

Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université M'Hamed Bougara- Boumerdes



Faculté Des Sciences De L'ingénieur

Département Génie Civil

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Génie Civil

Option : SOL – STRUCTURE – MATERIAUX

Présenté par:

HASSEN MERIEM WAFFA

APPLICATION DE LA THEORIE D'ADAPTATION AUX CAS DES SOLS AVEC

UNE LOI D'ECOULEMENT NON-ASSOCIEE

Soutenu le : 22/09/2011

Devant le jury composé de :

Dr. BENCHEIKH Boubakar	MCA	UZA Djelfa	Président
Dr. GABI Smail	MCA	UMM Tizi-Ouzou	Examineur
Dr. KADRI Mohamed	MCA	UMB Boumerdes	Examineur
Dr. HAMADOUCHE Ameziane	MCA	UMB Boumerdes	Directeur

DEDICACE

A MES PARENTS,

A MON FRERE, MES SŒURS,

ET A MES AMIS.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, Je voudrais exprimer ma sincère gratitude et ma vive reconnaissance à mon promoteur Monsieur HAMADOUCHE MOHAND AMEZIANE, maitre de conférences à l'Université de Boumerdes. Je lui adresse mes plus vifs remerciements pour l'aide et l'attention qu'il a porté à ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée en me laissant un large champ d'initiative.

Je remercie très sincèrement Monsieur BENCHEIKH BOUBAKAR, maitre de conférences à l'Université de Djelfa, d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance.

Je remercie vivement Monsieur GABI SMAIL, maitre de conférences à l'Université de Tizi Ouzou, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Je tiens également à remercier Monsieur KADRI MOHAMED, maitre de conférences à l'Université de Boumerdes, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

En dernier lieu, je tiens à remercier tous mes proches, parents et amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

ABSTRACT

Structures subjected to loads varying in times in a cyclic manner within prescribed limits, the classical limit theorems can give unsafe estimates of the collapse loads, as a failure can occur at loads well below the static collapse condition by other forms of collapse. If the strain increments change sign in every cycle, with yielding on both sides of the cycle, then alternating plasticity is said to occur; the net plastic deformation may remain small, but weakening of the material may occur nevertheless - a phenomenon called low cycle fatigue - leading to breaking of the most highly stressed points after a certain number of cycles. It May also happen that plastic deformation in each cycle accumulates so that after enough cycles, the displacements are large enough to be equivalent to collapse; this is called incremental collapse. On the other hand, it may happen that no further plastic deformation occurs after one or a few cycles, that is all subsequent loading reloading cycles are elastic. In that case the body is said to have experienced shakedown.

The shakedown theorems are generalizations of the limit theorems in the sense that they provide static and kinematic approaches to the question of whether or not shakedown will occur for a given structure under given cyclic loading. Whereas the limit theorems provide static and kinematic approaches to the question of whether or not flow will occur in a given structure under given loads. An essential point in the proof of these theorems is the Druker's stability postulate and the concept of normality condition or associated flow rule. Without this concept the theorems cannot be proven in general. The soils and frictional materials belong to the class of non standard materials which have non associated flow rule, for which Druker's postulate of positive work dissipation in a loading cycle does not apply.

In this paper a generalization of Melan's theorem for non standard materials by using Radenkovic's theorem is formulated. The application of the theory is illustrated by an examination of soil structure under plane strain condition subjected to variable repeated loading. The soil is modeled as an elastic perfectly plastic material obeying the Mohr-Coulomb criterion with associated and non associated flow rule.

The numerical method used for computation of the best shakedown load estimate is based on the equilibrated finite element formulation coupled with a nonlinear programming. The unconstrained optimization problem is solved by the augmented Lagrangian method.

Key Words: Shakedown, Soils, Plasticity, Non-associated flow rule, variable loads, Equilibrium finite element method, Optimization, Plasticity.

RESUME

La théorie de l'adaptation plastique (mieux connue sous le terme anglais de "shakedown") étudie les conditions de ruine d'une structure élastoplastique soumise à des charges variables entre des bornes qui sont fixes, d'une manière indépendante les unes des autres. Si la structure s'adapte le travail dissipé plastiquement dans toute la structure est fini, les déformations plastiques tendent vers une limite, la réponse en contraintes tend vers une réponse purement élastique. Au contraire si elle ne s'adapte pas deux modes de ruine sont possibles : la ruine par déformation plastique progressive (rochet) qui correspond à une accumulation démesurée de la déformation plastique mettant l'ouvrage en péril; ou la ruine par déformation plastique alternée (fatigue cyclique) qui entame à la longue l'endurance locale du matériau.

La démonstration des théorèmes d'adaptation statique et cinématique, qui sont une généralisation des théorèmes d'analyse limite statique et cinématique développés sous l'hypothèse d'un chargement proportionnel, est basé sur le postulat de stabilité de Drucker.

Les sols et les matériaux frottants appartiennent à la classe des matériaux non standards pour lesquels le postulat de Drucker n'est pas vérifié. Dans cette étude, nous proposons une généralisation du théorème statique d'adaptation aux cas des géomatériaux en utilisant le théorème de Radenkovic et le concept de l'état caractéristique.

L'approche développée est appliquée pour l'étude d'un massif de sol sous condition de déformation plane. Le sol est modélisé comme un matériau élastique parfaitement plastique obéissant au critère de Mohr Coulomb.

La procédure numérique repose sur le couplage de la méthode des éléments finis avec la programmation mathématique non-linéaire. Le problème d'optimisation sans contraintes est solutionné par la méthode du Lagrangien augmenté.

Mots Clés : Adaptation, sols, Plasticité, Règle d'écoulement non associée, chargement cyclique, Eléments finis équilibre, Optimisation.

NOTATIONS

Angle de dilatance	ψ
Coefficient de Poisson	ν
Coefficient de Frottement	μ
Cohésion	C
Contrainte admissible	σ^a
Contrainte élastique	σ^e
Contrainte moyenne	p
Contrainte déviatorique	q
Contrainte résiduelle	ρ
Contrainte résiduelle indépendante du temps	$\bar{\rho}$
Contrainte sécurité	σ^s
Déformation élastique	ε^e
Déformation élastique résiduelle	ε^{er}
Déformation élastique résiduelle indépendante du temps	$\bar{\varepsilon}^{er}$
Déformation plastique	ε^p
Déformation résiduelle	ε^r
Déformation totale	ε
Déformation volumique totale	$\dot{\varepsilon}_v$
Déplacements imposés	U_i

Domaine de chargement	\mathcal{D}
Energie complémentaire	U_C
Energie de déformation élastique fictive	W
Enveloppe convexe du domaine \mathcal{D}	\mathcal{S}
Etat d'écrouissage	K
Facteur de charge	α
Facteur de charge à l'adaptation	α_{SD}
Fonction de contrainte D'Airy	Φ
Fonctions de forme	N_i
Forces de volume	F_i
Forces de surface	T_i
Module d'écrouissage	H
Indice des vides à l'état critique	e_{cr}
Lagrangien	L
Multiplicateur plastique	$\dot{\lambda}$
Multiplicateur de charge	μ_i
Multiplicateur de Kuhn Tucher	μ_j
Multiplicateur de Lagrange	λ_i
Module de Young	E
paramètres de pénalité	w_i

Potentiel plastique

G

Tenseur d'élasticité

E_{ijkl}

Tenseur d'élastoplasticité

E^p_{ijkl}

SOMMAIRE

SOMMAIRE**ABSTRACT****RESUME****NOTATIONS****INTRODUCTION GENERALE**

1. INTRODUCTION

1

2. CONTENU DU RAPPORT

2

CHAPITRE 1**APERÇU SUR L'ELASTOPLASTICITE DES SOLS**

1.1. INTRODUCTION

4

1.2. LE MODEL DE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE

4

1.3. SURFACE DE CHARGE ET ECROUISSAGE

5

1.4. REGLE D'ECOULEMENT PLASTIQUE

8

1.4.1. Hypothèse de travail plastique maximal

11

1.4.2. Matériaux standards (Règle d'écoulement associée)

12

1.4.3. Matériaux non standards (Règle d'écoulement non associée)

13

1.5. APPROCHE DU COMPORTEMENT DES SOLS

13

1.5.1. Concept de l'état critique

13

1.5.2. Concept de l'état caractéristique

14

1.5.3. Le comportement non standard des sols

17

1.6. CRITERES DE PLASTICITE USUELS EN MECANIQUE DES SOLS

20

1.6.1. Critère de Tresca

20

1.6.2. Critère de Von Mises

21

1.6.3. Critère de Mohr-Coulomb

22

1.6.4. Critère de Drucker Prager

24

1.7. CONCLUSION

27

CHAPITRE 2***LA THEORIE DE L'ADAPTATION ELASTOPLASTIQUE***

2.1. INTRODUCTION	28
2.2. THEORIE D'ADAPTATION	28
2.3. THEOREME D'ADAPTATION STATIQUE DE MELAN	33
2.4. COEFFICIENT DE SECURITE A L'ADAPTATION	34
2.5. THEOREME CINEMATIQUE DE KOITER	35
2.6. GENERALISATION DU THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION AU CAS DES GEOMATERIAUX (MATERIAUX NON STANDARDS)	36
2.6.1. Surface caractéristique et G surface	37
2.6.2. Enoncé du théorème	37
2.7. CONCLUSION	40

CHAPITRE 3***FORMULATION DU PROBLEME D'ADAPTATION PAR M.E.F.***

3.1. INTRODUCTION	41
3.2. DOMAINE DE CHARGEMENT	41
3.3. FORMULATION ELEMENTS FINIS	43
3.3.1. Principe du minimum de l'énergie complémentaire totale	43
3.3.2. Fonction de contrainte d'Airy	44
3.3.3. Continuité des contraintes inter-éléments	46
3.3.4. Approximation de la fonction d'Airy par les polynômes d'Hermite	47
3.3.5. Prise en compte des conditions aux limites par les multiplicateurs de Lagrange	48
3.3.6. Calcul de la réponse purement élastique	50
3.3.7. Calcul de la réponse plastique : Détermination du champ de contrainte résiduelle	51
3.3.8. Facteur de charge à l'adaptation	52

3.4. CONCLUSION	54
-----------------	----

CHAPITRE 4

APPLICATIONS NUMERIQUES AUX PROBLEMES GEOTECHNIQUES

4.1. INTRODUCTION	55
4.2. EXPLOITATION NUMERIQUE	55
4.3. L'INFLUENCE DE LA COHESION SUR LA CHARGE LIMITE D'ADAPTATION	56
4.4. L'INFLUENCE DE L'ANGLE DE FROTEMENT CARACTERISTIQUE SUR LA CHARGE LIMITE D'ADAPTATION	59
4.5. ETUDE DE L'INFLUENCE DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT	60
4.5.1. Étude comparative entre l'approche basée sur la surface caractéristique et l'approche basée sur l'angle de frottement	62
<i>CONCLUSION GENERALE</i>	64
<i>REFERENCES</i>	66
<i>ANNEXES</i>	69

INTRODUCTION
GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

1. INTRODUCTION

L'expérience montre que le sol est un matériau non standard pour lequel le postulat de stabilité de Drucker n'est pas valide, et qu'une règle d'écoulement associée conduit à une dilatance excessive.

Les théorèmes d'analyse limite, qui sont étroitement liés à la solution des problèmes de stabilité du sol sous un chargement proportionnel, ne sont pas applicables sur un tel matériau démuné de la loi de normalité.

L'extension des théorèmes d'analyse limites pour le cas des matériaux non standards, en considérant une loi d'écoulement non-associée, ne présente toujours pas un critère de sécurité contre la rupture. En effet, l'hypothèse simplifiée du chargement proportionnel est considérée plus comme une hypothèse commode de calcul que comme la réalité. Les charges appliquées sont très souvent variables dans le temps et d'une manière indépendante les unes des autres. Dans ce cas la rupture peut avoir lieu même pour une charge bien inférieure à la charge limite de sécurité déterminée par la théorie de l'analyse limite. Cette observation a rendu nécessaire d'acquérir une bonne connaissance du comportement rhéologique des sols soumis à des sollicitations cycliques, et le développement d'un outil de dimensionnement sophistiqués qui peut garantir la sécurité des structures.

La théorie de l'adaptation est une alternative pour l'étude du comportement des structures à long terme soumises à des chargements quelconques variant entre des bornes qui sont fixes. Durant ces dernières années cette théorie a trouvé une attention plus soutenue vu ses résultats très convaincants et son efficacité. C'est dans ce contexte que nous proposons une généralisation du théorème statique d'adaptation aux cas des sols. Elle est basée sur le théorème de Radenkovic, utilisé auparavant pour l'extension des théorèmes d'analyse limite avec succès, et le concept de l'état caractéristique. Ce dernier est déterminé à partir des constatations expérimentales et il est fondamental pour l'étude du comportement des sols sous chargement monotone et cyclique. Ce qui rend notre approche plus réaliste et plus fiable

que les approches basées sur l'introduction d'une loi d'écoulement non-associée qui permet juste le contrôle de la dilatance.

2. CONTENU DU RAPPORT

Dans le **premier chapitre** nous donnons un aperçu sur l'élastoplasticité des sols: le modèle de comportement élastoplastique et ses aspects, les schémas d'évolution comme l'écroutissement (isotrope et cinématique), les matériaux standards et non standards ainsi que les différents critères de plasticité usuelles en mécanique des sols.

Nous exposons dans le **deuxième chapitre** la théorie de l'adaptation pour le cas des matériaux standards. Nous rappelons les deux théorèmes de base: le théorème statique de Melan et le théorème cinématique de Koiter. Nous proposons par la suite la généralisation du théorème statique aux cas des matériaux non standards. Elle est basée sur le théorème de Radenkovic et le concept de l'état caractéristique.

Nous présentons dans le **troisième chapitre** la formulation numérique de la méthode de l'adaptation. Elle basée sur le principe du minimum de l'énergie complémentaire totale. Les contraintes dérivent des fonctions de contrainte d'Airy ce qui garantie l'équilibre. Ces fonctions sont construites a partir des polynômes bi-cubique d'Hermite, ce qui assurent la continuité inter-éléments et conduit à une meilleure estimation de la charge limite d'adaptation. L'algorithme numérique est basé sur le couplage de la méthode des éléments finis et la méthode du Lagrangien augmenté.

Le quatrième chapitre est consacré aux applications numériques. L'approche développée est appliquée pour l'étude d'un massif de sol sous condition de déformation plane. Le sol est modélisé comme un matériau élastique parfaitement plastique obéissant au critère de Mohr Coulomb. Nous examinons en particulier l'influence des paramètres suivants sur la charge limite d'adaptation:

- influence de la cohésion;
- influence de l'angle de frottement caractéristique;
- influence des contraintes de cisaillement.

La validation est faite par rapport aux résultats d'analyse limite.

CHAPITRE I

APERÇU SUR L'ELASTOPLASTICITE DES SOLS

APERÇU SUR L'ELASTOPLASTICITE DES SOLS

1.1. INTRODUCTION

Les études théoriques et expérimentales entreprises dans le domaine de la rhéologie des sols ont pour objectif, d'établir des règles et des lois de comportement pour les sols en vue de calcul des ouvrages. L'écriture d'une loi de comportement pour un sol consiste à construire une relation permettant d'exprimer les accroissements de contraintes en fonction des accroissements de déformations correspondantes au cours d'une sollicitation donnée. La formulation de cette loi s'appuie à la fois sur les schémas théoriques de la mécanique des milieux continus et sur les résultats d'études expérimentales en laboratoire et en place.

Les équations de comportement peuvent prendre des formes très diverses. L'existence d'un palier d'écoulement sur la courbe contrainte-déformation et de déformations irréversibles a suggéré d'utiliser le modèle élastoplastique pour la modélisation des sols.

Dans ce chapitre on se propose d'exposer des notions fondamentales sur le modèle élastoplastique qui se limite à la représentation des aspects essentiels du comportement des sols.

1.2. LE MODEL DE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE

Le modèle de comportement élastoplastique est caractérisé par l'apparition de déformations réversibles et de déformations irréversibles. Ce comportement laisse de côté, en ce qui concerne la plasticité, tout effet de vieillissement et de viscosité du matériau. En conséquence, la relation fonctionnelle entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations est indépendante de l'incrément de temps pendant lequel la sollicitation a été appliquée.

Les modèles de comportement élastoplastique sont caractérisés par les concepts fondamentaux suivants :

- la *surface de charge*, qui définit le seuil de contrainte au-delà duquel le comportement d'un matériau est irréversible (plastique) ;
- le *domaine d'élasticité*, qui correspond à l'intérieur de la surface de charge et dans lequel les déformations sont réversibles ;
- la *règle d'écoulement plastique*, qui décrit la manière dont évoluent les déformations plastiques ;

- la *partition des déformations*, qui décompose le tenseur des déformations totales (ε_{ij}) en la somme du tenseur des déformations élastiques (ε_{ij}^e) et de celui des déformations plastiques (ε_{ij}^p) ;
- l'*écrouissage*, qui permet de faire évoluer la surface de charge dans l'espace des contraintes en fonction de l'intensité des sollicitations, dans ce cas, le domaine d'élasticité varie également ;
- le *critère de plasticité* ou de rupture, qui caractérise la rupture du matériau (les déformations tendent vers l'infini).

1.3. SURFACE DE CHARGE ET ECROUISSAGE

a) surface de charge

Dans l'espace des contraintes, le domaine d'élasticité initial ou actuel est en général défini par une fonction scalaire F de la contrainte σ_{ij} , appelée surface de charge du matériau telle que :

$F(\sigma_{ij}) < 0$ correspond à l'intérieur du domaine, les déformations sont uniquement élastiques.

$F(\sigma_{ij}) = 0$ correspond à la frontière du domaine, les déformations élastiques peuvent être éventuellement accompagnées de déformations plastiques.

$F(\sigma_{ij}) > 0$ correspond à l'extérieur du domaine, c'est un état de contrainte physiquement Impossible.

On appelle : *Critère de plasticité* la condition

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1.1)$$

b) écouissage

L'évolution des déformations plastiques dans le cas des matériaux écouissable conduit à un changement de limite élastique (dit écouissage). Le domaine d'élasticité actuel dépend de l'état d'écouissage, que l'on représente par une variable K introduite dans l'expression de la surface de charge notée $F(\sigma_{ij}, K)$. L'état d'écouissage K n'évolue que lorsqu'il ya évolution de la déformation plastique. La surface de charge se dilate et se déplace au fur et à mesure que se développe l'écouissage.

Diverses théories ont été construites pour représenter l'écouissage, les trois principales sont :

- *La théorie de l'écouissage isotrope de Taylor et Quincey*, qui fait dépendre l'écouissage d'un paramètre scalaire unique (K). Le domaine d'élasticité se transforme par homothétie de centre O (origine de l'espace) (Fig.1.1.a)

- *La théorie de l'écouissage cinématique de Prager*, pour laquelle les frontières d'élasticité successives se déduisent de la frontière initiale par translation dans l'espace des contraintes. L'écouissage dépend alors d'un paramètre tensoriel (K devient (K_{ij})) (Fig.1.1.b)

- *La théorie de l'écouissage mixte*, la combinaison des deux cas précédents conduit à un schéma plus complet. La surface de charge se translate et se dilate uniformément dans toutes les directions.

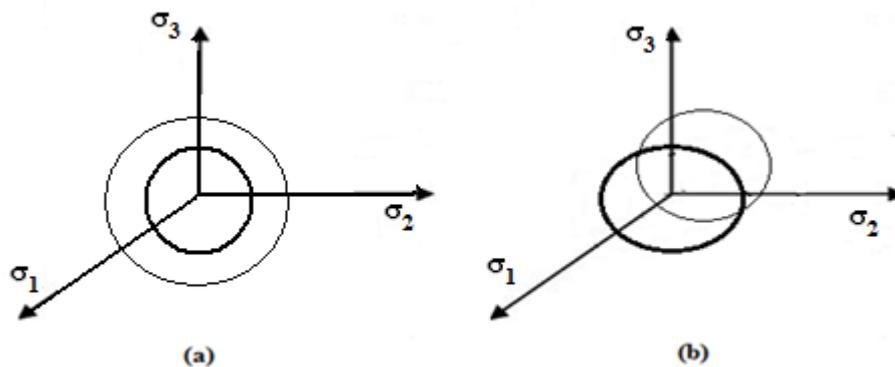


Figure 1.1 – Représentation de l'écouissage (a) isotrope (b) cinématique dans le plan des contraintes principales –

Soit σ_{ij} un état de contraintes correspondant à une étape de chargement donné. Si cet état est tel que $F(\sigma_{ij}, K) < 0$, σ_{ij} est à l'intérieur du domaine d'élasticité actuel, la variation de déformation est donc purement élastique :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (1.2)$$

Si cet état est tel que $F(\sigma_{ij}, K) = 0$, σ_{ij} se trouve sur la frontière du domaine. Pour décrire dans ce cas le comportement, il convient de distinguer selon que le point matériel est en chargement (tendance à sortir du domaine d'élasticité) ou en déchargement (retour dans le domaine d'élasticité).

Il y a **chargement** si

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\sigma_{ij}, K) = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.3a)$$

Donc

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (1.3b)$$

Il ya **déchargement** si

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\sigma_{ij}, K) = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \end{array} \right. \quad (1.4a)$$

Donc

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (1.4b)$$

1.4. REGLE D'ECOULEMENT PLASTIQUE

La règle d'écoulement plastique exprime l'accroissement de la déformation plastique en fonction des états des contraintes, et d'écrouissage par l'intermédiaire d'un potentiel plastique G , qui peut être différent de la fonction de charge F . Tel que :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.5)$$

avec

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ si } F < 0 \text{ ou si } F = 0 \text{ et } \dot{F} < 0$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \text{ si } F = \dot{F} = 0$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur de plasticité et le point ($\dot{\cdot}$) exprime la dérivée temporelle des quantités considérées.

Afin de définir complètement la relation de comportement, il convient d'exprimer le multiplicateur de plasticité. Ce calcul est effectué en considérant la condition de consistance $\dot{F}(\sigma_{ij}, K) = 0$, qui indique que l'état de contrainte doit rester sur la surface de charge au cours du chargement $F=0$. Cette condition s'écrit :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial k} \dot{K} = 0 \quad (1.6. a)$$

D'où

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = - \frac{\partial F}{\partial k} \dot{K} \quad (1.6. b)$$

Lorsqu'il y a écrouissage, la variable $H(\sigma_{ij}, K)$, appelée module d'écrouissage est définie par la relation :

$$H \dot{\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (1.7)$$

La variable K est une fonction scalaire de la déformation plastique (ε_{ij}^p). On peut supposer que K représente un écrouissage isotrope de la forme suivante :

$$K = K(\varepsilon_{ij}^p) \quad (1.8)$$

Les relations précédentes permettent d'établir l'expression du module d'écrouissage H

$$\dot{\lambda}H = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = -\frac{\partial F}{\partial K} \dot{K} = -\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_{ij}^p}\right) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (1.9)$$

En tenant compte de la règle d'écoulement, si $\dot{\lambda} \neq 0$:

$$H = -\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_{ij}^p}\right) \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}\right) \quad (1.10)$$

D'autre part les incréments de déformation élastique $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ et de contrainte $\dot{\sigma}_{ij}$ sont liés par l'intermédiaire du tenseur d'élasticité E_{ijkl} ou son inverse S_{ijkl} :

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e \quad \text{ou} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^e = S_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (1.11. a)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e = E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) = E_{ijkl} \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (1.11. b)$$

En multipliant chaque membre de (1.11b) par $\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right)$, il vient :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right) \dot{\sigma}_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right) E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\right) E_{ijkl} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}\right) = \dot{\lambda}H \quad (1.12)$$

Le multiplicateur de plasticité s'écrit donc :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (1.13)$$

On peut dès lors établir la relation incrémentale liant les incréments de déformations à ceux de contraintes :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left\{ E_{ijkl} - \frac{\left(E_{ijnm} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{nm}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} E_{rskl} \right)}{H + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{nm}} E_{nmrs} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}}} \right\} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (1.14. a)$$

Que l'on peut encore réécrire sous la forme :

$$\dot{\sigma}_{ij} = (E_{ijkl} - E^p_{ijkl}) \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (1.14. b)$$

avec

$$E^p_{ijkl} = \frac{\left(E_{ijnm} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{nm}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} E_{rskl} \right)}{H + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{nm}} E_{nmrs} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}}} \quad (1.15)$$

Le tenseur de comportement (E^p_{ijkl}) ainsi défini appelé tenseur d'élastoplasticité. La relation de comportement est également valable pour un matériau élastique parfaitement plastique (sans écrouissage), c'est-à-dire pour $H = 0$ [11].

1.4.1 Hypothèse de travail plastique maximal

Cette hypothèse a été formulée par Hill [12] (1950), on l'appelle souvent principe du travail plastique maximal et s'énonce comme suit :

Soit, pour un élément de matière, le tenseur des contraintes (σ_{ij}) non extérieur au domaine d'élasticité actuel tel que $F(\sigma_{ij}, K) = 0$ (K paramètres d'écrouissage).

Soit $(\dot{\epsilon}_{ij}^p)$ un tenseur de vitesse des déformations plastiques correspondant.

Soit (σ_{ij}^s) un tenseur des contraintes vérifiant $F(\sigma_{ij}^s, K) \leq 0$ (Fig.1.2)

Si

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad \forall \quad \sigma_{ij}^s \quad (1.16)$$

alors le matériau obéit au principe du travail plastique maximal.

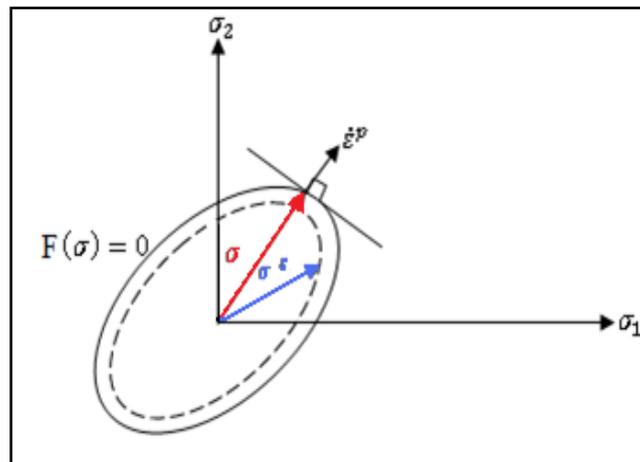


Figure 1.2 – Principe de travail maximal de Hill (1950) –

La validité du principe du travail plastique maximal (1.16) implique que :

- La surface d'écoulement portée dans l'espace des contraintes est convexe.
- En un point régulier de la surface de charge, l'unique orientation possible pour $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ de façon à respecter (1.16) n'est autre que la normale extérieure à la surface de charge.
- En un point singulier, la convexité implique l'existence d'un cône convexe des normales extérieurs à $F(\sigma_{ij}, K)$ en σ tel que : $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ appartient à ce cône.

En relation étroite avec ce principe, on peut énoncer également le postulat de DRUCKER [4] :

$$d^2W = \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (1.17)$$

où $\dot{\sigma}_{ij}$ est l'incrément de contrainte sur la surface de charge causant l'écoulement plastique.

La relation (1.17) définit la condition de stabilité des matériaux.

- Si la loi d'écoulement est associée, la condition $d^2W \geq 0$ est satisfaite quelle que soit la direction $\dot{\sigma}_{ij}$ et le matériau est **inconditionnellement stable**,
- Sinon, le matériau est **stable** pour $d^2W \geq 0$ et **instable** pour $d^2W < 0$.

1.4.2 Matériaux standards (Règle d'écoulement associée)

La règle d'écoulement est dite associée lorsque la surface de charge est confondue avec la surface représentative du potentiel plastique ($F=G$). La direction du vecteur déformation plastique dans l'espace des contraintes principales est ainsi perpendiculaire à la surface de charge ($F=0$). Cela conduit à une loi d'écoulement de la forme :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.18)$$

Les matériaux correspondants sont dits « **standards** », ils satisfont le principe de travail plastique maximal de Hill. Ce qui se traduit par la condition de normalité de l'incrément de déformation en tout point sur la frontière convexe de la surface de charge.

1.4.3. Matériaux non standards (Règle d'écoulement non associée)

La règle d'écoulement est dite non associée lorsque la direction du vecteur déformation plastique est perpendiculaire à la surface représentative du potentiel plastique $G(\sigma_{ij})$ qui est distincte de celle représentative de la fonction de charge $F(\sigma_{ij})$. La règle d'écoulement plastique s'écrit alors :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.19)$$

Les matériaux correspondants sont dits « **non standards** », le principe du travail plastique maximal n'est en générale pas considéré comme valable pour ces matériaux.

1.5. APPROCHE DU COMPORTEMENT DES SOLS

1.5.1. Concept de l'état critique

La théorie de l'état critique développée par ROSCOE & BURLAND [24] et SCHOFIELD & WROTH [27] s'attache à rendre compte du comportement des sols, sables et argiles, dans le domaine des grandes déformations, principalement sous chargement monotone.

Le concept d'état critique repose sur la définition d'un état idéal asymptotique que le matériau doit approcher sous cisaillement monotone. Cet état ultime est caractérisé par quelques propriétés essentielles, que nous rappelons ici brièvement.

A l'état critique :

- l'écoulement plastique du matériau s'effectue à vitesse de déformation volumique totale nulle ($\dot{\epsilon}_v = 0$, le matériau devient incompressible) ;
- L'indice des vides du matériau est lié à la contrainte moyenne supportée par celui-ci, indépendamment de tout autre facteur ($e_{cr} = e_0 - \lambda \ln P$) ;
- la contrainte déviatorique q est proportionnelle à la contrainte moyenne p ($q = \mathcal{M}p$) ;
où, \mathcal{M} , λ et e_0 sont des constantes caractérisant le matériau, $q = \sigma_1 - \sigma_3$, $p =$

$\frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_2)$ le champ de contraintes est de révolution et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les contraintes principales.

1.5.2. Concept de l'état caractéristique

L'état critique traduit un comportement asymptotique du sol dans le domaine des grandes déformations à la rupture où l'écoulement se produit sans variation de volume. Il ne permet donc pas de suivre l'évolution de la déformation irréversible, et s'avère par conséquent, inadéquat à l'étude du comportement des sols sous sollicitations non monotones.

Pour rendre compte du comportement des sols sous chargement cyclique et transitoire, il est nécessaire d'étudier les mécanismes de déformation du matériau tout au long du chargement, et non plus seulement à la rupture, en grandes déformations. En effet, au cours de ces chargements cycliques, les déformations instantanées restent de faible importance : la rupture du matériau peut être le plus souvent caractérisée par une accumulation progressive et continue de petites déformations.

Le chargement des sols sous sollicitations cycliques a fait l'objet de très nombreux travaux, dont on ne citera que les travaux de HABIB & LUONG [8] sur les sols pulvérulents (les sables).

Lors d'un essai triaxial axisymétrique conventionnel ($\sigma_1 > \sigma_2, \sigma_2 = \sigma_3$) en compression monotone drainée, l'échantillon de sable présente initialement une diminution de volume lorsque le déviateur $q = \sigma_1 - \sigma_3$ croît, la vitesse de déformation volumétrique tend vers 0. Dans le cas d'un sable lâche, cet état n'est atteint qu'asymptotiquement. Pour un sable plus dense, la vitesse de déformation s'annule et change de signe : le matériau devient dilatant (figure 1.3). La dilatance résulte du désenchevêtrement des grains, elle est d'autant plus prononcée que le sable est initialement dense et que la pression de confinement est faible. Le comportement est similaire lors d'un chargement triaxial en extension ($\sigma_1 < \sigma_2, \sigma_2 = \sigma_3$), avec initialement une phase contractante suivie d'une phase dilatante.

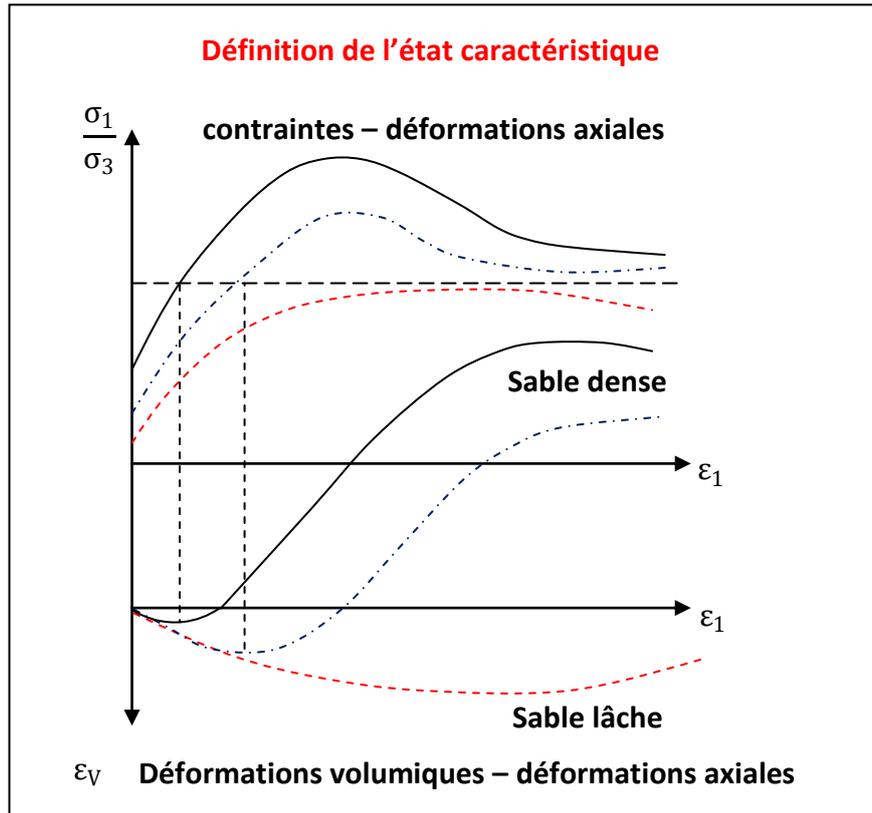


Figure 1.3 – Variation de volume sous chargement monotone –

La valeur de la contrainte où la vitesse de la déformation volumique est nulle lors d'un essai drainé définit un seuil dans le comportement d'un sol granulaire, que LUONG [15] et HABIB & LUONG [8] ont dénommé état caractéristique (voir figure 1.3).

Cet état caractéristique est associé à :

- Un taux de variation de volume nul $\dot{\epsilon}_v$;
- Un seuil de changement de comportement, le processus d'enchevêtrement des grains est remplacé par un processus de désenchevêtrement ;
- Une déformation du sol relativement faible ;
- Une indépendance vis-à-vis de la porosité initiale ;
- Un rapport de contraintes $\eta_c = \sigma_1/\sigma_3 = \text{tg}^2 (\pi/4 + \phi_c/2)$;
- Un angle de frottement $\phi_c = \text{Arc sin} (3 \eta_c/6 + \eta_c)$.

Les cercles de Mohr correspondant aux états caractéristiques atteints à partir de différentes contraintes initiales isotropes admettent une tangente commune, de pente $\tan \phi_c$, appelée « ligne ou droite caractéristique ». L'angle ϕ_c détermine la capacité d'enchevêtrement des particules de sable [17].

Des essais axisymétriques réalisés sur différents sables montrent que ϕ_c est un paramètre intrinsèque du matériau, indépendant de la densité, de la granulométrie et de la contrainte moyenne [14].

L'état caractéristique sépare deux types de comportement rhéologique du sable : contractant dans le domaine sub-caractéristique, limité dans le plan (p, q) par deux droites LC, et dilatant dans le domaine sur-caractéristique jusqu'à la limite de rupture définie par les deux droites LR (figure 1.4). Dans le cas des sables lâches, les droites caractéristiques sont confondues avec les droites de rupture. L'état caractéristique se confond avec l'état critique SCHOFIELD & WROTH [27].

Le concept d'état caractéristique défini précédemment permet également de rendre compte du comportement sous chargement cyclique LUONG [15] ; HABIB & LUONG [8].

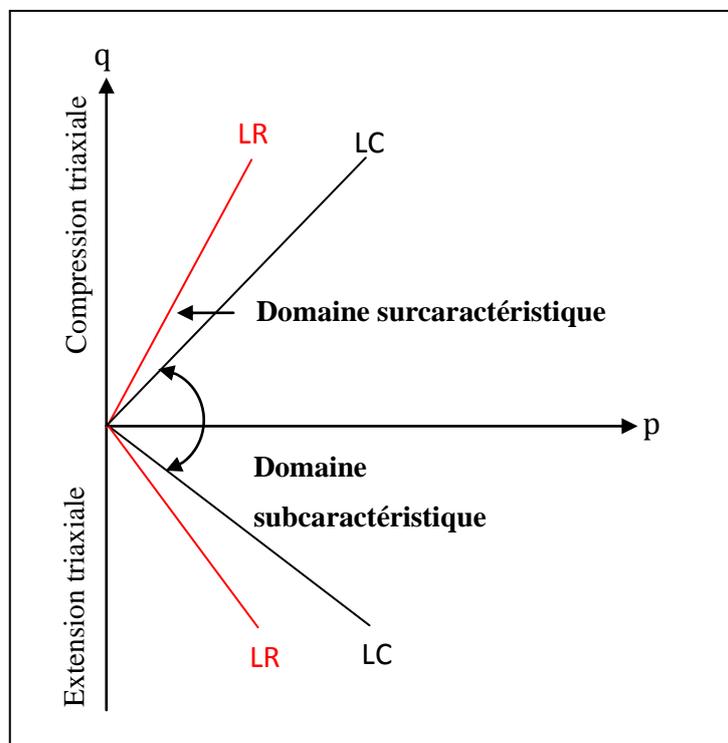


Figure 1.4 – Critère caractéristique « LUONG » –

1.5.3. Le comportement non standard des sols

La convexité des domaines d'élasticité étant validée expérimentalement c'est sur la règle de normalité que portent les vérifications de pertinence du principe du travail plastique maximal. Le principe du travail plastique maximal est en général admis pour les métaux et autres matériaux dont le critère de plasticité est indépendant de la contrainte moyenne $\sigma_m = \text{tr } \sigma_{ij}/3$. En particulier la conclusion indiquée plus haut concernant l'invariance de volume lors de la déformation plastique correspond bien aux constatations expérimentales. Pour les matériaux dont la fonction de charge dépend de la contrainte moyenne, le principe du travail plastique maximal n'est en général pas considéré comme valable.

Prenons le cas du critère de Mohr coulomb, pour un matériau parfaitement plastique la règle d'écoulement associée à ce critère distingue trois régimes [25], citons à titre d'exemple le régime de face dans lequel :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\lambda} (1 + \sin \varnothing) \\ \dot{\varepsilon}_2^p = 0 \\ \dot{\varepsilon}_3^p = -\dot{\lambda}(1 - \sin \varnothing) \end{array} \right\} \dot{\lambda} \geq 0 \quad (1.21)$$

D'où une variation de volume dans la déformation plastique égale a :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_3^p \quad (1.22)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\lambda} (1 + \sin \varnothing) - \dot{\lambda}(1 - \sin \varnothing) = 2\dot{\lambda} \sin \varnothing \quad (1.23)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{2\dot{\lambda} \sin \varnothing}{\dot{\lambda} (1 + \sin \varnothing)} = 1 - \text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varnothing}{2} \right) \quad (1.24)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \left[1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right] \dot{\varepsilon}_1^p \quad (1.25)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \sin \phi (\dot{\varepsilon}_1^p - \dot{\varepsilon}_3^p) \quad (1.26)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = 2\lambda \sin \phi = \left[1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right] \dot{\varepsilon}_1^p = \sin \phi (\dot{\varepsilon}_1^p - \dot{\varepsilon}_3^p) \quad (1.27)$$

Une telle variation de volume dans la déformation plastique est jugée excessive par de nombreux auteurs qui, rejetant donc le principe du travail maximal pour ces matériaux, et proposent d'utiliser le critère de Coulomb avec une règle d'écoulement **non associée** (Brinch-Hansen, 1953 ; Bent Hansen, 1958 ; Janike et Shield, 1959 ; Radenkovic, 1961). C'est apparemment le cas des sols où il a été observé expérimentalement que les règles d'écoulement plastique associées ne prédisent pas avec précision certaines caractéristiques essentielles de la réponse mécanique.

Il est intéressant de citer à cet effet l'exemple suivant [2]:

Soit un bloc indéformable et une interface d'appui avec coefficient de frottement noté μ (fig 1.6.a). La fonction de charge pour le système est :

$$F = T - \mu N \quad (1.28)$$

où T est la force de traction et N l'effort normal.

Si la force T dépasse la valeur μN , le glissement s'amorce. Et pour chaque déplacement, un incrément de déformation irréversible apparaît. Étant donné que le déplacement Δ ne se fait que dans la direction de la force de traction T, l'incrément de déformations dans le plan N-T (fig 1.6.b) n'est pas normal à la fonction de charge (sauf pour $\mu=0$) mais parallèle à l'axe T. on dit alors que le système (bloc et interface) a un comportement non-standard par opposition aux matériaux standards respectant la règle de normalité.

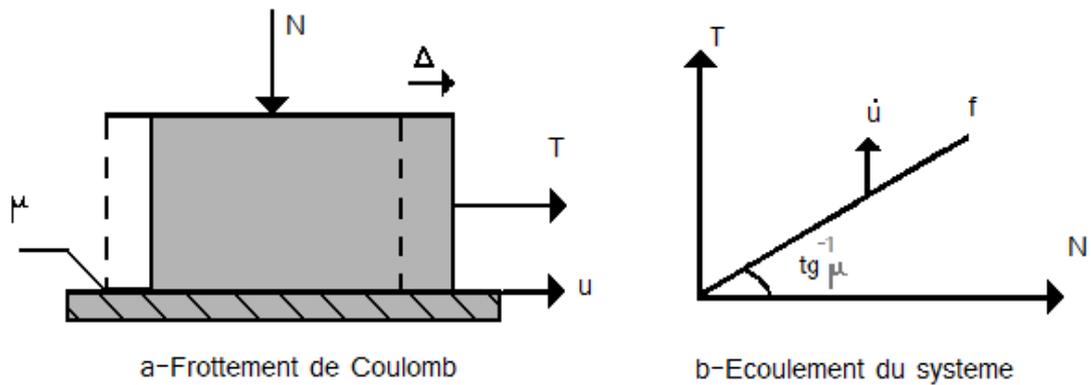


Figure 1.6 – Le frottement de Coulomb obéit à une loi non-standard –

Pour revenir aux sols, nous remplaçons le bloc indéformable par un sol d'angle de frottement interne ϕ , et régit par le critère de plasticité de coulomb fig 1.7.a. La force de résistance est activée par la cohésion, le frottement d'interface et par le frottement intergranulaire dans le solide. Cette fois, en plus du déplacement dans la direction de la force de traction T , une composante normale du déplacement apparait à cause du frottement interne et provoque un changement de volume. Le déplacement total fait un angle ψ avec la direction de la force de traction T . La fig 1.7.b montre que le vecteur de déformation fait un angle ψ , par rapport à la direction du glissement, dont la valeur détermine le comportement de l'écoulement. Lorsque ψ est égale à ϕ , la vitesse des déformations (plastiques) est normale à la fonction de charge. La règle de normalité est respectée. L'écoulement est accompagné par un changement de volume. Lorsque ψ est nul, la déformation se fait par glissement pure et sans changement de volume. La règle de normalité n'est alors plus valable.

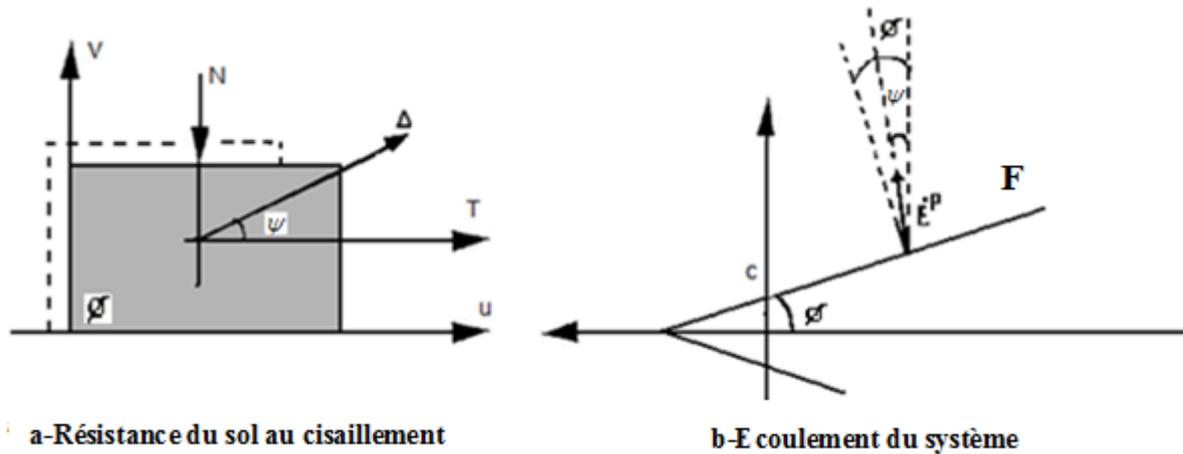


Figure 1.7 – le sol obéit à une loi non standard –

1.6. CRITERES DE PLASTICITE USUELS EN MECANIQUE DES SOLS

1.6.1. Critère de Tresca

Après avoir effectué des essais sur le plomb, Tresca (1864) conclut que la plastification se produit lorsque la contrainte de cisaillement atteint une valeur limite σ_0 . Dans le repère des contraintes principales, le critère s'exprime par :

$$F(\sigma_{ij}) = \text{Max} \{(\sigma_1 - \sigma_2), (\sigma_2 - \sigma_3), (\sigma_3 - \sigma_1)\} - \sigma_0 = 0 \quad (1.29)$$

où σ_1 et σ_3 représentent les contraintes principales extrêmes ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) et σ_0 la limite d'élasticité en traction simple; elle est égale à l'opposé de la limite en compression simple ; la résistance en cission simple vaut $\frac{\sigma_0}{2}$.

Le critère de Tresca est utilisé pour décrire le comportement des sols fins (argile, limon) saturés, non drainés, en contraintes totales à court terme, durant lesquelles la variation de volume est nulle. Dans l'espace des contraintes principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) la surface de charge est un prisme hexagonal régulier passant par l'axe hydrostatique. La figure 1.8 donne des représentations du critère de Tresca dans le plan déviatorique et dans celui des contraintes principales.

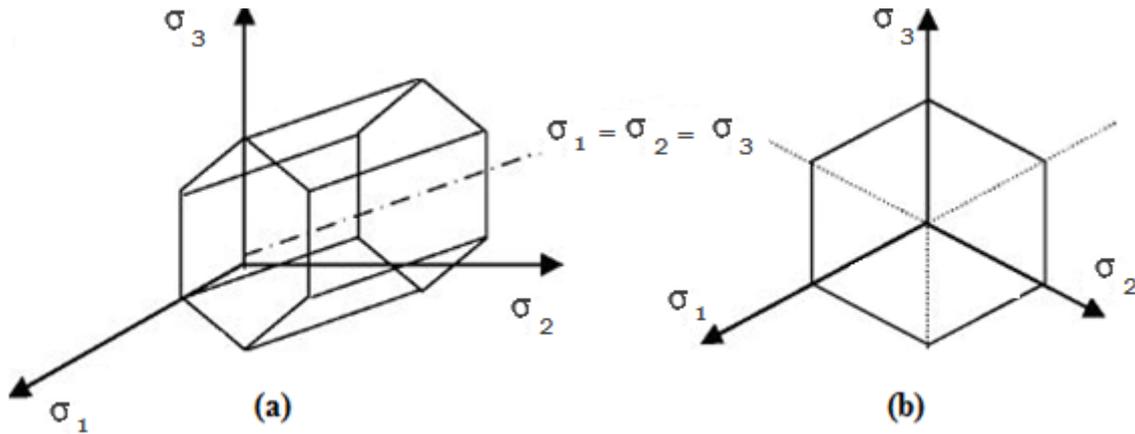


Figure 1.8 – Représentation du critère de Tresca (a) dans l'espace des contraintes principales et (b) dans le plan déviatorique –

1.6.2. Critère de Von Mises

Afin de prendre en compte l'influence de la contrainte intermédiaire, Von Mises a proposé une surface de charge qui dépend du deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques. Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ la surface de charge est un cylindre de révolution passant par l'axe hydrostatique et d'équation :

$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - Y = 0 \quad (1.30)$$

où Y est la limite d'élasticité en cisson simple. Ce critère a été formulé pour étudier le comportement des métaux et il n'est pas bien adapté à la représentation du comportement des sols dans la mesure où il ne fait pas intervenir la contrainte moyenne dans son expression.

La figure 1.9 donne des représentations du critère de Von Mises dans le plan déviatorique et dans celui des contraintes principales.

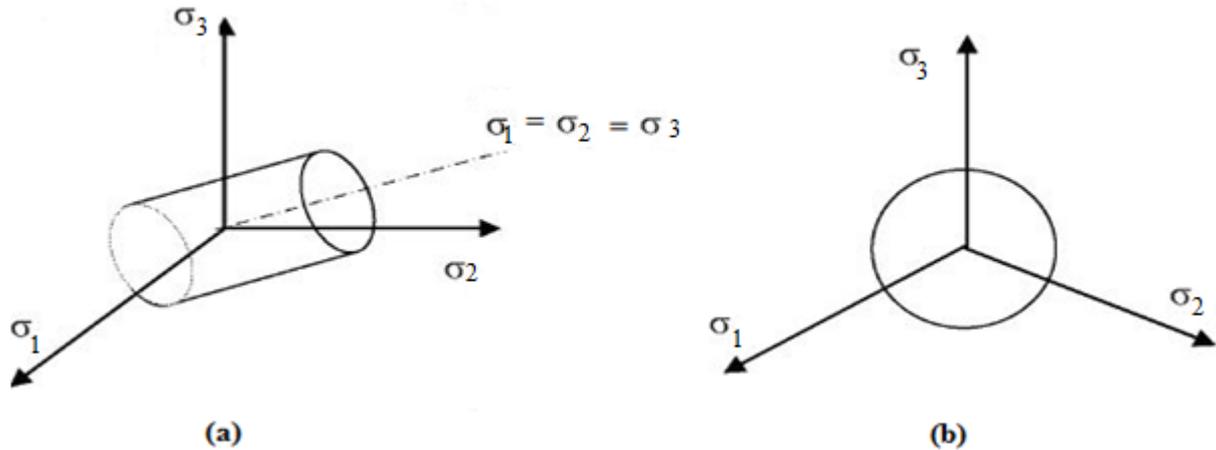


Figure 1.9 – Représentation du critère de Von Mises (a) dans l'espace des contraintes principales et (b) dans le plan déviatorique –

1.6.3. Critère de Mohr-Coulomb

Le critère de Mohr-Coulomb (1900) est une généralisation du critère de Tresca. Ces deux critères supposent que la plastification apparaît lorsque la contrainte de cisaillement atteint une valeur limite. Cependant, Tresca suppose que cette valeur est une constante alors que Mohr postule que pour une facette donnée cette valeur est fonction de la contrainte normale.

Le critère de Mohr-Coulomb est utilisé pour décrire le comportement des sols pulvérulents (sables) et des sols cohérents (argiles et limons). Dans l'espace des contraintes principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) la surface de charge est une pyramide de section hexagonale et d'équation :

$$F(\sigma_{ij}) = |\sigma_1 - \sigma_3| - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \quad (1.31)$$

Le paramètre c est la cohésion du matériau et ϕ l'angle de frottement interne. Lorsque $\phi = 0$, on retrouve le critère de Tresca.

La figure 1.10 donne des représentations du critère de Mohr-Coulomb dans le plan déviatorique et dans celui des contraintes principales.

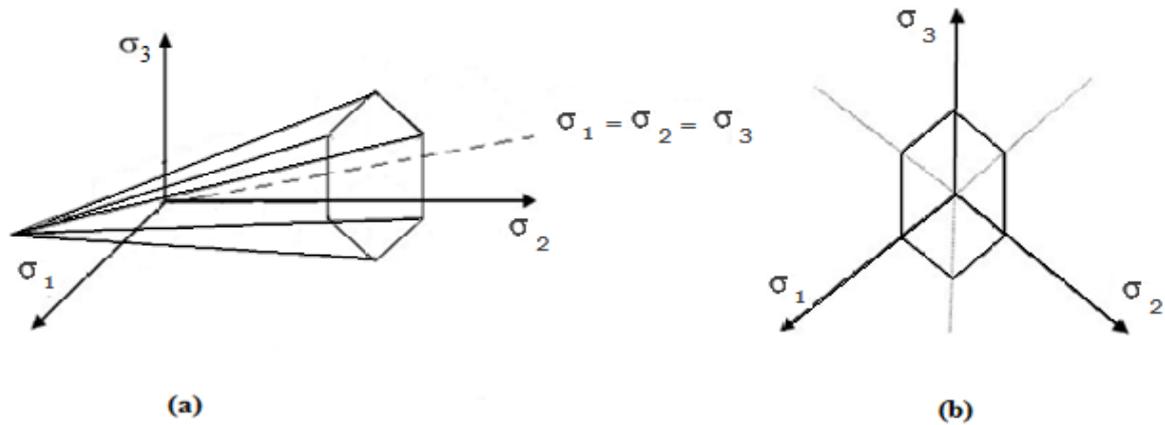


Figure 1.10 – Représentation du critère de Mohr - Coulomb (a) dans l'espace des contraintes principales et (b) dans le plan déviatorique –

Le potentiel plastique s'écrit, en fonction des contraintes principales extrêmes [9] :

$$G(\sigma_{ij}) = |\sigma_1 - \sigma_3| - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \psi \quad (1.32)$$

La partie élastique du comportement est définie par l'élasticité linéaire isotrope de Hooke. Au total la loi de Mohr-Coulomb comprend cinq paramètres mécaniques : E (module d'Young), ν (coefficient de Poisson), C (cohésion), ϕ (angle de frottement) et ψ (angle de dilatance). ces paramètres sont déterminés couramment à partir des résultats d'essais de laboratoire (œdomètre et appareil triaxial)

Un calcul simple montre que les déformations plastiques vérifient la relation suivante :

$$\frac{d\epsilon_{vol}^p}{d\epsilon_a^p} = - \frac{2 \sin \psi}{1 - \sin \psi} \quad (1.33)$$

La quantité $\frac{2 \sin \psi}{1 - \sin \psi}$ caractérise la variation de volume au cours de la phase plastique ; pour cette raison, l'angle ψ est appelé angle de dilatance. D'une manière générale, l'angle de frottement est pratiquement toujours supérieur à l'angle de dilatance.

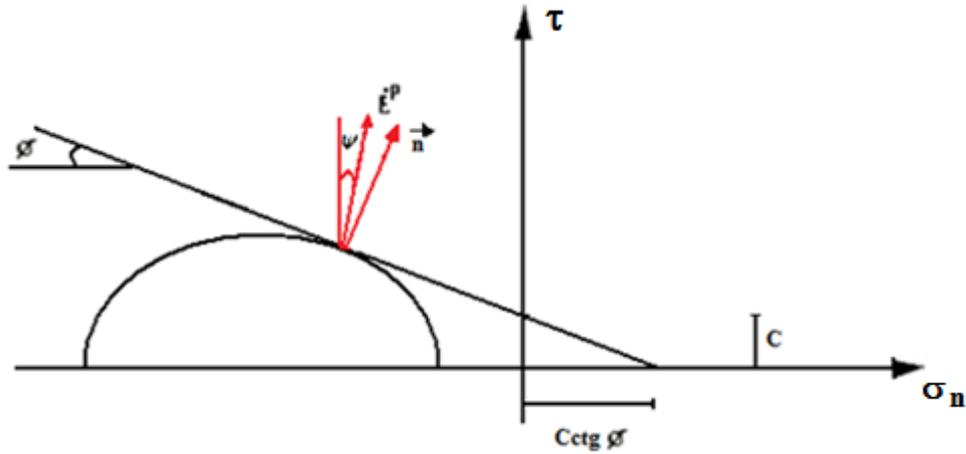


Figure 1.11– Matériau de Coulomb avec angle de dilatation ψ (représentation de Mohr) –

1.6.4. Critère de Drucker Prager

Le critère de Drucker-Prager constitue une généralisation du critère de Von Mises aux cas des sols, prenant en compte le premier invariant du tenseur de contraintes I_1 et le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques J_2 . Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, la surface de charge est un cône à base circulaire d'équation :

$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2(\sigma_{ij})} - \alpha I_1 - Y = 0 \quad (1.34)$$

où α et Y sont deux paramètres qui peuvent être déterminés à partir de résultats d'essais. Si le paramètre α est nul, la loi se réduit à celle de Von Mises.

La figure 1.12 donne des représentations du critère de Drucker-Prager dans le plan déviatorique et dans celui des contraintes principales.

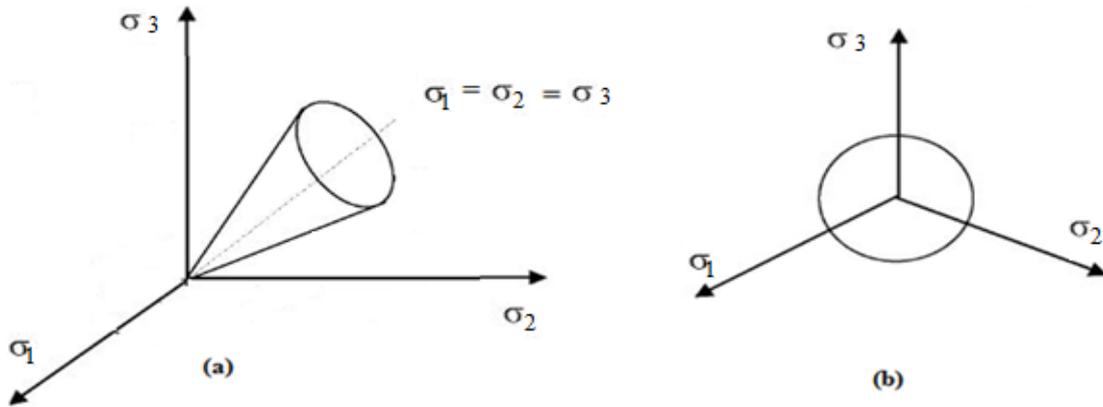


Figure 1.12 – Représentation du critère de Drucker Prager (a) dans l'espace des contraintes principales et (b) dans le plan déviatorique –

Le potentiel plastique s'écrit [11] :

$$G(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2(\sigma_{ij})} - \beta I_1 \tag{1.35}$$

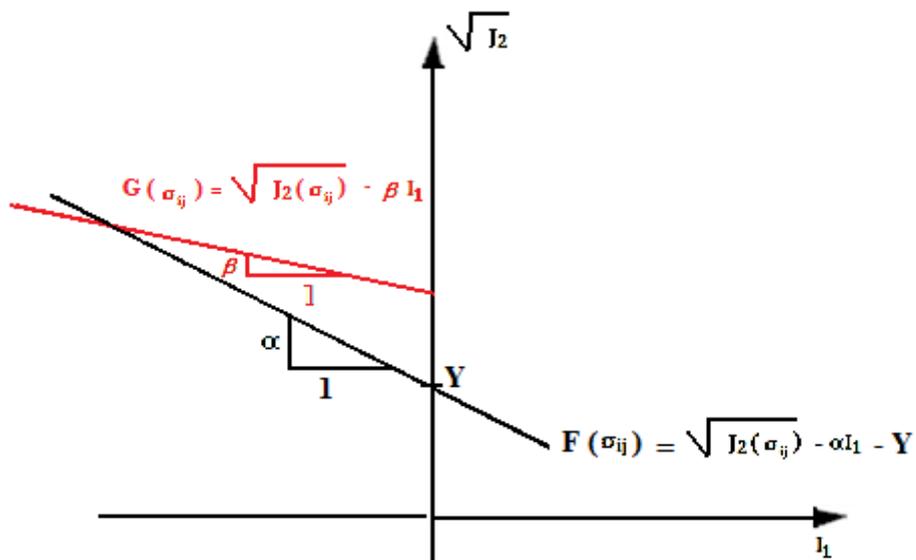


Figure 1.13 – Critère de Drucker Prager avec une règle d'écoulement non associée –

La partie élastique du comportement est définie par l'élasticité linéaire isotrope de Hooke. Au total, le modèle comprend cinq paramètres : E (module de Young), ν (coefficient de Poisson), α , β et Y . Il est fréquent d'exprimer les paramètres de Drucker Prager α , β et Y en fonction de ceux de Mohr coulomb C , ϕ et ψ . Des relations différentes sont obtenues selon l'essai considéré.

Prenons le cas d'une compression triaxiale ($\sigma_2 = \sigma_3$ et $\sigma_1 > \sigma_3$) :

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (1.36a)$$

$$Y = \frac{6C \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (1.36b)$$

$$\beta = \frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 - \sin \psi)} \quad (1.36c)$$

1.7. CONCLUSION

L'établissement d'une loi de comportement, pour un sol donné, est indispensable pour la résolution numérique des problèmes rencontrés dans le calcul des fondations et des ouvrages en terre. Les modèles développés, aussi divers par leur formulation mathématique que par leur base expérimentale, se distinguent surtout par le nombre et le type de paramètres qui les caractérisent. Les modèles performants sont ceux définis par un nombre restreint de paramètres facilement identifiables en laboratoire sur des essais classiques.

La loi de comportement élastoplastique non associée avec écrouissage, présentée dans ce chapitre, décrit de manière relativement satisfaisante le comportement des sols et apporte une aide précieuse et réaliste pour la compréhension des mécanismes de déformation des géomatériaux en général et des sols en particulier.

CHAPITRE II

***LA THEORIE DE L'ADAPTATION
ELASTOPLASTIQUE***

LA THEORIE DE L'ADAPTATION ELASTOPLASTIQUE

2.1. INTRODUCTION

Dans beaucoup de situations couramment rencontrées en ingénierie, les structures ou éléments de structures sont soumis à des chargements mécaniques et/ou thermiques cycliques ou simplement variables dans le temps. L'expérience montre que pour ces types de sollicitations les structures peuvent évoluer vers trois types d'états limites, dont deux conduisent à la ruine. Le premier d'entre eux, désigné par le terme rochet, conduit à la ruine de la structure par excès de déformations plastiques accumulées.

La structure peut aussi périr par formation d'un cycle plastique stabilisé qui conduit par fatigue à faible nombre de cycles à la rupture, ce phénomène est appelé accommodation ou fatigue plastique. Toutefois, la structure peut aussi endurer un grand nombre de cycles, dans ce dernier cas, les déformations plastiques se stabilisent et le comportement cyclique redevient purement élastique avec apparition de contraintes résiduelles. On parle alors d'adaptation.

Dans ce chapitre nous exposons la théorie d'adaptation qui repose sur deux théorèmes clés à savoir le théorème statique de Melan et le théorème cinématique de Koiter puis nous présentons la généralisation du théorème statique d'adaptation aux cas des matériaux non standards.

2.2. THEORIE D'ADAPTATION

La théorie de l'adaptation plastique "shakedown theory" étudie les conditions de ruine d'une structure élastoplastique soumise à des charges variables entre des bornes qui sont fixes, d'une manière indépendante les unes des autres. Si la structure s'adapte le travail dissipé plastiquement dans toute la structure est fini, les déformations plastiques tendent vers une limite, et la réponse en contraintes tend vers une réponse purement élastique.

Depuis les travaux originaux de Bleich [1] et Melan [19], [20] dans les années trente, la théorie de l'adaptation plastique a connu un développement considérable. Sans fournir un aperçu général et complet de la littérature sur le sujet qui sortirait du cadre de ce mémoire, nous signalons que le théorème statique est donné par Melan [19], [20] et le théorème cinématique par Koiter [13]. Ils donnent respectivement la borne inférieure et supérieure de la charge limite d'adaptation.

Ces théorèmes ont fait l'objet de plusieurs études et applications pour le cas des structures métalliques. Cependant leurs applications pour le cas des sols restent difficiles et se font rares. En effet Le comportement du sol est beaucoup plus complexe dont une modélisation réaliste nécessite la prise en compte : de la contractance-dilatance, des déformations volumiques, d'une loi d'écoulement non associée, et de l'énergie dissipée au cours des cycles. Dans ce qui suit nous rappelons le théorème statique et cinématique de la théorie d'adaptation qui sont basés sur les hypothèses suivantes :

Évolution quasi-statique

L'application des charges s'effectue dans des conditions quasi-statiques de telle sorte que les effets dynamiques sont négligeables.

Matériau élastique parfaitement plastique

Considérons un corps B constitué d'un matériau élastique parfaitement plastique standard, de volume V et de surface $S = S_u \cup S_T$, $S_u \cap S_T = \emptyset$, soumis à des sollicitations extérieures qui varient d'une façon quelconque et indépendamment l'une de l'autre, entre des limites prescrites :

- des forces de volume : F_i dans V ,
- des forces de surface : T_i sur S_T ,
- des déplacements imposés : U_i sur S_u .

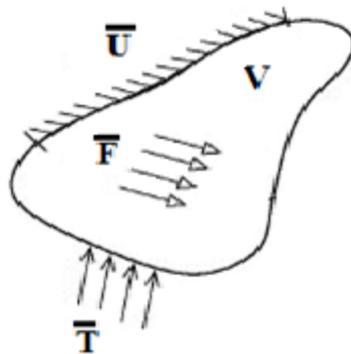


Figure 2.1 – milieu continu et sollicitations –

En appliquant le principe des travaux virtuels qui énonce : « pour tous les champs cinématiquement admissibles, le travail virtuel des actions extérieures est égale au travail des actions intérieures » nous obtiendrons :

$$\int_V F_i u_i dV + \int_{S_T} T_i u_i dS = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (2.1)$$

Les déplacements dans le corps réel peuvent être exprimés comme la somme de deux contributions:

$$u_i = u_i^e + u_i^r \quad (2.2)$$

où u_i^e est la réponse en déplacement qui résulte des forces de volume, des tractions de surface et des déplacements imposés et u_i^r est la réponse en déplacement qui résulte des déformations plastiques. Il vient donc :

$$u_i^e = U_i \quad \text{sur } S_u \quad (2.3a)$$

$$u_i^r = 0 \quad \text{sur } S_u \quad (2.3b)$$

Hypothèses des petites transformations

Sous l'hypothèse des petites déformations, un champ de déformation compatible peut être dérivé de la relation linéaire suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

En tenant compte de l'équation (2.2), on peut écrire :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^r \quad (2.5a)$$

avec

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} (u_{i,j}^e + u_{j,i}^e) \quad (2.5b)$$

$$\varepsilon_{ij}^r = \frac{1}{2}(u_{i,j}^r + u_{j,i}^r) \quad (2.5c)$$

ε_{ij}^e est le champ de déformations élastiques qui résulte des forces de volume, des tractions de surface et des déplacements imposés et ε_{ij}^r est le champ de déformations résiduelles qui résulte des déformations plastiques, défini par :

$$\varepsilon_{ij}^r = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{er} \quad (2.6)$$

où ε_{ij}^p et ε_{ij}^{er} sont, respectivement, les champs de déformations plastiques et élastiques résiduelles. Finalement la déformation totale ε_{ij} a pour expression :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^r = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{er} \quad (2.7)$$

La part élastique de la déformation est liée aux contraintes par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (2.8a)$$

$$\rho_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{er} \quad (2.8b)$$

Le champ de contraintes σ_{ij} qui a pour expression,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \rho_{ij} \quad (2.9)$$

doit satisfaire les équations d'équilibre suivantes :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad \text{dans } V \quad (2.10a)$$

$$\sigma_{ij} n_j - T_i = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (2.10b)$$

Comme le champ de contraintes résiduelles est un champ d'auto-contraintes, le système d'équations suivant est vérifié :

$$\sigma_{ij,j}^e + F_i = 0 \quad \text{dans } V \quad (2.11a)$$

$$\sigma_{ij}^e n_j - T_i = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (2.11b)$$

$$\rho_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } V \quad (2.11c)$$

$$\rho_{ij} n_j = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (2.11d)$$

Convexité du domaine élastique

On suppose que le matériau obéit au principe du travail maximal de Hill [12] :

Pour tout σ_{ij}^s appartenant au domaine défini par l'inégalité $F(\sigma_{ij}^s) < 0$:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\varepsilon}_{ij}^p > 0 \quad (2.12a)$$

Pour un état de contraintes admissibles σ_{ij}^a défini par $F(\sigma_{ij}^a) \leq 0$:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^a) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.12b)$$

Loi d'écoulement associée

La déformation plastique est donnée par la loi de normalité :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.13)$$

2.3. THEOREME D'ADAPTATION STATIQUE DE MELAN

Le théorème de Melan (1936) ou théorème d'adaptation statique de Melan peut être énoncé sous la forme suivante :

On dit que le corps matériel \mathbf{B} s'adapte S'il existe un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps $\bar{\rho}$ et tel que sa superposition avec le champ de contraintes purement élastiques constitue un état de contrainte sûr (2.12a) :

$$\sigma_{ij}^e + \bar{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^s \quad (2.14a)$$

qui ne viole pas le critère d'écoulement en tout point du domaine et pour toutes les combinaisons possibles des sollicitations à l'intérieur des limites prescrites :

$$F[\sigma_{ij}^e(x, t) + \bar{\rho}_{ij}(x)] < 0 \quad (2.14b)$$

En revanche, il n'y aura pas d'adaptation si on ne peut trouver une distribution de contraintes résiduelles indépendante du temps, constituant avec les contraintes élastiques un état de contraintes admissibles σ^a en tout point du corps matériel et pour toutes combinaisons possibles des sollicitations.

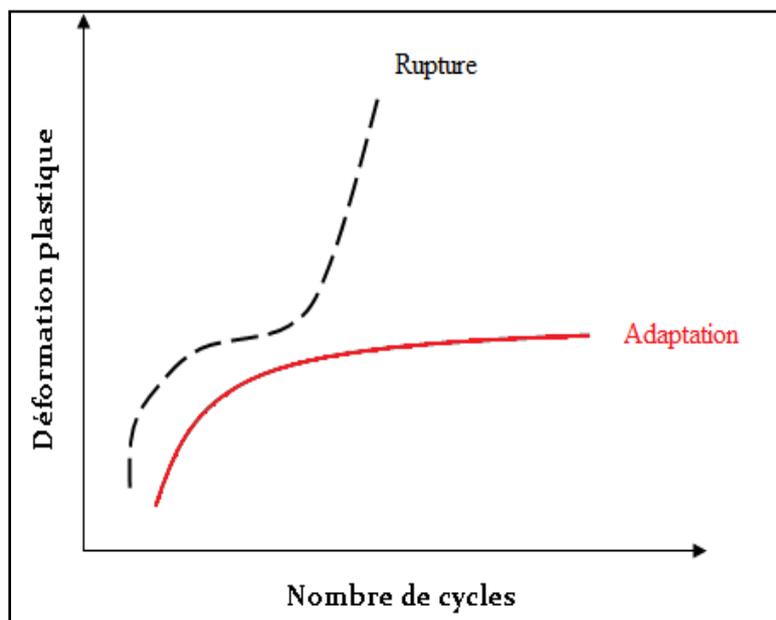


Figure 2.2 – Adaptation et rupture incrémentale

2.4. COEFFICIENT DE SECURITE A L'ADAPTATION

La valeur de la déformation plastique totale qui peut apparaître avant que le matériau atteigne son état d'adaptation, n'a pas été donnée par le critère et la démonstration de Melan.

Le coefficient de sécurité introduit par Koiter [13] (1960) permet de préciser de manière décisive que les déformations plastiques cessent d'évoluer après une durée déterminée, puisqu'il permet de borner l'énergie dissipée plastiquement durant le trajet de chargement.

On considère un coefficient de sécurité $\alpha > 1$ contre la défaillance de la structure due à l'inadaptation, tel que l'état de contrainte $\alpha\sigma_{ij}^s$ soit à l'intérieur du domaine élastique et constitue un état admissible, c'est-à-dire que :

$$F(\alpha\sigma_{ij}^s) \leq 0 \quad (2.15)$$

avec $\alpha(\sigma_{ij}^e + \rho_{ij}) = \sigma_{ij}^a$ comme état de contrainte admissible. Le principe du travail plastique maximal montre que :

$$(\sigma_{ij} - \alpha\sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.16)$$

D'où l'on déduit :

$$\dot{W}_p = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \quad (2.17)$$

L'intégration par rapport au temps de l'inégalité précédente conduit à l'inégalité suivante:

$$W_p \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} [W(0) - W(\tau)] \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_V \frac{1}{2} \bar{\rho}_{ij} E_{ijkl}^{-1} \bar{\rho}_{kl} dV \quad (2.18)$$

Cette inégalité implique que l'énergie dissipée plastiquement est bornée pour tout ($\alpha > 1$)

2.5. THEOREME CINEMATIQUE DE KOITER

Le deuxième théorème cinématique d'adaptation est attribué à Koiter [13]. Il repose sur la définition d'une vitesse de déformation plastique admissible $\dot{\epsilon}_{ij}^p(x, t)$ sur un cycle d'intervalle $0 \leq t \leq T$. Elle est caractérisée par l'intégrale suivante :

$$\Delta \epsilon_{ij}^p = \int_0^T \dot{\epsilon}_{ij}^p(t) dt = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i})$$

$$\Delta u_i = \int_0^T \dot{u}_i(t) dt \quad (2.19)$$

$$\Delta u_i = 0 \quad \text{sur } S_u$$

qui constitue un champ de déformation cinématiquement admissible.

Une structure élastoplastique ne s'adapte pas s'il existe une vitesse de déformation plastique admissible $\dot{\epsilon}_{ij}^p(x, t)$ dans l'intervalle du temps $0 \leq t \leq T$ et pour toute combinaison de charges extérieures $F_i(x, t), T_i(x, t)$ à l'intérieur des limites prescrites l'inégalité suivante est strictement vérifiée :

$$\int_0^T \int_V F_i(x, t) \dot{u}_i(x, t) dV dt + \int_0^T \int_{S_T} T_i(x, t) \dot{u}_i(x, t) dS dt > \int_0^T \int_V \sigma_{ij}(x, t) \dot{\epsilon}_{ij}^p(x, t) dV dt$$

$$= \int_0^T \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) dV dt \quad (2.20)$$

Autrement, l'adaptation aura lieu si pour toutes vitesses de déformations plastiques admissibles possibles $\dot{\epsilon}_{ij}^p(x, t)$ durant le programme du chargement dans l'intervalle du temps $0 \leq t \leq T$ l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\int_0^T \int_V F_i(x, t) \dot{u}_i(x, t) dV dt + \int_0^T \int_{S_T} T_i(x, t) \dot{u}_i(x, t) dS dt \leq \int_0^T \int_V \sigma_{ij}(x, t) \dot{\epsilon}_{ij}^p(x, t) dV dt$$

$$= \int_0^T \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) dV dt \quad (2.21)$$

où $\sigma_{ij}(x, t)$ est le tenseur de contraintes associé à la déformation plastique.

2.6. GENERALISATION DU THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION AU CAS DES GEOMATERIAUX (MATERIAUX NON STANDARDS)

Dans ce qui suit nous proposons une généralisation du théorème statique d'adaptation aux cas des matériaux non standards. La démonstration est basée sur le théorème de Radenkovic [23] , (tel qu'il a été modifié par Josselin de Jong [3] (1965) et Salençon [26] (1972)), il existe une fonction $G(\sigma_{ij})$ (fig 2.2) avec les propriétés suivantes :

- $G(\sigma_{ij})$ est une fonction convexe.
- $G(\sigma_{ij}) = 0$ implique $F(\sigma_{ij}) \leq 0$.
- Pour tout σ_{ij} tel que $F(\sigma_{ij}) = 0$, il existe $\bar{\sigma}$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{a-} \quad & \dot{\varepsilon}_{ij}^p \text{ est normal à la surface } G(\sigma_{ij}) = 0 \text{ à } \bar{\sigma}_{ij} \\ \mathbf{b-} \quad & (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

La relation b est vérifiée pour tous états de contraintes se trouvant sur la surface $G(\bar{\sigma}_{ij})$, sa généralisation pour tous états de contraintes $\bar{\sigma}_{ij}$ se trouvant à l'intérieur $G(\bar{\sigma}_{ij}) < 0$ est immédiate.

$$\mathbf{c-} \quad (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.23)$$

En effet pour tous états de contraintes $\bar{\sigma}_{ij}$ tel que $G(\bar{\sigma}_{ij}) < 0$ on peut lui associer un état de contrainte $\bar{\sigma}_{ij}$ sur la surface $G(\bar{\sigma}_{ij}) = 0$ et que le vecteur $\overrightarrow{\bar{\sigma}} \bar{\sigma}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\bar{\sigma}} \bar{\sigma}$. Si la relation (b) est vérifiée, forcément la relation (c) l'est aussi.

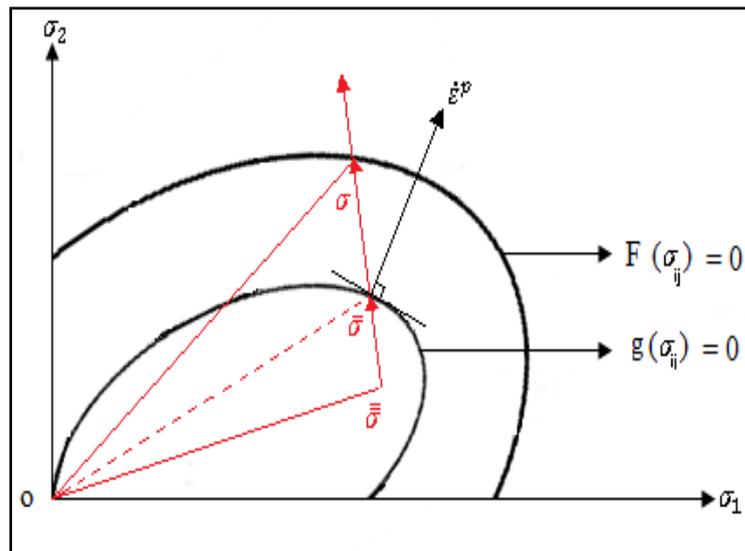


Figure 2.2 – G surface –

2.6.1. Surface caractéristique et G surface

A l'état caractéristique le matériau devient incompressible ce qui entraîne la validité de la règle de normalité. La surface caractéristique qui est une généralisation de la ligne caractéristique est définie en utilisant le critère de Mohr coulomb avec un angle de frottement caractéristique. Dans ce qui suit on identifie la G surface à la surface caractéristique, en effet cette dernière requies toute les conditions. En plus elle est déterminée à partir des constatations expérimentales observées sur les sables à la différence des autres travaux qui déterminent G surface à partir des considérations purement théorique [26].

2.6.2. Enoncé du théorème

Un corps élastoplastique s'adapte, si une distribution de contraintes résiduelles indépendante du temps $\bar{\rho}_{ij}(\mathbf{x})$ peut être trouvée telle que sa superposition avec les contraintes purement élastique donne un état de contrainte de sécurité, c'est -à-dire

$$\sigma_{ij}^e + \bar{\rho}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} \quad (2.24)$$

avec $G(\bar{\sigma}_{ij}) \leq 0$

En tous points du corps élastoplastique et pour toutes combinaisons des charges possibles.

Pour la démonstration, on considère l'énergie de déformation élastique fictive W correspondant aux contraintes auto-équilibrées $(\rho - \bar{\rho})$, où ρ est le champ de contraintes résiduelles actuelles à chaque étape du programme de chargement et $\bar{\rho}$ est un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps pour lequel le critère de Melan est satisfait. L'énergie de déformation élastique fictive W de forme quadratique est définie par :

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) E_{ijkl}^{-1} (\rho_{kl} - \bar{\rho}_{kl}) dV \quad (2.25)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) (\varepsilon_{ij}^{er} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{er}) dV \quad (2.26)$$

La dérivée de W par rapport au temps donne :

$$\dot{W} = \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) E_{ijkl}^{-1} \dot{\rho}_{kl} dV = \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{er} dV \quad (2.27)$$

En tenant compte de l'équation (2.7) l'équation (2.27) devient :

$$\dot{W} = \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) dV \quad (2.28)$$

Le champ de contraintes résiduelles $(\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij})$ est auto-équilibré et la vitesse de déformations $(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^e)$ est cinématiquement admissible, car elle est la différence entre deux vitesses de déformations cinématiquement admissible. Le principe des travaux virtuels permet alors d'écrire :

$$\dot{W} = \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^e) dV = 0 \quad (2.29)$$

et l'équation (2.28) devient :

$$\dot{W} = - \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV \quad (2.30)$$

En tenant compte que $\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^e$ et que $\bar{\rho}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}^e$ avec σ_{ij} l'état de contraintes actuelles et $\bar{\sigma}_{ij}$ l'état de contraintes de sécurité. On obtient finalement :

$$\dot{W} = - \int_V (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \leq 0 \quad (2.31)$$

La quantité W est une fonctionnelle positive et toujours décroissante en raison de l'inégalité (2.22), (2.23), Pour qu'elle ne devienne pas négative, il faut qu'à un moment donné :

$$\dot{w} = - \int_V (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV = 0 \quad (2.32)$$

La dernière équation est satisfaite si l'une des deux alternatives suivantes a lieu :

- a- soit $(\sigma_{ij} \rightarrow \bar{\sigma}_{ij})$, c'est à dire $(\rho_{ij} \rightarrow \bar{\rho}_{ij})$ pour $t > t_\infty$;
- b- soit $\dot{\epsilon}_{ij}^p \rightarrow 0$ pour $t > t_\infty$.

Comme $G(\bar{\sigma}_{ij}) \leq 0$, les deux alternatives (a) et (b) entraînent le comportement élastique de la structure, ce qui est appelé adaptation.

2.7. CONCLUSION

Les théorèmes statique et cinématique de la théorie de l'adaptation sont basés sur le postulat de Drucker (ou le principe du travail plastique maximal de Hill) valable pour les matériaux standards qui vérifient la règle de normalité.

Les géo-matériaux en général et les sols en particulier sont des matériaux compressibles. La déformation plastique est accompagnée d'une variation de volume, et la règle de normalité donne une indication non réaliste sur la direction de la déformation plastique. C'est la raison pour laquelle la modélisation des sols avec une loi d'écoulement associée conduit à une dilatance excessive qui est contraire à la réalité expérimentale.

L'approche la plus souvent utilisée pour orienter correctement cette déformation consiste en la donnée d'un potentiel plastique, en plus de la surface de charge (approche non standard). Dans cette étude on a proposé une autre alternative plus commode mais dans la philosophie est analogue, qui consiste à utiliser la surface caractéristique sur laquelle l'incrément de déformation plastique est normale. C'est dans ce cadre qu'une généralisation du théorème statique d'adaptation aux cas des sols est donnée. Elle est basée sur le théorème de Radenkovic, qui stipule l'existence d'une G-surface pour laquelle la règle de normalité est vérifiée. Dans notre approche nous avons identifié la G-surface, définie à partir des considérations purement théoriques, à la surface caractéristique qui est déterminée à partir des constatations expérimentales. Ce qui rend notre approche plus réaliste et plus fiable que l'approche basée sur l'introduction d'une loi d'écoulement non-associée qui permet juste le contrôle de la dilatance.

CHAPITRE III

***FORMULATION DU PROBLEME
D'ADAPTATION PAR M.E.F***

FORMULATION DU PROBLEME D'ADAPTATION PAR M.E.F.

3.1. INTRODUCTION

La mise en œuvre du théorème statique d'adaptation repose sur la méthode des éléments finis statiquement admissibles en jonction avec un processus d'optimisation non linéaire. Cette dernière consiste à maximiser le facteur de charge tout en veillant à ce que le critère d'écoulement soit respecté en tout point de la structure. La résolution du problème de l'analyse à l'adaptation sous contraintes utilise la méthode du Lagrangien augmenté [22], et nécessite :

- La solution du problème du corps de référence purement élastique correspondant aux mêmes conditions aux limites et mêmes sollicitations que le problème posé ;
- La construction d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps.

3.2. DOMAINE DE CHARGEMENT

On suppose que chaque charge, symboliquement notée P_i , peut varier à l'intérieur d'un intervalle donné:

$$\begin{aligned}
 P_1 \in I_1 &= [P_1^-, P_1^+] = [\mu_1^-, \mu_1^+] P_1 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 P_n \in I_n &= [P_n^-, P_n^+] = [\mu_n^-, \mu_n^+] P_n
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

On note le domaine de toutes les charges extérieures possibles par D défini par :

$$D = \{P/P = \mu_i P_i, \mu_i \in [\mu_i^-, \mu_i^+]\}
 \tag{3.2}$$

où les P_i ($i = 1, \dots, n$) sont les n charges généralisées indépendantes (ex. : les forces de volume, les tractions de surface, les déplacements imposés, variation de température ou la combinaison de ces charges) et les μ_i sont les multiplicateurs de charges avec respectivement μ_i^+ et μ_i^- , les bornes supérieure et inférieure correspondantes.

Le domaine D a la propriété de convexité c'est-à-dire que pour tous P_1 et P_2 appartenant à D , toutes les valeurs de P définies par :

$$\begin{aligned} P \\ = \theta P_1 + (1 - \theta) P_2, \quad \theta \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.3)$$

appartiennent aussi à D . L'enveloppe convexe du domaine D est définie par

$$\mathfrak{S} = \left\{ P = \sum_{i=1}^m \mu_i P_i, \quad \mu_i = \mu_i^- \text{ ou } \mu_i^+ \right\} \quad (3.4)$$

Chaque élément P de \mathfrak{S} peut s'écrire comme :

$$P = \sum_{i=1}^m \theta_i P_i \quad (3.5)$$

Où

$$\sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0 \quad \forall i \quad (3.6)$$

avec $m = 2^n$ et les P_i , les points de \mathfrak{S} , sont les points anguleux de D . Le cas bidimensionnel est montré sur la figure 3.1.

Théorème : L'adaptation peut avoir lieu dans le domaine de chargement D si et seulement si on a adaptation dans son enveloppe convexe \mathfrak{S} . Sa conséquence est que, pour un domaine de variation de charges donné, s'il y a adaptation pour les points anguleux du domaine \mathcal{P}_i , alors il y a adaptation pour tous les points du domaine [21].

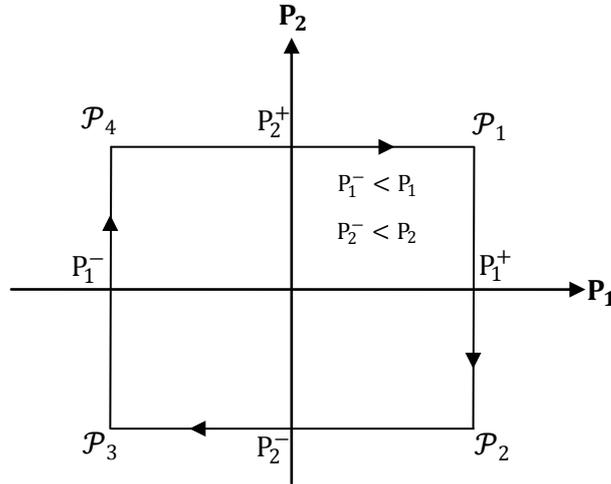


Figure 3.1 – domaine de variation des charges –

3.3. FORMULATION ELEMENTS FINIS

3.3.1. Principe du minimum de l'énergie complémentaire totale

Pour le calcul de la réponse élastique on utilise la méthode des éléments finis statiquement admissible, basée sur le principe du minimum de l'énergie complémentaire. L'énergie complémentaire U_c d'une structure est donnée par la somme de l'énergie complémentaire de déformation (U^*) et du potentiel des forces extérieures (V^*). En négligeant les forces de volume U_c est définie par :

$$U_c = U^* + V^* \quad (3.7)$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{(V)} \sigma_{ij} E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} dV - \int_{S_u} \bar{T}_i \bar{u}_i dS \quad (3.8)$$

où S_u est la frontière sur laquelle les déplacements \bar{u}_i sont imposés, et \bar{T}_i représente les tractions de surface correspondantes. Cette fonctionnelle est minimale à l'équilibre, c'est-à-dire que :

$$\delta U_c = \delta U^* + \delta V^* = 0 \quad (3.9)$$

et

$$\delta^2 U_c = \delta^2 U^* + \delta^2 V^* \geq 0 \quad (3.10)$$

Dans ce qui suit on considère que les déplacements \bar{u}_i imposés sur la frontières S_u sont nuls et l'expression de U_c se réduit à :

$$U_c = U^* = \frac{1}{2} \int_{(V)} \sigma_{ij} E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} dV \quad (3.11)$$

Dans le cas des problèmes plans le champ de contrainte dépend uniquement de x et y , l'intégration sur le volume peut être remplacée par une intégration sur la surface S dans le plan $x - y$, on obtient alors :

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{(S)} \sigma_{ij} E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} t dS \quad (3.12)$$

où t représente l'épaisseur ($dV = t dS$).

3.3.2. Fonction de contrainte d'Airy

La formulation des éléments s'effectue à partir d'hypothèses sur les champs de contraintes. Il est nécessaire de choisir ces champs de manière à ce qu'ils vérifient les équations différentielles d'équilibre. Une solution pratique pour définir des champs de contraintes admissibles consiste en l'utilisation de fonctions potentielles, ou fonctions de contraintes. Ces fonctions sont des expressions qui dérivées selon certaines règles, donnent des composantes de contraintes qui vérifient automatiquement les conditions d'équilibre.

L'état de contrainte plane ou de déformation plane n'admet qu'une seule de ces fonctions, appelée fonction de contrainte d'Airy notée $\Phi(x, y)$, dont la définition est la suivante :

$$\sigma^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}] = [\Phi_{,22}, \Phi_{,11}, -\Phi_{,12}] \quad (3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{11} &= (\partial^2 \Phi / \partial y^2) = \Phi_{,22} \\ \sigma_{yy} = \sigma_{22} &= (\partial^2 \Phi / \partial x^2) = \Phi_{,11} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{12} = (\partial^2 \Phi / \partial x \partial y) = -\Phi_{,12}$$

La discrétisation consiste à découper la structure (domaine V) en éléments finis (sous domaines V^e) de forme géométrique simple. Dans chaque élément, on définit une approximation de la fonction de contrainte d'Airy par :

$$\Phi(x, y) = N^T \Phi^e \quad (3.15)$$

où N et Φ^e désignent respectivement les vecteurs de fonctions de forme et les fonctions de contraintes aux nœuds de l'élément. Le vecteur contrainte donné par l'équation (3.13) peut s'écrire :

$$\sigma^{eT} = [N_{,22}^T, N_{,11}^T, -N_{,12}^T] \Phi^e = (N'')^T \Phi^e \quad (3.16)$$

où N'' représente le vecteur des dérivées secondes de N . En tenant compte de l'équation (3.16) l'expression de l'énergie complémentaire (3.12) devient :

$$U_c^e = \frac{1}{2} (\Phi^e)^T f^e \Phi^e \quad (3.17)$$

Avec

$$f^e = \int_{(S)} (N'')^T E_{ijkl}^{-1} N'' t dS \quad (3.18)$$

Avec

f^e matrice de flexibilité élémentaire.

L'énergie complémentaire totale U_c est donnée par :

$$U_c = \sum_{e=1}^n U_c^e = \frac{1}{2} \Phi^T f \Phi \quad (3.19)$$

où la matrice de flexibilité f et le vecteur Φ sont obtenus par la superposition de toutes les matrices de flexibilités élémentaire f^e et de tous les vecteurs élémentaires Φ^e .

3.3.3. Continuité des contraintes inter-éléments

La continuité des contraintes normales et de cisaillement inter-éléments doit être assurée pour que le principe du minimum de l'énergie complémentaire totale soit valide.

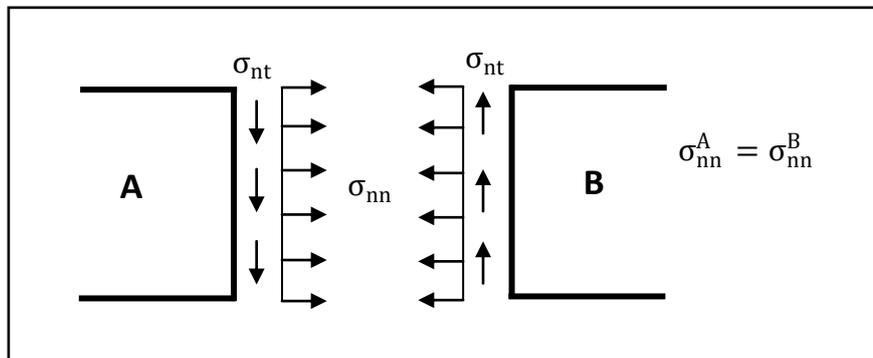


Figure 3.2 – Continuité des contraintes –

$$\sigma_{nn}^A = \sigma_{nn}^B \Rightarrow [\partial^2 \Phi / \partial t^2]^A = [\partial^2 \Phi / \partial t^2]^B \quad (3.20)$$

$$\sigma_{nt}^A = \sigma_{nt}^B \Rightarrow [\partial^2 \Phi / \partial t \partial n]^A = [\partial^2 \Phi / \partial t \partial n]^B \quad (3.21)$$

La nécessité de satisfaire les conditions d'équilibre inter-élément qui exigent la continuité de Φ et de ses dérivées d'un élément à l'autre, est assurée par l'utilisation des polynômes d'interpolation bicubique d'Hermite.

3.3.4. Approximation de la fonction d'Airy par les polynômes d'Hermite

L'approximation de la fonction de contrainte d'Airy $\Phi(x,y)$ est de la forme (GALLAGHER & DHALLA [5]) :

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

où, les paramètres inconnus a_{ij} sont au nombre de 16. Ces derniers sont remplacés par les paramètres Φ_{ij} . Lesquels permettent une identification mécanique. Ils sont donnés par la valeur de la fonction Φ , sa dérivée première, $\Phi_{,x}$ et $\Phi_{,y}$ et sa dérivée seconde $\Phi_{,xy}$ aux points nodaux de chaque élément.

$$\Phi(x,y) = \left[[N \Phi]^T, [N \Phi_{,x}]^T, [N \Phi_{,y}]^T, [N \Phi_{,xy}]^T \right] \{\Phi\} \quad (3.23)$$

avec

$$[N \Phi]^T = [N_1(x) N_1(y), N_2(x) N_1(y), N_2(x) N_2(y), N_1(x) N_2(y)]$$

$$[N \Phi_{,x}]^T = [N_3(x) N_1(y), N_4(x) N_1(y), N_4(x) N_2(y), N_3(x) N_2(y)]$$

$$[N \Phi_{,y}]^T = [N_1(x) N_3(y), N_2(x) N_3(y), N_2(x) N_4(y), N_1(x) N_4(y)]$$

$$[N \Phi_{,xy}]^T = [N_3(x) N_3(y), N_4(x) N_3(y), N_4(x) N_4(y), N_3(x) N_4(y)]$$

Les fonctions de forme N_i sont données par les polynômes d'Hermite suivants:

$$\begin{aligned}
 N_1(x) &= (1 - 3S^2 + 2S^3) & N_1(y) &= (1 - 3t^2 + 2t^3) \\
 N_2(x) &= (3S^2 - 2S^3) & N_2(y) &= (3t^2 - 2t^3) \\
 N_3(x) &= a S (S - 1)^2 & N_3(y) &= b t (t - 1)^2 \\
 N_4(x) &= a S (S^2 - S) & N_4(y) &= b t (t^2 - t) \\
 S &= \frac{x}{a} & t &= \frac{y}{b}
 \end{aligned}$$

Le vecteur Φ contient tous les paramètres de fonctions de contraintes aux nœuds :

$$\begin{aligned}
 \{\Phi\} &= \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_{,x1}, \Phi_{,x2}, \Phi_{,x3}, \Phi_{,x4}, \Phi_{,y1}, \Phi_{,y2}, \Phi_{,y3}, \Phi_{,y4} \\
 &, \Phi_{,xy1}, \Phi_{,xy2}, \Phi_{,xy3}, \Phi_{,xy4}\}^T \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Les nombres 1, 2, 3, 4, sont relatifs aux nœuds i, j, k et l respectivement (voir figure 3.3).

3.3.5. Prise en compte des conditions aux limites par les multiplicateurs de Lagrange

En tenant compte de (3.13) et (3.14) les équations d'équilibre sur la frontières où des tractions de surface sont prescrites sont données par :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{,22} n_1 - \Phi_{,12} n_2 &= T_1 \\
 &\text{sur } S_T^e \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

$$-\Phi_{,12} n_1 + \Phi_{,11} n_2 = T_2$$

On va expliquer l'implémentation des conditions aux limites statique sur un exemple.

Considérons un élément (i-j-k-l) lequel est soumis le long de son côté (i-j) à une contrainte normale $\sigma_y(x)$ et à une contrainte de cisaillement $\sigma_{xy}(x)$, comme il est montré sur la (figure 3.3). En tout point de ce côté on a :

$$\Phi_{,11} = \Phi_{,xx} = \sigma_{yy}(x) \quad (3.26)$$

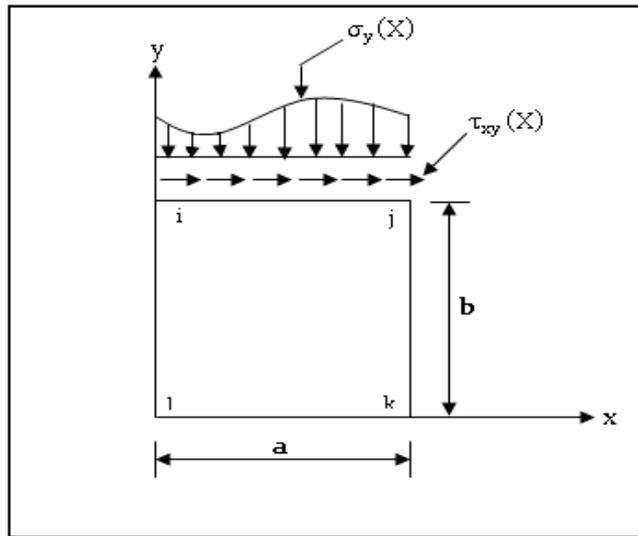


Figure 3.3 – cas d'un chargement applique sur la frontière –

En intégrons deux fois l'équation (3.26) et en évaluant les constantes d'intégration en fonctions des valeurs de Φ et $\Phi_{,x}$ aux extrémités du côté (i-j) (c'est-à-dire $\Phi(i)$, $\Phi(j)$, $\Phi_{,x}(i)$, $\Phi_{,x}(j)$), il résulte :

$$\int_0^a \sigma_{yy}(x) dx = -\Phi_{,x}(i) + \Phi_{,x}(j) \tag{3.27}$$

$$\int_0^a \int_0^x \sigma_{yy}(s) ds dx = -\Phi(i) + \Phi(j) - a \Phi_{,x}(i)$$

L'évaluation des contraintes de cisaillements aux extrémités du côté (i-j) donne les deux conditions de contraintes suivantes :

$$\sigma_{xy}(i) = -\Phi_{,xy}(i) \tag{3.28}$$

$$\sigma_{xy}(j) = -\Phi_{,xy}(j) \tag{3.29}$$

Une troisième condition s'ajoute en intégrant la contrainte de cisaillement le long du coté (i-j):

$$\Phi_{,y}(i) - \Phi_{,y}(j) = \int_0^a \sigma_{xy}(x) dx \quad (3.30)$$

L'ensemble des équations qui proviennent des conditions aux limites constituent un système d'équations de contraintes, qui peut se mettre sous forme matricielle suivante :

$$C_{n \times n} \Phi_{n \times 1} = P_{m \times 1} \quad (3.31)$$

avec m = nombre d'équations de contraintes, n = le nombre de paramètres inconnus (degrés de liberté), et P le vecteur des charges extérieures résultant à partir de l'intégration des tractions de surface.

3.3.6. Calcul de la réponse purement élastique

L'addition des contraintes d'optimisation avec les multiplicateurs de Lagrange λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) à la fonctionnelle de l'énergie complémentaire totale donne une fonction de Φ_i, λ_i à optimiser :

$$F(\Phi, \lambda) = \frac{1}{2} \Phi f \Phi^T + \lambda (C \Phi^T - P^T) \quad (3.32)$$

La variation de l'équation. (3.32) par rapport à Φ et λ conduit à un système d'équations linéaires :

$$\begin{pmatrix} f & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

On remarque que la partition inférieure est tout simplement constituée des équations de contraintes. Si f n'est pas singulière, on pourra résoudre ces équations directement par partition. La partition supérieure nous donne :

$$\{\Phi\} = -[f]^{-1}[C]^T\{\lambda\} \quad (3.34)$$

et de la partition inférieure on obtient :

$$\{\Phi\} = [C]^{-1}\{P\} \quad (3.35)$$

En réarrangeant les équations (3.34) et (3.35) on obtient

$$\{\Phi\} = -[f]^{-1}[C]^T\{\lambda\} = [C]^{-1}\{P\} \quad (3.36)$$

$$\{\lambda\} = -([C][f]^{-1}[C]^T)^{-1}\{P\} \quad (3.37)$$

La substitution de $\{\lambda\}$ dans l'équation (3.34) nous permet de déterminer les paramètres de la solution purement élastique $\{\Phi^o\}$. Ces paramètres sont utilisés par la suite pour la détermination des contraintes purement élastique.

3.3.7. Calcul de la réponse plastique : Détermination du champ de contrainte résiduelle

Le champ de contraintes résiduelles vérifié les équations d'équilibre homogènes :

$$\bar{p}_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } V \quad (3.38)$$

$$n_j \bar{p}_{ij} = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (3.39)$$

En tenant compte de l'équation (3.25) l'équation (3.39) peut s'écrire :

$$\Phi_{,22} n_1 - \Phi_{,12} n_2 = 0 \quad \text{sur } S_T^e \quad (3.40)$$

$$-\Phi_{,12} n_1 + \Phi_{,11} n_2 = 0$$

En rapprochant (3.16) et (3.40), il résulte :

$$\left[\begin{pmatrix} N_{,22}^T \\ -N_{,12}^T \end{pmatrix} n_1 + \begin{pmatrix} -N_{,12}^T \\ N_{,11}^T \end{pmatrix} n_2 \right] \Phi^e = 0 \quad (3.41)$$

Par sommation sur tous les éléments, on obtient un système d'équations de contraintes :

$$C \bar{\Phi} = 0 \quad (3.42)$$

Les éléments du vecteur $\bar{\Phi}$ ne sont pas linéairement indépendants. On applique alors une procédure d'élimination de Gauss-Jordan pour déterminer le vecteur Φ^r dont les éléments sont linéairement indépendants. L'équation (3.42) est alors équivalente à :

$$C \bar{\Phi} = C X \Phi^r \quad \text{avec } C X = 0 \quad (3.43)$$

Le vecteur Φ^r représente les paramètres de la solution plastique, qui sont utilisés pour le calcul des contraintes résiduelles.

3.3.8. Facteur de charge à l'adaptation

Le facteur de charge à l'adaptation α_{SD} , est déterminé par la solution du problème d'optimisation

$$\alpha_{SD} = \max \alpha \quad (3.44)$$

avec α comme fonction objective soumise aux contraintes d'inégalités :

$$F(\sigma_{ij}) = F(\alpha \sigma_{ij}^e(P) + \bar{\rho}_{ij}) < 0 \quad \forall P \in D \quad (3.45)$$

représentés par le critère de plasticité $F(\sigma_{ij})$ testé en différents points. Le lagrangien associé en absence de contraintes d'égalités est donnée par :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j (b_j(x) - q_j(x)) \quad (3.46)$$

où $f(x)$ représente la fonction objective, $(b_j - q_j)$ les contraintes d'inégalité et les μ_j sont les multiplicateurs de Kuhn Tucker (pour plus de détails voir annexe B).

Pour combler les carences de la méthode de Lagrange, et pour avoir une meilleure convergence on a utilisé la méthode du Lagrangien augmenté. Cette technique combine l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange μ_j généralisés et des paramètres de pénalité ($w_i > 0$).

Le Lagrangien augmenté est donné par :

$$L_a(x, \mu, w) = L(x, \mu) - w_2 \sum_{j=1}^m (b_j - q_j(x))^2 - w_3 \sum_{k=1}^n (b_k - q_k(x))^2 \quad (3.47)$$

qui dans nôtre cas prendra la forme suivante :

$$L(\Phi, \mu, \alpha) = \alpha - \sum_{j=1}^m \mu_j q_j(\alpha, \Phi) - w_2 \sum_{j=1}^r (q_j(\alpha, \Phi))^2 - w_3 \sum_{k=1}^n (q_k(\alpha, \Phi))^2 \quad (3.48)$$

avec m le nombre de contrainte d'inégalité égale au nombre de points tests, r le nombre de contraintes active ($q_j - b_j \geq 0$) et n le nombre de contrainte non active ($q_k - b_k < 0$).

Pour le calcul de la charge limite de l'adaptation on a utilisé le critère de Mohr- Coulomb, qui est le mieux adapté pour l'étude du comportement rhéologique des sols. La contrainte d'inégalité est donnée par :

$$q_j(\alpha, \Phi) = \sigma_1 - \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - 2 C \operatorname{tg} \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.49)$$

où ϕ est l'angle de frottement et C la cohésion.

3.4. CONCLUSION

Pour l'étude de l'adaptation on a utilisé des éléments finis statiquement admissible en couplage avec la programmation mathématique non-linéaire. L'utilisation de la méthode des pénalités seule présente des difficultés numériques ainsi que l'utilisation de la méthode de Lagrangien seule présente des problèmes de convergence. Pour combler cette carence on a utilisé la méthode du lagrangien augmenté qui combine l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange et des coefficients de pénalité.

La nécessité de satisfaire les conditions d'équilibre inter-élément qui exige la continuité de la fonction d'Airy $\Phi(x,y)$ et de ses dérivées d'un élément à l'autre, est assurée par l'utilisation des polynômes d'interpolation bicubique d'Hermite.

CHAPITRE IV

***APPLICATIONS NUMERIQUES AUX
PROBLEMES GEOTECHNIQUES***

APPLICATIONS NUMÉRIQUES AUX PROBLÈMES GÉOTECHNIQUES

4.1. INTRODUCTION

Le présent chapitre se propose de mettre en évidence numériquement la méthode de calcul exposée au chapitre 3, en utilisant le code de calcul par éléments finis développé initialement par GROSS-WEEG [7] Pour l'étude des plaques et coques, puis améliorer par GIESE [6] pour le calcul élastique parfaitement plastique des massifs de sols. Dans ce qui suit nous considérons le problème de la capacité portante d'un massif de sol. Ce problème même dans le cas le plus simple est intéressant à plusieurs titres. En effet, c'est un problème pratique, il se pose lorsqu'il s'agit de réaliser des ouvrages de natures différentes telles que les routes et les voies ferrées. Notre application consiste en particulier à examiner l'influence des paramètres suivants sur la charge limite d'adaptation:

- influence de la cohésion;
- influence de l'angle de frottement caractéristique;
- influence des contraintes de cisaillement.

4.2. EXPLOITATION NUMÉRIQUE

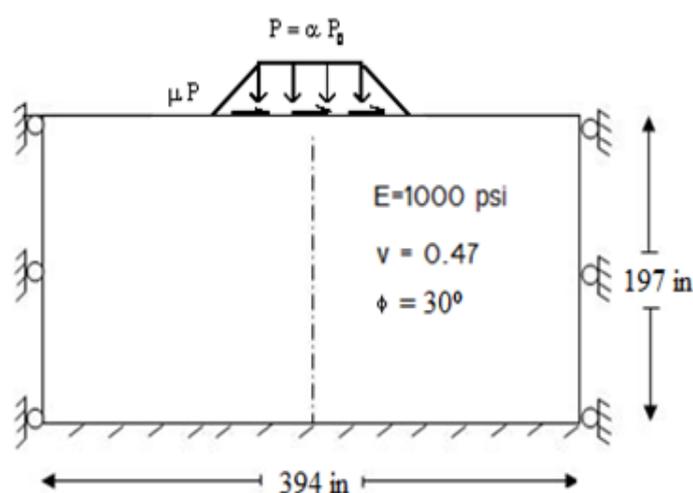


Figure 4.1 – massif de sol sous chargement variable et répété –

Dans cette étude, nous limiterons notre analyse au cas d'un sol sec dont le comportement est élastique parfaitement plastique. Le critère adopté est celui de Mohr coulomb avec une loi d'écoulement non associée.

Dans ce qui suit nous calculons le facteur de charge α ($\alpha = P/P_0$) pour une charge qui varie entre 0 et une charge maximale fixe (calcul d'adaptation) par un processus d'optimisation où α est la fonction objective à optimiser sous contraintes qui dérivent du critère d'écoulement, ces dernières doivent être vérifiées en des points tests pour notre cas, nous avons considéré 9 points tests par élément. Le nombre de points tests doit être minimisé étant donné que les contraintes d'optimisation sont proportionnelles au nombre de points tests et que le coût de calcul augmente en conséquence. Par la suite à fin de valider nos résultats nous comparons les facteurs de charge obtenus par la théorie d'adaptation à ceux obtenus par la théorie d'analyse limite.

Le sol est soumis à une charge verticale répartie uniformément et aux contraintes de cisaillement, sous conditions de déformation plane. La figure 4.1 illustre les conditions aux limites.

4.3. L'INFLUENCE DE LA COHESION SUR LA CHARGE LIMITE D'ADAPTATION

Dans cette partie nous étudions l'influence de la cohésion sol sur la charge limite d'adaptation. Pour cela nous considérons les conditions aux limites de la figure 4.1.

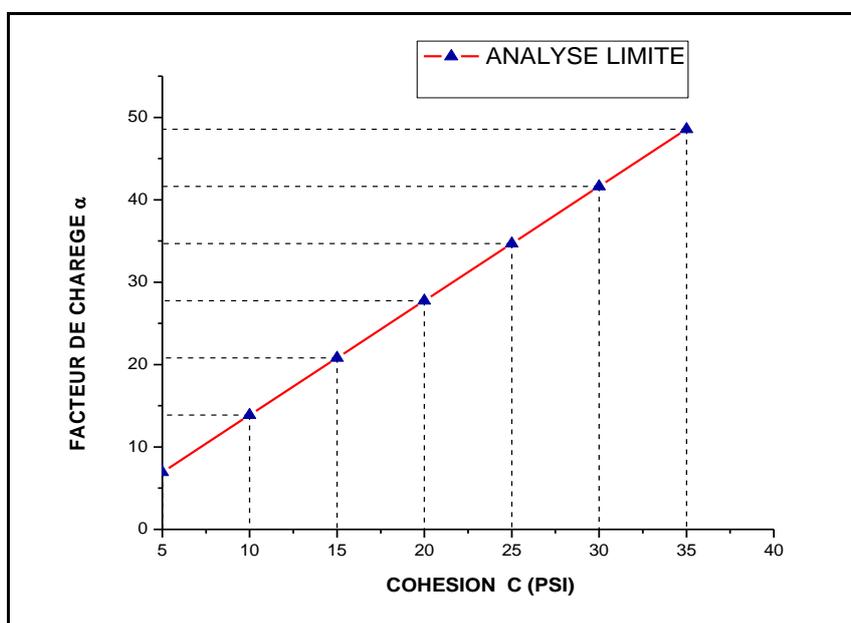
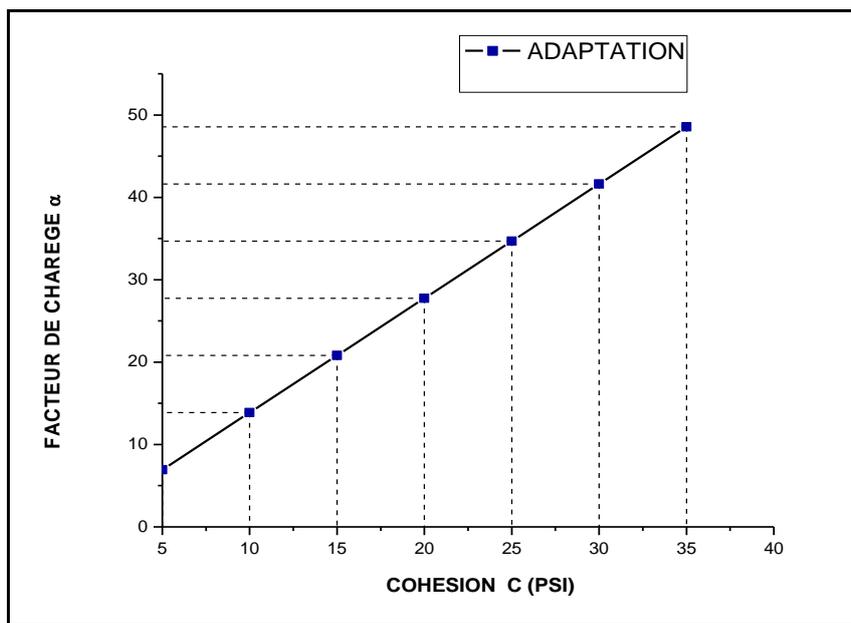


Figure 4.2 – Influence de la cohésion sur la charge limite ($\phi_c = 0^\circ$) –

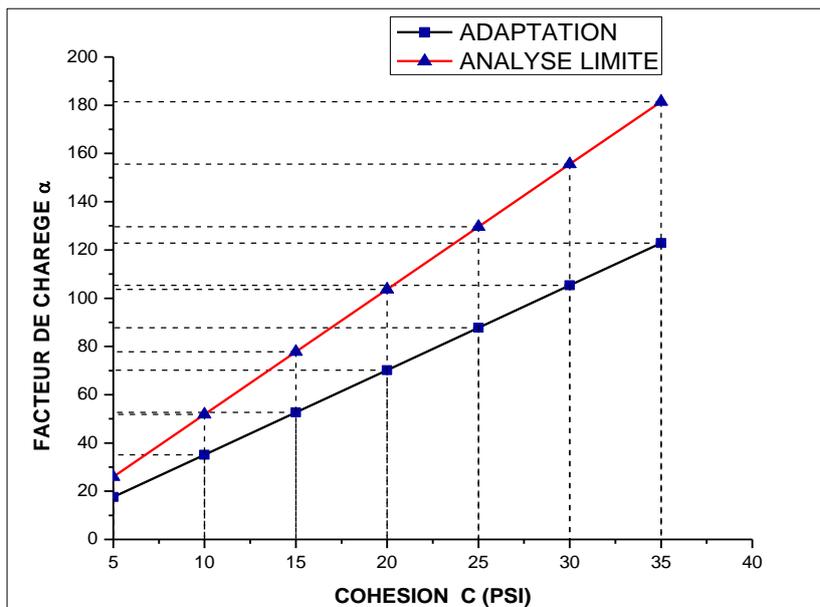


Figure 4.3 – Influence de la cohésion sur la charge limite ($\phi_c = 15^\circ$) –

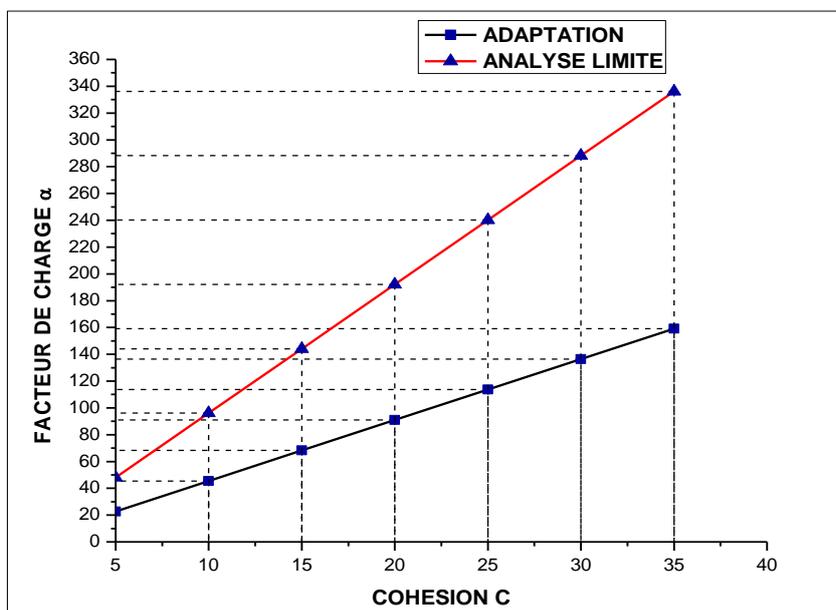


Figure 4.4 – Influence de la cohésion sur la charge limite ($\phi_c = 30^\circ$) –

4.4. L'INFLUENCE DE L'ANGLE DE FROTTEMENT CARACTÉRISTIQUE SUR LA CHARGE LIMITE D'ADAPTATION

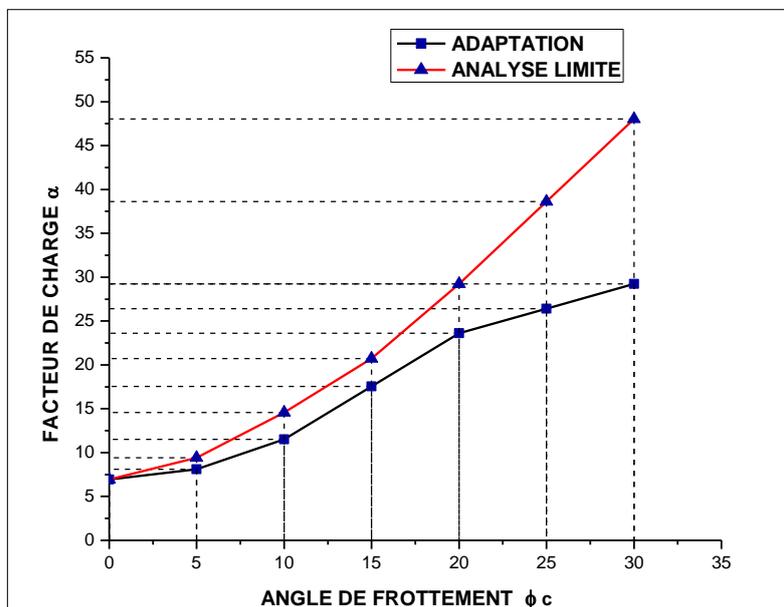


Figure 4.5 – Influence de l'angle de frottement ϕ_c sur la charge limite ($C = 5$) –

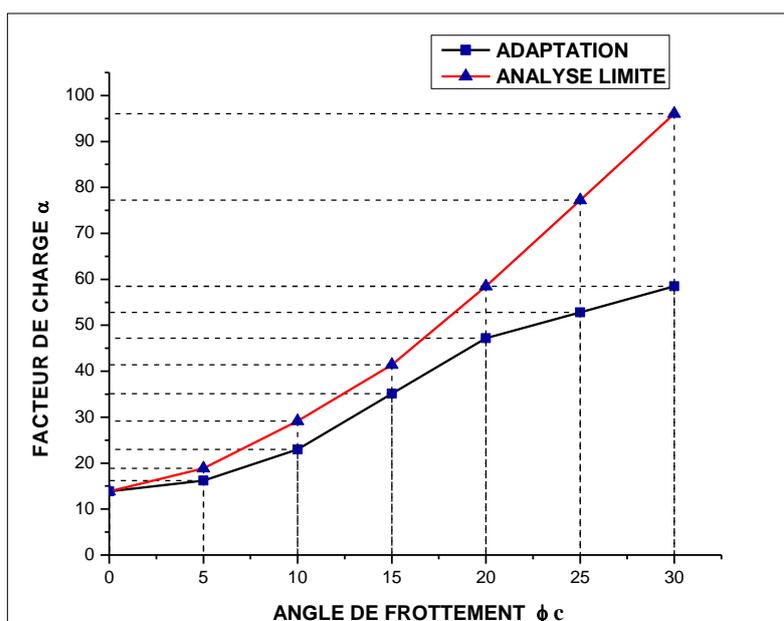


Figure 4.6 – Influence de l'angle de frottement ϕ_c sur la charge limite ($C = 10$) –

D'après les figures une augmentation significative de la charge limite résulte de l'accroissement de la cohésion (figures 4.2, 4.3, 4.4). La relation entre le facteur de charge et la cohésion est linéaire. Les mêmes constatations sont observées pour le cas où l'on fait varier l'angle de frottement caractéristique (figures 4.5, 4.6) sauf que dans ce cas la relation entre le facteur de charge et l'angle de frottement n'est pas linéaire.

Il découle à partir des résultats obtenus qu'un dimensionnement basé sur l'analyse limite ne garantit pas la sécurité des structures si les charges sont variables ou simplement cycliques.

4.5. ETUDE DE L'INFLUENCE DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT

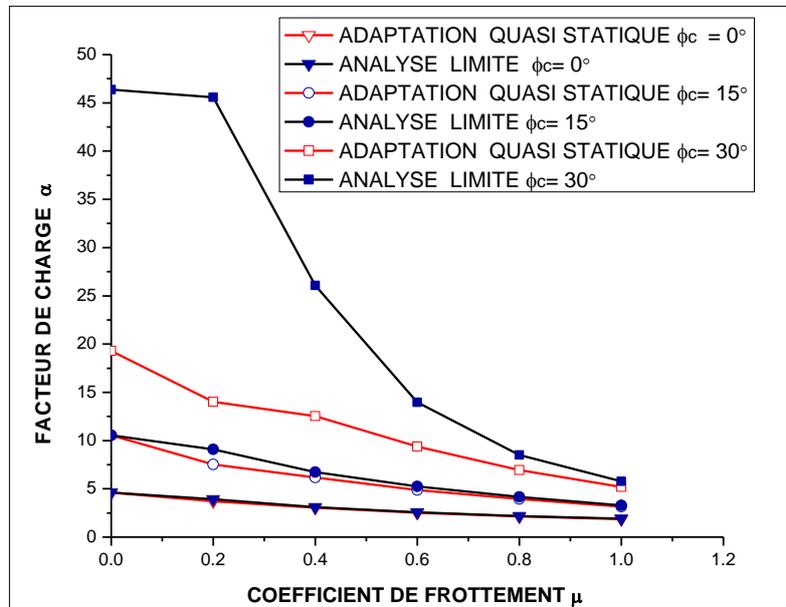


Figure 4.7 – Influence du coefficient de frottement μ sur la charge limite ($C=5$, $\phi_c = 0^\circ$, $\phi_c = 15^\circ$, $\phi_c = 30^\circ$) –

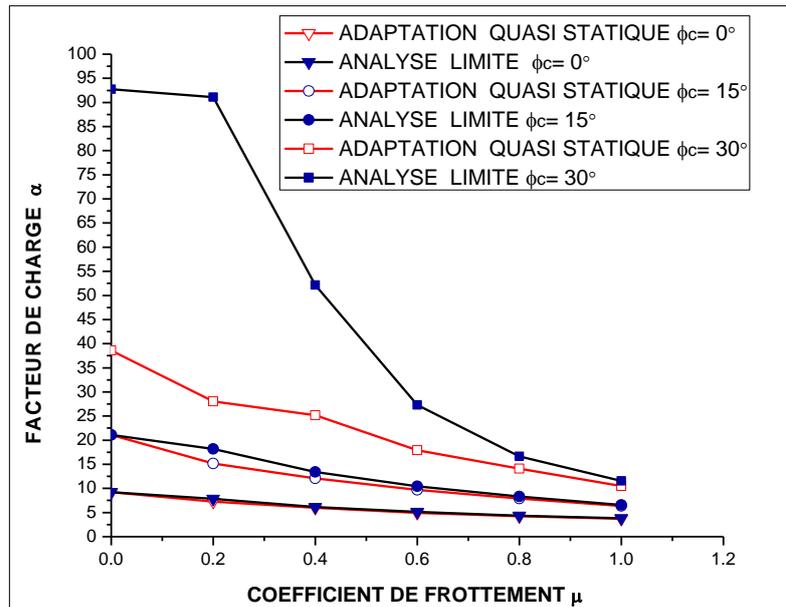


Figure 4.8 – Influence du coefficient de frottement μ sur la charge limite ($C=10$, $\phi_c = 0^\circ$, $\phi_c = 15^\circ$, $\phi_c = 30^\circ$) –

On peut constater sur les figures 4.7 et 4.8 que les contraintes de cisaillement représentés par le coefficient de frottement μ ($\mu = \text{charge axiale}/\text{charge tangentielle}$) exercent une influence considérable sur la résistance du sol pour les petites valeurs de μ la rupture se produit à l'intérieur du terrain (à une certaine profondeur en dessous de la surface). Pour des valeurs plus grandes de μ , la rupture s'initialise en surface, ce qui justifie la décroissance de la charge limite quand le coefficient de frottement μ croit.

4.5.1. Étude comparative entre l'approche basée sur la surface caractéristique et l'approche basée le contrôle de dilatance

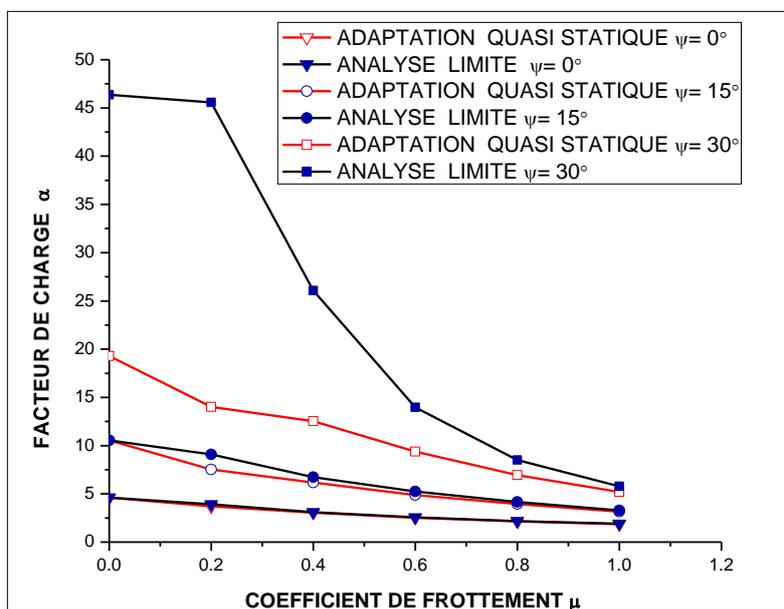


Figure 4.9 – Influence du coefficient de frottement μ sur la charge limite (C=5, ψ= 0°, ψ=15°, ψ=30°) –

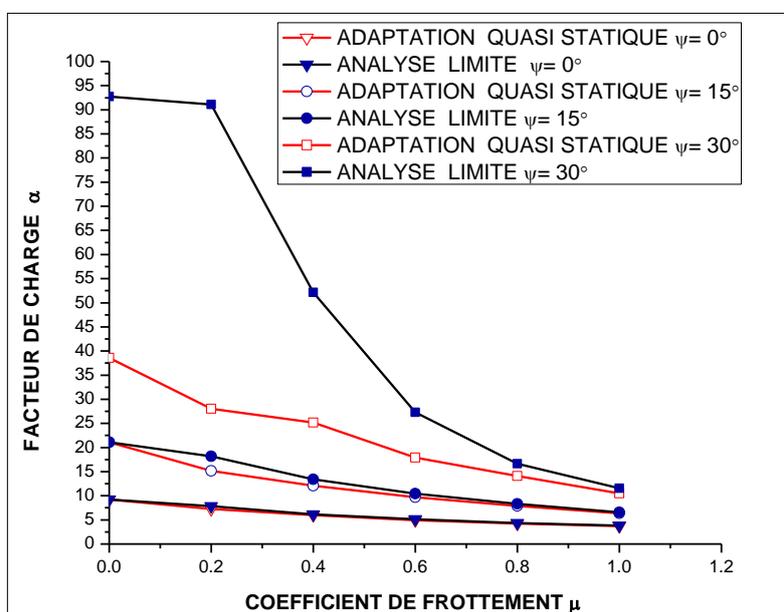


Figure 4.10 – Influence du coefficient de frottement μ sur la charge limite (C=10, ψ= 0°, ψ=15°, ψ=30°) –

D'après les figures 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, il apparaît que les résultats obtenus par les deux approches sont identiques.

Du point de vue physique l'approche basée sur la surface caractéristique est plus réaliste et plus fiable que l'approche basée sur l'introduction d'une loi d'écoulement non associée qui permet juste le contrôle de la dilatance en vue que :

Pour $\psi = \phi$

- La normalité est vérifiée ;
- L'écoulement plastique est accompagné par une variation de volume excessive prouvée par l'expérience

Pour $\psi = 0$

- La déformation se fait par glissement pur;
- L'écoulement plastique se fait sans changement de volume;
- La règle de normalité n'est pas valable.

Pour $0 < \psi < \phi$

- La règle d'écoulement n'est pas vérifiée;
- La construction de G-surface se fait à partir des considérations purement théoriques.
- La stabilité du matériau et l'unicité de la solution ne sont pas assurées.

L'approche basée sur la surface caractéristique décrit de manière relativement satisfaisante le comportement des sols sous chargement cyclique en vue que :

- La déformation volumique est relativement faible, le comportement du matériau est contractant ;
- Le postulat de stabilité de Drucker est vérifié ;
- G-surface est identifiée à la surface caractéristique qui est déterminée à partir des constatations expérimentales.
- L'unicité et la stabilité du matériau sont assurées.

CONCLUSION

GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Les théorèmes d'adaptations ont fait l'objet de plusieurs extensions, études, et applications pour le cas des structures. Cependant leurs applications pour le cas des sols restent difficiles et se font rares. En effet Le comportement du sol est beaucoup plus complexe dont une modélisation réaliste nécessite la prise en compte : de la contractance-dilatance, des déformations volumiques, d'une loi d'écoulement non associée, et de l'énergie dissipée au cours des cycles.

Dans ce travail nous avons proposé une généralisation du théorème statique d'adaptation aux cas des sols. Elle est basée sur le théorème de Radenkovic et sur le concept de l'état caractéristique, qui est fondamental pour l'étude du comportement des sols sous chargement monotone et cyclique. Ce concept est déterminé à partir des constatations expérimentales ce qui rend notre approche plus réaliste et plus fiable. L'extension est donnée dans le cadre des hypothèses suivantes :

- petites déformations;
- évolution quasi-statique;
- comportement élastoplastique parfait.

L'application du théorème statique d'adaptation consiste à construire un champ de contraintes résiduelles paramétriques. En altérant ce dernier de telle façon qu'on maximise le facteur de charges α , tout en veillant à ce que le critère ne soit pas violé.

Construire une famille de paramètres appropriés, de champs de contraintes auto-équilibrées est le problème central de la théorie de l'adaptation. Il sera construit au moyen de la technique des éléments finis.

Nous avons utilisé des éléments finis statiquement admissibles pour le calcul de la réponse purement élastique ainsi que pour la construction du champ de contrainte résiduelle. L'utilisation de fonctions de contrainte d'Airy assurent automatiquement l'équilibre et l'utilisation des polynômes d'Hermite assurent la continuité inter - élément ce qui conduit à une meilleure estimation de la charge limite d'adaptation.

La procédure numérique est basée sur le couplage de la méthode des éléments finis avec la programmation mathématique non-linéaire. L'utilisation de la méthode des pénalités seule présente des difficultés numériques et l'utilisation de la méthode de Lagrangien seule présente des problèmes de convergence. Pour combler cette carence on a utilisé la méthode du lagrangien augmenté qui combine l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange et des coefficients de pénalité.

L'approche développée est appliquée pour l'étude d'un massif de sol sous condition de déformation plane. Le sol est modélisé comme un matériau élastique parfaitement plastique obéissant au critère de Mohr Coulomb. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par la théorie de l'adaptation et de l'analyse limite. La mise en œuvre de solutions numériques nécessite la résolution des étapes suivantes :

- la solution du problème du corps de référence purement élastique correspondant au même chargement et aux mêmes conditions aux limites que le problème réel posé ;
- la construction d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps ;
- la détermination du multiplicateur de charge à l'adaptation par un processus d'optimisation.

Pour les perspectives de recherches nous proposons :

- couplage de la théorie de l'adaptation avec la théorie de contrainte-dilatance de ROWE;
- extension du théorème statique aux cas des matériaux non-standards avec dégradation cyclique;
- application de la théorie de l'adaptation pour l'étude des fondations marines : sol saturé.

REFERENCES

REFERENCES

- [1] **BLEICH, H.**, "Über die Bemessung statisch unbestimmter Stabwerke unter der Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes", Bauingenieur, 13, 261-267, (1932).
- [2] **CHEN, W.F.**, "Limit Analysis and Soil Plasticity", Elsevier, 1975.
- [3] **DE JOSSELING DE JONG, G.**, "Lower bound collapse theorem and lack of normality of strain rate to yield surface for soils ".proc .I.U.T.A.M. Symp. On Rheology and soil Mechanics, Grenoble, 1964, Springer, Berlin, (1966).
- [4] **DRUCKER, D.C.**, "On the Postulate of Stability of Materials in the Mechanics of Continua", J. Mechanic, 3, pp.235-249, 1964.
- [5] **GALLAGHER, R. H. & DHALLA, A. K.**, "Direct Flexibility Finite Element Elastoplastic Analysis", Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A, (1975).
- [6] **GIESE, H.**, "On The application of shakedown –theory in soil Mechanics", Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1988.
- [7] **GROSS-WEEG, J.**, "Zum Einspielverhalten von Flachentragwerken", Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik N°58, Ruhr-Universität Bochum, 1988.
- [8] **HABIB, P. & LUONG, M. P.**, "Sols pulvérulents sous chargement cycliques", Séminaire Matériaux et Structures Sous Chargement Cycliques, 28-29 septembre 1978, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau.
- [9] **HALPHEN, B. & NGUYEN, QUOC SON**, "Sur les matériaux standards généralisés", J. Mec., 14, N° 1, 39-63, (1975).
- [10] **HAMADOUCHE, M. A .**, "Analyse dynamique des structures inélastiques par la théorie de l'adaptation", (1997).
- [11] **HICHER, P.Y. & SHAO, J.F.**, "Elastoplasticité des sols et des roches", modèles de Comportement des sols et des roches 1, Paris, Hermès science publications, 2002.

-
- [12] **HILL, R** "The mathematical theory of plasticity", Oxford eds., (1950).
- [13] **KOITER, W. T.**, "A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures", Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet. B59 (1956), 24 - 34.
- [14] **LUONG, M. P.**, "Phénomènes cycliques dans les sols pulvérulents", Revue Française de Géotechnique, Vol. 10, pp. 39-53, (1980).
- [15] **LUONG, M. P.**, " Etat caractéristique du sol", C.R. Ac. Sc., Paris, t. 287, série B, 305 (1978).
- [16] **LUONG, M. P.**, "Comportements cycliques des sols pulvérulents", C.R. Ac. Sc., Paris, t. 287, série B, 313 (1978).
- [17] **MAGNAN, J.P.**, " Résistance au cisaillement", C 216. (1991). Traité Construction, volume C 2I.
- [18] **MAGNAN, J.P. & MESTAT, P.**, " Lois de comportement et modélisation des sols" C 218. (1991). Traité Construction, volume C 2I.
- [19] **MELAN, E.**, "Theorie statisch unbestimmter Tragwerke aus ideal-plastischem Baustoff", Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften (Wien) Abt. IIA, 145, 195-218, (1936).
- [20] **MELAN, E.**, "Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums", Ing. Arch., 8, 116-126, (1938).
- [21] **MORELLE, P. & NGUYEN DANG HUNG**, "Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et coques de révolution par les éléments finis d'équilibre", J. Méc. Théor. Appl., 2, 567-599, (1983).
- [22] **PIERRE, D. A. & LOWE, M. J.**, "Mathematical programming via augmented Lagrangians", London, Addison-Wesley, (1975).

- [23] **Radenkovic, D.**, "Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée", Comptes Rendus Ac. Sciences Paris, meeting of 12th June 1961.
- [24] **ROSCOE, J. & BURLAND, B.**, "Stress-strain behavior of wet clay engineering plasticity", Ed. Heyman J. et Leckie F. A., Cambridge, 1968.
- [25] **SALENCON, J.**, " De l'élastoplasticité au calcul à la rupture", Palaiseau, École Polytechnique, France, 2002.
- [26] **SALENCON, J.**, " Théorie de la plasticité pour les applications a la mécanique des sols ",Eyrolles, Paris,1974.
- [27] **SCHOFIELD, A. N. & WROTH, C. P.**, Critical state soil mechanics. Mac Graw Hill, G. (1968).

ANNEXES

ANNEXE A

L'approximation de la fonction de contrainte d'Airy $\Phi(x, y)$ est de la forme :

$$\Phi(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[H_{0i}(\zeta) H_{0j}(\eta) \Phi_{ij} + H_{1i}(\zeta) H_{0j}(\eta) \Phi_{,xij} + H_{0i}(\zeta) H_{1j}(\eta) \Phi_{,yij} + H_{1i}(\zeta) H_{1j}(\eta) \Phi_{,xyij} \right] \quad (\text{A. 1})$$

Avec

$$\begin{aligned} H_{01}(\zeta) &= (1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3) & H_{01}(\eta) &= (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) \\ H_{02}(\zeta) &= 3\zeta^2 - 2\zeta^3 & H_{02}(\eta) &= 3\eta^2 - 2\eta^3 \\ H_{03}(\zeta) &= a(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3) & H_{03}(\eta) &= b(\eta - 2\eta^2 + \eta^3) \\ H_{04}(\zeta) &= a(-\zeta^2 + \zeta^3) & H_{04}(\eta) &= b(-\eta^2 + \eta^3) \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

où $\zeta = \frac{x}{a}$ et $\eta = \frac{y}{b}$. Les H_i représentent ici les fonctions d'interpolations d'Hermite.

Détermination des équations de contraintes

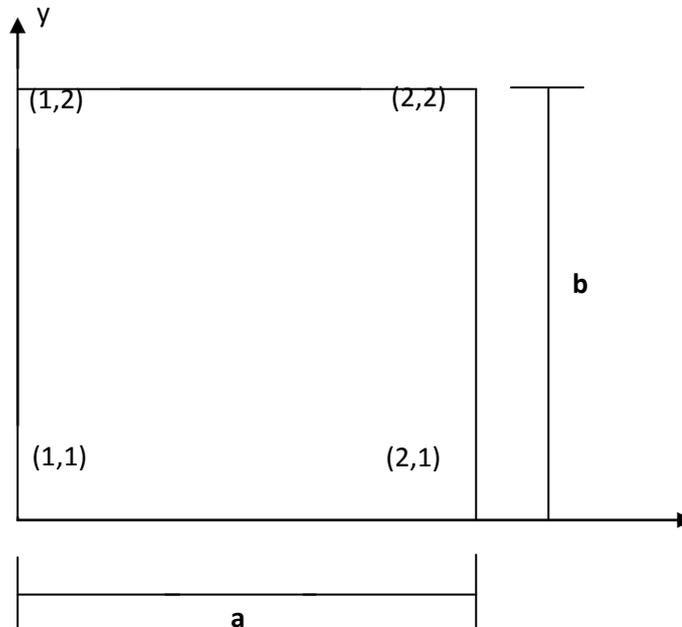


Fig. A.1

Côté 11 – 21:

$$\int_0^a \sigma_y(x) dx = -\Phi_{,x}^{11} + \Phi_{,x}^{21}$$

$$\int_0^a \int_0^x \sigma_y(x) dx = -\Phi^{11} - a \Phi_{,x}^{11} + \Phi^{21} \quad (\text{A. 3})$$

$$\int_0^a \tau_{xy}(x) dx = \Phi_{,y}^{11} - \Phi_{,y}^{21}$$

Côté 21 – 22:

$$\int_0^b \sigma_x(y) dy = -\Phi_{,y}^{21} + \Phi_{,y}^{22}$$

$$\int_0^b \int_0^y \sigma_x(y) dy = -\Phi^{21} - b \Phi_{,y}^{21} + \Phi^{22} \quad (\text{A. 4})$$

$$\int_0^b \tau_{xy}(y) dy = \Phi_{,x}^{21} - \Phi_{,x}^{22}$$

La répétition de cette opération pour l'ensemble des côtés de l'élément, nous permet ainsi de déterminer toutes les équations de contraintes.

Dans ce qui suit, on donne les expressions de la fonction d'Airy et des contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy}

$$\begin{aligned}
\Phi &= (1 - 3\zeta^2 - 3\eta^2 + 2\zeta^3 + 2\eta^3 + 9\zeta^2\eta^2 - 6\zeta^3\eta^2 - 6\zeta^2\eta^3 + 4\zeta^3\eta^3)\Phi^{11} \\
&+ (\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3 - 3\zeta\eta^2 + 2\zeta\eta^3 + 6\zeta^2\eta^2 - 4\zeta^2\eta^3 - 3\zeta^3\eta^2 + 2\zeta^3\eta^3) a \Phi_{,x}^{11} \\
&+ (\eta - 2\eta^2 + \eta^3 - 3\zeta^2\eta + 2\zeta^3\eta + 6\zeta^2\eta^2 - 3\zeta^2\eta^3 - 4\zeta^3\eta^2 + 2\zeta^3\eta^3) b \Phi_{,y}^{11} \\
&+ (\zeta\eta - 2\zeta\eta^2 - 2\zeta^2\eta + \zeta\eta^3 + \zeta^3\eta + 4\zeta^2\eta^2 - 2\zeta^2\eta^3 - 2\zeta^3\eta^2 + \zeta^3\eta^3) a b \Phi_{,xy}^{11} \\
\\
&+ (3\zeta^2 - 2\zeta^3 - 9\zeta^2\eta^2 + 6\zeta^2\eta^3 + 6\zeta^3\eta^2 - 4\zeta^3\eta^3)\Phi^{21} \\
&+ (-\zeta^2 + \zeta^3 + 3\zeta^2\eta^2 - 2\zeta^2\eta^3 - 3\zeta^3\eta^2 + 2\zeta^3\eta^3) a \Phi_{,x}^{21} \\
&+ (3\zeta^2\eta - 2\zeta^3\eta - 6\zeta^2\eta^2 + 3\zeta^2\eta^3 + 4\zeta^3\eta^2 - 2\zeta^3\eta^3) b \Phi_{,y}^{21} \\
&+ (-\zeta^2\eta + \zeta^3\eta + 2\zeta^2\eta^2 - \zeta^2\eta^3 - 2\zeta^3\eta^2 + \zeta^3\eta^3) a b \Phi_{,xy}^{21} \\
\\
&+ (9\zeta^2\eta^2 - 6\zeta^2\eta^3 - 6\zeta^3\eta^2 + 4\zeta^3\eta^3)\Phi^{22} \\
&+ (-3\zeta^2\eta^2 + 2\zeta^2\eta^3 + 3\zeta^3\eta^2 - 2\zeta^3\eta^3) a \Phi_{,x}^{22} \\
&+ (-3\zeta^2\eta^2 + 3\zeta^2\eta^3 + 2\zeta^3\eta^2 - 2\zeta^3\eta^3) b \Phi_{,y}^{22} \\
&+ (\zeta^2\eta^2 - \zeta^2\eta^3 - \zeta^3\eta^2 + \zeta^3\eta^3) a b \Phi_{,xy}^{22} \\
\\
&+ (3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\zeta^2\eta^2 + 6\zeta^2\eta^3 + 6\zeta^3\eta^2 - 4\zeta^3\eta^3)\Phi^{12} \\
&+ (3\zeta\eta^2 - 2\zeta\eta^3 - 6\zeta^2\eta^2 + 4\zeta^2\eta^3 + 3\zeta^3\eta^2 - 2\zeta^3\eta^3) a \Phi_{,x}^{12} \\
&+ (-\eta^2 + \eta^3 + 3\zeta^2\eta^2 - 3\zeta^2\eta^3 - 2\zeta^3\eta^2 + 2\zeta^3\eta^3) b \Phi_{,y}^{12} \\
&+ (-\zeta\eta^2 + \zeta\eta^3 + 2\zeta^2\eta^2 - 2\zeta^2\eta^3 - \zeta^3\eta^2 + \zeta^3\eta^3) a b \Phi_{,xy}^{12} \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x = \Phi_{,yy} = & \frac{1}{b^2} [(-6 + 12 \eta + 18 \zeta^2 - 36 \zeta^2 \eta - 12 \zeta^3 + 24 \zeta^3 \eta)] \Phi^{11} \\
& + (-4 + 6 \eta + 12 \zeta^2 - 8 \zeta^3 - 18 \zeta^2 \eta + 12 \zeta^3 \eta) a \Phi_{,x}^{11} \\
& + (-6 \zeta + 12 \zeta \eta + 12 \zeta^2 - 6 \zeta^3 - 24 \zeta^2 \eta + 12 \zeta^3 \eta) b \Phi_{,y}^{11} \\
& + (-4 \zeta + 6 \zeta \eta + 8 \zeta^2 - 4 \zeta^3 - 12 \zeta^2 \eta + 6 \zeta^3 \eta) a b \Phi_{,xy}^{11} \\
& + (6 - 12 \eta - 18 \zeta^2 + 12 \zeta^3 + 36 \zeta^2 \eta - 24 \zeta^3 \eta) \Phi^{21} \\
& + (-2 + 6 \eta + 6 \zeta^2 - 4 \zeta^3 - 18 \zeta^2 \eta + 12 \zeta^3 \eta) a \Phi_{,x}^{21} \\
& + (6 \zeta - 12 \zeta \eta - 12 \zeta^2 + 6 \zeta^3 + 24 \zeta^2 \eta - 12 \zeta^3 \eta) b \Phi_{,y}^{21} \\
& + (-2 \zeta + 6 \zeta \eta + 4 \zeta^2 - 2 \zeta^3 - 12 \zeta^2 \eta + 6 \zeta^3 \eta) a b \Phi_{,xy}^{21} \\
& + (18 \zeta^2 - 12 \zeta^3 - 36 \zeta^2 \eta + 24 \zeta^3 \eta) \Phi^{22} \\
& + (-6 \zeta^2 + 4 \zeta^3 + 18 \zeta^2 \eta - 12 \zeta^3 \eta) a \Phi_{,x}^{22} \\
& + (-6 \zeta^2 + 6 \zeta^3 + 12 \zeta^2 \eta - 12 \zeta^3 \eta) b \Phi_{,y}^{22} \\
& + (2 \zeta^2 - 2 \zeta^3 - 6 \zeta^2 \eta + 6 \zeta^3 \eta) a b \Phi_{,xy}^{22} \\
& + (-18 \zeta^2 + 12 \zeta^3 + 36 \zeta^2 \eta - 24 \zeta^3 \eta) \Phi^{12} \\
& + (-12 \zeta^2 + 8 \zeta^3 + 18 \zeta^2 \eta - 12 \zeta^3 \eta) a \Phi_{,x}^{12} \\
& + (6 \zeta^2 - 6 \zeta^3 - 12 \zeta^2 \eta + 12 \zeta^3 \eta) b \Phi_{,y}^{12} \\
& + (4 \zeta^2 - 4 \zeta^3 - 6 \zeta^2 \eta + 6 \zeta^3 \eta) a b \Phi_{,xy}^{12}
\end{aligned} \tag{A. 6}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y = \Phi_{,xx} = & \frac{1}{a^2} [(-6 + 12 \zeta + 18 \eta^2 - 36 \zeta \eta^2 - 12 \eta^3 + 24 \zeta \eta^3)] \Phi^{11} \\
& + (-4 + 6 \zeta + 12 \eta^2 - 8 \eta^3 - 18 \zeta \eta^2 + 12 \zeta \eta^3) a \Phi_{,x}^{11} \\
& + (-6 \eta + 12 \zeta \eta + 12 \eta^2 - 6 \eta^3 - 24 \zeta \eta^2 + 12 \zeta \eta^3) b \Phi_{,y}^{11} \\
& + (-4 \eta + 6 \zeta \eta + 8 \eta^2 - 4 \eta^3 - 12 \zeta \eta^2 + 6 \zeta \eta^3) a b \Phi_{,xy}^{11} \\
& + (6 - 12 \zeta - 18 \eta^2 + 12 \eta^3 + 36 \zeta \eta^2 - 24 \zeta \eta^3) \Phi^{21} \\
& + (-2 + 6 \zeta + 6 \eta^2 - 4 \eta^3 - 18 \zeta \eta^2 + 12 \zeta \eta^3) a \Phi_{,x}^{21} \\
& + (6 \eta - 12 \zeta \eta - 12 \eta^2 + 6 \eta^3 + 24 \zeta \eta^2 - 12 \zeta \eta^3) b \Phi_{,y}^{21} \\
& + (-2 \eta + 6 \zeta \eta + 4 \eta^2 - 2 \eta^3 - 12 \zeta \eta^2 + 6 \zeta \eta^3) a b \Phi_{,xy}^{21} \\
& + (18 \eta^2 - 12 \eta^3 - 36 \zeta \eta^2 + 24 \zeta \eta^3) \Phi^{22} \\
& + (-6 \eta^2 + 4 \eta^3 + 18 \zeta \eta^2 - 12 \zeta \eta^3) a \Phi_{,x}^{22} \\
& + (-6 \eta^2 + 6 \eta^3 + 12 \zeta \eta^2 - 12 \zeta \eta^3) b \Phi_{,y}^{22} \\
& + (-2 \eta^2 - 2 \eta^3 - 6 \zeta \eta^2 + 6 \zeta \eta^3) a b \Phi_{,xy}^{22} \\
& + (-18 \eta^2 + 12 \eta^3 + 36 \zeta \eta^2 - 24 \zeta \eta^3) \Phi^{12} \\
& + (-12 \eta^2 + 8 \eta^3 + 18 \zeta \eta^2 - 12 \zeta \eta^3) a \Phi_{,x}^{12} \\
& + (6 \eta^2 - 6 \eta^3 - 12 \zeta \eta^2 + 12 \zeta \eta^3) b \Phi_{,y}^{12} \\
& + (4 \eta^2 - 4 \eta^3 - 6 \zeta \eta^2 + 6 \zeta \eta^3) a b \Phi_{,xy}^{12}
\end{aligned} \tag{A. 7}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = \Phi_{,xy} = & \frac{1}{ab} [(36 \zeta \eta - 36 \zeta^2 \eta - 36 \zeta \eta^2 + 36 \zeta^2 \eta^2)] \Phi^{11} \\
& + (-6 \eta + 6 \eta^2 + 24 \zeta \eta - 24 \zeta \eta^2 - 18 \zeta^2 \eta + 18 \zeta^2 \eta^2) a \Phi_{,x}^{11} \\
& + (-6 \zeta + 6 \zeta^2 + 24 \zeta \eta - 18 \zeta \eta^3 - 24 \zeta^2 \eta + 18 \zeta^2 \eta^2) b \Phi_{,y}^{11} \\
& + (1 - 4 \eta - 4 \zeta + 3 \eta^2 + 3 \zeta^2 + 16 \zeta \eta - 12 \zeta \eta^2 - 12 \zeta^2 \eta + 9 \zeta^2 \eta^2) a b \Phi_{,xy}^{11} \\
& + (-36 \zeta \eta + 36 \zeta^2 \eta + 36 \zeta \eta^2 - 36 \zeta^2 \eta^2) \Phi^{21} \\
& + (12 \zeta \eta - 12 \zeta \eta^2 - 18 \zeta^2 \eta + 18 \zeta^2 \eta^2) a \Phi_{,x}^{21} \\
& + (6 \zeta - 24 \zeta \eta - 6 \zeta^2 + 18 \zeta \eta^2 + 24 \zeta^2 \eta - 18 \zeta^2 \eta^2) b \Phi_{,y}^{21} \\
& + (-2 \zeta + 8 \zeta \eta + 3 \zeta^2 - 6 \zeta \eta^2 - 12 \zeta^2 \eta + 9 \zeta^2 \eta^2) a b \Phi_{,xy}^{21} \\
& + (36 \zeta \eta - 36 \zeta \eta^2 - 36 \zeta^2 \eta + 36 \zeta^2 \eta^2) \Phi^{22} \\
& + (-12 \zeta \eta + 12 \zeta \eta^2 + 18 \zeta^2 \eta - 18 \zeta^2 \eta^2) a \Phi_{,x}^{22} \\
& + (-12 \zeta \eta + 18 \zeta \eta^2 + 12 \zeta^2 \eta - 18 \zeta^2 \eta^2) b \Phi_{,y}^{22} \\
& + (4 \zeta \eta - 6 \zeta \eta^2 - 6 \zeta^2 \eta + 9 \zeta^2 \eta^2) a b \Phi_{,xy}^{22} \\
& + (-36 \zeta \eta + 36 \zeta \eta^2 + 36 \zeta^2 \eta - 36 \zeta^2 \eta^2) \Phi^{12} \\
& + (6 \eta - 6 \eta^2 - 24 \zeta \eta + 24 \zeta \eta^2 + 18 \zeta^2 \eta - 18 \zeta^2 \eta^2) a \Phi_{,x}^{12} \\
& + (12 \zeta \eta - 18 \zeta \eta^2 - 12 \zeta^2 \eta + 18 \zeta^2 \eta^2) b \Phi_{,y}^{12} \\
& + (-2 \eta + 3 \eta^2 + 8 \zeta \eta - 12 \zeta \eta^2 - 6 \zeta^2 \eta + 9 \zeta^2 \eta^2) a b \Phi_{,xy}^{12} \tag{A.8}
\end{aligned}$$

ANNEXE B

Nous présentons dans cette partie l'algorithme d'optimisation, développé par PIERRE & LOWE [20] (1975) et utilisé dans notre étude. Cet algorithme est basé sur les techniques fondamentales suivantes :

- la technique des multiplicateurs de Lagrange, qui permet de transformer le problème d'optimisation avec contraintes en un problème sans contraintes,
- les conditions de Kuhn-Tucker, qui permettent de vérifier si un point proposé est effectivement un point optimal,
- la technique de descente (Line search), qui permet de trouver la plus grande pente.

Le problème d'optimisation consiste à trouver le point optimal x^* , qui maximise la fonction objective f . Il peut être énoncé comme suit :

Trouver

$$f(x^*) = \max_x f(x) \tag{B.1}$$

sous les contraintes

$$p_i(x) = \bar{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 < n \tag{B.2a}$$

$$q_j(x) \leq b_j \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \tag{B.2c}$$

et tel que

$$c_k < x_k < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{B.2c}$$

où, le vecteur $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ est un élément de l'espace Euclidien à n dimensions $x \in E^n$. Les a_i , b_j , c_k et d_k sont des constantes réelles. La fonction

objective f et les contraintes p_i et q_j peuvent être des fonctions linéaires ou non-linéaires.

Le problème peut être transformé en utilisant la fonction de Lagrange, définie par :

$$L(x, \alpha, \beta) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i (a_i - p_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j (b_j - q_j) \quad (\text{B. 3})$$

où α_i et β_j sont respectivement, les vecteurs multiplicateurs de Lagrange de dimension m_1 et m_2 .

Le gradient de L par rapport à x , s'exprime par :

$$\nabla_x L = \nabla_x f - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \nabla_x p_i - \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \nabla_x q_j \quad (\text{B. 4})$$

Au point optimal x^* , le développement en série de Taylor de chaque terme de contrainte d'inégalité $q_j(x)$, s'exprime par :

$$q_j(x^* + \Delta x) = q_j^* + \Delta x \nabla_x q_j^* + \dots, \quad j \in S_a \quad (\text{B. 5})$$

où

$$S_a = \{j | q_j^* = b_j\} \quad (\text{B. 6a})$$

et

$$q_j(x^* + \Delta x) \leq b_j \quad \forall j. \quad (\text{B. 6b})$$

Des équations (B.5) et (B.6), x doit satisfaire :

$$\Delta x \nabla q_j^* \leq 0, \quad j \in S_a \quad (\text{B. 7})$$

De même, au voisinage de x^* :

$$p_i^* = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B. 8a})$$

et

$$p_1(x^* + \Delta x) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B. 8b})$$

Le développement en série de Taylor de $p_i(x^* + \Delta x)$, s'exprime par :

$$p_i(x^* + \Delta x) = p_i^* + \Delta x \nabla_x p_i^* + \dots \quad (\text{B. 9})$$

et en se basant sur les équations (B.8), cette série donne, en tenant compte du terme de premier ordre :

$$\Delta x \nabla_x p_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B. 10})$$

D'une manière équivalente, les deux inégalités :

$$\Delta x \nabla_x p_i^* \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B. 11a})$$

et

$$-\Delta x \nabla_x p_i^* \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B. 11b})$$

sont les conditions pour lesquelles Δx admissible est satisfait.

En se limitant aux termes en Δx , f^* est optimale si :

$$f(x^* + \Delta x) - f^* \approx \Delta x \nabla_x f^* \leq 0 \quad (\text{B. 12})$$

pour tout Δx suffisamment petit et satisfaisant les équations (B.6b) et (B.8b).

Dans ce qui suit, on développe le Lagrangien Augmenté $L_a(x, \alpha, \beta, w)$ en additionnant les termes de pénalité à L , avec w comme ensemble de facteurs de pondération. L_a est développé afin d'obtenir une relation directe entre un maximum local sous contraintes de $f(x)$ et un maximum local sans contraintes de $L_a(x, \alpha^*, \beta^*, w)$ en respectant x .

Le Lagrangien Augmenté est exprimé par :

$$L_a = L - w_1 p_1 - w_2 p_2 - w_3 p_3 \quad (\text{B. 13})$$

où, L est le Lagrangien de l'équation (B.3) et $w = [w_1, w_2, w_3]$ est l'ensemble de facteurs de pondération ($w_i > 0$), avec :

$$p_1 = \sum_{i=1}^{m_1} (a_i - p_i)^2 \quad (\text{B. 14a})$$

$$p_2 = \sum_{j \in C_a} (b_j - q_j)^2, \quad C_a = \{j | \beta_j > 0\} \quad (\text{B. 14b})$$

et

$$p_3 = \sum_{j \in C_b} (b_j - q_j)^2, \quad C_b = \{j | \beta_j = 0 \text{ et } q_j \geq b_j\} \quad (\text{B. 14c})$$

Le gradient du Lagrangien Augmenté (L_a), en respectant x , est exprimé par :

$$\nabla_x L_a = \nabla_x f - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i^+ \nabla_x p_i - \sum_{j \in C_a} \beta_j^+ \nabla_x q_j + \sum_{j \in C_a} 2 w_3 (b_j - q_j) \nabla_x q_j \quad (\text{B. 15})$$

où

$$\alpha_i^+ = \alpha_i - 2 w_1 (a_i - p_i) \quad (\text{B. 16a})$$

et

$$\beta_j^+ = \beta_j - 2 w_2 (b_j - q_j) \quad (\text{B. 16c})$$

Si $L_a(x^*, \alpha^*, \beta^*, w)$ est un maximum local pour le problème sans contraintes, en respectant x , pour les valeurs finis de $w_i > 0$, alors $f(x^*)$ est un maximum local pour le problème avec contraintes de $f(x)$, tel que $(x^*, \alpha^*, \beta^*, w)$ satisfait les conditions de Kuhn-Tucker :

$$p_i(x^*) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B. 17a})$$

$$q_j(x^*) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{B. 17b})$$

$$\beta_j^* (b_j - q_j(x^*)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{B. 17c})$$

$$\beta_j^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{B. 17d})$$

et

$$\nabla_x L_a(x^*, \alpha^*, \beta^*, w) = 0. \quad (\text{B. 17e})$$

La recherche du point maximal est basée sur la technique de "line search", exprimée par:

$$x^{k+1} = x^k + \rho r^k \quad (\text{B. 18})$$

avec

$$r^k = H^k g^k \quad (\text{B. 19})$$

où, x^{k+1} est la nouvelle valeur de x obtenue pour une variation de ρ selon la direction $H^k g^k$. H^k est une matrice de dimension $n \times n$, g^k est le gradient de L_a , calculé en x^k et ρ est un scalaire positif.

L'idée de base de la technique de descente "line search" est de choisir une direction de descente r^k en x^k à chaque itération, de telle façon qu'à l'itération suivante, on choisisse un point x^{k+1} diminuant $f(x)$, (voir fig. B.1), c'est-à-dire qu'il faut :

- choisir r^k pour lequel, $\nabla_x f(x^k) r^k < 0$, $r^k > 0$,
 - choisir $x^{k+1} = x^k + \rho r^k$,
- de sorte que $f(x^{k+1}) < f(x^k)$.

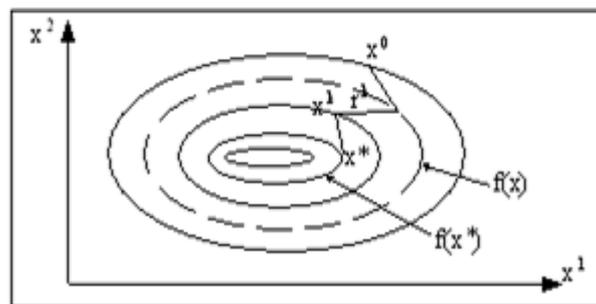


Figure B.1 – Technique de descente –

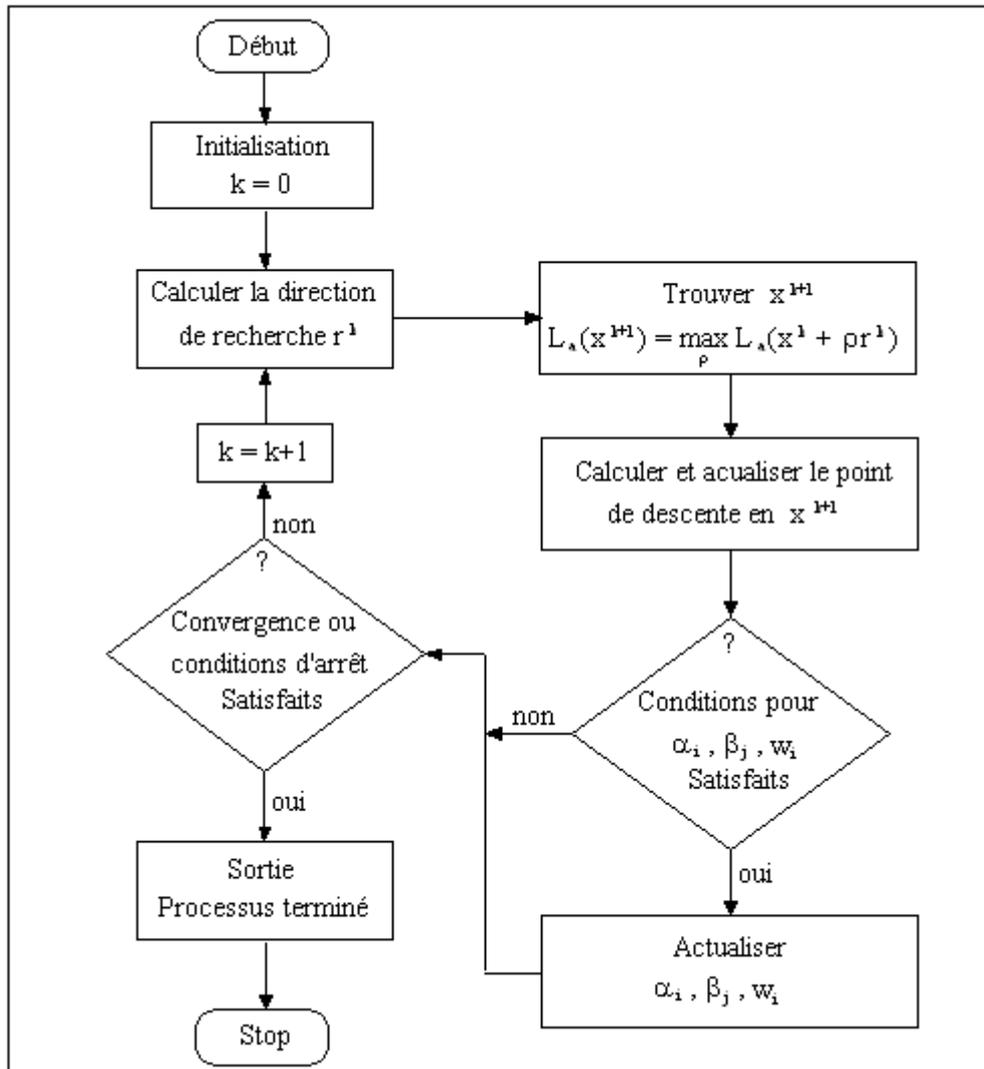


Figure B.2 – Algorithme de recherche du point optimal –