République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

Université M'hamed Bougara de BOUMERDES
Faculté des science
Département de mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Domaine : Mathématiques et informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse

Sur l'étude d'existence du point fixe commun pour des opérateurs univoques de type-Pata dans des espaces métriques ordonnés et applications

Présenté par : **Bahah Mohamed**

Soutenu le 14 juillet 2021 devant le jury composé de :

Laoubi Karima	**MCA**	**UMBB**	**Président**
Seba Djamila	**Prof**	**UMBB**	**Examinateur**
Mechrouk Salima	**MCA**	**UMBB**	**Promoteur**

Année Universitaire 2020/2021

Remerciement

Tout d'abord, je tiens à remercier dieu le tout puissant de m'avoir donné santé et courage pour mener à terme ce travail. Ce mémoire, ne pourrait exister sans l'aide et l'encouragement d'un certain nombre de personnes qui ont décidé de m'accompagner résolument dans mon parcours. Que tous ceux qui ont de près ou de loin, ont contribué par leurs conseils, leurs encouragements et leur assistance à l'aboutissement de ce travail, trouvent ici l'expression de ma profonde gratuite. je tiens à remercier, **Dr. MECHROUK Salima** particulièrement pour tous les efforts qui a donné pour m'orienter au meilleur, et **Dr. K.LAOUBI** et **Dr. D.SEBA** d'avoir acceptés de faire parties de ce jury, j'en suis très honoré. Merci à mes proches et amis de me soutenir par leur présence dans les bons comme dans les mauvais moments.

Résumé

Dans ce modeste travail, nous avons prouvé une généralisation du théorème du point fixe de Chatterjea, basée sur un résultat récent de Pata. Nous avons établi des résultats sur les points fixes communs de type Pata pour deux applications, ainsi que des résultats du point fixe couplé dans des espaces métriques ordonnés.
L'esprit des hypothèses de ce mémoire interviennent dans les travaux de [5], [7], [8] et [9].

Table des matières

Introduction

La théorie du point fixe est très puissante dans l'analyse car elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence de nombreux problèmes aux limites.

Les théorèmes du point fixe sont des outils de mathématiques de base utilisés pour montrer l'existence des solutions pour des différentes équations : ordinaires, intégrales et fractionnaires, ect.... Elles nous Permis d'affirmer qu'une fonction f admet un point fixe u, tel que $f(u) = u$, $u \in E$ sous certaines conditions imposées sur l'espace E et la fonction f. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles pour l'analyse classique.
L'Historique du point fixe a commencé par les travaux de S. Banach dans son papier [1] (publié en 1922). Banach a établi l'existence et l'unicité du point fixe d'une contraction dans un espace métrique complet. Il a appliqué son théorème connu sous le nom principe de l'application contractante à la résolution des équations intégrales. Par la suite, les recherches de mathématiciens ont pris différentes directions en s'inspirant du principe de Banach, elles sont concentrées sur :

– L'étude d'existence et d'unicité du point fixe,

– la construction d'un algorithme pour le calcul,

– la convergence de l'algorithme en question,

– la stabilité de cet algorithme construit.

Certaines généralisation du théorème du point fixe de contraction de Banach sont de type CHATTERJEA [5] et de type PATA [9] dans des espaces métriques ordonnés en basant sur une condition de contraction modifiée et introduite par Chatterjea.

Dans ce mémoire, nous avons étudié deux théorèmes du point fixe de Pata et Chatterjea, ainsi nous donnons les conditions suffisantes et nécessaires sur les deux opérateurs $F, G : E \longrightarrow E$ et l'espace E pour que l'equation $Fu = Gu = u$ ait au moins une ou une unique solution et dans ce cas on dit que c'est un point fixe commun des deux opérateurs F et G (voir [8]).

En basant sur [7], nous allons établir un nouveau théorème du point fixe couplé de contraction faible de type Pata pour des applications ayant la propriété monotone mixte dans des espaces métriques partiellement ordonnés. Nous allons montré que le point fixe couplé peut être unique sous certaines conditions appropriées.

Ce mémoire est réparti en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous allons rappeler quelques aspect mathématiques : Espaces métriques, Espaces normé, Convergence des suites ...

Le deuxiéme chapitre couvre les théorèmes du point fixe de type CHATTERJEA et de type PATA.

Le troisième chapitre, est consacré aux théorèmes du point fixe commun de type PATA.

Le dernier chapitre porte sur les théorèmes du point fixe couplé. Nous terminons ce travail par une conclusion et une bibliographie.

1

Rappels et Préliminaires [3]

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions topologiques (voir la référence [3]) dont nous aurons besoin tout au long de ce travail.

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1 On appelle distance sur un ensemble E, toute application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, possédant les propriétés suivantes :

(d1) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),

(d2) $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$ (séparation),

(d3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.2 Un espace métrique est un couple (E, d), où d est une distance sur E.

Définition 1.3 Espace métrique complet.

Un espace métrique E est dit complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

1.2 Espaces normé

Définition 1.4 Soit E un espace vectoriel (E.V) réel. Une norme sur E est une application définie de E dans E, telle que :

(N1) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(N2) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(N3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in E$ (inégalité triangulaire) .

Définition 1.5 Un espace normé est un couple $(E, ||.||)$, où $||.||$ est une norme sur E.

Dans tout ce qui soit (X, d) désigne un espace métrique

Définition 1.6 boule bouvert et ferme dans un espace métrique.

Pour $x \in X$ et $r > 0$, on définit :

a) La boule ouverte de centre x et rayon r : $B(x, r) = \{y \in X; d(y, x) < r\}$.

b) La boule fermée de centre x et rayon r : $B(x, r) = \{y \in X; d(y, x) \leq r\}$.

c) La sphère de centre x et rayon r : $S(x, r) = \{y \in X; d(y, x) = r\}$.

Définition 1.7 Une partie U de X est un ouvert si, pour tout $x \in U$, il existe un $r > 0$, tel que $B(x, r) \subset U$.

1.3 Espace de Banach

Définition 1.8 (**Espace vectoriel normé**).

Soit E un espace vectoriel sur $K(K = \mathbb{R}\text{ou}\mathbb{C})$. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ notée $x \longrightarrow ||x||$ qui vérifiée les axiomes suivants :

(1) $\forall x \in E \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

(2) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E \quad ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||,$

(3) $\forall x, y \in E \quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$

L'espace $(E, ||.||_E)$ s'appelle espace vectoriel normé $(e.v.n)$ dans E sur K

Proposition 1.1 []

(1.) Tout espace normé est un espace métrique.

(2.) Tout espace vectoriel normé de dimension fini est complet.

Définition 1.9 (**Espace de Banach**)

Un espace vectoriel normé qui est complet s'appelle espace de Banach.

1.4 Convergence des suites

Dans tout ce qui suit (X, d) désigne un espace métrique.

Définition 1.10 (**Suite convergente**)

Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace métrique (X, d) converge ou tend vers un point $a \in X$, lorsque $n \to \infty$, si et seulement si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$. C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon : d(x_n, a) < \epsilon.$$

On dit aussi que a est la limite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Remarquons que si cette limite existe, alors elle est unique.

En effet,supposons qu'il existe $a, b \in X, a \neq b$ tel que : $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ et $\lim_{n \to \infty} x_n = b$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \text{ tel que } n > N_\epsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$$

et

$$\forall \epsilon > 0, \exists N'_\epsilon, \text{ tel que } n > N'_\epsilon \Rightarrow d(x_n, b) < \epsilon.$$

Alors, pour $n \geq sup\left\{N_\epsilon, N'_\epsilon\right\}$ on a $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \leq 2\epsilon$.

Donc

$$d(a, b) \leq 2\epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

D'où $d(a, b) = 0$, ce qui donne $a = b$. contradiction.

Définition 1.11 (**Suite de Cauchy**)

On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X, d) est de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N_\epsilon$, on ait $d(x_m, x_n) \leq \epsilon$. Autrement dit $\lim_{m,n \to \infty} d(x_m, x_n) = 0$.

Remarque 1.1 On a une définition équivalente

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N} : d(x_{n+p}, x_n) \leq \epsilon.$$

Définition 1.12 (**Suite extraite**)

On appelle suite extraite (ou sous suite) de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de la forme $\left\{x_{\varphi(n)}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Lemme Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\varphi(n) \geq n$.

preuve On montre ce résultat par récurrence sur n :

(i) pour $n = 0, \varphi(0) \geq 0$ est vraie car $\varphi(0) \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

(ii) Supposons que pour certain $n \geq 1$, on a $\varphi(n) \geq n$. Comme l'application φ est strictement croissante , alors on a $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$, Or, $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, d'où $\varphi(n+1) \geq n+1$.

Par conséquent , pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geq n$.

Définition 1.13 (partie bornée-suite bornée)

(1.) Une partie A de X est bornée s'il existe $a \in X$ et $r > 0$ tel que :

$$d(a, x) \leq r, \quad \forall x \in A.$$

(2.) Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est bornée s'il existe $a \in X$ et $r > 0$ tel que :

$$d(a, x_n) \leq r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.1 (**Bolzano-Weiertrass**)

De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous suite convergente .

Proposition 1.2

(1.) Toute suite convergente est de Cauchy.

(2.) Toute suite de Cauchy est bornée .

(3.) Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy .

(4.) Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente est converge.

preuve

(1.) Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers a. Alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon \Rightarrow d(x_n, a) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

En particulier

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \forall m, n \geq N_\epsilon \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ce qui montre que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

(2.) Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X,d), Choisissons $\epsilon = 1$, tel que :

$$\forall m, n \geq N, \quad d(x_m, x_n) < 1.$$

En particulier

$$\forall n \geq N, \quad d(x_N, x_n) < 1,$$

ce qui montre que la suite est bornée.

(3.) Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et $\left\{x_{\varphi(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \forall m, n \geq N_\epsilon \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

Comme φ est une application croissante, alors et $\varphi(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \forall m, n \geq N_\epsilon \Rightarrow d(x_{\varphi(m)}, x_{\varphi(n)}) \leq \epsilon,$$

ce qui montre que la suite $\left\{x_{\varphi(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy .

(4.) Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et soit $\left\{x_{\varphi(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraire qui converge vers a .

Soit $\epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_\epsilon \Rightarrow d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \frac{\epsilon}{2},$$

comme $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe un rang $N_\epsilon^{'}$, tel que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m \geq N_\epsilon^{'}) \text{ et } (n \geq N_\epsilon^{'}) \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq \epsilon,$$

en particulier, si $n \geq max(N_\epsilon, N_\epsilon^{'})$, on en déduit que :

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

ce qui prouve la convergence de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vers a.

1.5 Ensemble ordonné

On commence d'abord par la définition d'une relation d'ordre.

Relation d'ordre

On dit qu'une relation binaire R est une relation d'ordre sur un ensemble E, si elle est :

— réflexive : $\forall x \in E$, xRx

— transitive : $\forall x, y, z \in E$, xRy et $yRz \Rightarrow xRz$

— antisymétrique : $\forall x, y \in E, xRy$ et $yRx \Rightarrow x = y$.

Un ensemble E muni d'une relation d'ordre R est appelé un ensemble ordonné.

2

Théorèmes du point fixe de type-CHATTERJEA et de type-PATA (voir[5] et [9])

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux Théorème du point fixe de type CHATTERJEA et de type PATA dans les espaces métrique complets.

Soit (X, d) un espace métrique complet, et soit x_0 un élément de X.

On note :

$$||x|| = d(x, x_0), \quad \forall x \in X$$

On considère l'application $\psi : [0,1] \to [0,\infty)$ croissante et continue en 0, verifie $\psi(0) = 0$. Soit la suite $(\omega_n)_n$ définie par :

$$\omega_n(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right), \quad \text{où} \quad \alpha \geq 1.$$

Le lemme suivant sera utilisé ultérieurement .

Lemme 1 [10] :

Soit (X,d) un espace métrique et soit $\{y_n\}$ une suite dans X, tel que la suite $(d(y_{n+1}, y_n))_n$ est décroissante et vérifie la condition suivante :

$$\lim_{n\to\infty} d(y_{n+1}, y_n) = 0. \qquad (1.1)$$

Si la suite $(y_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de cauchy , Alors il existe un $d^* > 0$ et deux suites $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers positifs tel que, les quatre suites suivantes :

$$d(y_{2m_k}, y_{2n_k}),\ d(y_{2m_k}, y_{2n_k+1}),\ d(y_{2m_k-1}, y_{2n_k}),\ d(y_{2m_k-1}, y_{2n_k+1}) \qquad (1.2)$$

$k \to \infty$. tendent vers d^*

preuve

Supposons que la suite $(y_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de cauchy, Alors il existe $d^* > 0$, et deux suites $\{m_k\}_k$, $\{n_k\}_k$ d'entiers positifs, tel que :

$$n_k > m_k > k, \quad d(y_{2m_k}, \quad y_{2n_k-2}) < d^*, \quad d(y_{2m_k}, y_{2n_k}) \geq d^*.$$

On a par la propriété de l'inegalité triangulaire pour la distance d :

$$\begin{aligned} d^* &\leq d(y_{2m_k}, y_{2n_k}) \\ &\leq d(y_{2m_k}, y_{2n_k-2}) + d(y_{2n_k-2}, y_{2n_k-1}) + d(y_{2n_k-1}, y_{2n_k}) \\ &\leq d^* + d(y_{2n_k-2}, y_{2n_k-1}) + d(y_{2n_k-1}, y_{2n_k}). \quad ....(1) \end{aligned}$$

De (1.1), on a :

$$\lim_{k\to\infty} d(y_{2n_k-2}, y_{2n_k-1}) = 0 \quad et \quad \lim_{k\to\infty} d(y_{2n_k-1}, y_{2n_k}) = 0 \quad ....(2)$$

De (1) et (2) , il vient que :

$$d^* \leq \lim_{k\to\infty} d(y_{2m_k}, y_{2n_k}) \leq d^*.$$

Nous concluons que :

$$\lim_{k\to\infty} d(y_{2m_k}, y_{2n_k}) = d^*. \qquad (1.3)$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} d(y_{2m_k}, y_{2n_k}) &\leq d(y_{2m_k}, y_{2n_k+1}) + d(y_{2n_k+1}, y_{2n_k}) \\ &\leq d(y_{2m_k}, y_{2n_k}) + d(y_{2n_k}, y_{2n_k+1}) + d(y_{2n_k+1}, y_{2n_k}). \qquad (3) \end{aligned}$$

En passant à la limite dans (3) et (1.3) , lorsque $k \to +\infty$ et en utilisant (1.1), il vient que :

$$\begin{aligned} d^* = \lim_{k\to\infty} d(y_{2m_k}, y_{2n_k}) &\leq \lim_{k\to\infty} d(y_{2m_k}, y_{2n_k+1}) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} d(y_{2m_k}, y_{2n_k}) = d^* \end{aligned}$$

Par suite

$$d(y_{2m_k}, y_{2n_k+1}) = d^*.$$

De manière similaire, nous montrons que les deux suites restantes de (1.2) tendent vers d^*.

2.1 Théorème du point fixe de type PATA [9]

Dans cette section nous allons donné un théorème du point fixe pour une classe d'opérations définie sur des espaces métrique ordonnés.

Théorème 2.1

Soit $\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1$ et $\beta \in [0, \alpha]$ des constantes. Supposons l'inégalité

$$d(f(x), f(y)) \leq (1-\epsilon)d(x,y) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||x|| + ||y||\right]^{\beta} \quad \textbf{(2.1.1)}$$

est satisfaite pour tout $\epsilon \in [0,1]$ et pour tout $x, y \in X$, alors f admet un point fixe unique $x_* = f(x_*)$. De plus,pour tout entier n, on a :

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq C\omega_n(\alpha) \quad \textbf{(2.1.2)}$$

où $C \leq \Lambda(1 + 4||x_*||)^{\beta}$, $\quad$ et $f^n = f \circ ..... \circ f$ (n fois).

Preuve

1) L'unicité du point fixe

observons tout d'abord que f admet au plus un point fixe. $f(x) = x$ et $f(y) = y$.

En effet, soit $x, y \in X$ avec $x \neq y$, tel que De **(2.1.1)**, nous avons :

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(f(x), f(y)) \\ &\leq (1-\epsilon)d(x,y) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||x|| + ||y||\right]^{\beta} \\ &= (1-\epsilon)d(x,y) + K\epsilon\psi(\epsilon), \end{aligned}$$

où $K = \Lambda\epsilon^{\alpha-1}\left[1 + ||x|| + ||y||\right]^{\beta}$

Cela implique que :

$$\epsilon d(x,y) \leq K\epsilon\psi(\epsilon),$$

qui est valable pour tout $\epsilon \in [0,1]$.

Soit $(\epsilon_n)_n \subset [0,1]$, tel que $\epsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$ vérifie pour tout entier n la condition suivante :

$$d(x,y) \leq K\psi(\epsilon_n). \qquad (*)$$

En faisant $n \to \infty$ dans (*), il vient que :

$$x = y.$$

D'où l'unicité du point fixe .

2) L'existence du point fixe.

Soit $x_0 \in X$, nous introduisons les deux suites $(x_n)_n$ et $(C_n)_n$, comme suit :

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0), \quad C_n = ||x_n||, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \quad C_0 = 0.$$

• la suite $(d(x_{n+1}, x_n))_n$ est décroissante .

En effet, puisque (2.1.1) est vrai pour tout $\epsilon \in [0,1]$, donc on peut choisir $\epsilon = 0$. Il vient que :

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x,y). \qquad (*)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la définition de la suite $(x_n)_n$ et (*), il vient que :

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq d(x_n, x_{n-1}).$$

Par une simple iteration sur n, il vient que :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leq d(x_1, x_0) = C_1.$$

• La suite $(C_n)_n$ est bornée.

En effet :

$$\begin{aligned} C_n &= d(x_n, x_0) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_0) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_1) + d(x_1, x_0) \\ &\leq d(x_{n+1}, x_1) + 2d(x_1, x_0) \\ &= d(f(x_n), f(x_0)) + 2C_1. \qquad (2.1.3) \end{aligned}$$

Comme $\beta \leq \alpha$, alors il existe une constante positive $\mu > 0$, tel que :$(1 + C_n)^\beta \leq \mu C_n^\alpha$.
Par suite

$$\begin{aligned} C_n &\leq d(f(x_n), f(x_0)) + 2C_1 \\ &\leq (1-\epsilon)d(x_n, x_0) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||x_n|| + ||x_0||\right]^\beta + 2C_1 \\ &= (1-\epsilon)C_0 + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + C_n\right]^\beta + 2C_1 \\ &\leq (1-\epsilon)C_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\mu C_n^\alpha + 2C_1 \\ &\leq (1-\epsilon)C_n + a\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)C_n^\alpha + b \end{aligned}$$

où $b = 2C_1 > 0 \quad et \qquad a = \Lambda\mu > 0$.
Par conséquent,

$$\epsilon C_n \leq a\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)C_n^\alpha + b, \qquad a, b > 0$$

Supposons qu'il existe une sous-suite $(C_n)_k$ de la suite $(C_n)_n$, tel que $\lim_{k\to+\infty} C_{n_k} = +\infty$ et $(\epsilon_k)_k \subset [0, 1]$ tel que

$$\epsilon_k C_{n_k} \leq a\epsilon_k^\alpha\psi(\epsilon_k)C_{n_k}^\alpha + b, \qquad (**)$$

On choisit $\epsilon_k = \frac{1+b}{C_{n_k}}$ dans (**) , il vient que :

$$1 \leq a(1+b)^\alpha\psi(\frac{1+b}{C_{n_k}}).$$

En faisans $k \to +\infty$ dans l'inégalité précédente on trouve une contradiction. Donc la suite $(C_n)_n$ est bornée .

• $\lim_{n\to+\infty} d(x_{n+m}, x_n) = 0$ En effet :

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité suivante :

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq C\omega_n(\alpha), \qquad (2.1.4)$$

où $C = sup_{n\in\mathbb{N}}\Lambda(1 + 2C_n)^{\beta}$. (2.1.5)

En effet, soit $m \in \mathbb{N}$ fixé et on pose : $p_n = n^{\alpha}d(x_{n+m}, x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$

En utilisant la définition de la suite $(x_n)_n$ et l'inégalité (2.1.1), il vient pour tout entier n :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= (n+1)^{\alpha}d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \\
&= (n+1)^{\alpha}d(f(x_{n+m}), f(x_n)) \\
&\leq (n+1)^{\alpha}\Big((1-\epsilon)d(x_{n+m}, x_n) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||x_{n+m}|| + ||x_n||\right]^{\beta}\Big) \\
&\leq (n+1)^{\alpha}(1-\epsilon)d(x_{n+m}, x_n) + C(n+1)^{\alpha}\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon) \qquad \mathbf{(2.1.6)}
\end{aligned}$$

On choisit

$$\epsilon = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq \frac{\alpha}{n+1}.$$

En reportant la valeur de ϵ dans (2.1.6), on trouve :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &\leq (n+1)^{\alpha}(1 - 1 + (\frac{n}{n+1})^{\alpha})d(x_{n+m}, x_n) + C(n+1)^{\alpha}(\frac{\alpha}{n+1})^{\alpha}\psi(\frac{\alpha}{n+1}) \\
&= (n+1)^{\alpha}(\frac{n}{n+1})^{\alpha}d(x_{n+m}, x_n) + C(n+1)^{\alpha}(\frac{\alpha}{n+1})^{\alpha}\psi(\frac{\alpha}{n+1}) \\
&= n^{\alpha}d(x_{n+m}, x_n) + C\alpha^{\alpha}\psi(\frac{\alpha}{n+1}) \\
&= p_n + C\alpha^{\alpha}\psi(\frac{\alpha}{n+1}).
\end{aligned}$$

D'où

$$p_{n+1} \leq p_n + C\alpha^{\alpha}\psi(\frac{\alpha}{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &\leq p_n + C\alpha^{\alpha}\psi(\frac{\alpha}{n+1}) \\ &\leq p_{n-1} + C\alpha^{\alpha}\psi(\frac{\alpha}{n}) + C\alpha^{\alpha}\psi(\frac{\alpha}{n+1}) \\ &\leq ... \\ &\leq p_0 + C\alpha^{\alpha}\sum_{k=1}^{n+1}\psi(\frac{\alpha}{k}) \\ &= C\alpha^{\alpha}\sum_{k=1}^{n+1}\psi(\frac{\alpha}{k}). \end{aligned}$$

car $p_0 = 0$.

Cela implique que

$$p_n = n^{\alpha}d(x_{n+m}, x_n) \leq C\alpha^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi(\frac{\alpha}{k}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq C\frac{\alpha^{\alpha}}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\psi(\frac{\alpha}{k}) \\ &= C(\frac{\alpha}{n})^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi(\frac{\alpha}{k}) \\ &= C\omega_n(\alpha), \end{aligned}$$

Donc (2.1.4) est démontré

En faisans $n \to \infty$, dans l'inégalité Précédente , on trouve :

$$d(x_{n+m}, x_n) \to 0.$$

C'est à dire que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X. Puisque l'espace X est complet , il existe $x_* \in X$, tel que : $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.
De plus , on a :

$$d(x_*, x_n) = d(x_*, f(x_{n-1}) = \lim_{m\to\infty} d(x_{n+m}, x_n) \leq C\omega_n(\alpha). \qquad (2.1.7)$$

En utilisant la continuité de f, et en faisans $n \to \infty$ dans (2.1.7), il vient que $d(x_*, f(x_*)) = 0$. Donc $x_* = f(x_*)$ est l'unique point fixe de f.
De plus, on a :

$$d(x_*, x_n) = d(f(x_*), f(x_{n-1})) \leq d(x_*, x_{n-1}) \leq ... \leq d(x_*, x_0) = ||x_*||, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} C_n &= d(x_n, x_0) \\ &\leq d(x_n, x_*) + d(x_*, x_0) \\ &= d(x_*, x_n) + ||x_*|| \\ &\leq 2||x_*|| \end{aligned}$$

De (2.1.5), il vient que :

$$C \leq \Lambda(1 + 4||x_*||)^\beta$$

2.2 Théorème du point fixe de CHATTERJEA [5]

Dans cette section, nous allons donné un théorème du point fixe pour des opérateurs définis sur des espaces métriques complets et ordonnés.

Théorème 2.2 Soit $f : X \longrightarrow X$ et soit Λ, α, β des constantes, tels que. $\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1$ et $\beta \in [0, \alpha]$.

Supposons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(x, f(y)) + d(y, f(x))\right] \\ &\quad + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||x|| + ||y|| + ||f(x)|| + ||f(y)||\right]^{\beta} \text{......}\mathbf{(2.2.1)} \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $\epsilon \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in X$. Alors la fonction f admet un point fixe unique $z \in X$.

Preuve

1) L'unicité du point fixe

Supposons qu'il existe deux points fixe $u, v \in X$ de f tel que : $f(u) = u$ et $f(v) = v$ avec $u \neq v$ et supposons (2.2.1) est satisfaite .

Soit $u, v \in X$. De (2.2.1) , il vient que :

$$d(f(u), f(v)) \leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(u, f(v)) + d(v, f(u))\right] + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||u|| + ||v|| + ||f(u)|| + ||f(v)||\right]^{\beta}. \quad (*)$$

Posons $K = \Lambda\epsilon^{\alpha-1}\left[1 + ||u|| + ||v|| + ||f(u)|| + ||f(v)||\right]^{\beta}$.

De (*) et grâce au fait que $f(u) = u$ et $f(v) = v$, il vient que :

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(f(u), f(v)) \\ &\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(u, f(v)) + d(v, f(u))\right] + K\epsilon\psi(\epsilon) \\ &\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(u, v) + d(v, u)\right] + K\epsilon\psi(\epsilon) \\ &\leq (1-\epsilon)\left[d(u, v)\right] + K\epsilon\psi(\epsilon). \end{aligned}$$

Cela implique que

$$d(u,v) - (1-\epsilon)\left[d(u,v)\right] \leq K\epsilon\psi(\epsilon).$$

C'est à dire

$$\epsilon d(u,v) \leq K\epsilon\psi(\epsilon).$$

ça implique que

$$d(u,v) \leq K\psi(\epsilon), \quad \forall \epsilon \in [0,1], \qquad (**)$$

qui est valable pour tout $\epsilon \in [0,1]$.

Soit $(\epsilon_n)_n \subset [0,1]$, tel que $\epsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$ et vérifie :

$$d(u,v) \leq K\psi(\epsilon_n). \qquad (2.2.2)$$

En faisant $n \to \infty$ dans (2.2.2), il vient que :

$$u = v.$$

D'où l'unicité du point fixe.

2) l'existence du point fixe.

Soit $x_0 \in X$, tel que $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0), \forall n \geq 1$. Posons $C_n = ||x_n|| = d(x_n, x_0), \forall n \geq 1$

Puisque **(2.2.1)** est vraie pour tout $\epsilon \in [0,1]$, alors on choisit $\epsilon = 0$, il vient que :

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2}\left[d(x, f(y)) + d(y, f(x))\right], \forall x, y \in X.$$

On a :

- la suite $(d(x_{n+1}, x_n))_n$ est décroissante .

En effet , soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) &\leq \frac{1}{2}\left[d(x_n, f(x_{n-1})) + d(x_{n-1}, f(x_n))\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left[d(x_n, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1})\right] \\ &= \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1}) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})\right]. \end{aligned}$$

Donc

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par suite

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) \leq d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq .... \leq d(x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N} \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

Soit la suite $(C_n)_n$ définie par $C_n = ||x_n|| = d(x_n, x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- La suite $(C_n)_n$ est bornée.

En effet, de manière similaire à la preuve de (2.1.3), nous pouvons obtenir

$$C_n \leq d(x_{n+1}, x_1) + 2C_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (2.2.4)$$

De **(2.2.1)** et (2.2.4) , il vient que :

$$\begin{aligned} C_n &\leq d(x_{n+1}, x_1) + 2C_1 \\ &= d(f(x_n), f(x_0)) + 2C_1 \\ &\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(x_n, f(x_0)) + d(x_0, f(x_n))\right] \\ &\quad + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||x_n|| + ||x_0|| + ||f(x_n)|| + ||f(x_0)||\right]^{\beta} + 2C_1 \\ &\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(x_n, f(x_0)) + d(x_0, f(x_n))\right] \\ &\quad + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||x_n|| + ||x_{n+1}|| + ||x_1||\right]^{\beta} + 2C_1 \end{aligned}$$

L'inégalités suivantes

A'partir des

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_1) &\leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_1) && \text{(inégalité triangulaire)}\\
d(x_{n+1}, x_0) &\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_0) && \text{(inégalité triangulaire)}\\
d(x_{n+1}, x_n) &\leq d(x_1, x_0) && \text{(d'après 2.2.3)}
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
C_n &\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(x_n, x_1) + d(x_{n+1}, x_0)\right]\\
&\quad +\Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||x_n|| + ||x_{n+1}|| + ||x_1||\right]^\beta + 2C_1\\
&\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(x_n, x_0) + d(x_0, x_1) + d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_0)\right]\\
&\quad +\Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||x_n|| + ||x_{n+1}|| + ||x_1||\right]^\beta + 2C_1\\
&\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[2d(x_n, x_0) + d(x_0, x_1) + d(x_1, x_0)\right]\\
&\quad +\Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||x_n|| + ||x_{n+1}|| + ||x_1||\right]^\beta + 2C_1\\
&\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[2d(x_n, x_0) + 2d(x_0, x_1)\right]\\
&\quad +\Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||x_n|| + ||x_{n+1}||x_1||\right]^\beta + 2C_1\\
&\leq (1-\epsilon)\left[d(x_n, x_0) + d(x_0, x_1)\right]\\
&\quad +\Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||x_n|| + ||x_{n+1}|| + ||x_1||\right]^\beta + 2C_1.
\end{aligned}$$

Par suite :

$$C_n \leq (1-\epsilon)\left[C_n + C_1\right] + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + C_n + d(x_0, x_{n+1}) + C_1\right]^\beta + 2C_1. \tag{2.2.5}$$

Comme

$$d(x_0, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, x_{n+1})$$

$$
\begin{aligned}
&\leq d(x_0, x_n) + d(x_1, x_0) \\
&= C_n + C_1.
\end{aligned}
$$

Alors (2.2.5) implique que :

$$C_n \leq (1-\epsilon)\left[C_n + C_1\right] + \Lambda \epsilon^\alpha \psi(\epsilon)\left[1 + 2C_n + 2C_1\right]^\beta + 2C_1. \quad (2.2.6)$$

De plus, on a :

$$
\begin{aligned}
\left[1 + 2C_n + 2C_1\right]^\beta &\leq \left[1 + 2C_n + 2C_1 + 4C_nC_1\right]^\beta \\
&= \left[(1 + 2C_n)(1 + 2C_1)\right]^\beta \\
&= (1 + 2C_n)^\beta (1 + 2C_1)^\beta.
\end{aligned}
$$

Comme $\beta \leq \alpha$, donc il existe une constante positive μ, tel que :

$$(1 + 2C_n)^\beta \leq \mu(2C_n)^\alpha = \mu 2^\alpha C_n^\alpha.$$

Donc

$$\left[1 + 2C_n + 2C_1\right]^\beta \leq \mu 2^\alpha C_n^\alpha (1 + 2C_1)^\alpha \quad (2.2.7)$$

De (2.2.6) et (2.2.7) , il vient que :

$$C_n \leq (1-\epsilon)C_n + (1-\epsilon)C_1 + \Lambda \epsilon^\alpha \psi(\epsilon) \mu 2^\alpha C_n^\alpha (1 + 2C_1)^\alpha + 2C_1.$$

On pose

$$a = \Lambda \mu 2^\alpha (1 + 2C_1)^\alpha \quad \text{et} \quad b = (1-\epsilon)C_1 + 2C_1.$$

Nous obtenons :

$$C_n \leq (1-\epsilon)C_n + a\epsilon^\alpha \psi(\epsilon) C_n^\alpha + b.$$

Par suite

$$C_n - (1-\epsilon)C_n \leq a\epsilon^\alpha \psi(\epsilon) C_n^\alpha + b.$$

Ce qui donne

$$\epsilon C_n \leq a\epsilon^\alpha \psi(\epsilon) C_n^\alpha + b.$$

Supposons qu'il existe une sous-suite $(C_n)_k$ de $(C_n)_n$ tel que : $\lim\limits_{k\to+\infty} C_{n_k} = +\infty$ et $(\epsilon_k)_k \subset [0,1]$, tel que :

$$\epsilon_k C_{n_k} \leq a\epsilon_k^\alpha \psi(\epsilon_k) C_{n_k}^\alpha + b, \qquad (2.2.8)$$

On choisit $\epsilon_k = \frac{1+b}{C_{n_k}}$ dans (2.2.8) , il vient que :

$$1 \leq a(1+b)^\alpha \psi(\frac{1+b}{C_{n_k}}).$$

En faisans $k \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on trouve une contradiction. Donc la suite $(C_n)_n$ est bornée

• On a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$.

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\
&\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(x_n, f(x_{n-1})) + d(x_{n-1}, f(x_n))\right] \\
&\quad + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||x_n|| + ||x_{n-1}|| + ||f(x_n)|| + ||f(x_{n-1})||\right]^\beta \\
&= \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(x_n, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1})\right] \\
&\quad + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + 2||x_n|| + ||x_{n-1}|| + ||x_{n+1}||\right]^\beta \\
&= \frac{1-\epsilon}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1}) \\
&\quad + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + 2||x_n|| + ||x_{n-1}|| + ||x_{n+1}||\right]^\beta \\
&\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\right] + k\epsilon\psi(\epsilon)
\end{aligned}$$

Donc

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\right] + k\epsilon\psi(\epsilon) \qquad (2.2.9)$$

où

$$k = \Lambda\epsilon^{\alpha-1}\left[1 + 2||x_n|| + ||x_{n-1}|| + ||x_{n+1}||\right]^{\beta}.$$

Supposons par l'absurde que :

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_{n+1}, x_n) = d^* > 0.$$

En passant à la limite dans (2.2.9) quand $n \to \infty$, on trouve :

$$d^* \leq \frac{1-\epsilon}{2}(d^* + d^*) + k\epsilon\psi(\epsilon).$$

Cela implique que

$$d^* \leq (1-\epsilon)(d^*) + k\epsilon\psi(\epsilon).$$

Par suite

$$\epsilon d^* \leq k\epsilon\psi(\epsilon).$$

Il en résulte que

$$d^* \leq k\psi(\epsilon).$$

qui est valable pour tout $\epsilon \in [0, 1]$. Soit $(\epsilon_n)_n \subset [0, 1]$, tel que $\epsilon_n \to 0$, $n \to \infty$ vérifie

$$d^* \leq K\psi(\epsilon_n). \qquad (E)$$

En faisant $n \to \infty$ dans l'inégalité (E), il vient que :

$$d^* = 0$$

• la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X

Par l'absurde, supposons que $(x_n)_n$ n'est pas de Cauchy et on choisit $\delta > 0$, $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$ deux suites d'entiers positives tel que $n_k > m_k > k, d(x_{2m_k}, x_{2n_k-2}) < \delta, d(x_{2m_k}, x_{2n_k}) \geq \delta$. De (2.2.1) , il vient que :

$$\begin{aligned}
d(x_{2m_k}, x_{2n_k+1}) &= d(f(x_{2m_k-1}), f(x_{2n_k})) \\
&\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(x_{2m_k-1}, f(x_{2n_k})) + d(x_{2n_k}, f(x_{2m_k-1}))\right] + K\epsilon\psi(\epsilon) \\
&\leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(x_{2m_k-1}, x_{2n_k+1}) + d(x_{2n_k}, x_{2m_k})\right] + K\epsilon\psi(\epsilon).
\end{aligned}$$

Selon le lemme 1, on a :

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{2m_k}, x_{2n_k+1}) = \delta, \quad \lim_{k\to\infty} d(x_{2m_k-1}, x_{2n_k+1}) = \delta, \quad et \quad \lim_{k\to\infty} d(x_{2m_k}, x_{2n_k}) = \delta.$$

Cela implique que

$$\delta \leq (1-\epsilon)\delta + K\epsilon\psi(\epsilon), \quad K > 0.$$

Il en résulte que

$$\delta \leq k\psi(\epsilon).$$

qui est valable pour tout $\epsilon \in [0,1]$. Soit $(\epsilon_n)_n \subset [0,1]$, tel que $\epsilon_n \to 0$, $n \to \infty$ vérifie

$$\delta \leq K\psi(\epsilon_n). \qquad (H)$$

En faisant $n \to \infty$ dans l'inégalité (H), il vient que : $\delta = 0$.

Comme l'espace X est complet alors la suite $(x_n)_n$ converge vers un élément $z \in X$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = z \in X$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'inégalité (2.2.1) pour $\epsilon = 0$, il vient que :

$$\begin{aligned} d(f(z), z) &\leq d(f(z), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, z) \quad (in\acute{e}galit\acute{e}triangulaire) \\ &= d(f(z), f(x_n)) + d(x_{n+1}, z) \\ &\leq \frac{1}{2}(d(z, x_{n+1}) + d(f(z), x_n)) + d(x_{n+1}, z). \end{aligned}$$

En passant à la limite dans la dernière inégalité, on trouve :

$$d(f(z), z) \leq \frac{1}{2}(d(z, z) + d(f(z), z)) + d(z, z).$$

Par conséquent

$$d(f(z), z) \leq \frac{1}{2} d(f(z), z).$$

Donc

$$d(f(z), z) \leq 0.$$

D'où

$$f(z) = z.$$

On en déduit que z est l'unique point fixe de l'application f, ce qui termine la démonstration.

3

Point fixe commun de type PATA [8]

Dans ce chapitre nous étudions quelques resultats concernant l'existence de point fixe commun des deux opérateus $f, g : X \to X$ tel que $f(X) \subset g(X)$ soit complet. Soit $x_0 \in X$ et on note $y_0 = f(x_0)$, $||x|| = d(x, y_0)$, pour tout $x \in X$. Supposons que la fonction ψ a les mêmes propriétés énoncées dans le chapitre précédent.

Définition 1 [4]

Soient (X, d) est un espace métrique complet et $T, S : X \to X$ deux fonctions. L'élément $x \in X$ est appelé point de coincidence de T et S, si $T(x) = S(x)$.

Définition 2 [6]

T et S sont dites faiblement compatibles si elles commutent aux points de coïncidence, c'est à dire, pour tout $u \in X$ satisfaisant $S(u) = T(u)$, alors $S(T(u)) = T(S(u))$.

Exemple 1

Soit $X = [0, 3]$ muni de l'espace métrique usuel $d(x, y) = |x - y|$.

On définit $f, g : [0, 3] \to [0, 3]$ par :

$$\text{f(x)} = \begin{cases} x & si \quad x \in [0,1) \\ \\ 3 & si \quad x \in [1,3] \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \text{g(x)} = \begin{cases} 3 - x & si \quad x \in [0,1) \\ \\ 3 & si \quad x \in [1,3] \end{cases}$$

Alors pour tout $x \in [1, 3]$, $f(g(x)) = g(f(x))$, ce qui montre que f, g sont des applications faiblement compatibles sur $[0, 3]$.

Exemple 2

Soit $X = \mathbb{R}$ et on définit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x/3$, $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = x^2$,$x \in \mathbb{R}$. Ici 0 et 1/3 sont deux points de coïncidence pour les applications f et g. De plus f et g commutent à 0, c'est-à-dire $f(g(0)) = g(f(0)) = 0$, mais $f(g(1/3)) = f(1/9) = 1/27$ et $g(f(1/3)) = g(1/9) = 1/81$ et donc f et g ne sont pas faiblement compatibles sur $\mathbb{R}$.

3.1 Point fixe commun de type PATA [8]

Théorème 3.1

Soit $\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1$ et $\beta \in [0, \alpha]$ des constantes. Supposons l'inégalité :

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \epsilon)d(g(x), g(y)) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||g(x)|| + ||g(y)||\right]^{\beta} \qquad (3.1)$$

est satisfaite pour chaque $\epsilon \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in X$, alors le couple (f, g) admet un unique point de coincidence.

Si de plus la couple (f, g) est faiblement compatible, alors f et g admet un unique point fixe commun $z \in X$.

Preuve :

A partir d'un point donné x_0 et en utilisant le fait que $f(X) \subset g(X)$, on peut construire une suite de Jungck $\{y_n\}_n$ définie par : $y_n = f(x_n) = g(x_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$.

1 L'unicité du point de coïncidence.

Supposons qu'il existe deux points coïncidence $w_1, w_2 \in X$, tel que $w_1 = f(u_1) = g(u_1)$ et $w_2 = f(u_2) = g(u_2)$ tel que $w_1 \neq w_2$ où $u_1, u_2 \in X$.

De (3.1), il en résulte :

$$\begin{aligned} d(w_1, w_2) &= d(f(u_1), f(u_2)) \\ &\leq (1-\epsilon)d(g(u_1), g(u_2)) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||g(u_1)|| + ||g(u_2)||\right]^{\beta} \\ &= (1-\epsilon)d(w_1, w_2) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||g(u_1)|| + ||g(u_2)||\right]^{\beta}. \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$d(w_1, w_2) \leq \Lambda\epsilon^{\alpha-1}\psi(\epsilon)\left[1 + ||g(u_1)|| + ||g(u_2)||\right]^{\beta}. \qquad (3.2)$$

On pose :

$$k = \Lambda\left[1 + ||g(u_1)|| + ||g(u_2)||\right]^{\beta} > 0.$$

De (3.2), il vient que :

$$d(w_1, w_2) \leq k\epsilon^{\alpha-1}\psi(\epsilon),$$

qui est valable pour tout $\epsilon \in [0,1]$. Soit $(\epsilon_n)_n \subset [0,1]$, tel que $\epsilon_n \to 0$, $n \to \infty$ vérifie

$$d(w_1, w_2) \leq K\epsilon_n^{\alpha-1}\psi(\epsilon_n). \qquad (3.3)$$

FaiSont $n \to \infty$ dans (3.3), il vient que :

$$w_1 = w_2.$$

2 L'existence du point de coïncidence

Soit $y_0 \in X$.Nous définissons la suite $(y_n)_n$ comme suit :

$$\begin{cases} \mathrm{y}_0 \in X, \\ \mathrm{y}_n = f(x_n) = g(x_{n+1}), \forall n \geq 1. \end{cases}$$

• La suite $(d(y_{n+1}, y_n))_n$ est décroissante.

Puisque **(3.1)** est vraie pour tout $\epsilon \in [0,1]$,on peut choisir $\epsilon = 0$ donc on obtient :

$$\begin{aligned} d(y_{n+1}, y_n) &= d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \\ &\leq d(g(x_{n+1}), g(x_n)) \\ &= d(y_n, y_{n-1}). \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(d(y_{n+1}, y_n))_n$ est décroissante, et on a :

$$d(y_{n+1}, y_n) \leq d(y_n, y_{n-1}) \leq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leq d(y_1, y_0), \forall n \in \mathbb{N} \qquad (3.4)$$

Pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose : $C_n = d(y_n, y_0)$.

• La suite $(C_n)_n$ est bornée .

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant (3.1), la propriété de l'inégalité triangulaire et la Définition de la suite $(y_n)_n$, il vient que :

$$\begin{aligned} C_n &= d(y_n, y_0) \\ &\leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_1) + d(y_1, y_0) \\ &= d(y_n, y_{n+1}) + d(f(x_{n+1}), f(x_1)) + d(y_1, y_0) \\ &\leq 2d(y_1, y_0) + d(f(x_{n+1}), f(x_1)) \\ &\leq 2C_1 + (1-\epsilon)d(g(x_{n+1}), g(x_1)) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||g(x_{n+1})|| + ||g(x_1)||\right]^\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2C_1 + (1-\epsilon)d(y_n, y_0) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||y_n|| + ||y_0||\right]^\beta \\ &= 2C_1 + (1-\epsilon)C_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + C_n\right]^\beta \end{aligned}$$

Comme $\beta \leq \alpha$, alors il existe une constante positive μ tel que :

$$[1 + C_n]^\beta \leq \mu C_n^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$C_n \leq 2C_1 + (1-\epsilon)C_n + \mu\Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)C_n^\alpha.$$

Par suite

$$\epsilon C_n \leq 2C_1 + \mu\Lambda\epsilon^{\alpha-1}\psi(\epsilon)C_n^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En posant $\mu\Lambda = a$ et $2C_1 = b$ dans l'inégalité précédente , il vient que :

$$\epsilon C_n \leq a\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)C_n^\alpha + b, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supposons que la suite $(C_n)_n$ n'est pas bornée, alors il existe une sous-suite $(C_{n_i})_{n_i} \longrightarrow +\infty$. Le choix de $\epsilon = \epsilon_i = \frac{1+b}{C_{n_i}}$ nous conduit à la contradiction :

$$1 \leq a(1+b)^\alpha\psi(\epsilon_i) \to 0.$$

Donc la suite $(C_n)_n$ est bornée .

• On a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(y_{n+1}, y_n) = 0$,

En effet pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned} d(y_{n+1}, y_n) &= d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \\ &\leq (1-\epsilon)d(g(x_{n+1}), g(x_n)) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||g(x_{n+1})|| + ||g(x_n)||\right]^\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1-\epsilon)d(y_n, y_{n-1}) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||y_n|| + ||y_{n-1}||\right]^{\beta} \\ &= (1-\epsilon)d(y_n, y_{n-1}) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + C_n + C_{n-1}\right]^{\beta}. \end{aligned}$$

Donc

$$d(y_{n+1}, y_n) \leq (1-\epsilon)d(y_n, y_{n-1}) + K\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon), où K = \Lambda\left[1 + C_n + C_{n-1}\right]^{\beta}.$$

Supposons que $\lim_{n\to+\infty} d(y_{n+1}, y_n) = d^* > 0$.

En passant à la limite, quand $n \to \infty$, dans l'inégalité précédente , il vient que :

$$d^* \leq (1-\epsilon)d^* + K\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon).$$

Ce qui impliquent que

$$d^* - (1-\epsilon)d^* \leq K\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon).$$

Il en résulte que

$$d^* \leq K\epsilon^{\alpha-1}\psi(\epsilon),$$

qui est valable pour tout $\epsilon \in [0,1]$. Soit $(\epsilon_n)_n \subset [0,1]$, tel que $\epsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$ vérifie

$$d^* \leq K\epsilon_n^{\alpha-1}\psi(\epsilon_n). \qquad (J)$$

En faisant $n \to \infty$ dans l'inégalité (J), il vient que :

$$d^* = 0.$$

• La suite $(y_n)_n$ est de Cauchy dans X.

Par l'absurde, supposons que $(y_n)_n$ n'est pas de Cauchy. On choisit $\delta > 0$, $\{m_k\}$

et $\{n_k\}$ deux suites positives tel que $n_k > m_k > k$, tel que

$$d(x_{2m_k}, x_{2n_k-2}) < \delta, \quad d(x_{2m_k}, x_{2n_k}) \geq \delta$$

De (3.1) , il vient que :

$$\begin{aligned} d(y_{2m_k}, y_{2n_k+1}) &= d(f(x_{2m_k}), f(x_{2n_k+1})) \\ &\leq (1-\epsilon)d(g(x_{2m_k}), g(x_{2n_k+1})) + K\epsilon\psi(\epsilon) \\ &= (1-\epsilon)d(y_{2m_k-1}, y_{2n_k}) + K\epsilon\psi(\epsilon). \end{aligned}$$

Selon le lemme 1, on a :

$$\lim_{k\to\infty} d(y_{2m_k}, y_{2n_k+1}) = \delta, \quad et \quad \lim_{k\to\infty} d(y_{2m_k-1}, y_{2n_k}) = \delta$$

Cela implique que

$$\delta \leq (1-\epsilon)\delta + k\epsilon\psi(\epsilon), \quad K > 0$$

Il en résulte que

$$\delta \leq K\psi(\epsilon)$$

qui est valable pour tout $\epsilon \in [0,1]$. Soit $(\epsilon_n)_n \subset [0,1]$, tel que $\epsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$ vérifie

$$\delta \leq K\psi(\epsilon_n). \qquad (G)$$

En faisant $n \to \infty$ dans (G), il vient que :

$$\delta = 0.$$

Comme l'espace X est complet, alors la suite $(y_n)_n$ converge vers un élément $w \in X$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = w \in X$.

Puisque $y_n = g(x_{n+1}) = f(x_n)$ et $(y_n)_n$ est de cauchy alors $(g(x_{n+1}))_n$ est de cauchy dans $g(X)$ complet, donc il existe $z \in X$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_{n+1}) = g(z) \in g(X)$.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = g(z).$$

Comme

$$d(f(x_n), f(z)) \leq d(g(x_n), g(z)) \quad \text{l'inégalité (3.1) avec } \epsilon = 0.$$

En faisant $n \to +\infty$, dans l'inégalité précédente, il vient que :

$$\lim_{n\to+\infty} d(f(x_n), f(z)) \leq d(g(z), g(z)) = 0.$$

Cela implique que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(z).$$

Finalement

$$g(z) = \lim_{n\to+\infty} g(x_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(z).$$

D'où

$$f(z) = g(z) = w. \qquad (3.5)$$

On conclut que w est l'unique point de coincidence pour le couple (f, g).

• Montrons que w est l'unique point fixe dans X de f et g, $(z = w)$.

Puisque le couple (f, g) est faiblement compatible, alors :

$$g(f(z)) = f(g(z)). \qquad (3.6)$$

De (3.5) et (3.6) , il vient que :

$$g(f(z)) = f(g(z)) = g(w) = f(w). \qquad (3.7)$$

De (3.7) et (3.1), il vient que :

$$\begin{aligned}
d(f(z), f(w)) &\leq (1-\epsilon)d(g(z), g(w)) + k\epsilon\psi(\epsilon) \\
&= (1-\epsilon)d(g(z), g(f(z))) + k\epsilon\psi(\epsilon) \\
&\leq (1-\epsilon)\left[d(g(z), f(w)) + d(f(w), g(f(z)))\right] + k\epsilon\psi(\epsilon) \\
&= (1-\epsilon)\left[d(g(z), f(w)) + d(g(f(z)), g(f(z)))\right] + k\epsilon\psi(\epsilon) \\
&= (1-\epsilon)d(g(z), f(w)) + k\epsilon\psi(\epsilon).
\end{aligned}$$

Donc

$$\epsilon d(g(z), f(w)) \leq k\epsilon\psi(\epsilon).$$

Cela implique que :

$$d(g(z), f(w)) \leq k\psi(\epsilon),$$

qui est valable pour tout $\epsilon \in [0,1]$. Soit $(\epsilon_n)_n \subset [0,1]$, tel que $\epsilon_n \to 0$, quand $n \to \infty$ vérifie

$$d(f(z), f(w)) \leq K\psi(\epsilon_n). \qquad (Q)$$

En faisant $n \to \infty$ dans l'inégalité (Q), il vient que :

$$f(z) = f(w),$$

ça implique que $z = w$. Donc $g(z) = f(z) = z$

On conclut que z est l'unique point fixe commun pour le couple (f, g) .

3.2 Exemple

Soit $X = [0,2]$ muni de l'ordre et le distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$.

Soit : $f, g : [0,2] \to [0,2]$ deux applications définies par :

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{et} \qquad g(x) = x$$

On a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |2 - x - 2 + y| \\ &= |-x+y| \\ &= |x-y| = |g(x) - g(y)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1-\epsilon)|g(x) - g(y)| + \epsilon|g(x) - g(y)| \\ &\leq (1-\epsilon)|g(x) - g(y)| + \epsilon[||g(x)|| + ||g(y)|| + 1]. \qquad (\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Où $\epsilon \in [0,1]$ Prouvons qu'il existe $\Lambda \geq 0$ et $\alpha \geq 1$, tel que : $\epsilon \leq \Lambda\epsilon^{\alpha+1}$, ce qui implique que : $\Lambda \geq (\frac{1}{\epsilon})^{\alpha}$.

On choisit : $\epsilon = \frac{\alpha}{1+\alpha} \in [0,1]$,on trouve $\Lambda \geq (\frac{\alpha+1}{\alpha})^{\alpha}$,on peut preudre : $\Lambda = 2(\frac{\alpha+1}{\alpha})^{\alpha}$

Donc Il existe $\Lambda \geq 0$ et $\alpha \geq 1$ tel que :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq (1-\epsilon)|g(x) - g(y)| + \Lambda\epsilon^{\alpha+1}[||g(x)|| + ||g(y)|| + 1] \\ &= (1-\epsilon)|g(x) - g(y)| + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)[||g(x)|| + ||g(y)|| + 1]. \end{aligned}$$

Où :

$\psi(\epsilon) = \epsilon$, $\beta = 1 \in [0,\alpha]$, $\alpha \geq 1$

Touts les conditions du Théorème 3.1 sont satisfaites, alors il existe $x^* \in [0,2]$, tel que :

$$f(x^*) = g(x^*) = x^*$$

Calcul de x^*

Soit $f(x^*) = g(x^*)$, alors $2 - x^* = x^*$.

Donc $x^* = 1$, $f(1) = g(1) = 1$, alors $x^* = 1$ est l'unique point fixe commun pour le couple (f, g) sleon le Théorème 3.1 .

4

Théorèmes du point fixe couplé [7]

Dans ce chapitre, nous allons donné des théorèmes du point fixe couplé pour des opérateurs de type-PATA définis sur des espaces métriques partiels complets et ordonnés.

4.1 Quelques Définitions

Définition 1 Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. L'espace produit $X \times X$ est muni de l'ordre $\leq$ partiel, tel que pour tout $(x, y), (u, v) \in X \times X$,

$$(u, v) \leq (x, y) \Leftrightarrow u \leq x \text{ et } y \leq v.$$

Définition 2 Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné et $F : X \times X \to X$. On dit que F vérifie la propriété de monotone mixte si la fonction $F(x, y)$ est croissantes en x et décroissante en y.
Autrement dit

$$\forall x_1, x_2, y \in X, \quad x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$$

et

$$\forall y_1, y_2, x \in X, \quad y_1 \leq y_2 \quad \Rightarrow F(x, y_2) \leq F(x, y_1).$$

Définition 3 Un élément $(x, y) \in X \times X$ est appelé un point fixe couplé de l'application $F : X \times X \to X$ ou

$$x = F(x, y), \qquad \text{et} \qquad y = F(y, x).$$

Définition 4 Soit (X, d) un espace métrique. L'application $\bar{d} : X^2 \times X^2 \to [0, \infty)$ qui est définie pour tout $((x, y), (u, v)) \in X^2 \times X^2$ par :

$$\bar{d} : [(x, y), (u, v)] = d(x, u) + d(y, v)$$

est une distance sur $X^2 \times X^2$, qui sera également notée d .
Soit (X, d),un espace métrique en sélectionnant un arbitraire $(x_0, y_0) \in X \times X$ et on note :

$$||(x, y)|| = d\left[(x, y), (x_0, y_0)\right], \quad \forall (x, y) \in X \times X.$$

Soit $\psi : [0, 1] \to [0, \infty)$ une fonction croissante s'annulant par continuité en zéro.

Nous considérons la suite de la fonction ω_n définie pour $\alpha \geq 1$, par :

$$w_n(\alpha) = (\frac{\alpha}{n})^\alpha \sum_{k=1}^{n} \psi(\frac{\alpha}{k}).$$

4.2 Théorèmes du point fixe couplé

Théorème 4.1

Soit $(X, d, \leq)$ un espace métrique ordonné. complet. Nous considérons $F : X \times X \rightarrow X$ une application continue ayant la propriété de monotone mixte sur X . Supposons qu'il existe $x_0, y_0 \in X$, tels que :

$$x_0 \leq F(x_0, y_0) \quad et \quad F(y_0, x_0) \leq y_0 \qquad (4.1).$$

Soit $\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1$ et $\beta \in [0, \alpha]$ des constantes positive.
Si l'inégalité

$$d(F(x,y), F(u,v)) \leq \frac{1-\epsilon}{2} d[(x,y),(u,v)] + \Lambda \epsilon^\alpha \psi(\epsilon) \left[1 + ||x,y|| + ||u,v||\right]^\beta \qquad (4.2)$$

est satisfaite pour tout $\epsilon \in [0,1]$ et pour tout $(x,y),(u,v) \in X \times X$ avec $u \leq x, y \leq v$, alors F admet un point fixe couplé (x^*, y^*).
De plus, on a :

$$d[(x^*, y^*), (F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0))] \leq K\omega_n(\alpha), \qquad (4.3)$$

où $K \leq 2\Lambda \left(1 + 4||x^*, y^*|| + 4d(x_0, y_0)\right)^{\beta}$, et $F^n = F \circ ..... \circ F$ (n fois).

Preuve :

Posons $F(x_0, y_0) = x_1$ et $F(y_0, x_0) = y_1$.

De (4.1), on a :

$$x_0 \leq x_1, \quad y_1 \leq y_0.$$

En posant $x_2 = F(x_1, y_1), y_2 = F(y_1, x_1)$ et en utilisant la notation F^n, il vient que :

$$F^2(x_0, y_0) = F(F(x_0, y_0), F(y_0, x_0)) = F(x_1, y_1) = x_2, \qquad (*)$$

et

$$F^2(y_0, x_0) = F(F(y_0, x_0), F(x_0, y_0)) = F(y_1, x_1) = y_2. \qquad (**)$$

De (*) et (**) et par la propriété de monotone mixte de F, il en résulte que :

$$x_1 = F(x_0, y_0) \leq F(x_1, y_1) = F^2(x_0, y_0) = x_2,$$

et

$$y_2 = F^2(y_0, x_0) = F(y_1, x_1) \leq F(y_0, x_0) = y_1.$$

Par une simple itérationsur n, on obtient deux suites $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ telles que :

$$x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq ...$$

et

$$y_n \leq y_{n-1} \leq \cdots \leq y_0$$

On pose pour chaque entiers n :

$$x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}) = F^n(x_0, y_0),$$

et

$$y_n = F(y_{n-1}, x_{n-1}) = F^n(y_0, x_0), \qquad C_n = ||F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)||.$$

• La suite $(C_n)_n$ est bornée

En effet, Puisque (4.2) est vraie pour tout $\epsilon \in [0, 1]$, donc on peut choisi $\epsilon = 0$, on trouve pour chaque entiers n :

$$\begin{aligned}
& d((x_{n+1}, y_{n+1}), (x_n, y_n)) \\
= \; & d\left[(F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0)), (F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0))\right] \\
= \; & d\left[F^{n+1}(x_0, y_0), F^n(x_0, y_0)\right] + d\left[F^{n+1}(y_0, x_0), F^n(y_0, x_0)\right] \\
= \; & d\left[F(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)), F(F^{n-1}(x_0, y_0), F^{n-1}(y_0, x_0))\right] \\
& +d\left[F(F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0)), F(F^{n-1}(y_0, x_0), F^{n-1}(x_0, y_0))\right] \\
\leq \; & \frac{1}{2}d\left[(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)), (F^{n-1}(x_0, y_0), F^{n-1}(y_0, x_0))\right] \\
& +\frac{1}{2}d\left[(F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0)), (F^{n-1}(y_0, x_0), F^{n-1}(x_0, y_0))\right] \\
= \; & \frac{1}{2}d\left[F^n(x_0, y_0), F^{n-1}(x_0, y_0)\right] + \frac{1}{2}d\left[F^n(y_0, x_0), F^{n-1}(y_0, x_0)\right] \\
& +\frac{1}{2}d\left[F^n(y_0, x_0), F^{n-1}(y_0, x_0)\right] \\
& +\frac{1}{2}d\left[F^n(x_0, y_0), F^{n-1}(x_0, y_0)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d\left[F^n(x_0,y_0),F^{n-1}(x_0,y_0)\right]+d\left[F^n(y_0,x_0),F^{n-1}(y_0,x_0)\right]\\
&= d\left[(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0)),(F^{n-1}(x_0,y_0),F^{n-1}(y_0,x_0))\right]\\
&= d((x_n,y_n),(x_{n-1},y_{n-1}))\\
&\leq d((x_{n-1},y_{n-1}),(x_{n-2},y_{n-2}))\\
&\quad .\\
&\quad .\\
&\quad .\\
&\leq d((x_1,y_1),(x_0,y_0))=C_1
\end{aligned}$$

Donc

$$d\left[(F^{n+1}(x_0,y_0),F^{n+1}(y_0,x_0)),(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0))\right]\leq C_1. \tag{4.4}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
&d\left[(F^{n+1}(x_0,y_0),F^{n+1}(y_0,x_0)),(x_0,y_0)\right]\\
&\leq d\left[(F^{n+1}(x_0,y_0),F^{n+1}(y_0,x_0)),(F(x_0,y_0),F(y_0,x_0))\right]\\
&+d\left[(F(x_0,y_0),F(y_0,x_0)),(x_0,y_0)\right]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
&d\left[(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0)),(x_0,y_0)\right]\\
&\leq d\left[(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0)),(F^{n+1}(x_0,y_0),F^{n+1}(y_0,x_0))\right]\\
&+d\left[(F^{n+1}(x_0,y_0),F^{n+1}(y_0,x_0)),(x_0,y_0)\right]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

En utilisant **(4.2)**, **(4.4)**, **(4.5)** et **(4.6)**, nous avons

$$
\begin{aligned}
C_n &= d\left[(x_n, y_n), (x_0, y_0)\right] \\
&= d\left[(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)), (x_0, y_0)\right] \\
&\leq d\left[(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)), (F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0))\right. \\
&\quad \left.+d\left[(F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0)), (x_0, y_0)\right]\right. \\
&\leq C_1 + d\left[(F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0)), (x_0, y_0)\right] \\
&\leq C_1 + d\left[(F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0)), (F(x_0, y_0), F(y_0, x_0))\right] \\
&\quad +d\left[(F(x_0, y_0), F(y_0, x_0)), (x_0, y_0)\right] \\
&\leq C_1 + d\left[(F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0)), (F(x_0, y_0), F(y_0, x_0))\right] \\
&\quad +d\left[(x_1, y_1), (x_0, y_0)\right] \\
&\leq C_1 + d\left[(F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0)), (F(x_0, y_0), F(y_0, x_0))\right] + C_1 \\
&= d\left[(F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0)), (F(x_0, y_0), F(y_0, x_0))\right] + 2C_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= d\left[F^{n+1}(x_0, y_0), F(x_0, y_0)\right] + d\left[F^{n+1}(y_0, x_0), F(y_0, x_0)\right] + 2C_1 \\
&= d\left[F(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)), F(x_0, y_0)\right] \\
&\quad +d\left[F(F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0)), F(y_0, x_0)\right] + 2C_1 \\
&\leq \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)), (x_0, y_0)\right] \\
&\quad +\Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)|| + ||x_0, y_0||\right]^{\beta} \\
&\quad +\frac{1-\epsilon}{2} d\left[(F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0)), (y_0, x_0)\right] \\
&\quad +\Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0)|| + ||y_0, x_0||\right]^{\beta} + 2C_1.
\end{aligned}
$$

Mais d'après la définition de $||.||$, nous avons :

$$
\left[1 + ||(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0))|| + ||(x_0, y_0)||\right] \leq 1 + C_n \leq 1 + C_n + 4d(x_0, y_0),
$$

et

$$[1+||(F^n(y_0,x_0),F^n(x_0,y_0))||+||(y_0,x_0)||]\leq 1+C_n\leq 1+C_n+4d(x_0,y_0).$$

Donc pour $\alpha\geq\beta$ il existe des $E,D>0$, tels que :

$$\begin{aligned}
C_n &\leq \frac{1-\epsilon}{2}C_n+\Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1+C_n+4d(x_0,y_0)\right]^{\beta}\\
&\quad+\frac{1-\epsilon}{2}C_n+\Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1+C_n+4d(x_0,y_0)\right]^{\beta}+2C_1\\
&= (1-\epsilon)C_n+2\Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1+C_n+4d(x_0,y_0)\right]^{\beta}+2C_1\\
&\leq (1-\epsilon)C_n+E\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)C_n^{\alpha}+D.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$C_n-(1-\epsilon)C_n\leq E\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)C_n^{\alpha}+D.$$

Ce qui impliquent que

$$\epsilon C_n\leq E\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)C_n^{\alpha}+D,$$

ce qui est vrai par hypothèse pour tout $\epsilon\in[0,1]$ et pour chaque $n\in\mathbb{N}$.
S'il existe une sous-suite $(C_{n_k})_k$ Tel que : $C_{n_k}\to\infty$, alors le choix, $\epsilon_{n_k}=min(1,\frac{1+D}{C_{n_k}})$ conduit à la contradiction suivante :

$$1\leq E(1+D)^{\alpha}\psi(\epsilon_{n_k})\to 0 \quad pour \quad n_k\to\infty.$$

Alors la suite $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

• Les deux suites $\{F^n(x_0,y_0)\}$ et $\{F^n(y_0,x_0)\}$ sont de Cauchy dans X.

En effet, on a :

$$
\begin{aligned}
& d\left[F^{n+m+1}(x_0,y_0), F^{n+1}(x_0,y_0)\right] + d\left[F^{n+m+1}(y_0,x_0), F^{n+1}(y_0,x_0)\right] \\
&\quad = d\left[F(F^{n+m}(x_0,y_0), F^{n+m}(y_0,x_0)), F(F^{n}(x_0,y_0), F^{n}(y_0,x_0))\right] \\
&\qquad + d\left[F(F^{n+m}(y_0,x_0), F^{n+m}(x_0,y_0)), F(F^{n}(y_0,x_0), F^{n}(x_0,y_0))\right] \\
&\quad \leq \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(F^{n+m}(x_0,y_0), F^{n+m}(y_0,x_0)), (F^{n}(x_0,y_0), F^{n}(y_0,x_0))\right] \\
&\qquad + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||F^{n+m}(x_0,y_0), F^{n+m}(y_0,x_0)|| + ||F^{n}(x_0,y_0), F^{n}(y_0,x_0)||\right]^{\beta} \\
&\qquad + \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(F^{n+m}(y_0,x_0), F^{n+m}(x_0,y_0)), (F^{n}(y_0,x_0), F^{n}(x_0,y_0))\right] \\
&\qquad + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + ||F^{n+m}(y_0,x_0), F^{n+m}(x_0,y_0)|| + ||F^{n}(y_0,x_0), F^{n}(x_0,y_0)||\right]^{\beta}.
\end{aligned}
$$

Comme

$$
\begin{aligned}
& ||F^{n+m}(x_0,y_0), F^{n+m}(y_0,x_0)|| + ||F^{n}(x_0,y_0), F^{n}(y_0,x_0)|| \\
& \leq C_{n+m} + C_n \\
& \leq C_{n+m} + C_n + 4d(x_0,y_0),
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
& ||F^{n+m}(y_0,x_0), F^{n+m}(x_0,y_0)|| + ||F^{n}(y_0,x_0), F^{n}(x_0,y_0)|| \\
& \leq C_{n+m} + C_n \leq C_{n+m} + C_n + 4d(x_0,y_0).
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
& d\left[F^{n+m+1}(x_0,y_0), F^{n+1}(x_0,y_0)\right] + d\left[F^{n+m+1}(y_0,x_0), F^{n+1}(y_0,x_0)\right] \\
& \leq \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(F^{n+m}(x_0,y_0), F^{n+m}(y_0,x_0)), (F^{n}(x_0,y_0), F^{n}(y_0,x_0))\right] \\
& \quad + \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(F^{n+m}(y_0,x_0), F^{n+m}(x_0,y_0)), (F^{n}(y_0,x_0), F^{n}(x_0,y_0))\right] \\
& \quad + 2\Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + C_{n+m} + C_n + 4d(x_0,y_0)\right]^{\beta} \\
& \leq \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(F^{n+m}(x_0,y_0), F^{n}(x_0,y_0)) + d(F^{n+m}(y_0,x_0), F^{n}(y_0,x_0))\right] \\
& \quad + \frac{1-\epsilon}{2}\left[d(F^{n+m}(y_0,x_0), F^{n}(y_0,x_0)) + d(F^{n+m}(x_0,y_0), F^{n}(x_0,y_0))\right] \\
& \quad + 2\Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + C_{n+m} + C_n + 4d(x_0,y_0)\right]^{\beta} \\
& \leq (1-\epsilon)\left[d(F^{n+m}(x_0,y_0), F^{n}(x_0,y_0)) + d(F^{n+m}(y_0,x_0), F^{n}(y_0,x_0))\right] \\
& \quad + 2\Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + C_{n+m} + C_n + 4d(x_0,y_0)\right]^{\beta}. \qquad (***)
\end{aligned}
$$

Pour tout entiers n on pose :

$$K = \sup_{n\in\mathbb{N}} 2\Lambda\left[1 + 2C_n + 4d(x_0,y_0)\right]^{\beta}, \qquad \mathbf{(4.7)}$$

$$et \qquad \epsilon = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq \frac{\alpha}{n+1}.$$

Donc, en reportant k et ϵ dans (***) , il vient que :

$$
\begin{aligned}
& d\left[F^{n+m+1}(x_0,y_0), F^{n+1}(x_0,y_0)\right] + d\left[F^{n+m+1}(y_0,x_0), F^{n+1}(y_0,x_0)\right] \\
& \leq (1 - (1 - (\frac{n}{n+1})^{\alpha}))\left[d(F^{n+m}(x_0,y_0), F^{n}(x_0,y_0)) + d(F^{n+m}(y_0,x_0), F^{n}(y_0,x_0))\right] \\
& \quad + K(\frac{\alpha}{n+1})^{\alpha}\psi(\frac{\alpha}{n+1}).
\end{aligned}
$$

Ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned}
& d\left[F^{n+m+1}(x_0,y_0),F^{n+1}(x_0,y_0)\right]+d\left[F^{n+m+1}(y_0,x_0),F^{n+1}(y_0,x_0)\right] \\
& \quad \leq \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}\left[d(F^{n+m}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0))+d(F^{n+m}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0))\right] \\
& \quad\quad +K\frac{\alpha^\alpha}{(n+1)^\alpha}\psi(\frac{\alpha}{n+1}).
\end{aligned}$$

Autrement dit

$d\left[F^{n+m+1}(x_0,y_0),F^{n+1}(x_0,y_0)\right]+d\left[F^{n+m+1}(y_0,x_0),F^{n+1}(y_0,x_0)\right]$

$\leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}\left[n^\alpha\left(d(F^{n+m}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0))+d(F^{n+m}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0))\right)+K\alpha^\alpha\psi(\frac{\alpha}{n+1})\right].$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
& (n+1)^\alpha\left(d\left[F^{n+m+1}(x_0,y_0),F^{n+1}(x_0,y_0)\right]+d\left[F^{n+m+1}(y_0,x_0),F^{n+1}(y_0,x_0)\right]\right) \\
& \quad \leq n^\alpha\left[d(F^{n+m}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0))+d(F^{n+m}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0))\right] \\
& \quad +K\alpha^\alpha\psi(\frac{\alpha}{n+1}). \qquad \textbf{(4.8)}
\end{aligned}$$

En posant ,

$$r_n=n^\alpha\left[d(F^{n+m}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0))+d(F^{n+m}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0))\right]$$

l'inégalité (4.8) , nous donne :

$$\begin{aligned}
r_{n+1} &\leq r_n+K\alpha^\alpha\psi(\frac{\alpha}{n+1}) \\
&\leq r_{n-1}+K\alpha^\alpha\psi(\frac{\alpha}{n})+K\alpha^\alpha\psi(\frac{\alpha}{n+1}).
\end{aligned}$$

Par une simple itération sur n, on trouve :

$$r_{n+1} \leq r_0+K\alpha^\alpha\sum_{k=1}^{n+1}\psi(\frac{\alpha}{k})$$

$$= \quad K\alpha^{\alpha}\sum_{k=1}^{n+1}\psi(\frac{\alpha}{k}). \qquad car \quad r_0 = 0.$$

Donc

$$r_n \leq K\alpha^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi(\frac{\alpha}{k}), \tag{4.9}$$

De (4.8) et (4.9), il en résulte :

$$n^{\alpha}\left[d(F^{n+m}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)) + d(F^{n+m}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0))\right] \leq K\alpha^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi(\frac{\alpha}{k}).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} d(F^{n+m}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)) + d(F^{n+m}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0)) &\leq K\frac{\alpha^{\alpha}}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\psi(\frac{\alpha}{k}) \\ &= K(\frac{\alpha}{n})^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi(\frac{\alpha}{k}) \\ &= Kw_n(\alpha) \qquad \mathbf{(4.10)} \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité (4.10), on obtient :

$$d(F^{n+m}(x_0,y_0),F^n(x_0,y_0)) + d(F^{n+m}(y_0,x_0),F^n(y_0,x_0)) \to 0$$

Cela implique que $\{F^n(x_0,y_0)\}$ et $\{F^n(y_0,x_0)\}$ sont deux suites de Cauchy dans X qui est complet, donc il existe $x^*, y^* \in X$ tels que :

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x_0,y_0) = \lim_{n\to\infty} x_n = x^* \quad et \quad \lim_{m\to\infty} F^m(y_0,x_0) = \lim_{m\to\infty} y_m = y^*.$$

En utilisant **(4.10)** et la **Définition 4**, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} d\left[(x^*, y^*), (F(x_{n-1}, y_{n-1}), F(y_{n-1}, x_{n-1}))\right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} d\left[(x^*, y^*), (F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0))\right] \\
&\quad = \lim_{n,m\to\infty} d\left[(F^{n+m}(x_0, y_0), F^{n+m}(y_0, x_0), (F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0))\right] \\
&\quad = \lim_{n,m\to\infty} \left(d(F^{n+m}(x_0, y_0), F^n(x_0, y_0)) + d(F^{n+m}(y_0, x_0), F^n(y_0, x_0))\right) \\
&\quad \leq \lim_{n\to\infty} Kw_n(\alpha) = 0,
\end{aligned}$$

et à partir de la continuité de F on a $d((x^*, y^*), (F(x^*, y^*), F(y^*, x^*))) = 0$, donc

$$d(x^*, F(x^*, y^*)) + d(y^*, F(y^*, x^*)) = 0.$$

On conclut que $d(x^*, F(x^*, y^*)) = d(y^*, F(y^*, x^*)) = 0$.

D'où $x^* = F(x^*, y^*)$ et $y^* = F(y^*, x^*)$.

On conclut que F admet un point fixe couplé

Maintenant, montrons (4.3). On a (x^*, y^*) un point fixe couplé, donc par définition

$$\begin{aligned}
&d\left[(x^*, y^*), (F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0))\right] \\
&\quad = d\left[(F(x^*, y^*), F(y^*, x^*)), (F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0))\right] \\
&\quad = d\left[F(x^*, y^*), F^n(x_0, y_0)\right] + d\left[F(y^*, x^*), F^n(y_0, x_0)\right] \\
&\quad = d\left[F(x^*, y^*), F(F^{n-1}(x_0, y_0), F^{n-1}(y_0, x_0))\right] \\
&\quad\quad + d\left[F(y^*, x^*), F(F^{n-1}(y_0, x_0), F^{n-1}(x_0, y_0))\right]
\end{aligned}$$

En utilisant **(4.2)** pour $\epsilon = 0$ on trouve :

$$\begin{aligned}
& d\left[F(x^*,y^*),F(F^{n-1}(x_0,y_0),F^{n-1}(y_0,x_0))\right] \\
&\quad +d\left[F(y^*,x^*),F(F^{n-1}(y_0,x_0),F^{n-1}(x_0,y_0))\right] \\
&\leq \frac{1}{2}d\left[(x^*,y^*),(F^{n-1}(x_0,y_0),F^{n-1}(y_0,x_0))\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}d\left[(y^*,x^*),(F^{n-1}(y_0,x_0),F^{n-1}(x_0,y_0))\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[d(x^*,F^{n-1}(x_0,y_0))+d(y^*,F^{n-1}(y_0,x_0))\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[d(y^*,F^{n-1}(y_0,x_0))+d(x^*,F^{n-1}(x_0,y_0))\right] \\
&= d(x^*,F^{n-1}(x_0,y_0))+d(y^*,F^{n-1}(y_0,x_0)) \\
&= d\left[(x^*,y^*),(F^{n-1}(x_0,y_0),F^{n-1}(y_0,x_0))\right].
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
& d\left[(x^*,y^*),(F^{n}(x_0,y_0),F^{n}(y_0,x_0))\right] \\
&\quad \leq d\left[(x^*,y^*),(F^{n-1}(x_0,y_0),F^{n-1}(y_0,x_0))\right] \\
&\quad \leq d\left[(x^*,y^*),(F^{n-2}(x_0,y_0),F^{n-2}(y_0,x_0))\right] \\
&\quad \leq d\left[(x^*,y^*),(F^{n-3}(x_0,y_0),F^{n-3}(y_0,x_0))\right] \\
&\qquad . \\
&\qquad . \\
&\qquad . \\
&\quad \leq d\left[(x^*,y^*),(F^{0}(x_0,y_0),F^{0}(y_0,x_0))\right] \\
&\quad = d\left[(x^*,y^*),(x_0,y_0)\right] = ||x^*,y^*||.
\end{aligned}$$

Donc

$$d\left[(x^*,y^*),(F^{n}(x_0,y_0),F^{n}(y_0,x_0))\right] \leq ||x^*,y^*|| \quad (4.11)$$

Selon (4.11) et la propriété de l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} C_n &= d\left[(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0)),(x_0,y_0)\right] \\ &\leq d\left[(F^n(x_0,y_0),F^n(y_0,x_0)),(x^*,y^*)\right]+d\left[(x^*,y^*),(x_0,y_0)\right] \\ &\leq 2||x^*,y^*||. \qquad (4.12) \end{aligned}$$

Selon (4.12) et (4.7) on a

$$K \leq 2\Lambda(1+4||x^*,y^*||+4d(x_0,y_0))^\beta.$$

Exemple

Soit $X=[-2,2]$ munit de l'ordre et la distance usuelle : $d(x,y)=|x-y|$, pour tout $x,y\in X$.

Il est clair que (X,d) est un espace métrique complet , et $(X,\leq)$ est un espace métrique ordonné.

Soit $d: X^2\times X^2\to\mathbb{R}^+$ une distance définie par :

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|, \quad \forall x_i,y_i\in X(i=1,2).$$

Considérons l'application F définie par : $F(x,y)=1$,

on a :

$$0\leq\frac{(1-\epsilon)}{2}d\left[(x,y),(u,v)\right]+\Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1+||x,y||+||u,v||\right]^\beta,$$

Où $\forall\Lambda\geq0,\alpha\geq1$ et $\beta\in[0,\alpha]$, $\frac{(1-\epsilon)}{2}\geq0$ implique que $\epsilon\in[0,1]$.

De plus , on a pour $(0,2)\in X\times X$, $0\leq F(0,2)$ et $F(2,0)\leq2$. Toutes les conditions du Théorème 4.1 sont satisfaite.

Soit le système $\begin{cases} F(x,y) = x \\ F(y,x) = y \end{cases}$

qui implique que $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Le couple $(1,1)$ est le point fixe couplé pour l'application F.

Théorème 4.2

Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné et supposons qu'il existe une distance d définie sur X telle que (X, d) soit un espace métrique complet. Soit $F : X \times X \to X$ une application ayant la propriété monotone mixte sur X.

Soit $x_0, y_0 \in X$, tels que :

$$x_0 \leq F(x_0, y_0) \quad et \quad F(y_0, x_0) \leq y_0.$$

Soit $\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1$, et $\beta \in [0, \alpha]$ des constantes. Supposons que l'inégalité suivante :

$$d(F(x,y), F(u,v)) \leq \frac{1-\epsilon}{2} d[(x,y),(u,v)] + \Lambda \epsilon^{\alpha} \psi(\epsilon) \left[1 + ||x,y|| + ||u,v||\right]^{\beta} \qquad (4.2.1)$$

est satisfaite pour tout $\epsilon \in [0,1]$ et pour tout $(x,y),(u,v) \in X \times X$ avec $u \leq x$, $y \leq v$.

De plus, supposons que X ait les propriétés suivantes :

(i) pour une suite non décroissante $x_n \to x$, alors $x_n \leq x$ pour tout $n \in N$,

(ii) pour une suite non croissante $y_n \to y$, alors $y \leq y_n$ pour tout $n \in N$.

Alors F a un point fixe couplé (x^*, y^*).

De plus,

$$d\left[(x^*, y^*), (F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0))\right] \leq Kw_n(\alpha), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

où K est une constante positive, vérifie $K \leq 2\Lambda(1 + 4||x^*, y^*|| + 4d(x_0, y_0))^\beta$.

Preuve :

Il suffit de prouver que $x^* = F(x^*, y^*)$ et $y^* = F(y^*, x^*)$.

On a :

$$\begin{aligned}
& d\left[(x^*, y^*), (F(x^*, y^*), F(y^*, x^*))\right] \\
& \quad \leq d\left[(x^*, y^*), (F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0))\right] \\
& \qquad + d\left[(F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0)), (F(x^*, y^*), F(y^*, x^*))\right] \\
& \quad = d\left[(x^*, y^*), (F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0))\right] \\
& \qquad + d\left[(F(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)), F(F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0))), (F(x^*, y^*), F(y^*, x^*))\right] \\
& \quad = d\left[(x^*, y^*), (F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0))\right] \\
& \qquad + d\left[F(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)), F(x^*, y^*)\right] + d\left[F(F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0)), F(y^*, x^*)\right] \\
& \quad \leq d\left[(x^*, y^*), (F^{n+1}(x_0, y_0), F^{n+1}(y_0, x_0))\right] \\
& \qquad + \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)), (x^*, y^*)\right] \\
& \qquad + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)|| + ||x^*, y^*||\right]^\beta \\
& \qquad + \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0)), (y^*, x^*)\right] \\
& \qquad + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + ||F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0)|| + ||y^*, x^*||\right]^\beta.
\end{aligned}$$

Suivant le même raisonnement fait dans le Théorème 4.1, on peut démontrer que :

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} x_n = x^* \quad et \quad \lim_{m\to\infty} F^m(y_0, x_0) = \lim_{m\to\infty} y_m = y^*,$$

et puisque la condition (4.2.1) est vraie pour toute constante réelle $\epsilon \in [0,1]$, on peut remplacer ϵ, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, par une suite $[0,1] \ni \epsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$. En faisant $\epsilon = \epsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$, il vient que :

$$d\left[(x^*, y^*), (F(x^*, y^*), F(y^*, x^*))\right] = 0.$$

C'est à dire

$$(x^*, y^*) = (F(x^*, y^*), F(y^*, x^*))$$

D'où $x^* = F(x^*, y^*)$ et $y^* = F(y^*, x^*)$.

Ce qui prouve que (x^*, y^*) est un point couplé de l'application F.

Définition 5

Supposons que X est un espace métrique partiellement ordonné .

On dit qu'un couple $(x, y), (x^*, y^*) \in X \times X$ a un point de milieu (z_1, z_2), borné inferieurement ou borné superieurement, s'il vérifie la condition suivante :

$$d[(x, y), (z_1, z_2)] + d[(z_1, z_2), (x^*, y^*)] = d[(x, y), (x^*, y^*)]. \qquad (\mathbf{A})$$

Théorème 4.3

En ajoutant la condition (**A**) aux hypothèse du **Théorème 4.2**, on obtient l'unicité du point fixe couplé de F.

Preuve :

Soit $(x, y) \in X \times X$ un autre point fixe couplé de l'application F avec $x = F(x, y)$, $y = F(y, x)$.

Alors nous avons deux cas.

• 1^{er} Cas : Si (x^*, y^*) est comparable à (x, y), alors :

$$\begin{aligned}
d[(x,y),(x^*,y^*)] &= d\left[(F(x,y),F(y,x)),(F(x^*,y^*),F(y^*,x^*))\right] \\
&= d\left[F(x,y),F(x^*,y^*)\right] + d\left[F(y,x),F(y^*,x^*)\right] \\
&\leq \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(x,y),(x^*,y^*)\right] + t_1\epsilon\psi(\epsilon) \\
&\quad + \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(y,x),(y^*,x^*)\right] + t_2\epsilon\psi(\epsilon) \\
&= \frac{1-\epsilon}{2}\left(d\left[(x,y),(x^*,y^*) + d\left[(y,x),(y^*,x^*)\right]\right)\right. \\
&\quad + t_1\epsilon\psi(\epsilon) + t_2\epsilon\psi(\epsilon) \\
&= \frac{1-\epsilon}{2}\left(d(x,x^*) + d(y,y^*) + d(y,y^*) + d(x,x^*)\right) \\
&\quad + t_1\epsilon\psi(\epsilon) + t_2\epsilon\psi(\epsilon) \\
&= (1-\epsilon)\left(d(x,x^*) + d(y,y^*)\right) + t_1\epsilon\psi(\epsilon) + t_2\epsilon\psi(\epsilon) \\
&= (1-\epsilon)\left(d[(x,y),(x^*,y^*)]\right) + t_1\epsilon\psi(\epsilon) + t_2\epsilon\psi(\epsilon).
\end{aligned}$$

Par suite

$$\epsilon d[(x,y),(x^*,y^*)] \leq t\epsilon\psi(\epsilon), \text{ où } \quad t = t_1 + t_2$$

qui est valable pour tout $\epsilon \in [0,1]$. On peut remplacer ϵ par une suite $(\epsilon_n)_n \in [0,1]$, tel que : $\epsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$ on conclut $d[(x,y),(x^*,y^*)] = 0$.
D'où

$$(x,y) = (x^*,y^*)$$

• $2^{ème}$Cas : Si (x^*, y^*) n'est pas comparable à (x, y) , alors il existe une borne moyenne supérieure ou une borne moyenne inférieure $(u, v) \in X \times X$ pour (x^*, y^*) et (x, y).
Donc $(z_1, z_2) = (F(u, v), F(v, u))$ est comparable à $(x^*, y^*) = (F(x^*, y^*), F(y^*, x^*))$ et $(x, y) = (F(x, y), F(y, x))$.
Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
d[(x,y),(x^*,y^*)] &= d\left[(F(x,y),F(y,x)),(F(x^*,y^*),F(y^*,x^*))\right] \\
&\leq d\left[(F(x,y),F(y,x)),(F(u,v),F(v,u))\right] \\
&\quad + d\left[(F(u,v),F(v,u)),(F(x^*,y^*),F(y^*,x^*))\right] \\
&= d\left[F(x,y),F(u,v)\right] + d\left[F(y,x),F(v,u)\right] \\
&\quad + d\left[F(u,v),F(x^*,y^*)\right] + d\left[F(v,u),F(y^*,x^*)\right] \\
&\leq \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(x,y),(u,v)\right] + t_1\epsilon\psi(\epsilon) \\
&\quad + \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(y,x),(v,u)\right] + t_2\epsilon\psi(\epsilon) \\
&\quad + \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(u,v),(x^*,y^*)\right] + t_3\epsilon\psi(\epsilon) \\
&\quad + \frac{1-\epsilon}{2} d\left[(v,u),(y^*,x^*)\right] + t_4\epsilon\psi(\epsilon).
\end{aligned}$$

pour certains $t_1, t_2, t_2, t_4 > 0$.

On pose $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, on trouve :

$$d[(x,y),(x^*,y^*)] \leq (1-\epsilon)\left[d(x,u) + d(y,v) + d(u,x^*) + d(v,y^*)\right] + t\epsilon\psi(\epsilon).$$

Maintenant, selon la **Définition 5**, On a :

$$d[(x,y),(x^*,y^*)] \leq (1-\epsilon)\left[+d(x,x^*) + d(y,y^*)\right] + t\epsilon\psi(\epsilon).$$

Ce qui implique que

$$\epsilon d[(x,y),(x^*,y^*)] \leq +t\epsilon\psi(\epsilon),$$

pour tout $\epsilon \in [0,1]$. On peut remplacer ϵ, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, par la suite $[0,1] \ni (\epsilon_n)_n \to 0$ quand $n \to \infty$, ce qui montre que $d[(x,y),(x^*,y^*)] = 0$.

D'où $(x,y) = (x^*,y^*)$ est l'unique point couplé de F .

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité du point fixe de type Chatterjea et de type Pata. Nous avons présenté quelques théorèmes du point fixe commun pour des opérateurs univoques définis sur un ensemble X dans un espace métrique complet E.

Des conditions suffisantes sur la topologie de l'espace E et sur les opérateurs ont été établi. Le travail effectué dans ce mémoire peut-être complété par des travaux en contribuant à améliorer certains résultats récents.

Bibliographie

[1] Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fund. math, 3(1), 133-181.

[2] Bhaskar, T. G., Lakshmikantham, V. (2006). Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications. Nonlinear analysis : theory, methods applications, 65(7), 1379-1393.

[3] Boulacheb, N., Hamaizia, T. (2019). Etude de Certaines Théorèmes du Point Fixe.

[4] Beloul, S. (2016). Conditions contractives généralisées, points fixes communs et applications (Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider-Biskra).

[5] Chatterjea, S. K., Fixed point theorems CR Acad. Bulgare SCI.25 (1972), 727-730.

[6] Chugh, R., Kumar, S. (2001, May). Common fixed points for weakly compatible maps. In Proceedings of The Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences (Vol. 111, No. 2, pp. 241-247). Springer India.

[7] Eshaghi, M., Mohseni, S., Delavar, M. R., De La Sen, M., Kim, G. H., Arian, A. , Pata contractions and coupled type fixed points. Fixed Point Theory and Applications, 2014(1), 1-10.

[8] Kadelburg, Z., Radenovié, S., Fixed point theorems under Pata-type condi-

tions in metric spaces. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 24(1),(2016) 77-82.

[9] Pata, V. (2011). A fixed point theorem in metric spaces. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 10(2), 299-305.

[10] Radenovic, S., Kadelburg, Z., Jandrli'c, D., Jandrli'c, A. (2012). Some results on weakly contractive maps. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 38(3), 625-645.