

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'hamed BOUGARA, Boumerdes
Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Ecole Doctorale en Energétique et Développement Durable



Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister

OPTION

Systèmes Energétiques Avancés

**Simulation des performances du stockage de chaleur en
géométrie plane et cylindrique**

Présenté par : **Hakim CHEDDANI**

Soutenu le : Octobre 2011

Examineurs :

Jacques COMITI	Professeur	Univ-Nantes	Président
Mohand TAZEROUT	Professeur	EMNantes	Examineur
Mourad BALISTROU	Maître de Conférences A	UMBB	Examineur
Khaled LOUBAR	Maître de Conférences	EMNantes	Examineur
Kacem MANSOURI	Professeur	UMBB	Directeur de mémoire

2011/2012

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur MANSOURI Kacem qui m'a encadré, pour l'échange permanent de vues, d'appréciables contributions et une aide efficace dans la lecture de ce mémoire. Sans oublier l'aide de mes collègues M^r BECHIRI Mohamed, M^{me} DOUMANE Radia et M^r KAROUA Housseyn.

J'exprime ma reconnaissance à toutes personnes ayant participé à notre formation EDEDD.

J'adresse enfin mes remerciements à mes parents et mon frère aîné pour leur contribution matérielle à la réalisation de ce travail.

Abstract:

In this document, we are interested in the study of a storage energy unit at significant heat, in periodic thermal mode, for two geometrical configurations. We solve the problem of coupling convection-conduction between a coolant flow (laminar/turbulent) in a control and a storage wall. After resolution of the heat equation using variational method of Ritz, temperature profile is obtained at the exit, thus making possible to deduce the storage function and the damping of the thermal signal. Consequently we study the effect of various parameters (the thickness of material, heat-transferring surface, the period and spacing between the plates or the diameter of the tube) on the answer of the system for various combinations Material- coolant fluid, in order to determine the optimal configuration of the storage device.

Keywords: storage energy, significant heat, method of Ritz, cylindrical and plane duct.

Résumé:

Dans le présent document, nous nous intéressons à l'étude d'une unité de stockage d'énergie à chaleur sensible, en régime thermique périodique, pour le cas de deux configurations géométriques. On résout le problème de couplage convection-conduction entre un fluide caloporteur en écoulement (laminaire/turbulent) dans une conduite et une paroi de stockage. Après résolution de l'équation de la chaleur à l'aide de la méthode variationnelle de Ritz, le profil de température à la sortie est obtenue, permettant ainsi de déduire la fonction de stockage et l'amortissement du signal thermique. Par suite nous étudions l'effet des différents paramètres (l'épaisseur du matériau, la surface d'échange, la période et l'écartement entre les plaques ou le diamètre du tube) sur la réponse du système pour différentes combinaisons Matériau-fluide caloporteur, afin de déterminer la configuration optimale du dispositif de stockage.

Mots-clefs : Stockage d'énergie, chaleur sensible, methode de Ritz, conduite cylindrique et plane

ملخص :

في هذه الأطروحة, نحن نهتم بدراسة وحدة تخزين الطاقة على نحو حرارة حساسة, و من أجل تدفق دوري للحرارة, و من أجل نوعين مختلفين من المواصفات الهندسية, قمنا بحل مسألة مزاجية نوعين من انتقال الحرارة من مائع نقل الحرارة و قناة التخزين في حالة السيلان الخطي و المضطرب. بعد حل معادلات انتقال الحرارة باستخدام طريقة ريتز, و على ضوء منحى درجة الحرارة الذي استطعنا رسمه عند المخرج الذي نستطيع من خلاله استنتاج المعادلة الخاصة بتخزين الطاقة و تخميد تدفق الحرارة, قمنا كذلك بدراسة تأثير مختلف الخصائص (سماكة القناة, طول القناة, كذا المدة و قطر القناة) على تجاوب النظام من أجل عدة توظيفات مائع- مادة التخزين, في النهاية استطعنا تحديد التكوين و التركيب المناسب لوحدة تخزين الطاقة.

كلمات مفاتيح: تخزين الطاقة, حرارة حساسة, طريقة ريتز, جدار صلب اسطواناني او مستو.

Nomenclature

$A(x^*)$: Amplitude adimensionnelle de la température du fluide

$A_f(x^*)$: Amplitude adimensionnelle du flux de chaleur

$A_w(x^*)$: Amplitude adimensionnelle de la température pariétale

$[A]$: Matrice définie dans l'équation (2,11b)

$[A^*]$: Matrice définie dans l'équation (2,11c)

$a_{i,i}, a_{i,j}$: Élément de la matrice $[A]$

$a_{i,i}^*, a_{i,j}^*$: Élément de la matrice $[A^*]$

a^* : Rapport des capacités thermique $\frac{(\rho C_p)_f R_1}{(\rho C_p)_s (R_2 - R_1)}$

$[B]$: Vecteur définie dans l'équation (2,11b)

b_i : Élément du vecteur $[B]$

C_p : Capacité calorifique [$\text{J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$]

$[C]$: Matrice définie dans l'équation (2,11b)

c_i : Élément de la matrice $[C]$

$[D]$: Matrice définie dans l'équation (2,11c)

$d_{i,i}, d_{i,j}$: Élément de la matrice $[D]$

f_s : Fonction de stockage $\frac{W_s}{H_m}$

H_m : Energie maximale transportée par le fluide. [J]

$\tilde{H}$: Coefficient défini par l'équation (2.6c)

I : Forme variationnelle

k_f, k_s : Conductivité thermique du fluide et du solide. [$\text{J.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$]

L : Longueur du canal. [m]

L_0 : Largeur des plaques. [m]

p : Variable de Laplace

Pr : Nombre de Prandth

r : Coordonnée spatiale. [m]

r_{th} : Rayon théorique $\frac{k_s(R_2 - R_1)}{k_f R_1}$

r^* : Rayon adimensionnel

R_1 : Distance entre l'axe et la paroi interne du conduit. [m]

R_2 : Distance entre l'axe et la paroi externe du conduit. [m]

Re : Nombre de Reynolds
 T : Température du fluide caloporteur. [K]
 T_m : Température de mélange. [K]
 T_w : Température de la paroi. [K]
 T_∞ : Température ambiante. [K]
 t : Variable de temps. [s]
 t^* : Temps adimensionnel.
 u : Vitesse d'écoulement du fluide. [m.s⁻¹]
 $\bar{u}$: Vitesse d'écoulement moyen. [m.s⁻¹]
 $u^*(r^*)$: Vitesse adimensionnel.
 W_s : Energie stockée dans les parois du conduit.
 x : Coordonnée spatiale du conduit. [m]
 x^* : Coordonnée spatial adimensionnel
 x_s^* : Longueur adimensionnel du conduit

Lettres Grecs

α : Diffusivité thermique. [m².s⁻¹]
 $\beta_s : (R_2 - R_1) \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot \alpha_s}}$
 $\tilde{\beta}_s : \beta_s(1 - i)$
 δ : Fréquence adimensionnel.
 γ : Rapport des conductivités thermique $\frac{k_s}{k_f}$
 μ_i : Valeurs propres de la matrice $[A^*] \times [D]$
 ϑ : Viscosité cinématique propre du fluide. [m².s⁻¹]
 θ : Température adimensionnel.
 ρ : Masse volumique. [Kg.m⁻³]
 σ : Valeur propres (solution de l'équation de l'équation transcendante)
 τ : Période du signal d'entrée. [s]
 ω : Fréquence d'entrée. [rad.s⁻¹]
 ϕ : Caractérise le déphasage, défini dans (2.16b). [rad]

Indices et symboles

$\bar{}$: Transformée de Laplace sur la direction axiale.

$\sim$: Transformée intégrale et les expressions complexe

w : Température de solide interfaciale

f,s : Propriétés physiques du fluide et du solide respectivement

Sommaire

Remerciment	I
Résumé	II
Nomenclature	III
Introduction	1
Chapitre 1 : Recherche bibliographique	3
Chapitre 2 : Stockage d'énergie par chaleur sensible entre deux plaques parallèles en régime laminaire	
1. Position du problème	7
2. Hypothèses simplificatrices	8
3. Equations gouvernantes et conditions aux limites	8
4. Résolution du problème	10
5. Expressions de la température pariétale, de mélange et du flux de chaleur	12
6. Comparaison et validation	13
7. Bilan énergétique	14
8. Résultats et discussions	15
8.1 Effets de la nature du matériau de la paroi de stockage et du fluide caloporteur	15
8.2 Effet de la période	16
8.3 Effet de la surface d'échange	16
8.4 Effet de l'écartement entre plaques	17
9. Conclusion	21
Chapitre 3 : Stockage d'énergie à chaleur sensible dans un régénérateur à tubes, en régime laminaire	
1. Position du problème	22
2. Formulation du problème	22
3. La distribution des températures	23
4. La résolution du problème	24
5. Expressions de la température pariétale, de mélange et du flux de chaleur	26
6. Validation du model variationnel	27
7. Fonction de transfert et bilan énergétique	28
8. Résultat et discussions	28
8.1 Influence du matériau-fluide	28
8.2 Influence de la période	29
8.3 Influence surface	29
8.4 Influence diamètre	30
9. Conclusion	33
Chapitre 4 : Stockage d'énergie à chaleur sensible entre deux plaques parallèles en régime turbulent	
1. Position du problème	34
2. Equations gouvernantes et conditions aux limites	34
3. Résolution du problème	37
4. Expressions de la température pariétale, du mélange et du flux de chaleur	39

5. Bilan énergétique	40
6. Résultats et discussions	40
6.1 Effets de la nature du matériau de la paroi de stockage, du fluide caloporteur et du nombre de Reynolds Re	40
6.2 Effets de la période	41
6.3 Effets de la surface	42
6.4 Effets de l'écartement entre les plaques	42
7. Conclusion	46
Conclusion générale	47
Références bibliographiques	
Annexes	

Introduction

Face à une constante raréfaction des ressources énergétiques d'origine fossile (pétrole, gaz naturel, charbon, etc....) d'une part et aux difficultés d'ordre politico-économique concernant leur approvisionnement énergétique d'autre part, les pouvoirs publics encouragent les énergies renouvelables. Ces dernières représentent une source infinie, hélas leur caractère intermittent et fluctuant cause un problème. Parmi les solutions envisageables, la bonne gestion des ressources et le stockage d'énergie.

Il existe différentes manières de stocker l'énergie, citons à titre d'exemple les stations hydrauliques (pompage/turbinage), les cuves d'air comprimé (compression/turbinage), le stockage à volant d'inertie, le stockage chimique (batterie) et thermique. Dans notre étude on s'intéresse au stockage thermique dont on trouve deux catégories, le stockage de l'énergie à chaleurs sensible et à chaleur latente. Lors d'un stockage d'énergie à chaleur latente, pour des petites différences de températures, on emmagasine des quantités de chaleur très importantes, mais les transformations cycliques du matériau à changement de phase MCP causent une dégradation du matériau de stockage, de ce fait nous nous intéressons au stockage d'énergie à chaleur sensible.

L'énergie peut être stockée à chaleur sensible, dans les applications à grand débit ou masse de fluide et matériaux à inertie thermique importante ainsi qu'à grandes variations de température, par exemple: stockage de chaleur à lit de galet et air humide dans un bâtiment, production d'eau chaude sanitaire et stockage saisonnier dans les centrales électrique solaires.

Dans le présent document, nous nous intéressons à l'étude d'une unité de stockage d'énergie à chaleur sensible, en régime thermique périodique, pour le cas de deux configurations géométriques. On résout le problème de couplage convection-conduction entre un fluide caloporteur en écoulement (laminaire/turbulent) dans une conduite et une paroi de stockage. Après résolution de l'équation de la chaleur à l'aide de la méthode variationnelle de Ritz, le profile de température à la sortie est obtenue, permettant ainsi de déduire la fonction de stockage et l'amortissement du signal thermique. Par suite nous étudions l'effet des différents paramètres (l'épaisseur du matériau, la surface d'échange, la période et l'écartement entre les plaques ou le diamètre du tube) sur la réponse du système pour différentes combinaisons Matériau-fluide caloporteur, afin de déterminer la configuration optimale du dispositif de stockage.

Notre travail se compose de deux parties. Après une recherche bibliographique, la première partie concerne le régime laminaire d'un écoulement fluide dans une conduite de stockage en régime thermique périodique. La résolution se fait à l'aide de la méthode variationnelle de Ritz. La première partie se compose elle-même de deux chapitres, le premier chapitre traite la configuration rectangulaire, le second chapitre traite la configuration cylindrique. Après une étude paramétrique, on détermine les paramètres géométriques et temporels optimaux du système. Dans la seconde partie, nous traitons le régime d'écoulement turbulent.

Chapitre 1

Recherche bibliographique

Durant ces dernières années, la demande en énergie ne cesse d'augmenter, les chercheurs trouvent que le stockage d'énergie sous forme de chaleur est l'une des solutions incontournables. Il se trouve que l'énergie peut être stockée sous forme de chaleur sensible ou sous forme de chaleur latente. Dans ce chapitre, Nous allons passer en revue certains des travaux publiés sur ce sujet, classés par ordre chronologique.

Le stockage d'énergie à chaleur latente et sensible ont différentes applications, à citer comme exemple le chauffage solaire, l'air conditionné, système hybride (solaire/électrique), chauffage passif (mur massif), l'eau chaude sanitaire, etc... . Pour une légère variation de température, on peut stocker une quantité d'énergie beaucoup plus importante en stockage à chaleur latente qu'en stockage à chaleur sensible, malheureusement les nombreuses transformations cycliques fusion-solidification du MCP causent une dégradation importante du matériau, ainsi que la non-homogénéité du MCP durant ces transformations persiste toujours comme problème. C'est pour ça que le stockage à chaleur sensible reste le plus utilisé dans les applications à haut débit et importantes températures.

J. P. Bardon et al [1] ont étudié la cinétique des transferts entre un fluide caloporteur et un matériau de stockage. Tenant compte de la conduction du matériau, des échanges thermo-convectifs finis et de la durée limité du cycle, en régime périodique, pour les trois géométries à plaques, cylindrique et à lit de billes encapsulées; les groupes adimensionnels jouent un rôle essentiel, dont dépend l'énergie stockée pour le choix optimal des caractéristiques de ces éléments.

B. Fourcher et C. Saint-Blanquet[2] ont filtré le signal thermique d'une puissance thermique périodique de type énergie solaire, jouant le rôle d'un 'volant d'inertie thermique'. Le module de stockage est constitué de plaques solides de forme rectangulaires, balayées par un fluide caloporteur circulant à sens unique, dont le système d'équation exprimant les phénomènes physiques est :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{a_s} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$(\rho c)_f l' \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \alpha (\theta_{y=l} - T) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\alpha}{\lambda_s} (T - \theta_{y=l}) \quad \text{en } y = l \quad (1.4)$$

$$(x = 0), T = T(x) \sin(\omega t) \quad \text{à l'entrée du canal} \quad (1.5)$$

Après passage à la notation complexe, la résolution du système s'écrit :

$$\tilde{\theta}(x, y) = \tilde{T}(x) \frac{\gamma ch\beta(1+i)y^*}{(1+i)sh\beta(1+i) + \gamma ch\beta(1+i)} \quad (1.6)$$

$$\tilde{T}(x) = T_0 e^{-\mu x^*} \quad (1.7)$$

tel que :

$$\mu = 2i\pi\tau^* + St^* \times \frac{(1+i)sh\beta(1+i)}{(1+i)sh\beta(1+i) + \gamma ch\beta(1+i)}$$

$e^{-\mu}$: représente la fonction de transfert du système.

La fonction caractérisant la température du fluide s'écrit sous la forme:

$$\tilde{T}(x) = T_0 e^{-\eta x^*} e^{-i\zeta x^*} \quad (1.8)$$

Lorsque la température surfacique de la plaque est inférieure à celle du fluide et il y aura stockage.

L'expression du flux sous notation complexe s'écrit comme ci-dessous :

$$\tilde{q}(x) = \alpha \tilde{T}(x) \tilde{F}(\beta, \gamma) \quad (1.9)$$

tel que :

$$\tilde{F}(\beta, \gamma) = \frac{(1+i)sh\beta(1+i)}{(1+i)sh\beta(1+i) + \gamma ch\beta(1+i)}$$

L'énergie stockée calculée à partir du flux est donnée par :

$$W_s = \frac{\tau}{\pi} T_0 \dot{m} c_f |1 - e^{-\mu}| \left| 1 - \frac{2i\pi\tau^*}{\mu} \right| \quad (1.10)$$

Grâce à une étude paramétrique une géométrie optimale est définie. Les résultats sont explicitement donnés pour deux couples fluide-matériau de stockage différents : air-alumine et air-brique réfractaire. Les solutions théoriques sont confirmées par une étude expérimentale [3].

Fourcher et Acker[3] ont comparé la solution exacte avec une approche utilisant un coefficient d'échange constant et uniforme, pour un $Nu=12$. Ils ont comparé les performances des deux modules de

stockage à régime turbulent avec l'air et à régime laminaire avec l'huile organique comme fluide caloporteur.

B. Bourougat et B. Fourcher[4] ont traité le problème pour trois configurations différentes de matériau (cylindrique, à plaques et à empilement de billes), une disposition optimale est définie pour chaque cas. Il apparaît que pour des températures importantes, l'amortissement devient indépendant de la géométrie du canal et du fluide caloporteur, sur quelques exemples.

B. Dhifaoui et al [5] ont étudié expérimentalement le comportement dynamique d'un milieu poreux soumis au flux de chaleur d'un mur en vue de stocker l'énergie thermique par chaleur sensible.

F. Tardy et Samuel M. Sami[6] ont développé un modèle mathématique pour prédire le comportement thermique des caloducs avec stockage thermique au cours d'un cycle de refroidissement. Le modèle de transfert de chaleur basé sur différents mécanismes de conduction, convection et la chaleur de fusion de la fonte des glaces est présenté. Le comportement thermique des caloducs a également été réalisé expérimentalement et analysé dans des conditions différentes. Les comparaisons ont été par rapport aux données expérimentales pour la validation du modèle prédictif.

S. Farahat et al [7] ont développé une technique d'optimisation exergétique des capteurs solaires plans pour déterminer les performances optimales et les paramètres de conception des systèmes de conversion thermique d'énergie solaire.

A partir du modèle établis par Schumann, **A. Mawire et al [8]** ont établi une version simplifiée d'un modèle unidimensionnel monophasique pour un système d'huile de galets pour stocker de l'énergie thermique à chaleur sensible.

$$[\rho_b C_b (1 - \varepsilon) + \rho_f C_f \varepsilon] \frac{\partial T_m}{\partial t} = - \frac{[\rho_f C_f \dot{V}]}{A_T} \frac{\partial T_m}{\partial y} - U_T a_T [T_m - T_{amb}] + k_m \frac{\partial^2 T_m}{\partial t^2}$$

$$k_m = k_b (1 - \varepsilon) + k_f \varepsilon$$

T_m est la température d'une seule phase et K_m la conduction thermique effective.

La résolution du système permet d'examiner la performance thermique de trois types de matériaux solides de galets : ces matériaux à base de fusion du verre, d'alumine et d'acier inoxydable. Le modèle est validé par les résultats expérimentaux. Un ratio élevé de l'exergie totale par rapport à l'énergie totale stockée est proposé comme une bonne mesure de la performance thermique des galets.

Abdul Jabbar et al [9] ont réalisé une étude numérique sur une zone chauffée d'un mur de stockage thermique. Trois matériaux de stockage différents sont examinés, à savoir le béton, le sel hydraté et la cire de paraffine (N-eicosane). Une épaisseur optimale de 8cm est défini pour un mur de sel hydraté est capable de maintenir la température de confort dans la zone de fluctuation de la température ambiante.

Dans le but d'analyser le comportement d'un lit de capsules sphériques remplis avec de la cire de paraffine, **A. Felix Regin et al [10]** ont développé un modèle d'équations fondamentales similaires à celles de Schumann, sauf que les phénomènes de changement de phase du matériau à changement de phase dans les capsules sont analysés en utilisant la méthode enthalpique.

Un nouveau type de mur composite incorporant des matériaux à changement de phase a été proposé par **Bogdan M et al [11]**, dont le potentiel à climatiser/chauffer de l'air pour économiser l'énergie dans un climat continental tempéré a été évaluée. La structure du nouveau mur est celle d'un sandwich à trois couches de type panneau isolant avec des couches externes comprenant des matériaux à changement de phase. Une simulation annuelle d'une salle construite en utilisant le nouveau système a été réalisée et l'effet de la présence d'un matériau à changement de phase dans la structure de système de mur a été évalué. Il a été constaté que le nouveau système contribue aux économies d'énergie annuelles et réduit la valeur de crête du chauffage/refroidissement.

Dans l'étude de **D.L. Zhao et al [12]**, un système de chauffage solaire a été modélisé avec TRNSYS pour un bâtiment. Cinq différents modes opératoires ont été distingués: (1) le mode de stockage de chaleur, (2) le chauffage par capteur solaire, (3) le chauffage par le lit de stockage, (4) le chauffage de nuit et (5) le chauffage par une source auxiliaire. Le modèle TRNSYS a été vérifié. par les données de la littérature. Les résultats ont montré que le système solaire conçu peut répondre à 32,8% de la demande d'énergie thermique dans la saison de chauffage et de 84,6% de la consommation d'énergie en saison sans-chauffage, avec une fraction solaire annuelle moyenne de 53,04%.

Chapitre 2

Stockage d'énergie par chaleur sensible entre deux plaques parallèles en régime laminaire

Le présent chapitre est consacré à une application du stockage d'énergie dans un module constitué d'un assemblage de plaques parallèles identiques entre lesquelles circule un fluide caloporteur en régime laminaire (cf. Fig 2.1a). Les équations régissant ce phénomène (dans le fluide et dans la paroi de stockage) seront présentées et résolues analytiquement par la méthode variationnelle de Ritz. Par raison de symétrie, le problème peut se réduire à l'étude d'une demi plaque d'épaisseur $(R_2 - R_1)$, isolée sur la face externe et balayée sur l'autre face par le fluide caloporteur (Fig: 2,1b).

2.1 Position du problème

Le fluide caloporteur en écoulement laminaire entre deux plaques épaisses (parois de stockage) est soumis à une température sinusoïdale à l'entrée du canal. Le profil de vitesse développé est supposé parabolique. Dans le but d'annuler toute perte de chaleur, une isolation des plaques est nécessaire, cela correspond à un nombre de Biot nul ($Bi_{ext} = 0$).

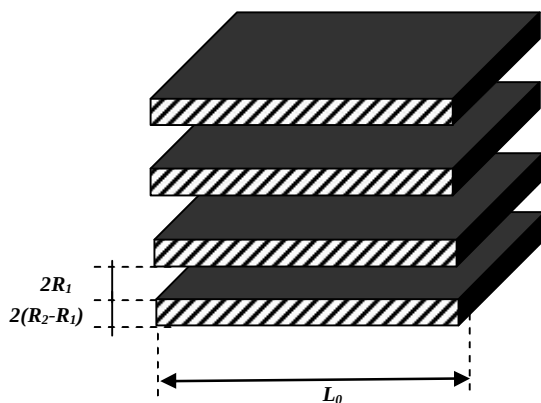


Fig 2.1a : Dispositif de stockage par chaleur sensible

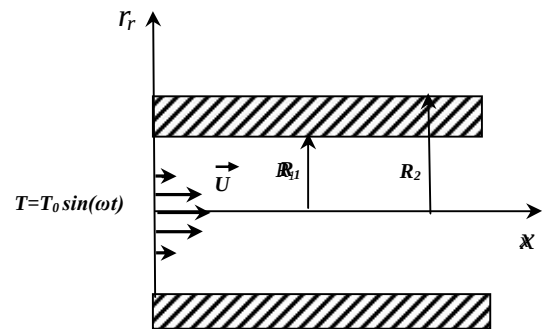


Fig 2.1b : Système étudié

2.2 Hypothèses simplificatrices

Pour faciliter la résolution du problème, des hypothèses simplificatrices sont prises en considération :

- Le fluide utilisé est incompressible et l'écoulement monophasique.
- Les propriétés thermo-physiques du fluide et du solide sont constantes.
- Le terme de conduction axiale dans le fluide est négligeable dans l'équation d'énergie. Cette hypothèse est vérifiée dès que le nombre de Peclet est supérieur à 100.
- Le milieu de stockage solide est considéré homogène et isotrope.

2.3 Equations gouvernantes et conditions aux limites

En écrivant les équations de bilan dans le milieu liquide et solide ainsi que l'équation de continuité (condition de contact parfait), le système d'équations régissant notre problème est le suivant :

- Dans la veine fluide :

$$\alpha_f \frac{\partial^2 T(x, r, t)}{\partial r^2} = \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial x} \quad (2.1a)$$

$$T(x, r, t)|_{x=0} = T_\infty + \Delta T \sin(\omega t) \quad (2.1b)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.1c)$$

- Dans la paroi solide:

$$\frac{\partial^2 T_w(x, r, t)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_w(x, r, t)}{\partial t} \quad (2.1d)$$

- Conditions de contact :

$$k_f \left. \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} = k_s \left. \frac{\partial T_w(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} \quad (2.1e)$$

$$T(x, r, t)|_{r=R_1} = T_w(x, r, t)|_{r=R_1} \quad (2.1f)$$

Le profil de vitesse en régime laminaire établi entre deux plaques parallèles s'écrit :

$$u = \frac{3}{2}(1 - r^2) \quad (2.1g)$$

En régime périodique établi, les distributions des températures dans la paroi et dans le fluide sont alors respectivement sous la forme :

$$T_w(x, r, t) = A_w(x, r) \sin(\omega t + \phi_w(x, r)) \quad (2.2a)$$

$$T(x, r, t) = A(x, r) \sin(\omega t + \phi(x, r)) \quad (2.2b)$$

Où les fonctions $T_w(x, y, t)$ et $T(x, z, t)$ sont solution du système couplé (2.1a) et (2.1d).

En injectant les quantités adimensionnelles ci-dessous:

$$x^* = \frac{x \alpha_f}{R_1^2 \bar{u}}, r^* = \frac{r}{R_1}, r_2^* = \frac{R_2}{R_1}, \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \theta_w = \frac{T_w - T_\infty}{\Delta T}, \gamma = \frac{k_s}{k_f}, \delta = \frac{\omega R_1^2}{\alpha_f}, r_{th} = \frac{k_s(R_2 - R_1)}{k_f R_1}$$

$$\beta_s = (R_2 - R_1) \sqrt{\frac{\omega}{2 \alpha_s}}, a^* = \frac{(\rho c_p)(R_2 - R_1)}{(\rho c_p)_f R_1} \text{ et } u^*(r^*) = \frac{u(r)}{\bar{u}}$$

dans le système (2.1), il en résulte le système d'équations suivant :

- Dans la veine fluide :

$$\frac{\partial^2 \theta(x^*, r^*, t^*)}{\partial r^{*2}} = \frac{\partial \theta(x^*, r^*, t^*)}{\partial t^*} + u^*(r^*) \frac{\partial \theta(x^*, r^*, t^*)}{\partial x^*} \quad (2.3a)$$

$$\theta(x^*, r^*, t^*)|_{x^*=0} = \sin(i \delta t^*) \quad (2.3b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(x^*, r^*, t^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (2.3c)$$

- Dans la paroi solide:

$$\frac{\partial^2 \theta_w(x^*, r^*, t^*)}{\partial r^2} = \frac{\alpha_f}{\alpha_s} \frac{\partial \theta_w(x^*, r^*, t^*)}{\partial t^*} \quad (2.3d)$$

- Conditions de contact (fluide- paroi) :

$$\left. \frac{\partial \theta(x^*, r^*, t^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = r_{th} \left. \frac{\partial \theta_w(x^*, r^*, t^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} \quad (2.3e)$$

$$\theta(x^*, r^*, t^*)|_{r^*=1} = \theta_w(x^*, r^*, t^*)|_{r^*=1} \quad (2.3f)$$

En écrivant les températures sous forme complexes:

$$\theta_w(x^*, r^*, t^*) = \tilde{\theta}_w(x^*, r^*) e^{i\delta t^*} \quad \text{et} \quad \theta(x^*, r^*, t^*) = \tilde{\theta}(x^*, r^*) e^{i\delta t^*}$$

le système d'équations s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^{*2}} = u^*(r^*) \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial x^*} + i\delta \tilde{\theta}(x^*, r^*) \quad (2.4a)$$

$$\tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{x^*=0} = 1 \quad (2.4b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (2.4c)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}_w(x^*, r^*)}{\partial r^{*2}} = i2 \left(\frac{\beta_s}{r_2^* - 1} \right)^2 \tilde{\theta}_w(x^*, r^*) \quad (2.4d)$$

$$r_{th} \left. \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \left. \frac{\partial \tilde{\theta}_w(x^*, r^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} \quad (2.4e)$$

$$\tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{r^*=1} = \tilde{\theta}_w(x^*, r^*)|_{r^*=1} \quad (2.4f)$$

2.4 Résolution du problème

La solution de l'équation (2.4d) est recherchée sous la forme suivante :

$$\tilde{\theta}_w(r^*, x^*) = A \sin(\tilde{\beta}_s r^*) + B \cos(\tilde{\beta}_s r^*) \quad (2.5a)$$

avec $\tilde{\beta}_s = \beta_s(1 - i)$.

En remplaçant $\tilde{\theta}_w$ par son expression dans (2.4f), il en résulte une condition de cinquième type:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial z^*} \right|_{r^*=1} + \tilde{H} \tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{r^*=1} = 0 \quad (2.5b)$$

avec

$$\tilde{H} = r_{th} \frac{\sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right) + tg\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right)}{\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right) + tg\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right)}$$

Par conséquent, la distribution de température dans le fluide est donnée par la résolution du problème suivant :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^{*2}} - u^*(r^*) \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial x^*} - i\delta \tilde{\theta}(x^*, r^*) = 0 \quad (2.6a)$$

$$\tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{x^*=0} = 1 \quad (2.6b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial x^*} \right|_{r^*=1} + \tilde{H} \tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{r^*=1} = 0 \quad (2.6c)$$

En utilisant la méthode variationnelle de Ritz, ce qui conduit à un problème de fonctions et valeurs propres complexes. En introduisant dans le système (2.6) la transformée de Laplace sur la variable x^* tels que :

$$\bar{\tilde{\theta}}(r^*, p) = \int_0^\infty e^{-px^*} \tilde{\theta}(r^*, x^*) dx^*$$

nous obtenons le système ci-dessous:

$$\frac{\partial^2 \bar{\tilde{\theta}}}{\partial r^{*2}} = (pu^*(r^*) + i\delta) \bar{\tilde{\theta}} - u^*(r^*) \quad (2.7a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\tilde{\theta}}}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (2.7b)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\tilde{\theta}}}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = -\tilde{H} \bar{\tilde{\theta}}|_{r^*=1} \quad (2.7c)$$

En intégrant par partie l'équation (2.7a), on aboutit la forme variationnelle suivante :

$$I = \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial \bar{\tilde{\theta}}}{\partial r^*} \right)^2 + (pu^* + i\delta) \bar{\tilde{\theta}}^2 - 2u^* \bar{\tilde{\theta}} \right) dr^* + \tilde{H} \bar{\tilde{\theta}}^2|_{r^*=1} \quad (2.8)$$

La solution approchée du problème (2.7) comprend des fonctions de base trigonométriques de type :

$$\bar{\tilde{\theta}}(r^*, p) = \sum_{i=1}^n c_i(p) \cos(\sigma_i r^*) \quad (2.9)$$

σ_i : représentent les valeurs propres dont la détermination est réalisée par la résolution de l'équation transcendante ci-dessous: (Voir annexe 1)

$$\sigma_i \tan(\sigma_i) = \tilde{H} \quad (2.10)$$

Les inconnues $c_i(p)$ sont déterminées par la minimisation de l'équation (2.8), en écrivant :

$$\frac{\partial I(c_i(p))}{\partial c_i(p)} = 0 \quad (2.11a)$$

Après dérivation, on remarque que l'équation (2,11a) peut s'écrire sous forme matricielle.

$$[A] \times [C] = [B] \quad (2.11b)$$

tels que :

$$[A] = [A^*] + p[D] \quad (2.11c)$$

Les éléments des matrices $[A]$, $[D]$ et $[b]$ sont donnés dans l'annexe (2).

Après résolution du système (2.11b), nous obtenons:

$$c_i = \frac{[e_i]}{p + [\mu_i]} \quad (2.11d)$$

tels que $[e_i] = [b_k] \times [d_{ik}^*]^{-1}$ et $[\mu_i] \equiv [a_{ik}^*] \times [d_{ik}^*]^{-1}$

μ_i : représentent les valeurs propres de la matrice $[a_{ik}^*] \times [d_{ik}^*]^{-1}$

2.5 Expressions de la température pariétale, de mélange et du flux de chaleur

En appliquant la transformé inverse de Laplace à l'équation (2,11d), on aboutit à la formule suivante :

$$c_i(x) = e_i \exp(-\mu_i x^*) \quad (2.11e)$$

Alors, la distribution de température s'écrit:

$$\tilde{\theta}(r^*, x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \cos(\sigma_i r^*) \exp(-\mu_i x^*) \quad (2.12)$$

D'après l'équation (2,4f), la solution d'écrit:

$$\tilde{\theta}_w(1, x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \exp(-\mu_i x^*) \quad (2.13a)$$

tel que : $W_i = e_i \cos(\sigma_i)$

La température de mélange du fluide est définie par:

$$\tilde{\theta}_m(r^*, x^*) = \frac{\int_0^1 u^* \theta dr^*}{\int_0^1 u^* dr^*}$$

$$\theta_m(r^*, x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \exp(-\mu_i x^*) \quad (2.13b)$$

tel que : $Q_i = \frac{3}{\sigma_i^2} e_i \left[\frac{\sin(\sigma_i r^*)}{\sigma_i} - \cos(\sigma_i r^*) \right]$

En dérivant l'équation (2,12), on obtient le flux de chaleur :

$$\tilde{q}_f(1, x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \exp(-\mu_i x^*) \quad (2.13c)$$

tel que : $P_i = e_i \sigma_i \sin(\sigma_i)$

D'après les équations (2.13a), (2.13b) et (2.13c), on obtient les expressions suivantes :

$$\theta(x^*, r^*, t^*) = A(x^*) \sin(\delta t^* + \phi_m(x^*)) \quad (2.14a)$$

$$\theta_w(x^*, 1, t^*) = A_w(x^*) \sin(\delta t^* + \phi_w(x^*, 1)) \quad (2.14b)$$

$$q_f(x^*, 1, t^*) = A_f(x^*) \sin(\delta t^* + \phi_f(x^*, 1)) \quad (2.14c)$$

A_i et ϕ_i représentent respectivement les amplitudes et les déphasages.

2.6 Comparaison et validation

Dans le but de validation, nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par Kim et Ozisik[13], dans le cas d'un écoulement laminaire entre deux plaques minces, en utilisant la méthode de la transformée intégrale généralisée(GITT). Le tableau comparatif montre un accord satisfaisant avec la référence [13].

b^*	W_i		μ_i	
	L'étude présente	W. S. Kim and M. N. Ozisik	L'étude présente	W. S. Kim and M. N. Ozisik
2	0.6703 E 0 -i 0.5898 E 0	0.4674 E 0 -i 0.5492 E 0	0.1049 E 1 +i 0.9837 E 0	0.1047 E 1 +i 0.9840 E 0
	0.3056 E 0 +i 0.3175 E 0	0.3259 E 0 +i 0.7375 E-1	0.1470 E 2 +i 0.4605 E 1	0.1469 E 2 +i 0.4614 E 1
	0.1879 E-1 +i 0.1091 E 0	0.1023 E 0 +i 0.1055 E 0	0.4796 E 2 +i 0.6445 E 1	0.4795 E 2 +i 0.6443 E 1
	0.3358 E-1 +i 0.4686 E-1	0.3944 E-1 +i 0.6700 E-1	0.1027 E 3 +i 0.7430 E 1	0.1027 E 3 +i 0.7464 E 1
	0.1026 E-2 +i 0.2592 E-1	0.1941 E-1 +i 0.4424 E-1	0.1789 E 3 +i 0.8193 E 1	0.1789 E 3 +i 0.8220 E 1
10	0.2175 E-1 -i 0.2025 E 0	0.2339 E-1 -i 0.1700 E 0	0.1822 E 0 +i 0.3247 E 0	0.1836 E 1 +i 0.3146 E 0
	0.4582 E-1 -i 0.2458 E 0	0.3515 E-1 -i 0.1111 E 0	0.2092 E 2 +i 0.2386 E 1	0.2093 E 2 +i 0.2377 E 0
	0.2034 E 0 -i 0.3507 E 0	0.2199 E-1 -i 0.9625 E-1	0.6075 E 2 +i 0.5740 E 1	0.6075 E 2 +i 0.5726 E 0
	0.5349 E 0 +i 0.1113 E-1	0.5306 E-1 -i 0.7525 E-1	0.1211 E 3 +i 0.1005 E 2	0.1211 E 3 +i 0.1004 E 1
	0.1443 E 0 +i 0.2427 E 0	0.6027 E-1 -i 0.6169 E-1	0.2018 E 3 +i 0.1505 E 2	0.2019 E 3 +i 0.1506 E 1

Tableau 2.1: Comparaison des résultats avec les résultats de W. S. Kim and M. N. Ozisik

On sait que :

$$\tilde{\theta}_m = \exp(-\mu \cdot x^*) \quad (2.15)$$

Le paramètre μ s'écrit sous forme complexe, tel que :

$$\mu = \eta + i\zeta$$

En injectant μ dans (2.15), on abouti à :

$$\tilde{\theta}_m = \exp(-\eta \cdot x^*) \cdot \exp(-i\zeta x^*) \quad (2.16)$$

D'où l'amortissement exponentiel

$$\chi = \exp(-\eta \cdot x^*) \quad (2.16a)$$

et le déphasage linéaire

$$\phi = \zeta x^* \quad (2.16b)$$

2.7 Bilan énergétique

Le stockage est réalisé dans la première une demi-période (transferts du fluide vers la paroi), et le déstockage dans l'autre demi-période (paroi vers fluide).

L'intégration du flux total durant une demi-période, permet de calculer l'énergie stockée.

$$W_s = L_0 \int_0^{x_s^*} \int_0^1 2(\rho C)_s \tilde{\theta}_w dx^* dr^* \quad (2.17a)$$

$$W_s = 2 \frac{\tau}{\pi} \dot{m} C_f b^* \frac{\sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) - \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right) - \tan\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) \left(\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) - \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right)\right)}{\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right) + \tan\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right)} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} W_i \left[\frac{1 - \exp(-\mu_i \cdot x_s^*)}{\mu_i} \right] \quad (2.17b)$$

On se rapportant à la quantité $H_m = \frac{\tau}{\pi} \dot{m} C_f$, l'énergie maximale transportée par le fluide à l'entrée du canal pendant une demi-période. Nous appellerons fonction du stockage la quantité :

$$f_s = \frac{W_s}{H_m} \quad (2.18)$$

Dans le but de connaître l'effet des différents paramètres physiques, géométriques et temporelle (le matériau de stockage, le fluide caloporteur, le débit massique, la longueur du canal et la période de stockage) sur la réponse du système, une étude paramétrique est nécessaire.

Le choix du matériau de stockage dépend du produit $(\rho C)_s$ et de la conductivité thermique du matériau k_s , d'après le tableau 2.2 : $(\rho C)_{Acier} > (\rho C)_{Carbure}$ alors que $k_{Acier} < k_{Carbure}$. Par ailleurs le fluide caloporteur on tient compte le produit $(\rho C)_f$ et la viscosité, tel que $\vartheta_{Vapeur} > \vartheta_{Huile}$ d'autre part $(\rho C)_{Vapeur} < (\rho C)_{Huile}$.

Dans le tableau suivant se trouvent les conditions de travail :

	Carbure de Silicium	Acier inoxydable	Huile (300°C)	Vapeur (300°C)
$\rho(kg\ m^{-3})$	3160	7817	806.5	0.384
$C(jkg^{-1}\ K^{-1})$	675	460	2471	2013
$\rho C(j\ m^{-3}\ K^{-1})$	$2,1 \cdot 10^6$	$3,5 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	773
$k(Wm^{-1}\ K^{-1})$	490	13.8	0.132	0.0434
$\nu(m^2\ s^{-1})$	---	---	5.83E-6	52.84E-6

Tableau 2.2 : propriétés physiques des matériaux et des fluides utilisés

On note chaque élément comme suit :

C: Carbure de Silicium.

A: Acier inoxydable.

H : Huile.

V: Vapeur

2.8 Résultats et discussions

2.8.1 Effets de la nature du matériau de la paroi de stockage et du fluide caloporteur

Les figures (2.2.a,b) présentent l'influence du fluide caloporteur et du matériau de stockage sur l'amortissement de la température de mélange du fluide caloporteur et la fonction stockage du système paroi-fluide (voir Fig 2.1b). Nous remarquons que la fonction f_s passe par un maximum alors que l'amplitude T_m décroît de manière monotone pour se stabiliser. Plus l'amortissement de T_m est important, plus l'accroissement de la fonction de stockage f_s est important. Cette diminution est due à la quantité de chaleur délivrée par le fluide et absorbée par la paroi, impliquant une augmentation de la fonction stockage f_s . Pour un même fluide caloporteur (vapeur ou huile), la fonction stockage f_s est plus importante dans le cas d'un conduit en acier inoxydable qu'en carbure de silicium, car $(\rho C)_{Acier} = 3,5.10^6$ est supérieur à $(\rho C)_{Carbure} = 2.10^6$ malgré que $k_{Acier} = 13,8 < k_{Carbure} = 490$. Par conséquence la fonction stockage f_s dépend du ratio des capacités thermiques $a^* = \frac{(\rho c_p)(R_2 - R_1)}{(\rho c_p)_f R_1}$. Lorsque $a^* \gg 1$ la quantité de chaleur pouvant être stockée par la paroi est supérieure à celle délivrée par le fluide caloporteur, dans ce cas le stockage est loin d'être idéal, mais l'idéal est lorsque $a^* \rightarrow 1$ en valeur décroissantes, la quantité de chaleur délivrée par le fluide caloporteur est équivalente à celle qui peut être stockée dans la paroi. Par ailleurs f_s est plus importante pour l'huile que la vapeur du faite que $\vartheta_{Huile} = 52,84.10^{-6} (m^2 s^{-1}) > \vartheta_{Vapeur} = 5,83.10^{-6} (m^2 s^{-1})$ malgré que $(\rho C)_{Vapeur} = 2.10^6$ est inférieur à $(\rho C)_{Huile} = 773$ dans un même conduit (Acier inoxydable ou Carbure de Silicium), plus le fluide est visqueux, plus les contraintes tangentielles sont importantes, ainsi elles favorisent les frottements fluide-paroi, cette dynamique permet d'évacuer plus de quantité de chaleur vers la paroi. D'ailleurs le tableau 2.3 le confirme, par exemple pour $(R_2 - R_1)_{op,A-H} = 0,030 m$ est inférieur à $(R_2 - R_1)_{op,C-H} = 0,040 m$ et $f_{s,op,A-H} = 0,21 > f_{s,op,C-H} = 0,17$, d'autre part pour un conduit en Acier inoxydable $(R_2 - R_1)_{op,A-H} = 0,030 m < (R_2 - R_1)_{op,A-V} = 0,015 m$ et $f_{s,op,A-V} = 0,35$ est supérieur à $f_{s,op,A-H} = 0,21$.

	A-V	C-V	A-H	C-H		A-V	C-V	A-H	C-H
$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	0.065	0.075	0.105	0.120	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	0.015	0.025	0.030	0.040
$T_{m,op}$	0.38	0.38	0.38	0.38	$f_{s,op}$	0.35	0,29	0,21	0,17

Tableau 2.3 : χ_{op} et $f_{s,op}$ pour différents couples (matériau-fluide)

2.8.2 Effet de la période

D'après les figures (2.3a,b) et (2.4a,b), on remarque que l'amortissement des températures de mélange est plus rapide et ne nécessite pas des épaisseurs de parois importantes, lors d'un fonctionnement à courtes périodes ($\tau = 1h$) contrairement aux fonctionnements à longues périodes ($\tau = 24h$). A partir du tableau (2.4), il apparaît que f_s atteint sa valeur maximale pour des faibles épaisseurs de parois lors d'un fonctionnement avec des courtes périodes ($\tau = 1h$), et cette valeur maximale n'est atteinte que pour des épaisseurs de conduit plus importantes lors d'un fonctionnement avec des longues périodes ($\tau = 24h$). Certes la valeur maximale de la fonction stockage atteinte est plus importantes pour des courtes périodes que pour les longues périodes, mais l'énergie thermique stockée dans les parois est sûrement plus importante pour les longues périodes que pour les courtes.

τ (h)	A-V		C-V	
	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s,op}$	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s,op}$
1	0,005	1,60	0,005	1,43
2	0,005	1,32	0,005	0,93
4	0,005	0,81	0,010	0,72
8	0,010	0,66	0,010	0,47
16	0,015	0,46	0,020	0,36
24	0,015	0,37	0,025	0,29

Tableau 2.4 : $f_{s,op}$ pour différentes périodes τ

2.8.3 Effet de la surface d'échange

Dans les figures (2.5a,b) et (2.6a,b) apparaît l'effet de la surface d'échange sur l'amortissement de l'amplitude T_m et la fonction stockage f_s . En augmentant la longueur du canal ($S = 2L_0L$), la surface d'échange augmente, permettant ainsi au fluide caloporteur d'évacuer plus de chaleur, ce flux de chaleur sera emmagasiné dans la paroi, par conséquent la quantité de chaleur stockée dans la paroi augmente, et la fonction stockage f_s devient plus importante. Par ailleurs, cet effet est aussi confirmé pour l'amortissement des amplitudes de T_m , d'autant la surface est grande d'autant l'amortissement est intense.

A partir d'une certaine longueur du canal, l'effet n'est plus confirmé pour l'accroissement de T_m mais par ailleurs l'effet apparait sur la fonction f_s .

L_0 (m)	A-H		C-H		A-V		C-V	
	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$
0.5	0,030	0,22	0,040	0,17	0,0150	0,37	0,0250	0,29
1.5	0,025	0,35	0,030	0,27	0,0150	0,61	0,0200	0,47
2.5	0,015	0,60	0,020	0,47	0,0100	1,13	0,0150	0,84

Tableau 2.5 : $f_{s\ op}$ pour différents surfaces

2.8.4 Effet de l'écartement entre les plaques

Les figures (2.7a,b) et (2.8a,b) montrent l'effet de l'écartement entre les plaques sur la fonction f_s et l'amortissement de l'amplitude de T_m . On note que pour l'huile, l'effet de l'écartement est confirmé pour l'amortissement de T_m et f_s . Par ailleurs avec la vapeur, l'effet est moins visible pour l'amplitude de T_m . Cela s'explique par le fait qu'en augmentant l'écartement, la section du passage augmente ($2R_1L_0$), permettant un passage plus important de la quantité de matière (débit massique) d'où l'accroissement de f_s . Concernant la vapeur, l'effet n'est pas confirmé. Cela est dû au rapport des capacités thermiques $a^* = \frac{(\rho c_p)_f R_1}{(\rho c_p)_s (R_2 - R_1)}$, $(\rho c_p)_{Huile}$ est de l'ordre de 10^6 , et de même pour la paroi en acier inoxydable et en carbure de silicium, donc une variation de l'ordre de 10^{-2} pour R_1 suffit à influencer sur le rapport a^* . Contrairement $(\rho c_p)_{vapeur} = 773$ ne représente même pas la moitié $\left(a^* = \frac{10^6}{773}\right)$ des capacités thermiques de l'acier inoxydable ou du carbure de silicium, d'où une variation de l'ordre de 10^{-2} du rayon R_1 est insignifiante par rapport à a^* .

R_1 (m)	A-H		C-H		A-V		C-V	
	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$
0.01	0,030	0,22	0,040	0,17	0,015	0,37	0,025	0,29
0.03	0,030	0,61	0,040	0,47	0,015	1,10	0,025	0,87
0.05	0,030	0,89	0,040	0,69	0,015	1,84	0,025	1,45

Tableau 2.6 : $f_{s\ op}$ pour différents écartements R_1

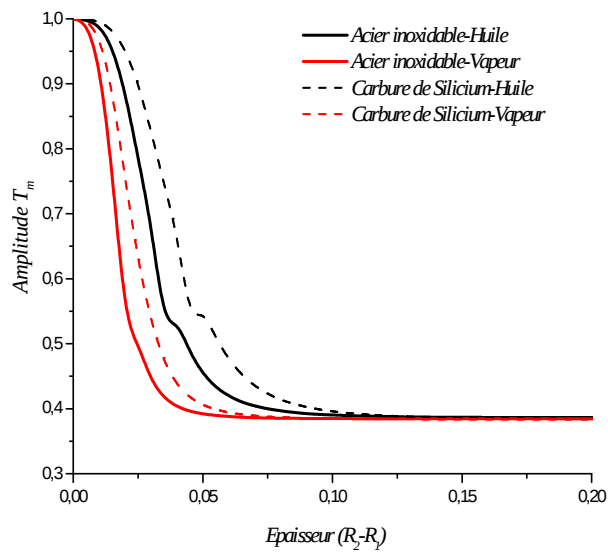


Fig 2.2a: Evolution de T_m fonction de l'épaisseur $E_{\text{paisseur}} (R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$, $L = 0.5$, $\tau = 24 \text{ h}$ et différents couples (matériau-fluide)

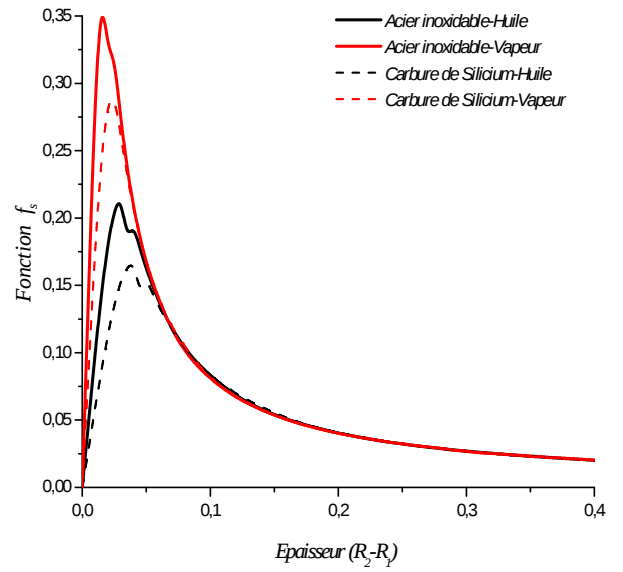


Fig 2.2b: Evolution de f_s fonction de l'épaisseur $E_{\text{paisseur}} (R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$, $L = 0.5$, $\tau = 24 \text{ h}$ et différents couples (matériau-fluide)

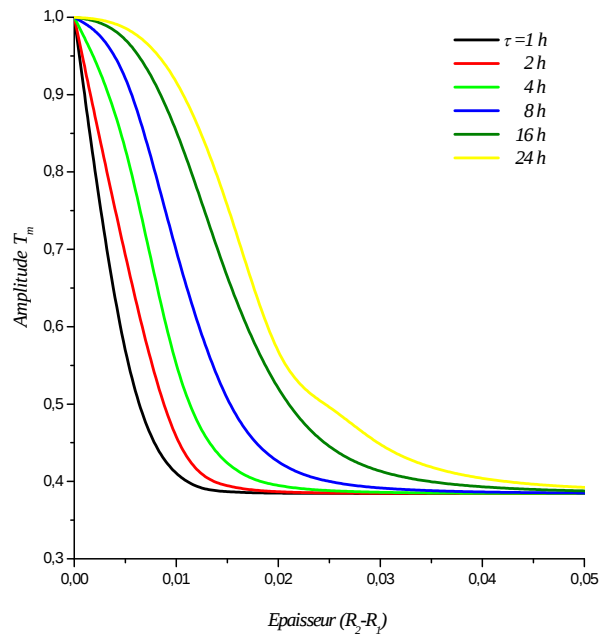


Fig 2.3a: Evolution de T_m fonction de l'épaisseur $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$, $L = 0.5 \text{ m}$ et différentes périodes ($\tau = 1-24 \text{ h}$) du couple (Acier inoxydable-Vapeur)

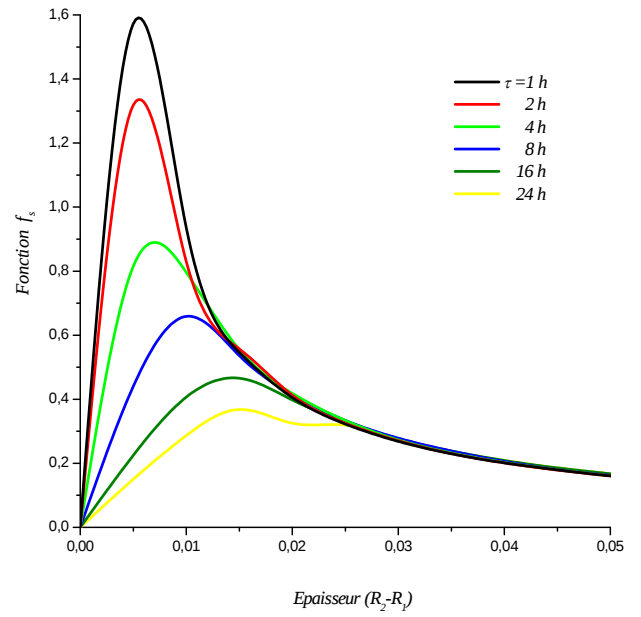


Fig 2.3b: Evolution de f_s fonction de l'épaisseur $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$, $L = 0.5 \text{ m}$ et différentes périodes ($\tau = 1-24 \text{ h}$) du couple (Acier inoxydable-Vapeur)

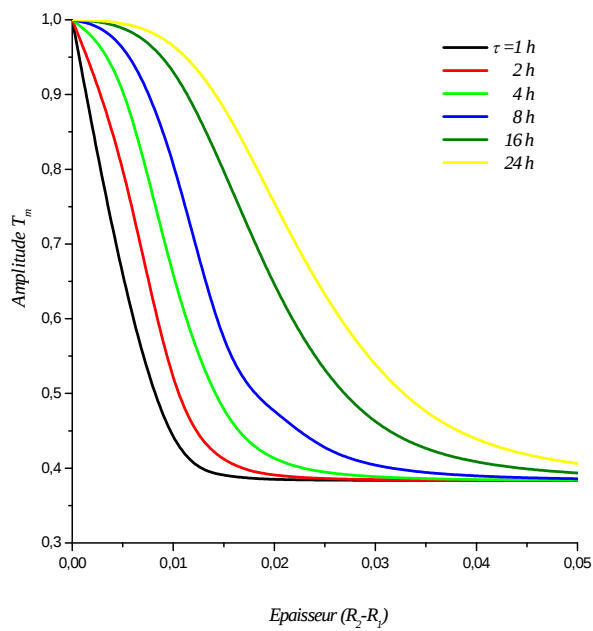


Fig 2.4a: Evolution de T_m fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $R_1=0.01$ m, $L=0.5$ m et différentes périodes ($\tau=1-24$ h) du couple (Carbure de Silicium-Vapeur)

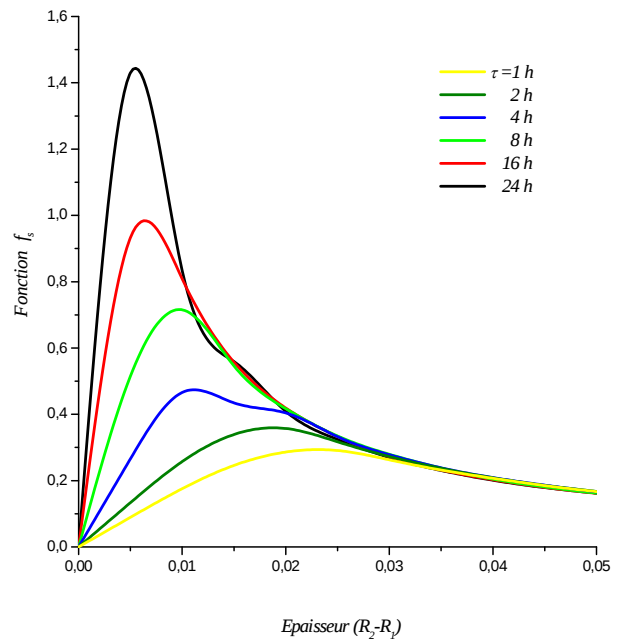


Fig 2.4b: Evolution de f_s fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $R_1=0.01$ m, $L=0.5$ m et différentes périodes ($\tau=1-24$ h) du couple (Carbure de Silicium-Vapeur)

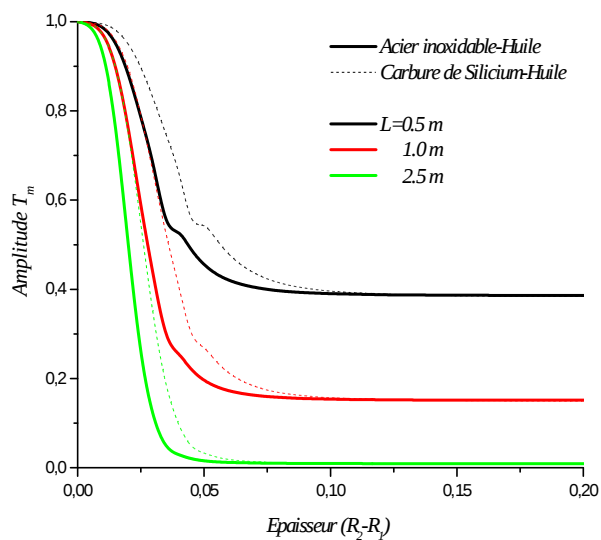


Fig 2.5a : Evolution de T_m fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $R_1=0.01$ m, $\tau=24$ h et différents longueurs du canal ($L=0.5, 1.0, 2.5$ m).

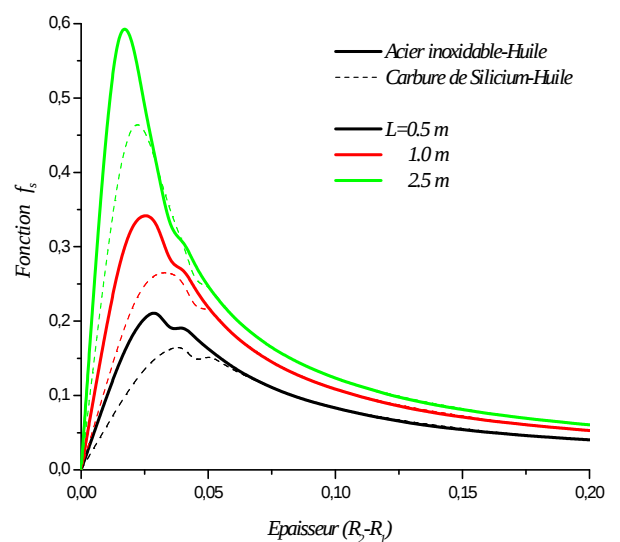


Fig 2.5b : Evolution de f_s fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $R_1=0.01$ m, $\tau=24$ h et différents longueurs du canal ($L=0.5, 1.0, 2.5$ m).

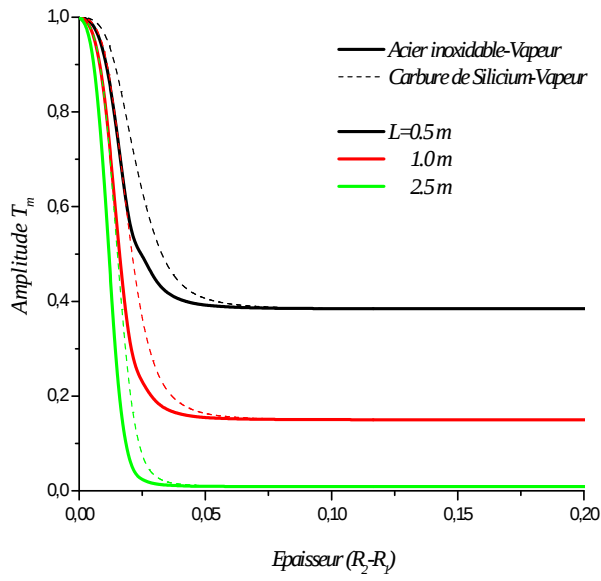


Fig 2.6a : Evolution de T_m fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $R_1=0.01$ m, $\tau=24$ h et différents longueurs du canal ($L=0.5, 1.0, 2.5$ m).

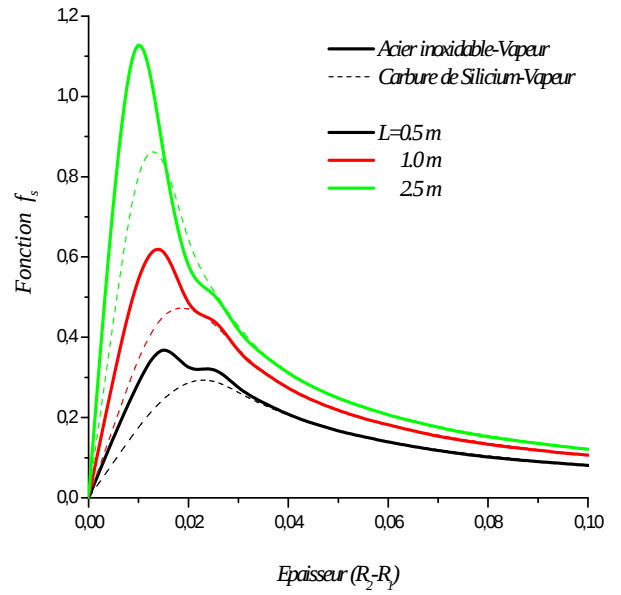


Fig 2.6b : Evolution de f_s fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $R_1=0.01$ m, $\tau=24$ h et différents longueurs du canal ($L=0.5, 1.0, 2.5$ m).

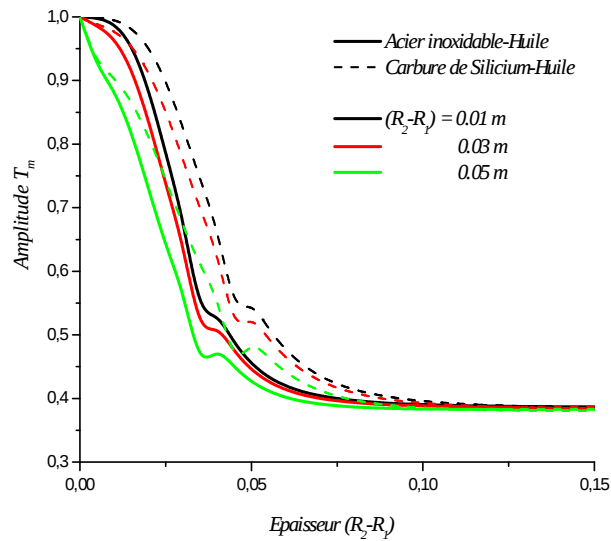


Fig 2.7a : Evolution de T_m fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $l'=0.01$ m, $\tau=24$ h et différentes valeurs de $(R_1=0.01-0.03-0.05$ m).

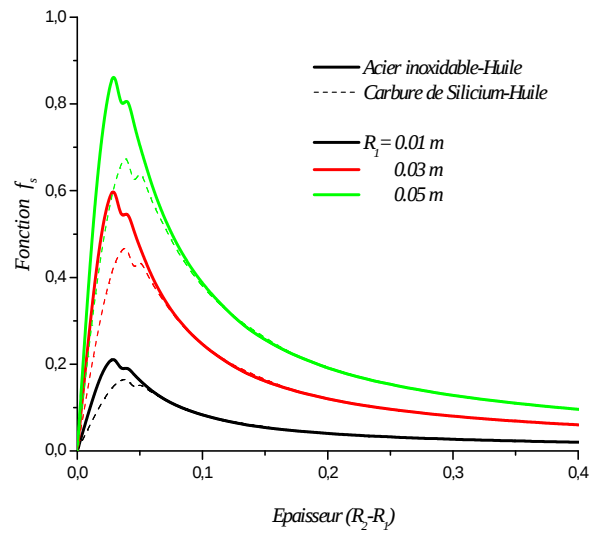


Fig 2.7b : Evolution de f_s fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $L=0.5$ m, $\tau=24$ h et différentes valeurs de $(R_1=0.01-0.03-0.05$ m).

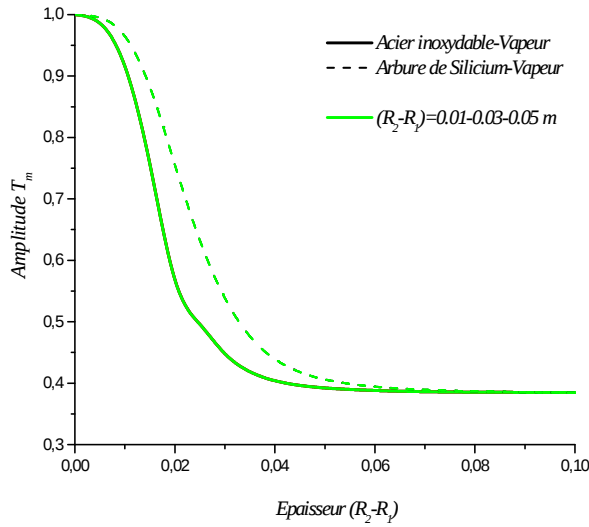


Fig 2.8a: Evolution de T_m fonction de l'épaisseur $(R_2 - R_1)$ pour $L=0.5\text{ m}$, $\tau=24\text{ h}$ et différentes valeurs de $(R_1=0.01-0.03-0.05\text{ m})$.

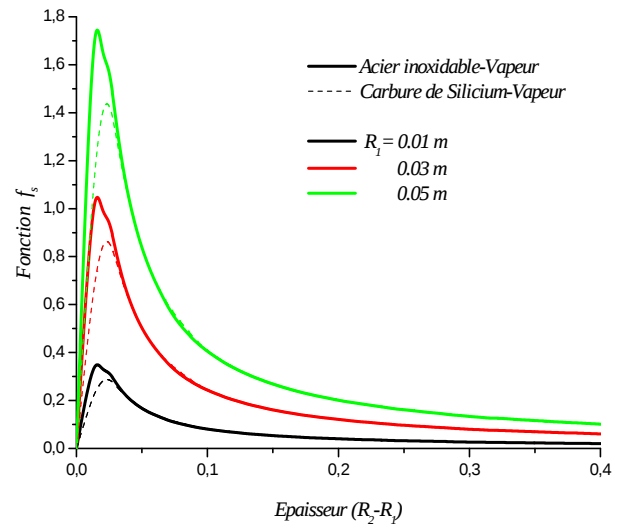


Fig 2.8b: Evolution de f_s fonction de l'épaisseur $(R_2 - R_1)$ pour $L=0.5\text{ m}$, $\tau=24\text{ h}$ et différentes valeurs de $(R_1=0.01-0.03-0.05\text{ m})$.

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, l'épaisseur optimale de la paroi de stockage à été déterminée pour différentes combinaisons (matériau-fluide), l'effet de la période, la surface et l'écartement entre les plaques a été étudié, il a été constaté que :

- La fonction de stockage dépend essentiellement de la quantité de chaleur qui peut être stockée dans une paroi, et la quantité de chaleur qui peut être évacuée d'un fluide caloporteur, ce qui se résume par le ratio $a^* = \frac{(\rho c_p)(R_2 - R_1)}{(\rho c_p)_f R_1}$.
- Lors d'un choix du matériau de la paroi de stockage et d'un fluide caloporteur, l'effet de la quantité de chaleur (ρc_p) domine par rapport à l'effet de la conduction $k_{\text{matériau}}$ pour une paroi, l'effet de la viscosité $\vartheta_{\text{fluide}}$ est dominant devant la quantité de chaleur $(\rho c_p)_f$ pour un fluide caloporteur.
- Plus la surface de contact entre le fluide et la paroi est importante plus la fonction $f_{s,op}$ est importante.
- Plus la période est longues moins la fonction $f_{s,op}$ est importante, mais la quantité de chaleur emmagasinée est d'autant plus importante.
- Dans le cas d'un fluide avec $(\rho c_p)_f$ du même ordre de grandeur que (ρc_p) , de petites variations de R_1 suffisent à influencer sur l'amortissement de l'amplitude T_m et f_s . Alors que dans le cas d'un fluide $(\rho c_p)_f$ petit par rapport à (ρc_p) , de petites variations R_1 n'influence que sur la fonction de stockage

f_s .

Chapitre 3

Stockage d'énergie à chaleur sensible dans un régénérateur à tubes, en régime laminaire.

Dans ce chapitre on reprend le même type de problème qu'au chapitre précédent, mais avec un dispositif de stockage à chaleur sensible en configuration cylindrique. Le fluide caloporteur en écoulement laminaire à l'intérieur des tubes est chauffé de manière périodique à l'entrée du dispositif. On retient les mêmes conditions opératoires et les mêmes hypothèses que dans le chapitre 2.

3.1 Position du problème

L'étude tiendra en compte la configuration cylindrique (cf. fig 3,1a). Le fluide s'écoule en régime laminaire à l'intérieur des tubes avec une température d'entrée sinusoïdale, le profil de vitesse développé est considéré parabolique, la chaleur sensible est absorbée par les tubes. Dans le but d'annuler toute perte de chaleur, une isolation des tubes est nécessaire, cela correspond à un nombre de Biot nul ($Bi_{ext} = 0$). On tient compte de la diffusion dans les tubes. Nous supposons que tous les tubes sont identiques ainsi que les distances entre leurs axes.

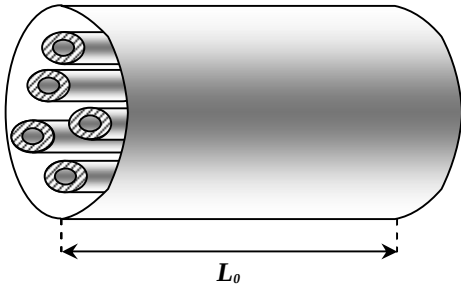


Fig 3.1a : unité de stockage de chaleur sensible

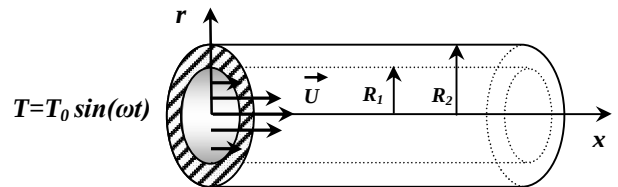


Fig 3.1b : volume de control

3.2 Formulation du problème

Tenant compte des hypothèses du chapitre 2, le problème peut être formulé comme ci-dessous :

- Diffusion la veine fluide :

$$\alpha_f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial x} \quad (3.1a)$$

$$T(x, r, t)|_{x=0} = T_{\infty} + \Delta T \sin(\omega t) \quad (3.1b)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.1c)$$

- Dans la paroi de stockage :

$$\alpha_s \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_w(x, r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\partial T_w(x, r, t)}{\partial t} \quad (3.1d)$$

- Condition de contact :

$$k_f \left. \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} = k_s \left. \frac{\partial T_w(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} \quad (3.1e)$$

$$T(x, r, t)|_{r=R_1} = T_w(x, r, t)|_{r=R_1} \quad (3.1f)$$

Où T_w et T représentent respectivement la température de la paroi et la température du fluide.

3.3 La distribution des températures

En régime périodique établi, les distributions des températures dans la paroi et dans le fluide sont alors respectivement sous la forme :

$$\theta_w(x, r, t) = A_w(x, r) \sin(\omega t + \phi_w(x, r)) \quad (3.2a)$$

$$\theta(x, r, t) = A(x, r) \sin(\omega t + \phi(x, r)) \quad (3.2b)$$

Où les fonctions $\theta_w(x, r, t)$ et $\theta(x, r, t)$ sont solution du système couplé (3.1a) et (3.1d).

En injectant les quantités adimensionnelles suivantes ci-dessous dans le système (2.1).

$$x^* = \frac{x \alpha_f}{R_1^2 \bar{u}}, r^* = \frac{r}{R_1}, r_2^* = \frac{R_2}{R_1}, t^* = \frac{t \alpha_f}{R_1^2}, \theta = \frac{T - T_{\infty}}{\Delta T}, \theta_w = \frac{T_w - T_{\infty}}{\Delta T}, \gamma = \frac{k_s}{k_f}, r_{th} = \frac{k_s(R_2 - R_1)}{k_f R_1}$$

$$\delta = \frac{\omega R_1^2}{\alpha_f}, \beta_s = (R_2 - R_1) \sqrt{\frac{\omega}{2 \alpha_s}}, a^* = \frac{(\rho c_p)(R_2 - R_1)}{(\rho c_p)_f R_1} \text{ et } u^*(r^*) = \frac{u(r)}{\bar{u}}$$

Ainsi que les températures complexes $\theta(x^*, r^*, t^*) = \tilde{\theta}(x^*, r^*) e^{i \delta t^*}$ et $\theta_w(x^*, r^*, t^*) = \tilde{\theta}_w(x^*, r^*) e^{i \delta t^*}$.

Le problème prenne alors la forme suivante:

- Diffusion la veine fluide:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \right) = i \delta \tilde{\theta}(x^*, r^*, t^*) + u^*(r^*) \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial x^*} \quad (3.3a)$$

$$\tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{x^*=0} = 1 \quad (3.3b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = 0 \quad (3.3c)$$

- Dans la paroi de stockage :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \tilde{\theta}_w(x^*, r^*)}{\partial r^*} \right) = 2i \left(\frac{\beta_s}{r_2^* - 1} \right)^2 \tilde{\theta}_w(x^*, r^*) \quad (3.3d)$$

- Les conditions de contact (fluide paroi interne) :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = \gamma \frac{\partial \theta_w(x^*, r^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} \quad (3.3e)$$

$$\tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{r^*=1} = \tilde{\theta}_w(x^*, r^*)|_{r^*=1} \quad (3.3f)$$

Le profil de vitesse en régime laminaire établi entre deux plaques parallèles est :

$$u^*(r^*) = 2(1 - r^{*2}) \quad (3.3g)$$

3.4 La résolution du problème

La résolution de l'équation (3.3d) est connue, elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{\theta}_w(r^*, x^*) = A \sin(\tilde{\beta}_s r^*) + B \cos(\tilde{\beta}_s r^*) \quad (3.4a)$$

Ou $\tilde{\beta}_s = \beta_s(1 - i)$

En remplaçant $\tilde{\theta}_w$ par son expression dans (3.3f), on calcul A et B. Il en résulte une condition de cinquième type.

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} + \tilde{H} \tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{r^*=1} = 0 \quad (3.4b)$$

$$\tilde{H} = r_{th} \frac{j_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1} \right) - \frac{j_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1} \right)}{y_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1} \right)} y_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1} \right)}{j_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1} \right) - \frac{j_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1} \right)}{y_1 \left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1} \right)} y_0 \left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1} \right)}$$

$\tilde{H}$ paramètre de couplage.

Par conséquence, la distribution de la température dans le fluide est donnée par le problème ci-dessous :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \right) = i\delta \tilde{\theta}(x^*, r^*, t^*) + u^*(r^*) \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial x^*} \quad (3.5a)$$

$$\tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{x^*=0} = 1 \quad (3.5b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = 0 \quad (3.5c)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} + H \tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{r^*=1} = 0 \quad (3.5d)$$

On choisit la méthode analytique approximative de Ritz car la résolution analytique exacte du problème (3.5) est délicate.

En introduisant la technique utilisant la transformée de Laplace sur la variable x^* tel :

$$\bar{\tilde{\theta}}(r^*, p) = \int_0^{\infty} e^{-px^*} \tilde{\theta}(r^*, x^*) dx^*$$

dans le système (3.5) on obtient:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \bar{\tilde{\theta}}}{\partial r^*} \right) = (pu^*(r^*) + i\delta) \bar{\tilde{\theta}} - u^*(r^*) = 0 \quad (3.6a)$$

$$\bar{\tilde{\theta}}(0, r^*) = \frac{1}{p} \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial \bar{\tilde{\theta}}(r^*, p)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = 0 \quad (3.6c)$$

$$\frac{\partial \bar{\tilde{\theta}}(r^*, p)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = -\tilde{H} \bar{\tilde{\theta}}(r^*, p) \Big|_{r^*=1} \quad (3.6d)$$

Dont la forme d'expression variationnelle des températures de fluide est donnée par :

$$I = \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial \bar{\tilde{\theta}}}{\partial r^*} \right)^2 + (i\delta + pu^*) \bar{\tilde{\theta}}^2 - 2u^* \bar{\tilde{\theta}} \right) r^* dr^* + \tilde{H} \bar{\tilde{\theta}}^2 \Big|_{r^*=1} \quad (3.7)$$

La solution approchée du problème (3.7) comprend des fonctions de base trigonométriques du genre :

$$\bar{\bar{\theta}}(r^*, p) = \sum_{i=1}^n c_i(p) \cos(\sigma_i r^*) \quad (3.8)$$

σ_i : représentent les valeurs propres dont la détermination est par la résolution de l'équation transcendante ci-dessous:

$$\sigma_i \tan(\sigma_i) = \tilde{H} \quad (3.9)$$

L'équation est déduite à l'aide de la condition aux limites (3.6d).

Les inconnues $c_i(p)$ sont déterminées par la minimisation de l'équation (3.7), en écrivant :

$$\frac{\partial I(c_i(p))}{\partial c_i(p)} = 0 \quad (3.10a)$$

Après dérivation, on remarque que l'équation (3,10a) peut s'écrire sous forme matricielle.

$$[A] \times [C] = [B] \quad (3.10b)$$

tel que :

$$[A] = [A^*] + p[D] \quad (3.10c)$$

Les éléments de $[A]$, $[D]$ et $[b]$ sont donnés dans l'annexe (2).

Après résolution du système (3.10b), on trouve :

$$c_i = \frac{[e_i]}{p + [\mu_i]} \quad (3.10d)$$

Tel que $[e_i] = [b_k] \times [d_{ik}^*]^{-1}$ et $[\mu_i] \equiv [a_{ik}^*] \times [d_{ik}^*]^{-1}$

μ_i : représentent les valeurs propres de la matrice $[[a_{ik}^*] \times [d_{ik}^*]^{-1}]$

3.5 Expressions de la température pariétale, de mélange et de flux de chaleur

En appliquant la transformé inverse de Laplace à l'équation (3,10d), on aboutit à la formule suivante :

$$c_i(x) = e_i \exp(-\mu_i x^*) \quad (3.10e)$$

Alors la solution approchée de Ritz s'écrit ainsi :

$$\tilde{\theta}(x^*, r^*) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \cos(\sigma_i r^*) \exp(-\mu_i x^*) \quad (3.11)$$

D'après l'équation (3,3g) la solution devient comme suit :

$$\tilde{\theta}_w(x^*, 1) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \exp(-\mu_i x^*) \quad (3.11a)$$

tel que : $W_i = e_i \cos(\sigma_i)$

La température de mélange est la température moyenne du fluide dans le tube :

$$\tilde{\theta}_m(x^*, r^*) = \frac{\int_0^1 u^* \theta dr^*}{\int_0^1 u^* dr^*}$$

$$\theta_m(x^*, r^*) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \exp(-\mu_i x^*) \quad (3.11b)$$

$$\text{tel que : } Q_i = \frac{3}{\sigma_i^2} e_i \left[\frac{\sin(\sigma_i r^*)}{\sigma_i} - \cos(\sigma_i r^*) \right]$$

En dérivant l'équation (2,11), on obtient le flux suivant :

$$\tilde{q}_f(x^*, 1) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \exp(-\mu_i x^*) \quad (3.11c)$$

$$\text{tel que : } P_i = e_i \sigma_i \sin(\sigma_i)$$

D'après les équations (3,11a), (3.11b) et (3.11c) on obtient les expressions suivantes :

$$\theta(x^*, r^*, t^*) = A(x^*) \sin(\delta t^* + \phi_m(x^*)) \quad (3.12a)$$

$$\theta_w(x^*, 1, t^*) = A_w(x^*) \sin(\delta t^* + \phi_w(x^*, 1)) \quad (3.12b)$$

$$q_f(x^*, 1, t^*) = A_f(x^*) \sin(\delta t^* + \phi_f(x^*, 1)) \quad (3.12c)$$

A_i et ϕ_i représentent les amplitudes et les déphasages.

3.6 Validation du model variationnel

Pour valider le model variationnel, les résultats seront comparés à ceux obtenus dans l'étude de Kim et Ozisik [13]. Après comparaison les résultats montrent une grande satisfaction du côté précision.

b^*	W_n par W. S. Kim and M. N. Ozisik [13]	W_n par la présente étude	μ_n W. S. Kim and M. N. Ozisik [13]	μ_n par la présente étude
2	0.44828 E 0 - i 0.61483 E 0	0.67001 E 0 - i 0.58977 E 0	0.22072 E1 + i 0.20035 E1	0.22071 E1 + i 0.20057 E1
	0.36058 E 0 + i 0.11907 E 0	0.30519 E 0 + i 0.31646 E 0	0.14957 E2 + i 0.49448 E1	0.14957 E2 + i 0.49473 E1
	0.95123 E-1 + i 0.11883 E 0	0.18745 E-1 + i 0.10826 E 0	0.43416 E2 + i 0.58602 E1	0.43413 E2 + i 0.58700 E1
	0.35644 E-1 + i 0.70127 E-1	0.33419 E-2 + i 0.45905 E-1	0.88310 E2 + i 0.64094 E1	0.88301 E2 + i 0.63611 E1
	0.17632 E-1 + i 0.45363 E-1	0.10246 E-2 + i 0.25142 E-1	0.14935 E3 + i 0.68613 E1	0.14936 E3 + i 0.68501 E1
10	0.35684 E-1 - i 0.23578 E 0	0.21779 E-1 - i 0.20241 E 0	0.35951 E1 + i 0.54022 E1	0.35951 E1 + i 0.54984 E0
	0.27110 E-1 - i 0.11095 E 0	0.45110 E-1 - i 0.24483 E 0	0.21891 E2 + i 0.24063 E1	0.21890 E2 + i 0.24176 E1
	0.38818 E-1 - i 0.94418 E-1	0.20010 E 0 - i 0.34709 E 0	0.55730 E2 + i 0.52175 E1	0.55732 E2 + i 0.52373 E1
	0.49187 E-1 - i 0.80947 E-1	0.52341 E 0 + i 0.67303 E-1	0.10496 E3 + i 0.87739 E1	0.10498 E3 + i 0.87783 E1
	0.58699 E-1 - i 0.68353 E-1	0.14136 E 0 + i 0.23397 E 0	0.16930 E3 + i 0.12878 E2	0.16940 E3 + i 0.12877 E2

Tableau 3.1: Comparaison entre les résultats de l'étude présente et celle de W. S. Kim and M. N. Ozisik

3.7 Fonction de transfert et bilan énergétique

De la même manière que dans le chapitre précédent, on écrit la température de mélange :

$$\tilde{\theta}_m = \exp(-\eta \cdot x^*) \cdot \exp(-i\zeta x^*) \quad (3.13)$$

D'où l'amortissement exponentiel

$$\chi = \exp(-\eta \cdot x^*) \quad (3.13a)$$

et le déphasage linéaire

$$\phi = \zeta x^* \quad (3.13b)$$

L'intégration du flux total durant une demi-période, permet de calculer l'énergie stockée.

$$W_s = L_0 \int_0^1 \int_0^{x_s^*} 2(\rho C)_s \tilde{\theta}_w r^* dx^* dr^* \quad (3.14a)$$

$$W_s = 2 \frac{\tau}{\pi} \dot{m} C_f b^* \frac{j_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) - j_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right) - \frac{j_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right)}{y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right)} \left(y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) - y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right)\right)}{j_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right) - \frac{j_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right)}{y_1\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right)} y_0\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right)} \cdot (r_2^* - 1) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} W_i \left[\frac{1 - \exp(-\mu_i \cdot x_s^*)}{\mu_i} \right] \quad (3.14b)$$

On se rapportant à la quantité $H_m = \frac{\tau}{\pi} \dot{m} C_f$, l'énergie maximale transportée par le fluide à l'entrée du canal pendant une demi-période. Nous appellerons fonction stockage la quantité :

$$f_s = \frac{W_s}{H_m} \quad (3.15)$$

On garde les mêmes propriétés physiques des fluides et matériaux utilisés, pour avoir une idée sur l'effet qu'a la géométrie sur le stockage.

3.8 Résultats et discussions

3.8.1 Effet matériau-fluide

Sur les figures (3.2 a,b) apparaît l'effet des propriétés physiques $(\rho C_p)_s$ et ϑ sur l'amplitude T_m et la fonction stockage f_s , en substituant le couple matériau-fluide les propriétés physiques changent. On

remarque que l'effet des propriétés physiques et pareil qu'en configuration à plaque qu'en configuration cylindrique, n'empêche qu'en configuration cylindrique la fonction stockage est plus importante qu'en configuration à plaques, depuis le tableau 3.2 on voit que pour la combinaison A-H $((R_2-R_1)_{op}, f_s)$ valent (0.016m, 0.28) alors qu'en configuration à plaque ils valent (0.030 m, 0.21). Remarque même effet pour l'amortissement de l'amplitude T_m , prenons l'exemple de la combinaison A-H en cylindrique $((R_2-R_1)_{op}, T_m)$ valent (0.050m, 0.10m) et en configuration à plaque $((R_2-R_1)_{op}, T_m)$ valent (0.105m, 0.38 m).

	A-V	C-V	A-H	C-H		A-V	C-V	A-H	C-H
$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	0,035	0,045	0,050	0,055	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	0,015	0,016	0,016	0,017
$T_{m,op}$	0,10	0,10	0,10	0,10	$f_{s,op}$	0,41	0,36	0,28	0,25

Tableau 3.2 : χ_{op} et $f_{s,op}$ pour différents couples (matériau-fluide)

3.8.2 Effet période

Les figure (3.3a,b) présentent l'effet de la période sur le stockage en configuration cylindrique. L'effet de la période est confirmé en configuration cylindrique comme en configuration à plaque, remarque l'augmentation de la fonction stockage f_s est d'autant plus intense en configuration cylindrique qu'en configuration à plaque. D'après le tableau3.3, pour un stockage à petites période ($\tau=1-6$ h), on trouve que $(R_2-R_1)_{op}=0.007$ m est stable alors que $f_s(1h)=1.03$, $f_s(3h)=0.66$, $f_s(6h)=0.53$, la réalité est que f_s est tellement sensible aux variations des petites périodes en configuration cylindrique. L'effet de la variation de la période et le même pour les autres combinaisons matériau-fluide.

A-H						
Période τ (h)	1	3	6	12	24	48
$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	0.007	0.007	0.007	0.007	0.010	0.015
f_s	1.03	0.66	0.53	0.42	0.25	0.20

Tableau 3.3 : $f_{s,op}$ pour différents périodes τ

3.8.3 Effet de la surface

Dans les figures (3.4 a,b) apparait l'effet de la surface ($S = 2\pi R_1 L$) sur l'amortissement et la fonction de stockage. Le coefficient d'échange thermique varie proportionnellement avec la longueur L du canal, d'où l'accroissement de la fonction de stockage avec la longueur L . D'après le tableau 3.3, l'épaisseur optimale $(R_1-R_2)_{op}$ diminue en augmentant la longueur du conduit. Dans ce cas la vapeur à été

prise comme exemple, mais en pratique l'effet est confirmé pour toutes les combinaisons matériau-fluide, comme pour la configuration à plaque dans le chapitre 2.

L_0 (m)	A-V		C-V	
	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$
0.5	0,015	0,21	0,015	0,17
1.5	0,005	0,37	0,015	0,25
2.5	0,005	0,76	0,005	0,51

Tableau 3.3 : $f_{s\ op}$ pour différents périodes longueurs du conduit

3.9.4 Effet de diamètre

A travers la figure (3.5a,b), on voit que des petites variations du diamètre causent des augmentations assez importantes sur la fonction stockage f_s . Cela revient au fait que le diamètre influe directement sur le débit, ainsi le diamètre influe directement sur la quantité de chaleur du fluide caloporteur.

R_1 (m)	A-H		C-H	
	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$	$(R_1-R_2)_{op}$ (m)	$f_{s\ op}$
0.03	0,025	0,38	0,025	0,30
0.06	0,025	0,60	0,025	0,43
0.08	0,025	0,62	0,045	0,46

Tableau 3.4 : $f_{s\ op}$ pour différent diamètre

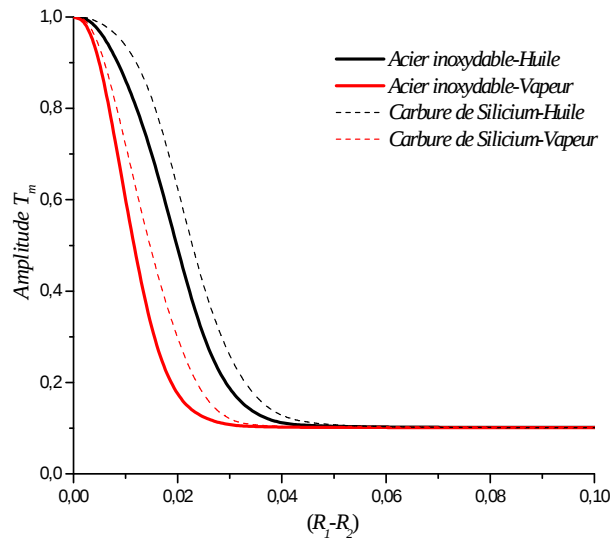


Fig 3.2a: évolution de T_m fonction de $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$, $L_0 = 0.5 \text{ m}$ et différents couples (matériau-fluide)

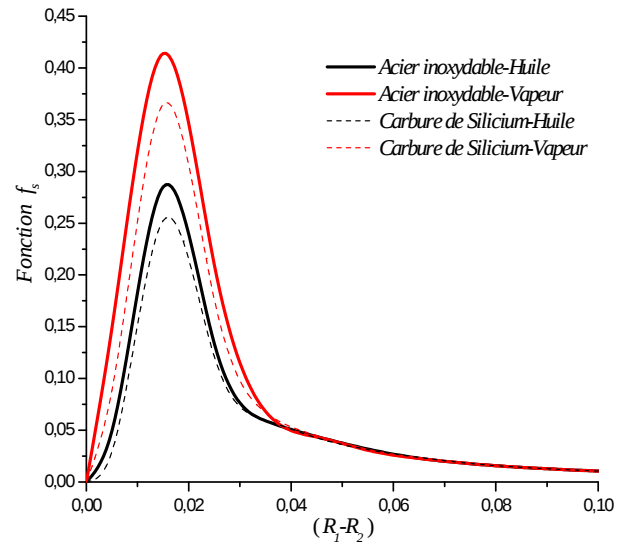


Fig 3.2b: évolution de f_s fonction de $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$, $L_0 = 0.5 \text{ m}$ et différents couples (matériau-fluide)

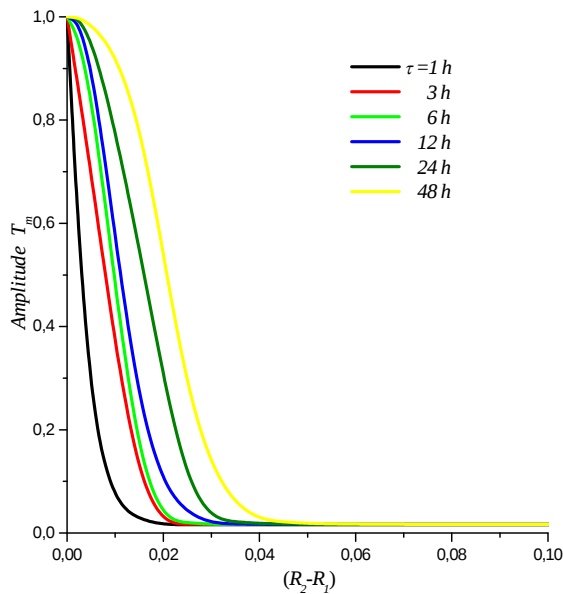


Fig 3.3a : Evolution de T_m fonction de $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$, $L = 1 \text{ m}$ et différentes périodes ($\tau = 1-48 \text{ h}$) du couple (Acier inoxydable-Huile)

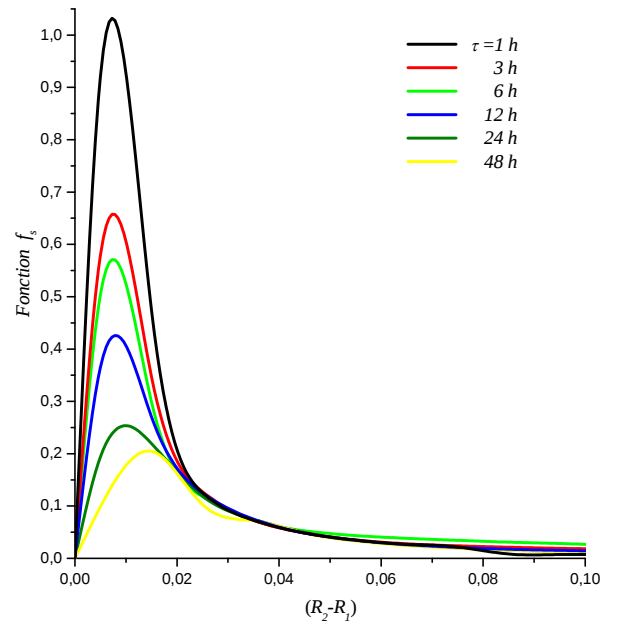


Fig 3.3b : Evolution de f_s fonction de $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$, $L = 1 \text{ m}$ et différentes périodes ($\tau = 1-48 \text{ h}$) du couple (Acier inoxydable-Huile).

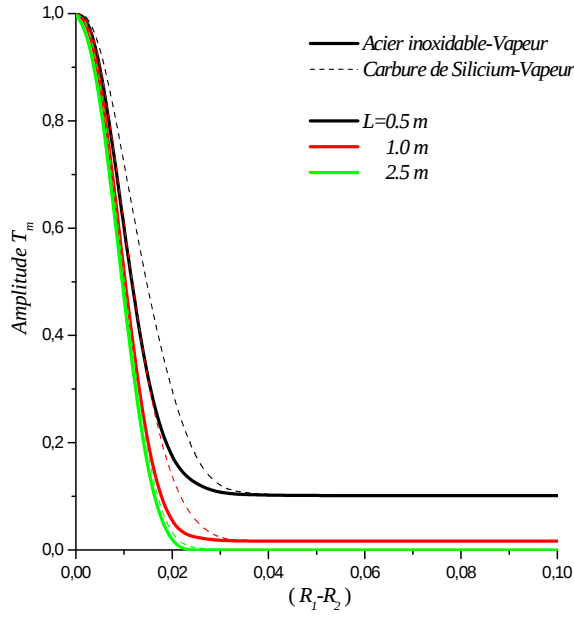


Fig 3.4a : Evolution de T_m fonction de $(R_1 - R_2)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$, $\tau = 24 \text{ h}$ et différents longueurs du canal ($L = 0.5-1.0-2.5 \text{ m}$).

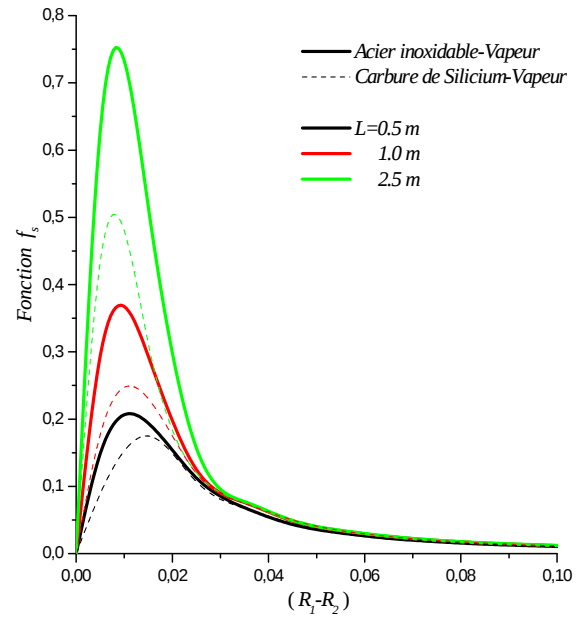


Fig 3.4b : Evolution de f_s fonction de $(R_1 - R_2)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$, $\tau = 24 \text{ h}$ et différents longueurs du canal ($L = 0.5-1.0-2.5 \text{ m}$).

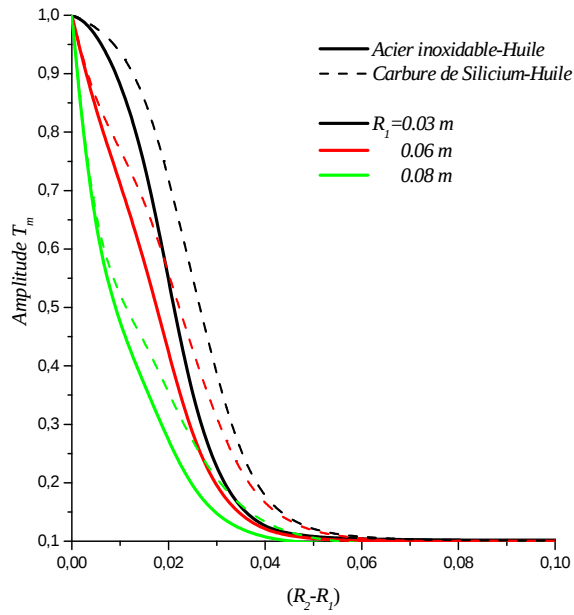


Fig 3.5a : Evolution de T_m fonction de $(R_2 - R_1)$ pour $l = 0.5 \text{ m}$, $\tau = 24 \text{ h}$ et différentes valeurs de $(R_1 = 0.01-0.03-0.05 \text{ m})$.

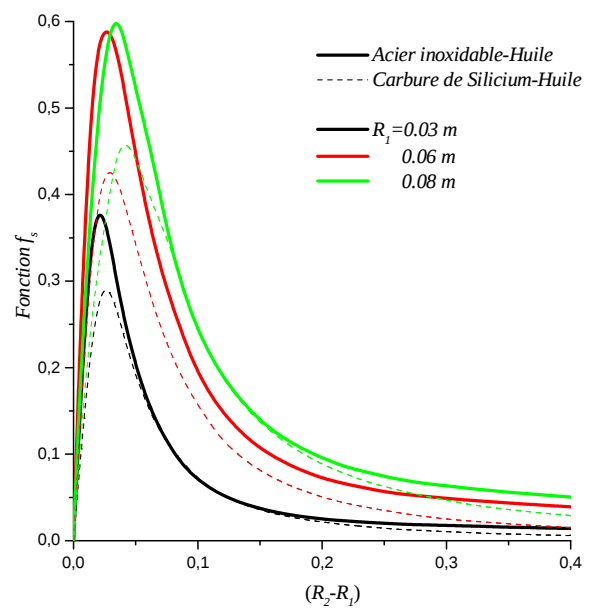


Fig 3.5b : Evolution de f_s fonction de $(R_2 - R_1)$ pour $l = 0.5 \text{ m}$, $\tau = 24 \text{ h}$ et différentes valeurs de $(R_1 = 0.03-0.06-0.08 \text{ m})$.

3.9 Conclusion

Dans le chapitre présent, les épaisseurs optimales ont été déterminées pour la configuration cylindrique en différentes combinaisons du couple matériau-fluide, le comportement du fluide caloporteur et la paroi de stockage est pareil qu'on configuration à plaque. L'effet des différents paramètres à était étudiés sur la réponse du dispositif de stockage, comme la surface la période et le rayon intérieur des tube. Il se trouve que l'amortissement des températures moyennes et la fonction stockage f_s sont d'autant plus importants en configuration cylindrique qu'en configuration plane, de plus la configuration cylindrique est plus sensible aux variations de périodes que la configuration à plaque.

Chapitre 4

Stockage d'énergie à chaleur sensible entre deux plaques parallèles en régime turbulent

Nous traitons dans ce chapitre le problème de stockage par chaleur sensible, dans un dispositif (cf.fig 4.1a) constitué d'un assemblage de plaques parallèles épaisses. Le fluide caloporteur en écoulement turbulent entre les plaques est chauffé de manière périodique à l'entrée de ce dispositif. On retient les mêmes conditions opératoires et les mêmes hypothèses que dans le chapitre 2 (cas laminaire).

4.1 Position du problème

Pour faciliter la résolution du problème et par raison de symétrie nous traitons le fluide caloporteur en écoulement turbulent entre deux plaques épaisses (parois de stockage), le fluide est soumis à une température sinusoïdale à l'entrée du canal. Dans le but d'annuler toute perte de chaleur, une isolation des plaques est nécessaire, cela correspond à un nombre de Biot nul ($Bi_{ext} = 0$).

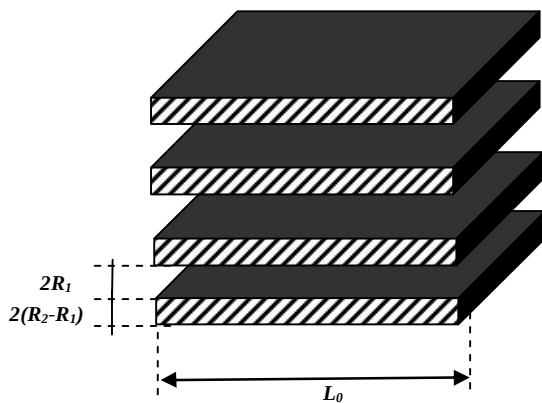


Fig 4.1a : Dispositif de stockage par chaleur sensible

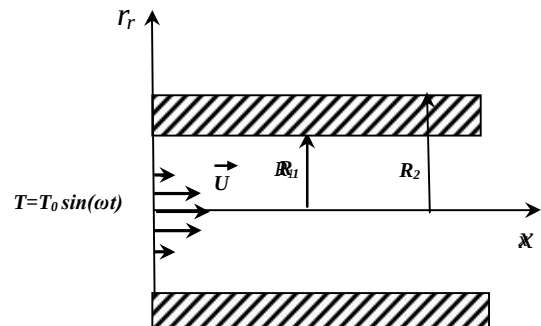


Fig 4.1b : Système étudié

4.2 Equations gouvernantes et conditions aux limites

En écrivant les équations de bilan dans le milieu liquide et solide ainsi que l'équation de continuité (condition de contact parfait), le système d'équations régissant notre problème est comme suit :

- Dans la veine fluide :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left((\alpha_f + \varepsilon_h) \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial t} + u(r) \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial x} \quad (4.1a)$$

$$T(x, r, t)|_{x=0} = T_\infty + \Delta T \sin(\omega t) \quad (4.1b)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.1c)$$

- Dans la paroi de stockage:

$$\frac{\partial^2 T_w(x, r, t)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_w(x, r, t)}{\partial t} \quad (4.1d)$$

- Conditions de contact :

$$k_f \left. \frac{\partial T(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} = k_s \left. \frac{\partial T_w(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} \quad (4.1e)$$

$$T(x, r, t)|_{r=R_1} = T_w(x, r, t)|_{r=R_1} \quad (4.1f)$$

En introduisant les paramètres adimensionnels suivants :

$$r^* = \frac{r}{R_1}, r_2^* = \frac{R_2}{R_1}, x^* = \frac{(x/D_e)(D_e/R_1)}{Re.Pr}, t^* = \frac{t\alpha_f}{R_1^2}, \delta = \frac{\omega R_1^2}{\alpha_f}, \gamma = \frac{k_s}{k_f}, \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \theta_w = \frac{T_w - T_\infty}{\Delta T}$$

$$\beta_s = (R_2 - R_1) \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_s}}, a^* = \frac{(\rho c_p)_f R_1}{(\rho c_p)(R_2 - R_1)}, u^*(r^*) = \frac{u^*(r)}{\bar{u}}, \varepsilon(r^*) = 1 + \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_f}$$

le système précédent devient :

- Dans la veine fluide :

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\varepsilon(r^*) \frac{\partial \theta(x^*, r^*, t^*)}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial \theta(x^*, r^*, t^*)}{\partial t^*} + u^*(r^*) \frac{\partial \theta(x^*, r^*, t^*)}{\partial x^*} \quad (4.2a)$$

$$\theta(x^*, r^*, t^*)|_{x^*=0} = \sin(i\delta t^*) \quad (4.2b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(x^*, r^*, t^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (4.2c)$$

- Dans la paroi stockage:

$$\frac{\partial^2 \theta_w(x^*, r^*, t^*)}{\partial r^{*2}} = \frac{\alpha_f}{\alpha_s} \frac{\partial \theta_w(x^*, r^*, t^*)}{\partial t^*} \quad (4.2d)$$

- Conditions de contact (fluide- paroi) :

$$\left. \frac{\partial \theta(x^*, r^*, t^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \gamma \left. \frac{\partial \theta_w(x^*, r^*, t^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} \quad (4.2e)$$

$$\theta(x^*, r^*, t^*)|_{r^*=1} = \theta_w(x^*, r^*, t^*)|_{r^*=1} \quad (4.2f)$$

Ou: $\varepsilon(r^*) = 1 + \frac{Pr}{Pr_t} \frac{\varepsilon_m}{\vartheta}$

Les modèles utilisés pour le profile des vitesses et la viscosité turbulente sont données en annexe(3).

En écrivant les températures complexes comme suit :

$$\theta_w(x^*, r^*, t^*) = \tilde{\theta}_w(x^*, r^*) e^{i\delta t^*} \quad \text{et} \quad \theta(x^*, r^*, t^*) = \tilde{\theta}(x^*, r^*) e^{i\delta t^*}$$

le problème s'écrit sous la forme :

- Dans la veine fluide :

$$u^*(r^*) \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\varepsilon(r^*) \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \right) - i\delta \tilde{\theta}(x^*, r^*) \quad (4.3a)$$

$$\tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{x^*=0} = 1 \quad (4.3b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (4.3c)$$

- Dans la paroi solide:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}_w(x^*, r^*)}{\partial r^{*2}} = i2 \left(\frac{\beta_s}{r_2^* - 1} \right)^2 \tilde{\theta}_w(x^*, r^*) \quad (4.3d)$$

- Conditions de contact (fluide- paroi) :

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \gamma \left. \frac{\partial \tilde{\theta}_w(x^*, r^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} \quad (4.3e)$$

$$\tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{r^*=1} = \tilde{\theta}_w(x^*, r^*)|_{r^*=1} \quad (4.3f)$$

4.3 Résolution du problème

La solution de l'équation (4.3d) est recherchée sous la forme suivante :

$$\tilde{\theta}_w(r^*, x^*) = A \sin(\tilde{\beta}_s r^*) + B \cos(\tilde{\beta}_s r^*) \quad (4.4a)$$

avec $\tilde{\beta}_s = \beta_s(1 - i)$.

En remplaçant $\tilde{\theta}_w$ par son expression dans (4.3f), il en résulte une condition de cinquième type suivante :

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} + \tilde{H} \tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{r^*=1} = 0 \quad (4.4b)$$

avec

$$\tilde{H} = r_{th} \frac{\sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right) + tg\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right)}{\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right) + tg\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right)}$$

Par conséquence, la distribution de température dans le fluide est donnée par la résolution du problème ci-dessous :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial r^{*2}} - u^*(r^*) \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial x^*} - i\delta \tilde{\theta}(x^*, r^*) = 0 \quad (4.5a)$$

$$\tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{x^*=0} = 1 \quad (4.5b)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (4.5c)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}(x^*, r^*)}{\partial z^*} \right|_{r^*=1} + \tilde{H} \tilde{\theta}(x^*, r^*)|_{r^*=1} = 0 \quad (4.5d)$$

En appliquant la transformée de Laplace au système (4.5) sur la variable x^* tels que :

$$\bar{\theta}(r^*, p) = \int_0^\infty e^{-px^*} \tilde{\theta}(r^*, x^*) dx^*$$

nous obtenons le système ci-dessous:

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\varepsilon(r^*) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r^*} \right) - (pu^*(r^*) + i\delta) \bar{\theta} + u^*(r^*) = 0 \quad (4.6a)$$

$$\bar{\bar{\theta}}(0, r^*) = \frac{1}{p} \quad (4.6b)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (4.6c)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = -\tilde{H} \bar{\bar{\theta}} \Big|_{r^*=1} \quad (4.6d)$$

En appliquant la méthode variationnelle de Ritz, on aboutit à la forme suivante :

$$I = \int_0^1 \left[\varepsilon(r^*) \left(\frac{\partial \bar{\bar{\theta}}}{\partial r^*} \right)^2 + (pu^* + i\delta) \bar{\bar{\theta}}^2 - 2u^* \bar{\bar{\theta}} \right] dr^* + \tilde{H} \bar{\bar{\theta}}^2 \Big|_{r^*=1} \quad (4.7)$$

La solution approchée du problème (4.6) comprend des fonctions de base trigonométriques de type :

$$\bar{\bar{\theta}}(r^*, p) = \sum_{i=1}^n c_i(p) \cos(\sigma_i r^*) \quad (4.8)$$

σ_i : représentent les valeurs propres dont la détermination est réalisée par la résolution de l'équation transcendante ci-dessous: (Voir annexe 1)

$$\sigma_i \tan(\sigma_i) = \tilde{H} \quad (4.9)$$

Les inconnues $c_i(p)$ sont déterminés par la minimisation de l'équation (4.7), en écrivant :

$$\frac{\partial I(c_i(p))}{\partial c_i(p)} = 0 \quad (4.10a)$$

L'équation (4.10a) peut s'écrire sous forme matricielle.

$$[A] \times [C] = [B] \quad (4.10b)$$

tels que :

$$[A] = [A^*] + p[D] \quad (4.10c)$$

Les éléments des matrices $[A]$, $[D]$ et $[b]$ sont donnés dans l'annexe (2).

Après résolution du système (4.10b), nous obtenons:

$$c_i = \frac{[e_i]}{p + [\mu_i]} \quad (4.10d)$$

tels que $[e_i] = [b_k] \times [d_{ik}^*]^{-1}$ et $[\mu_i] \equiv [a_{ik}^*] \times [d_{ik}^*]^{-1}$

μ_i : représentent les valeurs propres de la matrice $[[a_{ik}^*] \times [d_{ik}^*]^{-1}]$

4.4 Expressions de la température pariétale, de mélange et du flux de chaleur

En appliquant la transformé inverse de Laplace à l'équation (4.10d), on aboutit à la formule suivante :

$$c_i(x) = e_i \exp(-\mu_i x^*) \quad (4.10e)$$

Alors, la distribution de température s'écrit:

$$\tilde{\theta}(r^*, x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \cos(\sigma_i r^*) \exp(-\mu_i x^*) \quad (4.11)$$

D'après l'équation (4.3f), la solution d'écrit:

$$\tilde{\theta}_w(1, x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \exp(-\mu_i x^*) \quad (4.12a)$$

tel que : $W_i = e_i \cos(\sigma_i)$

La température de mélange du fluide est définie par:

$$\tilde{\theta}_m(r^*, x^*) = \frac{\int_0^1 u^* \theta dr^*}{\int_0^1 u^* dr^*} \quad (4.12b)$$

tel que :

$$\int_0^1 u^* dr^* = \left\{ \begin{array}{l} 2.5 \left(\ln(1 + 0.4y^+) \left(R^+ + \frac{5}{2} \right) - R^+ \right) \\ + 7.8 \left(R^+ + 11 \exp\left(-\frac{R^+}{11}\right) + \frac{\exp(-0.33R^+)}{3.63} (R^+ + 3) - 11 - \frac{9}{11} \right) \end{array} \right.$$

$\int_0^1 u^* \theta dr^*$ est calculée numériquement grâce à la méthode de Romberg.

En dérivant l'équation (4.11), on obtient le flux de chaleur :

$$\tilde{q}_f(1, x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \exp(-\mu_i x^*) \quad (4.12c)$$

tel que : $P_i = e_i \sigma_i \sin(\sigma_i)$

D'après les équations (4.12a), (4.12b) et (4.12c), on obtient les expressions suivantes :

$$\theta(x^*, r^*, t^*) = A(x^*) \sin(\delta t^* + \phi_m(x^*)) \quad (4.13a)$$

$$\theta_w(x^*, 1, t^*) = A_w(x^*) \sin(\delta t^* + \phi_w(x^*, 1)) \quad (4.13b)$$

$$q_f(x^*, 1, t^*) = A_f(x^*) \sin(\delta t^* + \phi_f(x^*, 1)) \quad (4.13c)$$

A_i et ϕ_i représentent respectivement les amplitudes et les déphasages.

4.5 Bilan énergétique

Le stockage est réalisé dans la première demi-période (transferts de chaleur du fluide vers la paroi), et le déstockage dans l'autre demi-période (de la paroi vers fluide).

L'intégration du flux total durant une demi-période, permet de calculer l'énergie stockée.

$$W_s = L_0 \int_0^1 \int_0^{x_s^*} 2(\rho C)_s \tilde{\theta}_w dx^* dy^* \quad (4.14a)$$

$$W_s = 2 \frac{\tau}{\pi} \dot{m} C_f b^* \frac{\sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) - \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right) - \tan\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) \left(\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) - \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right) \right)}{\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right) + \tan\left(\frac{\tilde{\beta}_s r_2^*}{r_2^* - 1}\right) \sin\left(\frac{\tilde{\beta}_s}{r_2^* - 1}\right)} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} W_i \left[\frac{1 - \exp(-\mu_i \cdot x_s^*)}{\mu_i} \right] \quad (4.14b)$$

On se rapportant à la quantité $H_m = \frac{\tau}{\pi} \dot{m} C_f$, l'énergie maximale transportée par le fluide à l'entrée du canal pendant une demi-période. Nous appellerons fonction du stockage la quantité :

$$f_s = \frac{W_s}{H_m} \quad (4.15)$$

Par suite, nous déterminerons l'épaisseur optimale $(R_2 - R_1)_{op}$ des plaques, à partir des résultats qu'on obtiendra, pour un stockage optimal.

4.6 Résultats et discussions

4.6.1 Effets de la nature du matériau de la paroi de stockage et du fluide caloporteur et du nombre de Reynolds Re

Les figures (4.2,3) présentent l'influence du fluide caloporteur et du matériau de stockage sur l'amortissement de l'amplitude T_m et la fonction stockage f_s , ces dernières ont le même comportement en régime turbulent qu'en régime laminaire. D'après le chapitre 2, la fonction f_s est plus importante pour la vapeur que l'huile ($\vartheta_{Vapeur} > \vartheta_{Huile}$), par ailleurs f_s est plus importante avec un conduit en Acier inoxydable que celui en Carbure de Silicium ($(\rho C)_{Acier} > (\rho C)_{Carbure}$), cela se confirme par le tableau 4.1a, par exemple pour un conduit en Acier inoxydable, l'amortissement de T_m atteint son optimum avec la vapeur avant l'huile $(R_2 - R_1)_{op,A-V} = 0.015 \text{ m} < (R_2 - R_1)_{op,A-H} = 0.105 \text{ m}$ et de même pour la fonction stockage $(R_2 - R_1)_{op,A-V} = 0.015 \text{ m} < (R_2 - R_1)_{op,A-H} = 0.035 \text{ m}$, atteignant les valeurs optimales suivantes: $T_{m,op,A-H} = 0,120 > T_{m,op,A-V} = 0,104$ et $f_{s,op,A-V} = 0,21 > f_{s,op,A-H} = 0,13$. La

fonction f_s est plus importante en laminaire qu'en turbulent. Par exemple pour l'huile : $f_{s,op,A-H,turb} = 0,13$ est inférieur à $f_{s,op,A-H,lam} = 0,21$ et $f_{s,op,C-H,turb} = 0,01 < f_{s,op,C-H,lam} = 0,17$. L'augmentation du nombre de Reynolds peut être interprétée comme une augmentation de la vitesse de fluide, le transfert d'énergie thermique stockée par le fluide à l'entrée du canal vers la paroi est très faible; par conséquent la fonction du stockage reste petite. Dans la figure 4.4 apparait que la fonction stockage f_s devient moins importante avec l'augmentation du nombre de Reynolds Re . Dans le tableau 4.1b, l'effet du Re sur $(R_2 - R_1)_{op}$ est clair, plus le régime est turbulent plus la paroi est épaisse.

	A-V	A-H	C-V	C-H		A-V	A-H	C-V	C-H
$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	0.015	0.105	0.015	0.120	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	0.015	0.035	0.025	0.045
$T_{m,op}$	0.104	0.120	0.104	0.120	$f_{s,op}$	0.21	0.13	0,18	0.01

Tableau 4.1a : $T_{m,op}$ et $f_{s,op}$ pour différents couples (matériau-fluide)

Re	A-H	
	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	$f_{s,op}$
5.10^4	0.14	0.65
1.10^5	0.16	0.41
5.10^5	0.18	0.12

Tableau 4.1b : $f_{s,op}$ pour différents nombre de Re

4.6.2 Effets de la période

D'après les figures (4.5a,b) et le tableau (2.4) apparait que f_s atteint sa valeur maximale pour des faibles épaisseurs de la parois lors d'un fonctionnement à courtes périodes ($\tau = 2h$), cette valeur maximale n'est atteinte que pour des épaisseurs plus importantes lors d'un fonctionnement à longues périodes ($\tau = 24h$). Exemple : $\Delta R_{op,A-H}(2h) = 0,005m < \Delta R_{op,A-H}(24h) = 0,019 m$ d'autre part $f_{s,op,A-H}(2h) = 3,67 > f_{s,op,A-H}(24h) = 1,16$.

τ (h)	A-H		C-H	
	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	$f_{s,op}$	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	$f_{s,op}$
2	0.005	3.67	0.007	2.49
4	0.007	2.68	0.010	2.15
8	0.011	1.98	0.013	1.47
16	0.015	1.41	0.020	1.06
24	0.019	1.16	0.024	0.85

Tableau 4.2 : $f_{s,op}$ pour différents périodes

4.6.3 Effets de la surface

Dans les figures (4.6a,b) et (4.7a,b) apparait l'effet de la surface d'échange sur l'amortissement et la fonction stockage f_s . En augmentant la longueur du canal ($S = 2L_0L$), la surface d'échange augmente, permettant ainsi au fluide caloporteur d'évacuer plus de chaleur, ce flux de chaleur sera emmagasiné dans la paroi, par conséquent la quantité de chaleur stockée dans la paroi augmente, et la fonction stockage f_s devient plus importante, le tableau 4.3 démontre par les valeurs optimales de T_m et f_s $f_{s,op,A-V}(1m) = 0.90 > f_{s,op,A-V}(5m) = 0.34$. Par ailleurs, cet effet est aussi confirmé pour l'amortissement T_m , d'autant la surface est grande d'autant l'amortissement T_m est remarquable $T_{m,op,A-V}(1m) = 0.120 > T_{m,op,A-V}(5m) = 0.001$. A partir d'une certaine longueur du canal, l'effet n'est plus confirmé.

L_0 (m)	A-V		C-V		A-V		C-V	
	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	$T_{m,op}$	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	$T_{m,op}$	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	$f_{s,op}$	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	$f_{s,op}$
1	0,049	0,120	0,055	0,041	0,006	0,90	0,008	0,74
3	0,036	0,044	0,035	0,003	0,008	0,64	0,011	0,56
5	0,002	0,001	0,025	0,007	0,013	0,34	0,021	0,27

Tableau 4.3 : $T_{m,op}$ et $f_{s,op}$ pour différents longueurs du canal

4.6.4 Effets de l'écartement entre les plaques

Les figure (4.8a,b) montrent l'effet de l'écartement entre les plaques sur la température de mélange T_m et la fonction stockage f_s , la variation de R_l influence sur le nombre de Reynolds Re , mais dans ce cas le nombre de Reynolds Re est fixé à 10^4 . Par conséquent l'écartement influe directement sur la section de passage ($2R_lL_0$), donc une augmentation de R_l implique l'augmentation du débit massique $\rho S\bar{U}$. Remarque l'effet de l'écartement n'est confirmé que sur la fonction f_s , comme déjà vue dans le chapitre 2, Cela est dû la quantité de chaleur que peut délivrées la vapeur. Le tableau 4.4 confirme par les valeurs ci-dessous.

R_l (m)	A-V		C-V		A-V		C-V	
	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	$T_{m,op}$	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	$T_{m,op}$	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	$f_{s,op}$	$(R_2-R_1)_{op}$ (m)	$f_{s,op}$
0.01	0,055	0,037	0,065	0,038	0,014	0,21	0,024	0,17
0.03	0,055	0,037	0,065	0,038	0,014	0,62	0,024	0,52
0.05	0,055	0,037	0,065	0,038	0,015	1,0	0,025	0,87

Tableau 4.4 : $T_{m,op}$ et $f_{s,op}$ pour différents écartements R_l

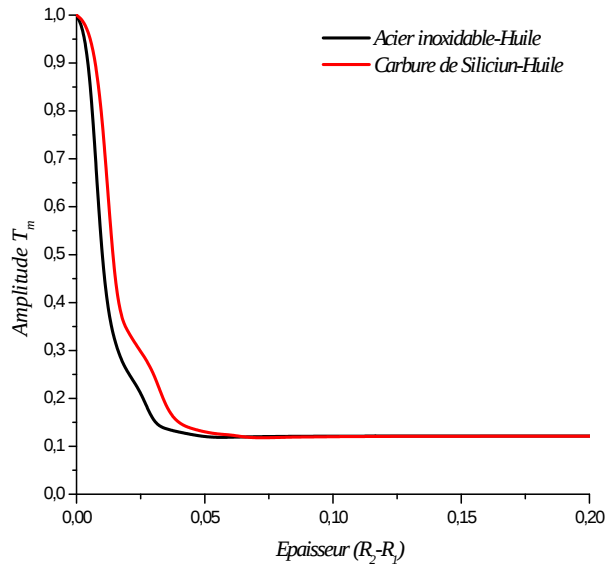


Fig 4.2a: évolution de T_m fonction de l'épaisseur $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$
 $L = 0.5 \text{ m}$, $\tau = 24 \text{ h}$, $Re = 10^4$.

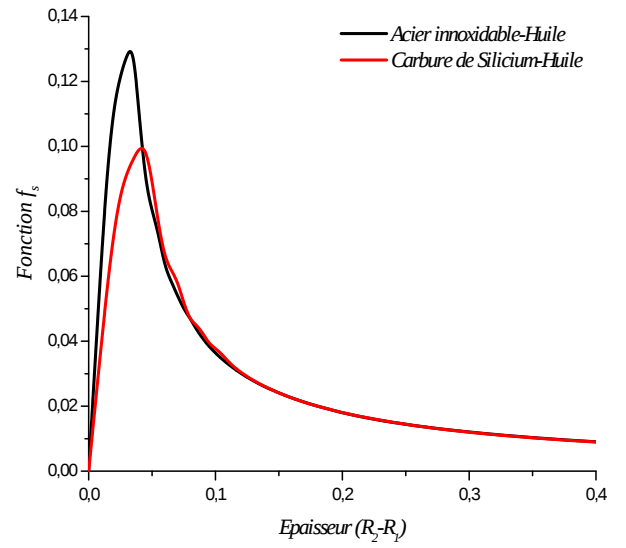


Fig 4.2b: évolution de f_s fonction de l'épaisseur $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$
 $L = 0.5 \text{ m}$, $\tau = 24 \text{ h}$, $Re = 10^4$.

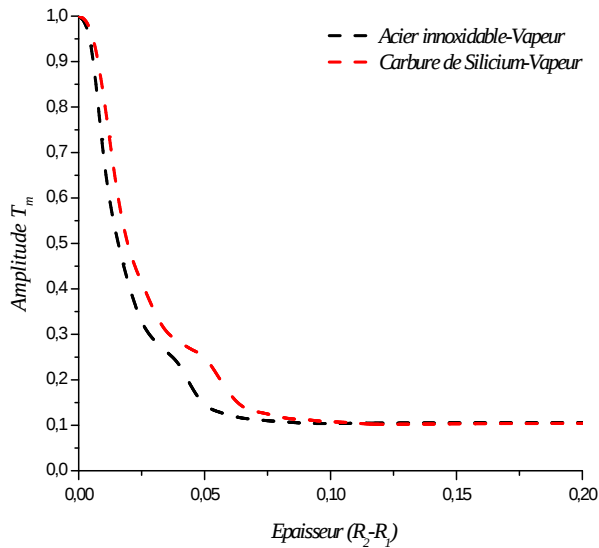


Fig 4.3a: évolution de T_m fonction de l'épaisseur $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$
 $L = 0.5 \text{ m}$, $\tau = 24 \text{ h}$, $Re = 10^4$.

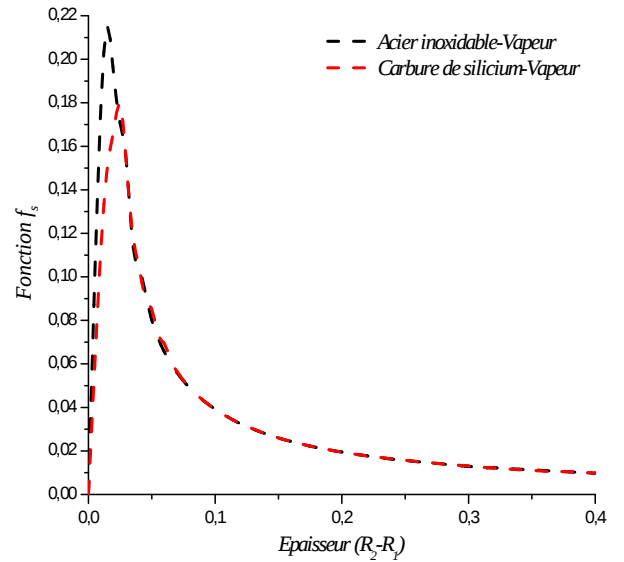


Fig 4.3b: évolution de f_s fonction de l'épaisseur $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01 \text{ m}$
 $L = 0.5 \text{ m}$, $\tau = 24 \text{ h}$, $Re = 10^4$.

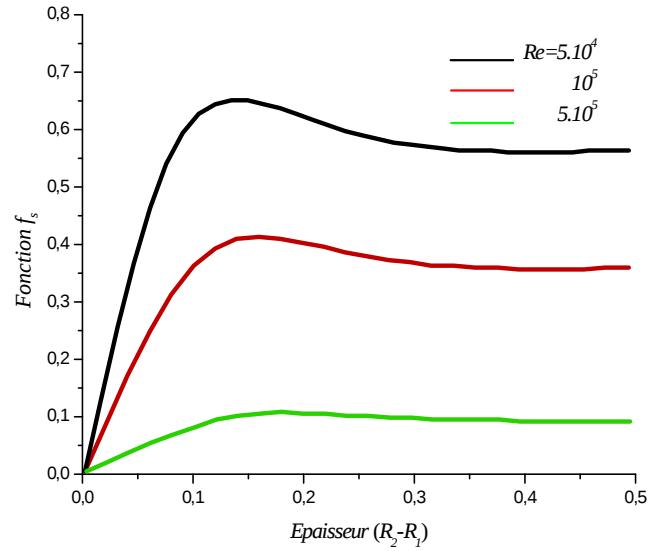


Fig 4.4: Evolution du nombre Re fonction de $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.01$ m
 $L = 8$ m, $\tau = 24$ h et différents valeurs du nombre $Re = 5.10^4, 10^5, 5.10^5$

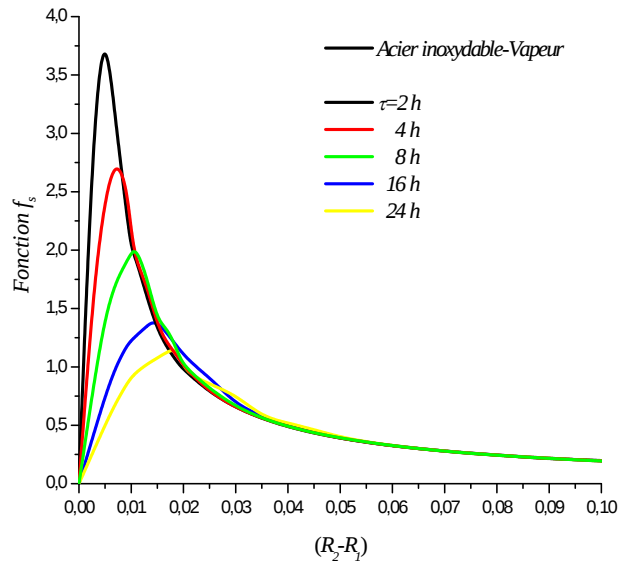


Fig 4.5a: Evolution de f_s fonction de l'épaisseur $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.001$ m
 $L = 0.5$ m, $Re = 10^4$, et différentes périodes ($\tau = 1-24$ h)

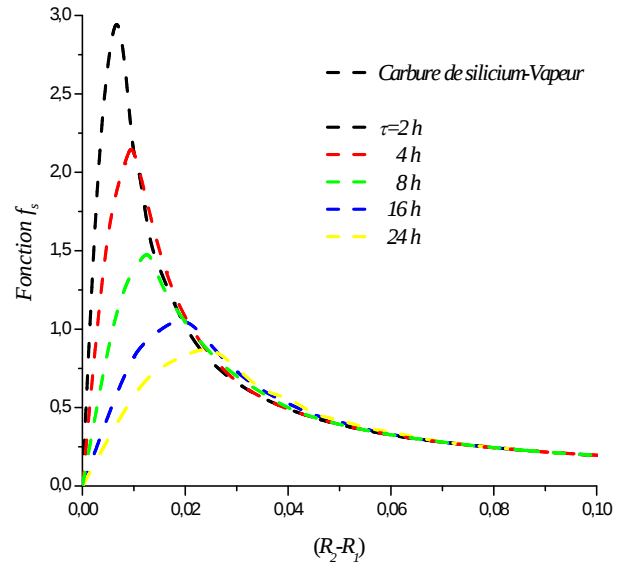


Fig 4.5b: Evolution de f_s fonction de l'épaisseur $(R_2 - R_1)$ pour $R_1 = 0.001$ m
 $L = 0.5$ m, $Re = 10^4$, et différentes périodes ($\tau = 1-24$ h)

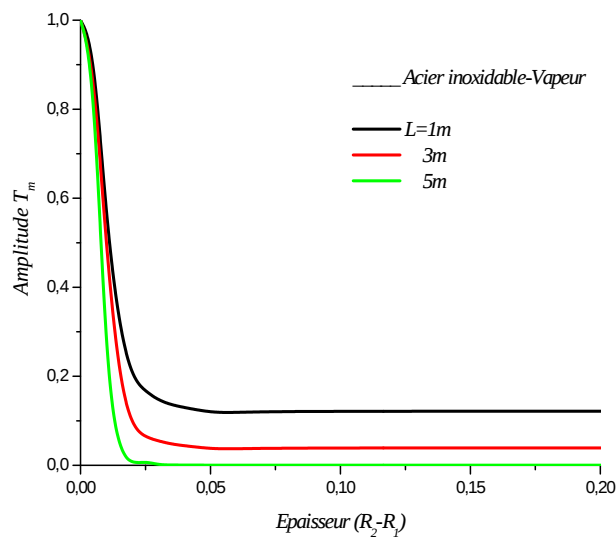


Fig 4.6a: Evolution de T_m fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $R_1=0.01\text{ m}$, $\tau=24\text{ h}$, $Re=10^4$ et différentes longueurs du canal $L=1,3,5\text{ m}$

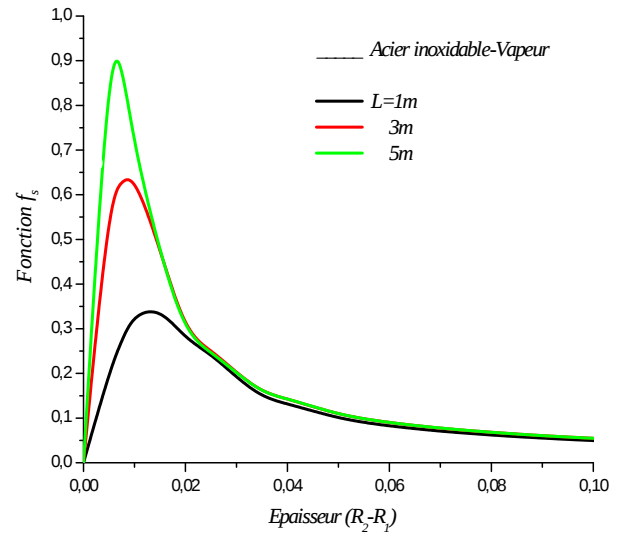


Fig 4.6b: Evolution de f_s fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $R_1=0.01\text{ m}$, $\tau=24\text{ h}$, $Re=10^4$, et différentes longueurs du canal $L=1,3,5\text{ m}$

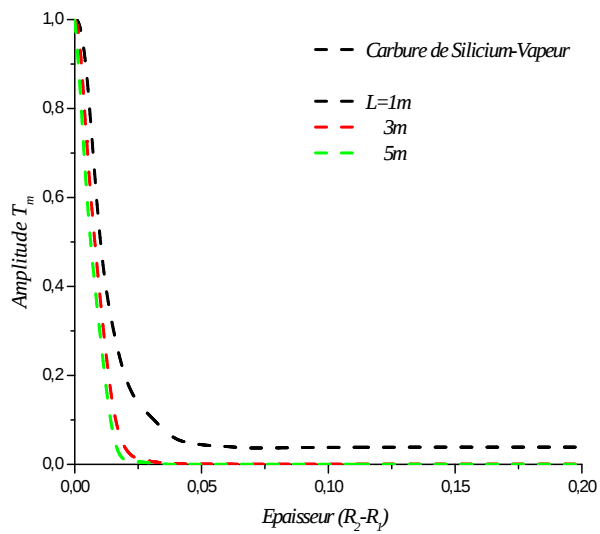


Fig 4.7a: Evolution de T_m fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $R_1=0.01\text{ m}$, $\tau=24\text{ h}$, $Re=10^4$ et différentes longueurs du canal $L=1,3,5,8\text{ m}$

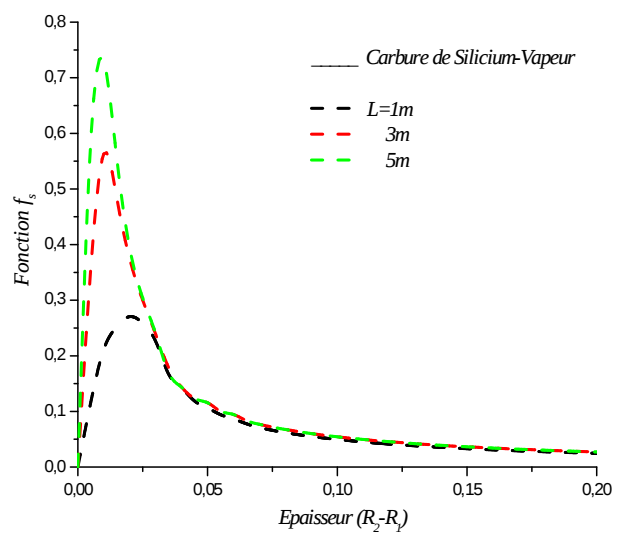


Fig 4.7b: Evolution de f_s fonction de l'épaisseur (R_2-R_1) pour $R_1=0.01\text{ m}$, $\tau=24\text{ h}$, $Re=10^4$, et différentes longueurs du canal $L=1,3,5\text{ m}$

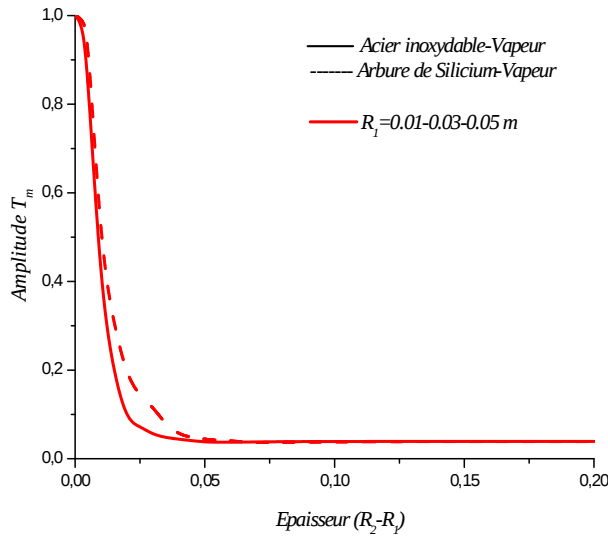


Fig 4.8a: Evolution de T_m fonction de l'épaisseur ($R_2 - R_1$) pour $L=0.5$ m
 $Re=10^4$, $\tau=24$ h et différentes valeurs de ($R_1=0.01-0.03-0.05$ m).

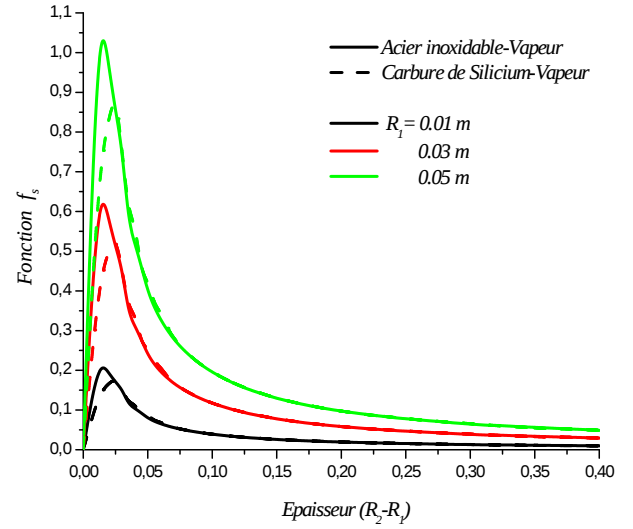


Fig 4.8b: Evolution de f_s fonction de l'épaisseur ($R_2 - R_1$) pour $L=0.5$ m
 $Re=10^4$, $\tau=24$ h et différentes valeurs de ($R_1=0.01-0.03-0.05$ m).

4.7 Conclusion

D'après l'étude paramétrique réalisée, il se trouve que le fluide caloporteur et la paroi de stockage ont le même comportement en régime laminaire qu'en régime turbulent. Le choix de la paroi dépend de $(\rho C_p)_s$ et celui du fluide dépend de ϑ . Par ailleurs la fonction f_s devient moins importantes en turbulent contrairement au cas de l'amortissement de $T_{m,op}$ qui est important. La valeur du nombre de Reynolds augmente du laminaire au turbulent, cette dernière peut être interprétée comme une augmentation de la vitesse de fluide, le transfert d'énergie thermique stockée par le fluide à l'entrée du canal vers la paroi est très faible, d'où la diminution de $f_{s,op}$ et l'augmentation de $T_{m,op}$ en régime turbulent. L'effet de la période, surface et écartement entre les plaques est confirmé comme en régime laminaire.

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons présenté l'étude d'une unité de stockage d'énergie à chaleur sensible, en régime thermique périodique, pour le cas de deux configurations géométriques. Ce travail se compose de quatre chapitres, le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique des principaux travaux effectués sur le sujet. Nous avons montré au cours de cette recherche bibliographique l'intérêt du sujet du fait des nombreuses applications dans des domaines divers.

Dans le deuxième chapitre, on présente le problème de référence à savoir un conduit à deux plaques parallèles, parcouru par un fluide caloporteur en écoulement laminaire. La température du fluide à l'entrée du canal varie de façon sinusoïdale. Les équations régissant le problème sont résolues analytiquement, par la méthode de Ritz. Une étude paramétrique est réalisée pour montrer l'influence des différents paramètres sur notre dispositif de stockage.

Afin d'obtenir une vue claire sur l'influence de la géométrie sur notre dispositif de stockage, On traite la configuration cylindrique. Après résolution du problème par la méthode de Ritz, la comparaison des deux types de dispositifs (cylindrique et à plaque) montre que l'influence de la géométrie est importante.

Le chapitre trois, on reprend le problème du chapitre deux, mais le fluide caloporteur s'écoule en régime laminaire. Une étude paramétrique est réalisée pour montrer l'influence des différents paramètres sur notre dispositif de stockage.

Du point de vue physique, les conclusions tirées à partir des résultats présentés dans les chapitres précédents peuvent être résumées par les points suivants :

- La fonction de stockage dépend essentiellement de la quantité de chaleur qui peut être stockée dans une paroi, et la quantité de chaleur qui peut être évacuée d'un fluide caloporteur, ce qui se résume par le ratio $a^* = \frac{(\rho c_p)(R_2 - R_1)}{(\rho c_p)_f R_1}$.
- Lors d'un choix du matériau de la paroi de stockage et d'un fluide caloporteur, l'effet de la quantité de chaleur (ρc_p) domine par rapport à l'effet de la conduction $k_{matériau}$ pour une paroi, l'effet de la viscosité ϑ_{fluide} est dominant devant la quantité de chaleur $(\rho c_p)_f$ pour un fluide caloporteur.

- Plus la surface de contact entre le fluide et la paroi est importante plus la fonction $f_{s,op}$ est importante, jusqu'à une certaine limite.
- Plus la période est importante moins la fonction $f_{s,op}$ est importante, mais la quantité de chaleur emmagasinée est d'autant plus importante.
- L'amortissement de l'amplitude de la température moyenne T_m et la fonction stockage f_s sont d'autant plus importants en configuration cylindrique qu'en configuration plane, de plus la configuration cylindrique est plus sensible aux variations de périodes que la configuration à plaque.
- La fonction f_s devient moins importantes en turbulent contrairement au cas de l'amortissement de $T_{m,op}$ qui est important.

Références Bibliographiques

- [1]. **J. P. BARDON, B. FOURCHER et B. CASSAGNE**, Stockage périodique par chaleur sensible-aspects fondamentaux liés à la cinétique des transferts.
Int. J. Heat Mass, Transfer. Vol 22, pp. 229-236. (1979)
- [2]. **B. FOURCHER et C. SAINT-BLANQUET**, Fonction de transfert d'un élément de stockage par chaleur sensible fonctionnant en régime périodique.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 23, No 7. pp 1251-1262. (1980)
- [3]. **M. T. ACKER et B. FOURCHER**, Analyse en régime thermique périodique du couplage conduction-convection entre un fluide en écoulement laminaire et une paroi de stockage.
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 24, No 7. pp 1201-1210. (1981)
- [4]. **B. BOUROUGAT et B. FOURCHER**, Comparaison des fonctions de transfert d'un stockage en régime périodique pour trois géométries fondamentales. Exemples d'optimisation"
Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 28, No. 8, pp. 1425-1439. (1985)
- [5]. **B. Dhifaoui, S. BenJabrallah, A. Belghith et J.P. Corriou**, Experimental study of the dynamic behaviour of a porous medium submitted to a wall heat flux in view of thermal energy storage by sensible heat.
International Journal of Thermal Sciences. Vol 46. pp 1056-1063. (2007)
- [6]. **F. Tardy, Samuel M. Sami**, Thermal analysis of heat pipes during thermal storage.
Applied Thermal Engineering Vol. 29, pp. 329–333. (2009)
- [7]. **A. Mawire, M. McPherson, R.R.J. van den Heetkamp et S.J.P. Mlatho**, Simulated performance of storage materials for pebble bed thermal energy storage (TES) systems.
Applied Energy Vol. 86,pp 1246–1252. (2009)
- [8]. **S. Farahat, F. Sarhaddi et H. Ajam**. Exergetic optimization of flat plate solar collectors.
Renewable Energy Vol. 34, pp. 1169–1174. (2009)
- [9]. **Abdul Jabbar N. Khalifa et Ehsan F. Abbas**, A comparative performance study of some thermal storage materials used for solar space heating.
Energy and Buildings Vol. 41,pp 407–415. (2009)
- [10]. **A. Felix Regin, S.C. Solanki, J.S. Saini**, An analysis of a packed bed latent heat thermal energy storage system using PCM capsules: Numerical investigation.
Renewable Energy Vol. 34,pp 1765–1773. (2009)

- [11]. **Bogdan M. Diaconua et Mihai Crucerub**, Novel concept of composite phase change material wall system for year-round thermal energy savings.
Energy and Buildings Vol 42, pp 1759–1772. (2010)
- [12]. **D.L. Zhao, Y. Li, Y.J. Dai et R.Z. Wang**, Optimal study of a solar air heating system with pebble bed energy storage
Energy Conversion and Management Vol 52, pp 2392–2400. (2011)
- [13]. **W. S. Kim et M. N. Ozisik**, Conjugate laminar forced convection in ducts with periodic variation of inlet temperature, Int. J. Heat Fluid Flow, Vol 11, pp 311-320. (1990)
- [14]. **S.Kakaç et Yenner**: Convective Heat transfer.
CRC. Press, Inc. (1993)
- [15]. **M. Bechiri**, Simulation des transferts thermo-convectifs d'un écoulement turbulent en régime périodique
Mémoire de magister, (2010)
- [16]. **A. Hadiouche**, Etude théorique en régime périodique d'un écoulement forcé à plan directeur.
Mémoire de magister, (2008)

ANNEXE (1)

Résolution de l'équation transcendante $\sigma_i \tan(\sigma_i) = \tilde{H}$

2.1. Méthode de résolution

Pour la résolution de l'équation transcendante (A.1.1), on dispose de divers outils mathématiques. Parmi les plus utilisées, les méthodes numériques. Nous, dans ce qui suit, nous utilisons la méthode de Newton.

$$\sigma_i \tan(\sigma_i) = \tilde{H} \quad (\text{A. 1.1a})$$

$$\text{Ou } \tilde{H} \text{ est un paramètre complexe, qui peut s'écrire : } \tilde{H} = R + i \text{ Im} \quad (\text{A. 1.1b})$$

$$\text{On pose que : } \sigma = x + i y \quad (\text{A. 1.1c})$$

La séparation en partie réelle et partie imaginaire de l'équation (A.2.1) conduit au système couplé suivant :

$$\begin{cases} F(x, y) = x \sin(x) \operatorname{ch}(y) - y \operatorname{sh}(x) \cos(x) - R \cos(x) \operatorname{ch}(y) - \operatorname{Im} \operatorname{sh}(y) \sin(x) \\ G(x, y) = x \operatorname{sh}(y) \cos(x) - y \sin(x) \operatorname{ch}(y) - R \sin(x) \operatorname{sh}(y) - \operatorname{Im} \operatorname{ch}(y) \cos(x) \end{cases} \quad (\text{A. 1. I})$$

F et G sont des fonctions continûment dérivables.

Soient x_n et y_n des solutions approchées de (A.2.I), tel que :

$$x = x_n + h_n \quad \text{et} \quad y = y_n + h_n$$

Alors :

$$\begin{cases} F(x_n + h_n, y_n + h_n) = 0 \\ G(x_n + h_n, y_n + h_n) = 0 \end{cases} \quad (\text{A. 1. II})$$

En appliquant le développement de Taylor, on obtient :

$$\begin{cases} F(x_n, y_n) + h_n F'(x_n, y_n) + k_n F''(x_n, y_n) = 0 \\ G(x_n, y_n) + h_n G'(x_n, y_n) + k_n G''(x_n, y_n) = 0 \end{cases} \quad (\text{A. 1. III})$$

Si le Jacobien $(x_n, y_n) \neq 0$, alors :

$$h_n = -\frac{1}{j(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} \quad (\text{A. 1.2a})$$

$$k_n = -\frac{1}{j(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix} \quad (\text{A. 1.2b})$$

Par conséquent,

$$x = x_n + h_n \quad (\text{A. 1.3a})$$

$$y = y_n + k_n \quad (\text{A. 1.3b})$$

Un couple de solution (x, y) s'obtient rapidement par ce processus itératif, à condition de démarrer avec des valeurs approchées voisines des valeurs exactes (x, y) . Le processus est répété avec les nouvelles valeurs obtenues jusqu'à la précision souhaitée. Le teste d'arrêt choisi généralement est :

$$|F_y(x_n, y_n)| \quad \text{et} \quad |G_y(x_n, y_n)| \leq \varepsilon$$

ε : est choisi aussi petit que possible.

ANNEXE (2)

On trouve ci-dessous les éléments a_{ij} , c_{ij} et b_i :

2.1 Matrice [A], [C] et [B] en régime laminaire

2.1.1 Cas configuration à plaques

$$a_{ii}^* = \sigma_i^2 \left(1 - \frac{\sin(2\sigma_i)}{2\sigma_i} \right) + i\delta \left(1 + \frac{\sin(2\sigma_i)}{2\sigma_i} \right) + \sigma_i \sin(2\sigma_i)$$

$$a_{ij}^* = \sigma_i \sigma_j \left(\frac{\sin(\sigma_i - \sigma_j)}{\sigma_i - \sigma_j} - \frac{\sin(\sigma_i + \sigma_j)}{\sigma_i + \sigma_j} \right) + i\delta \left(\frac{\sin(\sigma_i - \sigma_j)}{\sigma_i - \sigma_j} + \frac{\sin(\sigma_i + \sigma_j)}{\sigma_i + \sigma_j} \right) + 2\sigma_i \sin(\sigma_i) \sin(\sigma_j)$$

$$\text{Avec } a_{ij}^* = a_{ii}^* + a_{ij.i \neq j}^*$$

$$d_{ii} = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\sin(2\sigma_i)}{4\sigma_i^3} - \frac{\cos(2\sigma_i)}{2\sigma_i^2} \right)$$

$$d_{ij} = 3 \left[\left(\frac{\sin(\sigma_i - \sigma_j)}{(\sigma_i - \sigma_j)^3} + \frac{\sin(\sigma_i + \sigma_j)}{(\sigma_i + \sigma_j)^3} \right) - \left(\frac{\cos(\sigma_i - \sigma_j)}{(\sigma_i - \sigma_j)^2} + \frac{\cos(\sigma_i + \sigma_j)}{(\sigma_i + \sigma_j)^2} \right) \right]$$

$$\text{Avec } d_{ij}^* = d_{ii}^* + d_{ij.i \neq j}^*$$

$$b_i = 6 \left(\frac{\sin(\sigma_i)}{\sigma_i^3} - \frac{\cos(\sigma_i)}{\sigma_i^2} \right)$$

2.1.2 Cas configuration cylindrique

$$a_{ii}^* = \left[\sigma_i^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin(2\sigma_i)}{2\sigma_i} - \frac{\cos(2\sigma_i) - 1}{4\sigma_i^2} \right) + i\delta \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\sigma_i)}{2\sigma_i} + \frac{\cos(2\sigma_i) - 1}{4\sigma_i^2} \right) + \frac{1}{2} \sigma_i \sin(2\sigma_i) \right]$$

$$a_{ij}^*$$

$$= \sigma_i \sigma_j \left[\left(\frac{\sin(\sigma_i - \sigma_j)}{\sigma_i - \sigma_j} + \frac{\cos(\sigma_i - \sigma_j) - 1}{(\sigma_i - \sigma_j)^2} - \frac{\sin(\sigma_i + \sigma_j)}{\sigma_i + \sigma_j} + \frac{\cos(\sigma_i + \sigma_j) - 1}{(\sigma_i + \sigma_j)^2} \right) + i\delta \left(\frac{\sin(\sigma_i - \sigma_j)}{\sigma_i - \sigma_j} + \frac{\cos(\sigma_i - \sigma_j) - 1}{(\sigma_i - \sigma_j)^2} + \frac{\sin(\sigma_i + \sigma_j)}{\sigma_i + \sigma_j} + \frac{\cos(\sigma_i + \sigma_j) - 1}{(\sigma_i + \sigma_j)^2} \right) + 2\sigma_i \sin(\sigma_i) \cos(\sigma_j) \right]$$

$$\text{Avec } a_{ij}^* = a_{ii}^* + a_{ij.i \neq j}^*$$

$$d_{ii} = \frac{1}{2\sigma_i^2} \left[\sigma_i^2 + \frac{3\sin(2\sigma_i)}{2\sigma_i} + \frac{3(\cos(2\sigma_i) - 1)}{4\sigma_i^4} - (2\cos(2\sigma_i) + 1) \right]$$

$$d_{ij} = \left[\begin{aligned} & \frac{2}{(\sigma_i + \sigma_j)^2} \left(\frac{6\cos(\sigma_i + \sigma_j)}{\sigma_i + \sigma_j} + \frac{6(\cos(\sigma_i + \sigma_j) - 1)}{(\sigma_i + \sigma_j)^2} - 2\cos(\sigma_i + \sigma_j) - 1 \right) \\ & + \frac{2}{(\sigma_i - \sigma_j)^2} \left(\frac{6\cos(\sigma_i - \sigma_j)}{(\sigma_i - \sigma_j)^3} + \frac{6(\cos(\sigma_i - \sigma_j) - 1)}{(\sigma_i - \sigma_j)^4} - 2\cos(\sigma_i - \sigma_j) - 1 \right) \end{aligned} \right]$$

Avec $d_{ij}^* = d_{ii}^* + d_{ij,i \neq j}^*$

$$b_i = \frac{4}{\sigma_i^2} \left(\frac{6(\cos(\sigma_i) - 1)}{\sigma_i^2} + \frac{6\sin(\sigma_i)}{\sigma_i} - 2\cos(\sigma_i) \right)$$

2.2 Matrice [A], [C] et [B] en régime turbulent

2.2.1 Cas configuration à plaques

$$a_{ii}^* = \sigma_i^2 \left(1 - \frac{\sin(2\sigma_i)}{2\sigma_i} \right) + 2\sigma_i^2 Pr \int_0^1 \frac{1}{Pr_t} \frac{\varepsilon_m}{\vartheta} \sin^2(\sigma_i r^*) dr^* + i\delta \left(1 + \frac{\sin(2\sigma_i)}{2\sigma_i} \right) + \sigma_i \sin(2\sigma_i)$$

$$a_{ij}^* = \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\sin(\sigma_i - \sigma_j)}{\sigma_i - \sigma_j} - \frac{\sin(\sigma_i + \sigma_j)}{\sigma_i + \sigma_j} \right) + 2\sigma_i \sigma_j Pr \int_0^1 \frac{1}{Pr_t} \frac{\varepsilon_m}{\vartheta} \sin(\sigma_i r^*) \sin(\sigma_j r^*) dr^* \\ & + i\delta \left(\frac{\sin(\sigma_i - \sigma_j)}{\sigma_i - \sigma_j} + \frac{\sin(\sigma_i + \sigma_j)}{\sigma_i + \sigma_j} \right) + 2\sigma_i \sin(\sigma_i) \sin(\sigma_j) \end{aligned} \right.$$

Avec $a_{ij}^* = a_{ii}^* + a_{ij,i \neq j}^*$

$f(y^+, a)$

$$= 7.8 \left[\begin{aligned} & \frac{\sin\left(ay^+ - \frac{a}{R^+}\right)}{a} - \frac{11\exp\left(-\frac{y^+}{11}\right)}{1 + 11^2 a^2} \left(11a \cos\left(ay^+ - \frac{a}{R^+}\right) - \cos\left(ay^+ - \frac{a}{R^+}\right) \right) \\ & - \frac{\exp(-0.33y^+)}{11(a^2 + 0.33^2)} \times \\ & \left(\left(ay^+ + \frac{0.66a}{a^2 + 0.33^2} \right) \sin\left(ay^+ - \frac{a}{R^+}\right) + \left(\frac{a^2 - 0.33^2}{a^2 + 0.33^2} - 0.33y^+ \right) \cos\left(ay^+ - \frac{a}{R^+}\right) \right) \end{aligned} \right]_{y^+=0}^{y^+=R^+}$$

$$d1_{ii} = \frac{\sqrt{f_m/8}}{R^+} \left[\begin{aligned} & 2.5 \left(\ln(1 + 0.4y^+) \left(R^+ + \frac{5}{2} \right) - R^+ \right) \\ & + 7.8 \left(R^+ + 11\exp\left(-\frac{R^+}{11}\right) + \frac{\exp(-0.33R^+)}{3.63} (R^+ + 3) - 11 - \frac{9}{11} \right) \\ & + 2.5R^+ \int_0^1 \ln(1 + 0.4(1 - r^*)R^+) \cos(2\sigma_i r^*) dr^* \end{aligned} \right]$$

$$d2_{ii} = \frac{\sqrt{f_m/8}}{R^+} f\left(y^+, \frac{2\sigma_i}{R^+}\right)$$

$$d_{ii} = d1_{ii} + d2_{ii}$$

$$d1_{ij} = 2.5 \sqrt{\frac{f_m}{8}} \int_0^1 \ln(1 + 0.4(1 - r^*)R^+) \left(\cos((\sigma_i + \sigma_j)r^*) + \cos((\sigma_i - \sigma_j)r^*) \right) dr^*$$

$$d2_{ij} = \frac{\sqrt{f_m/8}}{R^+} \left[f\left(y^+, \frac{\sigma_i + \sigma_j}{R^+}\right) + \frac{\sqrt{f_m/8}}{R^+} f\left(y^+, \frac{\sigma_i - \sigma_j}{R^+}\right) \right]$$

$$d_{ij} = d1_{ij} + d2_{ij}$$

$$\text{Avec } d_{ij}^* = d_{ii}^* + d_{ij.i \neq j}^*$$

$$b_i = \frac{\sqrt{f_m/8}}{R^+} \left[2.5R^+ \int_0^1 \ln(1 + 0.4(1 - r^*)R^+) \cos(\sigma_i r^*) dr^* + f\left(y^+, \frac{\sigma_i}{R^+}\right) \right]$$

Les formes d'intégrale compliquées sont calculées numériquement grâce à la méthode de Romberg.

ANNEXE (3)

1.1. Profile de vitesse et viscosité turbulente

- **Profile de vitesse**

Nous pouvons exprimer le profil de vitesse établi en régime turbulent, par un modèle développé empiriquement par Reichardt [14], tel que :

$$u^+ = 2.5 \ln(1 + 0.4y^+) + 7.8 \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \left(\frac{y^+}{11}\right) \exp(-0.33y^+) \right]$$
$$\text{ou:} \begin{cases} u^+ = \frac{u^*(r^*)}{\sqrt{f_m/8}} \\ u^*(r^*) = \frac{u(r)}{u_m}, \text{ avec } r^* = \frac{r}{R_1} \\ y^+ = (1 - r^*)R^+ \\ R^+ = \frac{Re}{2^2} \sqrt{\frac{f_m}{8}} \end{cases}$$

y^+ : est la distance adimensionnelle mesurée dès la paroi vers le centre du conduit.

- **Viscosité turbulente**

Il est essentiel de connaître la viscosité turbulente ε_m et la diffusivité thermique turbulente ε_h l'expression empirique de la viscosité turbulente d'après Reichardt [14], s'écrit :

$$\frac{\varepsilon_m}{\vartheta} = -1 + \left(\frac{1}{1 + 0.4y^+} + 7.8 \left[\left(\frac{1}{11}\right) \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \left(\frac{1}{11}\right) \exp(-0.33y^+) + 0.03y^+ \exp(-0.33y^+) \right] \right)^{-1}$$

Le nombre de Prandtl turbulent est défini comme étant le rapport entre la viscosité turbulente et la diffusivité thermique turbulente :

$$Pr_t = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_h}$$

d'après [14], la formule de Pr_t s'écrit sous la forme suivante :

$$Pr_t = \frac{1 + \frac{380}{Pe_D^{0.58}} \exp(-(1 - r^*)^{0.25})}{1 + \frac{135}{Re_D^{0.45}} \exp(-(1 - r^*)^{0.25})}$$

1.1. Détermination de coefficient de frottement

La relation entre le nombre de Reynolds $\left(Re = \frac{u_m D_e}{\nu}\right)$ et R^+ est donnée d'après [14] par :

$$\frac{Re}{2^2} = \int_0^{R^+} u^+ dy^+ \quad (\text{A.3.I})$$

Ou bien :

$$\sqrt{\frac{f_m}{8}} \int_0^1 u(r^*) dr^* \quad (\text{A.3.II})$$

Pour un nombre de Reynolds donnée, l'équation (A.3.II) fournit une équation transcendante peut être utilisée pour déterminer f_m .