ i 9.3269E-04	3.5897E+00+ i 6.6420E-02	0.8097E+00- i 4.9663E-04
	2	4.6623E+00+ i 2.8327E-03	2.2048E+01+ i 8.7810E-02	0.1930E+00+ i 7.9884E-05
	3	7.7709E+00+ i 5.0438E-03	5.6397E+01+ i 0.1127E+00	-8.1932E-03+ i 1.6794E-04
	4	1.0879E+01+ i 6.9435E-03	1.0669E+02+ i 0.1394E+00	8.3781E-03+ i 7.8817E-05
	5	1.3988E+01+ i 8.2323E-03	1.7289E+02+ i 0.1610E+00	-2.5699E-03+ i 4.6178E-05
10	1	1.5561E+00+ i 6.0539E-04	3.6028E+00+ i 6.4826E-02	0.8087E+00- i 3.2669E-04
	2	4.6684E+00+ i 1.8529E-03	2.2070E+01+ i 8.0669E-02	0.1933E+00+ i 4.2421E-05
	3	7.7809E+00+ i 3.4255E-03	5.6469E+01+ i 0.1076E+00	-7.8629E-03+ i 1.1388E-04
	4	1.0893E+01+ i 4.6981E-03	1.0681E+02+ i 0.1217E+00	8.5336E-03+ i 5.2824E-05
	5	1.4006E+01+ i 5.3739E-03	1.7305E+02+ i 0.1356E+00	-2.4685E-03+ i 3.0205E-05

Tableau. 4. 3b : Valeurs propres et fonctions propres pour des nombres de Biot différents (suite).

Bi_{ext}	n	$\tilde{P}_n$	$\tilde{W}_n$	$\tilde{F}_n$
0.1	1	1.9398E+00+ i 0.1205E+00	6.6883E-02- i 0.1037E+00	1.2753E+00+ i 5.3128E-03
	2	1.9753E+00+ i 0.2602E+00	7.5743E-02- i 0.1014E+00	-0.4297E+00- i 1.6492E-02
	3	1.9867E+00+ i 0.5630E+00	9.2827E-02- i 9.2598E-02	0.2607E+00+ i 2.8767E-02
	4	1.8364E+00+ i 1.0101E+00	0.1129E+00- i 7.0405E-02	-0.1839E+00- i 4.1153E-02
	5	1.3967E+00+ i 1.4179E+00	0.1220E+00- i 3.3410E-02	0.1339E+00+ i 5.0401E-02
0.5	1	1.9381E+00+ i 2.4262E-02	5.8292E-02- i 2.1339E-02	1.2721E+00+ i 9.0802E-04
	2	1.9103E+00+ i 4.6208E-02	5.7674E-02- i 2.0430E-02	-0.4210E+00- i 2.7057E-03
	3	1.8551E+00+ i 8.6489E-02	5.6565E-02- i 1.8577E-02	0.2490E+00+ i 4.3506E-03
	4	1.7758E+00+ i 0.1389E+00	5.4679E-02- i 1.6129E-02	-0.1741E+00- i 5.7517E-03
	5	1.6753E+00+ i 0.1959E+00	5.2337E-02- i 1.3276E-02	0.1317E+00+ i 6.8587E-03
1.	1	1.9579E+00+ i 8.4006E-03	4.0208E-02- i 7.6794E-03	1.2726E+00+ i 2.2111E-04
	2	1.9429E+00+ i 1.4006E-02	3.9978E-02- i 7.5293E-03	-0.4226E+00- i 6.7035E-04
	3	1.9134E+00+ i 2.4734E-02	3.9394E-02- i 7.2025E-03	0.2516E+00+ i 1.1005E-03
	4	1.8712E+00+ i 4.0041E-02	3.8517E-02- i 6.7661E-03	-0.1777E+00- i 1.5200E-03
	5	1.8174E+00+ i 5.8585E-02	3.7497E-02- i 6.1622E-03	0.1362E+00+ i 1.9085E-03
5.	1	1.9782E+00+ i 1.2260E-03	2.1222E-02- i 1.1871E-03	1.2730E+00+ i 5.1863E-06
	2	1.9737E+00+ i 1.5630E-03	2.1203E-02- i 1.1982E-03	-0.4239E+00- i 1.8005E-05
	3	1.9646E+00+ i 2.6410E-03	2.1048E-02- i 1.2693E-03	0.2537E+00+ i 6.9845E-05
	4	1.9517E+00+ i 4.5323E-03	2.0920E-02- i 1.2273E-03	-0.1806E+00- i 1.5791E-04
	5	1.9337E+00+ i 6.1935E-03	2.0785E-02- i 1.1094E-03	0.1398E+00+ i 1.9245E-04
10	1	1.9809E+00+ i 7.8345E-04	1.8656E-02- i 7.7067E-04	1.2731E+00- i 3.0547E-06
	2	1.9773E+00+ i 9.1185E-04	1.8647E-02- i 7.8513E-04	-0.4240E+00+ i 7.3455E-06
	3	1.9701E+00+ i 1.5815E-03	1.8530E-02- i 8.6525E-04	0.2539E+00+ i 2.8390E-05
	4	1.9600E+00+ i 2.8832E-03	1.8443E-02- i 8.3504E-04	-0.1809E+00- i 1.0096E-04
	5	1.9457E+00+ i 3.8023E-03	1.8359E-02- i 7.3075E-04	0.1401E+00+ i 1.2056E-04

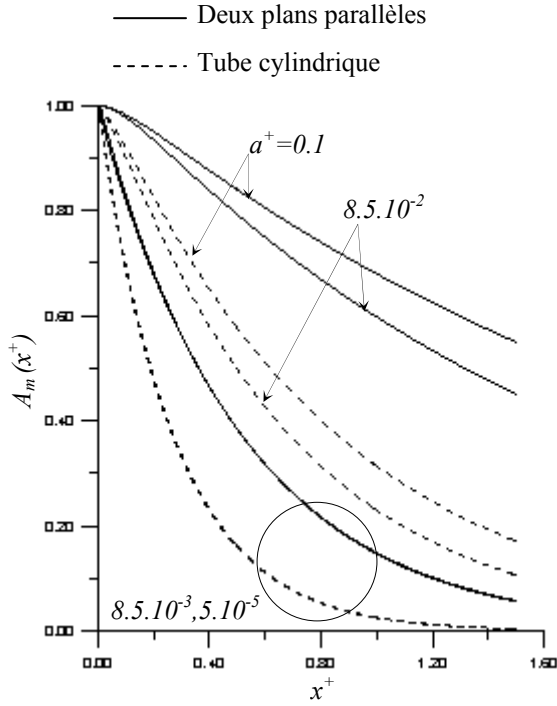


Fig. 4. 2 : Amplitude de la température moyenne de fluide pour différents a^+ ($Bi_{ext}=0$ et $\delta=0.1$)

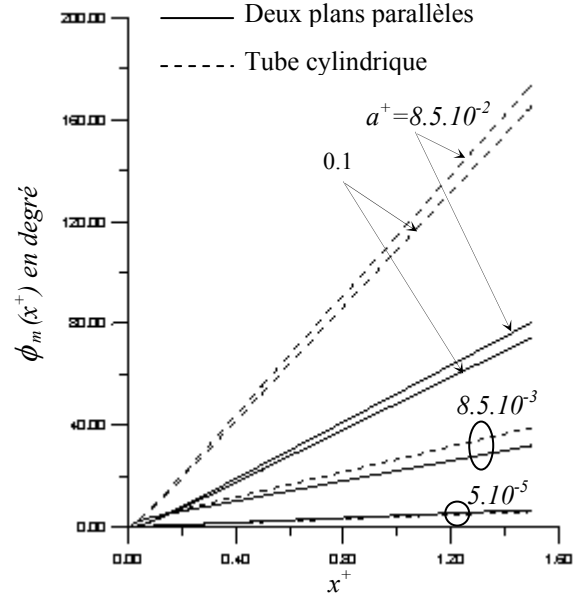


Fig. 4. 3 : Déphasage de la température moyenne de fluide pour différents a^+ ($Bi_{ext}=0$ et $\delta=0.1$)

Les figures (4.2) et (4.3) montrent respectivement, l'évolution des amplitudes et des déphasages de la température moyenne de fluide le long des conduits (deux plans parallèles et conduit cylindrique) pour différentes valeurs de a^+ avec $\delta = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$. On remarque que pour des valeurs de a^+ très petites, la géométrie du conduit n'a quasiment aucun effet sur le déphasage de la température moyenne de fluide. Lorsque a^+ augmente, le déphasage est beaucoup plus important dans la configuration cylindrique que dans le cas du conduit à deux plaques parallèles. Pour l'amortissement, notons que ce dernier est beaucoup plus important dans le cas d'un tube cylindrique (cf. Fig.4.2).

Simulation numérique par la méthode des volumes finis.

5.1.Introduction :

Toutes les études numériques de la convection forcée pour un écoulement laminaire dans un conduit en régime périodique utilisent la méthode des différences finies [9-11]. Nous nous allons présenter dans ce chapitre une étude numérique, par la méthode des volumes finis qui n'a jamais été utilisé pour ce genre de problème.

En absence d'une solution analytique exacte pour le cas d'un champ dynamique parabolique, nous validons ce schéma numérique (volumes finis) par le modèle analytique développé dans le deuxième chapitre, pour le cas d'un écoulement piston dans un conduit à deux plans parallèles.

5.2.Mise en équations :

Dans le fluide :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_f \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R_1; x > 0; t > 0. \quad (5.1a)$$

La condition d'entrée :

$$T = T_\infty + \Delta T \sin(\omega t), \quad 0 \leq r \leq R_1; x = 0; t > 0. \quad (5.1b)$$

La condition de symétrie :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \text{en } r = 0; x > 0; t > 0. \quad (5.1c)$$

Dans les parois du conduit :

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = \alpha_s \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T_w}{\partial r} \right), \quad R_1 < r < R_2; x > 0; t > 0 \quad (5.1d)$$

$$-k_s \frac{\partial T_w}{\partial r} = h_{ext} (T_w - T_\infty), \quad \text{en } r = R_2; x > 0; t > 0. \quad (5.1e)$$

Les conditions de couplage :

$$k_s \frac{\partial T_w}{\partial r} = k_f \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \text{en } r = R_1; x > 0; t > 0 \quad (5.1f)$$

$$T_w = T, \quad \text{en } r = R_1; x > 0; t > 0, \quad (5.1g)$$

avec $m=0$ pour un conduit à deux plaques parallèles et $m=1$ pour un tube cylindrique.

$T(x, r, t)$ et $T_w(x, r, t)$ représentent respectivement la température de fluide et la température de la paroi.

5.3. Adimensionnement du problème :

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$r^+ = \frac{r}{R_1}; \quad r_2^+ = \frac{R_2}{R_1}; \quad x^+ = \frac{x\alpha_f}{R_1^2 \bar{u}}; \quad t^+ = \frac{t\alpha_f}{R_1^2}; \quad \gamma = \frac{k_s}{k_f}; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}; \quad \theta_w = \frac{T_w - T_\infty}{\Delta T};$$

$$Bi_{ext} = \frac{h_{ext} R_1}{k_s}; \quad \delta = \frac{\omega R_1^2}{\alpha_f}; \quad \Gamma^+ = \frac{\alpha_f}{\alpha_s}; \quad \beta_s = (R_2 - R_1) \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_s}} \quad \text{et} \quad u^+(r^+) = \frac{u(r)}{\bar{u}},$$

où $u(r^+) = 1$ pour un écoulement piston et $u(r^+) = \frac{2^m + 2}{2}(1 - r^{+2})$ pour un écoulement parabolique.

Les équations du problème (5.1) s'écrivent :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^+} + u^+(r^+) \frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{1}{r^{+m}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+m} \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right), \quad 0 < r^+ < 1; x > 0; t > 0 \quad (5.2a)$$

$$\theta = \sin(\delta t^+), \quad 0 \leq r^+ \leq 1; x^+ = 0; t^+ > 0 \quad (5.2b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} = 0, \quad \text{en } r^+ = 0; x^+ > 0; t^+ > 0 \quad (5.2c)$$

$$\Gamma^+ \frac{\partial \theta_w}{\partial t^+} = \frac{1}{r^{+m}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+m} \frac{\partial \theta_w}{\partial r^+} \right), \quad 1 < r^+ < r_2^+; x^+ > 0; t^+ > 0 \quad (5.2d)$$

$$-\frac{\partial \theta_w}{\partial r^+} = Bi_{ext} \theta_w, \quad \text{en } r^+ = r_2^+; x^+ > 0; t^+ > 0 \quad (5.2e)$$

$$\gamma \frac{\partial \theta_w}{\partial r^+} = \frac{\partial \theta}{\partial r^+}, \quad \text{en } r^+ = 1; x^+ > 0; t^+ > 0 \quad (5.2f)$$

$$\theta_w = \theta, \quad \text{en } r^+ = 1; x^+ > 0; t^+ > 0. \quad (5.2g)$$

5.4. Résolution du problème :

5.4.1. Justification du choix de la méthode :

Pour résoudre le système d'équations aux dérivées partielles précédent, nous avons opté pour la méthode des volumes finis développé par S. V. Patankar [39], qui peut être à base de la méthode des différences finies ou de la méthode des éléments finis. Cette méthode est très utilisée actuellement pour les avantages qu'elle procure. En plus, la discrétisation par la méthode des volumes finis permet une interprétation physique directe.

En fin, citons la qualité principale de cette méthode, à savoir la réduction des instabilités numériques, obtenue par le choix d'un schéma de discrétisation adéquat.

5.4.2. Restriction de la dimension de temps :

Le système étant en régime périodique établi, ce qui permet d'écrire :

$$\theta(x^+, r^+, t^+) = A(x^+, r^+) \sin(\delta t^+ - \phi(x^+, r^+)) \quad (5.3a)$$

$$\theta_w(x^+, r^+, t^+) = A_w(x^+, r^+) \sin(\delta t^+ - \phi_w(x^+, r^+)). \quad (5.3b)$$

Il est donc classique d'introduire dans le problème (5.2) les températures complexes :

$$\theta(x^+, r^+, t^+) = \tilde{\theta}(x^+, r^+) \exp(i\delta t^+) \quad (5.4a)$$

$$\theta_w(x^+, r^+, t^+) = \tilde{\theta}_w(x^+, r^+) \exp(i\delta t^+). \quad (5.4b)$$

On obtient le système :

$$i\delta \tilde{\theta} + u^+(r^+) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x^+} = \frac{1}{r^{+m}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right), \quad 0 < r^+ < 1; x^+ > 0 \quad (5.5a)$$

$$\tilde{\theta} = 1, \quad 0 \leq r^+ \leq 1; x^+ = 0 \quad (5.5b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} = 0, \quad \text{en } r^+ = 0; x^+ > 0 \quad (5.5c)$$

$$2i \left(\frac{\beta_s}{r_2^+ - 1} \right)^2 \tilde{\theta}_w = \frac{1}{r^{+m}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right), \quad 1 < r^+ < r_2^+; x^+ > 0 \quad (5.5d)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} = Bi_{ext} \tilde{\theta}_w, \quad \text{en } r^+ = r_2^+; x^+ > 0 \quad (5.5e)$$

$$\gamma \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+}, \quad \text{en } r^+ = 1; x^+ > 0 \quad (5.5f)$$

$$\theta_w = \theta, \quad \text{en } r^+ = 1; x^+ > 0. \quad (5.5g)$$

De cette manière, on remarque que la variable x^+ , dans l'équation (5.5a), se comporte comme la variable de temps dans le cas du problème de conduction unidimensionnelle transitoire.

5.4.3. Principe de la méthode :

L'utilisation d'une formulation basée sur le volume de contrôle est simple et comprend deux étapes importantes :

- **1ere étape le maillage (fig.5.1) :** Cette étape consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre fini de volumes de contrôles, entourant chacun un nœud du maillage. Dans notre cas, puisque la variable de temps est restreinte, la variable x^+ présente l'évolution par rapport à l'entrée du conduit. Si on envisage un balayage suivant la direction axiale, le maillage du domaine de calcul porte seulement sur la variable r^+ (cf. Fig.5.2 et 5.3)

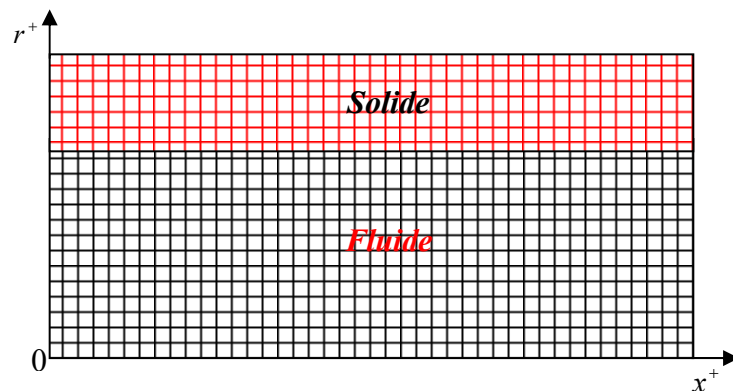


Fig. 5. 1 : Maillage du domaine de calcul.

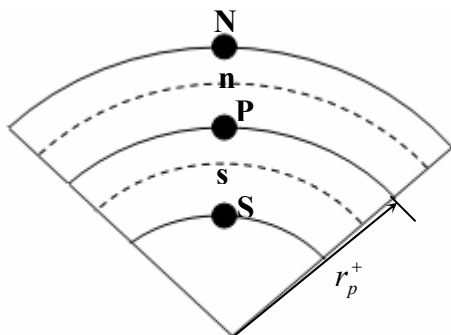


Fig. 5. 2 : Tube cylindrique.

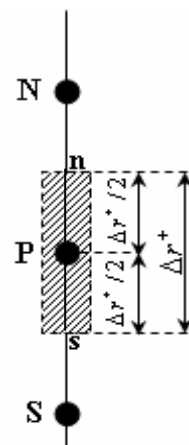


Fig. 5. 3 : Deux plans parallèles.

Le volume de contrôle est donné par :

$$\Delta v = \int_s^n r^{+m} dr^+ = \frac{r_n^{+m+1} - r_s^{+m+1}}{m+1} . \quad (5.6)$$

• **2eme étape l'intégration :**

L'intégration des équations de l'énergie et de la chaleur dans le volume de contrôle représente l'étape clef de cette méthode.

5.4.4.Discrétisation du problème :

Pour obtenir l'équation discrétisée du problème. Nous devons en premier lieu définir un maillage du domaine, tel est présenté précédemment (cf. Fig.5.2 et 5.3). On fixe notre attention sur le point **P**, qui a pour voisins les points **N** et **S**. Les lignes en pointillées constituent les faces des volumes de contrôle. Intégrons les équations (5.5a) et (5.5d) par rapport au volume de contrôle et l'entrée du conduit, tel que :

$$\int_{x^+}^{x^++\Delta x^+} \int_s^n i \delta \tilde{\theta} r^{+m} dr^+ dx^+ + \int_{x^+}^{x^++\Delta x^+} \int_s^n u^+(r^+) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x^+} r^{+m} dr^+ dx^+ = \int_{x^+}^{x^++\Delta x^+} \int_s^n \frac{1}{r^{+m}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right) r^{+m} dr^+ dx^+ . \quad (5.7a)$$

$$\int_{x^+}^{x^++\Delta x^+} \int_s^n 2i \left(\frac{\beta_s}{r_2^+ - 1} \right)^2 \tilde{\theta}_w r^{+m} dr^+ dx^+ = \int_{x^+}^{x^++\Delta x^+} \int_s^n \frac{1}{r^{+m}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right) r^{+m} dr^+ dx^+ . \quad (5.7b)$$

On obtient :

$$\int_{x^+}^{x^++\Delta x^+} i \delta \tilde{\theta}_p \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1} dx^+ + \left(\tilde{\theta}_p^1 - \tilde{\theta}_p^0 \right) \int_s^n u^+(r^+) r^{+m} dr^+ = \int_{x^+}^{x^++\Delta x^+} \left[\left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right)_n - \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right)_s \right] dx^+ \quad (5.8a)$$

$$\int_{x^+}^{x^++\Delta x^+} 2i \left(\frac{\beta_s}{r_2^+ - 1} \right)^2 \tilde{\theta}_{wp} \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1} dx^+ = \int_{x^+}^{x^++\Delta x^+} \left[\left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right)_n - \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right)_s \right] dx^+ \quad (5.8b)$$

Sachant que :

$$\int_{x^+}^{x^++\Delta x^+} \tilde{\theta}_p dx^+ = \left[\varepsilon \tilde{\theta}_p^1 + (1 - \varepsilon) \tilde{\theta}_p^0 \right] \Delta x^+ , \quad (5.9)$$

avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$, tel que :

$\varepsilon = 0$: Schéma explicite.

$\varepsilon = 1$: Schéma implicite.

$\varepsilon = 1/2$: Schéma de Crank Nicholson.

Pour éviter l'étude de la stabilité, nous avons choisi un schéma implicite où la stabilité est assurée sans condition. Ainsi par l'utilisation d'un schéma centrale de différences finies pour la direction transversale r^+ , on obtient les équations discrétisées suivantes :

$$a_P \tilde{\theta}_P^1 = a_N \tilde{\theta}_N^1 + a_S \tilde{\theta}_S^1 + a_P^0 \tilde{\theta}_P^0 \quad (5.10a)$$

$$c_P \tilde{\theta}_{wP}^1 = c_N \tilde{\theta}_{wN}^1 + c_S \tilde{\theta}_{wS}^1. \quad (5.10b)$$

Les coefficients a_j et c_j sont donnés par le tableau (5.1) suivant :

Tableau. 5. 1 : Coefficients a_j et c_j pour les nœuds internes.

	<i>Profil de vitesse parabolique</i>	<i>Profil de vitesse uniforme</i>
a_P^0	$\frac{2^m + 2}{2\Delta x^+} \left(\frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1} - \frac{r_n^{+(m+3)} - r_s^{+(m+3)}}{m+3} \right)$	$\frac{1}{\Delta x^+} \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$
a_N	$\frac{r_n^{+m}}{\Delta r^+}$	$\frac{r_n^{+m}}{\Delta r^+}$
a_S	$\frac{r_s^{+m}}{\Delta r^+}$	$\frac{r_s^{+m}}{\Delta r^+}$
a_P	$a_P^0 + a_N + a_S + i\delta \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$	$a_P^0 + a_N + a_S + i\delta \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$
c_N	$\frac{r_n^{+m}}{\Delta r^+}$	$\frac{r_n^{+m}}{\Delta r^+}$
c_S	$\frac{r_s^{+m}}{\Delta r^+}$	$\frac{r_s^{+m}}{\Delta r^+}$
c_P	$c_N + c_S + 2i \frac{\beta_s^2}{(r_2^+ - 1)^2} \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$	$c_N + c_S + 2i \frac{\beta_s^2}{(r_2^+ - 1)^2} \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$

Remarques :

- Le maillage utilisé est régulier, ce qui conduit à écrire :

$$\Delta r^+ = r_N^+ - r_P^+ = r_P^+ - r_S^+ = r_n^+ - r_s^+,$$

avec : $r_s^+ = (j-1)\Delta r^+$ et $r_n^+ = j\Delta r^+$.

5.4.5. Implémentation des conditions aux limites :

Les conditions aux limites relatives aux nœuds 1, N, N+1 et M sont traitées séparément.

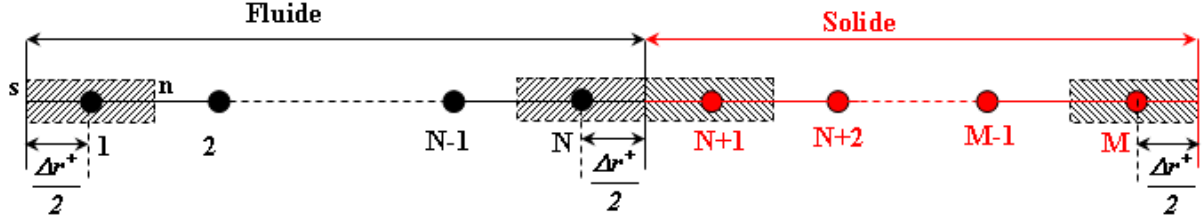


Fig. 5. 4 : Nœuds des frontières.

• Equation du nœud (1) :

Le volume de contrôle entourant le nœud (1), centre du conduit, peut être traité comme les nœuds internes et l'équation discrétisée est :

$$i\delta\tilde{\theta}_p^1 \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1} + \frac{\tilde{\theta}_p^1 - \tilde{\theta}_p^0}{\Delta x^+} \int_s^n u^+(r^+) r^{+m} dr^+ = \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right)_n^1 - \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right)_s^1. \quad (5.11a)$$

L'idée est donc de remplacer dans l'équation (5.11a) l'expression de la condition aux limites suivante :

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right|_s = 0. \quad (5.11b)$$

Nous obtenons :

$$a_p \tilde{\theta}_p^1 = a_N \tilde{\theta}_N^1 + a_S \tilde{\theta}_S^1 + a_p^0 \tilde{\theta}_p^0. \quad (5.11c)$$

Les coefficients a_j sont donnés par le tableau (5.2) suivant :

Tableau. 5. 2 : Coefficients a_j au centre du conduit

	<i>Profil de vitesse parabolique</i>	<i>Profil de vitesse uniforme</i>
a_p^0	$\frac{2^m + 2}{2\Delta x^+} \left(\frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1} - \frac{r_n^{+(m+3)} - r_s^{+(m+3)}}{m+3} \right)$	$\frac{1}{\Delta x^+} \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$
a_N	$\frac{r_n^{+m}}{\Delta r^+}$	$\frac{r_n^{+m}}{\Delta r^+}$
a_S	θ	θ
a_p	$a_p^0 + a_N + a_S + i\delta \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$	$a_p^0 + a_N + a_S + i\delta \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$

- **Equation du nœud (N) :**

De même que pour le nœud (1), l'équation du nœud (N) est donnée par (5.11a) mais c'est la fonction $\tilde{\theta}_N$ qui est hors champ de calcul (fluide). Pour cela, on utilise les conditions de couplage (5.5f) et (5.5g), dont la discrétisation conduit à l'expression :

$$\tilde{\theta}_n^1 = \frac{\gamma \tilde{\theta}_{wN}^1 + \tilde{\theta}_P^1}{1 + \gamma}. \quad (5.12a)$$

Après avoir implémenter (5.12a) dans l'équation (5.11a), on obtient :

$$a_P \tilde{\theta}_P^1 = a_N \tilde{\theta}_N^1 + a_S \tilde{\theta}_S^1 + a_P^0 \tilde{\theta}_P^0. \quad (5.12b)$$

Les expressions des coefficients a_j sont données par le tableau (5.3) ci-dessous :

Tableau. 5. 3 : Coefficients a_j à l'interface fluide-paroi.

	<i>Profil de vitesse parabolique</i>	<i>Profil de vitesse uniforme</i>
a_P^0	$\frac{2^m + 2}{2\Delta x^+} \left(\frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1} - \frac{r_n^{+(m+3)} - r_s^{+(m+3)}}{m+3} \right)$	$\frac{1}{\Delta x^+} \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$
a_N	$\frac{2\gamma}{1 + \gamma} \frac{r_n^{+m}}{\Delta r^+}$	$\frac{2\gamma}{1 + \gamma} \frac{r_n^{+m}}{\Delta r^+}$
a_S	$\frac{r_s^{+m}}{\Delta r^+}$	$\frac{r_s^{+m}}{\Delta r^+}$
a_P	$a_P^0 + a_N + a_S + i\delta \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$	$a_P^0 + a_N + a_S + i\delta \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$

- **Equation du nœud (N+1) :**

Similairement aux nœuds précédents, seulement que cette fois-ci nous utilisons l'équation de diffusion dans le solide :

$$2i \frac{\beta_s^2}{(r_2^+ - 1)^2} \tilde{\theta}_{wP}^1 \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1} = \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right)_n^1 - \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right)_s^1. \quad (5.13a)$$

La condition de couplage est donnée par :

$$\tilde{\theta}_{ws}^1 = \frac{\gamma \tilde{\theta}_{wP}^1 + \tilde{\theta}_S^1}{1 + \gamma}. \quad (5.13b)$$

L'équation à ce nœud est donnée donc, sous la forme :

$$c_P \tilde{\theta}_{wP}^1 = c_N \tilde{\theta}_{wN}^1 + c_S \tilde{\theta}_{wS}^1. \quad (5.13c)$$

Les coefficients c_j sont donnés par le tableau (5.4) ci-dessous :

Tableau. 5. 4 : Coefficients c_j à l'interface fluide-paroi.

	<i>Profil de vitesse parabolique</i>	<i>Profil de vitesse uniforme</i>
c_N	$\frac{r_n^{+m}}{\Delta r^+}$	$\frac{r_n^{+m}}{\Delta r^+}$
c_S	$\frac{2}{1+\gamma} \frac{r_s^{+m}}{\Delta r^+}$	$\frac{2}{1+\gamma} \frac{r_s^{+m}}{\Delta r^+}$
c_P	$c_N + c_S + 2i \frac{\beta_s^2}{(r_2^+ - 1)^2} \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$	$c_N + c_S + 2i \frac{\beta_s^2}{(r_2^+ - 1)^2} \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1}$

- **Equation du nœud (M) :**

Puisque le nœud (M) se situe dans la parois externe du conduit, alors l'équation discrétisée dans ce nœud est celle de solide qui est donnée par :

$$2i \frac{\beta_s^2}{(r_2^+ - 1)^2} \tilde{\theta}_{wP}^1 \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1} = \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right)_n^1 - \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right)_s^1. \quad (5.14a)$$

Sachant que sur la surface (M+1/2), le solide échange de la chaleur par convection tel est représenté par la condition :

$$-\frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \bigg|_n^1 = Bi_{ext} \tilde{\theta}_{wn}^1, \quad (5.14b)$$

dont la discrétisation conduit à écrire :

$$\tilde{\theta}_{wn}^1 = \frac{2\tilde{\theta}_{wP}^1}{2 + \Delta r^+ Bi_{ext}}. \quad (5.14c)$$

L'implémentation des expressions (5.14b) et (5.14c) dans l'équation (5.14a) conduit à écrire :

$$c_P \tilde{\theta}_{wP}^1 = c_N \tilde{\theta}_{wN}^1 + c_S \tilde{\theta}_{wS}^1. \quad (5.14d)$$

Les coefficients c_j sont donnés par le tableau (5.5) suivant :

Tableau. 5. 5 : Coefficients c_j à l'interface paroi-milieu extérieur.

	<i>Profil de vitesse parabolique</i>	<i>Profil de vitesse uniforme</i>
c_N	0	0
c_S	$\frac{r_s^{+m}}{\Delta r^+}$	$\frac{r_s^{+m}}{\Delta r^+}$
c_P	$c_N + c_S + 2i \frac{\beta_s^2}{(r_2^+ - 1)^2} \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1} + \frac{2r_n^{+m} Bi_{ext}}{2 + \Delta r^+ Bi_{ext}}$	$c_N + c_S + 2i \frac{\beta_s^2}{(r_2^+ - 1)^2} \frac{r_n^{+(m+1)} - r_s^{+(m+1)}}{m+1} + \frac{2r_n^{+m} Bi_{ext}}{2 + \Delta r^+ Bi_{ext}}$

5.5. Résolution du système d'équations:

Pour résoudre le système d'équations algébriques obtenu après la discrétisation, le choix a été orienté vers les méthodes itératives TDMA. En effet, ces méthodes itératives sont choisies pour leurs convergences et la non nécessité d'une place mémoire additionnelle importante. Le système obtenu peut être écrit :

$$C_j \tilde{\theta}_j^{k+1} + D_j \theta_{j+1}^{k+1} + G_j \theta_{j-1}^{k+1} = V_j, \quad (5.15)$$

pour $1 \leq j \leq N$:

$$\begin{array}{llll} \tilde{\theta}_j \rightarrow \tilde{\theta}_P & \tilde{\theta}_{j+1} \rightarrow \tilde{\theta}_N & \tilde{\theta}_{j-1} \rightarrow \tilde{\theta}_S & V_j \rightarrow a_P^0 \tilde{\theta}_j^k \\ C_j \rightarrow a_P & D_j \rightarrow -a_N & G_j \rightarrow -a_S & \end{array}$$

pour $N+1 \leq j \leq M$:

$$\begin{array}{llll} \tilde{\theta}_j \rightarrow \tilde{\theta}_{wP} & \tilde{\theta}_{j+1} \rightarrow \tilde{\theta}_{wN} & \tilde{\theta}_{j-1} \rightarrow \tilde{\theta}_{wS} & V_j \rightarrow 0 \\ C_j \rightarrow c_P & D_j \rightarrow -c_N & G_j \rightarrow -c_S & \end{array}$$

L'itération $k+1$ représente la situation actuelle dès l'entrée de conduit.

L'ensemble de ces équations forme un système linéaire à matrice tri diagonale. Celui-ci est résolu par l'algorithme de Thomas.

5.6. Réapparition de la variable de temps :

Afin de résoudre le système d'équations discrétisées, la solution complète du problème prend la forme ci-dessous :

$$\theta_j^{k+1} = A_j^{k+1} \sin(\delta t^+ - \phi_j^{k+1}), \quad (5.16)$$

avec $A_j^{k+1} = \|\tilde{\theta}_j^{k+1}\|$ représente l'amplitude et $\phi_j^{k+1} = -\arg(\tilde{\theta}_j^{k+1})$ représente le déphasage.

De même pour la température moyenne de fluide et le flux thermique.

5.7. Validation des résultats :

En absence d'un modèle analytique exacte pour un profil de vitesse parabolique établi, nous avons choisi la validation du présent modèle par le modèle analytique développé dans le chapitre 2, pour différents paramètres a^+ (ceux utilisés dans la référence [19]), en fixant $\delta = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$. Nous utilisons ainsi un maillage régulier avec des pas Δr^+ et Δx^+ bien déterminés afin d'assurer une bonne précision.

Nous présentons dans les tables (5.6) et (5.7), les amplitudes de la température axiale et les écarts relatifs pour $a^+ = 8.5 \cdot 10^{-3}$ et différents pas Δr^+ et Δx^+ .

Tableau. 5. 6 : Amplitude de la température axiale et les écarts relatifs pour différents pas Δr^+ .

x^+	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
a	0,9778701	0,8619142	0,7264893	0,6059476	0,5042402	0,4194024	0,3488063
b	0,9774848	0,8589784	0,7232850	0,6032342	0,5021044	0,4177648	0,3475674
FVM c	0,9758164	0,8562958	0,7200106	0,5996355	0,4983782	0,4140555	0,3439754
a'	1,48	6,363	9,212	10,95	12,316	13,573	14,80
b'	1,086	2,935	4,761	6,423	8,028	9,615	11,199
c'	0,622	0,196	0,212	0,420	0,547	0,651	0,748
Exact	0,9764244	0,8564641	0,7198575	0,5993838	0,4981053	0,4137859	0,3437180

a, a': Amplitude et écart relatif (‰) pour $\Delta r^+ = 0.1$

b, b': Amplitude et écart relatif (‰) pour $\Delta r^+ = 0.01$

c, c': Amplitude et écart relatif (‰) pour $\Delta r^+ = 0.001$

Le tableau (5.6) représente les écarts relatifs en fonction du pas Δr^+ , en fixant l'incrément $\Delta x^+ = 10^{-3}$. On remarque que ces derniers sont autant plus importants que le pas Δr^+ est très grand. Dans le cas $\Delta r^+ = 0.1$, l'écart relatif en $x^+ = 0.7$ est de l'ordre de 15%. Contrairement dans le cas des petits pas Δr^+ , les résultats sont hautement affinés. Notons qu'en $x^+ = 0.7$, l'écart relatif est de l'ordre 0.75‰ pour $\Delta r^+ = 10^{-3}$. La figure (5.5) représente les écarts le long du conduit, pour un pas $\Delta x^+ = 10^{-3}$.

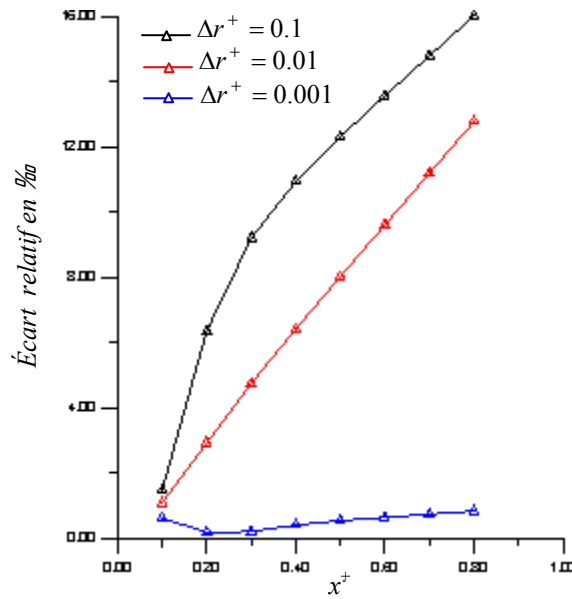


Fig. 5.5 : Ecarts relatifs de l'amplitude de la température axiale pour différents pas Δx^+ (cas de deux plans parallèles).

Nous examinons ici l'influence du pas axial Δx^+ sur la précision des résultats, en fixant $\Delta r^+ = 10^{-3}$. Le tableau (5.7) représente les écarts relatifs pour des pas Δx^+ différents.

Tableau. 5.7 : Amplitude de la température axiale et écarts relatifs pour différents pas Δx^+ .

x^+	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
<i>a</i>	0,9444784	0,8464393	0,7350470	0,6281054	0,5326281	0,4500859	0,3797406
<i>b</i>	0,9706793	0,8553337	0,7221303	0,6028937	0,5019818	0,4176979	0,3475176
<i>c</i>	0,9758164	0,8562958	0,7200106	0,5996355	0,4983782	0,4140555	0,3439754
<i>FVM d</i>	0,9764260	0,8564620	0,7198905	0,5994229	0,4981413	0,4138174	0,3437454
<i>a'</i>	32,71	11,704	21,1	47,918	69,308	87,726	104,802
<i>b'</i>	5,883	1,319	3,157	5,855	7,782	9,454	11,054
<i>c'</i>	0,622	0,196	0,212	0,420	0,547	0,651	0,748
<i>d'</i>	0,002	0,002	0,045	0,065	0,072	0,076	0,079
<i>Exact</i>	0,9764244	0,8564641	0,7198575	0,5993838	0,4981053	0,4137859	0,3437180

a, a' : Amplitude et écart relatif (%) pour $\Delta x^+ = 0.1$.

b, b' : Amplitude et écart relatif (%) pour $\Delta x^+ = 0.01$.

c, c' : Amplitude et écart relatif (%) pour $\Delta x^+ = 0.001$.

d, d' : Amplitude et écart relatif (%) pour $\Delta x^+ = 0.0001$.

La figure (5.6) représente les amplitudes de la température axiale, obtenus par l'utilisation des pas Δx^+ différents. On remarque que pour un pas de $\Delta x^+ = 0.1$ (estimé très grand), les écarts sont très importants par rapport à la solution exacte. Contrairement dans le cas des pas de plus en plus petits, les courbes d'amplitudes sont parfaitement confondues. Pour voir clairement la différence entre ces résultats, la figure (5.7) représente les écarts

relatifs, dessinées à partir du tableau précédent. On remarque que pour des pas Δx^+ très petits ($\Delta x^+ = 10^{-4}$), les résultats sont parfaitement affinés.

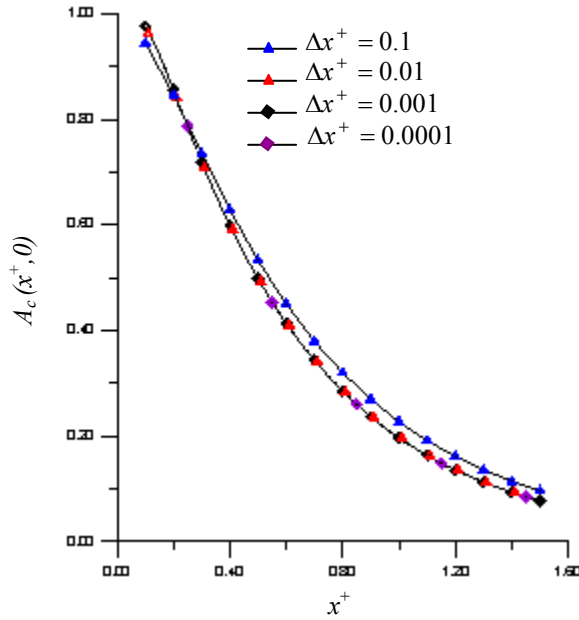


Fig. 5. 6 : Amplitude de la température axiale (conduit à deux plaques parallèles, $a^+=8.5.10^{-3}$ et $\delta=0.1$)

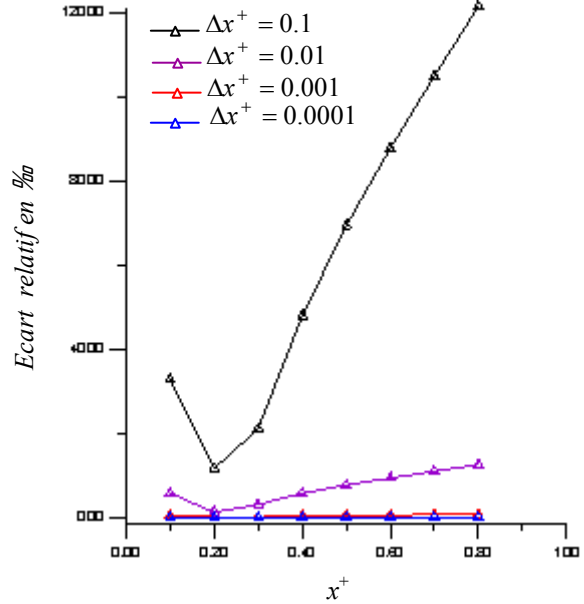


Fig. 5. 7 : Ecarts relatifs de l'amplitude de la température axiale pour différents pas Δx^+ .

En utilisant le maillage $\Delta x^+ = 10^{-4}$ et $\Delta r^+ = 10^{-3}$, nous avons relevé les amplitudes et les déphasages de la température axiale. Sur les tableaux (5.8), (5.9) et (5.10) sont portés les valeurs correspondantes au modèle approché (M.V.R) développé dans le chapitre 3, la solution exacte et le modèle numérique (F.V.M). Les calculs montrent que, pour $a^+ = 8.5.10^{-3}$, l'écart relatif de l'amplitude par rapport à la solution exacte se réduit à 2.45% en $x^+ = 0.5$ par la méthode de Ritz (M.V.R) et à 0.072 % par le modèle numérique. Les écarts relatifs du déphasage ne cessent de diminuer pour les deux modèles, qui sont de l'ordre de 1 % par la méthode de Ritz (M.V.R) et de l'ordre de 0.2 % par la méthode des volumes finis.

Par ailleurs, dans le cas de grandes valeurs de a^+ (0.1 et $8.5.10^{-2}$), les écarts relatifs de l'amplitude sont moins importants (de l'ordre 0.11% pour le modèle numérique et de l'ordre 0,6% pour le modèle (M.V.R) en $x^+ = 0.5$ et $a^+ = 8.5.10^{-2}$). En résumé, le modèle numérique (F.V.M) et le modèle (M.V.R) fournissent des résultats très satisfaisants.

Tableau. 5. 8a : Amplitude de la température axiale pour $a^+ = 8.5.10^{-3}$.

x^+	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
M.V.R 1	0,9760286	0,8556607	0,7188644	0,5982981	0,4969871	0,4126545	0,3426099
2	0,405	0,938	1,379	1,811	2,245	2,734	3,223
FVM 1	0,9764260	0,8564620	0,7198905	0,5994229	0,4981413	0,4138174	0,3437454
2	0,002	0,002	0,045	0,065	0,072	0,076	0,079
Exact 1	0,9764244	0,8564641	0,7198575	0,5993838	0,4981053	0,4137859	0,3437180

Tableau. 5. 8b : Déphasage de la température axiale pour $a^+ = 8.5.10^{-3}$.

x^+	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
M.V.R 3	1,195145	4,195967	7,321326	10,33753	13,30040	16,24630	19,18709
4	1,21	1,27	1,24	1,25	1,25	1,20	1,16
FVM 3	1,196958	4,198737	7,326901	10,34636	13,31245	16,26062	19,20365
4	0,309	0,614	0,486	0,397	0,349	0,323	0,307
Exact 3	1,196588	4,201318	7,330466	10,35047	13,31711	16,265882	19,209548

Tableau. 5. 9a : Amplitude de la température axiale pour $a^+ = 8.5.10^{-2}$.

x^+	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
M.V.R 1	0,9970520	0,9739503	0,9357691	0,8923224	0,8482047	0,8052222	0,7640297
2	0,122	0,258	0,389	0,514	0,64	0,78	0,921
FVM 1	0,9971380	0,9741375	0,9360552	0,8926928	0,8486481	0,8057411	0,7646142
2	0,036	0,066	0,083	0,099	0,117	0,136	0,156
Exact 1	0,997174	0,9742018	0,9361333	0,8927820	0,8487480	0,8058512	0,7647342

Tableau. 5. 9b : Déphasage de la température axiale pour $a^+ = 8.5.10^{-2}$.

x^+	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
M.V.R 3	1,037468	4,627673	9,615825	15,05765	20,64086	26,26799	31,90687
4	9,27	4,41	3,36	2,996	2,808	2,635	2,522
FVM 3	1,048665	4,647820	9,645988	15,09919	20,69426	26,33183	31,98122
4	1,422	0,081	0,241	0,245	0,228	0,211	0,197
Exact 3	1,047175	4,6481989	9,6483171	15,102899	20,698997	26,337400	31,9875511

Tableau. 5. 10a : Amplitude de la température axiale pour $a^+ = 0.1$.

x^+	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
M.V.R 1	0,9976806	0,9800263	0,9504400	0,9162844	0,8811256	0,8464240	0,8127480
2	0,234	0,46	0,696	0,93	1,165	1,41	1,654
FVM 1	0,9978572	0,9804054	0,9510168	0,9170383	0,8820388	0,8474897	0,8139507
2	0,057	0,073	0,089	0,108	0,129	0,152	0,177
Exact 1	0,9979142	0,9804774	0,9511020	0,9171378	0,8821529	0,8476191	0,8140951

Tableau. 5. 10b : Déphasage de la température axiale pour $a^+ = 0.1$.

x^+	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
M.V.R 3	0,9779622	4,237641	8,793728	13,79205	18,93688	24,13091	29,34001
4	10,529	4,718	3,454	3,018	2,806	2,621	2,502
FVM 3	0,9899095	4,257785	8,8230990	13,83208	18,98814	24,19216	29,41134
4	1,558	0,012	0,126	0,124	0,107	0,090	0,077
Exact 3	0,9883689	4,2577326	8,8242132	13,833804	18,99018	24,194342	29,413605

1,2 : Amplitude et écart relatif (%) de la température axiale.

3,4: Déphasage (degré) et écart relatif (%) de la température axiale.

5.8. Résultats et commentaires :

La réponse thermique du système est fonction de cinq paramètres ($\delta, \gamma, r_2^+, Bi_{ext}$ et β_s). L'influence de l'un d'entre eux dépend fortement de la valeur des quatre autres, aussi avons-nous choisi d'illustrer le comportement du système en procédant à un balayage sur l'un des paramètres en fixant les autres.

Le rapport des capacités thermiques (l'aire / styrofoam) choisi est celui utilisé par Li et Kakaç [19], pour lequel $a^+ = 8.5.10^{-3}$. Les figures (5.8), (5.9), (5.10) et (5.11) représentent, les variations d'amplitude et du déphasage de la température axiale le long d'un conduit de géométrie cylindrique (ou à deux plans parallèles) pour des fréquences d'entrée différentes. Le profil de vitesse est considéré établi parabolique. Ces résultats montrent que le déphasage varie linéairement suivant l'axe du conduit et il est d'autant plus important que la fréquence d'entrée est grande. Les amplitudes suivent une loi exponentielle, elles sont d'autant plus importantes que la période est grande (petite fréquence).

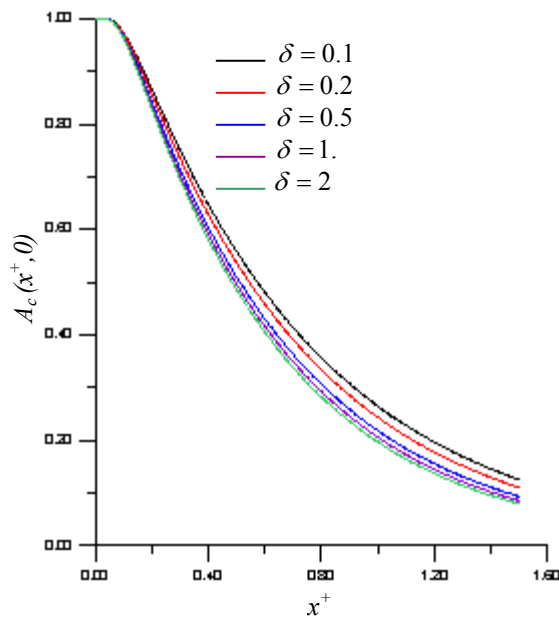


Fig. 5.8 : Variations d'amplitude le long de l'axe d'un conduit à deux plaques parallèles pour différentes fréquences d'entrée ($Bi_{ext}=0$ et $a^+ = 8.5.10^{-3}$)

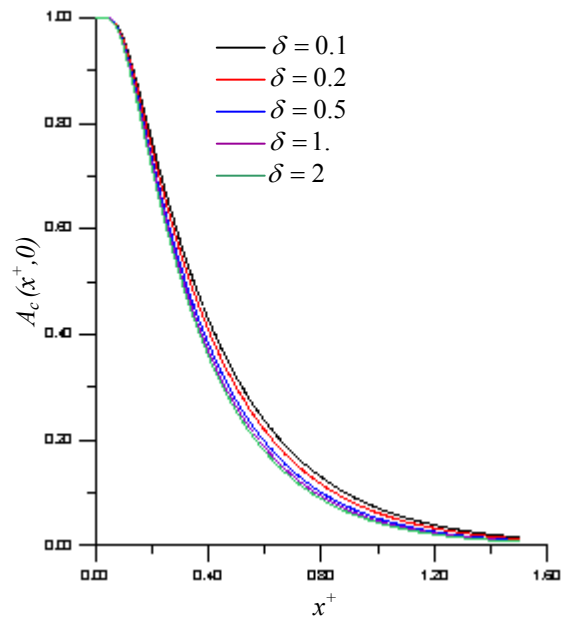


Fig. 5.9 : Variations d'amplitude le long de l'axe d'un tube cylindrique pour différentes fréquences d'entrée ($Bi_{ext}=0$ et $a^+ = 8.5.10^{-3}$)

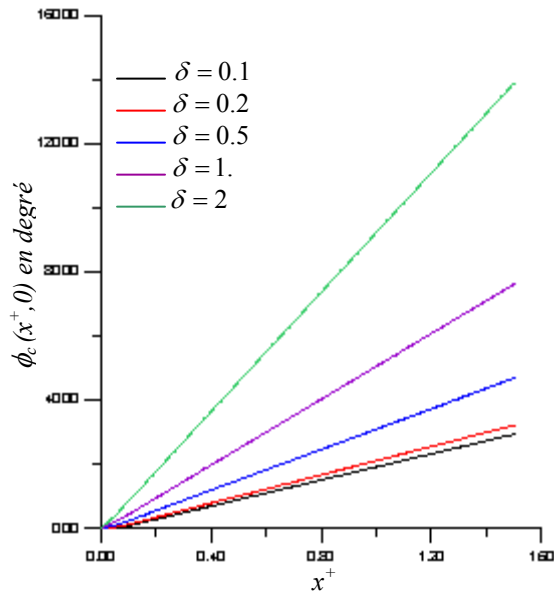


Fig. 5.10 : Variations de déphasage le long de l'axe d'un conduit à deux plaques parallèles pour différentes fréquences d'entrée ($Bi_{ext}=0$ et $a^+ = 8.5 \cdot 10^{-3}$)

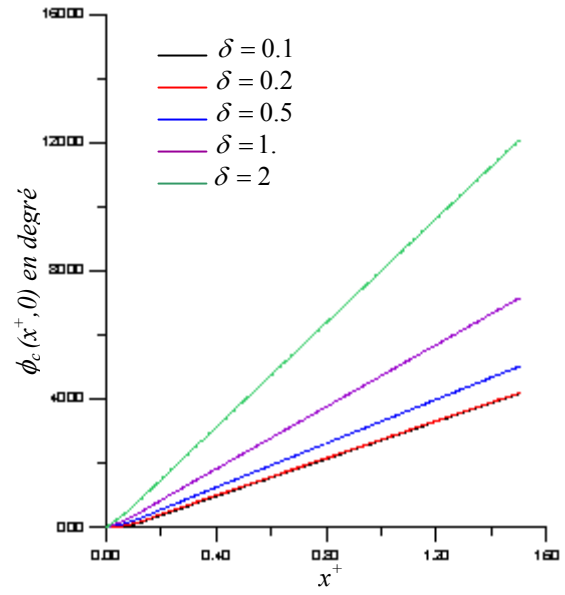


Fig. 5.11 : Variations de déphasage le long de l'axe d'un tube cylindrique pour différentes fréquences d'entrée ($Bi_{ext}=0$ et $a^+ = 8.5 \cdot 10^{-3}$)

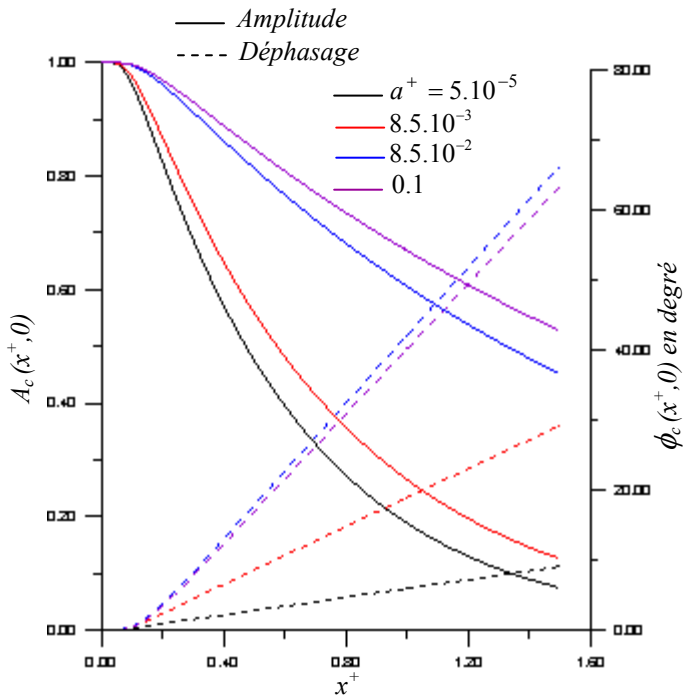


Fig. 5.12 : Variations d'amplitude et de déphasage le long de l'axe d'un conduit à deux plaques parallèles pour différentes valeurs de a^+ ($\delta = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0.$)

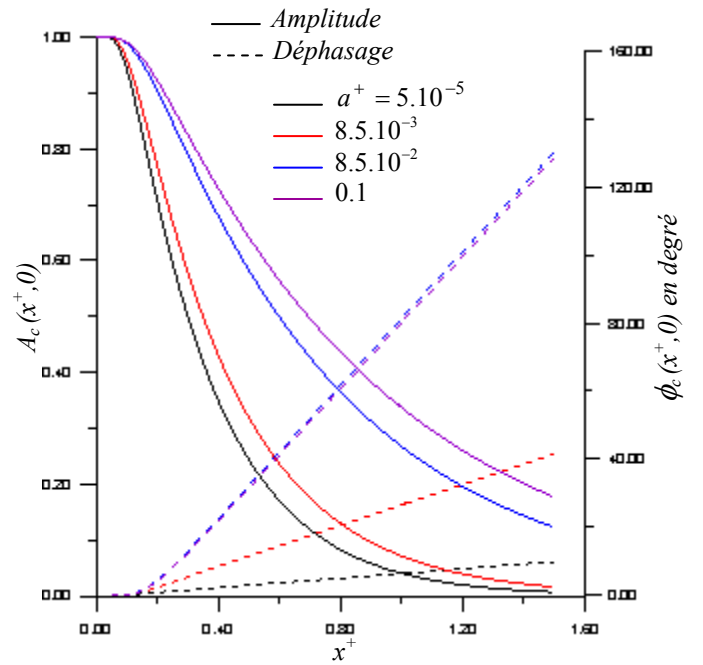


Fig. 5.13 : Variations d'amplitude et de déphasage le long de l'axe d'un tube cylindrique pour différentes valeurs de a^+ ($\delta = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0.$)

Les figures (5.12) et (5.13) montrent l'effet des capacités thermiques (fluide/solide) sur les amplitudes et les déphasages de la température axiale, pour une fréquence d'entrée $\delta = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$. On remarque que le comportement de la température axiale est semblable à celui enregistré dans le chapitre 2, pour le cas des températures de mélange et inter faciale. Notons que l'amortissement est d'autant plus important que le rapport a^+ est très faible.

Les figures (5.14) et (5.15) illustrent les variations de l'amplitude et du déphasage de la température axiale pour différentes valeurs du paramètre β_s avec $a^+ = 8.5 \cdot 10^{-3}$, $\delta = 0.1$ et $Bi_{ext} = 0$. Notons que les amplitudes marquent des amortissements de plus en plus rapides que β_s devient très petit (épaisseur du conduit très petite). Les résultats pour un écoulement uniforme, montrent un décalage avec ceux d'un écoulement parabolique.

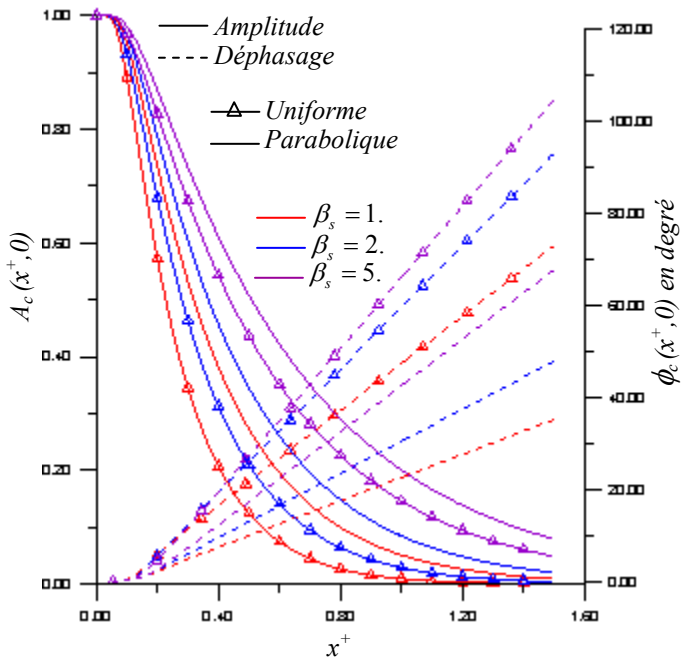


Fig. 5.14 : Variations d'amplitude et de déphasage le long de l'axe d'un tube cylindrique pour différents β_s ($a^+ = 8.5 \cdot 10^{-3}$, $Bi_{ext} = 0$ et $\delta = 0.1$)

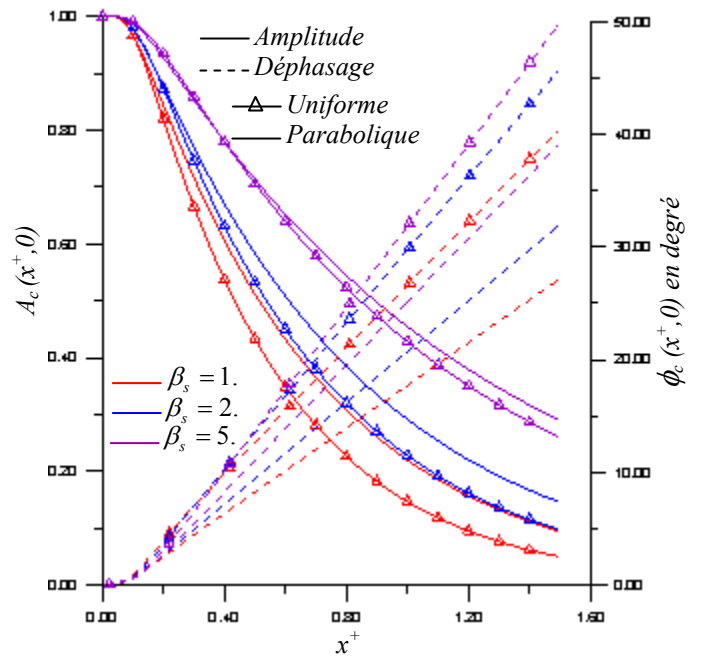


Fig. 5.15 : Variations d'amplitude et de déphasage le long de l'axe d'un conduit à deux plaques parallèles pour différents β_s ($a^+ = 8.5 \cdot 10^{-3}$, $Bi_{ext} = 0$ et $\delta = 0.1$)

Nous avons représenté sur les figure (5.16), (5.17) et (5.18) les profils transversaux de l'amplitude et du déphasage de la température du fluide en différentes positions x^+ , pour $\beta_s = 0.1$, $\delta = 10^{-3}$, $Bi_{ext} = 0$, $r_2^+ = 1.5$ et $\gamma = 25$. Notons que du point de vue thermique, ces profils marquent des stabilités très rapide dès l'entrée du conduit, cette stabilité se caractérise par une longueur $x^+ = L_{th}$ connue comme longueur d'établissement thermique.

De point de vue dynamique, dans la figure (5.16) nous montrons la comparaisons entre les deux profils de vitesse. Notons que le gradient transversal est autant plus important pour un écoulement piston que pour un écoulement parabolique. Par ailleurs, dans les figures (5.17) et (5.18), on remarque que ce gradient transversal est moins important dans le cas de deux plaques parallèles que dans un tube cylindrique.

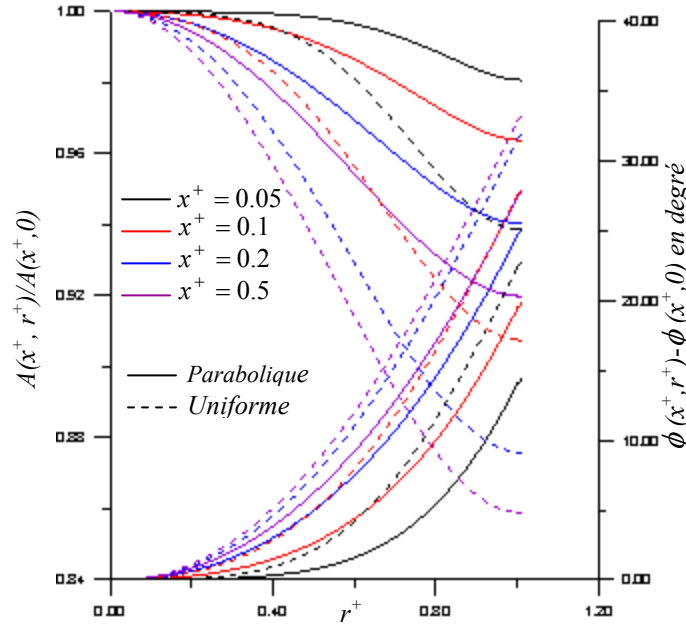


Fig. 5. 16 : Profil transversal (amplitude déphasage) d'un conduit à deux plaques parallèles.

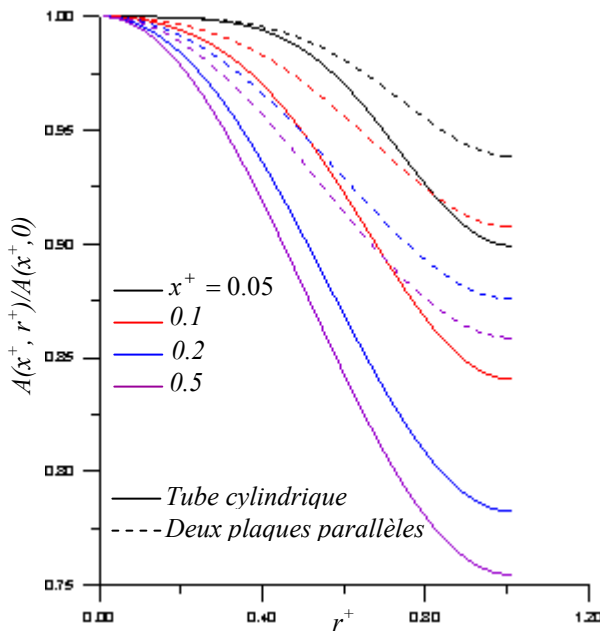


Fig. 5. 17 : Profil transversal (amplitude) dans le cas d'un écoulement parabolique pour différents x^+ .

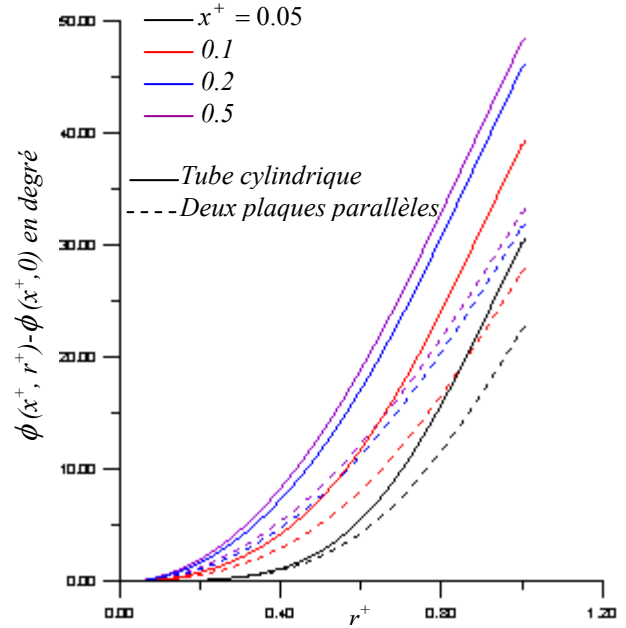


Fig. 5. 18 : Profil transversal (déphasage) dans le cas d'un écoulement parabolique pour différents x^+ .

Etude analytique du modèle quasi-stationnaire.

6.1.Introduction :

Le fonctionnement instationnaire des équipements thermiques est souvent simulé par des modèles simplifiés faisant intervenir des corrélations d'origine expérimentale, valables en régime permanent de fonctionnement. L'intérêt de ces modèles est de simplifier la résolution analytique du problème. A travers notre recherche bibliographique, nous avons montré que l'utilisation de ces modèles pour la modélisation des transferts thermo-convectifs en régime laminaire instationnaire ne peut se faire que par précautions [2-3, 13].

Le coefficient d'échange h tiré des corrélations expérimentales dépend de :

- La nature du régime d'écoulement (laminaire ou turbulent).
- La géométrie du canal (plane, cylindrique ou autre).
- La nature du fluide considéré (eau, gaz, liquide métal, etc.).
- Les conditions thermiques aux parois (flux constant, température constante, etc.).

Reprenons le cas d'un régime périodique établi, l'évolution des températures est donnée par :

$$T_m - T_w = T_1 \sin(\omega t - \phi). \quad (6.1)$$

Le flux pariétal s'écrit :

$$\varphi_w = \varphi_0 \sin(\omega t - \phi'), \quad (6.2)$$

d'où l'expression du coefficient d'échange qui est une fonction du temps:

$$h = \frac{\varphi_w}{T_m - T_w} = \frac{\varphi_0}{T_1} f(\omega t). \quad (6.3)$$

On propose donc, dans ce qui suit, d'envisager la possibilité d'extension de ce concept classique de coefficient d'échange (modèle quasi-stationnaire) pour le cas d'un écoulement fluide laminaire dans un conduit (cylindrique ou plan) avec un régime périodique établi.

6.2. Modèle quasi-stationnaire du problème de Graetz en régime périodique:

La non disponibilité de corrélations empiriques, pour les problèmes conjugués, est la raison majeure pour laquelle nous allons présenter dans cette partie les résultats relatifs au problème de Graetz classique (sans paroi) en utilisant un coefficient d'échange h .

Le problème à résoudre est donc celui d'un écoulement fluide laminaire dans un conduit (tube cylindrique ou deux plans parallèles) dont les parois (sans épaisseur) sont maintenues à une température constante, et l'entrée du conduit est abordée par un fluide en régime thermique périodique (cf. Fig.6.1).

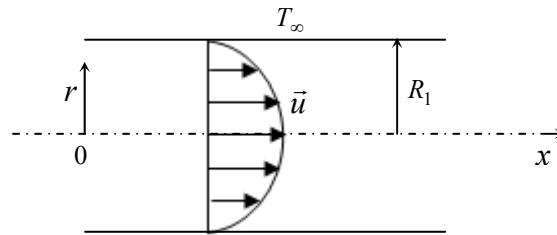


Fig.6.1 : Problème de Graetz.

6.2.1. Mise en équations et résolution:

Le modèle quasi-stationnaire du problème de Graetz en régime périodique, tel est décrit ci-dessus, s'obtient simplement par la résolution du système ci-dessous :

$$\rho C_p \frac{R_1}{m+1} \left(\frac{\partial T_m}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) = h_{\text{int}} (T_\infty - T_m), \quad x > 0, t > 0 \quad (6.4a)$$

$$T_m(0, t) = T_\infty + \Delta T \sin(\omega t), \quad t > 0 \quad (6.4b)$$

avec $m=0$ pour un conduit à deux plaques parallèles et $m=1$ pour un tube cylindrique.

h_{int} : représente le coefficient d'échange convectif interne.

T_m : représente la température moyenne de fluide, elle est donnée par :

$$T_m(x, t) = \frac{\int_0^{R_1} u(r) T(x, r, t) r^m dr}{\int_0^{R_1} u(r) r^m dr}. \quad (6.5)$$

En introduisant les variables adimensionnelles et les températures complexes, nous obtiendrons l'équation différentielle de premier ordre suivante :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_m}{\partial x^+} + \left[i\delta + \frac{Nu(x^+)}{2^{2-2m}} \right] \tilde{\theta}_m = 0, \quad x > 0 \quad (6.6)$$

dont la solution est immédiate, elle s'écrit:

$$\tilde{\theta}_m(x^+) = \exp\left[-\int_0^{x^+} \mu(x^+) dx^+\right], \quad (6.7)$$

$$\text{avec : } \mu(x^+) = i\delta + \frac{Nu(x^+)}{2^{2-2m}}. \quad (6.8)$$

La solution finale du problème est donnée par :

$$\theta_m(x^+, t^+) = A_m(x^+) \sin(\delta t^+ - \phi_m(x^+)). \quad (6.9)$$

6.2.2. Résultats et validation du modèle simplifié:

Les figures (6.2) et (6.3) représentent respectivement, pour les deux configurations géométriques, l'évolution des amplitudes et des déphasages de la température moyenne de fluide, en utilisant le modèle quasi-stationnaire (6.9). Les fréquences du signal thermique varient de $\delta = 0.001$ jusqu'à $\delta = 0.1$, et les corrélations ici utilisées sont extraites de la référence [1].

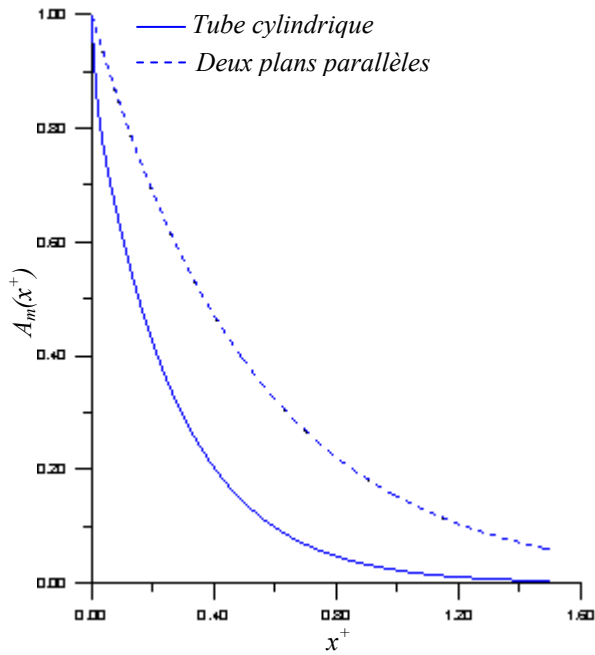


Fig. 6.2 : Variation de l'amplitude de la température moyenne de fluide le long d'un conduit (cylindrique / deux plans parallèles) pour différentes fréquences

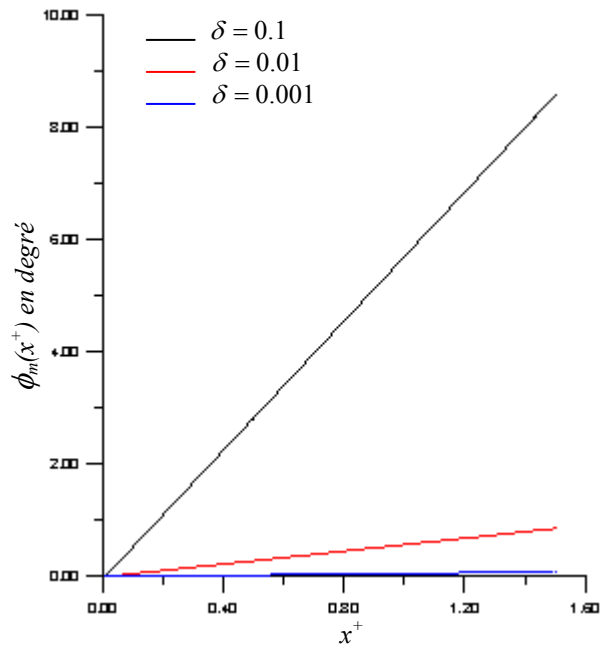


Fig. 6.3 : Variations du déphasage de la température moyenne de fluide le long d'un conduit (cylindrique / deux plans parallèles) pour différentes fréquences

Ces figures révèlent que pour un tube cylindrique les atténuations de l'amplitude sont plus rapides que celles d'un conduit à deux plaques parallèles (cf. Fig.6.2). La fréquence d'entrée n'a quasiment pas d'influence remarquable sur les amplitudes. D'un autre côté, pour les basses fréquences ($\delta = 0.001$), le déphasage de la température moyenne de fluide est

quasiment nul (cf. Fig.6.3) et le problème à résoudre devient donc, celui du régime permanent. Cela peut s'expliquer par le paramètre $\mu(x^+)$ (cf. Eq. 6.8), d'où on peut écrire :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(x^+) = \frac{Nu}{2^{2-2m}}. \quad (6.10)$$

Notons également, que l'amplitude et le déphasage s'écrivent respectivement :

$$A_m(x^+) = \exp \left[- \int_0^{x^+} \frac{Nu}{2^{2-2m}} dx^+ \right] \quad (6.11)$$

$$\phi_m(x^+) = \delta x^+. \quad (6.12)$$

Soulignons à partir de ces expressions, l'évolution exponentielle de l'amplitude et linéaire du déphasage en fonction de la fréquence d'entrée.

Dans un but de comparaison, nous allons examiner, si le modèle simplifié (MS) peut approcher, en régime laminaire, le modèle analytique complet et étudier un éventuel rapprochement en fonction de la fréquence d'entrée.

Nous présentons dans les figures (6.4) et (6.5) les amplitudes et les déphasages obtenus par le modèle quasi-stationnaire (MS) et le modèle analytique variationnel (M.V.R), (cf. Annexe 1. Eq. A.1.16), pour des fréquences d'entrée différentes dans le cas de deux plaques parallèles.

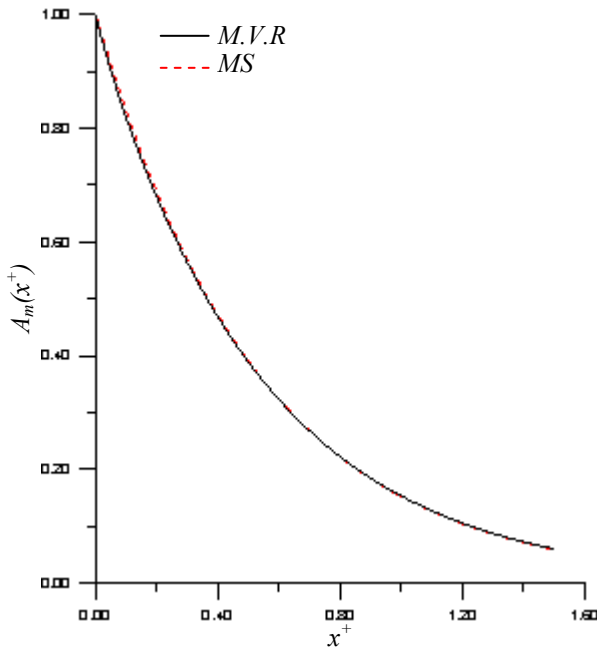


Fig. 6. 4 : Variation de l'amplitude le long d'un conduit à deux plans parallèles pour différentes fréquences

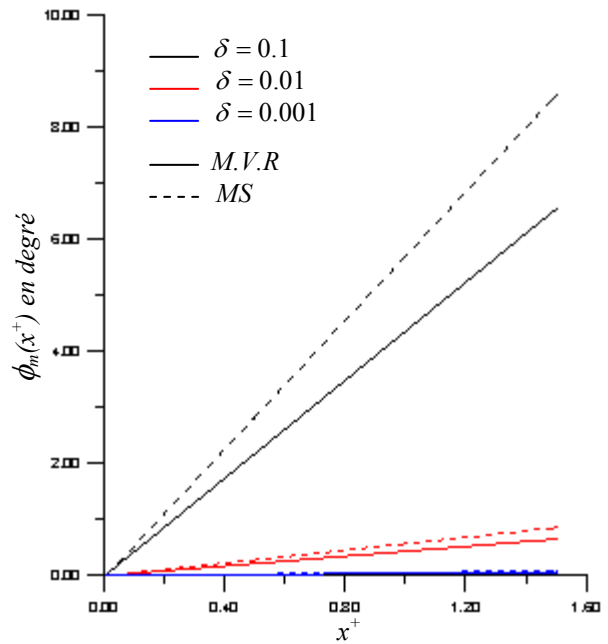


Fig. 6. 5 : Variations du déphasage le long d'un conduit à deux plans parallèles pour différentes fréquences

On remarque que les déphasages obtenus par les deux modèles (MS et M.V.R) se rapprochent de plus en plus que la fréquence d'entrée diminue (cf. Fig.6.5). La figure (6.4) montre que les amplitudes obtenues par les deux modèles sont identiques.

Nous présentons dans les tableaux (6.1) et (6.2) respectivement, les écarts des amplitudes et des déphasages entre les deux modèles.

Tableau. 6. 1 : Variations des écarts de l'amplitude (M.V.R – MS) pour différentes fréquences.

$\delta \backslash x^+$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.1	1.08261E-02	8.23277E-03	5.48822E-03	3.35771E-03	1.78659E-03	6.53714E-04
0.01	1.41985E-02	1.35273E-02	1.19095E-02	1.03517E-02	8.96132E-03	7.73769E-03
0.001	1.35212E-02	1.24053E-02	1.05161E-02	8.81389E-03	7.36991E-03	6.15689E-03

Tableau. 6. 2 : Variations des écarts du déphasage (M.V.R – MS) pour différentes fréquences.

$\delta \backslash x^+$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.1	0.10817	0.24533	0.38239	0.51943	0.65645	0.79348
0.01	1.08255E-02	2.45465E-02	3.82591E-02	5.19688E-02	6.56777E-02	7.93866E-02
0.001	1.08204E-03	2.45405E-03	3.82509E-03	5.19579E-03	6.56643E-03	7.93705E-03

Notons que, pour une fréquence $\delta = 0.001$, les tableaux (6.1) et (6.2) montrent que les écarts d'amplitude sont à mieux de 2%. Les déphasages enregistrent un écart de l'ordre 8.E-03 degré en $x^+=0.6$. Pour les basses fréquences ($\delta = 0.01$ et 0.001), les écarts de phase diminuent de plus en plus qu'on est proche de l'entrée du conduit, et restent très petits.

6.3.Problème conjugué :

Nous présentons, dans cette section, le modèle simplifié du problème conjugué. Ainsi, par la même analyse utilisée dans la section précédente, nous allons étudier le rapprochement avec le modèle variationnel M.V.R (cf. Chapitre 3) en fonction de la fréquence du signal thermique à l'entrée du conduit.

6.3.1.Mise en équations :

Les hypothèses relatives au fluide et au solide (cf. Chapitre 2) restent les mêmes. Ce qui conduit à écrire, en adimensionnel, le système d'équations suivant :

$$\frac{k_f}{R_1(m+1)} \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial t^+} + \frac{\partial \theta_m}{\partial x^+} \right) = h_{\text{int}} (\theta_w|_1 - \theta_m), \quad x^+ > 0, t^+ > 0 \quad (6.13a)$$

$$\theta_m(0, t^+) = \sin(\delta t^+), \quad t^+ > 0 \quad (6.13b)$$

$$\Gamma^+ \frac{\partial \theta_w}{\partial t^+} = \frac{1}{r^{+m}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+m} \frac{\partial \theta_w}{\partial r^+} \right), \quad 1 < r^+ < r_2^+, x^+ > 0, t^+ > 0 \quad (6.13c)$$

$$-\frac{\partial \theta_w}{\partial r^+} = Bi_{\text{ext}} \theta_w, \quad \text{en } r^+ = r_2^+, x^+ > 0, t^+ > 0 \quad (6.13d)$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial r^+} = Bi_{\text{int}} (\theta_w - \theta_m), \quad \text{en } r^+ = 1, x^+ > 0, t^+ > 0 \quad (6.13e)$$

$$\text{avec } Bi_{\text{int}} = \frac{h_{\text{int}} R_1}{k_s}.$$

En introduisant, pour un régime périodique établi, les températures adimensionnelles complexes:

$$\theta_m(x^+, t^+) = \tilde{\theta}_m(x^+) \exp(i \delta t^+) \quad (6.14a)$$

$$\theta_w(x^+, r^+, t^+) = \tilde{\theta}_w(x^+, r^+) \exp(i \delta t^+), \quad (6.14b)$$

nous obtiendrons :

$$\left(i \delta \tilde{\theta}_m + \frac{\partial \tilde{\theta}_m}{\partial x^+} \right) = \frac{Nu}{2^{2-2m}} (\tilde{\theta}_w|_1 - \tilde{\theta}_m), \quad x^+ > 0 \quad (6.15a)$$

$$\tilde{\theta}_m(0) = 1 \quad (6.15b)$$

$$\frac{1}{r^{+m}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} \right) - 2i \left(\frac{\beta_s}{r_2^+ - 1} \right)^2 \tilde{\theta}_w = 0, \quad 1 < r^+ < r_2^+, x^+ > 0 \quad (6.15c)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} = Bi_{\text{ext}} \tilde{\theta}_w, \quad \text{en } r^+ = r_2^+, x^+ > 0 \quad (6.15d)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_w}{\partial r^+} = Bi_{\text{int}} (\tilde{\theta}_w - \tilde{\theta}_m), \quad \text{en } r^+ = 1, x^+ > 0, \quad (6.15e)$$

où le nombre de Nusselt est donné par :

$$Nu = 2^{2-m} \frac{h_{\text{int}} R_1}{k_f}. \quad (6.16a)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$Bi_{\text{int}} = \frac{Nu}{\gamma 2^{2-m}}. \quad (6.16b)$$

6.3.2. Résolution du problème :

La solution recherchée de l'équation (6.15c) est donnée sous la forme :

Pour $m=0$:

$$\tilde{\theta}_w(x^+, r^+) = A \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1}\right) + B \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1}\right). \quad (6.17a)$$

Pour $m=1$:

$$\tilde{\theta}_w(x^+, r^+) = AJ_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1}\right) + BY_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1}\right), \quad (6.17b)$$

avec $\tilde{\beta}_s = \beta_s (1 - i)$

Les expressions de A et B sont déterminées par les conditions aux limites (6.15d) et (6.15e), d'où la solution particulière:

$$\tilde{\theta}_w(x^+, r^+) = \tilde{\theta}_m(x^+) \Psi(r^+). \quad (6.18)$$

La fonction $\Psi(r^+)$ est donnée comme ci-dessous :

Pour $m=0$:

$$\Psi(r^+) = R(Bi_{\text{int}}, \beta_s) \left[\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1}\right) + \frac{G}{F} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1}\right) \right], \quad (6.19a)$$

$$\text{avec } G = \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - Bi_{\text{ext}} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right). \quad (6.19b)$$

$$F = \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) + Bi_{\text{ext}} \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right). \quad (6.19c)$$

$$R(Bi_{\text{int}}, \beta_s) = \frac{Bi_{\text{int}}}{\sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right) \left[\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} + Bi_{\text{int}} \frac{G}{F} \right] + \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right) \left[Bi_{\text{int}} - \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} \frac{G}{F} \right]}. \quad (6.19d)$$

Pour $m=1$:

$$\Psi(r^+) = R(Bi_{\text{int}}, \beta_s) \left[J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1}\right) + \frac{G}{F} Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r^+}{r_2^+ - 1}\right) \right], \quad (6.20a)$$

$$\text{avec } G = \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - Bi_{\text{ext}} J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right). \quad (6.20b)$$

$$F = Bi_{ext} Y_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1} \right) - \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} Y_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1} \right). \quad (6.20c)$$

$$R(Bi_{int}, \beta_s) = \frac{Bi_{int}}{\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} \left[J_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} \right) + \frac{G}{F} Y_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} \right) \right] + Bi_{int} \left[J_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} \right) + \frac{G}{F} Y_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} \right) \right]}. \quad (6.20d)$$

L'implémentation de l'expression (6.18) dans l'équation (6.15a) conduit à écrire:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_m}{\partial x^+} + \left[i\delta + \frac{Nu}{2^{2-2m}} (1 - \Psi(1)) \right] \tilde{\theta}_m = 0. \quad (6.21)$$

L'intégration de cette équation, en tenant compte de la condition (6.15b), conduit à la distribution de la température dans le fluide, qui s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\theta}_m(x^+) = \exp \left[- \int_0^{x^+} \mu(x^+) dx^+ \right], \quad (6.22)$$

$$\text{avec : } \mu(x^+) = i\delta + \frac{Nu}{2^{2-2m}} (1 - \Psi(1)). \quad (6.23)$$

6.3.3. Etude des cas limites :

- **Flux nul et température imposée à la paroi :**

Le coefficient d'échange externe h_{ext} caractérise les pertes par convection vers l'extérieur, la condition (6.13d) peut se ramener à une condition de flux nul, si ces pertes sont minimisées par calorifugeage de la paroi externe ($h_{ext} = 0$). Le rapport des fonctions $\frac{G}{F}$ contenu dans la fonction $\Psi(r^+)$ devient alors:

Pour m=0 :

$$\frac{G}{F} = \tan \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1} \right). \quad (6.24a)$$

Pour m=1 :

$$\frac{G}{F} = \frac{J_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1} \right)}{Y_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1} \right)}. \quad (6.24b)$$

La condition de température imposée correspond à une conductivité thermique très petite de la paroi du conduit. Nous donnons, pour les deux configurations géométriques, les expressions du rapport $\frac{G}{F}$:

Pour m=0 :

$$\frac{G}{F} = \cot\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right). \quad (6.24c)$$

Pour m=1 :

$$\frac{G}{F} = -\frac{J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right)}{Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right)}. \quad (6.24d)$$

• **Paroi mince et/ou capacité thermique du conduit très importante :**

Pour une épaisseur mince et capacité thermique de la paroi très importante (c'est le cas traités par les auteurs évoqués dans le chapitre 1), la fonction $\mu(x^+)$ devient :

Pour m=0 :

$$\mu(x^+) = i\delta + \frac{Nu}{4} \left[\frac{\tilde{\beta}_s^2(1 - r_2^+) + Bi_{ext}(r_2^+ - 1)^2 + \tilde{\beta}_s^2 Bi_{ext} r_2^+}{\tilde{\beta}_s^2(1 - r_2^+) + Bi_{ext}(r_2^+ - 1)^2 + \tilde{\beta}_s^2 Bi_{ext} r_2^+ + Bi_{int}(r_2^+ - 1)^2} \right]. \quad (6.25a)$$

Si de plus la paroi est isolée de l'extérieur ($Bi_{ext} = 0$), l'expression $\tilde{\beta}_s^2 Bi_{ext} r_2^+$ devient négligeable devant les autres termes de (6.25a). La fonction $\mu(x^+)$ s'écrit alors :

$$\mu(x^+) = i\delta + \frac{Nu}{4} \left[\frac{\gamma Bi_{ext} - \gamma \frac{\tilde{\beta}_s^2}{r_2^+ - 1}}{\gamma Bi_{ext} - \gamma \frac{\tilde{\beta}_s^2}{r_2^+ - 1} + \frac{Nu}{4}} \right]. \quad (6.25b)$$

Pour m=1 :

$$\mu(x^+) = i\delta + Nu \left[\frac{\tilde{\beta}_s^2 (1 - r_2^+) (1 + r_2^+) + 2Bi_{ext} (r_2^+ - 1)^2 r_2^+ + \tilde{\beta}_s^2 Bi_{ext} r_2^+ \ln \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1} \right)}{\tilde{\beta}_s^2 (1 - r_2^+) (1 + r_2^+) + 2Bi_{ext} (r_2^+ - 1)^2 + \tilde{\beta}_s^2 Bi_{ext} r_2^+ \ln \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1} \right) + 2Bi_{int} (r_2^+ - 1)^2} \right], \quad (6.26a)$$

Pour une paroi mince $r_2^+ \approx 1$, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, l'expression $\tilde{\beta}_s^2 Bi_{ext} r_2^+ \ln \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1} \right)$

devient négligeable devant les autres termes de (6.26a) et la fonction $\mu(x^+)$ s'écrit :

$$\mu(x^+) = i\delta + Nu \left[\frac{\gamma Bi_{ext} - \gamma \frac{\tilde{\beta}_s^2}{r_2^+ - 1}}{\gamma Bi_{ext} - \gamma \frac{\tilde{\beta}_s^2}{r_2^+ - 1} + \frac{Nu}{2}} \right]. \quad (6.26b)$$

6.3.4. Résultats et commentaires :

Pour le problème conjugué, nous utilisons la même configuration que Li et Kakaç [19], à savoir le couple de matériaux utilisé est (styrofoam-air). Ce qui correspond à $\gamma = \frac{29}{26.5}$, le rapport des capacités thermiques est donné par $a^+ = 8.5 \cdot 10^{-3}$ et l'épaisseur de la paroi est égale à $r_2^+ = 4$.

Dans le modèle quasi-stationnaire (*MS*) développé ici, nous utilisons des corrélations précises à $\pm 2.5\%$ largement utilisées dans la littérature [41]. Pour le modèle variationnel (*M.V.R*), nous utilisons les résultats obtenus dans le chapitre 3, avec un écoulement fluide parabolique.

Un balayage en fréquences du signal thermique d'entrée δ entre les valeurs 0.1 et 0.001 est examiné. Les résultats sont relevés sur les figures (6.6), (6.7), (6.8) et (6.9).

Dans les figures (6.6) et (6.7) nous présentons les variations de l'amplitude de la température moyenne de fluide et le rapport entre les deux modèles (*MS*) et (*M.V.R*) pour les deux géométries du conduit. Ces figures révèlent que le rapprochement des deux modèles est net lorsque la fréquence d'entrée est très petite ($\delta = 0.001$). Contrairement dans le cas des grandes fréquences ($\delta = 0.1$), les écarts entre les deux modèles est plus important.

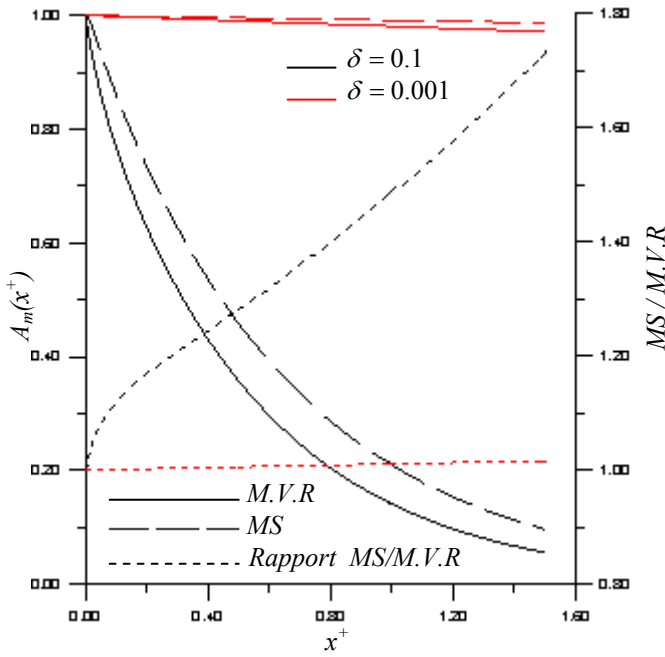


Fig. 6. 6 : Comparaison des modèles (M.V.R) et (MS), amplitude de la température moyenne de fluide et rapport MS/M.V.R, pour différentes fréquences d'entrée dans un conduit à deux plaques

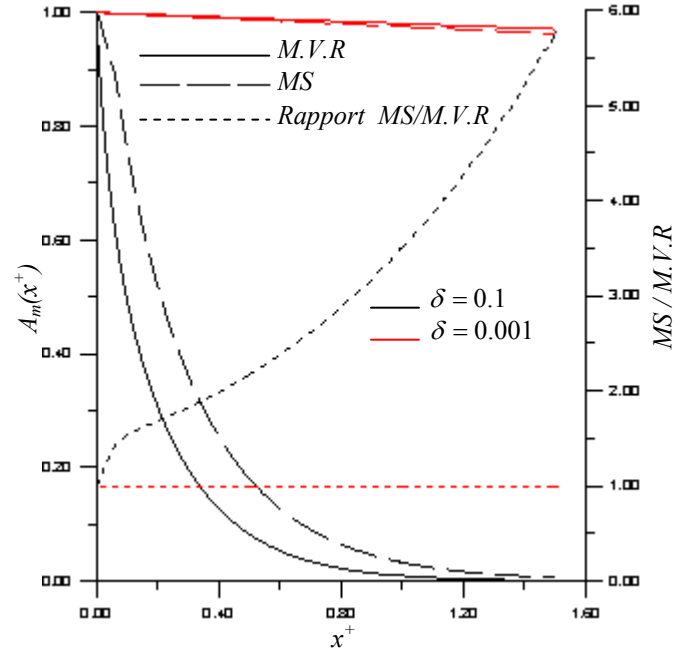


Fig. 6. 7 : Comparaison des modèles (M.V.R) et (MS), amplitude de la température moyenne de fluide et rapport MS/M.V.R, pour différentes fréquences d'entrée dans un tube cylindrique

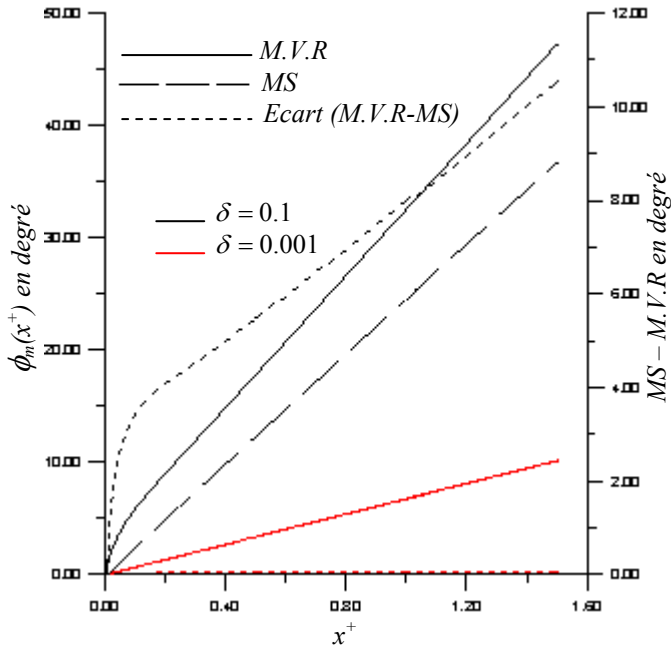


Fig. 6. 8 : Comparaison des modèles (M.V.R) et (MS), évolution du déphasage de la température moyenne de fluide et écarts entre les deux modèles, pour différentes fréquences d'entrée dans un conduit à deux plaques parallèles

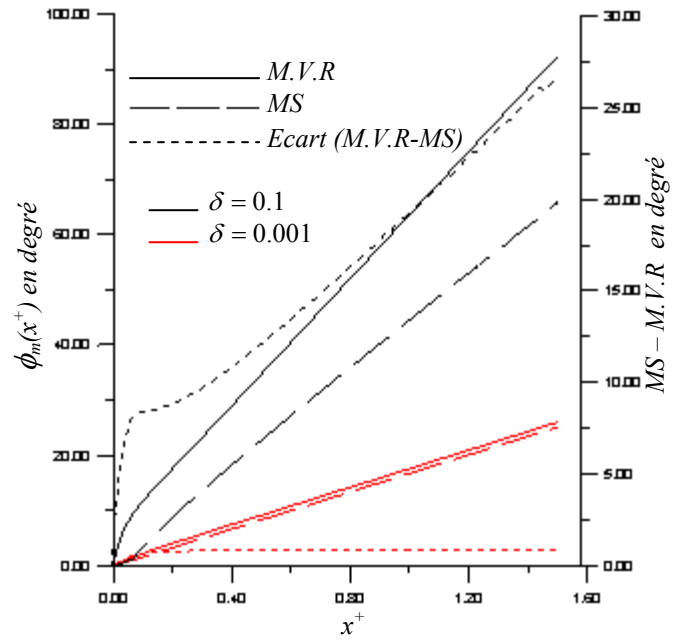


Fig. 6. 9 : Comparaison des modèles (M.V.R) et (MS), évolution du déphasage de la température moyenne de fluide, et écarts entre les deux modèles, pour différentes fréquences d'entrée dans un tube cylindrique

Dans les figures (6.8) et (6.9), nous présentons les variations du déphasage et les écarts entre les deux modèles pour les deux formes géométriques du conduit. On remarque que, pour $\delta = 0.1$, les écarts de phase entre les deux modèles sont plus importants. Par ailleurs, pour des basses fréquences, ces écarts sont minimisés voir pratiquement nuls lorsque $\delta = 0.001$.

En définitive, nous concluons que le modèle quasi-stationnaire ne peut approcher correctement, dans le cas d'un régime d'écoulement laminaire, le modèle variationnel M.V.R que si la fréquence d'entrée est très petite, ce qui correspond au régime quasi-permanent.

Application : Stockage d'énergie dans un régénérateur à plaques.

Nous avons modélisé, dans les chapitres précédents, le problème de convection forcée en régime périodique et analysé l'influence de certains paramètres physiques et géométriques sur la réponse du système. Certes que les résultats obtenus couvrent une large plage de conditions opératoires, mais n'ont lieu que pour des raisons théoriques (étude et validation des modèles utilisés). Dans ce chapitre, une application proche de la réalité industrielle est réalisée.

Nous avons choisi le cas des régénérateurs de chaleurs dont le fonctionnement s'apparente directement aux situations étudiées (régime thermique périodique).

7.1.Position du problème :

Parmi les configurations possibles d'une unité de stockage par chaleur sensible (régénérateur), nous retiendrons le schéma le plus élémentaire, à savoir un module constitué de plaques solides de forme rectangulaire, balayées par un fluide caloporteur circulant à sens unique (cf. Fig.7.1).

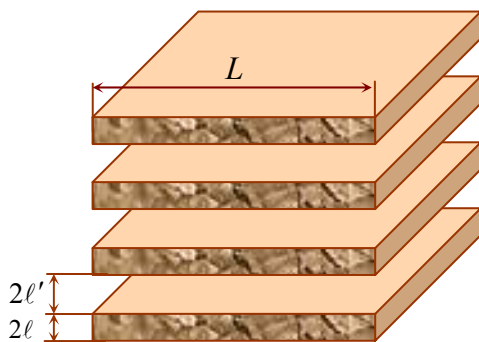


Fig. 7. 1 : Unité de stockage.

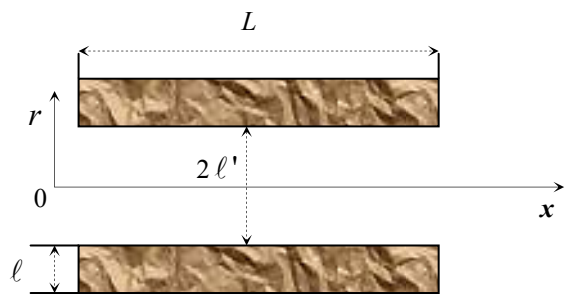


Fig. 7. 2 : Module de stockage.

Dans le module présenté, nous supposons que toutes les plaques sont identiques ainsi que les canaux aménagés entre plaques successives. Cette configuration classique permet par symétrie de réduire le problème à celui d'une demi plaque d'épaisseur ℓ , isolée sur

une face et balayée sur l'autre par un fluide dont la température d'entrée varie périodiquement avec le temps (cf. Fig.7.2). Cette situation pratique correspond à un nombre de Biot nul ($Bi_{ext} = 0$).

En l'état actuel, nous retiendrons les conditions de travail utilisées autre fois dans les références [39-42], où les matériaux utilisés sont donnés par la table (7.1) ci-dessous :

Tableau. 7. 1 : Caractéristiques thermo-physiques.

	<i>Alumine</i>	<i>brique</i>	<i>Air (300°C)</i>	<i>Santotherm55 (300°C)</i>
$k (Wm^{-1} K^{-1})$	9.83	0.66	$4.29 \cdot 10^{-2}$	0.1104
$\rho C (J m^{-3} K^{-1})$	$3.32 \cdot 10^6$	$1.428 \cdot 10^6$	624	$2.072 \cdot 10^6$

En fixant la période du signal thermique d'entrée à $\tau = 24h$ et l'espacement entre plaques ℓ' , le problème consiste donc à définir la géométrie du système conduisant à un stockage optimal et un filtrage meilleur de la température du fluide en sortie.

7.2.Fonction de transfert :

A partir des modèles développés précédemment (cf. chapitres 3 et 6), on peut écrire la distribution de la température moyenne de fluide sous la forme asymptotique :

$$\tilde{\theta}_m(x^+) = \exp(-\mu \cdot x^+). \quad (7.1)$$

On appelle fonction de transfert l'expression :

$$\exp(-\mu \cdot x^+), \quad (7.2)$$

le paramètre complexe μ peut s'écrire sous la forme :

$$\mu = \eta + i\xi \quad (7.3)$$

d'où :

$$\tilde{\theta}_m(x^+) = \exp(-\eta x^+) \exp(-i\xi x^+). \quad (7.4)$$

Ce qui confirme un amortissement exponentiel en x^+ pour l'amplitude et un déphasage linéaire. On définit alors l'amortissement par

$$\chi = \exp(-\eta x^+) \quad (7.5a)$$

et le déphasage par

$$\phi_m = \xi x^+. \quad (7.5b)$$

7.3. Bilan énergétique et fonction de stockage :

Le flux thermique pariétal à un comportement très semblable à celui de la température (oscillatoire). En fait, le stockage s'effectue pendant une demi période, lorsque le flux est positif, pendant la deuxième demi-période c'est le phénomène inverse qui se produit (déstockage).

L'énergie stockée W_s s'obtient simplement par l'intégration du flux total transmis au deux plaques sur une demi période.

$$W_s = \int Q(t^+) dt^+ . \quad (7.6)$$

W_s s'exprime aussi en fonction de l'énergie interne des plaques E_{is} , elle est égale à la variation maximale de celle-ci, c'est-à-dire au double de son amplitude.

$$W_s = 2 |\tilde{E}_{is}| , \quad (7.7)$$

$$\text{avec : } \tilde{E}_{is} = L_0 \int_0^1 \int_0^{x_s^+} 2(\rho C)_s \tilde{\theta}_w dx^+ dy^+ . \quad (7.8)$$

Nous obtenons (pour le modèle complet) :

$$W_s = 2 \frac{\tau}{\pi} \dot{m} C_f b^+ \left| \frac{\tanh(\tilde{\beta}_s)}{\tilde{\beta}_s} \sum_{n=1}^N B_n \cos(\sigma_n) \left[\frac{1 - \exp(-\mu_n x_s^+)}{\mu_n} \right] \right| . \quad (7.9)$$

Soit (pour le modèle simplifié) :

$$W_s = 2 \frac{\tau}{\pi} \dot{m} C_f b^+ \left| \frac{R(Bi_{ext}, Bi_{int}, r_2^+, \beta_s)}{\tilde{\beta}_s} \left[\sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right) - \tan\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) \left(\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right) \right) \right] \left[\frac{1 - \exp(-\mu x_s^+)}{\mu} \right] \right| . \quad (7.10)$$

On se rapportant à la quantité $H_m = \frac{\tau}{\pi} \dot{m} C_f$, l'énergie maximale transportée par le fluide à l'entrée du canal pendant une demi période. Nous appellerons fonction du stockage la quantité :

$$f_s = W_s / H_m . \quad (7.11)$$

Une étude détaillée sur la fonction de stockage est fournie dans la référence [42].

7.4. Etude et discussion des résultats :

7.4.1. Filtrage :

Les résultats présentés dans cette partie sont tirés des essais effectués pour un nombre de Reynolds $Re = 200$ pour le Santotherm55 et $Re=2000$ pour l'air, pour un régime d'écoulement parabolique.

a. Etude de l'amortissement :

La figure (7.3) présente l'influence des capacités thermiques du fluide et de la paroi du conduit sur la fonction η pour un écartement entre plaques $\ell' = 10^{-2} m$.

Pour quatre systèmes (fluide/solide) différents, nous avons présenté l'amortissement η à partir du :

- Modèle variationnel par la méthode de Ritz, M.V.R (avec conduction).
- Modèle variationnel par la méthode de Ritz, M.V.R (sans conduction).
- Modèle simplifié (M.S) où le nombre de Nusselt utilisé est $Nu=8.24$.

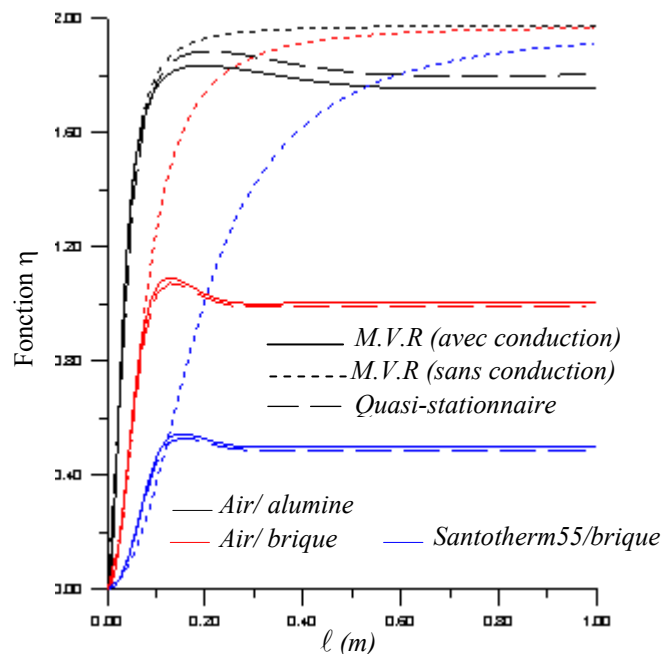


Fig. 7.3 : Fonction η ($\ell' = 10^{-2} m$).

On remarque que les résultats obtenus avec les trois modèles sont pratiquement confondus pour des faibles épaisseurs de plaque ℓ (pour des faibles β_s). Par ailleurs, pour des grandes épaisseurs de plaque, le modèle utilisant l'hypothèse d'isothermicité M.V.R (sans conduction) s'éloigne du modèle quasi-stationnaire (M.S) et du modèle M.V.R (avec conduction) qui marquent des extremums pour une épaisseur bien définie ℓ_{opt} . Autrement dit, l'efficacité du système est atteinte à partir de cette épaisseur (ℓ_{opt}) et l'effet de la conduction dans les plaques n'est plus négligeable pour des épaisseurs très grandes.

D'un autre côté, on remarque que la fonction η est importante pour l'air que pour le Santotherm55, et moins importante pour un conduit en brique qu'un conduit en alumine.

- **Influence de la surface d'échange :**

En fixant la section d'écoulement (du conduit) la surface d'échange n'est fonction que de la longueur du conduit (L).

Les figures (7.4) et (7.5) montrent que l'augmentation de la longueur du conduit (L) augmente la qualité du filtrage.

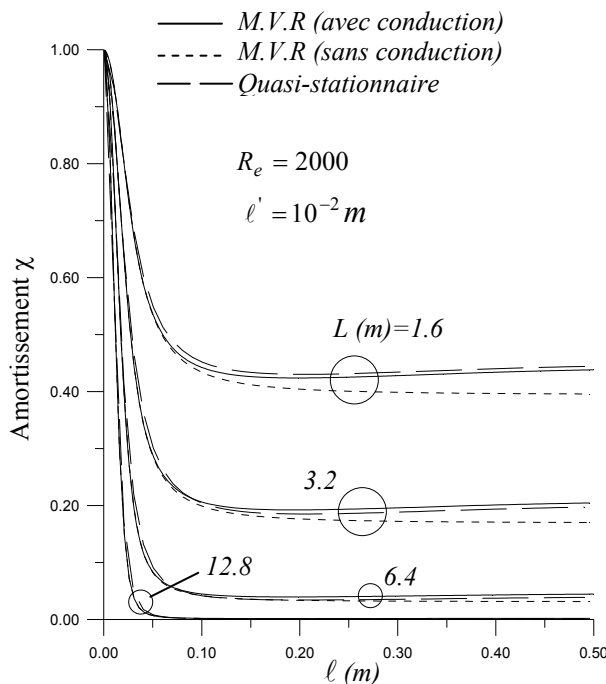


Fig. 7.4 : Fonction d'amortissement χ (air/alumine).

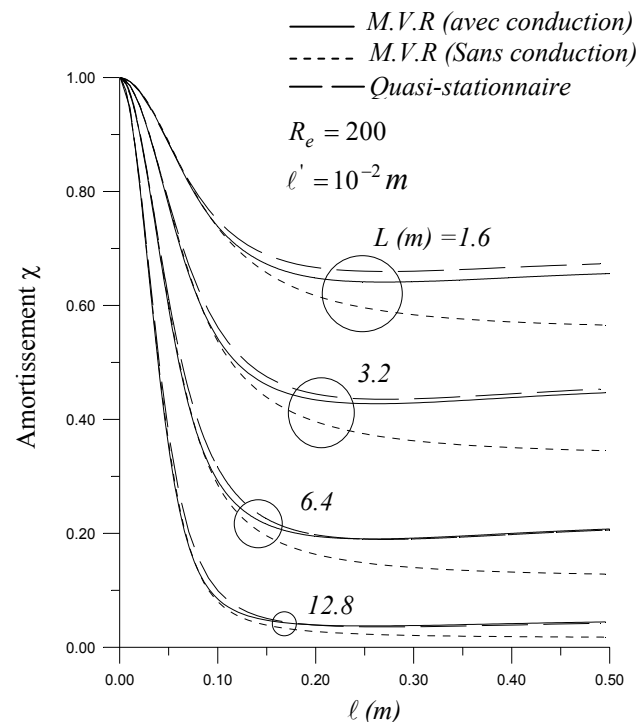


Fig. 7.5 : Fonction d'amortissement χ (santotherm55/alumine)

- **Influence de l'écartement entre plaques ℓ' :**

Les figures (7.6) et (7.7) montrent que la diminution de l'espacement entre plaques améliore le filtrage. Pour compléter les figures précédentes, nous présentons dans les tableaux (7.2), (7.3), (7.4) et (7.5) les résultats d'optimisation pour différentes configurations.

Nous désignons par χ_m l'amortissement maximal correspondant à un système donné et par ℓ_{opt} l'épaisseur optimale des plaques.

On remarque que le filtrage est nettement amélioré pour un écoulement piston qu'un écoulement parabolique. Ajoutons que le modèle simplifié dans cette situation ($\tau = 24h$) permet un rapprochement considérable de la solution analytique.

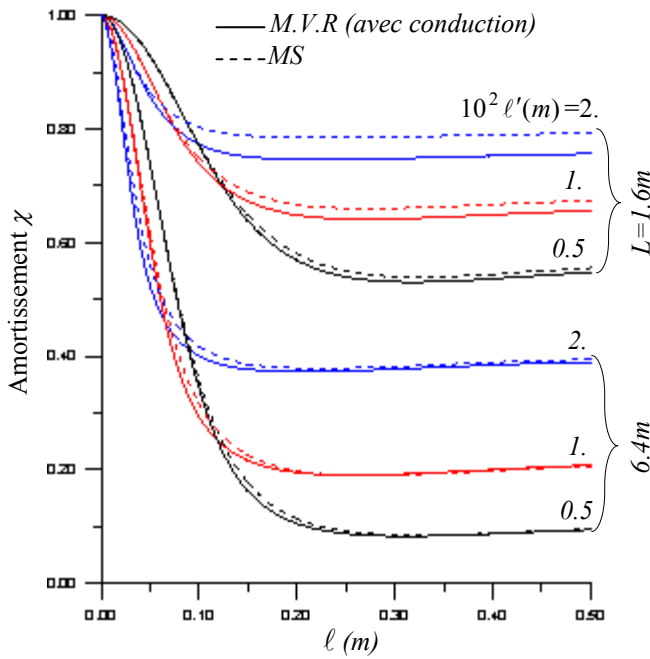


Fig. 7. 6 : Fonction d'amortissement χ (santotherm55/alumine).

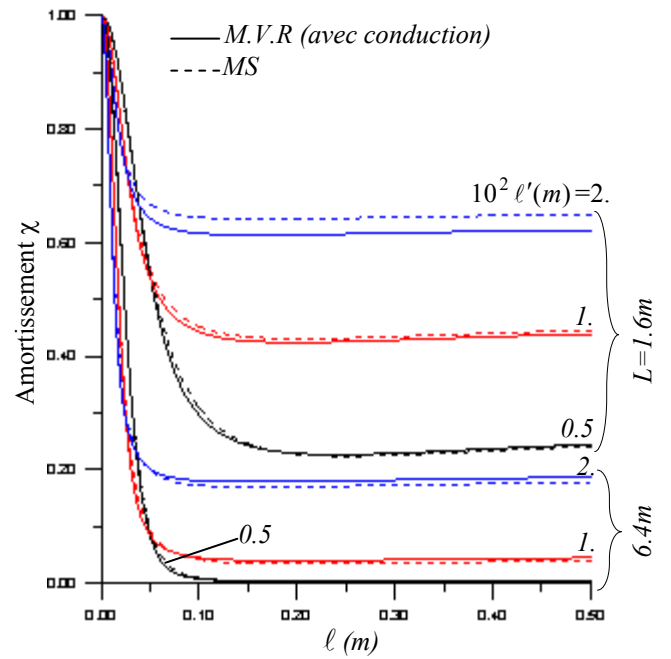


Fig. 7. 7 : Fonction d'amortissement χ (air/alumine).

Tableau. 7. 2 : Amortissement optimal du système (santotherm55/alumine).

<i>Santotherm55/alumine</i>							
	<i>L(m)</i>	<i>1.6</i>			<i>6.4</i>		
	$10^2 \ell' (m)$	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>M.V.R (avec conduction) vitesse parabolique</i>	χ_m	0.53024	0.64103	0.74555	8.27528E-02	0.19019	0.37237
	$\ell_{opt} (m)$	0.3175	0.267	0.2215	0.3105	0.2565	0.2045
<i>M.V.R (avec conduction) vitesse uniforme</i>	χ_m	0.47633	0.55646	0.65016	5.67312E-02	0.12484	0.26675
	$\ell_{opt} (m)$	0.341	0.291	0.246	0.331	0.276	0.221
<i>Modèle simplifié</i>	χ_m	0.53911	0.65979	0.78424	8.44735E-02	0.1895	0.37827
	$\ell_{opt} (m)$	0.323	0.271	0.221	0.323	0.2715	0.221

Tableau. 7. 3 : Amortissement optimal du système (santotherm55/brique).

<i>Santotherm55/brique</i>							
	<i>L(m)</i>	<i>1.6</i>			<i>6.4</i>		
	$10^2 \ell' (m)$	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>M.V.R (avec conduction) vitesse parabolique</i>	χ_m	0.85949	0.86416	0.87395	0.54603	0.55989	0.59602
	$\ell_{opt} (m)$	0.1645	0.154	0.14	0.164	0.152	0.133
<i>M.V.R (avec conduction) vitesse uniforme</i>	χ_m	0.85842	0.86053	0.865	0.54358	0.55197	0.57514
	$\ell_{opt} (m)$	0.171	0.161	0.156	0.166	0.161	0.146
<i>Modèle simplifié</i>	χ_m	0.86069	0.86807	0.88545	0.54878	0.56782	0.61468
	$\ell_{opt} (m)$	0.164	0.154	0.138	0.164	0.154	0.1385

Tableau. 7. 4 : Amortissement optimal du système (air/alumine).

<i>Air/alumine</i>							
	<i>L(m)</i>	<i>1.6</i>			<i>6.4</i>		
	$10^2 \ell' (m)$	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>M.V.R (avec conduction) vitesse parabolique</i>	χ_m	0.22651	0.42391	0.61319	3.0515E-03	3.9575E-02	0.17838
	$\ell_{opt} (m)$	0.241	0.1975	0.1615	0.236	0.191	0.154
<i>M.V.R (avec conduction) vitesse uniforme</i>	χ_m	0.14724	0.30712	0.48537	6.5901E-04	1.4535E-02	9.7652E-02
	$\ell_{opt} (m)$	0.251	0.206	0.171	0.246	0.196	0.156
<i>Modèle simplifié</i>	χ_m	0.2237	0.43036	0.64135	2.50402E-03	3.4303E-02	0.1692
	$\ell_{opt} (m)$	0.2525	0.2045	0.164	0.2525	0.2045	0.1635

Tableau. 7. 5 : Amortissement optimal du système (air/brique).

<i>Air/brique</i>							
	<i>L(m)</i>	<i>1.6</i>			<i>6.4</i>		
	$10^2 \ell' (m)$	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>M.V.R (avec conduction) vitesse parabolique</i>	χ_m	0.55119	0.6101	0.69741	9.2993E-02	0.14361	0.26257
	$\ell_{opt} (m)$	0.148	0.1305	0.1125	0.147	0.1275	0.107
<i>M.V.R (avec conduction) vitesse uniforme</i>	χ_m	0.53289	0.56596	0.62419	8.1841E-02	0.11048	0.18885
	$\ell_{opt} (m)$	0.156	0.141	0.121	0.156	0.136	0.111
<i>Modèle simplifié</i>	χ_m	0.55613	0.61872	0.71628	9.5659E-02	0.14654	0.26324
	$\ell_{opt} (m)$	0.1485	0.1315	0.111	0.1485	0.1315	0.111

b. Etude du déphasage :

Sur la figure (7.8), nous avons représenté la fonction de déphasage ϕ_m en fonction de l'épaisseur de plaque ℓ pour le système (santotherm55/alumine), pour deux valeurs de L et des écartements entre plaques différents. On remarque que le déphasage passe par un maximum ϕ_m en général un peu plus élevé pour le modèle M.V.R (avec conduction) que pour le modèle simplifié (M.S).

D'une autre manière, nous représentons dans les tableaux (7.6), (7.7), (7.8) et (7.9), les valeurs maximales enregistrées pour le déphasage à la sortie du conduit et les épaisseurs des plaques correspondantes. Notons que l'épaisseur optimale ℓ_{opt} des plaques correspondante au déphasage maximal est inférieure à celle enregistrée pour l'amortissement (cf. tableau 7.2, 7.3, 7.4 et 7.5).

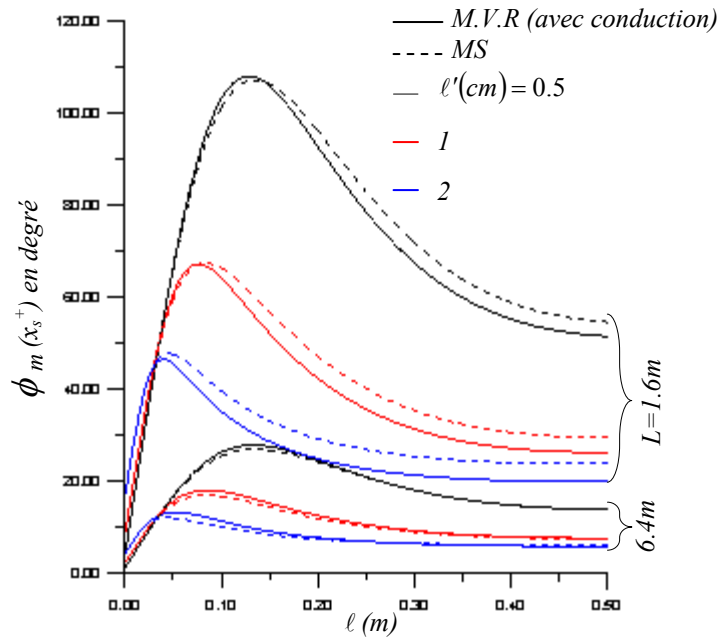


Fig. 9. 8 : Fonction du déphasage ϕ_m (santotherm55/alumine).

Tableau. 7. 6 : Déphasage optimal du système (santotherm55/alumine).

<i>Santotherm55/alumine</i>							
<i>L(m)</i>		<i>1.6</i>			<i>6.4</i>		
$10^2 \ell' (m)$		<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse parabolique</i>	ϕ_m	27.72300	17.88978	13.05925	108.0056	67.12845	46.37863
	$\ell_{opt} (m)$	0.1325	8.5E-02	5.3E-02	0.1285	7.6E-02	3.95E-02
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse uniforme</i>	ϕ_m	35.76533	26.28902	20.31820	134.9874	89.94653	63.51778
	$\ell_{opt} (m)$	0.161	0.111	8.1E-02	0.156	0.101	6.1E-02
<i>Modèle simplifié</i>	ϕ_m	26.79835	16.83600	11.89491	107.1934	67.34401	47.57963
	$\ell_{opt} (m)$	0.135	8.35E-02	4.55E-02	0.135	8.35E-02	4.55E-02

Tableau. 7. 7 : Déphasage optimal du système (santotherm55/brique).

<i>Santotherm55/brique</i>							
<i>L(m)</i>		<i>1.6</i>			<i>6.4</i>		
$10^2 \ell' (m)$		<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse parabolique</i>	ϕ_m	10.30121	9.972846	10.13665	40.97893	39.15670	38.58585
	$\ell_{opt} (m)$	9.3E-02	8.25E-02	6.8E-02	9.25E-02	8.1E-02	6.15E-02
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse uniforme</i>	ϕ_m	10.88796	11.13978	12.19567	43.08957	43.00192	45.10684
	$\ell_{opt} (m)$	9.6E-02	9.1E-02	8.1E-02	9.6E-02	8.6E-02	7.6E-02
<i>Modèle simplifié</i>	ϕ_m	10.19055	9.74608	9.767880	40.76219	38.98431	39.07152
	$\ell_{opt} (m)$	9.25E-02	8.15E-02	6.45E-02	9.25E-02	8.15E-02	6.45E-02

Tableau. 7. 8 : Déphasage optimal du système (air/alumine).

<i>Air/alumine</i>							
<i>L(m)</i>		<i>1.6</i>			<i>6.4</i>		
$10^2 \ell' (m)$		<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse parabolique</i>	ϕ_m	51.52407	27.30908	14.81073	201.6649	104.1164	53.27761
	$\ell_{opt} (m)$	6.25E-02	3.4E-02	1.95E-02	6.05E-02	3.15E-02	1.65E-02
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse uniforme</i>	ϕ_m	71.89864	40.90046	24.19136	272.5506	145.1147	76.35210
	$\ell_{opt} (m)$	8.1E-02	4.6E-02	2.6E-02	7.6E-02	4.1E-02	2.1E-02
<i>Modèle simplifié</i>	ϕ_m	50.70751	26.12248	13.16959	202.8300	104.4899	52.67836
	$\ell_{opt} (m)$	6.8E-02	3.6E-02	1.8E-02	6.8E-02	3.6E-02	1.8E-02

Tableau. 7. 9 : Déphasage optimal du système (air/brique).

<i>Air/brique</i>							
<i>L(m)</i>		<i>1.6</i>			<i>6.4</i>		
$10^2 \ell' (m)$		<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse parabolique</i>	ϕ_m	30.76978	21.67752	13.53463	121.9214	84.18971	49.66439
	$\ell_{opt} (m)$	7.6E-02	5.75E-02	3.9E-02	7.55E-02	5.55E-02	3.45E-02
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse uniforme</i>	ϕ_m	35.14465	27.71474	20.12951	138.0451	103.9985	67.31813
	$\ell_{opt} (m)$	8.6E-02	7.1E-02	5.1E-02	8.11E-02	6.6E-02	4.6E-02
<i>Modèle simplifié</i>	ϕ_m	30.08042	20.71851	12.17672	120.3217	82.87404	48.70690
	$\ell_{opt} (m)$	7.6E-02	5.75E-02	3.65E-02	7.6E-02	5.75E-02	3.65E-02

c. Etude comparative entre le modèle simplifié et le modèle variationnel (M.V.R) :

Les résultats présentés précédemment ont été obtenus pour une période $\tau = 24h$, où le modèle simplifié (M.S) peut approcher le modèle M.V.R (avec conduction) dans certaines situations (faibles épaisseurs des plaques et/ou grandes longueurs du canal). Mais pour des périodes inférieures, on ne sait pas si les deux modèles se rapprochent. En effet, nous utilisons une configuration optimale du filtrage pour le système santotherm55/alumine avec $\ell' = 1cm$ et $L=6.4m$, les figures (7.9) et (7.10) montrent que le modèle simplifié ne peut approcher le modèle analytique que pour des périodes importantes, à savoir $\tau = 62h$ pour le déphasage et à $\tau = 20h$ pour l'amortissement.

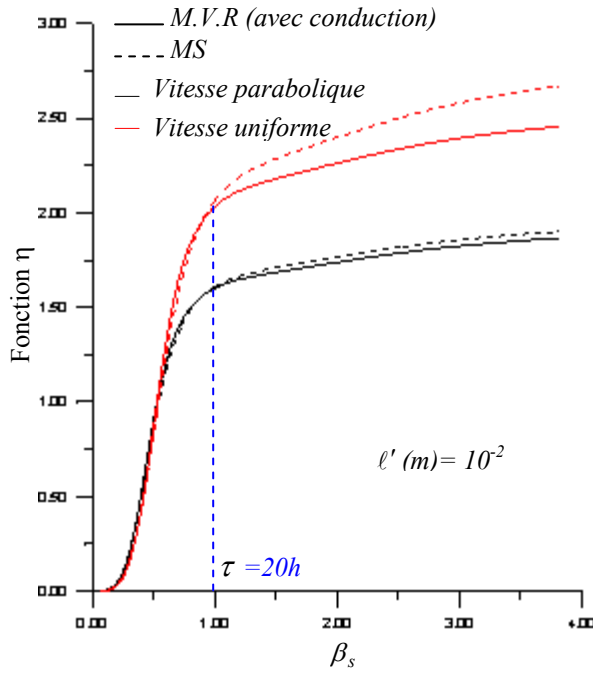


Fig. 7. 9 : Fonction η pour le système (santotherm55/alumine)

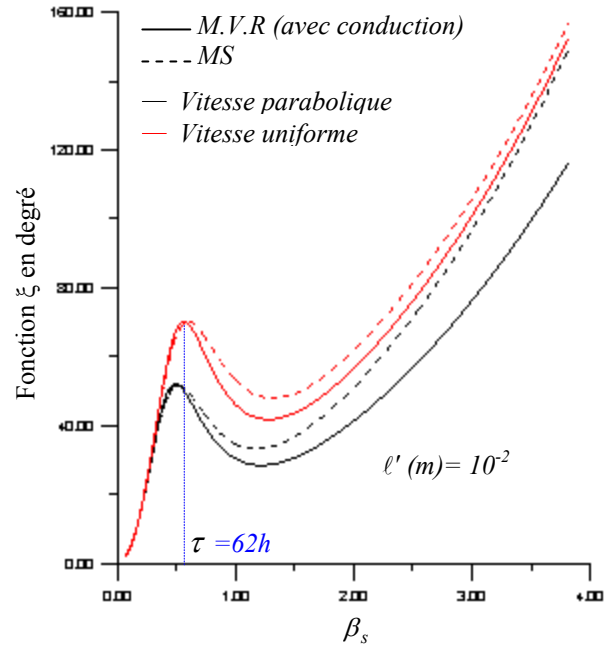


Fig. 7. 10 : Fonction ξ pour le système (santotherm55/alumine)

7.4.2. Le stockage :

Nous avons représenté sur la figure (7.11) la fonction de stockage f_s , dans le cas du couple santotherm55/alumine et pour un nombre de Reynolds $R_e = 200$, qui correspond à un nombre de Peclet $P_e = 2402$. Dans les mêmes conditions que le filtrage (cf. Fig.7.6), nous avons tracé ces courbes pour différentes surfaces d'échanges (L) et différents espacements entre plaques (ℓ').

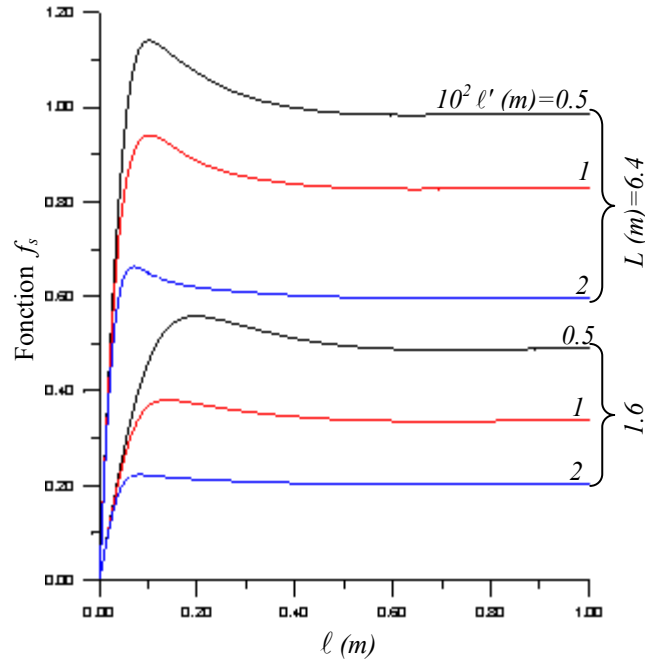


Fig. 7. 11 : Fonction de stockage f_s (santotherm55/alumine)

On remarque que le stockage (f_s) est important pour une grande surface d'échange (L) et petit espacement entre plaques (ℓ'). Pour une épaisseur de plaques (ℓ_{opt}), jugée optimale, cette fonction passe par un maximum f_{sm} (pouvant dépasser 1).

En comparaison avec le filtrage optimal, on constate bien la distinction qui doit être faite entre les deux notions filtrage/stockage. Il ne reste donc, qu'à améliorer le filtrage en même temps que le stockage augmente.

Pour établir une étude comparative entre deux modules de stockage utilisant différents fluides caloporteurs, on devrait choisir une même quantité d'enthalpie à l'entrée du conduit pour les deux systèmes. En effet, si on utilise pour le premier module le santotherm55 avec un nombre de Peclet $P_e = 2402$, nous devons choisir $P_e = 6182$ pour l'air. A cet égard, les résultats des essais effectués dans ces conditions sont portés par les tableaux (7.10), (7.11), (7.12) et (7.13), où f_{sm} représente la fonction de stockage optimal et ℓ_{opt} l'épaisseur optimale des plaques.

Tableau. 7. 10 : Stockage optimal du système (santotherm55/alumine).

	<i>Santotherm55/alumine.</i>						
	<i>L(m)</i>	<i>1.6</i>			<i>6.4</i>		
	$10^2 \ell' (m)$	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse parabolique</i>	f_{sm}	0.55776	0.38076	0.22260	1.14048	0.94090	0.66220
	$\ell_{opt} (m)$	0.197	0.138	8.25E-02	0.101	0.104	6.95E-02
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse uniforme</i>	f_{sm}	0.61866	0.4905	0.37228	1.20787	0.98563	0.75305
	$\ell_{opt} (m)$	0.214	0.189	0.163	9.3E-02	9.9E-02	9.7E-02
<i>Modèle simplifié</i>	f_{sm}	0.51858	0.3605	0.2212	1.090786	0.86379	0.63274
	$\ell_{opt} (m)$	0.217	0.196	0.167	9.5E-02	0.109	0.143

Tableau. 7. 11 : Stockage optimal du système (santotherm55/brique).

	<i>Santotherm55/brique</i>						
	<i>L (m)</i>	<i>1.6</i>			<i>6.4</i>		
	$10^2 \ell' (m)$	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse parabolique</i>	f_{sm}	0.19187	0.17324	0.14197	0.62589	0.56655	0.47148
	$\ell_{opt} (m)$	0.1215	0.1145	0.1005	0.107	0.1035	9.4E-02
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse uniforme</i>	f_{sm}	0.19733	0.186353	0.17146	0.63922	0.59047	0.51486
	$\ell_{opt} (m)$	0.123	0.119	0.115	0.107	0.103	9.7E-02
<i>Modèle simplifié</i>	f_{sm}	0.18766	0.16619	0.13334	0.61405	0.54666	0.44645
	$\ell_{opt} (m)$	0.121	0.114	0.105	0.106	0.102	9.6E-02

Tableau. 7. 12 : Stockage optimal du système (air/alumine).

	<i>air/alumine</i>						
	<i>L (m)</i>	<i>1.6</i>			<i>6.4</i>		
	$10^2 \ell' (m)$	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>0.5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>vitesse parabolique</i>	f_{sm}	0.31865	0.17936	9.454E-2	0.86211	0.5743	0.33577
	$\ell_{opt} (m)$	0.115	6.55E-02	3.5E-02	8.9E-02	5.5E-02	3.1E-02
<i>M.V.R (avec conduction)</i> <i>Vitesse uniforme</i>	f_{sm}	0.44676	0.3373	0.10542	0.92094	0.69764	0.51458
	$\ell_{opt} (m)$	0.177	0.155	3.1E-02	9. E-02	9. 1E-02	0.111
<i>Modèle simplifié</i>	f_{sm}	0.30604	0.18065	9.85E-02	0.79024	0.55289	0.33989
	$\ell_{opt} (m)$	0.186	0.156	0.128	0.118	0.133	0.119

Tableau. 7. 13 : Stockage optimal du système (air/brique).

	air/brique						
	L (m)	1.6			6.4		
	10 ² ℓ' (m)	0.5	1	2	0.5	1	2
M.V.R (avec conduction) vitesse parabolique	f _{sm}	0.16385	0.12782	8.35E-02	0.54434	0.43887	0.30124
	ℓ _{opt} (m)	0.11	9.2E-02	6.5E-02	0.1	8.55E-02	6.2E-02
M.V.R (avec conduction) vitesse uniforme	f _{sm}	0.18163	0.16564	0.14612	0.57287	0.49405	0.40245
	ℓ _{opt} (m)	0.118	0.112	0.103	0.101	9.4E-02	8.4E-02
Modèle simplifié	f _{sm}	0.1556	0.11923	7.93E-02	0.51832	0.40884	0.28411
	ℓ _{opt} (m)	0.111	0.1	8.6E-02	0.1	9.2E-02	8.2E-02

A partir de ces résultats, on constate que le stockage est plus important pour un système utilisant le santotherm55 que l'air. Il est plus important pour un conduit en alumine qu'avec un conduit en brique. D'un autre côté, ce dernier est nettement amélioré lorsque le régime dynamique est uniforme.

7.5.Conclusion :

A l'échelle industrielle, les résultats de cette étude montrent de manière claire les limitations qu'apportent les transferts conducto-convectifs et la durée limitée du cycle stockage-déstockage. Au début, nous avons démontré la possibilité d'atténuer considérablement les fluctuations de température du fluide caloporteur. Il s'est avéré, dans un système donné, que la performance de filtrage dépend de l'épaisseur des plaques (ℓ), l'écartement entre plaques (ℓ') et la longueur du conduit (L). En fin, nous avons précisé le rôle fondamental que joue l'épaisseur des plaques dans le stockage par chaleur sensible et son incidence sur l'optimisation de l'énergie stockée.

CONCLUSION GENERALE

Dans le chapitre 1, nous avons présenté dans la partie bibliographique l'ensemble des travaux effectués sur le sujet de convection forcée d'un écoulement fluide incompressible dans un conduit. Ces travaux sont respectivement selon que les conditions transitoires sont imposées à la paroi ou à l'entrée du conduit.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté le problème de référence à savoir un conduit à deux plans parallèles, parcouru par un fluide incompressible en écoulement laminaire avec une vitesse uniforme. La température du fluide à l'entrée du canal varie de façon sinusoïdale. Les parois extérieures sont soumises à une condition de troisième type, à flux imposé ou à température imposée. Les équations régissant le problème sont résolues analytiquement, par la technique de la transformation intégrale généralisée.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté une nouvelle méthodologie de résolution par une méthode variationnelle de Ritz, de ce problème dans le cas d'un écoulement parabolique (physiquement plus réaliste). Les résultats issus de cette analyse, pour un écoulement piston, sont également recherchés et confrontés à ceux de la solution exacte de référence et la comparaison révèle une très grande satisfaction. Les résultats dans le cas d'un profil de vitesse parabolique montrent des écarts remarquables en comparaison avec ceux d'un écoulement piston. Une confrontation des résultats avec la référence [17] est établie dans le cas d'une paroi mince dont la comparaison est très satisfaisante.

La méthode de Ritz est encore utilisée, dans le chapitre 4, pour le cas d'un tube cylindrique. De point de vue physique, les résultats obtenus pour les amplitudes et les déphasages de la température montrent de grandes différences en comparaison avec un conduit à deux plans parallèles.

Une approche numérique par la méthode des volumes finis, utilisée pour la première fois dans ce type de problème, est développée dans le chapitre 5. Le système d'équation est résolu par un schéma implicite pour la direction axiale (x^+) et un schéma de discrétisation par différences centrées pour la direction transversale du conduit. La distribution des températures est calculée par progression suivant la direction axiale, partant d'un profile transversal connu

dans la section d'entrée du canal. Le modèle numérique est validé par rapport au problème de référence. La comparaison révèle une très grande satisfaction sur le plan de précision.

Dans le chapitre 6, une approche de ce problème est effectuée à partir d'un modèle simple introduisant un coefficient d'échange à l'interface fluide-paroi. Les résultats montrent que ce modèle dit quasi-stationnaire peut approcher les modèles analytiques complets sous certaines conditions.

En effet, le coefficient d'échange varie périodiquement avec le temp. Il faudrait donc disposer de corrélations liant le coefficient d'échange au temps et aux autres paramètres du fluide et du solide. Ce modèle peut approcher les modèles complets dans le cas de très basses fréquences, ce qui correspond au régime quasi-permanent.

De point de vue physique, les conclusions tirées à partir des résultats présentés dans les chapitres précités peuvent être résumées par les points suivants :

- Pour des fréquences d'entrée fixes, l'effet de la conduction transversale est affirmé pour des grandes valeurs du paramètre β_s (grandes épaisseurs des parois solides).
- L'effet du nombre de Biot dans l'amplitude des températures est affirmé pour des grandes valeurs de paramètre a^+ (petite capacité thermique de la paroi).
- L'hypothèse d'isothermicité, souvent utilisée, est contestée. Elle n'est plus retenue pour des grandes épaisseurs ou pour des petites capacités thermiques de paroi.

Dans le chapitre 7, nous avons traité un cas pratique. Une optimisation simultanée du filtrage et du stockage de l'énergie est réalisée dans le cas d'un régénérateur à plaques.

REFERENCES

- [1] **L. GRAETZ** : Über Die Wärmeleitungsfähigkeit Von Flüssigkeiten, Part1. Annalen Der Physik Und Chemie, 1883,18, 79-94 part2, 1885, 25, 337-357.
- [2] **H. KAWAMURA** : Transient Turbulent Heat Transfer In Annulus Part 1: Heating Element With A Finite (Nonzero) Heat Capacity And Non Thermal Resistance. Trans.ASME, pp. 2160-2193, 1973.
- [3] **P. PIERSON ET J. PADET** : Evaluation Des Transferts Thermo Convectifs En Régime Instationnaire, Approche Théorique Et Expérimentale. Revue Générale de Thermique, N° 287, pp. 781-788, 1985.
- [4] **R. SIEGEL AND M. PERLMUTTER** : Laminar Heat Transfer In A Channel With Unsteady Flow And Wall Heating Varying With Position And Time. Trans. ASME. J. Heat Transfer 85C, pp. 358-365, 1963.
- [5] **R. SIEGEL AND E. M. SPARROW** : Transient Heat Transfer For Laminar Forced Convection In The Thermal Entrance Region Of Flat Ducts. Trans. ASME. J. Heat Transfer 81C, pp. 29-36, 1959.
- [6] **M. PERLMUTTER AND R. SIEGEL** : Tow Dimensional Unsteady Incompressible Laminar Duct Flow With A Step Change In Wall Temperature. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 3, pp. 64-107, Great Britain 1961.
- [7] **R. M. COTTA AND M. N. OZISIK** : Transient Forced Convection Channel Flow With Stepwise Variation Of Wall Temperature. The Can. J. Chem. Engng, Vol. 64, pp. 734-742, 1986.
- [8] **T. F. LIN AND J. C. KUO** : Transient Conjugated Heat Transfer In Fully Developed Laminar Pipe Flows. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, N° 5, pp. 1093-1102, 1988.
- [9] **S. ABOUDI ET F. PAPINI** : Etude Numérique Du Transfert Thermique Métal Fluide Dans Conduit Rectangulaire En Régime Instationnaire. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 33, N° 9, pp. 1909-1990, 1989.
- [10] **H. KAWAMURA** : Transient Hydraulics And Heat Transfer In Turbulent Flow. Nuclear Technology, Vol. 30, 1976.
- [11] **H. KAWAMURA** : Experimental And Analytical Study Of Transient Heat Transfer For Turbulent Flow In A Circular Tube. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 20, pp. 443-450, 1977.
- [12] **DAVID T. W. LIN, WEI-MON YAN AND HUNG-YI LI B** : Inverse Problem Of Unsteady Conjugated Forced Convection In Parallel Plate Channels. Int. J. Heat and Mass Transfer, In press, 2007.
- [13] **E. M. SPARROW AND F. N. DEFARIAS** : Unsteady Heat Transfer In Ducts With Time Varying Inlet Temperature And Participating Walls. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 11, pp. 837-853, Great Britain 1968.

- [14] **S. KAKAÇ AND Y. YENER** : Exact Solution Of The Transient Forced Convection Energy Equation For Time Wise Variation Of Inlet Temperature.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 16, pp. 2205-2214, Great Britain 1973.
- [15] **R. M. COTTA AND M. N. OZISIK** : Laminar Forced Convection Inside Ducts With Periodic Variation Of Inlet Temperature.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 29, N° 10, pp. 1495-1501, Great Britain 1986.
- [16] **W. S. KIM, R. M. COTTA AND M. N. OZISIK** : Laminar Internal Forced Convection With Periodically Varying Arbitrarily Shaped Inlet Temperature (1990).
- [17] **W.S. KIM AND M.N. OZISIK**: Conjugated Laminar Forced Convection In Ducts With Periodic Variation Of Inlet Temperature.
Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 11, N° 4, pp. 311-320, 1990.
- [18] **S. KAKAÇ, W. LI AND R. M. COTTA** : Unsteady Laminar Forced Convection In Ducts With Periodic Variation Of Inlet Temperature.
Int. J. Heat Transfer, Vol. 112, pp. 913-920, 1990.
- [19] **W. LI AND S. KAKAÇ** : Unsteady Thermal Entrance Heat Transfer In Laminar Flow With A Periodic Variation Of Inlet Temperature.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34, N° 10, pp. 2581-2592, Great Britain 1991.
- [20] **R. O. C. GUÈDES AND R. M. COTTA** : Periodic Laminar Forced Convection Within Ducts Including Wall Heat Conduction Effects.
Int. J. Engng. Sci, Vol. 29, N° 5, pp. 535-547, Great Britain 1991.
- [21] **J. S. TRAVELHO AND W. F. N. SANTOS** : Solution For Transient Conjugated Forced Convection In The Thermal Entrance Region Of Duct With Periodically Varying Inlet Temperature.
Trans. ASME. J. Heat Transfer, Vol. 113, pp. 558-562, 1991.
- [22] **K. MANSOURI ET B. FOURCHER** : Réponse A Un Signal Thermique Sinusoïdal Dans Le Cas D'un Ecoulement Laminaire A Plan Directeur.
Int. Comm. Heat and Mass Transfer, Vol. 22, N° 22, pp. 305-315, USA 1995.
- [23] **K. MANSOURI** : Thèse De Doctorat E.D. Sciences Pour l'Ingénieur Université De Nantes. France 1995.
- [24] **J. S. TRAVELHO AND W. F. N. SANTOS** : Unsteady Conjugated Heat Transfer In A Circular Duct With Convection From The Ambient And Periodically Varying Inlet Temperature.
Trans. ASME. J. Heat Transfer, Vol. 120, pp. 506-510, 1998.
- [25] **B. FOURCHER AND K. MANSOURI** : An Approximate Analytical Solution To The Graetz Problem With Periodic Inlet Temperature.
Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 18, pp. 229-235, New York 1997.
- [26] **S. CHEROTO, M. D. MIKHAILOV, S. KAKAÇ AND R. M. COTTA** : Periodic Laminar Forced Convection: Solution Via Symbolic Computation And Integral Transforms.
Int. J. Therm. Sci, Vol. 38, pp. 613-621, Paris 1999.

- [27] **W. S. KIM AND M. N. OZISIK** : Turbulent Forced Convection Inside A Parallel Plate Channel With Periodic Variation Of Inlet Temperature.
Trans. ASME. J. Heat Transfer, Vol. 111, pp. 882-888, 1989.
- [28] **R. O. C. GUEDES, M. N. OZISIK AND R. M. COTTA** : Conjugated Periodic Turbulent Forced Convection In A Parallel Plate Channel.
Trans. ASME. J. Heat Transfer, Vol. 116, pp. 40-46, 1994.
- [29] **SADIK. KAKAÇ AND WEIGONG. LI** : Unsteady Turbulent Forced Convection In A Parallel Plate Channel With Time Wise Variation Of Inlet Temperature.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 37, pp. 447-456, Great Britain 1994.
- [30] **S. KAKAÇ, Y. DING AND W. LI** : Experimental Study Of Unsteady Laminar Forced Convection In Ducts For Time Wise Varying Inlet Temperature.
Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics.
R.K. Shah, E.N. Ganiç and K.T. Yang Editors, pp. 1177-1183, 1988.
- [31] **K. MANSOURI, D. SADAoui AND B. FOURCHER** : The Effects Of Inlet Temperature Frequency On The Quasi-Steady Approach Of Periodic Conjugated Heat Transfer Problem.
Int. J. Engng Sci, Vol. 42, pp. 825-839, 2004.
- [32] **YEHUDA. TAILEL AND ABRAHAM. TAMIR**: Application Of The Integral Method To Flows With Axial Diffusion.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 733-740, 1972.
- [33] **R. M. COTTA** : On The Solution Of Periodic Multidimensional Diffusion Problems.
Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 16, pp. 569-579, USA 1989.
- [34] **M. D. MIKHAILOV AND R. M. COTTA** : Integral Transform Solution Of Eigenvalue Problems.
Int. Comm. Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, pp. 827-835, 1994.
- [35] **R. M. COTTA, M. D. MIKHAILOV AND M. N. OZISIK** : Transient Conjugated forced convection in ducts with periodically varying inlet temperature.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, N°10, pp. 2073-2082, Great Britain 1987.
- [36] **W. S. KIM, M. N. OZISIK AND M. D. MIKHAILOV** : On the Solution of a Complex eigenvalue Problem of Sturm-Liouville Type and Application to Periodic Internal Turbulent Flow.
J. The Franklin Inst, Vol. 328, N° 4, pp. 431-443, Great Britain 1991.
- [37] **M.N. OZISIK** : heat conduction.
John Wiley and Sons, Inc 1980.
- [38] **JOHN. H. LIENHARD IV. AND JOHN. H. LIENHARD V** : A heat transfer.
Textbook -3rd ed. Cambridge, MA. Phlogiston press, 2001.
- [39] **SUHAS. V. PATANKAR** : Numerical Heat Transfer And Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corporation. A Member Of Taylor & Francis group. New York. Washington. Philadelphia. London.
- [40] **R. S. SCHECHTER** : The Variational Methods In Engineering.
McGraw-Hill, New York 1964.

- [41] **J. P. BARDON, B. FOURCHER ET B. CASSAGNE** : Stockage Périodique Par Chaleur Sensible - Aspects Fondamentaux Lies A La Cinétique Des Transferts. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 22, pp. 229-236, Great Britain 1979.
- [42] **B. FOURCHER ET C. SAINT-BLANQUET** : Fonction De Transfert D'un Elément De Stockage Par Chaleur Sensible Fonctionnant En Régime Périodique. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 23, pp. 1251-1262, Great Britain 1980.
- [43] **M. T. ACKER ET B. FOURCHER** : Analyse En Régime Thermique Périodique Du Couplage Conduction Convection Entre Un Fluide En Ecoulement Laminaire Et Une Paroi De Stockage. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 24, N° 7, pp. 1201-1210, Great Britain 1981.
- [44] **B. BOUROUGA ET B. FOURCHER** : Comparaison Des Fonctions De Transfert D'un Stockage En Régime Périodique Pour Trois Géométries Fondamentales. Exemples D'optimisation. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 28, N° 8, pp. 1425-1439, Great Britain 1985.
- [45] **A. HADIOUCHE ET K. MANSOURI** : Etude Analytique En Régime Périodique D'un Ecoulement Laminaire Dans Un Conduit : Application Au Stockage De La Chaleur. Comple's'2K7. Cong. Int. Energie et Environnement, pp.155-160, ENSA-Agadir 2007.
- [46] **A. HADIOUCHE ET K. MANSOURI** : Etude Analytique Et Simulation Numérique D'un Ecoulement Laminaire En Régime Périodique. Conf. Int. Energies Renouvelables (ICRE'07), Bejaia 2007.

ANNEXE (1)

Formulation variationnelle et résolutions (méthode de Ritz)

1.1. Concepts de base :

Le problème majeur des méthodes variationnelles est de trouver les fonctions de base correspondant aux problèmes physiques posés, voir [40]. En s'appuyant sur la forme générale ci-dessous :

$$\bar{V}^2 T(r) + A(r)T(r) + \frac{1}{k} g(r) = 0 \quad (\text{A.1.1a})$$

$$\frac{\partial T}{\partial n_i} + H_i T = f_i(r_s), \quad (\text{A.1.1b})$$

avec $i = 1, 2, \dots, s$ est le nombre de conditions aux limites.

1.1.1. Méthode de calcul :

Première étape : Consiste à déterminer la forme variationnelle équivalente au problème (A.1.1). Pour notre cas, l'expression variationnelle correspondante est donnée par :

$$I = \int_R \left[(\nabla T)^2 - A(r)T^2 - \frac{2}{k} g(r)T \right] dv + \sum_{i=1}^s \int_{S_i} (H_i T^2 - 2f_i T) dS. \quad (\text{A.1.2})$$

Deuxième étape : Consiste à sélectionner une solution contenant un nombre de paramètres ajustables. Cette solution doit aussi satisfaire les conditions aux limites. Elle est donnée sous la forme :

$$\tilde{T}(r) = \psi_0(r) + \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(r). \quad (\text{A.1.3})$$

où $\psi_0(r)$ est introduite dans le cas où les conditions aux limites sont hétérogènes.

$\phi_j(r)$: dites fonctions de base, doivent satisfaire les conditions aux limites et sont des fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles... etc.

Troisième étape : A fin de choisir les fonctions de base, le problème se ramène à déterminer les coefficients c_j dont la solution est établie en posant :

$$\frac{\partial I(c_1, c_2, \dots, c_n)}{\partial c_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.1.4})$$

Cette procédure fait apparaître n équations pour la détermination des coefficients c_j , qui représentent ainsi la solution approximative du problème (A.1.1).

1.2.Applications :

1.2.1. Problème de Graetz classique en régime périodique :

Le système d'équations du problème de Graetz en extension périodique s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_f \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R_1, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (\text{A.1.5a})$$

$$T(0, r, t) = T_\infty + \Delta T \sin(\omega t), \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad t > 0 \quad (\text{A.1.5b})$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (\text{A.1.5c})$$

$$T|_{r=R_1} = T_\infty, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (\text{A.1.5d})$$

$m = 0$ pour un conduit à deux plans parallèles et $m = 1$ pour un tube cylindrique.

- **Adimensionnement du problème:**

Nous utilisons les paramètres adimensionnels ci-dessous :

$$x^+ = \frac{x \alpha_f}{\bar{u} R_1^2}; \quad r^+ = \frac{r}{R_1}; \quad t^+ = \frac{t \alpha_f}{R_1^2}; \quad \delta = \frac{\omega R_1^2}{\alpha_f}; \quad u^+(r^+) = \frac{u(r)}{\bar{u}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T},$$

et la forme complexe des températures :

$$\theta(x^+, r^+, t^+) = \tilde{\theta}(x^+, r^+) \exp(i \delta t^+). \quad (\text{A.1.6})$$

Le problème précédent devient, alors :

$$i \delta \tilde{\theta} + u^+(r^+) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x^+} = \frac{1}{r^{+m}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+m} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^+} \right), \quad 0 < r^+ < 1, \quad x^+ > 0 \quad (\text{A.1.7a})$$

$$\tilde{\theta}(0, r^+) = 1, \quad 0 \leq r^+ \leq 1 \quad (\text{A.1.7b})$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(x^+, r^+)}{\partial r^+} = 0, \quad \text{en } r^+ = 0, \quad x^+ > 0 \quad (\text{A.1.7c})$$

$$\tilde{\theta} = 0, \quad \text{en } r^+ = 1, \quad x^+ > 0. \quad (\text{A.1.7d})$$

Par l'utilisation de la transformée de Laplace $\tilde{\theta}(z^+, p) = \int_0^\infty \exp(-p x^+) \tilde{\theta}(x^+, z^+) dx^+$, le

problème à résoudre devient :

$$\frac{1}{r^{+m}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+m} \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^+} \right) = (i\delta + pu^+) \bar{\bar{\theta}} - u^+, \quad 0 < r^+ < 1 \quad (\text{A.1.8a})$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^+} \right|_{r^+=0} = 0 \quad (\text{A.1.8b})$$

$$\left. \bar{\bar{\theta}} \right|_{r^+=1} = 0. \quad (\text{A.1.8c})$$

• **Résolution par la méthode de Ritz :**

La forme variationnelle correspondante au problème (A.1.8), est donnée par :

$$I = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^+} \right)^2 + (i\delta + pu^+(r^+)) (\bar{\bar{\theta}})^2 - 2u^+(r^+) \bar{\bar{\theta}} \right] r^{+m} dr^+. \quad (\text{A.1.9})$$

La solution est approchée par :

$$\bar{\bar{\theta}}(r^+, p) = \sum_{n=1}^N c_n(p) \cos(\sigma_n r^+). \quad (\text{A.1.10})$$

σ_n : représentent les valeurs propres solution de l'équation transcendante $\cos(\sigma) = 0$, et déduite de la condition aux limites (A.1.8d). Leurs expressions sont données par :

$$\sigma_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad \text{où} \quad n=1, 2, \dots, N. \quad (\text{A.1.11})$$

Il nous reste donc à déterminer les coefficients $c_i(p)$, par la résolution du système :

$$\frac{\partial I(c_i)}{\partial c_i} = 0, \quad (\text{A.1.12})$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[A][c] = [b]. \quad (\text{A.1.I})$$

La matrice $[A]$ peut s'écrire :

$$[A] = [A^*] + p[D]. \quad (\text{A.1.13})$$

Son introduction dans le système (A.1.I), facilite la résolution et les coefficients

$c_i(p)$ recherchés sont donnés comme suit :

$$c_k = \frac{B_k}{p + \mu_k}, \quad (\text{A.1.14})$$

$$\text{avec : } B_k = b_j d_{kj}^{-1}. \quad (\text{A.1.15})$$

μ_k sont les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}_{kj} = a_{kj}^* d_{kj}^{-1}$ et les calculs sont effectuées numériquement à l'aide d'IMSL Library (1995). La matrice $\tilde{A}_{kj}$ peut être substituée par le vecteur μ_k de tels manière que :

$$\text{Det}(\tilde{A} - \mu.I) = 0.$$

A l'aide des tables d'inversion, le retour vers le repère original permet d'obtenir une solution particulière de genre :

$$\tilde{\theta}(x^+, z^+) = \sum_{n=1}^N B_n \cos(\sigma_n z^+) \exp(-\mu_n x^+). \quad (\text{A.1.16})$$

Les éléments du vecteur $[b]$ et des matrices $[A^*]$ et $[D]$ sont donnés comme suit :

• **Pour m=0 (deux plans parallèle) :**

$$b_k = 6 \frac{(-1)^k}{\sigma_k^3}.$$

$$a_{kk}^* = \sigma_k^2 + i\delta.$$

$$a_{kj(k \neq j)}^* = 0.$$

$$d_{kk} = 1 - \frac{3}{4} \frac{(-1)^k}{\sigma_k^2}.$$

$$d_{kj(k \neq j)} = -3 \left[\frac{\cos(\sigma_k - \sigma_j)}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} + \frac{\cos(\sigma_k + \sigma_j)}{(\sigma_k + \sigma_j)^2} \right].$$

• **Pour m=1 (tube cylindrique)**

$$b_k = 4 \left[6 \frac{(-1)^k}{\sigma_k^3} - \frac{6}{\sigma_k^4} - \frac{1}{\sigma_k^2} \right].$$

$$a_{kk}^* = \frac{\sigma_k^2}{2} \left[1 - \frac{(-1)^k - 1}{4\sigma_k^2} \right] + \frac{i\delta}{2} \left[1 + \frac{(-1)^k - 1}{4\sigma_k^2} \right].$$

$$a_{kj(k \neq j)}^* = \sigma_k \sigma_j \left[\frac{\cos(\sigma_k - \sigma_j) - 1}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} - \frac{\cos(\sigma_k + \sigma_j) - 1}{(\sigma_k + \sigma_j)^2} \right] + i\delta \left[\frac{\cos(\sigma_k - \sigma_j) - 1}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} + \frac{\cos(\sigma_k + \sigma_j) - 1}{(\sigma_k + \sigma_j)^2} \right]$$

$$d_{kk} = \frac{1}{2\sigma_k^2} \left[1 + 3 \frac{(-1)^k - 1}{2\sigma_k^2} - 2(-1)^k - 1 \right].$$

$$d_{kj(k \neq j)} = 2 \left[6 \frac{\cos(\sigma_k - \sigma_j) - 1}{(\sigma_k - \sigma_j)^4} - \frac{2 \cos(\sigma_k - \sigma_j) + 1}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} + 6 \frac{\cos(\sigma_k + \sigma_j) - 1}{(\sigma_k + \sigma_j)^4} - \frac{2 \cos(\sigma_k + \sigma_j) + 1}{(\sigma_k + \sigma_j)^2} \right]$$

1.2.2. Problème conjugué :

■ Ecoulement laminaire périodique dans un conduit à deux plaques parallèles :

Par l'introduction des paramètres adimensionnels et les températures complexes aussi bien dans la veine fluide que dans la paroi le problème à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial z^{+2}} = i\delta \tilde{\theta} + u^+(z^+) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x^+}, \quad 0 < z^+ < 1, \quad x^+ > 0 \quad (\text{A.1.17a})$$

$$\tilde{\theta}(0, z^+, t^+) = 1, \quad 0 \leq z^+ \leq 1 \quad (\text{A.1.17b})$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0, \quad x^+ > 0 \quad (\text{A.1.17c})$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} + \tilde{H} \tilde{\theta} \Big|_{z^+=1} = 0, \quad x^+ > 0. \quad (\text{A.1.17d})$$

En utilisant la transformation de Laplace $\bar{\tilde{\theta}}(z^+, p) = \int_0^\infty \exp(-px^+) \tilde{\theta}(x^+, z^+) dx^+$, le

problème (A.1.17) devient :

$$\frac{\partial^2 \bar{\tilde{\theta}}}{\partial z^{+2}} = (i\delta + u^+ p) \bar{\tilde{\theta}} - u^+, \quad 0 < z^+ < 1 \quad (\text{A.1.18a})$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\tilde{\theta}}}{\partial z^+} \right|_{z^+=0} = 0 \quad (\text{A.1.18b})$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\tilde{\theta}}}{\partial z^+} \right|_{z^+=1} + \tilde{H} \bar{\tilde{\theta}} \Big|_{z^+=1} = 0. \quad (\text{A.1.18c})$$

dont la forme variationnelle est donnée par:

$$I = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \bar{\tilde{\theta}}}{\partial z^+} \right)^2 + (i\delta + pu^+) (\bar{\tilde{\theta}})^2 - 2u^+ \bar{\tilde{\theta}} \right] dz^+ + \tilde{H} \bar{\tilde{\theta}}^2 \Big|_{z^+=1}. \quad (\text{A.1.19})$$

La solution approchée est donnée par :

$$\overline{\tilde{\theta}}(z^+, p) = \sum_{n=1}^N c_n(p) \cos(\sigma_n z^+). \quad (\text{A.1.20})$$

σ_n : représentent les valeurs propres solution de l'équation transcendante $\sigma \tan(\sigma) = \tilde{H}$, déduite de la condition aux limites (A.1.18c).

La résolution se poursuit de la même façon que dans la section précédente. Nous aboutissons aux expressions de vecteur $[b]$ et des matrices $[A^*]$ et $[D]$ suivantes :

- **Ecoulement piston :**

$$b_k = 2 \frac{\sin(\sigma_k)}{\sigma_k}.$$

$$a_{kk}^* = \sigma_k^2 \left(1 - \frac{\sin(2\sigma_k)}{2\sigma_k} \right) + i\delta \left(1 + \frac{\sin(2\sigma_k)}{2\sigma_k} \right).$$

$$a_{kj(k \neq j)}^* = \sigma_k \sigma_j \left(\frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{\sigma_k - \sigma_j} - \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{\sigma_k + \sigma_j} \right) + i\delta \left(\frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{\sigma_k - \sigma_j} + \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{\sigma_k + \sigma_j} \right) + 2\sigma_k \sin(\sigma_k) \cos(\sigma_j).$$

$$d_{kk} = \left(1 + \frac{\sin(2\sigma_k)}{2\sigma_k} \right) + 2\sigma_k \sin(\sigma_k) \cos(\sigma_k).$$

$$d_{kj(k \neq j)} = \left(\frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{\sigma_k - \sigma_j} + \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{\sigma_k + \sigma_j} \right) + 2\sigma_k \sin(\sigma_k) \cos(\sigma_j).$$

- **Ecoulement parabolique :**

$$b_k = 6 \left[\frac{\sin(\sigma_k)}{\sigma_k^3} - \frac{\cos(\sigma_k)}{\sigma_k^2} \right].$$

$$a_{kk}^* = \sigma_k^2 \left(1 - \frac{\sin(2\sigma_k)}{2\sigma_k} \right) + i\delta \left(1 + \frac{\sin(2\sigma_k)}{2\sigma_k} \right) + 2\sigma_k \sin(\sigma_k) \cos(\sigma_k).$$

$$a_{kj(k \neq j)}^* = \sigma_k \sigma_j \left(\frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{\sigma_k - \sigma_j} - \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{\sigma_k + \sigma_j} \right) + i\delta \left(\frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{\sigma_k - \sigma_j} + \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{\sigma_k + \sigma_j} \right) + 2\sigma_k \sin(\sigma_k) \cos(\sigma_j).$$

$$d_{kk} = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\sin(2\sigma_k)}{4\sigma_k^3} - \frac{\cos(2\sigma_k)}{2\sigma_k^2} \right).$$

$$d_{kj(k \neq j)} = 3 \left(\frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{(\sigma_k - \sigma_j)^3} + \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{(\sigma_k + \sigma_j)^3} - \frac{\cos(\sigma_k - \sigma_j)}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} - \frac{\cos(\sigma_k + \sigma_j)}{(\sigma_k + \sigma_j)^2} \right).$$

▪ **Ecoulement laminaire périodique dans un tube cylindrique.**

Le système à résoudre dans ce cas est donné par :

$$\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^+} \right) = (i\delta + pu^+) \bar{\bar{\theta}} - u^+, \quad 0 < r^+ < 1 \quad (\text{A.1.21a})$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^+} \right|_{r^+=0} = 0 \quad (\text{A.1.21b})$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^+} \right|_{r^+=1} = -\tilde{H} \bar{\bar{\theta}} \Big|_{r^+=1}, \quad (\text{A.1.21c})$$

dont la forme variationnelle est :

$$I = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^+} \right)^2 + (i\delta + pu^+) \bar{\bar{\theta}}^2 - 2u^+ \bar{\bar{\theta}} \right] r^+ dr^+ + \tilde{H} \bar{\bar{\theta}}^2 \Big|_{r^+=1}. \quad (\text{A.1.22})$$

La résolution du problème est conduite d'une façon similaire que précédemment.

Nous avons abouti aux résultats ci-dessous :

• **Ecoulement piston :**

$$b_k = 2 \left[\frac{\sin(\sigma_k)}{\sigma_k} + \frac{\cos(\sigma_k) - 1}{\sigma_k^2} \right].$$

$$a_{kk}^* = \frac{\sigma_k^2}{2} \left[1 - \frac{\sin(2\sigma_k)}{\sigma_k} - \frac{\cos(2\sigma_k) - 1}{2\sigma_k^2} \right] + i \frac{\delta}{2} \left[1 + \frac{\sin(2\sigma_k)}{\sigma_k} + \frac{\cos(2\sigma_k) - 1}{2\sigma_k^2} \right] + 2\sigma_k \sin(\sigma_k) \cos(\sigma_k)$$

$$a_{kj(k \neq j)}^* = \sigma_k \sigma_j \left[\frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{\sigma_k - \sigma_j} - \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{\sigma_k + \sigma_j} + \frac{\cos(\sigma_k - \sigma_j) - 1}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} - \frac{\cos(\sigma_k + \sigma_j) - 1}{(\sigma_k + \sigma_j)^2} \right] +$$

$$i\delta \left[\frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{\sigma_k - \sigma_j} + \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{\sigma_k + \sigma_j} + \frac{\cos(\sigma_k - \sigma_j) - 1}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} + \frac{\cos(\sigma_k + \sigma_j) - 1}{(\sigma_k + \sigma_j)^2} \right] + 2\sigma_k \sin(\sigma_k) \cos(\sigma_k).$$

$$d_{kk} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sin(2\sigma_k)}{\sigma_k} + \frac{\cos(2\sigma_k) - 1}{2\sigma_k^2} \right].$$

$$d_{kj(k \neq j)} = \frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{\sigma_k - \sigma_j} + \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{\sigma_k + \sigma_j} + \frac{\cos(\sigma_k - \sigma_j) - 1}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} + \frac{\cos(\sigma_k + \sigma_j) - 1}{(\sigma_k + \sigma_j)^2}.$$

• **Ecoulement parabolique :**

$$b_k = 4 \left[6 \frac{\sin(\sigma_k)}{\sigma_k^3} + 6 \frac{\cos(\sigma_k) - 1}{\sigma_k^4} - \frac{2 \cos(\sigma_k) + 1}{\sigma_k^2} \right].$$

$$a_{kk}^* = \frac{\sigma_k^2}{2} \left[1 - \frac{\sin(2\sigma_k)}{\sigma_k} - \frac{\cos(2\sigma_k) - 1}{2\sigma_k^2} \right] + i \frac{\delta}{2} \left[1 + \frac{\sin(2\sigma_k)}{\sigma_k} + \frac{\cos(2\sigma_k) - 1}{2\sigma_k^2} \right] + 2\sigma_k \sin(\sigma_k) \cos(\sigma_k)$$

$$a_{kj(k \neq j)}^* = \sigma_k \sigma_j \left[\frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{\sigma_k - \sigma_j} - \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{\sigma_k + \sigma_j} + \frac{\cos(\sigma_k - \sigma_j) - 1}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} - \frac{\cos(\sigma_k + \sigma_j) - 1}{(\sigma_k + \sigma_j)^2} \right] +$$

$$i \delta \left[\frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{\sigma_k - \sigma_j} + \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{\sigma_k + \sigma_j} + \frac{\cos(\sigma_k - \sigma_j) - 1}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} + \frac{\cos(\sigma_k + \sigma_j) - 1}{(\sigma_k + \sigma_j)^2} \right] + 2\sigma_k \sin(\sigma_k) \cos(\sigma_k).$$

$$d_{kk} = \frac{1}{2\sigma_k^2} \left[1 + 3 \frac{\sin(2\sigma_k)}{\sigma_k} + \frac{\cos(2\sigma_k) - 1}{2\sigma_k^2} - (2 \cos(2\sigma_k) + 1) \right].$$

$$d_{kj(k \neq j)} = \frac{2}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} \left[6 \frac{\sin(\sigma_k - \sigma_j)}{\sigma_k - \sigma_j} + 6 \frac{\cos(\sigma_k - \sigma_j) - 1}{(\sigma_k - \sigma_j)^2} - 2 \cos(\sigma_k - \sigma_j) - 1 \right] +$$

$$\frac{2}{(\sigma_k + \sigma_j)^2} \left[6 \frac{\sin(\sigma_k + \sigma_j)}{\sigma_k + \sigma_j} + 6 \frac{\cos(\sigma_k + \sigma_j) - 1}{(\sigma_k + \sigma_j)^2} - 2 \cos(\sigma_k + \sigma_j) - 1 \right].$$

ANNEXE (2)

Résolution de l'équation transcendante $\sigma \tan(\sigma) = \tilde{H}$:

2.1.Méthode de résolution :

Pour la résolution de l'équation transcendante (A.1.1), on dispose de divers outils mathématiques. Parmi les plus utilisées, les méthodes numériques. Nous, dans ce qui suit, nous utilisons la méthode de Newton.

$$\sigma \tan(\sigma) = \tilde{H} , \quad (\text{A.2.1a})$$

$$\text{où } \tilde{H} \text{ est un complexe, qui peut s'écrire : } \tilde{H} = R + i \text{Im} . \quad (\text{A.2.1b})$$

$$\text{On pose que : } \sigma = x + iy . \quad (\text{A.2.1c})$$

La séparation en partie réelle et partie imaginaire de l'équation (A.2.1) conduit au système couplé suivant :

$$\begin{cases} F(x, y) = x \sin(x) \operatorname{ch}(y) - y \operatorname{sh}(y) \cos(x) - R \cos(x) \operatorname{ch}(y) - \operatorname{Im} \operatorname{sh}(y) \sin(x) \\ G(x, y) = x \operatorname{sh}(y) \cos(x) + y \sin(x) \operatorname{ch}(y) + R \sin(x) \operatorname{sh}(y) - \operatorname{Im} \operatorname{ch}(y) \cos(x) \end{cases} \quad (\text{A.2.I})$$

F et G sont des fonctions continûment dérivables.

Soient x_n et y_n des solutions approchées de (A.2.I), tel que :

$$x = x_n + h_n, \quad y = y_n + k_n .$$

Alors :

$$\begin{cases} F(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \\ G(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2.II})$$

En appliquant le développement de Taylor, on obtient :

$$\begin{cases} F(x_n, y_n) + h_n F'_x(x_n, y_n) + k_n F'_y(x_n, y_n) = 0 \\ G(x_n, y_n) + h_n G'_x(x_n, y_n) + k_n G'_y(x_n, y_n) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2.III})$$

Si le Jacobien $J(x_n, y_n) \neq 0$, alors :

$$h_n = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}. \quad (\text{A.2.2a})$$

$$k_n = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix}. \quad (\text{A.2.2b})$$

Par conséquent,

$$x_{n+1} = x_n + h_n \quad (\text{A.2.3a})$$

$$y_{n+1} = y_n + k_n. \quad (\text{A.2.3b})$$

Un couple de solution (x, y) s'obtient rapidement par ce processus itératif, à condition de démarrer avec des valeurs approchées voisines des valeurs exactes (x, y) . Le processus est répété avec les nouvelles valeurs obtenues jusqu'à la précision souhaitée. Le teste d'arrêt choisi est généralement $|F(x_n, y_n)|$ et $|G(x_n, y_n)| \leq \varepsilon$.

ε est choisi aussi petit que possible.

2.2. Racines pour un conduit à deux plaques parallèles :

On calcul, pour r_{th} , β_s et Bi_{ext} donnés, les valeurs σ_n pour $n=1$ à 10.

- Avec conduction, où $\tilde{H} = r_{th} \frac{Bi_{ext} + \tilde{\beta}_s \tanh(\tilde{\beta}_s)}{1 + \frac{Bi_{ext} \tanh(\tilde{\beta}_s)}{\tilde{\beta}_s}}$ avec ($r_{th} = 50$, $Bi_{ext} = 0$ et $a^+ = 0.001$)

δ	1. E-03	2. E-03	1E-02	0.1
β_s	0.1	0.14	0.32	1
1	(0.8012795, 0.5669289)	(1.171839, 0.5733188)	(1.544389, 0.1546429)	(1.560465, 1.6786819E-02)
2	(3.178692, 0.3213360)	(3.318741, 0.6429802)	(4.611849, 0.4906958)	(4.681399, 5.0551772E-02)
3	(6.288465, 0.1604273)	(6.306025, 0.3269094)	(7.556626, 0.9062016)	(7.801853, 8.3998062E-02)
4	(9.426697, 0.1062545)	(9.432757, 0.2147453)	(10.14423, 1.189217)	(10.92222, 0.1176037)
5	(12.56741, 8.0025114E-02)	(12.57064, 0.1607737)	(12.81752, 0.9654579)	(14.04263, 0.1515355)
6	(15.70865, 6.3224211E-02)	(15.71074, 0.1282652)	(15.82283, 0.7258629)	(17.16202, 0.1850073)
7	(18.85007, 5.2628182E-02)	(18.85159, 0.1059006)	(18.91968, 0.5791478)	(20.28073, 0.2183492)
8	(21.99156, 4.5055643E-02)	(21.99276, 9.0661548E-02)	(22.04127, 0.4846411)	(23.39861, 0.2515135)
9	(25.13308, 3.9376594E-02)	(25.13407, 7.9246640E-02)	(25.17166, 0.4171204)	(26.51554, 0.2844301)
10	(28.27459, 3.6220539E-02)	(28.27544, 7.1741715E-02)	(28.30614, 0.3655040)	(29.63023, 0.3161769)

Tableau .A.2.1

- Sans conduction, où $\tilde{H} = r_{th} \frac{Bi_{ext} + \tilde{\beta}_s^2}{1 + Bi_{ext}}$ avec ($r_{th} = 50$, $Bi_{ext} = 0$ et $a^+ = 0.001$)

δ	1. E-03	2. E-03	1E-02	0.1
β_s	0.1	0.14	0.32	1
1	(0.8004599, 0.5700634)	(1.173929, 0.5808088)	(1.554744, 0.1566694)	(1.570642, 1.5662886E-02)
2	(3.176513, 0.3218556)	(3.310560, 0.6484472)	(4.648531, 0.5017228)	(4.711926, 4.7009539E-02)
3	(6.287380, 0.1604937)	(6.301416, 0.3275382)	(7.632801, 0.9664383)	(7.853199, 7.8550868E-02)
4	(9.425982, 0.1062765)	(9.429812, 0.2149363)	(10.12908, 1.349580)	(10.99444, 0.1106743)
5	(12.56688, 8.0036297E-02)	(12.56847, 0.1608670)	(12.72408, 1.027622)	(14.13569, 0.1425966)
6	(15.70823, 6.3231058E-02)	(15.70902, 0.1283221)	(15.75794, 0.7454166)	(17.27700, 0.1739549)
7	(18.84971, 5.2633010E-02)	(18.85017, 0.1059399)	(18.87245, 0.5885937)	(20.41823, 0.2065648)
8	(21.99125, 4.5059327E-02)	(21.99154, 9.0691380E-02)	(22.00393, 0.4905180)	(23.55944, 0.2395883)
9	(25.13281, 3.9379559E-02)	(25.13301, 7.9270571E-02)	(25.14067, 0.4212888)	(26.70063, 0.2731364)
10	(28.27436, 3.6223032E-02)	(28.27449, 7.1761787E-02)	(28.27960, 0.3687026)	(29.84168, 0.3087377)

Tableau .A.2.2

- Avec conduction, $\tilde{H} = r_{th} \frac{Bi_{ext} + \tilde{\beta}_s \tanh(\tilde{\beta}_s)}{1 + \frac{Bi_{ext} \tanh(\tilde{\beta}_s)}{\tilde{\beta}_s}}$ avec ($Bi_{ext} = 0$ et $\delta = 0.1$)

a^+	0.1	$8.5.10^{-3}$	5.10^{-5}
β_s	0.5	1.	5.
1	(0.8105430,0.4943714)	(1.476037,0.1286259)	(1.566872,3.8616620E-03)
2	(3.225400,0.2996648)	(4.401342,0.3702508)	(4.700595,1.1637528E-02)
3	(6.313015,0.1538674)	(7.269838,0.5408622)	(7.834367,1.9693647E-02)
4	(9.443020,0.1024417)	(10.13293, 0.5840737)	(10.96802,2.7004359E-02)
5	(12.57967,7.7297673E-02)	(13.06921, 0.5352996)	(14.10175,3.4806363E-02)
6	(15.71842,6.1102651E-02)	(16.08336, 0.4641306)	(17.23546,4.2595726E-02)
7	(18.85821,5.0882492E-02)	(19.14686, 0.4016528)	(20.36931,5.1354107E-02)
8	(21.99853,4.3570872E-02)	(22.23667, 0.3506173)	(23.50301,5.9135512E-02)
9	(25.13918,3.8083952E-02)	(25.34160, 0.3089065)	(26.63669,6.6887252E-02)
10	(28.28004,3.5071965E-02)	(28.45657, 0.2763110)	(29.77035,7.4622050E-02)

Tableau .A.2.3

- Paroi isotherme : $\tilde{H} = r_{th} \tilde{\beta}_s \coth(\beta_s)$ avec ($\delta = 0.1$).

a^+	0.1	$8.5.10^{-3}$	5.10^{-5}
β_s	0.5	1.	5.
1	(1.083464,-4.9196396E-02)	(1.403530,-8.4958762E-02)	(1.566872,-3.9534015E-03)
2	(3.648497,-6.2641226E-02)	(4.224010,-0.2139163)	(4.700595,-1.1834941E-02)
3	(6.580882,-4.4346400E-02)	(7.095426,-0.2624189)	(7.834365,-1.9310005E-02)
4	(9.630790,-3.2520015E-02)	(10.04232,-0.2554085)	(10.96810,-2.7115703E-02)
5	(12.72347,-2.5052885E-02)	(13.05203,-0.2295403)	(14.10175,-3.5592951E-02)
6	(15.83415,-2.0877732E-02)	(16.10496,-0.2018329)	(17.23546,-4.3379076E-02)
7	(18.95516,-1.7628437E-02)	(19.18280,-0.1779719)	(20.36917,-5.1159717E-02)
8	(22.08190,-1.5255007E-02)	(22.27831,-0.1579049)	(23.50286,-5.8927577E-02)
9	(25.21251,-1.2332137E-02)	(25.38556,-0.1405989)	(26.63654,-6.6680692E-02)
10	(28.34529,-1.0886299E-02)	(28.49943,-0.1268439)	(29.77034,-7.3079921E-02)

Tableau .A.2.4

2.3. Racines pour un tube cylindrique :

$$\tilde{H} = \gamma \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} \frac{J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right) + \left[\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - Bi_{ext} J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) \right] Y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right)}{Bi_{ext} Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - \frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} Y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right)},$$

$$J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right) + \left[\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1} J_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) - Bi_{ext} J_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^+}{r_2^+ - 1}\right) \right] Y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^+ - 1}\right)$$

avec ($r_2^+ = 1.5$, $Bi_{ext} = 0$ et $\delta = 0.1$).

a^+	0.1	$8.5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$
β_s	0.5	1.	5.
1	(0.9094605, 0.4938537)	(1.481649, 0.1049669)	(1.552527, -1.7712805E-02)
2	(3.269715, 0.3622609)	(4.429730, 0.3024221)	(4.657524, -5.2821174E-02)
3	(6.328538, 0.1888825)	(7.345193, 0.4526618)	(7.762135, -8.8010982E-02)
4	(9.452463, 0.1261595)	(10.25060, 0.5202169)	(10.86664, -0.1219602)
5	(12.58652, 9.5160201E-02)	(13.19278, 0.5110539)	(13.97038, -0.1556885)
6	(15.72383, 7.6164544E-02)	(16.19306, 0.4658035)	(17.07346, -0.1884764)
7	(18.86264, 6.2765382E-02)	(19.23977, 0.4150890)	(20.17577, -0.2200798)
8	(22.00231, 5.3766154E-02)	(22.31556, 0.3687657)	(23.27684, -0.2511859)
9	(25.14248, 4.7007490E-02)	(25.40952, 0.3285358)	(26.37754, -0.2796262)
10	(28.28297, 4.3028403E-02)	(28.51613, 0.2959633)	(29.47749, -0.3061142)

Tableau .A.2.5