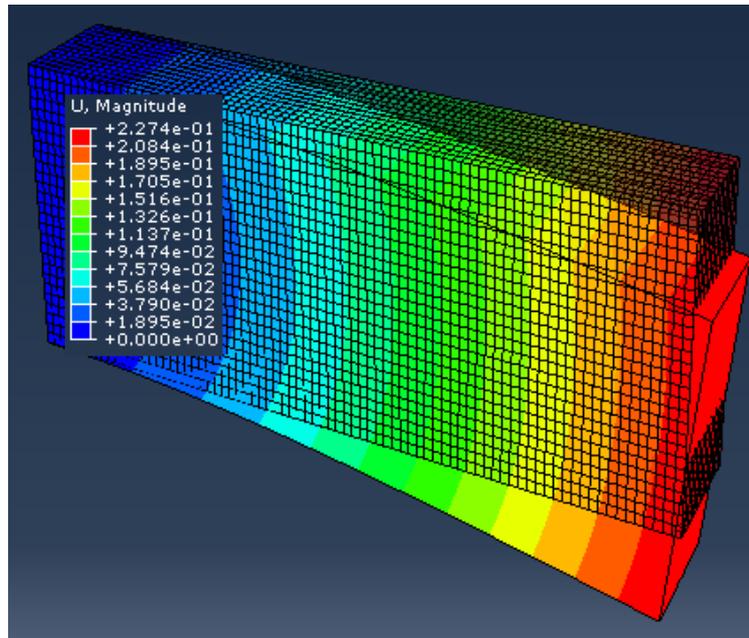


## Support de Cours et Exercices Méthode des éléments finis



Equilibre statique du solide  $[K]\{U\} = \{F\}$

Champ des déplacements  $U(x, y, z) = \sum_i^n N_i(x, y, z) u_i$

Matrice déformations

$$[B]_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_i^n \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_i^n \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_i^n \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \end{cases}$$

Matrice Jacobienne de transformation

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

## **Avant-propos**

Ce polycopié intitulé « support de cours et exercices méthode des éléments finis » a été rédigé à l'intention des étudiants en master I génie mécanique. Il leur est présenté immédiatement après les cours de mécanique des milieux continus, mécanique rationnelle et celui de la résistance des matériaux dont il s'inspire très largement, par ses notions, concernant les torseurs, les tenseurs, ainsi que ses méthodes décrivant les lois de comportement qui permettent d'établir les équations reliant les contraintes aux déformations (Lois de Hooke généralisée), dans le domaine de la mécanique des solides. Il constitue aussi, un support de cours pour les étudiants en masters I de la filière génie civil et une base pédagogique aux enseignants chargés cours.

Ce cours est constitué de cinq chapitres. A la fin de chaque chapitre, des exercices résolus sont traités. Ils permettent à l'ensemble des étudiants de mieux comprendre comment se servir de la méthode des éléments finis pour résoudre et comprendre les différents phénomènes physiques (comportements mécaniques des solides) étudiés dans leurs cursus scolaires et de trouver ainsi, les solutions des problèmes rencontrés plus tard dans les domaines de l'industrie et génie civil.

## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	4
<b>Chapitre I : Concept et base de la méthode des éléments finis</b> .....	6
1. Introduction sur la méthode des éléments finis.....	6
2. Méthodes d'analyse matricielle.....	6
3. Rappel sur l'élasticité linéaire.....	8
3.1 Tenseurs fondamentaux .....	8
3.1.1 Tenseur des déplacements.....	8
3.1.2 Tenseur des déformations.....	8
3.1.3 Tenseur des contraintes.....	8
3.2 Relations entre déplacements et déformations .....	9
3.3 Relations entre déformations et contraintes .....	9
3.4 Cas de l'élasticité plane.....	9
4. Energie de déformation.....	10
<b>Chapitre II : Approximation par éléments finis</b> .....	12
1. Introduction.....	12
2. Interpolation ou approximation nodale.....	12
3. Exemples d'application.....	13
4. Approximation par éléments finis.....	16
5. Types et forme d'éléments finis réels.....	17
6. Méthode de construction des fonctions d'interpolation des éléments finis.....	18
6.1 Formes des éléments de référence à $C^0$ .....	18
6.2 Bases polynomiales des éléments réels et de référence.....	19
7. Exemples de calcul des fonctions d'interpolation des éléments réels et de référence.....	20
7.1. Éléments à continuité $C^0$ ou éléments de Lagrange.....	20
7.2. Éléments de référence à continuité $C^1$ ou éléments d'Hermite.....	24
<b>Chapitre III : Mise en Œuvre de la Méthode des Éléments Finis</b> .....	27
1. Introduction.....	27
2. Principe de l'énergie potentielle minimale.....	27
3. Approximation par la méthode des éléments fini.....	28
4. Application aux éléments à une dimension.....	30
5. Matrices de rigidité dans le repère global .....	32
6. Applications.....	34
<b>Chapitre 4 : Matrice de rigidité des éléments bidimensionnels</b> .....	35
1. Rappel sur la loi de comportement en élasticité linéaire.....	39
2. Cas particuliers d'élasticité .....	39

3. Eléments plans triangulaires et quadrangulaires d'ordre 1.....	39
3.1. Eléments triangulaires linéaires $T_3$ .....	41
3.2. Eléments quadrangulaires linéaires $Q_4$ .....	43
4. Rappel sur la méthode d'intégration de Gauss.....	45
5. Calcul des charges ou forces nodales équivalentes.....	46
6. Exemples d'application.....	47
7. Exemple de simulation par le logiciel ABAQUS.....	50
<b>Chapitre 5 : Eléments finis tridimensionnels</b> .....	<b>56</b>
1. Introduction.....	56
2. Rappel sur la loi de comportement en élasticité linéaire.....	56
3. Type et forme d'éléments finis tridimensionnels .....	56
3.1. Eléments tétraèdres linéaires .....	57
3.1.1 Matrice de rigidité de l'élément.....	57
3.2. Eléments pentaèdres (prismes) linéaires $P_6$ .....	58
3.3. Eléments hexaèdres (briques) linéaires $H_8$ .....	62
4. Exemple d'application .....	64
5. Modélisation et simulation en 3D.....	66

## Introduction

La méthode des éléments-finis (MEF) est une méthode d'approximation numérique de solutions de problèmes aux limites statiques ou dynamiques tels que : diffusion thermique – mécanique des milieux continus (solides et fluides) – électromagnétisme ainsi que tous les problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) aux limites. Il s'agit, comme dans toutes les méthodes numériques, de trouver une approximation discrète. L'appellation éléments finis vient de la décomposition du domaine d'étude en éléments : ils sont souvent représentés par un maillage. Aujourd'hui, les éléments-finis sont un outil majeur, incontournable en mécanique (fluides et solides, interactions, structures), et applicable dans de nombreux domaines impliquant des problèmes aux dérivées partielles aux limites. De nombreux codes industriels (solveurs) existent et sont généralement couplés à un logiciel de CAO. Citons par exemple Ansys, SolidWorks, Abaqus, Robot, Code-Aster, Cast3M et bien d'autres.

Un problème physique modélisé mathématiquement peut être résolu en utilisant des approches analytiques (méthodes de calcul manuelles) ou numériques. Les méthodes analytiques sont basées, la plupart du temps, sur des hypothèses simplificatrices qui ne permettent pas de simuler le comportement d'un système réel de manière précise. Dans ce type d'approche, on simplifie le problème pour pouvoir résoudre manuellement les équations. Comme par exemple, la théorie des poutres, qui est fondamentalement une simplification de la théorie de l'élasticité, qui permet de résoudre analytiquement des problèmes de résistance mécanique mais elle ne s'applique que dans le cadre d'hypothèses très restrictives (limitées). De manière générale, les approches de résolution analytiques se basent sur des hypothèses simplificatrices sur la géométrie des objets et domaines étudiés ainsi que sur le type de comportement considéré.

La méthode des éléments finis (MEF) a connu un développement très important ces dernières années, en grande partie grâce au développement des technologies informatiques. Cette méthode reste une méthode approchée de résolution des problèmes physiques rencontrés par l'ingénieur mais elle permet de simuler et solutionner beaucoup plus précisément ces problèmes. Elles impliquent des calculs très lourds, impossibles à réaliser manuellement.

Le principe fondamental de la MEF est de transformer un problème continu (modélisé mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites) en un problème discret qui est modélisé mathématiquement par un système d'équations linéaires. La solution d'un problème continu est un champ continu d'une grandeur physique (par exemple les déplacements en mécanique), alors que la solution d'un problème discret est un ensemble de valeurs prises par une grandeur physique (les déplacements aux extrémités des ressorts pour l'exemple) choisis en des points particuliers, appelés nœuds dans le cadre de la MEF. En mécanique, la MEF permet de dimensionner ou de calculer la résistance mécanique des pièces, assemblages et structures de manière très précise.

### Les dangers et difficultés de la pratique de la MEF

La méthode des éléments finis repose, tel que mentionné ci-dessus, sur des bases théoriques complexes qu'il faut bien maîtriser afin de mener des calculs de manière éclairée et ainsi obtenir des résultats de calcul réalistes. D'ailleurs, l'utilisation de plus en plus fréquente de ce genre de technologies par des personnels

non spécialistes ou inadéquatement formés commence à être une source d'inquiétude très sérieuse, compte tenu des enjeux de sécurité sous-jacents. De manière générale, utiliser un logiciel quelconque pour résoudre un problème d'ingénierie sans en comprendre le fonctionnement est très dangereux. D'autre part, l'évolution très rapide de la technologie fait en sorte que les analystes et ingénieurs eux-mêmes se trouvent face à un grand nombre d'outils de calcul dont ils doivent apprendre à se servir de manière efficace, afin de faire les bons choix en fonction des types de problèmes qu'ils ont à résoudre de manière pratique.

H. BOUTOUSTAOU

## Chapitre 1 : Concepts de Base de la méthode des éléments finis

### 1. Introduction sur la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) a connu un développement très important ces dernières années, en grande partie grâce au développement des technologies informatiques. Cette méthode reste une méthode approchée de résolution des problèmes physiques rencontrés par l'ingénieur mais elle permet de simuler et solutionner beaucoup plus précisément ces problèmes. Elles impliquent des calculs très lourds, impossibles à réaliser manuellement.

Le principe fondamental de la MEF est de transformer un problème continu (modélisé mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites) en un problème discret qui est modélisé mathématiquement par un système d'équations linéaires. La solution d'un problème continu est un champ continu d'une grandeur physique (par exemple les déplacements en mécanique), alors que la solution d'un problème discret est un ensemble de valeurs prises par une grandeur physique (les déplacements aux extrémités des ressorts pour l'exemple) choisis en des points particuliers, appelés nœuds dans le cadre de la MEF. En mécanique, la MEF permet de dimensionner ou de calculer la résistance mécanique des pièces, assemblages et structures de manière très précise.

### 2. Méthodes d'analyse matricielle.

On appelle matrice de dimension  $n \times p$  un tableau de nombres comportant  $n$  lignes et  $p$  colonnes. Ces nombres  $a_{ij}$  sont appelés coefficients de la matrice.

$$\begin{array}{c} \text{Colonnes.} \\ \text{Lignes} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \end{array}$$

- **Matrices particulières**

Une matrice comportant une seule ligne s'appelle un **vecteur-ligne**, qui a pour dimension donc  $1 \times p$  dans ce cas. Une matrice comportant une seule colonne s'appelle un **vecteur-colonne**, qui a pour dimension  $n \times 1$ .

Une matrice comportant autant de **lignes** que de **colonnes** s'appelle une matrice **carrée**. Une matrice carrée a donc pour dimension  $n \times n$ , dans ce cas  $n = p$ .

On appelle matrice **diagonale** une matrice carrée dont tous les coefficients sont **nuls**, exceptés ceux de la diagonale. Autrement dit,  $A$  est une matrice diagonale si :  $a_{ii} \neq 0$  lorsque  $i = j$  et  $a_{ij} = 0$  lorsque  $i \neq j$ .

On appelle **matrice identité** (ou **matrice unité**) une matrice carrée dont tous les coefficients  $a_{ii}$  de la diagonale sont **égaux à 1**, et dont tous les autres coefficients  $a_{ij}$  sont nuls. Autrement dit,  $A$  est une matrice identité si :  $a_{ii} = 1$  et  $a_{ij} = 0$  lorsque  $i \neq j$ . On note  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

On appelle **matrice transposée de la matrice  $A$**  notée  $A^T$  la matrice obtenue en permutant les lignes et les colonnes de  $A$ . Ainsi, à tous les coefficients  $a_{ij}$  de la matrice  $A$ , correspond les coefficients  $a_{ji}$  de la matrice transposée  $A^T$ . Si  $A$  est de dimension  $n \times p$ , alors  $A^T$  est de dimension  $p \times n$ .

La somme de deux matrices  $A$  et  $B$  (de même dimension  $n \times p$ ), la matrice  $C$  de même dimension, obtenue en additionnant les coefficients qui ont la même position. Autrement dit :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Le produit d'une matrice  $A$  par un réel  $k$ , est une matrice obtenue en multipliant tous les coefficients  $a_{ij}$  par  $k$ .

Le produit d'un vecteur ligne  $V$  de dimension  $1 \times p$  par une matrice  $A$ , le vecteur  $U$  de dimension  $1 \times p$  obtenu en multipliant ce vecteur par chaque colonne de la matrice  $A$ .

Le produit d'une matrice  $A$  de dimension  $n \times p$  par un vecteur colonne  $V$  de dimension  $n \times 1$ , la matrice  $B$  de dimension  $n \times p$  obtenue en multipliant chaque ligne de la matrice  $A$  par ce vecteur  $V$ .

Le produit de deux matrices  $A \times B$  de même dimension  $n \times p$  est la matrice  $C$  de dimension  $n \times p$  obtenue en multipliant chaque ligne de la matrice  $A$  par chaque colonne de la matrice  $B$ .

L'inverse d'un nombre réel non nul  $a$  est le nombre réel  $1/a$ , tel que le produit  $a \times 1/a = 1$ .

Soit une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$ . La **matrice inverse** notée  $A^{-1}$  de  $A$  est définie, quand elle existe, par  $A \times A^{-1} = I_n$ . Si une telle matrice existe, on dit alors que  $A$  est **inversible**.

Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On appelle déterminant de  $A$ , noté  $\det(A)$ , le réel :  $ad - bc$ . Si  $\det(A) \neq 0$ , alors, la matrice  $A$  admet une matrice inverse unique  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

Une matrice non inversible est appelée matrice **singulière**.

**Exemples** : déterminer l'inverse des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}. A \text{ est inversible.}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -18 & 34 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 12 & -19 \end{bmatrix}$$

**Autres méthodes** :

La méthode des diagonales permet le calcul du déterminant d'une matrice d'ordre  $n > 2$ . La démarche est la suivante :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{matrix} \det(A) = [(2 \times 3 \times 0) + (0 \times 2 \times 2) + (-3 \times 1 \times -5)] - [(-3 \times 3 \times 2) + (2 \times 2 \times -5) + 0]$$

$$\Rightarrow \det(A) = 53.$$

La méthode des cofacteurs est une méthode qui permet de calculer le déterminant et l'inverse d'une matrice. Soit la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}; A^{-1} = \frac{(\text{co-facteurs}(A))^T}{\det(A)}$$

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 0 + 33 = 53$$

$$[Co - \text{facteurs } A] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -5 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} 0 & -3 \\ -5 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 2 & -5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{array} & \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{array} & \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{array} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -11 \\ 15 & 6 & 10 \\ 9 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{53} \begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 \\ 4 & 6 & -7 \\ -11 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

### 3. Rappel sur l'élasticité linéaire

#### 3.1 Tenseurs fondamentaux

##### 3.1.1 Tenseur des déplacements

On considère d'abord le tenseur  $U_i$  du champ des déplacements qui est un vecteur noté  $U_i$  et qui a pour composantes (en 3D) :  $\langle U_i \rangle = \langle u \ v \ w \rangle$

##### 3.1.2 Tenseur des déformations

On considère ensuite le tenseur  $\varepsilon_{ij}$  du champ des déformations (appelé tenseur de Green-Lagrange linéarisé) qui est une matrice symétrique notée  $[\varepsilon]$  et qui a pour composantes (en 3D) :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Il faut faire attention au fait que l'on utilise également d'autres composantes de déformations notées :

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} ; \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} \text{ et } \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$$

On utilise également une notation du tenseur des déformations (qui à la base est une matrice symétrique à 9 composantes) sous la forme d'un vecteur à 6 composantes. Dans ce cas, les composantes considérées sont les suivantes (ce qui est une source d'erreur importante car les composantes ne sont pas les mêmes) :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{xz} \ \varepsilon_{yz} \rangle$$

##### 3.1.2 Tenseur des contraintes

On considère enfin le tenseur du champ  $\sigma_{ij}$  des contraintes (appelé tenseur de *Cauchy-Euler*) qui est une matrice symétrique notée  $[\sigma]$  et qui a pour composantes (en 3D) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Tout comme pour les déformations, on utilise également une notation du tenseur des contraintes (qui à la base est une matrice symétrique à 9 composantes) sous la forme d'un vecteur à 6 composantes. Dans ce cas, les composantes considérées sont les suivantes :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_z \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz} \rangle$$

### 3.2 Relations entre déplacements et déformations

On peut déterminer facilement les déformations à partir de la connaissance des déplacements en utilisant les relations classiques :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right);$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

### 3.3 Relations entre déformations et contraintes

On peut ensuite déterminer facilement les contraintes à partir de la connaissance des déformations en utilisant la loi de Hooke. Cette loi peut être exprimée de manière matricielle (pour un état de contraintes et de déformations tridimensionnels) :  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ . La matrice  $[D]$  est appelée matrice de Hooke et vaut pour un matériau homogène et isotrope défini par son module de Young  $E$  et son coefficient de Poisson  $\nu$ :

$$[D] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ où : } a = \frac{1-2\nu}{2}$$

### 3.4 Cas de l'élasticité plane

Dans certaines configurations de géométrie et de sollicitation, il n'est pas nécessaire de considérer un état de déformations et de contraintes complètement tridimensionnel. C'est le cas lorsqu'on considère des poutres sous certaines sollicitations. C'est le cas également en élasticité plane où l'on considère, selon certaines hypothèses, des états simplifiés de déformations et de contraintes (états plans de déformations et de contraintes). Si on peut appliquer l'hypothèse des *déformations planes*, alors on considère que l'on a un état plan de déformations et par conséquent, la matrice des déformations se réduit aux termes non nuls suivants :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'état de *déformations planes* correspond, pour ce qui est des contraintes, à un état de contraintes tridimensionnel où certaines composantes sont néanmoins nulles. En effet, pour un état de *déformations planes*, les termes non nuls de la matrice des contraintes sont les suivants :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}; \text{ avec: } \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Cet état de déformations peut se produire pratiquement pour des objets très épais dans certaines conditions de sollicitation. On résume alors la relation entre les contraintes et les déformations pour un état de déformations planes par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

non nuls suivants :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'état de *contraintes planes* correspond pour ce qui est des déformations à un état de déformations tridimensionnel où certaines composantes sont néanmoins nulles. En effet, pour un état de *contraintes planes*, les termes non nuls de la matrice des déformations sont les suivants :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}; \text{ avec: } \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Cet état de contraintes peut notamment être considéré, de manière pratique, pour des plaques minces chargées dans leur plan. On résume alors la relation entre les contraintes et les déformations, pour un état de contraintes planes par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

#### 4. Energie de déformation.

Lorsqu'un solide se déforme élastiquement sous l'action des différents efforts, qui lui sont appliqués, il emmagasine une quantité d'énergie sous la forme d'une énergie potentielle  $E_p$  appelée énergie de déformation  $E_d$ . Cette énergie se calcule à partir de la connaissance du champ de contraintes et de déformations dans le solide par l'expression :

$$E_d = \frac{1}{2} \int \langle \varepsilon \rangle \{ \sigma \} dV$$

Pour les différentes sollicitations simples, nous avons donc :

- **Traction – Compression :**

$$E_d = \frac{1}{2} \int \langle \varepsilon \rangle \{ \sigma \} dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{ES} dx$$

- **Flexion :**

$$E_d = \frac{1}{2} \int \langle \varepsilon \rangle \{ \sigma \} dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx$$

- **Torsion :**

$$E_d = \frac{1}{2} \int \langle \varepsilon \rangle \{ \sigma \} dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{GJ} dx ; J \text{ constante de torsion.}$$

- **Cisaillement :**

$$E_d = \frac{1}{2} \int \langle \varepsilon \rangle \{ \sigma \} dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GS^*} dx ; S^* \text{ section cisailée.}$$

## Chapitre II : Approximation par éléments finis

### 1. Introduction

Dans la méthode des éléments finis, le domaine géométrique  $\Omega$  (Poutre, Plaque, Coque, Solide.... etc) est divisé (discrétisé) en plusieurs sous-domaines  $\Omega^e_i$  de géométries simples. Les fonctions d'approximation par éléments finis sont déterminées en termes de valeurs nodales (au niveau des nœuds) de la grandeur physique recherchée (champs de déplacements, champs de contraintes .... etc).

La méthode des éléments finis permet la résolution de problèmes mécaniques dans le domaine statique, dynamique, linéaires et non linéaires, ainsi que d'autres problèmes comme la mécanique des fluides, le transfert de chaleur .... etc. Elle s'adapte bien aux géométries complexes et irrégulières.

### 2. Interpolation ou approximation nodale

Le principe de l'interpolation ou l'approximation nodale consiste à exprimer une grandeur physique (champs de déplacements, de contraintes ou de déformations)  $U(x)$  par exemple en fonction des inconnues ou variables nodales  $u_i$ . Les points de coordonnées  $x_i$  où ces valeurs sont connues, sont appelés **nœuds d'interpolation** et les variables  $u_i$  sont **les valeurs de la fonction  $U(x)$**  en ces points. Cette fonction approchée  $U(x)$  est construite généralement sur la base de fonctions trigonométriques ou polynomiales, linéairement indépendantes. Soit :

$U(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots + a_n x^{n-1}$ , qui peut s'écrire sous la forme :

$$U(x) = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \quad x^{n-1} \rangle \{u_i\}$$

Où, les paramètres  $a_i$  sont les coefficients d'approximation et les polynômes  $1 ; x ; x^2 ; \dots ; x^{n-1}$  sont les polynômes d'interpolation qui constituent la base polynomiale  $\langle P \rangle = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad \dots ; x^{n-1} \rangle$ .

L'approximation ainsi construite peut fournir :

- Une expression approchée en tout point  $x$  d'une fonction difficile à évaluer ou connue seulement en certains points.
- Une solution approchée d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles.

En faisant coïncider la fonction approchée  $U(x)$  avec la fonction exacte  $U_{ex}(x)$  qui a pour solution aux points  $x_i$  ou aux nœuds  $U_{ex}(x_i) = u_i$ , on peut écrire le système suivant :

$$U(x_1) = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1^3 + \dots + a_n x_1^{n-1} = U_{ex}(x_1) = u_1$$

$$U(x_2) = a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 + a_4 x_2^3 + \dots + a_n x_2^{n-1} = U_{ex}(x_2) = u_2$$

.....

.....

.....

$$U(x_n) = a_1 + a_2 x_n + a_3 x_n^2 + a_4 x_n^3 + \dots + a_n x_n^{n-1} = U_{ex}(x_n) = u_n$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

Ou encore:

$$[A]\{a_i\} = \{u_i\} \Rightarrow \{a_i\} = [A]^{-1}\{u_i\}$$

La fonction approchée  $U(x)$  devient alors :

$$U(x) = \langle 1 \ x \ x^2 \ x^3 \ \dots \dots \dots \ x^{n-1} \rangle [A]^{-1} \{u_i\}$$

Ou encore :

$$U(x) = [N_i] \{u_i\}$$

Avec :  $[N_i] = [N_1(x)N_2(x) \ \dots \dots \ N_n(x)]$  est la matrice des fonctions d'interpolation.

$\{u_i\}$  est le vecteur des variables ou inconnues nodales.

Et comme aux points (nœuds)  $x_i$  nous avons  $U(x_i) = U_{ex}(x_i)$ , les fonctions d'interpolation  $N_i(x)$  vérifient les deux conditions suivantes :

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**Remarque :** Les fonctions d'interpolation  $N_i^e(x)$ , sont calculées par les polynômes de Lagrange ou par la méthode de la matrice nodale. Les polynômes de Lagrange ont la forme suivante :

$$N_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n N_i^e(x) = \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

### 3. Exemples d'application :

**Exemple 1 :** Les mesures des déplacements verticaux effectuées sur une poutre sollicitée en flexion sont données dans le tableau suivant :

$x_i(\text{m})$	0	0.5	1
$v_i(\text{mm})$	20	25	22

Nous voulons approcher la valeur des déplacements  $v$  en des points qui ne coïncident pas avec les points des mesures.

**Solution :** Soit l'approximation sous la forme :  $V(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$ . Nous donc avons à résoudre le système suivant :

$$V(0) = V_{ex}(0) \Rightarrow a_1 = 20$$

$$V(0.5) = V_{ex}(0.5) \Rightarrow a_1 + a_2 \cdot 0.5 + a_3 \cdot 0.5^2 = 25$$

$$V(1) = V_{ex}(1) \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 22$$

Ce qui donne respectivement :  $a_1=20$  ;  $a_2 = 18$  et  $a_3 = -16$  et  $V(x) = 20 + 18x - 16x^2$ . Alors aux points  $x=0,25$  et  $x=0,75$ , nous avons :  $V(0,25) = 23,5$  et  $V(0,75) = 24,5$ .

**Exemple 2 :** Nous voulons approximer la solution d'une équation différentielle. Cherchons une fonction  $U_{ex}$  qui satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 U_{ex}(x)}{dx^2} = \frac{11 - 12x}{8} \text{ où } 0 \leq x \leq 1$$

Avec les conditions aux limites :  $U_{ex}(0) = 0$  et  $U_{ex}(1) = 0$ . La solution exacte est sous la forme :

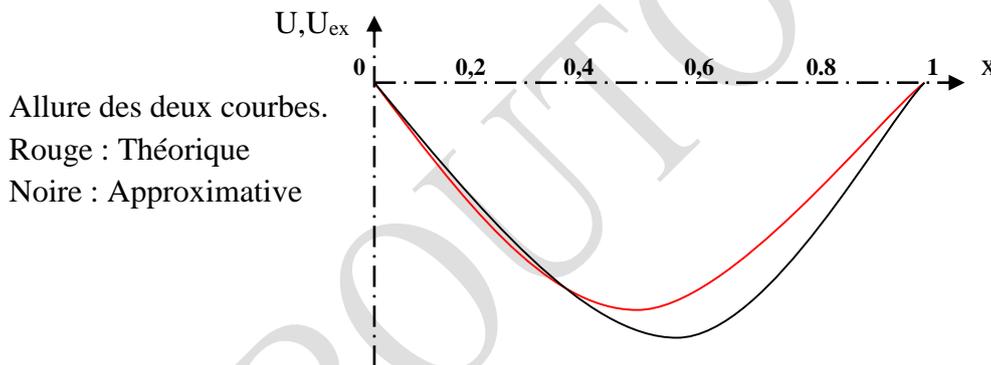
$$U_{ex}(x) = \frac{1}{16}(-4x^3 + 11x^2 - 7x)$$

Soit l'approximation  $U(x) = a_1 \sin(\pi x) + a_2 \sin(2\pi x)$  qui satisfait les conditions aux limites :  $U(0) = U(1) = 0$ . Ecrivons maintenant l'égalité entre les dérivées des fonctions  $U(x)$  et  $U_{ex}(x)$  aux points respectifs  $x_1 = 1/4$  et  $x_2 = 3/4$ . Nous aurons donc le système suivant :

$$\begin{cases} -\pi^2 a_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4\pi^2 a_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{11 - 12x_1}{8} = 1 \\ -\pi^2 a_1 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 4\pi^2 a_2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{11 - 12x_2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{8\pi^2} \text{ et } a_2 = -\frac{3}{32\pi^2}$$

Ce qui donne :  $U(x) = -\frac{5\sqrt{2}}{8\pi^2} \sin(\pi x) - \frac{3}{32\pi^2} \sin(2\pi x)$ .

Pour  $x_1 = 1/4$  et  $x_2 = 3/4$ , nous avons :  $U(0,25) = -0,0728$  et  $U_{ex}(0,25) = -0,0703$   
 $U(0,75) = -0,0538$  et  $U_{ex}(0,75) = -0,0468$



**Exemple 3 :** Approximation nodale de type Lagrange : Soit une fonction exacte  $U_{ex}$  quelconque connue seulement en quatre points  $x_i$ , que nous voulons approximer par la fonction  $U(x)$  de la forme :

$$U(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) u_i = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i,$$

Avec  $N_i(x)$ ,  $L_i(x)$  sont les fonctions ou les polynômes d'interpolation de Lagrange de degrés  $n-1$  de la forme :

$$N_i(x) = L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Ces polynômes satisfont aux points  $x_i$  ou aux nœuds d'interpolation la relation suivante :

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Considérons les résultats du tableau ci-dessous :

- a. Calculer les polynômes  $L_i(x)$  de Lagrange.  
 b. Tracer l'allure de ces polynômes.  
 c. Construire la fonction approchée  $U(x)$ .  
 d. Calculer la valeur de  $U(x)$  aux points  $x_i = 1,5$  et  $x = 3,5$ .

$x_i$	1	2	3	5
$u_i$	1	0	-1/3	0

$L_i(x)$  de Lagrange.  
polynômes.

**Solution :**

**a. Polynômes de Lagrange :**

$$N_1(x) = L_1(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^4 \frac{(x - x_j)}{(x_1 - x_j)} = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

$$N_2(x) = L_2(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 \frac{(x - x_j)}{(x_2 - x_j)} = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

$$N_3(x) = L_3(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^4 \frac{(x - x_j)}{(x_3 - x_j)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}$$

$$N_4(x) = L_4(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 4}}^4 \frac{(x - x_j)}{(x_4 - x_j)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

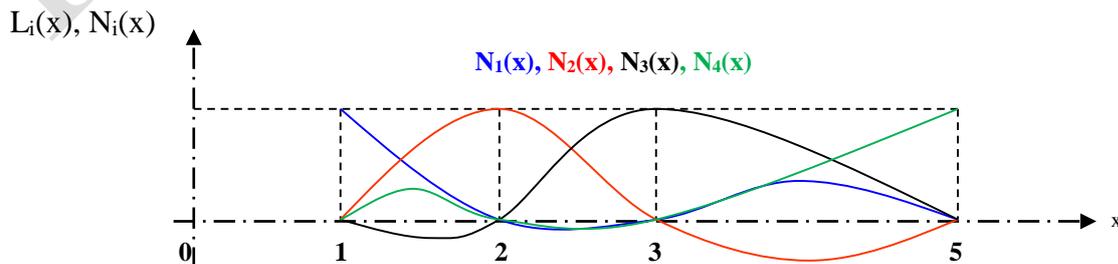
$$N_1(x) = L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} = -\frac{1}{8}(x^3 - 10x^2 + 31x - 30)$$

$$N_2(x) = L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} = \frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$$

$$N_3(x) = L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} = -\frac{1}{4}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10)$$

$$N_4(x) = L_4(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} = \frac{1}{24}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

**b. Allure des polynômes  $L_i(x)$  ou  $N_i(x)$  :**



**c. Fonction approchée  $U(x)$  :**

$$U(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) \cdot u_i = \sum_{i=1}^n N_i(x) \cdot u_i = L_1(x) \cdot u_1 + L_2(x) \cdot u_2 + L_3(x) \cdot u_3 + L_4(x) \cdot u_4$$

Après tout calcul fait : 
$$U(x) = -\frac{1}{24}(x^3 - 14x^2 + 59x - 70)$$

**d. Calcul de la valeur de  $U(x_i)$  :**  $U(x=1,5) = (-1,5^3 + 14 \cdot 1,5^2 - 59 \cdot 1,5 + 70) / 24 = 0,401$

$$U(x=3,5) = (-3,5^3 + 14 \cdot 3,5^2 - 59 \cdot 3,5 + 70) / 24 = -0,328$$

**4. Approximation par éléments finis**

La construction d'une fonction approchée  $U(x)$  par l'approximation nodale, devient très difficile lorsque le nombre de paramètres (variables)  $u_i$  est important, c'est-à-dire quand le nombre de nœuds, donc de ddl est grand. Le problème se complique encore, lorsque le domaine  $\Omega$  étudié a une forme géométrique complexe. La méthode des éléments finis a été créée pour résoudre ce problème. L'approximation par éléments finis est une méthode d'approximation nodale appliquée dans les sous-domaines  $\Omega^e_i$  du domaine global  $\Omega$  étudié. Elle nécessite les étapes suivantes :

- Discrétiser le domaine  $\Omega$  en plusieurs sous-domaines (éléments finis)  $\Omega^e_i$ .
- Définir une fonction approchée  $U^e_i(x)$  sur chaque élément fini.
- L'approximation nodale sur chaque élément  $\Omega^e_i$  ne fait intervenir que les variables nodales liées à cet élément et sa frontière.
- Les fonctions approchées  $U^e_i(x)$  sur chaque élément, sont construites de façon à être continues sur l'élément et doivent satisfaire les conditions de continuité entre les différents éléments.

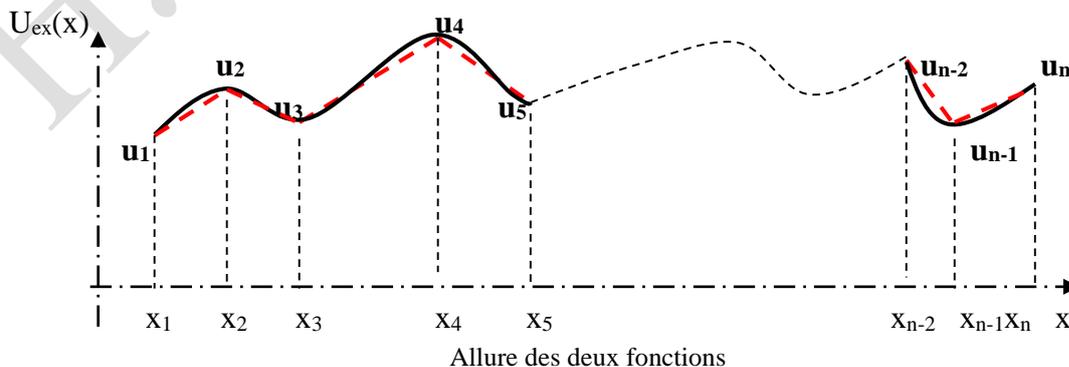
Après la construction de toutes les fonctions approchées  $U^e_i(x)$  des sous domaines  $\Omega^e_i$ , la fonction approchée  $U(x)$  du domaine global  $\Omega$  est obtenue par la somme suivante :

$$U(x) = \sum_{i=1}^n U^e_i(x)$$

Nous pouvons définir alors ce qui suit :

- Les sous domaines  $\Omega^e_i$  sont appelés **éléments finis**.
- Les points sur lesquels la fonction approchée  $U^e(x)$  coïncide avec la fonction exacte  $U^{ex}(x)$ , sont les **nœuds d'interpolation** et les coordonnées  $x_i$ , de ces nœuds sont les **coordonnées nodales**.
- Les valeurs  $u_i = U^e(x_i) = U^{ex}(x_i)$ , sont les **variables ou inconnues nodales**.

**Exemple d'interpolation à une (1D) par éléments finis :** Soit une fonction  $U^{ex}(x)$  définie sur un domaine  $\Omega : [x_1, x_n]$  représentée par la figure ci-dessous :



Soit à construire une fonction approchée  $U(x)$  au moyen d'une approximation par éléments finis. Les étapes de construction de la fonction  $U(x)$  sont :

a) Discrétisation du domaine (la courbe)

- Nœuds : 1,2,3.....,n
- Coordonnées nodales :  $x_1, x_2, x_3.....,x_n$
- Définition des éléments :  $\Omega^e_1 [ x_1, x_2 ], \Omega^e_1 [ x_2, x_3 ],..... \Omega^e_1 [ x_{n-1}, x_n ]$ .

b) Construction des fonctions approchées des éléments

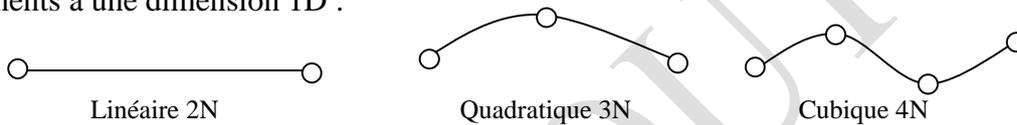
En utilisant l'interpolation de Lagrange dans chaque élément, on obtient des fonctions approchées  $U^e(x)$  qui dépendent des variables nodales  $u_i$  et des coordonnées nodales  $x_i$

La fonction approchée globale :  $U(x) = \sum_1^n U^e(x) = U^1(x) + U^2(x) + \dots \dots U^{n-1}(x)$

**5. Types et forme d'éléments finis réels**

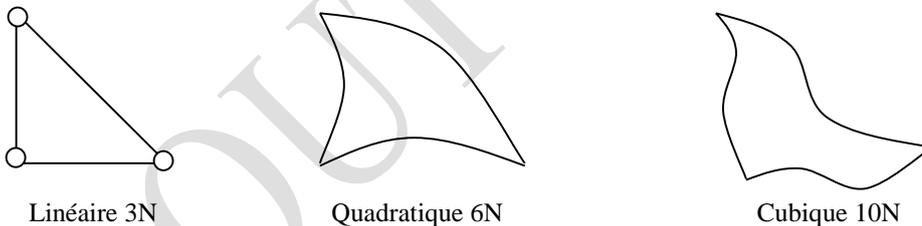
En fonction du problème physique traité, on peut être amené à utiliser plusieurs types et formes pour le résoudre. Dans le calcul et la modélisation par éléments finis, on utilise des éléments de dimensions 1D, 2D et 3D. Chaque élément est identifié par : sa forme géométrique, ses nœuds et sa frontière (point, courbe ou surface). On distingue les types et formes d'éléments finis suivants :

a. Eléments à une dimension 1D :

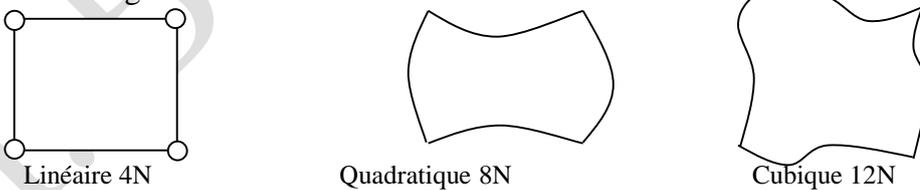


b. Eléments à deux dimensions 2D :

- Eléments triangulaires :

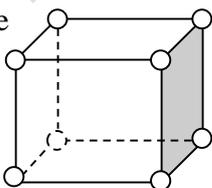


- Eléments rectangulaires :



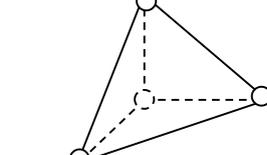
c. Eléments à trois dimensions 3D :

Hexaèdre (Cube)



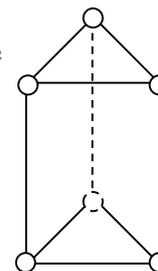
Linéaire 8N  
Quadratique 20N

Tétraèdre



Linéaire 4N  
Quadratique 10N

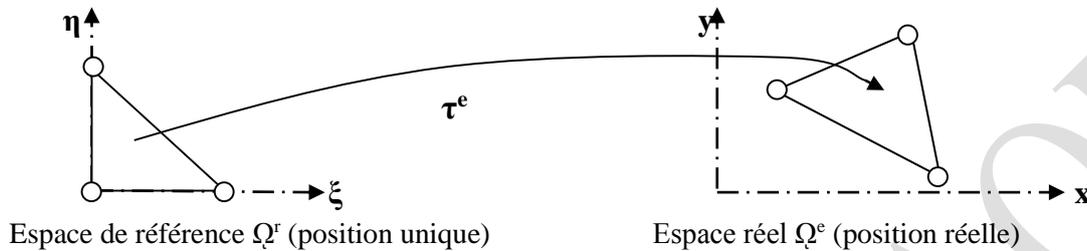
Pentaèdre (Prisme)



Linéaire 6N  
Quadratique 15N

## 6. Méthode de construction des fonctions d'interpolation des éléments finis

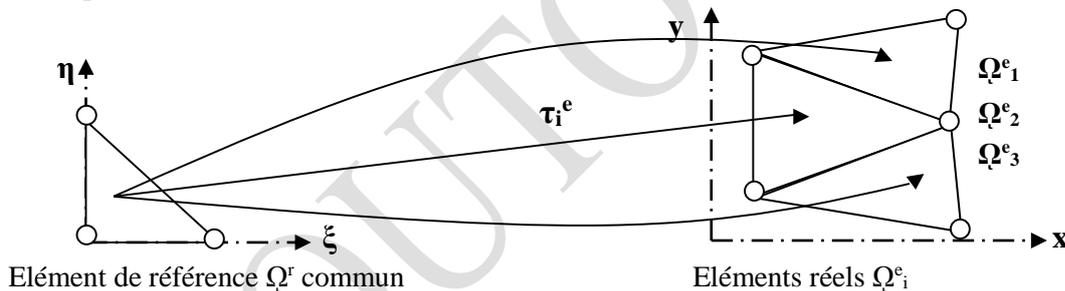
La construction des fonctions d'interpolation  $N_i(x, \dots)$  des éléments réels  $\Omega^e$  dans l'espace ou le repère réel est difficile car elle fait intervenir leurs dimensions et les coordonnées des nœuds. Pour résoudre ce problème, les chercheurs ont créé des éléments appelés éléments de référence  $\Omega^r$  de formes simples, définis dans un espace ou un repère de référence d'intervalles  $[-1 ; 1]$ . Ces éléments peuvent être transformés en chaque élément réel  $\Omega^e$  par une transformation géométrique  $\tau^e$ .



La transformation  $\tau$  définit les coordonnées  $X^e$  de chaque élément réel à partir des coordonnées de l'élément de référence :

La transformation  $\tau$  dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des nœuds géométriques qui le définissent. Il y a donc une transformation  $\tau$  différente pour chaque élément.

**Remarque 1:** Soulignons qu'un même élément de référence se transforme en tous les éléments réels de même forme par des transformations différentes.



La transformation géométrique permet de transformer les coordonnées naturelles de l'élément de référence dans le repère de référence en coordonnées réelles de l'élément réel défini dans le repère réel. Les coordonnées  $x, y$  pour un élément réel triangulaire s'expriment comme suit :

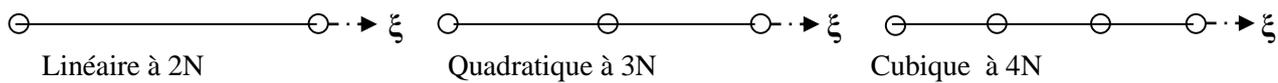
$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta)x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta)x_3 \\ y(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)y_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta)y_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta)y_3 \end{cases}$$

Où  $\bar{N}_i(\xi, \eta)$  : sont les fonctions de transformation géométrique.

**Remarque 2:** Lorsque les fonctions de transformation géométrique  $\bar{N}_i(\xi, \eta)$  coïncident avec les fonctions d'interpolation  $N_i(x, y)$ , l'élément fini considéré est appelé **élément iso-géométrique** ou **iso-paramétrique**. Les nœuds d'interpolation sont alors confondus avec les nœuds géométriques.

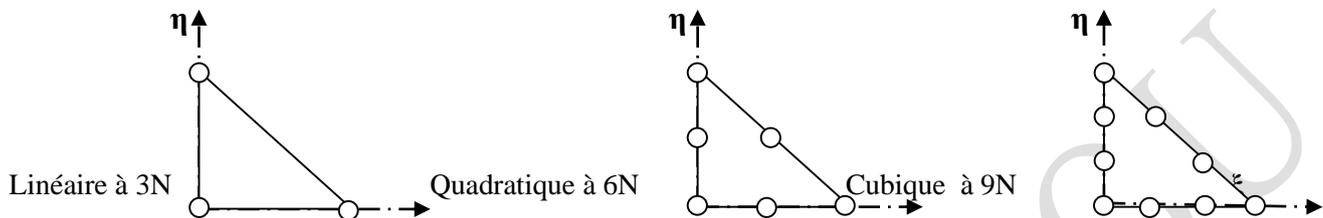
### 6.1 Formes des éléments de référence à $C^0$ (éléments de Lagrange) :

a. Éléments de référence à une dimension 1D :

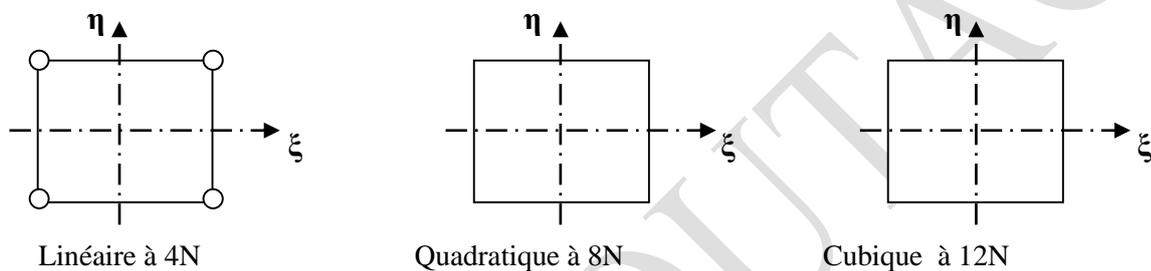


b. Éléments de référence à deux dimensions 2D :

- Éléments triangulaires :



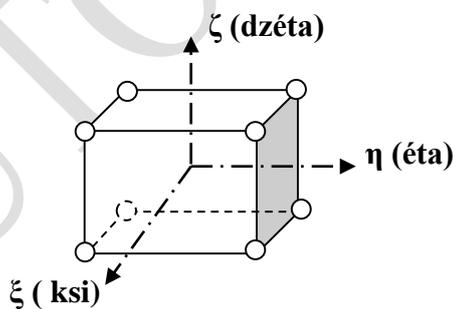
- Éléments carrés :



c. Éléments de référence à trois dimensions 3D :

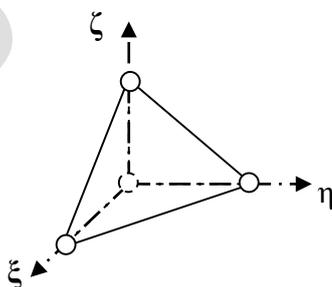
- **Hexaèdre** (cube) :

Linéaire 8N  
 Quadratique 20N  
 Cubique 32N



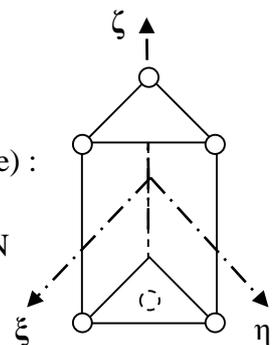
- **Tétraèdre** :

Linéaire 4N  
 Quadratique 10N  
 Cubique 16N



- **Pentaèdre** (prisme) :

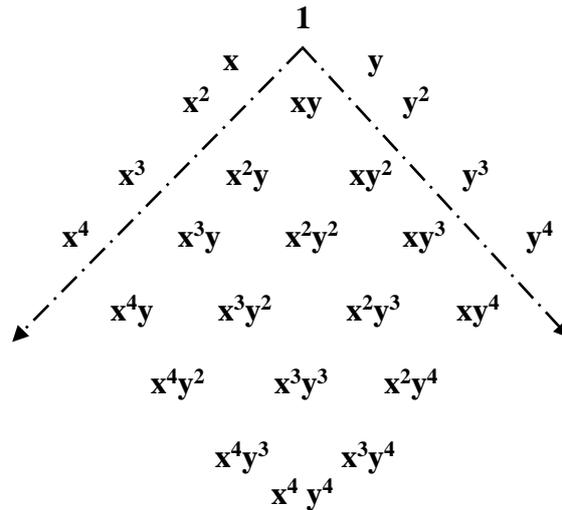
Linéaire 6N  
 Quadratique 15N  
 Cubique 24N



6.2 Bases polynomiales des éléments réels et de référence :

La construction des bases polynômiales réelles ou de référence, est obtenue à partir du triangle de Pascal ci-dessous. Soit :

on utilise le triangle de Pascal ci-dessous :



Quelques exemples de bases en  $C^0$  :

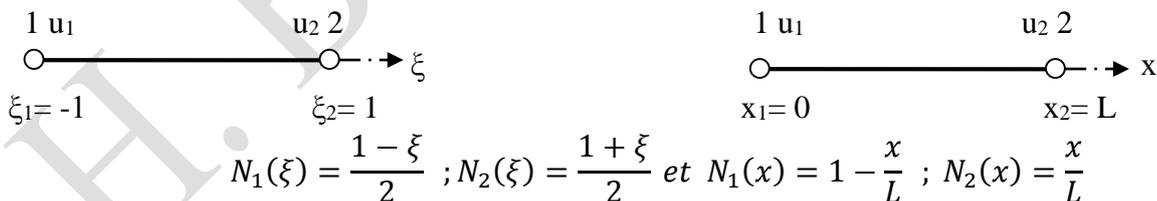
Dimension	Degrés du polynôme	Base polynômiale complète	Type d'élément	Nombre de nœuds
1	1	$\langle 1 \ \xi \rangle$	Linéaire	2
1	2	$\langle 1 \ \xi \ \xi^2 \rangle$	Quadratique	3
2	1	$\langle 1 \ \xi \ \eta \rangle$	Linéaire	3
2	2	$\langle 1 \ \xi \ \eta \ \xi^2 \ \xi \cdot \eta \ \eta^2 \rangle$	Quadratique	6
3	1	$\langle 1 \ \xi \ \eta \ \zeta \rangle$	Linéaire	4
3	2	$\langle 1 \ \xi \ \eta \ \zeta \ \xi^2 \ \xi \cdot \eta \ \eta^2 \ \eta \cdot \zeta \ \zeta^2 \ \xi \cdot \zeta \rangle$	Quadratique	10

### 7. Exemples de calcul des fonctions d'interpolation des éléments réels et de référence

#### 7.1. Éléments à continuité $C^0$ ou éléments de Lagrange

Un élément fini est dit à **continuité  $C^0$**  lorsque sa fonction approchée est continue et sa première dérivée discontinue. Il s'agit en générale des éléments finis de forme linéaire ou éléments de Lagrange.

##### a. Éléments linéaire à une dimension 1D :



L'élément en question étant un élément iso-paramétrique, donc les fonctions d'interpolation et les fonctions de transformation géométrique (changement de repère) sont identiques. De ce fait, on peut écrire :

$$\bar{N}_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} ; \bar{N}_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}$$

la relations :

$$x(\xi_i) = \sum_1^2 \bar{N}_i(\xi)x_i = \bar{N}_1(\xi)x_1 + \bar{N}_2(\xi)x_2 = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2$$

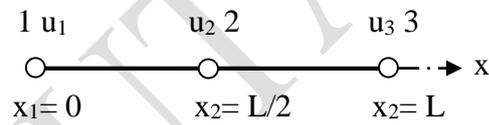
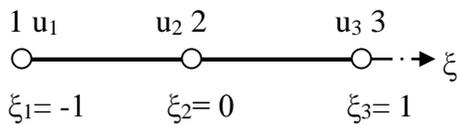
Et les fonctions approchées  $U(x), U(\xi)$  :

$$\begin{cases} U(\xi) = \sum_1^2 N_i(\xi)u_i = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 = \frac{1-\xi}{2}u_1 + \frac{1+\xi}{2}u_2 \\ U(x) = \sum_1^2 N_i(x)u_i = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 = 1 - \frac{x}{L}u_1 + \frac{x}{L}u_2 \end{cases}$$

**Jacobien de la transformation** : on définit le Jacobien de transformation par la quantité suivante :

$$j = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{N}_1(\xi)}{\partial \xi}x_1 + \frac{\partial \bar{N}_2(\xi)}{\partial \xi}x_2 = \left\langle -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2} = \frac{L \text{ réelle}}{L \text{ référence}}$$

**b. Élément quadratique à une dimension :**



$$N_1(\xi) = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} ; N_2(\xi) = 1 - \xi^2 ; N_3(\xi) = \frac{\xi(\xi + 1)}{2}$$

$$N_1(x) = \frac{2\left(x - \frac{L}{2}\right)(x - L)}{L^2} ; N_2(x) = \frac{4x(x - L)}{L^2} ; N_3(x) = \frac{2x\left(x - \frac{L}{2}\right)}{L^2}$$

$$x(\xi_i) = \sum_1^3 \bar{N}_i(\xi)x_i = \bar{N}_1(\xi)x_1 + \bar{N}_2(\xi)x_2 + \bar{N}_3(\xi)x_3 = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}x_1 + 1 - \xi^2x_2 + \frac{\xi(\xi + 1)}{2}x_3$$

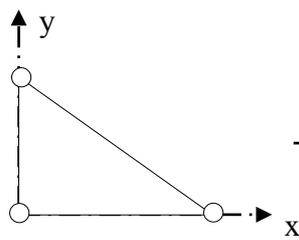
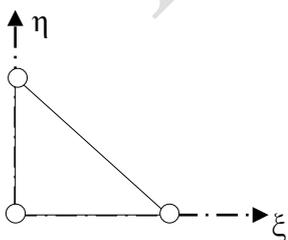
Et le Jacobien  $j$  :

$$j = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{N}_1(\xi)}{\partial \xi}x_1 + \frac{\partial \bar{N}_2(\xi)}{\partial \xi}x_2 + \frac{\partial \bar{N}_3(\xi)}{\partial \xi}x_3 = \left\langle \xi - \frac{1}{2} \quad -2\xi \quad \xi + \frac{1}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

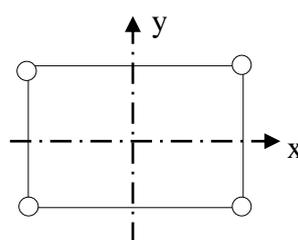
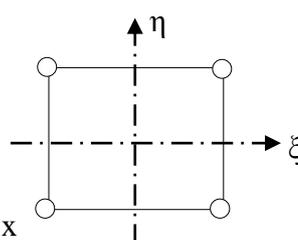
$$j = -\xi L + \xi L + \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$$

**c. Éléments à deux dimensions 2D :**

Déterminer les fonctions de forme et le Jacobien des éléments finis ci-dessous dans les deux espaces.



Éléments triangulaires L



Éléments quadrangulaires L

- **Élément triangulaire Linéaire T<sub>3</sub> :**

Bases polynomiales

&lt; P &gt; = &lt; 1 ξ η &gt; et &lt; P &gt; = &lt; 1 x y &gt;

$$\text{Matrices nodales } [P]_n \quad [P]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [P]_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow [P]_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Fonctions de forme N<sub>i</sub>(ξ,η) et N<sub>i</sub>(x,y) :

$$N_i(\xi, \eta) = \langle P \rangle [P]_n^{-1} = \langle 1 \ \xi \ \eta \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) = \xi \\ N_3(\xi, \eta) = \eta \end{cases}$$

$$N_i(x, y) = \langle P \rangle [P]_n^{-1} = \langle 1 \ x \ y \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} N_1(x, y) = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{a} \\ N_2(x, y) = \frac{x}{a} \\ N_3(x, y) = \frac{y}{a} \end{cases}$$

Jacobien :

$$j = \det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a \cdot a = a^2$$

- **Élément Quadrangulaire Linéaire Q<sub>4</sub>**

Bases polynomiales

&lt; P &gt; = &lt; 1 ξ η ξ.η &gt; et &lt; P &gt; = &lt; 1 x y x.y &gt;

Matrices nodales [P]<sub>n</sub>

$$[P]_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow [P]_n^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[P]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [P]_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{ab} & -\frac{1}{ab} & \frac{1}{ab} & -\frac{1}{ab} \end{bmatrix}$$

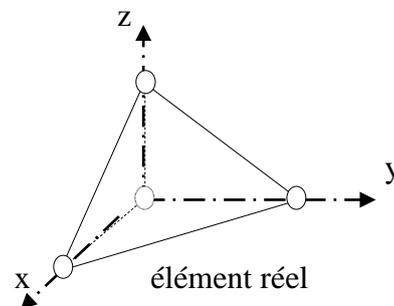
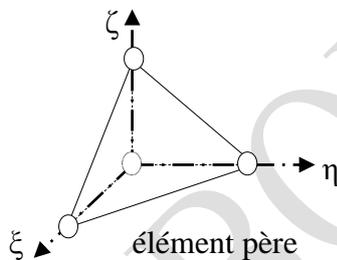
Fonctions de forme N<sub>i</sub>(ξ,η) et N<sub>i</sub>(x,y)

$$N_i(\xi, \eta) = \langle P \rangle [P]_n^{-1} \Rightarrow \begin{cases} N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi - \eta + \xi\eta) \\ N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi - \eta - \xi\eta) \\ N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi + \eta + \xi\eta) \\ N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi + \eta - \xi\eta) \end{cases}$$

$$N_i(x, y) = \langle P \rangle [P]_n^{-1} \Rightarrow \begin{cases} N_1(x, y) = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} \\ N_2(x, y) = \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} \\ N_3(x, y) = \frac{xy}{ab} \\ N_4(x, y) = \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \end{cases}$$

$$j = \det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix} = \frac{ab}{4}$$

**d. Éléments à trois dimensions 3D :** Déterminer les fonctions de forme et le Jacobien de l'élément fini ci-dessous dans les deux espaces.



• **Élément Tétraèdre Linéaire :**

Bases polynomiales  
Matrices nodales  $[P]_n$

$$\langle P \rangle = \langle 1 \ \xi \ \eta \ \zeta \rangle \text{ et } \langle P \rangle = \langle 1 \ x \ y \ z \rangle$$

$$[P]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [P]_n^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow [P]_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{1}{c} & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

Fonctions de forme  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  et  $N_i(x, y, z)$

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \langle P \rangle [P]_n^{-1} \Rightarrow \begin{cases} N_1(\xi, \eta, \zeta) = 1 - \xi - \eta - \zeta \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) = \xi \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) = \eta \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \end{cases}$$

$$N_i(x, y, z) = \langle P \rangle [P]_n^{-1} \Rightarrow \begin{cases} N_1(x, y, z) = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \\ N_2(x, y, z) = \frac{x}{a} \\ N_3(x, y, z) = \frac{y}{b} \\ N_4(x, y, z) = \frac{z}{c} \end{cases}$$

$$j = \det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = abc$$

**Remarque :** Les éléments à continuité  $C^0$  sont des éléments dont la dérivée première est continue et la deuxième dérivée est discontinue. Ce sont des éléments qui travaillent à la traction – compression.

## 7.2. Eléments de référence à continuité $C^1$ (éléments d'Hermite) :

Ces éléments à continuité  $C^1$ , dont la première et la deuxième dérivées sont continues et la troisième dérivée est discontinue, travaillent en flexion. Ils sont obtenus en augmentant le nombre de variables nodales attachées à chaque nœud. Sur chaque nœud, nous avons deux degrés de liberté donc deux variables nodales : un déplacement  $v$  et une rotation  $\theta = dv/dx$ .

### Élément d'Hermite cubique à deux nœuds :



Fonctions d'interpolation :

Bases polynomiales :  $\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3 \rangle$ ;  $\langle P \rangle = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle$

Matrice nodale  $[P]_n$  :

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow [P_n]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \Rightarrow [P_n]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-4}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

Fonctions d'interpolation :

$$N_i(\xi) = \langle P \rangle [P]_n^{-1} \Rightarrow \begin{cases} N_1(\xi) = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\ N_2(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_3(\xi) = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\ N_4(\xi) = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{cases}$$

$$N_i(x) = \langle P \rangle [P]_n^{-1} \Rightarrow \begin{cases} N_1(x) = 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 \\ N_2(x) = x - \frac{4}{L}x^2 + \frac{1}{L}x^3 \\ N_3(x) = \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 \\ N_4(x) = -\frac{1}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \end{cases}$$

Fonctions d'interpolation géométriques :

$$\bar{N}_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} ; \bar{N}_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \text{ et le Jacobien } J = \frac{L}{2}$$

L'élément d'Hermite n'est pas un élément **iso-géométrique**.

**N.B :** Les variables nodales sur l'élément père  $\Omega^f$  et sur l'élément réel  $\Omega^e$  sont différentes en raison des dérivations en  $\xi$  et  $x$  ( $x$  dépend de  $\xi$ ). En fait, on peut écrire les relations suivantes :

$$u_{1\xi} = u_{1x} ; u_{2\xi} = u_{2x} ; \frac{du_1}{d\xi} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = j^e \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{L}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\frac{du_2}{d\xi} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = j^e \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{L}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

Et sous forme matricielle :

$$\{U\}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} \end{bmatrix} \{U\}_x$$

Les éléments d'Hermite sont des éléments qui travaillent en flexion, les variables nodales  $u_i$  représentent des déplacements nodaux et les variables  $du_i/d\xi$  ou  $du_i/dx$  représentent les rotations des nœuds. Ainsi, on peut écrire les relations suivantes :

- **Changement de repère :**

$$x(\xi) = N_1(\xi) x_1 + N_2(\xi) x_2$$

- **Champs des déplacements et rotations :**

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum N_i(\xi) v_i = N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2 \\ &= N_1(\xi) v_1 + \frac{2}{L} N_2(\xi) \theta_1 + N_3(\xi) v_2 + \frac{2}{L} N_4(\xi) \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{dV(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \sum N_i(\xi) v_i = N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2 \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( N_1(\xi) v_1 + \frac{2}{L} N_2(\xi) \theta_1 + N_3(\xi) v_2 + \frac{2}{L} N_4(\xi) \theta_2 \right) \\ &= \frac{2}{L} N_1(\xi) v_1 + \frac{4}{L^2} N_2(\xi) \theta_1 + \frac{2}{L} N_3(\xi) v_2 + \frac{4}{L^2} N_4(\xi) \theta_2 \end{aligned}$$

Ou sous forme matricielle :

$$V(x) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ \frac{2}{L} \theta_1 \\ v_2 \\ \frac{2}{L} \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \theta(x) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \begin{Bmatrix} \frac{2}{L} v_1 \\ \frac{4}{L^2} \theta_1 \\ \frac{2}{L} v_2 \\ \frac{4}{L^2} \theta_2 \end{Bmatrix}$$

## Chapitre III : Mise en Œuvre de la Méthode des Éléments Finis (Application aux Eléments Barre et Poutre)

### 1. Introduction

La théorie d'élasticité linéaire a pour objectif d'étudier le comportement mécanique des solides déformables, considérées comme milieux continus, dont le matériau obéit à une loi constitutive linéaire réversible. Elle admet que les déplacements et les déformations provoqués par les sollicitations sont faibles. Dans cette partie, nous supposons que le matériau est homogène, isotrope et élastique linéaire.

### 2. Principe de l'énergie potentielle minimale

On dit qu'un état d'équilibre est stable, lorsque les déplacements cinématiquement admissibles qui satisfont les conditions aux limites minimisent l'énergie potentielle et réciproquement. Donc à l'équilibre la variation de l'énergie potentielle est nulle, soit  $\delta\pi = 0$ , on dit que le domaine élastique est stationnaire.

- **Types d'équilibre :**

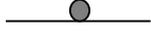
stable



instable



indéterminé



L'énergie potentielle totale d'un système est définie comme suit :  $\Pi = E_d + E_e$

$E_d$  est l'énergie potentielle interne de déformation.

$E_e$  est l'énergie potentielle des forces extérieures.

Quand on applique les forces, il y a perte d'énergie potentielle externe, qui est égale au travail des forces extérieures  $W_e$ . Donc on a :  $\Pi = E_d - W_e$ .

Le domaine élastique étudié étant stationnaire revient à dire que la variation  $\delta\Pi = 0$  ce qui implique que :  $\delta\Pi = \delta E_d - \delta W_e = 0$ . Avec :

$\delta E_d$  est la 1<sup>ère</sup> variation de l'énergie potentielle interne de déformation.

$\delta W_e$  est la 1<sup>ère</sup> variation de l'énergie potentielle des forces extérieures.

Par définition, nous avons les quantités suivantes :

$$E_d = \int \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dv \quad \text{et} \quad \delta E_d = \int \delta(\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}) dv$$

$\{\varepsilon\}$  et  $\{\sigma\}$ , respectivement vecteur déformations et vecteur contraintes. Et le travail des forces extérieures :

$$W_e = \int \{U\}^T \{F_v\} dv + \int \{U\}^T \{F_s\} ds + \sum \{U\}^T \{F_p\}_i \quad \text{où} :$$

$\{U\}$  est le champ des déplacements.

$\{F_v\}$  est le vecteur forces volumiques.

$\{F_s\}$  est le vecteur forces surfaciques.

$\{F_p\}$  est le vecteur forces ponctuelles.

En utilisant les expressions de  $E_d$  et  $W_e$ , la variation de l'énergie potentielle totale devient :

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \int \delta(\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}) dv - \int \{U\}^T \{F_v\} dv + \int \{U\}^T \{F_s\} ds + \sum \{U\}^T \{F_p\}_i = 0$$

### 3. Approximation par la méthode des éléments finis

Considérons un domaine  $\Omega$  discrétisé en plusieurs éléments finis (sous domaines)  $\Omega_i^e$  et écrivons l'expression précédente sous sa forme discrétisée pour un élément  $\Omega_i^e$  du domaine global  $\Omega$  :  $\int \delta(\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}) dv^e - \int \{U\}^T \{F_v\} dv^e + \int \{U\}^T \{F_s\} ds^e + \sum \{U\}^T \{F_p\}_i^e = 0$ , où  $\{U\}^T$  désigne le champ des déplacements qui forment les inconnues du problème. Nous avons pour un élément en 3D par exemple :  $\{U\}^T = \langle u, v, w \rangle$  tel que :

$$\begin{cases} u = \sum N_i u_i = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_n u_n \\ v = \sum N_i v_i = N_1 v_1 + N_2 v_2 + \dots + N_n v_n \\ w = \sum N_i w_i = N_1 w_1 + N_2 w_2 + \dots + N_n w_n \end{cases}$$

Où :

$N_i$  sont les fonctions d'interpolation de l'élément et  $n$  le nombre de nœuds ou de variables nodales de l'élément. Le système précédent peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\{U\}^e = [N] \{u_i\}^e$$

$[N]$  étant la matrice des fonctions d'interpolation de l'élément.

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

Et:

$\{u_i\}^e = \langle u_1, v_1, w_1, \dots, u_n, v_n, w_n \rangle$  est le vecteur élémentaire des déplacements nodaux.

- **Relations entre déplacements et déformations :**

Le vecteur déformation et le vecteur déplacement ont pour composantes respectives :

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz}\} \text{ et } \{U\}^T = \{u \ v \ w\}$$

La relation entre les deux vecteurs s'écrit :

$$\{\varepsilon\}^T = [\nabla] \{U\}, \text{ } [\nabla] \text{ étant l'opérateur de dérivation défini par :}$$

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Qui peut s'écrire sous sa forme matricielle :

$$\{\varepsilon\} = [\nabla]\{U\} = [\nabla][N]\{u_i\} = [B]\{u_i\}$$

[B] est la matrice déformation ou des dérivées partielles des fonctions d'interpolation qui relie les déplacements aux déformations. [B] s'écrit donc d'une manière générale :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Puisque le matériau est isotrope, élastique linéaire, il obéit alors à la loi de Hooke suivante :

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] = [D][B]\{u\}$$

Où [D] est la matrice des coefficients élastiques ou matrice d'élasticité. Si on revient à l'expression de l'énergie potentielle totale  $\Pi$ , on peut écrire :

$$\delta \Pi = \{\delta u_i\}^T \left[ \int [B]^T [D] [B] \{u\} dV^e - \int [N]^T \{F_v\} dv - [N]^T \{F_s\} dS^e - \sum [N]^T \{F_p\}_i \right] = 0$$

Qui peut se mettre après intégration sous la forme :

$$\{\delta u_i\}^T [[K]^e \{u_i\}^e - \{F\}^e] = 0 \Rightarrow [K]^e \{u_i\}^e - \{F\}^e = 0$$

Avec :

$$[K]^e = \int [B]^T [D] [B] dV^e \text{ est la matrice de rigidité élémentaire et}$$

$\{F\}^e = \int [N]^T \{F_v\} dv - [N]^T \{F_s\} dS^e - \sum [N]^T \{F_p\}_i$  est le vecteur forces élémentaire (volumiques, surfaciques et ponctuelles). Nous obtenons finalement le système d'équations linéaire à résoudre suivant :

$$[K]^e \{U\}^e - \{F\}^e = 0$$

- **Propriétés de la matrice  $[K]^e$  :**

$[K]^e$  est une matrice carrée symétrique définie positive ( $\det > 0$ ), sa taille dépend du type d'élément donc du nombre de degrés de liberté.

- **Remarque :** le sens de numérotation des nœuds des éléments ou de l'ensemble de la structure étudiée, influe sur la répartition des termes  $k_{ij}$  de la matrice de rigidité globale  $[K]^g$ , car cette matrice est une matrice bande.

#### 4. Application aux éléments à une dimension

**a. Élément de Lagrange à continuité  $C^0$  :** Ce sont des éléments iso-géométriques qui travaillent en traction – compression et subissent des déformations et contraintes uni-axiales. La loi de Hooke s'écrit :  $[\sigma] = \epsilon E$  et l'énergie de déformation de l'élément s'écrit :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA (\epsilon_{xx})^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA \{\epsilon_{xx}\}^T \{\epsilon_{xx}\} dx$$

$$E_d = \frac{1}{2} \int_0^L EA \{u\}^T [B]^e [B]^e \{u\} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \{u\}^T [K]^e \{u\} dx$$

Avec :

$$[K]^e = \int_0^L [B]^e [B]^e EA dx$$

Sachant que :

$$dx = \frac{dx}{d\xi} d\xi = \frac{L}{2} \text{ et } [B]^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(x)}{\partial x} & \frac{\partial N_2(x)}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

Finalement la matrice de rigidité d'un élément linéaire est obtenue en intégrant la quantité suivante :

$$[K]^e = \int_0^L [B]^e [B]^e EA dx = [K]^e = \frac{4EA}{L^2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \frac{2}{L} d\xi ;$$

$$\text{soit : } [K]^e = \frac{2EA}{L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} d\xi = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Et la matrice de rigidité d'un élément **quadratique** est :

$$[K]^e = \frac{4EA}{L^2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \frac{2}{L} d\xi$$

$$[K]^e = \frac{2EA}{L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \xi - \frac{1}{2} \\ -2\xi \\ \xi + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi - \frac{1}{2} & -2\xi & \xi + \frac{1}{2} \end{bmatrix} d\xi = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

**Remarque :** Les matrices de rigidité élémentaires se déduisent de la matrice de rigidité élémentaire de référence. Il suffit donc, de calculer une fois cette matrice pour tous les éléments de même type.

**b. Élément d'Hermite à continuité C<sup>1</sup> :** Les éléments Hermitiens, sont des éléments qui travaillent en flexion. Ils subissent des déformations et contraintes axiales et tangentielles. La loi de Hooke s'écrit :  $[\sigma] = \epsilon E$  et l'énergie de déformation de l'élément s'écrit :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dx = \frac{1}{2} \int_0^L E (\epsilon_{xx})^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L E y^2 \left( \frac{d\theta(x)}{dx} \right)^2 dx$$

Nous avons :

$$u(x) = -y \theta(x); \quad v(x); \quad \theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} \quad \text{et} \quad \int y^2 dS = I_z$$

d'où :

$$E_d = \int_0^L E I_z \left( \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 dx$$

Nous avons d'autres parts :

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{dv(x)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \frac{dv(x)}{d\xi} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{4}{L^2} \frac{d^2 v(x)}{d\xi^2}$$

$$v(x) = \sum_i N_i(x) v_i \Rightarrow \frac{dv(x)}{dx} = \frac{2}{L} \frac{dv(x)}{d\xi} v_i = \frac{2}{L} \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} v_i$$

Donc :

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = [B]^e v_i = \frac{4}{L^2} \frac{d^2 N_i(\xi)}{d\xi^2} v_i = \frac{4}{L^2} [B]^r v_i \Rightarrow [B]^e = \frac{4}{L^2} [B]^r$$

La matrice de rigidité de l'élément d'Hermite s'obtient en intégrant la quantité :

$$[K]^e = \int_0^L [B]^e T E I_z [B]^e dx = \frac{8EI_z}{L^3} \int_{-1}^1 [B]^r T [B]^r d\xi$$

$$[K]^e = \frac{8EI_z}{L^3} \int_{-1}^1 [B]^r r^T [B]^r d\xi = \frac{8EI_z}{L^3} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\xi \\ \frac{L}{4}(-1+3\xi) \\ -\frac{3}{2}\xi \\ \frac{L}{4}(1+3\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\xi & \frac{L}{4}(-1+3\xi) & -\frac{3}{2}\xi & \frac{L}{4}(1+3\xi) \end{bmatrix} d\xi$$

$$[K]^e = \frac{8EI}{L^3} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3L}{8}\xi(-1+3\xi) & -\frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3L}{8}\xi(1+3\xi) \\ \frac{3L}{8}\xi(-1+3\xi) & \frac{L}{4}(-1+3\xi)^2 & -\frac{3L}{8}\xi(-1+3\xi) & \frac{L^2}{16}(1-6\xi+9\xi^2) \\ -\frac{9}{4}\xi^2 & -\frac{3L}{8}\xi(-1+3\xi) & \frac{9}{4}\xi^2 & -\frac{3L}{8}\xi(1+3\xi) \\ \frac{3L}{8}\xi(1+3\xi) & \frac{L^2}{16}(1-6\xi+9\xi^2) & -\frac{3L}{8}\xi(1+3\xi) & \frac{L}{4}(-1+3\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi$$

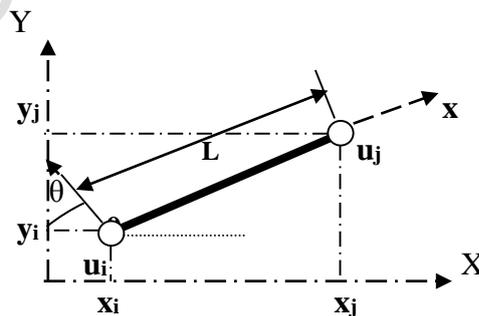
Après intégration on trouve la matrice en flexion simple :

$$[K]^e = \frac{12EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

**Remarque :** Ces matrices locales de rigidité élémentaires sont exprimées dans les repères locaux liés aux différents éléments. Pour calculer la matrice de rigidité globale  $[K]^g$  de la structure, il faut exprimer les matrices locales dans le repère général de la structure étudiée.

## 5. Matrices de rigidité dans le repère global (changement de repère)

**a. Matrice de rigidité d'un élément treillis :** Considérons l'élément linéaire de Lagrange de la figure ci-dessous :



Les formules des axes permettant de passer du repère global au repère local d'écrivent :

$$\begin{aligned} x &= X \cos\theta + Y \sin\theta \\ y &= -X \sin\theta + Y \cos\theta \end{aligned}$$

et celle reliant les vecteurs des déplacements nodaux locaux  $\{u_i\}$  et globaux  $\{U\}$  est :

$$\{u_i\} = [P]\{U_i\} \quad ; \text{ où } [P] \text{ est la matrice de passage, soit :}$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix}$$

L'énergie de déformation exprimée dans le repère globale devient alors :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_0^L \{u\}^T [K]^e \{u\} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \{U\}^T \overbrace{[P]^T [K]^e [P]}^{[K]_g^e} \{U\} dx$$

Ce qui donne :

$$[K]_g^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$[K]_g^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

- **Vecteurs forces local et global** : La relation entre les vecteurs chargements local et global s'exprime comme suit :

$$\{f_i\} = [P]\{F_i\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_i \\ 0 \\ f_j \\ 0 \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \end{Bmatrix}_g^e$$

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ 0 \\ f_j \\ 0 \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} F_{iX}\cos\theta + F_{iY}\sin\theta \\ -F_{iX}\sin\theta + F_{iY}\cos\theta \\ F_{jX}\cos\theta + F_{jY}\sin\theta \\ -F_{jX}\sin\theta + F_{jY}\cos\theta \end{Bmatrix}$$

- **Calcul des forces nodales équivalentes** : Dans le cas des charges réparties, il faut transformer ces charges en chargements nodaux équivalents afin de pouvoir construire les vecteurs forces élémentaires. Pour les éléments à une dimension, nous avons en traction – compression :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \int_0^L [N]^T \{q\} dx = \int_0^L \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} q \cdot dx = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} q \cdot dx = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{Bmatrix}$$

Et en flexion simple :

$$\{f\} = \begin{pmatrix} f_i \\ m_i \\ f_j \\ m_j \end{pmatrix} = \int_0^L [N]^T \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} dx = \int_0^L \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 \\ 0 & N_2(x) \\ N_3(x) & 0 \\ 0 & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} \cdot dx = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 \\ x - \frac{4}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \\ \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 \\ -\frac{1}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-qL}{2} \\ \frac{-qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{pmatrix}$$

**b. Matrice de rigidité d'un élément Hermitien :** Pour l'élément d'Hermite en flexion composée, les calculs sont similaires qu'en élément linéaire de Lagrange, soit :

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^e = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} & 0 & -\frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & \frac{4I}{L^2} & 0 & -\frac{6I}{L} & \frac{2I}{L^2} \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} & 0 & \frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & \frac{2I}{L^2} & 0 & -\frac{6I}{L} & \frac{4I}{L^2} \end{bmatrix}$$

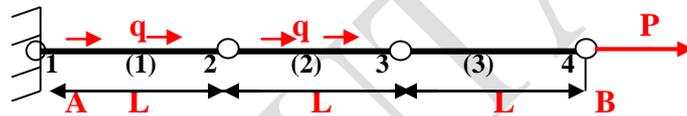
Soit après double produit matriciel :

$$[K]^e = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) C.S & -\frac{6I}{L} S & -AC^2 - \frac{12I}{L^2} S^2 & \left(-A + \frac{12I}{L^2}\right) C.S & -\frac{6I}{L} S \\ AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2 & \frac{6I}{L} C & \left(-A + \frac{12I}{L^2}\right) C.S & -AS^2 - \frac{12I}{L^2} C^2 & \frac{6I}{L} C & \frac{6I}{L} C \\ \text{Symétrie} & 4I & \frac{6I}{L} S & -\frac{6I}{L} C & 2I & \\ AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) C.S & \frac{6I}{L} S & -\frac{6I}{L} C & \frac{6I}{L} S & \\ AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2 & -\frac{6I}{L} C & \frac{6I}{L} C & -\frac{6I}{L} C & \frac{6I}{L} C & \\ & & & & & 4I \end{bmatrix}$$

## 6. Applications

### a. Poutres continues en traction-compression :

**Exercice 1 :** une poutre continue AB de longueur  $3L$  est encastée en A et soumise au rgement suivant : Calculer les inconnues nodales et les efforts internes.



- Système d'équations à résoudre :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \\ P \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = 0; u_2 = \frac{L}{EA} \left( \frac{3qL}{2} + P \right); u_3 = \frac{2L}{EA} (qL + P); u_4 = \frac{L}{EA} (2qL + 3P)$$

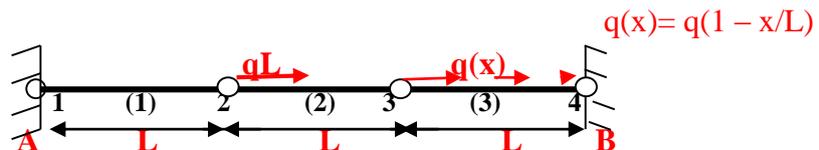
- Efforts internes :

$$\begin{Bmatrix} N_{12} \\ V_{21} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(2qL + P) \\ qL + P \end{Bmatrix} : \text{Traction}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{23} \\ V_{32} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(qL + P) \\ P \end{Bmatrix} : \text{Traction}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{34} \\ V_{43} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ P \end{Bmatrix} ; \text{Traction}$$

**Exercice :** la poutre continue AB de longueur  $3L$  est encastée en A et B. Elle est soumise au chargement suivant : Calculer les inconnues nodales et les efforts internes.



- Système d'équations à résoudre :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ qL \\ qL \\ \frac{qL}{6} \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = 0; u_2 = \frac{7qL^2}{9EA}; u_3 = \frac{5qL^2}{9EA}; u_4 = 0$$

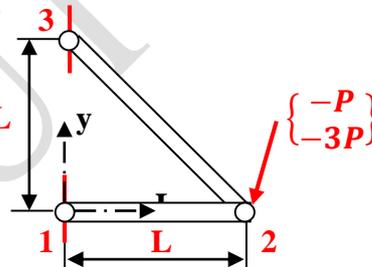
- **Efforts internes :**

$$\begin{Bmatrix} N_{12} \\ V_{21} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-7qL}{9} \\ \frac{7qL}{99} \end{Bmatrix} : \text{Traction}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{23} \\ V_{32} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2qL}{9} \\ -\frac{2qL}{9} \end{Bmatrix} : \text{Compression}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{34} \\ V_{43} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{3} \\ \frac{qL}{6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2qL}{9} \\ -\frac{13qL}{18} \end{Bmatrix} ; \text{Traction}$$

**Exercice 3 :** Soit le treillis plan de la figure suivante :  
Calculer les inconnues nodales et les efforts internes.



- **Inconnues nodales :**

$$[K]_1^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } [K]_2^e = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Système à résoudre :**

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2\sqrt{2} & 0 & -1 & 1 & 2\sqrt{2} + 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ -P \\ -3P \end{Bmatrix}$$

On trouve :

$$u_3 = -\frac{4PL}{EA} \text{ et } u_4 = -(4 + 6\sqrt{2}) \frac{PL}{EA}$$

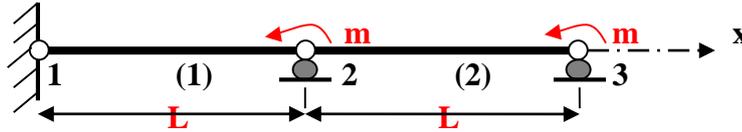
$$R_{1x} = 4P ; R_{1y} = 0 ; R_{2x} = -3P ; R_{2y} = 3P$$

- **Efforts internes :**

$$N_{13} = 4P : \text{Compression} ; N_{23} = -3\sqrt{2}P : \text{Traction}$$

**b. Poutres continues en flexion simple :**

**Exercice 1 :** La poutre droite de longueur  $2L$  représentée sur la figure est encastree au nœud 1 et repose sur un appui simple aux nœuds 2 et 3. Elle est sollicitée par deux moments  $m$ .



1. Calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts internes.
3. Tracer le diagramme des efforts tranchants et le diagramme des moments fléchissants.

**Solution :**

1. L'assemblage conduit au système d'équations suivant :

$$[K]\{U\} = \{F\} \Rightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1y} \\ M_{1z} \\ R_{2y} \\ m \\ R_{3y} \\ m \end{Bmatrix}$$

On trouve :

$$\theta_2 = \frac{mL}{14EI} \text{ et } \theta_3 = \frac{3mL}{14EI}$$

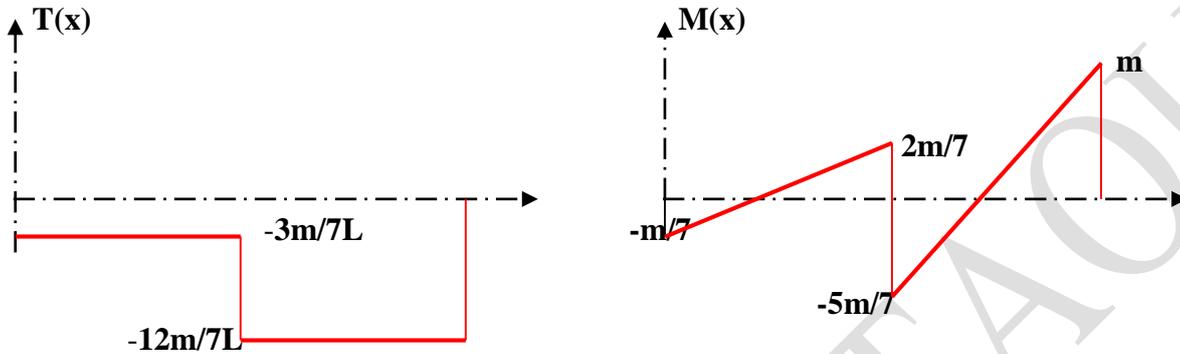
$$R_{1x} = \frac{3m}{7L} ; M_{1z} = \frac{m}{7} ; R_{2y} = \frac{9m}{7L} ; R_{3y} = \frac{-12m}{7L}$$

**2. Efforts internes :**

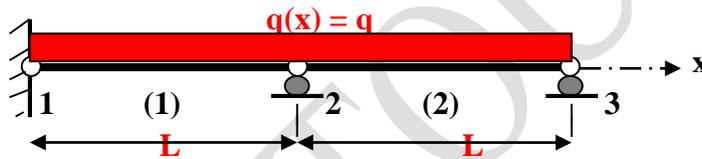
$$\begin{Bmatrix} T_{12} \\ M_{12z} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = [K]_1^e \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3m}{7L} \\ \frac{m}{7} \\ -\frac{3m}{7L} \\ \frac{2m}{7} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_{23} \\ M_{23z} \\ T_{32} \\ M_{32} \end{Bmatrix} = [K]_2^e \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{12m}{7L} \\ \frac{5m}{7} \\ -\frac{12m}{7L} \\ \frac{7L}{m} \end{Bmatrix}$$

### 3. Diagrammes de T(x) et M(x) :



**Exercice 2 :** La poutre droite de longueur  $2L$  représentée sur la figure est encastée au nœud 1 et repose sur un appui simple aux nœuds 2 et 3. Elle est sollicitée par une charge répartie  $q$ .



1. L'assemblage conduit au système d'équations suivant :

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1y} \\ M_{1z} \\ R_{2y} \\ M_{2z} = 0 \\ R_{3y} \\ M_{3z} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{-qL}{2} \\ \frac{-qL^2}{12} \\ -qL \\ 0 \\ -qL \\ \frac{2}{12} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

On trouve :

$$\theta_2 = \frac{-qL^3}{168EI} \text{ et } \theta_3 = \frac{qL^3}{42EI}$$

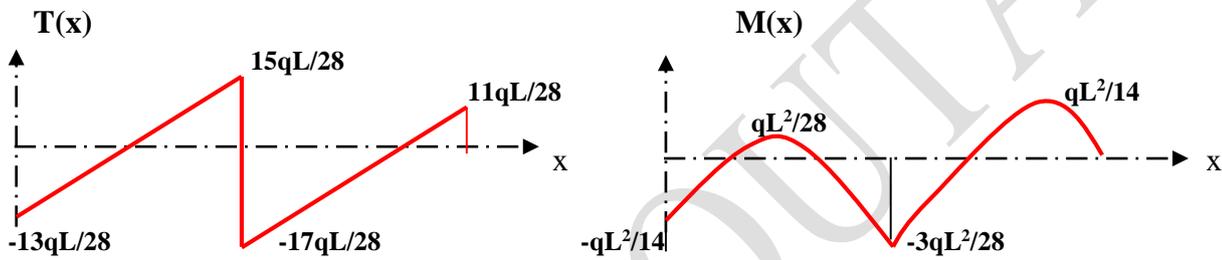
$$R_{1x} = \frac{13qL}{28} ; M_{1z} = \frac{qL^2}{14} ; R_{2y} = \frac{8qL}{7} ; R_{3y} = \frac{11qL}{28}$$

2. Efforts internes :

$$\begin{Bmatrix} T_{12} \\ M_{12z} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = [K]_1^e \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{13qL}{28} \\ \frac{qL^2}{14} \\ \frac{15qL}{28} \\ \frac{-3qL^2}{28} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_{23} \\ M_{23z} \\ T_{32} \\ M_{32} \end{Bmatrix} = [K]_2^e \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{17qL}{28} \\ \frac{3qL^2}{28} \\ \frac{11qL}{28} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### 3. Diagrammes de T(x) et M(x) :



## Chapitre 4 : Matrice de rigidité des éléments bidimensionnels

### 1. Rappel sur la loi de comportement en élasticité linéaire

L'état de contrainte et l'état de déformation en un point (M) d'un solide (S), sont représentés par un vecteur à six composantes, soit :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz} \rangle \text{ et } \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{xz} \ \varepsilon_{yz} \rangle$$

Pour matériau homogène et isotrope, les relations déformations - contraintes s'écrivent dans le cas général :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \text{ avec } E : \text{ module de Young} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \text{ et } \nu : \text{ coefficient de Poisson} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} \end{aligned}$$

Inversement, on peut écrire sous forme matricielle la relation contraintes – déformations :  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$  ; Avec  $[D]$  : matrice des coefficients élastiques dont les termes sont :

$$[D] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ où } : a = \frac{1-2\nu}{2}$$

### 2. Cas particuliers d'élasticité

Dans certaines configurations de géométrie et de sollicitation, il n'est pas nécessaire de considérer un état de déformations et de contraintes complètement tridimensionnel. C'est le cas lorsqu'on considère des poutres sous certaines sollicitations. C'est le cas également en élasticité plane où l'on considère, selon certaines hypothèses, des états simplifiés de déformations et de contraintes (états plans de déformations et de contraintes). Si on peut appliquer l'hypothèse des *déformations planes*, alors on considère que l'on a un état plan de déformations et par conséquent, la matrice des déformations se réduit aux termes non nuls suivants :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'état de *déformations planes* correspond, pour ce qui est des contraintes, à un état de contraintes tridimensionnel où certaines composantes sont néanmoins nulles. En effet, pour cet état, les termes non nuls de la matrice des contraintes sont les suivants :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}; \text{ avec: } \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Cet état de déformations peut se produire pratiquement pour des objets très épais dans certaines conditions de sollicitation. On résume alors la relation entre les contraintes et les déformations pour un état de déformations planes par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

non nuls suivants :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'état de **contraintes planes** correspond pour ce qui est des déformations à un état de déformations tridimensionnel où certaines composantes sont néanmoins nulles. En effet, pour un état de **contraintes planes**, les termes non nuls de la matrice des déformations sont les suivants :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}; \text{ avec: } \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Cet état de contraintes peut notamment être considéré, de manière pratique, pour des plaques minces chargées dans leur plan. On résume alors la relation entre les contraintes et les déformations, pour un état de contraintes planes par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

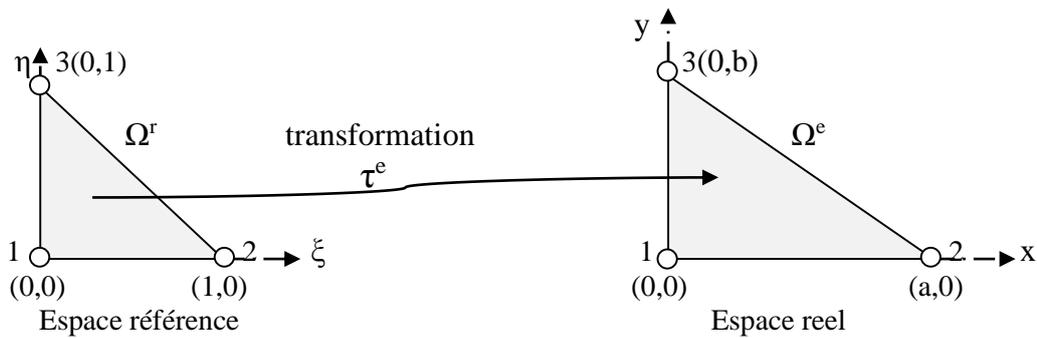
### 3. Eléments plans triangulaires et quadrangulaires d'ordre 1 (linéaires): T<sub>3</sub> et Q<sub>4</sub>

Ce type d'éléments travaillent dans leur plan moyen et sont sollicités en traction – compression. Les variables nodales représentent les deux déplacements horizontal et vertical.

Les fonctions d'interpolation N<sub>ij</sub> sont des fonctions linéaires ou d'ordre 1.

#### 3.1. Eléments triangulaires linéaires T<sub>3</sub>

Considérons un élément réel Ω<sup>e</sup> de dimensions a x b x t et son image Ω<sup>r</sup> dans l'espace de référence (ξ,η), soit :



Nous avons vu dans les chapitres précédents les fonctions d'interpolation et les relations de transformation des coordonnées suivantes (voir chapitre II):

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) = \xi \\ N_3(\xi, \eta) = \eta \end{cases} \text{ et}$$

$$\begin{cases} N_1(x, y) = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \\ N_2(x, y) = \frac{x}{a} \\ N_3(x, y) = \frac{y}{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta)x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta)x_3 \\ y(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)y_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta)y_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta)y_3 \end{cases}$$

Ainsi que la matrice Jacobienne J la transformation de l'élément :

$$j = \det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = a \cdot b = a \cdot b$$

Le Jacobien de l'élément  $j = a \cdot b = 2S^e$  ( $S^e$  aire de l'élément réel). Nous avons vu aussi que la matrice de rigidité  $K^e$ , se calcule par la relation suivante :

$$[K^e] = \iiint [B]^t [D] [B] dx dy dz$$

Où :  $[D]$  est la matrice des coefficients élastiques;

$[B]$  est la matrice déformation (reliant les déformations aux déplacements) définie par :

$$[B]_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

De même pour l'élément de référence :

$$[B]_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

Dans le cas général, nous avons les relations :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\eta}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}$$

Et

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\eta}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

D'où la matrice B de l'élément :

$$[B]_{xy} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

Et

$$[B]_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En état de contraintes planes la matrice des coefficients élastiques D s'écrit :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité  $K^e$  de l'élément est obtenue en intégrant dans l'espace réel ou de référence la quantité suivante :

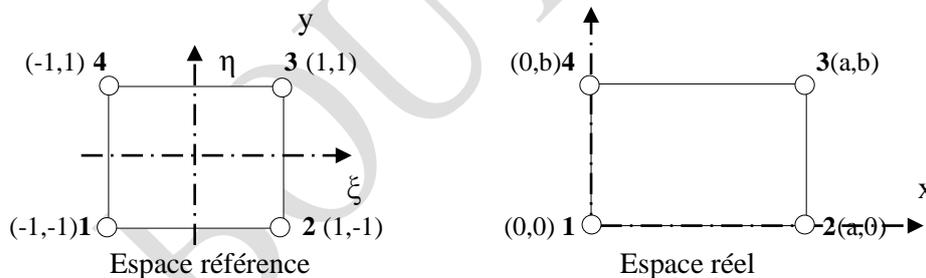
$$[K^e] = \iiint [B]^t [D] [B] dx dy dz = t \iint_{0^0}^{a^b} [B]^t [D] [B] dx dy ; t \text{ épaisseur de l'élément.}$$

Après tout calcul fait, on obtient :

$$[K]^e = \frac{t E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{b}{a} - \frac{a}{2b}(\nu-1) & \frac{\nu+1}{2} & -\frac{b}{a} & \frac{\nu-1}{2} & \frac{a}{2b}(\nu-1) & -\nu \\ \frac{\nu+1}{2} & \frac{a}{b} - \frac{b}{2a}(\nu-1) & -\nu & \frac{b}{a}(\nu-1) & \frac{\nu-1}{2} & -\frac{a}{b} \\ -\frac{b}{a} & -\frac{a}{b} & \frac{b}{a}(\nu-1) & 0 & 0 & \nu \\ \frac{\nu-1}{2} & \frac{b}{a}(\nu-1) & 0 & -\frac{b}{a}(\nu-1) & -\frac{\nu-1}{2} & 0 \\ \frac{a}{2b}(\nu-1) & \frac{\nu-1}{2} & 0 & \frac{\nu-1}{2} & \frac{a}{2b}(\nu-1) & 0 \\ -\nu & -\frac{a}{b} & \nu & 0 & 0 & \frac{a}{b} \end{bmatrix}$$

### 3.2. Eléments quadrangulaires linéaires $Q_4$

Considérons un élément réel  $\Omega^e$  de dimensions  $a \times b \times t$  et son image  $\Omega^r$  dans l'espace de référence  $(\xi, \eta)$ , soit :



Les fonctions d'interpolation  $N_i(x, y)$  et  $N_i(\xi, \eta)$  ainsi que les relations de transformation s'écrivent (voir chapitre II) :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi - \eta + \xi\eta) \\ N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi - \eta - \xi\eta) \\ N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi + \eta + \xi\eta) \\ N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi + \eta - \xi\eta) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} N_1(x, y) = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} \\ N_2(x, y) = \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} \\ N_3(x, y) = \frac{xy}{ab} \\ N_4(x, y) = \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta)x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta)x_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta)x_4 \\ y(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)y_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta)y_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta)y_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta)y_4 \end{cases}$$

Le jacobien de l'élément s'écrit :

$$j = \det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix} = \frac{ab}{4}$$

La matrice de rigidité  $[K]^e = \iiint [B]^t [D] [B] dx dy dz$ . Avec :

$$[B]_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$[B]_{xy} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} \\ -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix}$$

Et

$$[B]_{\xi\eta} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \\ -(1-\xi) & -(1-\eta) & (1+\xi) & (1-\eta) & (1+\xi) & (1+\eta) & (1-\xi) & -(1+\eta) \end{bmatrix}$$

En état de contraintes planes, la matrice de rigidité  $[K]^e$  de l'élément est obtenue en intégrant dans l'espace réel ou de référence la quantité suivante :

$$[K]^e = \iiint [B]^t [D] [B] dx dy dz = t \iint_0^a \iint_0^b [B]^t [D] [B] dx dy ; t \text{ épaisseur de l'élément.}$$

Soit après tout calcul fait et pour  $a = b$  (élément carré de côté  $a$ ) :

$$[K]^e = \frac{tE}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{6} & \frac{(1+\nu)}{8} & -\frac{(3+\nu)}{12} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{1-3\nu}{8} \\ \frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{(1-3\nu)}{12} & \frac{\nu}{8} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3+\nu)}{12} \\ -\frac{(3+\nu)}{12} & \frac{(1-3\nu)}{12} & \frac{3-\nu}{6} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} & \frac{(1+\nu)}{8} \\ -\frac{(1-3\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{(1-3\nu)}{6} & -\frac{(3+\nu)}{8} & \frac{(1+\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} \\ -\frac{(3-\nu)}{8} & -\frac{(1+\nu)}{6} & \frac{\nu}{8} & \frac{(1-3\nu)}{6} & \frac{3-\nu}{8} & \frac{(1+\nu)}{12} & -\frac{(3-\nu)}{8} & -\frac{(1-3\nu)}{8} \\ -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{8} & -\frac{(1-3\nu)}{6} & -\frac{(3+\nu)}{8} & \frac{(1+\nu)}{6} & \frac{3-\nu}{8} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{\nu}{8} \\ \frac{\nu}{6} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} & \frac{(1+\nu)}{12} & -\frac{(3-\nu)}{8} & \frac{1-3\nu}{6} & \frac{3-\nu}{8} & -\frac{(1+\nu)}{6} \\ \frac{1-3\nu}{8} & -\frac{(3+\nu)}{12} & \frac{(1+\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} \end{bmatrix}$$

- **Remarque :** Dans les codes (Logiciels) de calcul, les termes  $k_{ij}$  des matrices de rigidité élémentaires  $K^e_i$ , sont calculés numériquement par la méthode de Gauss.

#### 4. Rappel sur la méthode d'intégration de Gauss

C'est une méthode qui permet le calcul numérique des intégrales, en passant par des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  aux coordonnées naturelles  $(\xi, \eta, \zeta)$  définies dans des intervalles  $[-1, 1]$  par changement de repère. Soit :

- **Fonction à une variable**

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x(\xi_i)) d\xi = \frac{b-a}{2} \sum_i^n w_i(f(\xi_i))$$

- **Fonction à deux variables**

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{d-c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi_i), y(\eta_j)) d\xi d\eta = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{d-c}{2} \sum_i^n \sum_j^m w_i w_j (f(\xi_i, \eta_j))$$

- **Fonction à trois variables**

$$I = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dx dy dz = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{d-c}{2} \cdot \frac{f-e}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi_i), y(\eta_j), z(\zeta_k)) d\xi d\eta d\zeta = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{d-c}{2} \cdot \frac{f-e}{2} \sum_i^n \sum_j^m \sum_k^l w_i w_j w_k (f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k))$$

Avec :  $w_i, w_j$  et  $w_k$  : Poids d'intégration ;  $\xi_i, \eta_j$  et  $\zeta_k$  : Points d'intégration de Gauss et  $n, m, l$  : Nombres de points de points d'intégration.

Les points d'intégration sont des points situés à l'intérieur des éléments finis considérés. Ils sont choisis à partir du tableau de Gauss ci-dessous.

Nombre de points	Valeurs de: $\xi, \eta, \zeta$	Valeurs des : w	Degré max. de f(...)
1	0	2	1
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	3
3	0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$	5
4	$\pm \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}$ $\pm \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}}}{7}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{\frac{6}{5}}}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{\frac{6}{5}}}$	7

Les coordonnées cartésiennes sont calculées à partir des coordonnées naturelles par les relations suivantes :

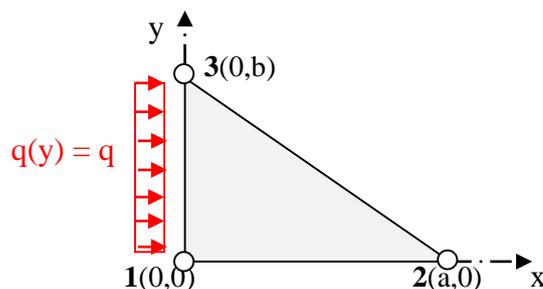
$$\begin{cases} x(\xi_i) = \frac{b-a}{2} \xi_i + \frac{b+a}{2} \\ y(\eta_j) = \frac{d-c}{2} \eta_j + \frac{d+c}{2} \\ z(\zeta_k) = \frac{f-e}{2} \zeta_k + \frac{f+e}{2} \end{cases}$$

### 5. Calcul des charges ou forces nodales équivalentes

Dans la méthode des éléments finis, toutes les charges sont appliquées aux nœuds. Les charges réparties sont transformées en forces nodales équivalentes et sont calculées par les intégrales ci-dessous :

$$\{f\}^e = \iiint [N]^t \{q\} dx dy dz$$

Où  $[N]^t$  : est la matrice des fonctions d'interpolation  $N_i$  ;  $f^e$  : vecteur forces équivalentes et  $q$  : charge répartie appliquée sur l'épaisseur  $t$  de l'élément. Soit pour un élément fini triangulaire linéaire  $T_3$  ( $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{t}$ ) soumis à une charge répartie constante  $q(y) = q$  :



$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

Puisque la charge est selon y, le vecteur forces nodales équivalentes est :

$$\{f\}^e = \int_0^b \int_0^t \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix} dydz = t \int_0^b \begin{Bmatrix} N_1 q \\ 0 \\ N_2 q \\ 0 \\ N_3 q \\ 0 \end{Bmatrix} dy = t \int_0^b \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{a}\right) \cdot q \\ 0 \\ \frac{x}{a} \cdot q \\ 0 \\ \frac{y}{a} \cdot q \\ 0 \end{Bmatrix} dy$$

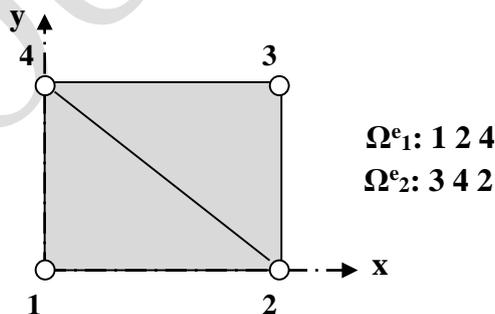
Puisque le chargement est appliqué à  $x = 0$ , donc  $x/a = 0$ . D'où après intégration, les forces nodales équivalentes :

$$\{f\}^e = tq \begin{Bmatrix} b/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## 6. Exemples d'application

**6.1. Exemple 1 :** Une plaque carrée de côté  $a$  est discrétisée en deux éléments finis triangulaires linéaires  $\Omega^e_1$ ;  $\Omega^e_2$  et chauffée à une température  $T$ . Sachant que les coordonnées nodales et les températures mesurées correspondantes sont respectivement :

**1**(0,0; T); **2**(a,0; 2T); **3**(a,a; T) et **4**(0,a; 3T).



En passant par l'élément de référence, déterminer l'interpolation  $T^e_i(\xi, \eta)$  des deux éléments.

1. En déduire les interpolations  $T^e_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  dans l'espace réel.
2. Quelle est la valeur de la température au milieu de la plaque.

**Solution :**

1. Les fonctions d'interpolation (approchées) dans les éléments sont obtenues par la relation :

$$T^e_i = \sum N_j T_j ; i = 1,3 \text{ et } j = 1,3; j : \text{est le numéro des nœuds de l'élément.}$$

a) **Élément  $\Omega^e_1: 1\ 2\ 4$  :**

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) = \xi \\ N_3(\xi, \eta) = \eta \end{cases}$$

$$T_1^e = \sum_1^3 N_i T_j = N_1(\xi, \eta) T_1 + N_2(\xi, \eta) T_2 + N_3(\xi, \eta) T_4$$

$$T_1^e = N_1(\xi, \eta) T_1 + N_2(\xi, \eta) T_2 + N_3(\xi, \eta) T_4$$

$$T_1^e(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)T + \xi 2T + \eta 3T = (1 + \xi + 2\eta)T$$

b) Élément  $\Omega^e_1$ : 3 4 2 :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) = \xi \\ N_3(\xi, \eta) = \eta \end{cases}$$

$$T_2^e = N_1(\xi, \eta) T_3 + N_2(\xi, \eta) T_4 + N_3(\xi, \eta) T_2$$

$$T_2^e(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)T + \xi 3T + \eta 2T = (1 + 2\xi + \eta)T$$

2. Interpolations  $T^e_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  dans l'espace réel :

a) Élément  $\Omega^e_1$  : 1 2 4 : les interpolations dans l'espace réel sont obtenues en utilisant les relations du changement de repère suivantes :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta)x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta)x_4 \\ y(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)y_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta)y_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta)y_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta) \cdot 0 + \xi \cdot a + \eta \cdot 0 = \xi a \Rightarrow \xi = \frac{x}{a} \\ y(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta) \cdot 0 + \xi \cdot 0 + \eta \cdot a = \eta a \Rightarrow \eta = \frac{y}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_1^e(x, y) = T_1^e(\xi(x), \eta(y)) = \left(\frac{x}{a} + 2\frac{y}{a} + 1\right)T$$

b) Élément  $\Omega^e_2$  : 3 4 2 :

De la même manière pour l'élément  $\Omega^e_2$  nous avons :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta) \cdot a + \xi \cdot 0 + \eta \cdot a = (1 - \xi)a \Rightarrow \xi = 1 - \frac{x}{a} \\ y(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta) \cdot a + \xi \cdot a + \eta \cdot 0 = (1 - \eta)a \Rightarrow \eta = 1 - \frac{y}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_2^e(x, y) = T_2^e(\xi(x), \eta(y)) = \left(2\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \left(1 - \frac{y}{a}\right) + 1\right)T$$

$$\Rightarrow T_2^e(x, y) = \left(-2\frac{x}{a} - \frac{y}{a} + 4\right)T$$

Le calcul de la température  $T$  au milieu de la plaque peut être fait de deux façons en utilisant l'interpolation de l'élément  $\Omega^e_1$  ou de l'élément  $\Omega^e_2$ . Le point milieu de la plaque a pour coordonnées cartésiennes ou naturelles respectives :  $(a/2, a/2)$  ou  $(1/2, 1/2)$ .

Dans l'élément  $\Omega^e_1$  :

$$T_1^e(1/2, 1/2) = (1/2 + 2 \cdot 1/2 + 1)T = 5/2 T$$

Ou dans l'élément réel :

$$T_1^e(a/2, a/2) = \left(\frac{a}{2a} + 2 \frac{a}{2a} + 1\right) T = 5/2 T$$

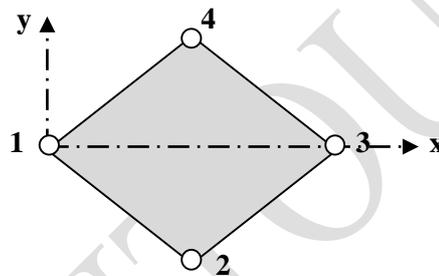
Dans l'élément  $\Omega^e_2$  :

$$T_2^e(1/2, 1/2) = ((2 \cdot 1/2 + 1/2 + 1)T) = 5/2 T$$

Ou dans l'élément réel :

$$T_2^e(a/2, a/2) = \left(-2 \frac{a}{2a} - \frac{a}{2a} + 4\right) T = 5/2 T$$

**Exemple 2 :** L'élément finis de forme quadrangulaire linéaire ci-dessous est défini par les coordonnées cartésiennes suivantes : **1**(0,0); **2**(a,-b); **3**(2a,0) et **4**(a,b).



En utilisant l'intégration numérique de Gauss, calculer les intégrales ci-dessous pour  $n = m = 2$ .

$$I_1 = \iint xy \, dx dy \quad \text{et} \quad I_2 = \iint y^2 \, dx dy$$

**Solution :**

La méthode de Gauss permet de calculer *facilement* les deux intégrales dans le repère de coordonnées naturelles. Soit par changement de repère :

$$I_1 = \iint xy \, dx dy = \iint_{-1-1}^{11} x(\xi, \eta) y(\xi, \eta) \det[J] \, d\xi d\eta = \sum_1^2 \sum_1^2 w_i \cdot w_j x_i(\xi_i, \eta_j) \cdot y_j(\xi_i, \eta_j) \frac{ab}{2}$$

Avec :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta)x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta)x_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta)x_4 \\ y(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)y_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta)y_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta)y_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta)y_4 \end{cases}$$

Et [J]: matrice de transformation Jacobienne de l'élément.

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 - \xi - \eta + \xi\eta) \cdot 0 + (1 + \xi - \eta - \xi\eta) \cdot a + (1 + \xi + \eta + \xi\eta) \cdot 2a \\ + (1 - \xi + \eta - \xi\eta) \cdot a \end{pmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 - \xi - \eta + \xi\eta) \cdot 0 + (1 + \xi - \eta - \xi\eta) \cdot -b + (1 + \xi + \eta + \xi\eta) \cdot 0 \\ + (1 - \xi + \eta - \xi\eta) \cdot b \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(4 + 2\xi + 2\eta)a = \frac{a}{2}(2 + \xi + \eta) \\ y(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-2\xi + 2\eta)b = \frac{b}{2}(-\xi + \eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - 1 \\ \eta = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \end{cases}$$

Le Jacobien de l'élément est :

$$j = \det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} \end{bmatrix} = \frac{a \cdot b}{2}$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \int xy \, dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x(\xi, \eta) \cdot y(\xi, \eta) \det[J] \, d\xi d\eta \\ I_1 &= \sum_1^2 \sum_1^2 w_i \cdot w_j x_i(\xi_i, \eta_j) \cdot y_j(\xi_i, \eta_j) \frac{ab}{2} \\ I_2 &= \sum_1^2 \sum_1^2 w_i \cdot w_j y^2(\xi_i, \eta_j) \frac{ab}{2} \\ I_1 &= \sum_1^2 \sum_1^2 w_i \cdot w_j x_i(\xi_i, \eta_j) \cdot y_j(\xi_i, \eta_j) \frac{ab}{2} \\ I_2 &= \sum_1^2 \sum_1^2 w_i \cdot w_j y^2(\xi_i, \eta_j) \frac{ab}{2} \\ I_1 &= \sum_1^2 \sum_1^2 w_i \cdot w_j \frac{a}{2}(2 + \xi_i + \eta_j) \cdot \frac{b}{2}(-\xi_i + \eta_j) \cdot \frac{ab}{2} = \frac{a^2 b^2}{8} \\ I_2 &= \sum_1^2 \sum_1^2 w_i \cdot w_j \left( \frac{b}{2}(-\xi_i + \eta_j) \right)^2 \cdot \frac{ab}{2} = \frac{ab^3}{8} \end{aligned}$$

D'après le tableau précédent, pour  $n = m = 2$  nous avons les valeurs des poids et points d'intégration suivantes :

$$w_i = w_j = 1 \text{ et } \xi_i = \eta_j = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

D'où les calculs :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_1^2 \sum_1^2 w_i \cdot w_j \frac{a}{2}(2 + \xi_i + \eta_j) \cdot \frac{b}{2}(-\xi_i + \eta_j) \cdot \frac{ab}{2} \\ &= \frac{a^2 b^2}{8} \left[ \begin{aligned} &w_1 \cdot w_1 (2 + \xi_1 + \eta_1)(-\xi_1 + \eta_1) \\ &+ w_1 \cdot w_2 (2 + \xi_1 + \eta_2)(-\xi_1 + \eta_2) + w_2 \cdot w_1 (2 + \xi_2 + \eta_1)(-\xi_2 + \eta_1) + \\ &w_2 \cdot w_2 (2 + \xi_2 + \eta_2)(-\xi_2 + \eta_2) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Après calculs:

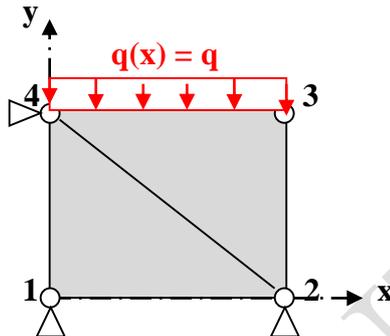
$$I_1 = 0, \text{ en raison de la symétrie de l'élément par rapport aux deux axes.}$$

$$I_2 = \sum_1^2 \sum_1^2 w_i \cdot w_j \left( \frac{b}{2} (-\xi_i + \eta_j) \right)^2 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$= \frac{ab^3}{8} \left[ \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]$$

$$I_2 = \frac{ab^3}{8} \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{ab^3}{3} ; \text{moment quadratique \% à l'axe des } x.$$

**Exemple 3 :** Soit la plaque carrée de l'exemple 1 soumise à une charge répartie  $q(x) = q$  et appuyée sur 3 nœuds.



On donne :  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $a = 1 \text{ m}$ ;  $t = 0,1 \text{ m}$  et  $q = 10^7 \text{ N/m}$

Calculer en **contraintes planes** les inconnues (déplacements) nodales ; les déformations et les contraintes dans les deux cas de maillages suivants : **cas de deux éléments  $T_3$  linéaires** et **cas d'un élément  $Q_4$  linéaire**.

**Solution :** Dans le cas de deux triangles linéaires, le système d'équation à résoudre en statique est de la forme  $[K] \{U\} = \{F\}$ . Soit pour le cas de deux triangles de cotés  $a$  :

$$\frac{tE}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{-1+\nu}{4} & 0 & 0 & \frac{-1+\nu}{4} & \frac{-\nu}{2} \\ \frac{1+\nu}{4} & \frac{3-\nu}{4} & -\frac{\nu}{2} & \frac{-1+\nu}{4} & 0 & 0 & \frac{-1+\nu}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\nu}{2} & \frac{3-\nu}{4} & 0 & -\frac{1+\nu}{4} & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{-1+\nu}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\nu}{2} & -\frac{3-\nu}{4} & \frac{3-\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{-1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} \\ -1+\nu & -1+\nu & 0 & \frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{-1+\nu}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{4} & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{-1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{4} & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{-1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} \\ -1+\nu & -1+\nu & \frac{1+\nu}{4} & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{-1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\nu}{2} & \frac{1+\nu}{4} & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{-1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} \\ \frac{-\nu}{2} & \frac{\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & -\frac{1+\nu}{4} & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{3-\nu}{4} & \frac{3-\nu}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\nu}{2} & \frac{1+\nu}{4} & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & \frac{-1+\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 0 \\ -q \frac{a}{2} \\ R_{4x} - q \frac{a}{2} \\ R_{4y} \end{Bmatrix}$$

Les déplacements  $U_1, V_1; U_2, V_2; U_4, V_4$  aux appuis sont nuls. Après suppression des lignes et colonnes correspondants aux déplacements nuls, le système à résoudre se réduit à :

$$\frac{t E}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 3-\nu & 1+\nu \\ 1+\nu & 3-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q \frac{a}{2} \end{Bmatrix}$$

Après résolution, on trouve :

- Déplacements ou inconnues nodales :

$$U_3 = \frac{qa}{4tE} (1+\nu)^2 = 0,2 \text{ mm} \text{ et } V_3 = -\frac{qa}{4tE} (3-\nu)(1+\nu) = -0,41 \text{ mm}$$

- Déformations :

Les déformations sont calculées par les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [B]^e \{U\}^e$$

- ✓ Soit pour l'élément  $\Omega^e_1$  1 2 4 :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ (élément bloqué)}$$

- ✓ L'élément  $\Omega^e_2$  3 4 2 :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{U_3}{a} \\ \frac{V_3}{a} \\ \frac{U_3}{a} + \frac{V_3}{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q}{4tE} (1+\nu)^2 \\ -\frac{q}{4tE} (3-\nu)(1+\nu) \\ -\frac{q}{2tE} (1-\nu) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,011 \\ -4,16 \\ -2,16 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

- Contraintes : en état de contraintes planes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x + \nu\varepsilon_y \\ \nu\varepsilon_x + \varepsilon_y \\ (1-\nu)\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17,6 \\ -82 \\ -34,89 \end{Bmatrix} \text{ MPa } (N/mm^2)$$

Dans le cas d'un élément carré linéaire, le système d'équation à résoudre en statique est :

$$\frac{tE}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{6} & \frac{(1+\nu)}{8} & -\frac{(3+\nu)}{12} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{1-3\nu}{8} \\ \frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{(1-3\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3+\nu)}{12} \\ -\frac{(3+\nu)}{12} & \frac{(1-3\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} & \frac{(1+\nu)}{8} \\ -\frac{(1-3\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3+\nu)}{8} & \frac{(1+\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} \\ -\frac{(3+\nu)}{12} & \frac{(1-3\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} & \frac{(1+\nu)}{8} \\ -\frac{(1-3\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3+\nu)}{8} & \frac{(1+\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} \\ \frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{(1-3\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3+\nu)}{12} \\ \frac{\nu}{6} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} & \frac{(1+\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{(1+\nu)}{8} \\ \frac{1-3\nu}{8} & -\frac{(3+\nu)}{12} & \frac{(1+\nu)}{8} & -\frac{(3-\nu)}{8} & -\frac{(1-3\nu)}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 0 \\ -q\frac{a}{2} \\ R_{4x} - q\frac{a}{2} \\ R_{4y} \end{Bmatrix}$$

Après suppression des lignes et colonnes correspondants aux conditions aux limites (déplacements nuls), le système d'équations à résoudre est :

$$\frac{tE}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{6} & \frac{(1+\nu)}{8} \\ \frac{(1+\nu)}{8} & \frac{3-\nu}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q\frac{a}{2} \end{Bmatrix}$$

Après résolution, on trouve :  $U_3 = 0,2 \text{ mm}$  et  $V_3 = -0,55 \text{ mm}$

- Déformations :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [B]^e \{U\}^e$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{a^2} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{a^2} & 0 & \frac{y}{a^2} & 0 & -\frac{y}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} & 0 & -\frac{x}{a^2} & 0 & \frac{x}{a^2} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} \\ -\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} & -\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} & -\frac{x}{a^2} & \frac{1}{a} - \frac{y}{a^2} & \frac{x}{a^2} & \frac{y}{a^2} & \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} & -\frac{y}{a^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_3 \\ V_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les déformations sont linéaires et dépendent de  $x$  et de  $y$ . Leurs valeurs sont maximales pour  $x = y = a$ , d'où :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_3 y}{a^2} \\ \frac{V_3 x}{a^2} \\ \frac{U_3 x}{a^2} + \frac{V_3 y}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_3}{a} \\ \frac{V_3}{a} \\ \frac{U_3}{a} + \frac{V_3}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,011 \\ -5,5 \\ -3,5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}$$

- Contraintes :

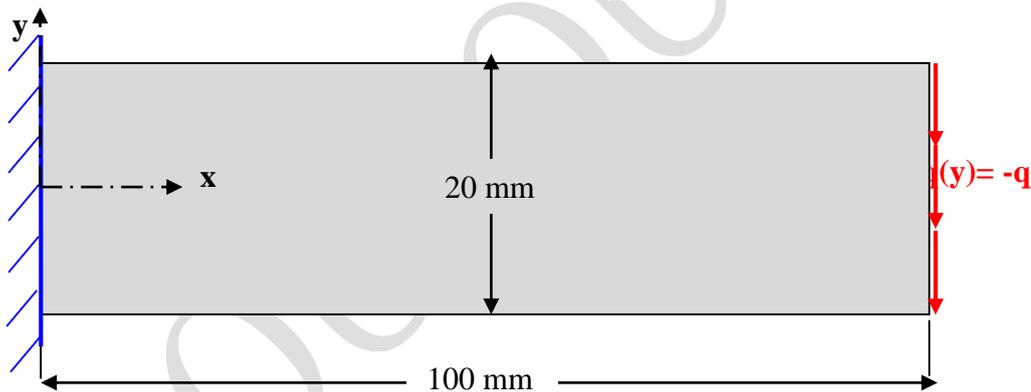
$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

Soit :

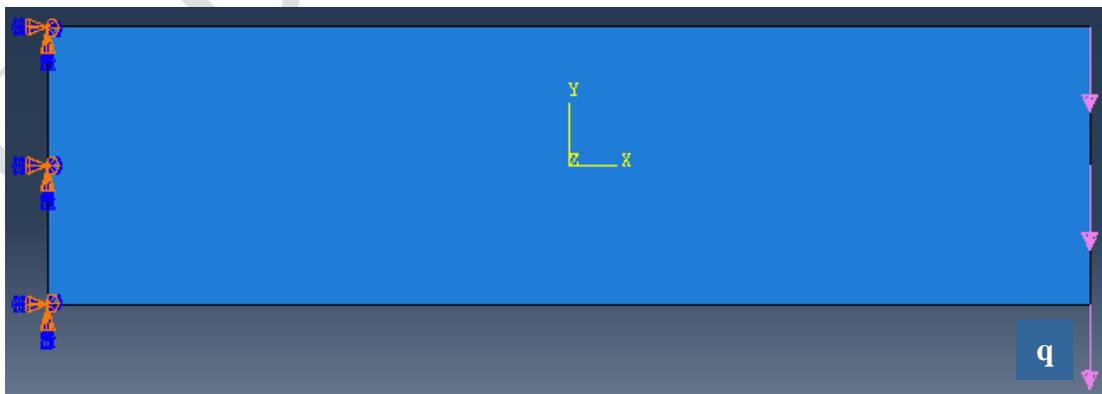
$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} \varepsilon_x + \nu\varepsilon_y \\ \nu\varepsilon_x + \varepsilon_y \\ (1-\nu)\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,33 \\ -113 \\ -56,54 \end{pmatrix} \text{ MPa } (N/mm^2)$$

## 7. Exemple de simulation par le logiciel ABAQUS

Modélisation et simulation d'une plaque en contraintes planes, encastree à l'une de ses extrémités et soumise à une traction verticale  $q$  uniformément répartie. Détermination des champs des déplacements, déformations et contraintes dans la plaque, en modifiant le type et de la taille du maillage.

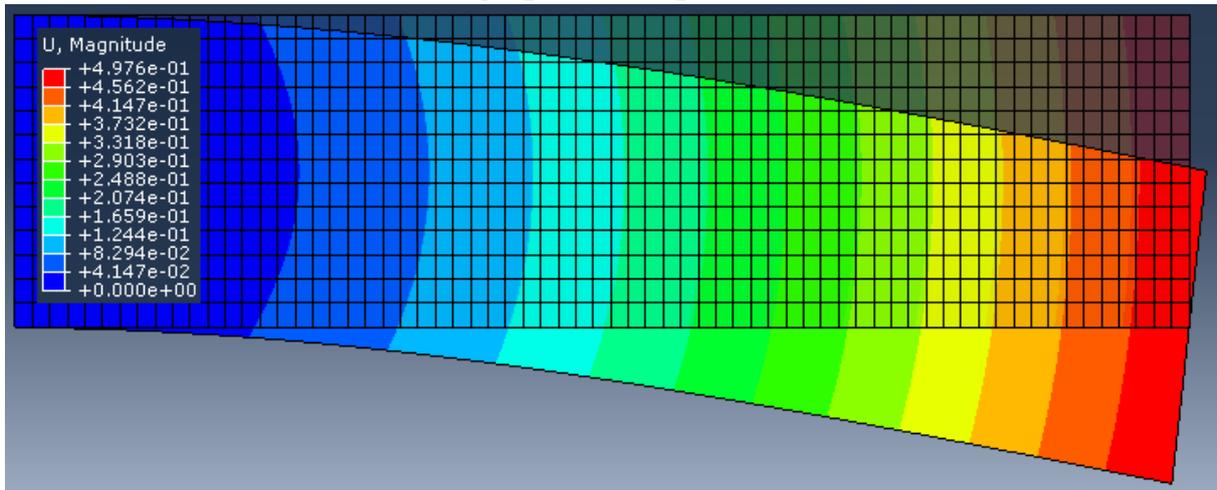


- Modélisation de la plaque, conditions aux limites et chargement



- Comparaison des résultats de simulations

### Maillage quadrangulaire linéaire Q4 Cartographie des déplacements



### Maillage triangulaire linéaire T3 Cartographie des déplacements

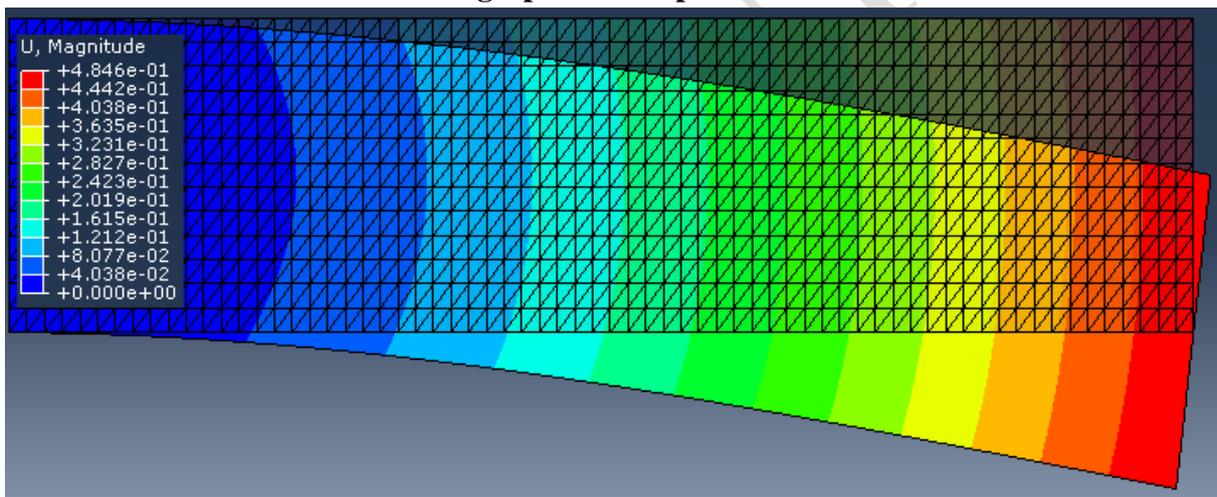


Tableau de comparaison des résultats

Maillages	Contrainte équivalente	Déformation équivalente	Déplacement maximal
T3 (1,5x1,5) mm	315.4	$1.54 \times 10^{-3}$	$4.84 \times 10^{-1}$
Q4 (1,5x1,5) mm	291.6	$1.41 \times 10^{-3}$	$4.97 \times 10^{-1}$
T3 (1x1) mm	340.8	$1.48 \times 10^{-3}$	$4.90 \times 10^{-1}$
Q4 (1x1) mm	315.6	$1.52 \times 10^{-3}$	$4.96 \times 10^{-1}$
T3 (0,5x0,5) mm	392.5	$1.92 \times 10^{-3}$	$4.93 \times 10^{-1}$
Q4 (0,5x0,5) mm	361.2	$1.75 \times 10^{-3}$	$4.95 \times 10^{-1}$

- **Remarque** : le type et la taille du maillage, influencent les résultats des simulations.

## Chapitre 5 : Eléments finis tridimensionnels

### 1. Introduction

Lorsque les dimensions d'un solide sont globalement du même ordre de grandeur, ou que l'on souhaite des résultats (déplacements, contraintes, déformations...) locaux précis, il n'est pas possible d'utiliser des éléments à une ou deux dimensions. Un élément fini de volume est un élément à dimension volumique dont la géométrie est tridimensionnelle. On l'utilise pour la modélisation des pièces massives. Vu l'évolution des programmes de maillage automatique, la puissance des machines de calculs (espace mémoire, rapidité...), l'utilisation de ce type d'éléments est de plus en plus fréquente.

### 2. Rappel sur la loi de comportement en élasticité linéaire

L'état de contrainte et l'état de déformation en un point (M) d'un solide (S), sont représentés par un vecteur à six composantes, soit :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_z \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz} \rangle \text{ et } \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} \rangle$$

Pour un matériau homogène et isotrope, les relations déformations - contraintes s'écrivent dans le cas général :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \text{ avec } E : \text{ module de Young} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \text{ et } \nu : \text{ coefficient de Poisson} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}$$

Ou inversement, on peut écrire sous forme matricielle la relation contraintes – déformations :  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$  comme suit. Où [D] est la matrice des coefficients élastiques.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \text{ où } : a = \frac{1-2\nu}{2}$$

### 3. Type et forme d'éléments finis tridimensionnels (de volume)

Il existe de plusieurs formes : tétraèdres, pentaèdres (prismes) et hexaèdres (cubes ou briques). Ces éléments peuvent être linéaires (1<sup>er</sup> degré), quadratiques (2<sup>ème</sup> degré) ou cubiques (3<sup>ème</sup> degré). Les variables ou

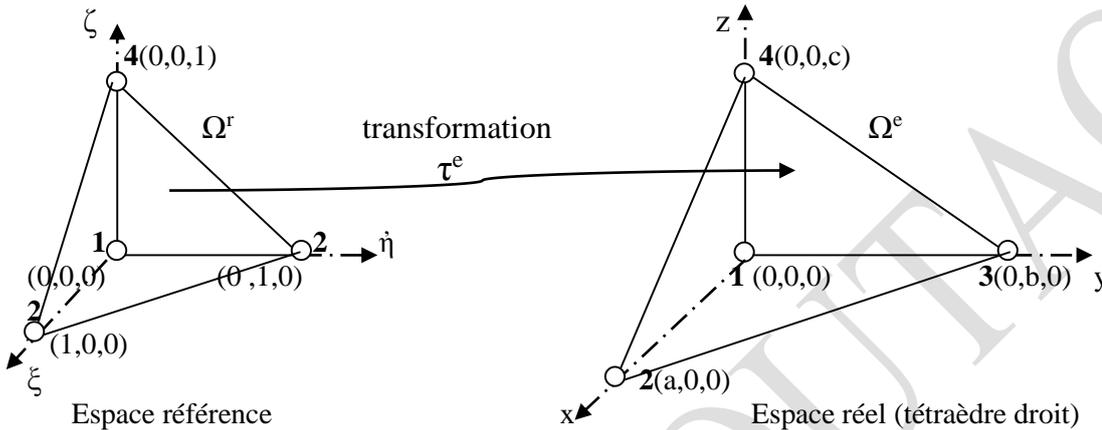
degrés de liberté nodaux représentent les trois déplacements horizontal, transversal et vertical selon les trois directions.

Les fonctions d'interpolation  $N_{ij}$  sont des fonctions linéaires ou d'ordre 1.

### 3.1. Éléments tétraèdres linéaires TET4

Ces éléments sont basés sur une formulation triangulaire comme le montre la figure, ils sont trop raides (rigides) au premier degré. Les contraintes sont constantes dans l'élément.

Considérons un élément réel  $\Omega^e$  de cotés  $a, b, c$  et son image  $\Omega^r$  dans l'espace de référence  $(\xi, \eta, \zeta)$ , soit :



Nous avons vu dans les chapitres précédents les fonctions d'interpolation  $N_i$  et les relations de transformation (changement de repère) des coordonnées suivantes (voir chapitre II) :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta, \zeta) = 1 - \xi - \eta - \zeta \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) = \xi \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) = \eta \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\begin{cases} N_1(x, y, z) = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \\ N_2(x, y, z) = \frac{x}{a} \\ N_3(x, y, z) = \frac{y}{b} \\ N_4(x, y, z) = \frac{z}{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)x_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)x_4 \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)y_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)y_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)y_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)y_4 \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)z_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)z_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)z_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)z_4 \end{cases}$$

Ainsi que la matrice Jacobienne  $[J]$  de transformation de l'élément :

$$j = \det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = a \cdot b \cdot c$$

Le Jacobien de l'élément  $j = a \cdot b \cdot c = 6V^e =$  volume du cube contenant le tétraèdre.  $V^e$  volume de l'élément réel.

### 3.1.1 Matrice de rigidité de l'élément

Nous avons vu aussi précédemment que la matrice de rigidité  $[K]^e$ , se calcule par l'intégrale suivante :

$$[K]^e = \iiint [B]^t [D] [B] dx dy dz$$

Où :  $[D]$  la matrice des coefficients élastiques;

$[B]$  la matrice déformation (reliant les déformations aux déplacements) définie par :

$$[B]_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

De même pour l'élément de référence :

$$[B]_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

Dans le cas général, nous appliquons les relations ci-dessous pour notre élément :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\eta}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\zeta}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\eta}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\zeta}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\eta}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\zeta}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

D'où les matrices  $[B]_{ijk}$  de l'élément :

$$[B]_{xyz} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{b} & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c} & 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et

$$[B]_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

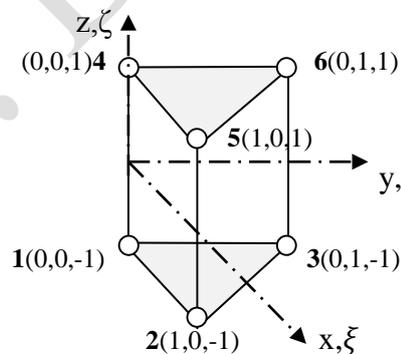
La matrice de rigidité  $[K]^e$  de l'élément est obtenue en intégrant dans l'espace réel ou de référence la quantité suivante :

$$[K]^e = \int_0^a \int_0^{1-a-c} \int_0^{1-a-b} [B]^t [D] [B] dx dy dz$$

Puisque les termes des matrices déformations  $[B]_{xyz}$  et  $[B]_{\zeta}$  sont constants, l'intégrale ne concerne que la quantité  $dx dy dz = \det[J] d\xi d\eta d\zeta$ , qui représente le volume de l'élément réel.

### 3.2. Eléments pentaèdre (prismes) linéaires PEN6

Ce sont des éléments dont la forme est combinée entre deux triangles de base  $a \times b$  et trois quadrangles de hauteur  $c$ , ils sont composés de six nœuds aux sommets, neuf cotés (arêtes) et dix-huit degrés de liberté.



Elément de référence. Elément réel de base  $a, b$  et de hauteur  $c$

Les fonctions d'interpolation  $N_i(x,y,z)$  et  $N_i(\xi,\eta,\zeta)$  ainsi que les relations de transformation s'écrivent respectivement (voir chapitre II) :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1 - \xi - \eta - \zeta + \xi \cdot \zeta + \eta \cdot \zeta) \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(\xi - \xi \cdot \zeta) \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(\eta - \eta \cdot \zeta) \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1 - \xi - \eta + \zeta - \xi \cdot \zeta - \eta \cdot \zeta) \\ \quad \frac{1}{2}(\xi + \xi \cdot \zeta) \\ \quad \frac{1}{2}(\eta + \eta \cdot \zeta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(x, y, z) = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} \\ N_2(x, y, z) = \frac{x}{a} - \frac{xz}{ac} \\ N_3(x, y, z) = \frac{y}{b} - \frac{yz}{bc} \\ N_4(x, y, z) = \frac{z}{c} - \frac{xz}{ac} - \frac{yz}{bc} \\ N_5(x, y, z) = \frac{xz}{ac} \\ N_6(x, y, z) = \frac{yz}{bc} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)x_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)x_4 + \bar{N}_5(\xi, \eta, \zeta)x_5 + \bar{N}_6(\xi, \eta, \zeta)x_6 = \mathbf{a}\xi \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)y_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)y_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)y_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)y_4 + \bar{N}_5(\xi, \eta, \zeta)y_5 + \bar{N}_6(\xi, \eta, \zeta)y_6 = \mathbf{b}\eta \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)z_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)z_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)z_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)z_4 + \bar{N}_5(\xi, \eta, \zeta)z_5 + \bar{N}_6(\xi, \eta, \zeta)z_6 = \frac{\mathbf{c}}{2}\zeta \end{array} \right.$$

Ainsi que la matrice Jacobienne [J] de transformation de l'élément :

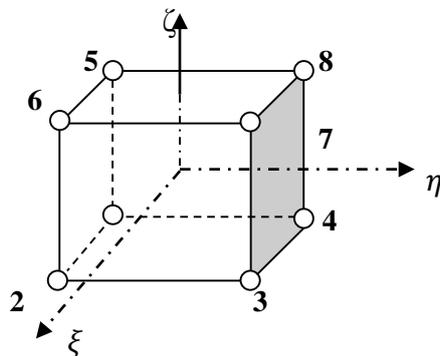
$$j = \det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{2} \end{bmatrix} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2}$$

### 3.3. Eléments hexaèdres (briques) linéaires H8

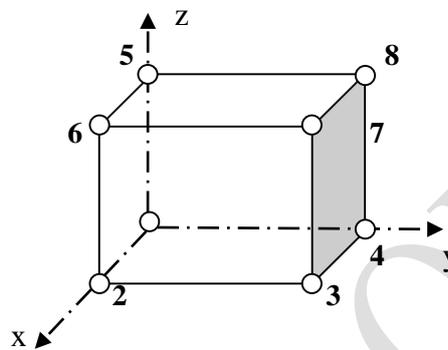
Ce sont des éléments de forme d'un parallélépipède. Ils possèdent huit nœuds aux sommets et douze arêtes, chaque nœud a trois degrés de liberté en translation. Ces éléments s'adaptent mieux aux formes régulières

de solides. Pour des solides élancés, il est préférable d'utiliser des éléments quadratiques de deuxième degré pour améliorer le comportement en flexion.

Considérant l'élément fini réel ci-dessous et l'élément de référence qui lui est associé.



Elément de référence



Elément de référence  $a \times b \times c$

Les coordonnées des nœuds sont données dans le tableau qui suit :

Nœud	Elément réel			Elément référence		
	X	Y	Z	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
1	0	0	0	-1	-1	-1
2	a	0	0	1	-1	-1
3	a	b	0	1	1	-1
4	0	b	0	-1	1	-1
5	0	0	c	-1	-1	1
6	a	0	c	1	-1	1
7	a	b	c	1	1	1
8	0	b	c	-1	1	1

Les fonctions d'interpolation des deux éléments et les relations de changement de repère sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_6(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_7(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(x, y, z) = \frac{(x-a)(y-b)(z-c)}{abc} \\ N_2(x, y, z) = \frac{x(y-b)(z-c)}{abc} \\ N_3(x, y, z) = -\frac{xy(z-c)}{abc} \\ N_4(x, y, z) = \frac{y(x-a)(z-c)}{abc} \\ N_5(x, y, z) = \frac{z(x-a)(y-b)}{abc} \\ N_6(x, y, z) = -\frac{xz(y-b)}{abc} \\ N_7(x, y, z) = \frac{xzy}{abc} \\ N_8(x, y, z) = -\frac{yz(x-a)}{abc} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)x_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)x_4 + \bar{N}_5(\xi, \eta, \zeta)x_5 \\ \quad + \bar{N}_6(\xi, \eta, \zeta)x_6 + \bar{N}_7(\xi, \eta, \zeta)x_7 + \bar{N}_8(\xi, \eta, \zeta)x_8 = \frac{a}{2}\xi \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)y_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)y_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)y_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)y_4 + \bar{N}_5(\xi, \eta, \zeta)y_5 \\ \quad + \bar{N}_6(\xi, \eta, \zeta)y_6 + \bar{N}_7(\xi, \eta, \zeta)y_7 + \bar{N}_8(\xi, \eta, \zeta)y_8 = \frac{b}{2}\eta \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)z_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)z_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)z_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)z_4 + \bar{N}_5(\xi, \eta, \zeta)z_5 \\ \quad + \bar{N}_6(\xi, \eta, \zeta)z_6 + \bar{N}_7(\xi, \eta, \zeta)z_7 + \bar{N}_8(\xi, \eta, \zeta)z_8 = \frac{c}{2}\zeta \end{array} \right.$$

Ainsi que la matrice Jacobienne [J] de transformation de l'élément :

$$j = \det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{2} \end{bmatrix} = \frac{a \cdot b \cdot c}{8}$$

#### 4. Exemple d'application

On considère un élément fini 3D de type pentaèdre linéaire et son élément de référence. Les coordonnées nodales de l'élément réel sont : **1**(0,0,0); **2**(2a,0,0); **3**(0,2b,0);

**4**(0,0,h); **5**(a,0,h); **6**(0,b,h). Le champ de température à l'intérieur de cet élément a pour expression :  $T(x,y,z) = xyz^2$  et les températures nodales  $T_i$  : **T<sub>1</sub> = T<sub>2</sub> = T**; **T<sub>3</sub> = 2T**; **T<sub>4</sub> = 3T**; **T<sub>5</sub> = 0** et **T<sub>6</sub> = 4T**.

1. Déterminer l'expression de  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y}$  et  $\frac{\partial T}{\partial z}$  en fonction de  $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \eta}$  et  $\frac{\partial T}{\partial \zeta}$ .

2. Déterminer l'interpolation  $\mathbf{T}(\xi, \eta, \zeta)$  en fonction de la température  $\mathbf{T}$  aux nœuds.
3. En déduire la température  $\mathbf{T}$  au point de coordonnées  $(1/2, 1/2, 0)$ .

**Solution :**

Pour la détermination des expressions  $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}$  et  $\frac{\partial T}{\partial z}$  en fonction  $\frac{\partial T}{\partial \xi}, \frac{\partial T}{\partial \eta}$  et  $\frac{\partial T}{\partial \zeta}$ , il faut calculer les relations de changement de repère suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)x_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)x_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)x_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)x_4 + \bar{N}_5(\xi, \eta, \zeta)x_5 + \bar{N}_6(\xi, \eta, \zeta)x_6 = \frac{a}{2}\xi(3 - \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)y_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)y_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)y_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)y_4 + \bar{N}_5(\xi, \eta, \zeta)y_5 + \bar{N}_6(\xi, \eta, \zeta)y_6 = \frac{b}{2}(2\xi - 2\xi\zeta + 3\eta - \eta\zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)z_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta)z_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta, \zeta)z_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta, \zeta)z_4 + \bar{N}_5(\xi, \eta, \zeta)z_5 + \bar{N}_6(\xi, \eta, \zeta)z_6 = \frac{h}{2}(1 + \zeta) \end{array} \right.$$

D'où les expressions demandées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{2}{a(3 - \zeta)} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{2}{a\xi} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{b(1 - \zeta)} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{2}{b(3 - \zeta)} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{2}{b(2\xi + \eta)} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{2}{h} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \end{array} \right.$$

2. Calcul de l'interpolation  $\mathbf{T}(\xi, \eta, \zeta)$  en fonction de la température  $\mathbf{T}$  :

Nous avons la relation d'interpolation développée ci-dessous appliquée à l'élément :

$$T(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta, \zeta) T_i = \frac{T}{2} (1 - \xi - \eta - \zeta + \xi\zeta + \eta\zeta + \xi - \xi\zeta + 2\eta - 2\eta\zeta + 3 - 3\xi - 3\eta + 3\xi - 3\xi\zeta - 3\eta\zeta + 4\eta + 4\eta\zeta).$$

Soit après simplification :

$$\mathbf{T}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{T}{2} (4 - 3\xi + 2\eta + 2\zeta - 3\xi\zeta)$$

3. Valeur de la température au point  $(1/2, 1/2, 0)$ .

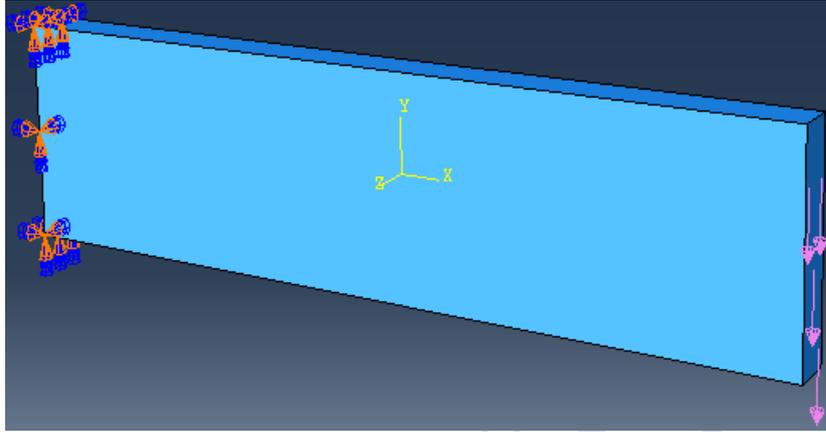
Pour calculer cette valeur, on remplace ces coordonnées dans l'équation ci-dessus, soit :

$$\begin{aligned} T(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{T}{2} (4 - 3\xi + 2\eta + 2\zeta - 3\xi\zeta) \\ \Rightarrow T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) &= \frac{T}{2} \left(4 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0\right) = \frac{7}{4} T \end{aligned}$$

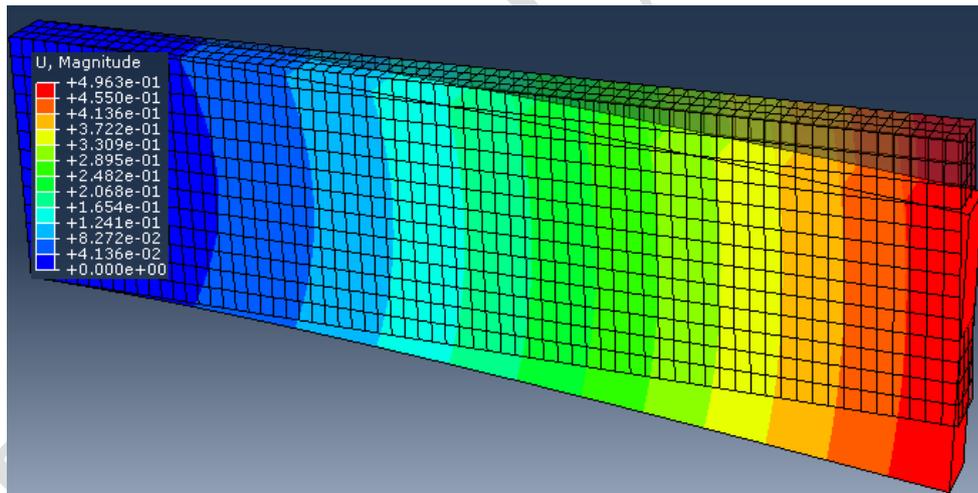
## 5. Modélisation et simulation en 3D

Il s'agit de modéliser et simuler en 3D la plaque du chapitre précédent. L'influence du type d'éléments finis et de leurs tailles, sur les résultats obtenus est étudiée.

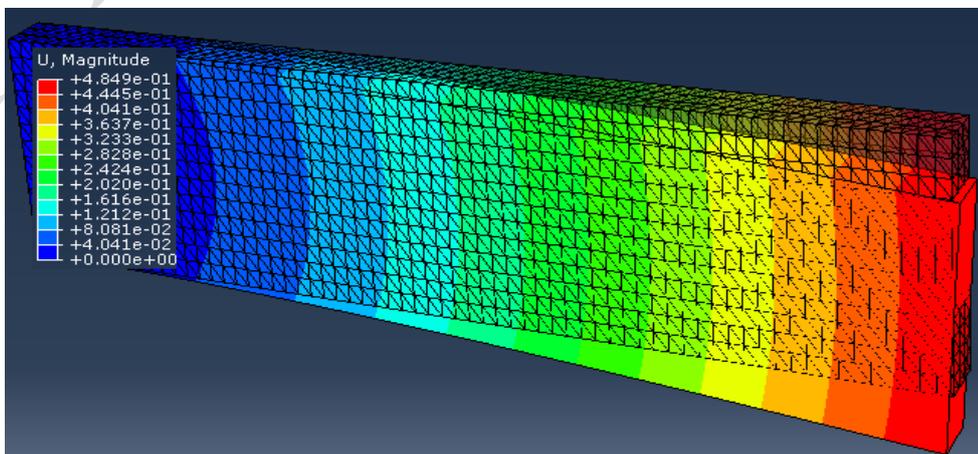
- **Modélisation 3D de la plaque, conditions aux limites et chargement**



- **Maillage éléments Hexaèdres Linéaires et cartographie des déplacements**



- **Maillage éléments Tétraèdres Linéaires et cartographie des déplacements**



- **Comparaison des résultats de simulations**

Maillages	Contrainte équivalente	Déformation équivalente	Déplacement maximal
Tet4 (2x2x2) mm	272	$1.31 \times 10^{-3}$	$4.79 \times 10^{-1}$
Hex8 (2x2x2) mm	264	$1.30 \times 10^{-3}$	$4.98 \times 10^{-1}$
Tet4 (1,5x1,5x1.5) mm	282	$1.38 \times 10^{-3}$	$4.85 \times 10^{-1}$
Hex8 (1,5x1,5x1.5) mm	273	$1.38 \times 10^{-3}$	$4.96 \times 10^{-1}$
Tet4 (1x1x1) mm	305	$1.58 \times 10^{-3}$	$4.89 \times 10^{-1}$
Hex8 (1x1x1) mm	304	$1.53 \times 10^{-3}$	$4.95 \times 10^{-1}$

- **Remarque**

La taille du maillage et le type d'éléments finis utilisés, influencent les résultats de simulations. Plus le maillage est fin, plus les valeurs convergent vers les valeurs finales. Pour les contraintes et déformations, le maillage Tétraédrique donne des valeurs plus grandes, par contre, les valeurs des déplacements sont plus importantes dans le cas contraire.

## Bibliographie

1. Jean-Louis BATOZ et Gouri DHATT. Modélisation des structures par éléments finis. Vol. 1 – solides élastiques. Hermes, 1995.
2. Gouri DHATT, Gilbert TOUZOT. Une présentation de la méthode des éléments finis. Deuxième édition. Collection Université de Compiègne. Maloine S.A. Editeur de Paris.
3. Stéphanie BASSEVILLE. Méthodes de résolutions en éléments finis. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Enseignement spécialisé 2005-2006.
4. Éric BLAYO. Notes de cours sur la méthode des éléments finis. M1 Mathématiques Appliquées et Industrielles, Laboratoire Jean Kuntzmann, INRIA. 2010.
5. Laurent CHAMPANEY. Les éléments finis par l'exemple : modèles 1D, 2D ou 3D. ENS Cachan; Département de génie mécanique.
6. Laurent CHAMPANEY. Simulation par éléments finis - attention aux singularités. ENS Cachan.
7. David DUREISSEIX. Méthodes numériques appliquées à la conception par éléments finis. 2009.
8. Michel DYSLI. Introduction aux éléments finis. École Polytechnique Fédérale de Lausanne ; cycle postgrade : géologie appliquée à l'ingénierie et à l'environnement.
9. Pascal FREY et Frédéric HECHT. Cours Maillage 2D, surfacique et 3D. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6).