MINISTÉRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ M'HAMED BOUGARA-BOUMERDES

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : **Analyse**

Présenté par : ***Mahmoudi Néïma***

Sur quelques théorèmes de point fixe de type PATA pour des opérateurs multivoque dans des espaces métriques ordonnés et applications

Soutenue , le 30 septembre 2021 devant le jury composé de :

Seba Djamila	*Prof*	*UMBB*	*Présidente*
Adjabi Yacine	*MCA*	*UMBB*	*Examinateur*
MECHROUK Salima	*MCA*	*UMBB*	*Encadreur*

DÉDICACES

Avec énorme plaisir, un cur reconnaissant et une immense joie je dédie ce mémoire :

- A mes chers parents qui mont soutenu tout au long de ma vie et que Dieu les garde pour moi.

- A mon frère et son épouse pour leur efforts et encouragement.

- A mon jolie et précieux bijou ma petite nièce NELYA NOOR.

- A mes copines : WAHIBA, AMEL, MESOUADA, ILHAME, MERIEM..etc

REMERCIEMENT

Au premier lieu je remercie avant tout Dieu le tout gracieux de mavoir donné le courage pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciement à Madame SALIMA MECHROUK davoir me guider et aider et pour sa patience et ses conseils.

Je remercie également Madame Djamila Seba davoir bien voulu être la présidente et Monsieur ADJABI YACINE comme examinateur.

Je tiens à remercier sincèrement tous le cadre éducatif et administratif pour leurs efforts et compréhensions.

Je tiens à remercier aussi tous mes enseignants durant tous les cycles de mes études.

finalement je remercie mes collègues en cycle master en particulier notre délégué.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous prouvons quelques théorèmes du point fixe de type PATA pour des opérateurs multivoques.

Ces résultats savèrent être un outil efficace pour la théorie du point fixe en analyse multifonctionnelle.

Nous montrons également que les résultats principales nous donne lexistence de solutions dune inclusion différentielle.

INTRODUCTION

En mathématiques et en particulier en Analyse, les théorèmes du point fixe sont considérés comme un outil indispensable pour prouver lexistence de solutions des problèmes aux limites.

Les théorèmes du point fixe sont puissants pour montrer lexistence des solutions des équations et des inclusions différentielles.

L'histoire de la théorie du point fixe a commencée par les travaux de S.Banach dans son papier. Banach a établi l'existence et l'unicité du point fixe d'une contraction dans un espace métrique complet.

En basant sur[7], nous établissons des nouveaux théorèmes de point fixe de type Pata pour des opérateurs multivoques dans des espaces métriques partiellement ordonné, ainsi nous donnons les conditions suffisantes et nécessaires sur lopérateur $T : M \longrightarrow 2^M$ et lespace M pour que $u \in T(u), u \in M$.

Le mémoire est réparti en trois chapitres :

Dans le 1er chapitre on présente quelques définitions et théorèmes dont nous les aurons besoin ultérieurement.

Dans le deuxième chapitre 2, on étudie trois théorèmes de type PATA dans des espaces métriques partiellement ordonnés sous certaines conditions locales.

Le troisième chapitre est consacré à létude dune application en basant sur les résultats de chapitre 2. Le mémoire est clôturé par une conclusion et une bibliographie.

CHAPITRE

1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions topologique (voir la référence [3] et [4]) dont nous aurons besoins tout au long de ce travail.

1.1 Relation d'ordre :

Définition 1.1 [5]

Une relation dordre est une relation binaire sur un ensemble P vérifiant :

1) *réflexive $a \leq a$.*

2)*antisymétrie Si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$.*

3)*transitivité Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$.*

On dit que la relation dordre est total si Pour tous x, y de P : $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Dans le cas contraire, on parle dordre partiel.

Exemples :

1) Lordre « $\leq$ » définie une relation dordre total sur $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ pourtant, nest pas définie sur $\mathbb{C}$.

2) Dans lensemble $\mathbb{N}$ la relation « / » définie un ordre partiel telle que

$$x/y \Leftrightarrow \exists k \in N : y = kx$$

— pour $k = 1$, on a $x = x$,$x \in N$ Donc la relation est réflexive.

— soit $x, y \in \mathbb{N}$ tel que :

$x/y \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = k_1 x$ et $y/x \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} : x = k_2 y$ Alors, pour $k_1 = k_2$, on a $y = x$ Donc la relation est antisymétrique.

— Soit x, y et $z \in \mathbb{N}$ tel que :

$x/y \Leftrightarrow_1 \in \mathbb{N} : y = k_1 x$ et $y/z \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} : z = k_2 y$.

Donc

$$z = k_2 k_1 x$$

On pose :

$$k_3 = k_2 k_1$$

On trouve :

$$k_3 \in \mathbb{N}$$

Donc $x/z \Leftrightarrow \exists k_3 \in \mathbb{N} : z = k_3 x$. Doù x/z Alors la relation est transitive. Donc la relation une relation dordre partiel.

3) Lordre « $\subset$ » définie un ordre partiel sur $P(\Omega)$, où $P(\Omega)$ est lensemble des sous-ensembles de Ω.

1.2 Espace topologique :

Définition 1.2 [5]
On appelle espace topologique un couple (X, T) où X est un ensemble et T une famille de parties de X vérifiant :
(T1) $\phi \in T, X \in T$,
(T2) *Une intersection finie d'éléments de T appartient à T ,*
(T3) *Une réunion quelconque d'éléments de T appartient à T .*
On appelle T la topologie sur X.

Exemple :
L'ensemble $\tau = \left\{\bigcup_{i \in I} B\left(a_i, r_i\right) : Iensemblequelconqueet \forall i \in I, a_i \in E, r_i \geq 0\right\}$est une topologie sur E.

1.3 Espace vectoriel :

Définition 1.3 [5] *Soit K un corps commutatif .Un espace vectoriel sur K est un ensemble E, muni de deux lois :*

— *une loi de composition interne « + » , $+ : E \times E \to E$, appelée addition ou somme vectorielle,*
  $(E, +)$ est un groupe abélien, autrement dit :
  pour tous vecteurs u, v et w de E :

la loi « + » est commutative,

$$u + v = v + u$$

elle est associative,

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

elle admet un élément neutre, pouvant être noté 0 *ou* 0_E*, appelé vecteur nul et,*

$$0_E + v = v$$

tout vecteur v *a un opposé, noté* u

$$u + (-u) = 0_E$$

.

— *une loi de composition externe à gauche « * » :* $K \times E \to E$*, appelée multiplication par un scalaire telle que les propriétées suivantes soient vérifiées. pour tout vecteurs* u, v *de* E *et tout scalaires* λ, μ

elle est distributive à gauche par rapport à la loi « + » de E *et à droite par rapport à l'addition du corps* K*,*

$$\lambda * (u + v) = (\lambda * u) + (\lambda * v)$$

$$(\lambda + \mu) * u = (\lambda * u) + (\mu * u)$$

elle vérifie une associativité mixte (par rapport à la multiplication dans K*),*

$$(\lambda\mu) * u = \lambda * (\mu * u)$$

l'élément neutre multiplicatif du corps K*, noté* 1*, est neutre à gauche pour,*

$$1 * u = u$$

.

1.4 Espace vectoriel topologique :

Définition 1.4 [6] *Un espace vectoriel topologique (e.v.t) est un espace vectoriel E sur un corps topologique K (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munis de leur topologie usuelle) muni d'une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel, vérifiant les conditions suivantes :*

- *La somme de deux vecteurs est une application continue de $E \times E$ dans E ;*
- *Le produit d'un scalaire par un vecteur est une application continue de $K \times E$ dans E .*

1.5 Espace métrique :

Définition 1.5 [6] *On appelle une distance sur E toute application d telle que*
$d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :
Symétrie $\forall (a,b) \in E^2, d(a,b) = d(b,a)$,
Séparation $\forall (a,b) \in E^2, d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,
Inégalité triangulaire $\forall (a,b,c) \in E^3, d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$.
On appelle (E,d) un espace métrique.

Exemple :

La valeur absolue est une distance sur $\mathbb{R}$.

1.6 Espace normé :

Définition 1.6 [6] *Un K-espace vectoriel E est dit normé lorsqu'il est muni d'une norme $N : E \to \mathbb{R}_+$ Satisfaisant les hypothèses suivantes :*
séparation $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$,
homogénéité $\forall (\lambda, x) \in K \times E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
sous-additivité $\forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Remarque :

On pose : pour tout $x, y \in E$

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Donc tout espace normé est métrique.

1.7 Espace des fonctions continues :

Notation 1.1 *On note $C(X,M)$ lespace des fonctions continues de X dans M.*

Théorème 1.1 *Si X est un ensemble et M un espace métrique complet, alors lensemble M^X des applications de X dans M muni de la distance uniforme d_∞, est complet.*

Théorème 1.2 *L'espace $C(X,\mathbb{R})$ est compact si X est compact.*

Théorème 1.3 *Tout espace métrique compact est complet.*

1.8 Tribu ou σ- algèbre :

Définition 1.7 [2] *Soient E un ensemble, T une famille de parties de E i.e $T \in P(E) = 2^E$. La famille T est une tribu (ou on dit une σ- algèbre) sur E si T vérifie :*

- $\phi \in T, E \in T$
- *T est stable par union dénombrable, cest-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déléments de T, on a*
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$$
- *T est stable par intersection dénombrable, cest-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déléments de T, on a*
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$$
- *T est stable par passage au complémentaire, cest-à-dire que pour toute $A \in T$, on a $A^c \in T$.*

1.9 Espace mesurable :

Définition 1.8 [2] *Un espace mesurable est un couple* $(X, \mathscr{A})$ *où* X *est un ensemble et* $\mathscr{A}$ *une tribu sur* X *Les éléments de* $\mathscr{A}$ *sont alors appelés des ensembles mesurables de* X.

1.10 Fonction mesurable

Définition 1.9 [2] *Soient* E *et* F *des espaces mesurables munis de leurs tribus respectives* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{F}$.

Une fonction $f : E \to F$ *est dite mesurable si la tribu image réciproque par* f *de la tribu* $\mathscr{F}$ *est incluse dans* $\mathscr{E}$ *, c'est-à-dire si :*

$$\forall B \in \mathscr{F}, f^{-1}(B) \in \mathscr{E}$$

1.11 Opérateur :

Définition 1.10 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels topologiques. Un opérateur* T *est une application de* E *dans* F *:*

$$T : E \to F$$

1.12 Opérateur multivoque :

Définition 1.11 [6] *On appelle un opérateur multivoque de* M *toute application* T *de* M *dans* 2^Y, *où* 2^Y *désigne lensemble des parties de* Y *non vide. Le domaine de* T *est lensemble*

$$D(T) = \{x \in M, T(x) \neq \phi\}$$

Exemples : On définit l'opérateur multivoque T sur $\mathbb{R}$ par :

$$T(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x > 0, \\ \left\{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\right\} & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

et

$$D(T) = \{x \in \mathbb{R}, T(x) \neq \phi\}$$

Alors

$$D(T) = \mathbb{R}_-$$

On définit l'opérateur multivoque $V : [0,1] \longrightarrow 2^{[0,1]}$, par :

$$V(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{si } x = 0, \\ \{1\} & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

et

$$D(V) = \{x \in \mathbb{R}, V(x) \neq \phi\}$$

Alors

$$D(V) = \mathbb{R}$$

Remarque :

on note : $T(A) = \bigcup_{x \in A} T(x), \forall A \in 2^Y$

Définition 1.12 *Soient M, Y deux ensembles, T est à valeurs compactes si pour tout $x \in M, T(x)$ est compacte.*

1.13 Opérateur réciproque, image inverse

Soit $T : M \to 2^Y$

Définition 1.13 [6] *Soit $x \in M$, et $y \in Y$. on définit lopérateur réciproque T^{-1} de T par : $T^{-1} : Y \to 2^M$. Tel que :*

$$x \in T^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in T(x)$$

Définition 1.14 (6) *Soit B un sous-ensemble de Y ; on appelle*
(a) image inverse stricte de B, lensemble $T^{-1}(B) = \{x \in M, T(x) \in B\}$.
(b) image inverse de B, lensemble $T_+^{-1}(B) = \{x \in M, T(x) \cap B \neq \phi\}$.

1.14 Composition :

Soit $F : X \to 2^Y$ et $G : Y \to 2^Z$ deux opérateurs multivoques.

Définition 1.15 [6] *La composition de F et G est lopérateur multivoque $F \circ G : X \leftarrow 2^Z$ définie par*

$$(F \circ G)(x) = \bigcup_{y \in G(x)} F(y) = \{F(y), y \in G(x)\}, \forall x \in X.$$

Proposition 1.1 *Soit B un sous-ensemble de Z. On a :*
(a) $(F \circ G)^{-1}(B) = G^{-1}(F^{-1}(B))$
(b) $(F \circ G)_{+}^{-1}(B) = G_{+}^{-1}(F_{+}^{-1}(B))$

1.15 Semi-continues-supérieurement :

(Cas des espaces topologiques)
Soit X, Y .deux espaces topologiques.

Définition 1.16 [6] *Soit $F : X \to 2^Y$ un opérateur multivoque.*
(i) On dit que F est semi-continue-supérieurement (s.c.s.) en $x_0 \in X$, si pour tout ouvert $V \subset Y$ tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un voisinage ouvert de x_0, tel que :

$$U \subset F^{-1}(V) i.e F(U) \subset V$$

. *(ii) On dit que F est s.c.s. sur X si F est s.c.s. en tout point de X.*

Exemple :
Soit lopérateur multivoque F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x > 0, \\ \{-1, 1\} & \text{si } x = 0, \\ \{-1\} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

est s.c.s. en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.
En effet, considérons pour tout $x_0 > 0$ (resp $x_0 < 0$) un ouvert quelconque V dans $\mathbb{R}$,

contenant $\{1\}$(V=]0,+ ∞[). On peut choisir $U =]x - \epsilon, x + \epsilon[$, où $\epsilon > 0$ tel que $x - \epsilon > 0$. On a $F(x) = \{1\} \subset V, \forall x \in U$. On choisit aussi pour $x_0 = 0$, V un ouvert contenant $F(0) = \{-1, 1\}$ et un voisinage U quelconque de $x_0 = 0$ dans $\mathbb{R}$, tel que $U =]-\epsilon, \epsilon[$ où $\epsilon > 0$ alors $F(x) \subset V$.

Proposition 1.2 *Si $F : X \to 2^Y$ est un opérateur multivoque, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) F est s.c.s.

(b) Pour tout ouvert V de Y, $F^{-1}(V)$ est un ouvert de X.

(c) Pour tout fermé V de Y, $F_+^{-1}(V)$ est un fermé de X.

1.16 Image d'un compact :

Théorème 1.4 [6] *Soit $F : X \to 2^Y$ un opérateur multivoque s.c.s. Alors limage de tout compact est compact.*

1.17 Équicontinuité :

Définition 1.17 [3] *Soit X un espace métrique, $C(X)$ l'espace des fonctions continue de X dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ muni de la distance :*

$$dist(f, g) = max\, \{|f(x) - g(x)|\} : x \in X$$

Un ensemble $F \subset C(X)$ est dit équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$,il existe $\delta > 0$(δ depend uniquement de ϵ) tel que, $\forall x, y \in X$:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall f$$

Où d est la métrique sur X.

1.18 Ensemble borné :

Définition 1.18 [3] *Soit X un espace métrique, $C(X)$ l'espace des fonctions continue de X dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ muni de la distance :*

$$dist(f, g) = max\{|f(x) - g(x)|\} : x \in X$$

Un ensemble $F \subset C(X)$ est borné, veut dire qu'il existe une constante positive $M < \infty$ telle que$|f(x)| \leq M, \forall x \in X, \forall f \in F$.

1.19 Théorème dAscoli-Arzela

[3] Soit X un espace métrique, $C(X)$ l'espace des fonctions continue de X dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ muni de la distance :

$$dist(f, g) = max\{|f(x) - g(x)|\} : x \in X$$

Si une suite $\{f_n\}_1^\infty$ de $C(X)$ est bornée et équicontinue alors elle a une suite extraite qui converge uniformément

CHAPITRE

2

THÉORÈME DE POINT FIXE DE TYPE PATA POUR LES OPÉRATEURS MULTIVOQUES

2.1 Définitions [8]

Dans ce chapitre, nous allons présenter trois théorèmes de point fixe de type Pata dans les espaces métriques partiellement ordonnés.
Soit M un espace métrique. On a les définitions suivantes.

Définition 2.1 *Soit $(M, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné et $x, y \in X$. On dit que x et y sont comparables si $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

Définition 2.2 *Un sous-ensemble $N \subset M$ est dit approximatif si l'opérateur multivoque*

$$F_N(x) = \{y \in N : d(x, y) = d(N, x)\}, \forall x \in M$$

est non vide.

Définition 2.3 *L'opérateur multivoque $T : M \to 2^M$ est dit qu'il a des valeurs approximatives (VA) si $T(x)$ est approximatives pour tout $x \in M$.*

Définition 2.4 *L'opérateur multivoque $T : M \to 2^M$ est dit qu'il a des valeurs approximatives comparables (VAC) si $T(x)$ est approximatives et pour tout $z \in M$, il existe $y \in F_{T(z)}$ tel que y, z sont comparables.*

Définition 2.5 *L'opérateur multivoque $T : M \to 2^M$ est dit qu'il a des valeurs approximatives comparables supérieurs (VACS) si T a des valeurs approximatives et pour tout $z \in M$, il existe $y \in F_{T(z)}$, tel que $y \geq z$.*

Définition 2.6 *L'opérateur multivoque $T : M \to 2^M$ est dit qu'il a des valeurs approximatives comparables inférieures (VACI) si T a des valeurs approximatives et pour tout $z \in M$, il existe $y \in F_{T(z)}$, tel que $y \leq z$.*

Définition 2.7 *Soit X, Y deux sous-ensembles de M. Nous dénotons $X \leq_r Y$ par :*

$$\forall x \in X, \exists y \in Y \text{ tel que } x \leq_r y.$$

Définition 2.8 *Soit X, Y deux sous-ensembles de M. Nous dénotons $X \leq Y$ par :*

$$\forall x \in X, \exists y \in Y \text{ tel que } x \leq y.$$

Définition 2.9 *L'opérateur multivoque $T : M \to 2^M$ est dit qu'il est r-croissant, si $x \leq y$ implique $Tx \leq_r Ty$, pour tout $x, y \in M$.*

Définition 2.10 *L'opérateur multivoque $T : M \to 2^M$ est dit qu'il est croissant, si $x \leq y$ implique $Tx \leq Ty$, pour tout $x, y \in M$.*

Définition 2.11 *T est dit r-monotone si T est r-croissant ou r-décroissant.*

Remarque : La notion croissant (décroissant) est définie de la même manière que la r-monotonie seulement en écrivant la notion $\leq$ au lieu $\leq_r$.

Définition 2.12 *Soit $\psi : [0, 1] \longrightarrow [0, +\infty)$ une fonction croissante qui s'annule et continuée en zéro . On considère la suite de fonction suivante :*

$$\omega_n(\alpha) = (\alpha/n)^\alpha \sum_{k=1}^{n} \psi(\alpha/k), \alpha \geq 1.$$

Remarque

Soit $x_0 \in M$ et notons dans tout qui suit

$$\|x\| = d(x, x_0), \forall x \in M.$$

2.2 Distance de Hausdorf :

La distance de Hausdorf transforme un sous-ensemble compact non-vide d'un espace métrique à un espace métrique.

Définition 2.13 *Soit (M, d) un espace métrique, alors la classe de tout les sous-ensembles non vide de M est 2^M et pour $A, B \in 2^M$. Soit*

$$H_d(A, B) = \max \left\{ \sup_{b \in B} d(b, A), \sup_{a \in A} d(a, B) \right\}$$

Où

$$d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b)$$

Et on appelle H_d la fonctionnelle de Hausdorf-Pompieu engendrer par d.

Preuve :

1) Symétrie :

Soit $A, B \in 2^M$ telle que

$$\begin{aligned} H_d(A,B) &= \max\left\{\sup_{b\in B} d(b,A), \sup_{a\in A} d(a,B)\right\} \\ &= \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\} \\ &= H_d(B,A) \end{aligned}$$

2) Séparation :

Soit $A, B \in 2^M$, si $H_d(A,B) = 0$.

Donc $\forall a \in A, \inf_{b\in B} d(a,b) = 0$ et $\forall b \in B, \inf_{a\in A} d(a,b) = 0$.

Alors $a \in B$ et $b \in A$.

Comme A, B sont deux sous-ensembles fermés. On a $A \subset B$ et $B \subset A$.

Donc $A = B$.

3) Inégalité triangulaire :

Soit $A, B, C \in 2^M$

$$H_d(A,B) \leq H_d(A,C) + H_d(C,B)$$

Soit $a \in A$. On a

$$d(a,C) = \inf_{c\in C} d(a,c) = d(a,c_0), c_0 \in C$$

Et

$$d(c_0,B) = \inf_{b\in B} d(c_0,b) = d(c_0,b_0), b_0 \in B$$

Alors

$$\begin{aligned} d(a,B) \leq & d(a,b_0) \\ \leq & d(a,c_0)+d(c_0,b_0) \\ = & d(a,C)+d(c_0,B) \\ \leq & d(a,C)+d(C,B) \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} d(a,B) \leq & d(a,C)+d(C,B) \\ \leq & d(A,C)+d(C,B) \\ \leq & \max\{d(A,C),d(C,A)\}+\max\{d(C,B),d(B,C)\} \\ \leq & H_d(A,C)+H_d(C,B) \end{aligned}$$

On prend le sup du côté gauche de linégalité

$$\sup_{a\in A} d(a,B) \leq H_d(A,C)+H_d(C,B)$$

De la même façon on trouve

$$\sup_{b\in B} d(b,A) \leq H_d(A,C)+H_d(C,B)$$

Donc

$$H_d(A,B)=\max\left\{\sup_{b\in B} d(b,A),\sup_{a\in A} d(a,B)\right\} \leq H_d(A,C)+H_d(C,B)$$

D'où linégalité triangulaire.

D'où H_d est métrique.

2.3 Les théorèmes des points fixes de type PATA :

tout d'abord nous présantons le théorème de Pata

Théorème 2.1 [1] *Soit S un opérateur univoque dans un espace métrique complet (X,d). Supposons que $\tau \geq 0, \alpha \geq 1$ et $\beta \in [0,\alpha]$ des constantes et l'inégalité suivante*

$$d(S_z, S_z) \leq (1-\epsilon)d(z,w) + \tau\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)[1+\|z\|+\|w\|]^{\beta}$$

est satisfaite pour tout $\epsilon \in [0,1]$ et pour tout $z, w \in X$ donc S admet un unique point fixe $u \in X$
De plus, lq suite $\{S_n z_0\}$ converge vers u pour tout $z_0 \in X$

Soit $(M, d, \leq)$ un espace métrique partiellement ordonné. On suppose que :
(H1) Pour toute suite $\{x_n\}$ une suite croissante (resp décroissante) dans M tel que $x_n \to x$ alors $x_n \leq x$ (resp $x_n \geq x, \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.2 [7] *Soit M un espace métrique ordonné complet. Supposons(H1) satisfaite. Soient $\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1$ et $\beta \in [0,\alpha]$ des constantes. Supposons que L'opérateur multivoque $T : M \to 2^M$ a VACS et satisfait l'inégalité suivante :*

$$H_d(Tx, Ty) \leq (1-\epsilon)d(x,y) + \Lambda\epsilon^{\alpha}(\epsilon)[1+\|x\|+\|y\|]^{\beta}, \epsilon \in [0,1], \forall x, y \in M \tag{2.1}$$

où $x, y \in M$ comparable. Alors T admet un point fixe $x^* \in Tx^*$. De plus

$$d(x^*, x_{n-1}) \leq K\omega_n(\alpha) \tag{2.2}$$

Où $K \leq (1+4\|x^*\|)^{\beta}$.

preuve

Soit $x_0 \in M, T : M \to 2^M$.si $x_0 \in Tx_0$ la preuve est complète.
Daprès la définition de T, on a $Tx_0 \in M$ et T a la VACS cest-à-dire $F_{Tx_0}(x_0) \neq \phi$ alors il existe $y \in Tx_0$. On pose $y = x_1$.
supposons que $card(F_{Tx_0}) = 1$ donc on a deux cas.
Cas 1 : x_0 n'apartient pas à Tx_0 cette hypothèse nous ne donne aucun résultat.

Cas 2 : $x_0 \in Tx_0$ implique $x_1 = x_0$ donc (H1) nest pas satisfaite.

Contradiction.

Alors card $(F_{Tx_0}) > 1$, cest-à-dire il existe y, on le note x_1 où $x_1 \in Tx_0$ tel que $x_1 \neq x_0$ et $x_1 \geq x_0$.

On suppose quil existe $x_n \in Tx_{n-1}$, de la même façon on trouve $x_{n+1} \in Tx_n$,où $x_{n+1} \neq x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$. On a construit la suite croissante $\{x_n\}, o(\text{H1})estsatisfait.$

$soit \mathrm{x}_1 \in Tx_0$ où

$$d(x_0, x_1) = d(Tx_0, x_0)$$

En continuant de la même façon, il existe $x_{n+1} \in Tx_n$ avec $x_{n+1} \neq x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ tel que

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_n, x_n), \qquad n = 1, 2 \dots$$

De plus

$$d(Tx_n, x_n) \leq \sup_{x \in Tx_{n-1}} d(Tx_n, x) \leq H_d(Tx_n, Tx_{n-1})$$

Donc

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq H_d(Tx_n, Tx_{n-1}), \qquad n = 2, 3, \dots$$

Pour $n = 1, 2, \dots$ on pose

$$C_n = \|x_n\| = d(x_n, x_0)$$

Comme (2.1) est vrai pour tout $\epsilon \in [0, 1]$, on peux prendre $\epsilon = 0$, il vient que :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) \leq H_d(Tx_n, Tx_{n-1})(x_n, x_{n-1}) &\leq H_d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \\ &\leq d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq H_d(Tx_0, Tx_1) \\ &\leq d(x_0, x_1) = C_1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Daprès linégalité triangulaire

$$d(x_0, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1}) \tag{2.4}$$

Et

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_0) \tag{2.5}$$

De (2.4) et (2.5), on a

$$C_n \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1})$$

Daprès (2.3)

$$C_n \leq d(x_1, x_{n+1}) + 2C_1 \leq H_d(Tx_n, Tx_0) + 2C_1 \tag{2.6}$$

De (2.6)

$$C_n \leq H_d(Tx_n, Tx_0) + 2C_1$$

Daprès (2.1)

$$C_n \leq (1-\epsilon)C_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + C_n\right]^\beta + 2C_1$$

Avec $C_0 = 0$

il existe deux nombre reel $E, D > 0$ tel que

$$C_n \leq (1-\epsilon)C_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + C_n\right]^\beta + 2C_1 + 2C_1 \leq (1-\epsilon)C_n + E\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)C_n^\alpha + D \tag{2.7}$$

Et

$$\epsilon C_n \leq E\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)C_n^\alpha + D \tag{2.8}$$

Montrons que la suite $(C_n)_n$ est bornée.

On suppose quil existe une suite extraite tel que $C_{n_k} \to \infty$.

On choisi $\epsilon_{n_k} = \min\left(1, \frac{1+D}{C_{n_k}}\right)$ dans (2.8). Il vient que :

$$\frac{1+D}{C_{n_k}}C_{n_k} \leq E\left(\frac{1+D}{C_{n_k}}\right)^\alpha \psi\left(\frac{1+D}{C_{n_k}}\right)C_{n_k}^\alpha + D$$

Alors

$$1 + D \leq E(1+D)^\alpha\psi(\epsilon_{n_k}) + D$$

Donc

$1 \leq E(1+D)^\alpha\psi(\epsilon_{n_k})) \to 0$ quand $n_k \to \infty$

Contradiction

Doù, la suite$(C_n)_{n=1}^\infty$ est bornée.

Maintenant Montrons que la suite (x_n) est une suite de Cauchy.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) &\leq H_d(Tx_{n+m}, Tx_n) \\ &\leq (1-\epsilon)d(x_{n+m}, x_n) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + \|x_{n+m}\| + \|x_n\|\right]^\beta \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dun part on choisi $\alpha \geq n+1$. Il vient que :

$$\frac{\alpha}{n+1} \geq 1$$

. De plus

$$0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$$

Alors

$$0 \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq 1$$

. Donc

$$0 \leq 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq 1$$

. On conclu que :

$$1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq \frac{\alpha}{n+1}$$

. On choisi :

$$\epsilon = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$$

Dautre part en fixant m et on pose :

$$K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda \left[1 + 2C_n\right]^{\beta} \tag{2.10}$$

En remplaçant ϵ dans (2.9). Il vient que :

$$d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \leq \frac{n}{n+1}^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) + \Lambda \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right)^{\alpha} \psi \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right) \left[1 + \|x_{n+m}\| + \|x_n\|\right]^{\beta} \tag{2.11}$$

La fonction ψ est croissante alors :

$$\psi \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right) \leq \psi \left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \tag{2.12}$$

Et

$$\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{\alpha} \tag{2.13}$$

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+m}\| &= d(x_{n+m}, x_0) \\
&= \inf_{x \in T x_{n+m-1}} d(x, x_0) \\
&= d(T x_{n+m-1}, x_0) \\
&= \sup_{x \in \{x_0\}} d(x, T x_{n+m-1}) \\
&\leq H_d(\{x_0\}, T x_{n+m-1}) \\
&\leq d(x_0, x_{n+m-1}) \\
&\vdots \\
&\leq C_n
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

En remplaçant (2.12), (2.13) et (2.15) dans (2.11). Il vient que :

$$
d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha} \left[n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) + \Lambda \alpha^{\alpha} \psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2C_n)^{\beta}\right]
$$

Doù

$$
(n+1)^{\alpha} d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \leq n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) + K \alpha^{\alpha} \psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)
$$

On pose $r_n := n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n)$, pour $n, m \in \mathbb{N}$,on a

$$
\begin{aligned}
r_{n+1} \leq & r_n + K \alpha^{\alpha} \psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \\
\leq & r_{n-1} + K \alpha^{\alpha} \psi\left(\frac{\alpha}{n}\right) + K \alpha^{\alpha} \psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \\
\leq & \dots \\
\leq & r_0 + K \alpha^{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) \\
= & K \alpha^{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
d(x_{n+m}, x_n) \leq K \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) = K \omega_n(\alpha). \tag{2.15}
$$

Sachant que :

$$
\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{\alpha}
$$

faisons n tend vers ∞ dans linégalité (2.15),

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+m}, x_n) \leq \lim_{n\to\infty} K\omega_n(\alpha) \to 0$$

où $\lim_{n\to\infty}\omega_n() \to 0$ et $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée, donc Il existe $M \geq 0$ tel que $K \leq M$ ce qui implique que (x_n) est une suite de Cauchy dans X. puisque X est un espace métrique complet, il existe $x^* \in M$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Dautre part en appliquant linégalité triangulaire

$$0 \leq d(x^*, Tx_{n-1}) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx_{n-1}) \tag{2.16}$$

Et comme $x_n \in Tx_{n-1}$ alors $d(x_n, Tx_{n-1}) = 0$.

En utilisant (2.15) et (2.16), on trouve

$$0 \leq d(x^*, Tx_{n-1}) \leq d(x^*, x_n) = \lim_{m\to\infty} d(x_{m+n}, x_n) \leq K\omega_n(\alpha)$$

Encore

$$0 \leq d(x^*, Tx^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, Tx^*)$$

En appliquant linégalité triangulaire

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, Tx^*) \leq \lim_{n\to\infty}[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*)]$$

Comme (x_n) est une suite de Cauchy

$\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, x_{n+1}) = 0$ et $d(x_{n+1}, Tx^*) \leq H_d(Tx_n, Tx^*)$.

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, Tx^*) \leq &\lim_{n\to\infty} H_d(Tx_n, Tx^*)\\ &\leq (1-\epsilon)d(x_n, x^*) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\,[1 + \|x_n\| + \|x^*\|]^{\beta}\end{aligned}$$

Puisque la condition de contraction est valide pour $\epsilon \in [0,1]$ quelconque, on peut remplacer ϵ, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ par la suite $0 \leftarrow \epsilon_n \in [0,1]$quand $n \to \infty$. On trouve :

$$0 \leq d(x^*, Tx^*) \leq (1-\epsilon)d(x_n, x^*) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)[1 + \|x_n\| + \|x^*\|]^{\beta} \to 0$$

Donc $d(x^*, Tx^*) = 0$ et $x^* \in Tx^*$.

De plus,

$$d(x^*, x_n) \leq H_d(Tx^*, Tx_{n-1}) \leq d(x^*, x_{n-1}) \leq H_d(Tx^*, Tx_{n-2})$$
$$\leq d(x^*, x_{n-2})$$
$$\vdots$$
$$\leq H_d(Tx_0, Tx^*)$$
$$\leq d(x_0, x^*) = \|x^*\|$$

Ce qui implique

$$C_n = d(x_n, x_0) \leq d(x^*, x_n) + d(x_0, x^*) \leq \|x^*\| + \|x^*\| = 2\,\|x^*\|$$

Daprès (2.10)

$$K \leq \Lambda(1 + 4\,\|x^*\|)^{\beta}.$$

Théorème 2.3 [7] *Soit M un espace métrique ordonné complet. Supposons(H1) est satisfaite. Soient $\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1$ et $\beta \in [0, \alpha]$ des constants. Supposant que L'opérateur multivoque $T : M \longrightarrow 2^M$ a VACI et satisfait l'inégalité*

$$H_d(Tx, Ty) \leq (1 - \epsilon)d(x, y) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)[1 + \|x\| + \|y\|]^{\beta}), \forall \epsilon \in [0, 1], \forall x, y \in M$$

Et $x, y \in M$ comparable. Alors T admet un point fixe $x^* \in Tx^*$. De plus

$$d(x^*, x_{n-1}) \leq K\omega_n(\alpha)$$

Où $K \leq (1 + 4\|x^*\|)^{\beta}$.

Preuve

Soit $x_0 \in M, T : M \longrightarrow 2^M$.si $x_0 \in Tx_0$ la preuve est complète.

D'après la définition de T, on a $Tx_0 \subset M$ et T a la VACI c'est-à-dire $F_{Tx_0}(x_0) \neq \phi$ alors il existe $y \in Tx_0$. On pose $y = x_1$

Supposons que $card(F_{Tx_0}) = 1$

donc on a deux cas.

Cas 1 : x_0 n'apartient pas à Tx_0 cette hypothèse nous ne donne aucun résultat.

Cas 2 : $x_0 \in Tx_0$ implique $x_1 = x_0$ donc (H1) n'est pas satisfaite.

Contradiction.

Alors $card(F_{Tx_0}) > 1$, c'est-à-dire il existe y, on le note x_1 où $x_1 \in Tx_0$ tel que $x_1 \neq x_0$ et $x_1 \leq x_0$.

On suppose qu'il existe $x_n \in Tx_{n-1}$, de la même façon on trouve $x_{n+1} \in Tx_n$,où $x_{n+1} \neq x_n$ et $x_{n+1} \leq x_n$. On a construit la suite décroissante $\{x_n\}$ donc (H1) est satisfaite et

$$d(x_0, 0x_1) = d(Tx_0, x_0)$$

En continuant de la même façon, il existe $x_{n+1} \in Tx_n$ avec $x_{n+1} \neq x_n etx_{n+1}?x_n$ tel que :

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_n, x_n), \qquad n = 1, 2 \ldots$$

De plus

$$d(Tx_n, x_n) \leq \sup_{x \in Tx_{n-1}} d(Tx_n, x) \leq H_d(Tx_n, Tx_{n-1})$$

Donc

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq H_d(Tx_n, Tx_{n-1}), \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Pour $n = 1, 2, \ldots$ on pose

$$C_n = \|x_n\| = d(x_n, x_0)$$

Comme (2.1) est vrai pour tout $\epsilon \in [0, 1]$, on peux prendre $\epsilon = 0$, il vient que :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) \leq H_d(Tx_n, Tx_{n-1})(x_n, x_{n-1}) &\leq H_d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \\ &\leq d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq H_d(Tx_0, Tx_1) \\ &\leq d(x_0, x_1) = C_1 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Daprès linégalité triangulaire

$$d(x_0, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1}) \tag{2.18}$$

Et

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_0) \tag{2.19}$$

De (2.18) et (2.19), on a

$$C_n \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1})$$

Daprès (2.17)

$$C_n \leq d(x_1, x_{n+1}) + 2C_1 \leq H_d(Tx_n, Tx_0) + 2C_1 \tag{2.20}$$

De (2.6)

$$C_n \leq H_d(Tx_n, Tx_0) + 2C_1$$

Daprès (2.1)

$$C_n \leq (1-\epsilon)C_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + C_n\right]^\beta + 2C_1$$

Avec $C_0 = 0$

il existe deux nombre reel $E, D > 0$ tel que

$$C_n \leq (1-\epsilon)C_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + C_n\right]^\beta + 2C_1 + 2C_1 \leq (1-\epsilon)C_n + E\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)C_n^\alpha + D \tag{2.21}$$

Et

$$\epsilon C_n \leq E\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)C_n^\alpha + D \tag{2.22}$$

Montrons que la suite $(C_n)_n$ est bornée.

On suppose quil existe une suite extraite tel que $C_{n_k} \to \infty$.

On choisi $\epsilon_{n_k} = \min\left(1, \frac{1+D}{C_{n_k}}\right)$ dans (2.22). Il vient que :

$$\frac{1+D}{C_{n_k}}C_{n_k} \leq E\left(\frac{1+D}{C_{n_k}}\right)^\alpha \psi\left(\frac{1+D}{C_{n_k}}\right)C_{n_k}^\alpha + D$$

Alors

$$1 + D \leq E(1+D)^\alpha\psi(\epsilon_{n_k}) + D$$

Donc

$1 \leq E(1+D)^\alpha\psi(\epsilon_{n_k})) \to 0$ quand $n_k \to \infty$

Contradiction

Doù, la suite$(C_n)_{n=1}^\infty$ est bornée.

Maintenant Montrons que la suite (x_n) est une suite de Cauchy.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) &\leq H_d(Tx_{n+m}, Tx_n) \\ &\leq (1-\epsilon)d(x_{n+m}, x_n) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + \|x_{n+m}\| + \|x_n\|\right]^\beta \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dun part on choisi $\alpha \geq n+1$. Il vient que :

$$\frac{\alpha}{n+1} \geq 1.$$

De plus

$$0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$$

Alors

$$0 \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq 1.$$

Donc

$$0 \leq 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq 1.$$

On conclu que :

$$1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq \frac{\alpha}{n+1}.$$

On choisi :

$$\epsilon = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$$

Dautre part en fixant m et on pose :

$$K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda \left[1 + 2C_n\right]^{\beta} \tag{2.24}$$

En remplaçant ϵ dans (2.9). Il vient que :

$$d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \leq \frac{n}{n+1}^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) + \Lambda \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right)^{\alpha} \psi\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right) \left[1 + \|x_{n+m}\| + \|x_n\|\right]^{\beta} \tag{2.25}$$

La fonction ψ est croissante alors :

$$\psi\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right) \leq \psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \tag{2.26}$$

Et

$$\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{\alpha} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m}\| &= d(x_{n+m}, x_0) \\
&= \inf_{x \in Tx_{n+m-1}} d(x, x_0) \\
&= d(Tx_{n+m-1}, x_0) \\
&= \sup_{x \in \{x_0\}} d(x, Tx_{n+m-1}) \\
&\leq H_d(\{x_0\}, Tx_{n+m-1}) \\
&\leq d(x_0, x_{n+m-1}) \\
&\vdots \\
&\leq C_n
\end{aligned} \tag{2.28}$$

En remplaçant (2.26), (2.27) et (2.28) dans (2.25). Il vient que :

$$d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha} \left[n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) + \Lambda \alpha^{\alpha} \psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2C_n)^{\beta}\right]$$

Doù

$$(n+1)^{\alpha} d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \leq n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) + K\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)$$

On pose $r_n := n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n)$, pour $n, m \in \mathbb{N}$,on a

$$\begin{aligned}
r_{n+1} \leq & r_n + K\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \\
\leq & r_{n-1} + K\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{n}\right) + K\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \\
\leq & \dots \\
\leq & r_0 + K\alpha^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) \\
= & K\alpha^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(\frac{\alpha}{k}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq K\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) = K\omega_n(\alpha). \tag{2.29}$$

Sachant que :

$$\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{\alpha}$$

faisons n tend vers ∞ dans linégalité (2.29),

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+m}, x_n) \leq \lim_{n\to\infty} K\omega_n(\alpha) \to 0$$

où $\lim_{n\to\infty} \omega_n() \to 0$ et $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée, donc Il existe $M \geq 0$ tel que $K \leq M$ ce qui implique que (x_n) est une suite de Cauchy dans X. puisque X est un espace métrique complet, il existe $x^* \in M$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Dautre part en appliquant linégalité triangulaire

$$0 \leq d(x^*, Tx_{n-1}) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx_{n-1}) \tag{2.30}$$

Et comme $x_n \in Tx_{n-1}$ alors $d(x_n, Tx_{n-1}) = 0$.

En utilisant (2.29) et (2.30), on trouve

$$0 \leq d(x^*, Tx_{n-1}) \leq d(x^*, x_n) = \lim_{m\to\infty} d(x_{m+n}, x_n) \leq K\omega_n(\alpha)$$

Encore

$$0 \leq d(x^*, Tx^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, Tx^*)$$

En appliquant linégalité triangulaire

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, Tx^*) \leq \lim_{n\to\infty} [d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*)]$$

Comme (x_n) est une suite de Cauchy

$\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, x_{n+1}) = 0$ et $d(x_{n+1}, Tx^*) \leq H_d(Tx_n, Tx^*)$.

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, Tx^*) \leq& \lim_{n\to\infty} H_d(Tx_n, Tx^*) \\ &\leq (1-\epsilon)d(x_n, x^*) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)\left[1 + \|x_n\| + \|x^*\|\right]^{\beta}\end{aligned}$$

Puisque la condition de contraction est valide pour $\epsilon \in [0,1]$ quelconque, on peut remplacer ϵ, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ par la suite $0 \leftarrow \epsilon_n \in [0,1]$quand $n \to \infty$. On trouve :

$$0 \leq d(x^*, Tx^*) \leq (1-\epsilon)d(x_n, x^*) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)[1 + \|x_n\| + \|x^*\|]^{\beta} \to 0$$

Donc $d(x^*, Tx^*) = 0$ et $x^* \in Tx^*$.

De plus,

$$\begin{aligned}d(x^*,x_n) \leq H_d(Tx^*,Tx_{n-1}) \leq d(x^*,x_{n-1}) &\leq H_d(Tx^*,Tx_{n-2})\\ &\leq d(x^*,x_{n-2})\\ &\ \vdots\\ &\leq H_d(Tx_0,Tx^*)\\ &\leq d(x_0,x^*) = \|x^*\|\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$C_n = d(x_n,x_0) \leq d(x^*,x_n) + d(x_0,x^*) \leq \|x^*\| + \|x^*\| = 2\,\|x^*\|$$

Daprès (2.24)

$$K \leq \Lambda(1+4\,\|x^*\|)^{\beta}.$$

Théorème 2.4 [7] *Soit M un espace métrique ordonné complet. Supposons(H1) est satisfaite. Soit $\Lambda \geq 0, \alpha \geq 1$ et $\beta \in\in [0,\alpha]$ des constants . Supposons que L'opérateur multivoque $T : M \longrightarrow 2^M$ a VA, est croissant et satisfait l'inégalité*

$$H_d(Tx,Ty) \leq (1-\epsilon)d(x,y) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)[1+\|x\|+\|y\|]^(\beta), \forall\epsilon \in [0,1], \forall x,y \in M$$

Et $x, y \in M$ comparable. Si il existe $x_0 \in M$ tel que $\{x_0\} \leq Tx_0$, Alors T admet un point fixe $x^* \in Tx^*$. De plus

$$d(x^*, x_(n-1)) \leq K\omega_n(\alpha)$$

où $K \leq (1+4\|x^*\|)^{\beta}$.

Preuve

Soit $x_0 \in M$, si $x_0 \in Tx_0$ la preuve est complète. On construit une suite $\{x_n\}$ en utilisant les hypothèses de ce théorème

T a VA donc $F_{Tx_0} \neq \phi$ alors il existe $y \in Tx_0$. On pose $y = x_1$

Supposons que $card(F_{Tx_0}) = 1$ donc on a deux cas.

Cas 1 : x_0 n'aprtient pas Tx_0 cette hypothèse nous ne donne aucun résultat.

Cas 2 : $x_0 \in Tx_0$, alors $\{y\} = \{x_0\} = Tx_0$ donc (H1) n'est pas satisfaite.

Contradiction.

il existe $x_1 \in Tx_0$ avec $x_1 \neq x_0$.

T croissant

soit $z \in F_{Tx_0}$,on a T croissant, c'est-à-dire $Tz \geq Tx_0 \geq \{x_0\}$.

Alors

$$z \geq x_0, \forall z \in F_{Tx_0}.$$

D'oú $x_1 \geq x_0$,tel que $d(x_0, x_1) = d(Tx_0, x_0)$.

En continuant de la même façon, il existe $x_{n+1} \in Tx_n$ avec $x_{n+1} \neq x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ tel que

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_n, x_n), \qquad n = 1, 2 \ldots$$

De plus

$$d(Tx_n, x_n) \leq \sup_{x \in Tx_{n-1}} d(Tx_n, x) \leq H_d(Tx_n, Tx_{n-1})$$

Donc

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq H_d(Tx_n, Tx_{n-1}), \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Pour $n = 1, 2, \ldots$ on pose

$$C_n = \|x_n\| = d(x_n, x_0)$$

Comme (2.1) est vrai pour tout $\epsilon \in [0, 1]$, on peux prendre $\epsilon = 0$, il vient que :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) \leq H_d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq d(x_n, x_{n-1}) &\leq H_d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \\ &\leq d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq H_d(Tx_0, Tx_1) \\ &\leq d(x_0, x_1) = C_1 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Daprès linégalité triangulaire

$$d(x_0, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1}) \tag{2.32}$$

Et

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_0) \tag{2.33}$$

De (2.31) et (2.33), on a

$$C_n \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1})$$

Daprès (2.31)

$$C_n \leq d(x_1, x_{n+1}) + 2C_1 \leq H_d(Tx_n, Tx_0) + 2C_1 \tag{2.34}$$

De (2.34)

$$C_n \leq H_d(Tx_n, Tx_0) + 2C_1$$

Daprès (2.1)

$$C_n \leq (1-\epsilon)C_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + C_n\right]^\beta + 2C_1$$

Avec $C_0 = 0$

il existe deux nombre reel $E, D > 0$ tel que

$$C_n \leq (1-\epsilon)C_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + C_n\right]^\beta + 2C_1 + 2C_1 \leq (1-\epsilon)C_n + E\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)C_n^\alpha + D \tag{2.35}$$

Et

$$\epsilon C_n \leq E\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)C_n^\alpha + D \tag{2.36}$$

Montrons que la suite $(C_n)_n$ est bornée.

On suppose quil existe une suite extraite tel que $C_{n_k} \to \infty$.

On choisi $\epsilon_{n_k} = \min\left(1, \frac{1+D}{C_{n_k}}\right)$ dans (2.35). Il vient que :

$$\frac{1+D}{C_{n_k}}C_{n_k} \leq E\left(\frac{1+D}{C_{n_k}}\right)^\alpha \psi\left(\frac{1+D}{C_{n_k}}\right)C_{n_k}^\alpha + D$$

Alors

$$1 + D \leq E(1+D)^\alpha\psi(\epsilon_{n_k}) + D$$

Donc

$1 \leq E(1+D)^\alpha\psi(\epsilon_{n_k})) \to 0$ quand $n_k \to \infty$

Contradiction

Doù, la suite$(C_n)_{n=1}^\infty$ est bornée.

Maintenant Montrons que la suite (x_n) est une suite de Cauchy.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) &\leq H_d(Tx_{n+m}, Tx_n) \\ &\leq (1-\epsilon)d(x_{n+m}, x_n) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\left[1 + \|x_{n+m}\| + \|x_n\|\right]^\beta \end{aligned} \tag{2.37}$$

Dun part on choisi $\alpha \geq n+1$. Il vient que :

$$\frac{\alpha}{n+1} \geq 1.$$

De plus

$$0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$$

Alors

$$0 \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq 1.$$

Donc

$$0 \leq 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq 1.$$

On conclu que :

$$1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq \frac{\alpha}{n+1}.$$

On choisi :

$$\epsilon = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$$

Dautre part en fixant m et on pose :

$$K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda \left[1 + 2C_n\right]^{\beta} \tag{2.38}$$

En remplaçant ϵ dans (2.9). Il vient que :

$$d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \leq \frac{n}{n+1}^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) + \Lambda \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right)^{\alpha} \psi \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right) \left[1 + \|x_{n+m}\| + \|x_n\|\right]^{\beta} \tag{2.39}$$

La fonction ψ est croissante alors :

$$\psi \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right) \leq \psi \left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \tag{2.40}$$

Et

$$\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{\alpha} \tag{2.41}$$

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+m}\| &= d(x_{n+m}, x_0) \\
&= \inf_{x \in Tx_{n+m-1}} d(x, x_0) \\
&= d(Tx_{n+m-1}, x_0) \\
&= \sup_{x \in \{x_0\}} d(x, Tx_{n+m-1}) \\
&\leq H_d(\{x_0\}, Tx_{n+m-1}) \\
&\leq d(x_0, x_{n+m-1}) \\
&\vdots \\
&\leq C_n
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

En remplaçant (2.40), (2.41) et (2.42) dans (2.39). Il vient que :

$$
d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha} \left[n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) + \Lambda \alpha^{\alpha} \psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)(1+2C_n)^{\beta}\right]
$$

Doù

$$
(n+1)^{\alpha} d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \leq n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) + K\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)
$$

On pose $r_n := n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n)$, pour $n, m \in \mathbb{N}$,on a

$$
\begin{aligned}
r_{n+1} \leq & r_n + K\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \\
\leq & r_{n-1} + K\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{n}\right) + K\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \\
\leq & \dots \\
\leq & r_0 + K\alpha^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) \\
= & K\alpha^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(\frac{\alpha}{k}\right)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
d(x_{n+m}, x_n) \leq K\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) = K\omega_n(\alpha). \tag{2.43}
$$

Sachant que :

$$
\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{\alpha}
$$

faisons n tend vers ∞ dans linégalité (2.43),

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+m}, x_n) \leq \lim_{n\to\infty} K\omega_n(\alpha) \to 0$$

où $\lim_{n\to\infty} \omega_n() \to 0$ et $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée, donc Il existe $M \geq 0$ tel que $K \leq M$ ce qui implique que (x_n) est une suite de Cauchy dans X. puisque X est un espace métrique complet, il existe $x^* \in M$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.
Dautre part en appliquant linégalité triangulaire

$$0 \leq d(x^*, Tx_{n-1}) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx_{n-1}) \tag{2.44}$$

Et comme $x_n \in Tx_{n-1}$ alors $d(x_n, Tx_{n-1}) = 0$.
En utilisant (2.43) et (2.44), on trouve

$$0 \leq d(x^*, Tx_{n-1}) \leq d(x^*, x_n) = \lim_{m\to\infty} d(x_{m+n}, x_n) \leq K\omega_n(\alpha)$$

Encore

$$0 \leq d(x^*, Tx^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, Tx^*)$$

En appliquant linégalité triangulaire

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, Tx^*) \leq \lim_{n\to\infty} [d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*)]$$

Comme (x_n) est une suite de Cauchy
$\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, x_{n+1}) = 0$ et $d(x_{n+1}, Tx^*) \leq H_d(Tx_n, Tx^*)$.
Donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, Tx^*) &\leq \lim_{n\to\infty} H_d(Tx_n, Tx^*)\\ &\leq (1-\epsilon)d(x_n, x^*) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)\,[1 + \|x_n\| + \|x^*\|]^\beta\end{aligned}$$

Puisque la condition de contraction est valide pour $\epsilon \in [0, 1]$ quelconque, on peut remplacer ϵ, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ par la suite $0 \leftarrow \epsilon_n \in [0, 1]$quand $n \to \infty$. On trouve :

$$0 \leq d(x^*, Tx^*) \leq (1-\epsilon)d(x_n, x^*) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)[1 + \|x_n\| + \|x^*\|]^\beta \to 0$$

Donc $d(x^*, Tx^*) = 0$ et $x^* \in Tx^*$.

De plus,

$$\begin{aligned} d(x^*, x_n) \leq H_d(Tx^*, Tx_{n-1}) \leq d(x^*, x_{n-1}) &\leq H_d(Tx^*, Tx_{n-2}) \\ &\leq d(x^*, x_{n-2}) \\ &\ \ \vdots \\ &\leq H_d(Tx_0, Tx^*) \\ &\leq d(x_0, x^*) = \|x^*\| \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$C_n = d(x_n, x_0) \leq d(x^*, x_n) + d(x_0, x^*) \leq \|x^*\| + \|x^*\| = 2\|x^*\|$$

Daprès (2.38)

$$K \leq \Lambda(1 + 4\|x^*\|)^{\beta}.$$

CHAPITRE

3

APPLICATION

Dans ce chapitre, on va voir une application du chapitre précédent,

3.1 Notations

Soit $J_a = [0, a], J_b = [0, b]$. Tout d'abord on introduit les notations suivantes :

1. $C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ est un espace de Banach des fonctions continues de $J_a \times J_b$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme
   $\|u\| = \sup \{|u(t, x)| : (t, x) \in J_a \times J_b\}$ où $u \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$

2. Soit $u, v \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$, on dit $u \leq v$ si et seulement si

$$u(t, x) \leq v(t, x), \forall (t, x) \in J_a \times J_b$$

3. Soit $P = \{u : u \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R}), u \geq 0\}$ et H tel que

$$H = \left\{ u \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R}) : \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} existe \forall (t, x) \in J_a \times J_b \right\}$$

4. Soit $L^1(J_a, J_b, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $u : J_a \times J_b \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont intégrables au sens de Lebesgue muni de la norme

$$\|u\|_L = \int_0^a \int_0^b |u(t, x)| dx dt : u \in L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R})$$

5. Soit $M : J_a \times J_b \times \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ un opérateur multivoque non-vide, $\forall u \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$, on définie l'ensemble du sélection M par
   $S_{M,u} = \{v \in L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R}) : v(t, x) \in M(t, x, u(t, x)) p.p (t, x) \in J_a \times J_b\}$

6. On associe à l'opérateur M, l'opérateur multivoque $\mathscr{M} : C(J_a \times J_b, \mathbb{R}) \longrightarrow 2^{L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R})}$, défini par
$$\mathscr{M}(u) = \left\{ w \in L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R}) : w(t,x) \in M(t,x,u(t,x),(t,x) \in J_a \times J_b \right\}$$
L'opérateur $\mathscr{M}$ est appelé l'opérateur Niemytsky associé à M

7. Pour clarifier et vérifier nos résultats, on a besoin l'opérateur continué $\mathscr{L} : L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R}) \longrightarrow C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$, défini par
$$\mathscr{L}u(t,x) = \int_0^t \int_0^x u(s,\tau) ds d\tau$$

3.2 Position du problème :

Soit $F : J_a \times J_b \times \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ un opérateur multivoque qui satisfaite des hypothèses qu'on va présenter, $\zeta \in C(J_a \times \mathbb{R}), \eta \in C(J_b \times \mathbb{R})$. On a l'inclusion différentielle suivante :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{u(t,x)}}{\partial t \partial x} \in F(t,x,u(t,x)) & p.p(t,x) \in J_a \times J_b \\ u(t,0) = \zeta(t) = \eta(x) & t \in J_a, x \in J_b \end{cases} \tag{3.1}$$
Nous prouvons l'existence des solutions du problème en basant sur le théorème(2.2). Pour cela, nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 3.1 [7] *On suppose que l'opérateur multivoque $F : J_a \times J_b \times \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$, satisfit les conditions suivantes :*
(L1) $F(t,x,u)$ est un sous espace compact Pour tout $(t,x,u) \in J_a \times J_b \times C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$. De plus $S_{F,u}$est non vide pour chqaue $u \in (J_a \times J_b, \mathbb{R})$.
(L2) Pour toutu,$v \in (J_a \times J_b, \mathbb{R})$, si u, v sont comparable alors
$$H_d(F(t,x,u(t,x)), F(t,x,v(t,x))) \leq |l(t,x)|^2 |u(t,x) - v(t,x)|$$
, Presque pour chaque $(t,x) \in J_a \times J_b$,où $l \in L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ et $\|l\|_L \leq 1$.
(L3) Pour chaque $u \in (J_a \times J_b, \mathbb{R})$ a $\{u(t,x) - \zeta(t) - \eta(x) + \zeta(t)\} \leq \mathscr{L}v(t,x), (t,x) \in J_a \times J_b$ et $v \in S_{F,u}$
Alors le problème (3.1) admet au moins une solution : $u^* \in C(J_a \times J_b, R)$

preuve

M satisfie la condition (H1)

M est un espace métrique complet car l'espace $C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ est muni de la distance :

$$d(f,g) = \|f - g\|_\infty, \forall f, g \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$$

alors $C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ est un espace métrique et comme $J_a \times J_b$ est compact alors $C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ est compact donc $C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ est complet car tout espace métrique compact est complet.M est un espace métrique car la topologie induite sur M est inclus dans $C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ muni de la distance $d(f,g) = \|f - g\|_\infty$ donc M est métrique compact et complet alors toute suite est convergente.

D'autre part il existe $u, v \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ tel que $u(t,x) \leq v(t,x)$ pour chaque $(t,x) \in J_a \times J_b$ alors $C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ est partiellement ordonné. On conclu que M est partiellement ordonné.D'où M satisfait la condition (H1).

D'autre part il existe $u, v \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ tel que $u(t,x) \leq v(t,x)$ pour chaque $(t,x) \in J_a \times J_b$ alors $C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ est partiellement ordonné. On conclu que M est partiellement ordonné.D'où M satisfait la condition (H1).

le problème (3.1) est équivalant à une équation intégrale En effet, soit h une solution de (3.1) et on intègre entre 0 à x on obtient :

$$\int_0^x \frac{\partial^2 h(t,s)}{\partial \tau \partial s} ds = \frac{\partial h(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial h(t,0)}{\partial t}$$

On l'intègre une 2ème fois entre 0 à t. On aura

$$\int_0^t \int_0^x \frac{\partial^2 h(t,s)}{\partial \tau \partial s} ds d\tau = \int_0^t \left[\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial h(t,0)}{\partial t} \right] d\tau$$

$$= h(t,x) - h(0,x) + h(0,0) - h(t,0)$$

Alors

$$h(t,x) = h(0,x) + h(t,0) - h(0,0) + \int_0^t \int_0^x h(s,\tau) ds d\tau$$

En posant

$\eta(x) = h(0,x), \zeta(t) = h(t,0), \zeta(0) = h(0,0)$ et $v(s,\tau) = h(s,\tau)$

On obtient :

$$h(t,x) = \zeta(t) + \eta(x) - \zeta(0) + \int_0^t \int_0^x v(s,\tau) ds d\tau$$

pour que $h(t,x)$ existe, il faut que $v \in L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R})$, tel que $v(t,x) \in F(t,x,u(t,x))$, $(t,x) \in J_a \times J_b$ donc $v \in S_{F,u}$ alors

$$u(t,x) \in \left\{ h \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R}) : h(t,x) = \zeta(t) + \eta(x) - \zeta(0) + \int_0^t \int_0^x v(s,\tau) ds d\tau, v \in S_{F,u} \right\}$$

On défini l'opérateur multivoque $A : M \longrightarrow 2^M$ par

$$Au(t,x) = \{h \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R}) : h(t,x) = \zeta(t) + \eta(x) - \zeta(0) + \mathscr{L}v(t,x), v \in S_{F,u}\}$$

Il est Clair que l'opérateur A est bien défini car $\zeta(t), \eta(x), \zeta(0) \in \mathbb{R}$ donc $A \neq \phi$.

Soit $v \in S_{F,u}$ alors $v \in L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R})$

Donc $\mathscr{L}v(t,x) \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$

On prend $h \in A$ tel que

$$h(t,x) = \zeta(t) + \eta(x) - \zeta(0) + \mathscr{L}v(t,x) \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$$

On obtient : $h \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$

Donc $h_{|M} \in M \Rightarrow M \neq \phi$ alors $2^M \neq \phi$ on conclu que A est bien défini

Montrons que l'opérateur $\mathscr{L} \circ S_{F,u}$ est compact

Soit $u \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ et soit$\{u_n\}$ une suite dans $S_{F,u}$. Alors par définition de $S_{F,u}, u_n(t,x) \in F(t,x,u(t,x)) p.p.(t,x) \in J_a \times J_b$.

F est compact

En effet, on a $F : J_a \times J_b \times \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$. Alors il existe un ouvert B de $2^{\mathbb{R}}$ tel que $F^{-1}(B) = \left\{ u \in J_a \times J_b \times \mathbb{R}, F(u) \subset 2^{\mathbb{R}} \right\}$. F^{-1} est bien défini car $u \in F(t,x,u(t,x))$. Donc $F^{-1}(B) \subset 2^{\mathbb{R}}$, par suite $F^{-1}(B)$ est un ouvert de $J_a \times J_b \times \mathbb{R}$, on conclu que F est s.c.s.D'un autre part $J_a \times J_b \times \mathbb{R}$ est compact et F est s.c.s alors $2^{\mathbb{R}}$ est compact, donc F est compact

Alors il existe une suite extraite de $\{u_n(t,x)\}$,(on peut assumer qu'elle est $\{u_n(t,x)\}$ même) converge en mesure à $v(t,x) \in F(t,x,u(t,x)) p.p(t,x) \in J_a \times J_b$.La continuité de $\mathscr{L}$ garanté $\mathscr{L}u_n(t,x) \longrightarrow \mathscr{L}v(t,x)$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Montrons que la convergence est uniforme

Tout d'abord on va prouver que $\{\mathscr{L}u_n\}$ est une suite équicontinui

Soient $t_1, t_2 \in J_a, t_1 < t_2, x_1, x_2 \in J_b et x_1 < x_2$ alors on a

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{L}u_n(t_2,x_2)-\mathscr{L}u_n(t_1,x_1)| \leq & |\int_0^{t_2}\int_0^{x_2} u_n(s,\tau)dsd\tau - \int_0^{t_1}\int_0^{x_1} u_n(s,\tau)dsd\tau| \\
\leq & |\int_0^{t_1}\int_0^{x_2} u_n(s,\tau)dsd\tau + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_2} u_n(s,\tau)dsd\tau - \int_0^{t_1}\int_0^{x_1} u_n(s,\tau)dsd\tau| \\
\leq & |\int_0^{t_1}\int_0^{x_2} u_n(s,\tau)dsd\tau + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_2} u_n(s,\tau)dsd\tau - \int_0^{t_1}\int_0^{x_1} u_n(s,\tau)dsd\tau| \\
\leq & |\int_0^{t_1}\int_0^{x_1} u_n(s,\tau)dsd\tau + \int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2} u_n(s,\tau)dsd\tau + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_2} u_n(s,\tau)dsd\tau - \\
\leq & \int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2} |u_n(s,\tau)|dsd\tau + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_2} |u_n(s,\tau)|dsd\tau
\end{aligned}
$$

On remarque que $u_n \in L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R})$. On fait tendre le côté droit vers zéro quand $t_2 \longrightarrow t_1$ et $x_2 \longrightarrow x_1$ d'où $\{\mathscr{L}u_n\}$ est équicontinue

Maintenant prouvons que $\{\mathscr{L}u_n\}$ est bornée.

$L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ est compact et $\{u_n\}$ est continue alors elle atteint ses borne sur $J_a \times J_b$ c'est-à-dire il existe $M \leq \infty, M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|u_n| \leq M$, par suite $\|\mathscr{L}u_n\|_L \leq K, K \in \mathbb{R}_+$ En appliquant le théorème d'Arzela-Ascoli, la suite $\{\mathscr{L}u_n\}$ converge uniformément vers $\mathscr{L}v$

On a $u_n \longrightarrow v$ et $\{u_n\} \subset S_{F,u} \subset L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R})$. Comme $L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ est complet alors $v \in L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R})$.

on a $v(t,x) \in F(t,x,u(t,x))p.p(t,x) \in J_a \times J_b$

d'où $v \in S_{F,u}$

donc $\mathscr{L}v \in \mathscr{L} \circ S_{F,u}$

Comme $\mathscr{L} \circ S_{F,u} \in C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ et $C(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ est un espace métrique alors $\{\mathscr{L}u_n\}$ est suite de Cauchy. D'où, $\mathscr{L} \circ S_{F,u}$ est compact.

Les fonctions $\zeta(t), \eta(x), \zeta(0)$ sont compactes et $\mathscr{L}v = \int_0^t \int_0^x v(s,\tau)dsd\tau \in \mathscr{L} \circ S_{F,u}$.

Comme $\int_0^t \int_0^x v(s,\tau)dsd\tau$ est compact alors A est compact.

On a trouvé que A a des valeurs compactes et A satisfait (L3), donc on obtient que A a VACS

Maintenant, prouvonns que A satisfait la relation (2.1)

Soient $u, v \in K$ comparable tel que $u \leq v$ et soit $h_1 \in Au$ .Alors il existe $v_1 \in S_{F,u}$ tel que $h_1(t,x) = \zeta(t) + \eta(x) - \zeta(0) + \int_0^t \int_0^x v_1(s,\tau)dsd\tau, (t,x) \in J_a \times J_b$

D'après (L2) il existe $w \in F(t,x,v(t,x))$ tel que

$$|v_1(t,x) - w| \leq |l(t,x)|^2 (v(t,x) - u(t,x))$$

On définit l'opérateur multivoque U par

$$U(t,x) = \{w \in \mathbb{R} : |v_1(t,x) - w| \leq |l(t,x)|^2(v(t,x) - u(t,x))\}$$

Soit $w \in \mathbb{R}$. On a :

$$|v_1(t,x) - w| \leq |l(t,x)|^2(v(t,x) - u(t,x))$$

Alors

$$-|l(t,x)|^2(v(t,x) - u(t,x)) \leq v_1(t,x) - w \leq |l(t,x)|^2(v(t,x) - u(t,x))$$

D'où

$$v_1(t,x) - |l(t,x)|^2(v(t,x) - u(t,x)) \leq w \leq v_1(t,x) + |l(t,x)|^2(v(t,x) - u(t,x))$$

C'est-à-dire $U(t,x)$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc il est mesurable.
Puis l'opérateur multivoque $V(t,x) = U(t,x) \cap S_{F,v}$ est mesurable car l'intersection de $U(t,x)$ et $S_{F,v}$ qui sont mesurables est mesurable et il a des valeurs non vide car il existe $w : J_a \times J_b \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée sur un compact alors il est Lebesgue intégrable donc il appartient à $L^1(J_a \times J_b, \mathbb{R})$ et appartient à $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $w \in S_{F,v}$ et $w \in U(t,x)$ d'où $V(t,x) \neq \phi$. Alors il existe une fonction v_2 qui est une sélection mesurable de V. On a $v_2(t,x) \in F(t,x,v(t,x))$,pour tout $(t,x) \in J_a \times J_b$.
Où

$$|v_1(t,x) - v_2(t,x)| \leq |l(t,x)|^2(v(t,x) - u(t,x))$$

Et pour tout $(t,x) \in J_a \times J_b$,on définit :

$$h_2(t,x) = \zeta(t) + \eta(x) - \zeta(0) + \int_0^t \int_0^x v_2(s,\tau)dsd\tau$$

Il est claire que $h_2 \in Av$ et

$$|h_2(t,x) - h_1(t,x)| \leq \int_0^t \int_0^x |v_2(s,\tau) - v_1(s,\tau)|dsd\tau$$

Donc, on a d'une part :

$$\begin{aligned}
\|h_2 - h_1\| \leq & \|l\|_L^2 \|v - u\| \\
\leq & \|l\|_L^2 \|v - u\| + \|\|\|_L \|v - u\| \\
= & \|l\|_L \|v - u\| - \|l\|_L^2 \|v - u\| + 2\|l\|_L^2 \|v - u\| \\
= & \|l\|_L \|v - u|(1 - \|l\|_L) + 2\|l\|_L^2 \|v - u| \\
\leq & \|v - u\|(1 - \|l\|_L) + 2\|l\|_L^2(1 + \|u\| + \|v\|)
\end{aligned}$$

On pose $\epsilon = \|l\|_L, \psi(\|l\|_L) = \|l\|_L, \alpha = 1, \Lambda = 2$ et $\beta = 1$.

Alors on a

$$\|h_2 - h_1\| \leq (1-\epsilon)d(u,v) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)[1 + \|u\| + \|v\|]^\beta$$

D'autre part l'opérateur A a des VACS , $h_1 \in Au$ et $h_2 \in Av$. Alors

$$d(h_2, h_1) = \|h_2 - h_1\| \geq \inf_{h \in Au} d(h, h_2) = d(Au, h_2)$$

Et

$$\|h_2 - h_1\| \geq \inf_{h \in Av} d(h, h_1) = d(Av, h_1).$$

Il vient que :

$$\|h_2 - h_1\| \geq \sup_{h_2 \in Av, h_1 \in Au} \{d(Av, h_1), d(Au, h_2)\}$$

Ça implique

$$\|h_2 - h_1\| \geq \max\left\{\sup_{h_2 \in Au} d(Av, h_1), \sup_{h_2 \in Av} d(Au, h_2)\right\}$$

Autrement dit

$$\|h_2 - h_1\| \geq H_d(Au, Av)$$

On conclut que

$$H_d(Au, Av) \leq (1-\epsilon)d(u,v) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)[1 + \|u\| + \|v\|]^\beta.$$

Où

$\epsilon = \|l\|_L, \psi(\|l\|_L) = \|l\|_L, \alpha = 1, \Lambda = 2$ et $\beta = 1$.

D'où A satisfait les condition de théorème 2.1. Selon le théorème 2.2, le problème (3.1) admet une solution.

Ce qui termine la démonstration.

CONCLUSION :

Dans ce mémoire nous avons étudié l'existence du point fixe de type PATA pour des opérateurs multivoques définis sur un espace métrique E partiellement ordonné.

Nous avons présenté des conditions suffisantes sur la topologie de l'espace E ainsi sur l'opérateur $T : E \longrightarrow 2^E$.
Le sujet traité dans ce mémoire peut être poursuivi et complété par des travaux pouvant contribuer à améliorer certains résultats présentés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berrah Khaled,doctorql thesis entitled ”common fixed point theorems of several functions in complex valued metric spaces and applications”,supervised by Prof Aliouche Abdelkrim, University of Oum El Bouaghi

[2] Emmanuel Cépa, Équations différentielles stochastiques multivoques. Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 29 (1995), p. 86-107.

[3] J.Collins, J.Zimmer, An asymetric Arzela-Ascoli theorem, Topology and its application 154 (2007) 2312-2322.

[4] Haim Brezis, Analyse fonctionnelle théorie, et application. Université de Pierre et Marie Curie et Ecole Poly Technique, Masson Paris New-York Mexico Sao-Paluo 198.

[5] Regaia Nadia, these de Master” Sur l'existance d'un point fixe commun de plusieurs opérateurs et application” Encadré par Mme Mechrouk Salima(M.C.A), Université de Boumerdes (2019)

[6] Saadia Benchabane.thése de Magistère ”Théorie de point fixe pour les applications multivoques”. Encadré par Prof Djebali Smail École Normale Supérieure, Kouba (Alger). (2016).

[7] Samad Mohseni Kolagar, Maryam Ramezani and Madjid Eshaghi, Pata type fixed point theorems of multivalued operators in ordered metric spaces with applications to hy-

perbolic differential inclusions. U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 78, Iss. 4, (2016), p. 21-34

[8] SH. Hong. Fixed points of multivalued operators in ordered metric spaces with applications, Nonlinear Anal, 72 (2009),3929-3942.