République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

Université M'hamed Bougara de BOUMERDES

Faculté des Sciences–Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master** en Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Stabilisation Exponentielle et Rationnelle d'une Equation des Ondes avec Contrôleur Dynamique

Présenté par : Bab Asma

Soutenu le 14 Juillet 2021 devant le jury composé de

Mechrouk Salima	**MCA**	**UMBB**	**Président**
Adjabi Yacine	**MCA**	**UMBB**	**Examinateur**
Karima Laoubi	**MCA**	**UMBB**	**Encadreur**

Année Universitaire 2020/2021

Table des matières

Remerciement

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nous avoir donner la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Dr Karima Laoubi. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Nous tenons également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous on fait en acceptant d'examiner notre travail.

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi. Leurs soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

En fin J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

$\mathcal{R}$ésumé

Dans ce mémoire on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème hyperbolique posé dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^2$ de frontière composée de deux parties aproximés sous l'action d'un contrôle dynamique $\eta(t)$ et de densité non néglegable.

Nous nous intéressons à la stabilisation rationnelle du problème considéré en se servant de la stabilité exponentielle d'un problème a une dimenssion et une analyse de fourier.

$\mathcal{I}$ntroduction

Nous nous intéréssons à la stabilisation rationnelle de l'équation des ondes posée dans un ouvert bornée de IR^2 avec amortissement imposé uniquement sur la frontière de Wentzell. qui modélisent les vibrations dynamiques d'un corqs élastique. Plus précisément : Nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x;t) - \Delta u(x;t) = 0 \ , dans \ \ \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u_{tt} - \Delta_T u + \partial_n u + u_t = 0 \quad dans \ \ \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x;t) = 0 \quad sur \ \ \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x;0) = u_0(x); \ u_t(x;0) = u_1(x) \quad dans \ \ \Omega \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Oú, $\Omega = (0;1)^2$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontiére Γ telle que :

$$\Gamma = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$$

$$\Gamma_0 = \{(x,1) : 0 < x < 1\} \cup \{(0,y) : 0 < y < 1\}$$

$$\Gamma_1 = \{(x,0) : 0 < x < 1\} \cup \{(1,y) : 0 < x < 1\}$$

Δ_T :désigne le Laplacien tangentiel.
$v(x)$ est le vecteur normal exterieur à Ω.

La condition sur Γ_1 caractérise la condition aux limites dynamique de Wentzell, qui est de type dynamique. En l'absence de u_{tt}, cette condition est appelée condition aux limites statique de Wentzell. Cette condition est généralement caractérisée par la présence d'opérateurs différentiels tangentiels du même ordre que l'opérateur principal.

Plusieurs méthodes ont été développées pour montrer la convergence ratinnelle de différents problèmes d'évolutions. Parmi celles ci on peut citer : la méthode d'estimation de l'énergie en utilisant la technique des multiplicateurs et la méthode des bases de Riez basée sur l'analyse de Fourier voir [14].

L'objectif de ce travail, est de montrer que notre problème admet une décroissance rationnelle en utilisant une méthode basée sur l'analyse de Fourier, la théorie des semi groupes et la théorie spectrale.

Ce travail est réparti en quatre chapitres :

Chapitre 1 : L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques résultats préliminaires sur l'analyse fonctionnelle.
Dans la $1^{e}re$ section, on rappelle quelques notions sur les espaces de sobolev, on a donné quelques théorèmes fondamontaux a savoir : Théorème de Poincaré, Théorème de trace, Théorème de Lax Milgram.
Dans la $2^{e}me$ section, nous rassemblons quelques définitions sur les opérateurs non bornés, l'ensemble résolvant et on donne également des propriétés générales sur les opérateurs maximaux dissipatifs.
La $3^{e}me$ section a été consacré à la théorie spectrale des opérateurs, Rayon Spectrale, Image Spéctrale.
On termine ce chapitre par un rappel sur la théorie des semi groupes ou, on va présenter quelques Théorèmes fondamontaux (Théorème de Hille Yosida et Lumer Philips) qui relies les propriétés de dissipation de l'énergie d'un opérateur non borné à l'existence et l'unicité des solutions.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, on étudie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation des ondes sous l'action d'un contrôle dynamique avec condition de Wentzell, on se basant sur le théorème de Hille Yosida.

Chapitre 3 : Dans ce travail, nous proposons l'étude de la stabilisation exponentielle de l'équation des ondes, sous l'action d'un contrôle dynamique avec des conditions aux limites de type Wentzell.

Chapitre 4 : Dans ce dernier chapitre on traite le probléme de la stabilité rationnelle du problème du type wentzell pour l'équation des ondes posée dans un carré de frontière $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ approximés.

1

Rappels et Préliminaires

1.1 Introduction aux espace de Sobolev

1.1.1 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $H^1(\Omega)$ l'éspace des distribuions $L^2(\Omega)$ ayant toutes leurs dérivées partielles d'ordre 1 appartenant à $L^2(\Omega)$. Donc en notant les dérivées partielles (au sens des distribution) $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ nous posons :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \partial_\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha = 1...n\}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un éspace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (uv + \nabla v \nabla v)dx$$

On notera $||.||_{H^1(\Omega)}$ la norme associée

1.1.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité de Poincaré

On définit l'éspace $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence des fonctions de $D(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$, ces fonctions vérifiant une inégalité fondamentale dite Inégalité de Poincaré.

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u/\partial\Omega = 0\}$$

1.1.3 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante $c > 0$ ne dépondant que de Ω telle que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), ||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^2(\Omega)}.$$

l'espace $H^m(\Omega)$ est défini par :

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

ou

$$\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|v}}{\partial x_1^{\alpha 1} \dots \partial x_n^{\alpha n}} et |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

cet espace est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx$$

et la norme associé est notée $||.||_{H^m(\Omega)}$

1.1.4 Théorème de trace dans $H^1(\Omega)$

Soit (Ω) un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe C^1 par morceaux, alors l'application de trace défini par :

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : D(\bar{\Omega}) & \to & C^0(\Gamma) \\ v & \to & \gamma_0(v) = v/\Gamma \end{array}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

Cela implique en particulier :

$$\exists c > 0,\ \forall v \in H^1(\Omega) : ||\gamma_0(v)||_{L^2(\Gamma)} \leq c||v||_h^1\Omega$$

Pour plus de détails voir les références [6] et [14]

1.2 Opérateurs m-dissipatifs

X un espace de Banach et $D(A)$ est un sous espace vectorial de X appelé domaine de A.

Définition 1.2.1 *Un opèrateur linèaire non borné A de $D(A)$ dans X est dit dissipatif si :*

$$\forall \lambda > 0;\ \forall u \in D(A);\ ||\lambda u - Au|| \geq \lambda||u|||$$

Définition 1.2.2 *Un opèrateur linéaire non borné A de $D(A)$ dans X est dit m-dissipatif si A est dissipatif et*

$$\forall \lambda > 0; \forall f \in X; \exists u \in D(A); \lambda u - Au = f$$

Remarque 1.2.1 *Si A est un opérateur m-dissipatif dans X, pour tout $f \in X$ et tout $\lambda > 0$, l'équation $\lambda u - Au = f$ posséde une unique solution vérifiant*

$$||u|| \leq ||f|$$

Définition 1.2.3 *Soit A un opérateur m-dissipatif dans X et $\lambda > 0$. Pour tout $f \in X$, on note $R_\lambda f$ la solution u de l'équation $\lambda u - Au = f$.*

Proposition 1.2.4 *Soit A un opérateur linéaire dissipatif dans X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est m-dissipatif dans X.*
2. *il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $f \in X$, il existe $u \in D(A)$ tel que $\lambda_0 u - Au = f$.*

Proposition 1.2.5 *Si A est m-dissipatif, alors G(A) le graphe de A est fermé dans X.*

Définition 1.2.6 *Soit $A : D(A) \subset H \to H$, un opérateur linéaire avec D(A) dense dans H.*

1. *On appelle opérateur adjoint de A, l'opérateur $A^* : D(A^*) \subset H \to H$ défini par :*

$$D(A^*) = \{v \in H : \ \exists u^* \in H : \langle Au; v \rangle = \langle u; A^*v \rangle \ ; \ \forall u \in D(A)\}$$

2. *on dit que A est un opérateur symétrique si*

$$\langle Au; v \rangle = \langle u; Av \rangle \, .\forall u \in D(A) \text{ et } \forall v \in D(A) \subset D(A^*)$$

3. *On dit que A est auto-adjoint si*

$$D(A) = D(A^*) \text{ et } Au = A^*u; \ \forall u \in D(A)$$

Proposition 1.2.7 *Nous supposons ici que H est un espace de Hilbert.*
A est dissipatif de $D(A)$ dans H si et seulement si

$$\langle Au; u \rangle \leq 0; \ \forall u \in D(A)$$

Proposition 1.2.8 *Si A est un opérateur auto-adjoint dans H, et si $\langle Au; u \rangle \leq 0$ $\forall u \in D(A)$, alors A est m-dissipatif.*

Corollaire 1.2.9 *Soit A un opérateur linéaire dans H, de domaine dense, tel que :*

$$G(A) \subset G(A^*)$$

et A est dissipatif. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A est auto-adjoint voir [1] et [7].

1.3 Théorie spectrale des opérateurs

Définition 1.3.1 *Soit $T \in L(E)$, posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

1. *On appelle ensemble résolvant de T l'ensemble*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I\text{-}T \text{ est inversible}\}$$

Un élément de $\rho(T)$ est appelé valeur résolvante de T.

2. *Si $\lambda \in \rho(T)$, on définit la résolvante $R_\lambda(T)$ de T au point λ par*

$$R_\lambda(T) := (\lambda I - T)^{-1}$$

La résolvante $R_\lambda(T)$ est simplement notée R_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur T.

3. *Le spectre $\sigma(T)$ de T est l'ensemble :*

$$\sigma(T) := \mathbb{K}\backslash\rho(T).$$

Un élément de $\sigma(T)$ est une valeur spectrale de T.

4. *On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de T si $\lambda I - T$ n'est pas injectif. Autrement dit, l'ensemble des valeurs propres $V_p(T)$ de T est donné par*

$$V_p(T) := \lambda \in \mathbb{K} : Ker(\lambda I - T) \neq 0$$

1.3.1 Rayon spectral

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On définit le rayon spectral $r(T)$ de T par

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Si $\sigma(T) = \oslash$; par convention, on pose $r(T) := 0$.

1.3.2 Théorème de l'image spectrale

Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou $K[X]$ l'ensemble des polynomes de degré $\leq n$. Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ et$\in K[X]$. Alors, on peut définir l'opérateur $P(T) \in \mathcal{L}(E)$ de la manière suivante :

$$P(T) := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$(\lambda P + \mu Q)(T) = \lambda P(T) + \mu Q(T) \text{ } et \text{ } PQ(T) = P(T)Q(T) = Q(T)P(T)$$

Ci-dessous on compare le spectre de T et celui de P(T) en utilisant les documents [12] et [16].

Preuve 1.3.1 *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, λ est racine de $P(\lambda) - P$ donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\lambda) - P(X) = (\lambda - X)Q(X)$, d'ou*

$$P(\lambda)I - P(T) = (\lambda I - T)Q(T) = Q(T)(\lambda I - T)$$

On suppose $P(\lambda) \notin \sigma(P(T))$ et on pose $S := (P(\lambda)I - P(T))^{-1}$. On obtient

$$(\lambda I - T)Q(T)S = I = SQ(T)(\lambda I - T),$$

d'où $\lambda I - T$ est inversible d'inverse $SQ(T) = Q(T)S$. On en déduit $\lambda \notin \sigma(T)$. Autrement dit, si $\lambda \in \sigma(T)$ alors $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$ ce qui donne le résultat. Pour l'égalité, on suppose $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ et P de degré supérieur ou égal à 1 (résultat évident sinon). Soient $\mu \in \sigma(P(T))$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les n racines complexes du polynôme $P - \mu$, On a :

$$P(X) - \mu = c(X - \lambda_1)...(X - \lambda_n)$$

où $c \neq 0$. Alors on obtient :

$$P(T) - \mu I = c(T - \lambda_1 I)...(T - \lambda_n I)$$

Puisque $\mu \in \sigma(P(T))$, $P(T) - \mu I$ n'est pas inversible et donc il existe $i_0 \in 1, ..., n$ tel que $(T - \lambda_{i_0} I)$ n'est pas inversible, d'où $\lambda_{i_0} \in \sigma(T)$. De plus, on a $P(\lambda_{i_0}) = \mu$ donc $\mu \in P(\sigma(T))\mu$.

1.3.3 Image spectrale

Soient $T \in l(E)$ et $P \in K[X]$. Alors, on a

$$P(\sigma(T)) \subset \sigma(P(T)),$$

et l'égalité a lieu si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$

Pour plus de détails, veuillez consulter les documents [12][13]

1.4 Théorème de Lax Milgram

Théorème 1.4.1 *Soit V un espace de Hilbert de produit scalaire $(.,.)$ et de norme $||.||$, et soit la formulation faible suivante*

$$Trouver\ \ u \in V\ \ tellque,\ \ \forall v \in V, a(u,v) = L(v)$$

Sous réserve des quatre hypothèses suivantes :

1. *$L(v)$ est une forme linéaire continue sur V :*

$$\exists C > 0/\forall v \in V, |L(v)| \leq C||v||_V$$

2. *$a(.,.)$ est une forme biquilinéaire sur $V \times V$.*
3. *$a(.,.)$ est continue :*

$$\exists M > 0 : \forall (u,v)\ \in V \times V, |a(u,v)| \leq M||u||_V||v||_V$$

4. *$a(.,.)$ est coercive (ou elliptique) :*

$$\exists \alpha > 0 : \forall u \in V,\ a(u,u) \geq \alpha||u||_V^2$$

La formulation faible admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire :

$$||u|| \leq \frac{M}{\alpha}C$$

Preuve 1.4.1 *voir[10]*

1.5 Théorie des semi-groupes

1.5.1 Définition d'un C_0 semi-groupe

Définition 1.5.1 *Soit E un espace de Banach, une famille à un paramètre G(t),* $0 \leq t < +\infty$ *d'éléments de* $\mathcal{L}(E)$ *est appelée semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur E si :*

1. *G(0) = I*
2. *G(t + s) = G(t).G(s)* $\forall t, s \geq 0$

• Un tel semi groupe est dit uniformement continu si :

$$\lim_{t \to 0} ||G(t) - I|| = 0$$

On dit dans ce cas que $G(t)$ est un C_0 semi groupe [1].

1.5.2 Génerateur Infinitésimal

Définition 1.5.2 *Le générateur infinitésimal A d'un* C_0*-semi groupe* $S(t)$ *est définie par :*

$$A\,x = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}[S(t)x - x]$$

De domaine :

$$D(A) = \left\{ x \in H,\ \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}[S(t)x - x] \ existe \right\}$$

1.5.3 Théorème de Hille-Yosida

Soit A un opérateur linéaire (non necessairement borné) dans un espace de Banach E. Alors A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction si et seulement si :

1. A est fermé à domaine dense.
2. L'ensemble résolvant $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A$ est inversible de $D(A) \to E\}$ contient $\mathbb{R}_+^*$, de plus $\forall \lambda > 0$, on a

$$||R(\lambda, A)|| = ||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

1.5.4 Théorème de Lumer-Philips

Soit A un opérateur linéaire à domaine dense dans un espace de Banach E, alors :

1. Si A est dissipatif et qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 - A) = E$ Alors A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction.
2. Si A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction Alors
   $Im(\lambda_0 - A) = E$, et $\lambda_0 > 0$ et A est dissipatif.

De plus : $\forall x \in D(A)$, $\forall x^* \in F(x)$:

$$Re < x^*, Ax > \leq 0$$

1.5.5 Démonstration du théorème de Lumer-Philips

Preuve 1.5.1 *([1],[9])*

i/- A dissipatif $\Longrightarrow ||(\lambda - A)x|| \geq \lambda.||x||$, $\forall x \in D(A) \Longrightarrow \lambda I - A$ *injectif*

En particulier pour λ_0 *:*

- $\lambda_0 I - A$ *est bijectif et de plus :* $||(\lambda_0 I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda_0}$

  donc $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ *borné et continue et* A *est fermé.*

  En utilisant le théorème de Hille-Yosida, on en déduit que A est G.I d'un $\mathcal{C}_0$ *semi-groupe de contraction. (Car* $\frac{1}{\lambda_0} < 1$*)*

- $\Lambda = \{\lambda > 0 \ : \ Im(\lambda I - A) = E\} \ \subset]0, +\infty[$.

  $\lambda \in \Lambda$ *Longrightarrow*$\lambda \in \rho(A) \implies \exists \underbrace{V(\lambda)}_{ouvert} \subset \rho(A)$

  D'où $V(\lambda) \cap \ ]0, +\infty[\ \subset \rho(A)$ *est un voisinage de* λ *dans* $]0, +\infty[$ *et* Λ *est ouvert*

- *On démontre que* Λ *est fermé : Soit* $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \longrightarrow \lambda > 0$

  étant donné : $y \in E$, $\forall n$, $\exists x_n \in D(A)$ / $\lambda x_n - Ax_n = y$ *d'après la surjectivité On a* $||x_n|| \leq \frac{1}{\lambda_n}.||y|| \leq C$. *de plus*

$$\begin{aligned} A_m||x_n - x_m|| &\leq ||\lambda_m(x_n - x_m)|| - ||A(x_n - x_m)|| \\ &= |\lambda_n - \lambda_m|.|x_m| \\ &\leq C|\lambda_n - \lambda_m| \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} \lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m) &= \lambda_m x_n - Ax_n - \underbrace{\lambda_m x_m - Ax_m}_{y} \\ &= \lambda_m.x_n - \lambda_n.x_n - y \end{aligned}$$

λ_n *étant une suite de Cauchy donc* x_n *est une suite de Cauchy, et on a* $x_n \overset{C.V}{\longrightarrow} x$

$$\begin{cases} Ax_n = -y + \lambda x_n \longrightarrow -y + \lambda x \\ x_n \longrightarrow x \end{cases} \qquad A\ fermé \Rightarrow x \in D(A)\ et\ Ax = -y+\lambda x$$

$$\Longrightarrow \lambda \in \Lambda$$

C.S : $Im(\lambda I - A) = E, \quad \forall \lambda > 0.$

A dissipatif $\Longrightarrow$ $Im(\lambda I - A)$ *injectif* $\quad \forall \lambda > 0. \Longrightarrow (\lambda I - A)^{-1}$ *existe et*

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Le théorème m de H.Y $\Longrightarrow$ *A est G.I d'un* $\mathcal{C}_0$ $\frac{1}{2}$*-groupe de contraction.*

- *Reste à montrer : Re* $< x^*, Ax > \leq 0$

$$x \in D(A), \qquad x^* \in F(x)$$

$$\begin{aligned} | < G(t)x, x^* > | &\leq ||G(t)x||.||x^*|| \\ &\leq ||x||.||x^*|| = ||x||^2 \end{aligned}$$

$$< G(t)x - x, x^* > = < G(t)x, x^* > - \underbrace{< x, x^* >}_{||x||^2} \leq 0$$

Donc Re $< G(t)x - x, x^* > \leq 0$. *On dévise par* $t > 0$ *et on fait tendre* $t \to \infty$*, on obtient*

$$Re < Ax, x^* >< 0.$$

Corollaire 1.5.1 *Soit A fermé à domaine dense si A et A^* sont deux opérateurs continues dissipatifs, alors : A est G.I d'un $\mathcal{C}_0$ semi-groupe de contraction.*

Preuve 1.5.2 $\lambda = 1$, $\quad Im(I - A) = E$, *On suppose que* $Im(I - A) \neq E$, *on applique le théorème de Hann Banach. comme* $Im(I - A)$ *est un sous espace vectoriel fermé de* E *:*

$$\exists x^* \in E^*\ ,\ x^* \neq 0 \quad et \quad x^*\ (Im(I - A)) = \{0\}$$

$$x^* \in D(A^*) \quad et \quad < x^* - Ax^*, x >= 0 \quad \forall x \in D(A).$$

$D(A)$ *dense alors* $x^* - Ax^* = 0$

A^* *dessipatif donc* $I - A^*$ *est injectif et* $(I - A^*)x^* = 0$ *implique que* $x^* = 0$, *on aboutit donc à une contradiction et* $Im(I - A) = E$

2

Équation des ondes avec conditions de Wentzell

Nous étudions la condition nécessaire et suffisante pour obtenir une solution unique pour un problème des ondes avec conditions de Wentzell et densité non négligeable.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine ouvert borné de frontière Γ de classe C^2. Nous supposons que Γ est divisée en deux parties Γ_0 et Γ_1, c'est-à-dire :

$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, avec $\bar{\Gamma_0} \cap \bar{\Gamma_1} = \oslash$

tel que :

$$\Gamma_0 = \{(x,1) : 0 < x < 1\} \cup \{(0,y) : 0 < y < 1\}$$

$$\Gamma_1 = \{(x,0) : 0 < x < 1\} \cup \{(1,y) : 0 < x < 1\}$$

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x;t) - \Delta u(x;t) = 0 \ , dans \ \ \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u_{tt} - \Delta_T u + \partial_n u + u_t = 0 \quad dans \ \ \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x;t) = 0 \quad sur \ \ \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x;0) = u_0(x); \ \ u_t(x;0) = u_1(x) \quad dans \ \ \Omega \end{cases} \tag{2.0.1}$$

où $n(x)$ désigne le vecteur unitaire normal vers l'extérieure au point $x \in \Gamma$

u=u(x,y,t) tel que $(x,t) \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}^+$ $\partial_n u = \partial_x u$ est la dérivée normal.

Δ :opérateur de laplace $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$

Δ_T :opérateur tangentiel

2.1 Écriture du problème équivalent

Nous introduisons le problème équivalent : on désigne par H l'espace de Hilbert, où

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{u : u|_{\Gamma_0}, \nabla u \in (L^2(\Omega))^2, \nabla_\Gamma u \in (L^2(\Gamma_1))^2, u_x(1,1) = u_y(1,1)\right\}$$

$$H = \left\{(u,v,w)^t \in H^1_{\Gamma_0} \times l^2(\Omega) \times l^2(\Gamma_1)\right\}$$

muni du produit scalaire suivant :

$$\left\langle U, \tilde{U} \right\rangle_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \tilde{u}(x) dx + \int_{\Gamma_V} \nabla_T u(x) \nabla_T \tilde{u}(x) d\Gamma$$

$$\left\langle U,\tilde{U}\right\rangle_H=\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\tilde{u}(x)dx+\int_\Omega u(x)\tilde{u}(x)dx+\int_{\Gamma_V}\nabla_T u(x)\nabla_T\tilde{u}(x)d\Gamma$$

alors :

$$||u||_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)}=||\nabla u||^2_{l^2(\Omega)}+||\nabla_T u||^2_{l^2(\Gamma_1)}$$

$$||(u,v,\eta)^t||^2_H=||u||^2_{H^1_{\Gamma_0}}+||v||^2_{l^2(\Omega)}+||w||^2_{l^2(\Gamma_1)}$$

avec $U=(u,v,\eta)^t,\tilde{U}=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\eta})^t\in H$

pour $U=(u,v,\eta),$ avec $v=u_t$ et $\eta=v|_{\Gamma_1}$

le probléme précedent s'écrit comme

$$\begin{cases} Y_t(t)=AY(t)\\ Y(0)=Y_0=(u_0,u_1,\eta_0)\end{cases}\tag{2.1.1}$$

ou :$A:D(A)\subset H\longrightarrow H\longrightarrow$ est un opérateur différentiel défini par

$$A\begin{pmatrix}u\\v\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&I&0\\\Delta&0&0\\\Delta_T-\partial_\eta&0&-I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\\Delta u\\\Delta_T u-\partial_\eta u-v\end{pmatrix}\tag{2.1.2}$$

De domaine

$$D(A)=\left\{(u,v,\eta)^t\in H,v\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega),\Delta u\in L^2(\Omega),\partial_\eta u+\Delta_T u\in L^2(\Gamma_1)\right\}$$

2.2 Étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème équivalent

Sous les hypothèses associés à ce problème, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.2.1 *Pour toute donnée initiale $U_0 \in X$, il existe une solution unique $U \in C([0;+1[;x)$ du problème précedent.*
De plus, si $U_0 \in D(A)$, la solution de problème précedent satisfait

$$U \in C([0;+1[;D(A)) \cap C^1([0;+1[;X)$$

Preuve 2.2.1 *Pour montrer l'existence d'une solution du système il suffit de montrer que A est un générateur infinitisimal d'un C_0-semi groupe de contraction,c'est-à-dire A est maximal dissipatif, pour cela il suffit de montrer que A est dissipatif et maximal (voir le théorème).*

1. *A dissipatif*

   Pour montrer que A est dissipatif il suffit de prouver qu'il existe $c > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
\langle AU, U\rangle_H &\leq 0\\
\langle AU, U\rangle_H &= \int_\Omega \nabla v(x)\nabla u(x)dx + \int_\Gamma \nabla_T v \nabla_T u d\Gamma + \int_\Omega \Delta u(x) v dx\\
&\quad + \int_{\Gamma_1} (\Delta_T u(x)\partial_\eta u(x) - v)\eta d\Gamma
\end{aligned}$$

   utilisant Green, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle AU, U\rangle_H &= \int_\Omega \nabla v(x)\nabla u(x)dx + \int_\Gamma \nabla_T v \nabla_T u d\Gamma - \int_\Omega \nabla v(x)\nabla u(x)dx\\
&\quad + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\Delta_T u(x)\partial_\eta u(x) - v)\eta d\Gamma\\
&= -\int_\Gamma v\eta d\Gamma\\
&= \int_\Gamma -|v|^2 d\Gamma
\end{aligned}$$

   d'ou

$$\langle AU, U\rangle_H < 0$$

Donc l'opérateur A est dissipatif

2. *A maximal*

   Pour montrer la maximalité de A, il suffit de montrer que $\lambda I - A$ est surjectif pour chaque $\lambda > 0$, nous supposons que $F = (f_1; f_2; f_3)^t \in H$ et on cherche $U = (u; v; \eta)^t \in D(A)$ solution de $(\lambda I - A)U = F$; ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit :

   $(\lambda I - A)U = F$

   posons $\lambda = 1$ on obtient :

$$\left[\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \Delta & 0 & 0 \\ \Delta_T - \partial_\eta & 0 & -I \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

   alors la solution est :

$$\begin{cases} u - v = f_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -\Delta u + v = f_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ -\Delta_T u + \partial_\eta u + 2\eta = f_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases} \tag{2.2.1}$$

   En additionant (1) et (2) en trouve :

$$-\Delta u + u = f_1 + f_2$$

   En appliquant Lax Milgram :

$$\int_\Omega -\Delta uvdx + \int_\Omega uvdx = \int_\Omega (f_1 + f_2)vdx$$

Utilisons la méthode d'integration par partie, on trouve :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uvdx - \int_\Gamma \partial_\eta v d\Gamma = \int_\Omega (f_1 + f_2) v dx$$

En utilisant ensuite l'équation (3) on obtient :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uvdx - \int_\Gamma (\Delta_T u - 2\eta) v d\Gamma + \int_\Omega f_3 v dx = \int_\Omega (f_1 + f_2) v dx$$

Par la formule de Green :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uvdx + \int_\Gamma \nabla_T u \nabla_T v d\Gamma - \int_\Gamma 2\eta v d\Gamma = \int_\Omega (f_1 + f_2 - f_3) v dx$$

Posons :

$$\begin{cases} a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uvdx + \int_\Gamma \nabla_T u \nabla_T v d\Gamma \\ L(v) = \int_\Gamma 2v^2 d\Gamma + \int_\Omega (f_1 + f_2 - f_3) v dx \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Pour montrer que la formulation variationnelle $a(u,v) = L(v)$ admet une unique solution, nous appliquons le théorème de Lax Milgram.

1. *$L(v)$ continue*

$$\begin{aligned} |L(v)| &= |\int_\Gamma 2v^2 d\Gamma + \int_\Omega (f_1 + f_2 - f_3) v dx| \\ &\le \int_\Gamma 2|v|^2 d\Gamma + \int_\Omega |f_1 + f_2 - f_3||v| dx \\ &\le 2||v||^2_{L^2(\Gamma_1)} + C_1 ||v||_{L^2(\Omega)} dx \\ &\le max(2, C_1)||v||_{L^2(\Omega)} \\ &\le C||v||_{L^2(\Omega)} \\ &\le C||v||_H \end{aligned}$$

donc $L(v)$ est continue.

2. $a(u,v)$ *continue*

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Gamma} \nabla_T u \nabla_T v d\Gamma| \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla u||\nabla v| dx + \int_{\Omega} |u||v| dx + \int_{\Gamma} |\nabla_T u||\nabla_T v| d\Gamma \\
&\leq ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} ||\nabla v||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla_T u||_{L^2(\Gamma)} ||\nabla_T v||_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq C(||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla_T u||_{L^2(\Gamma)})(||\nabla v||_{L^2(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla_T v||_{L^2(\Gamma)}) \\
&\leq C||u||_H ||v||_H
\end{aligned}$$

Donc $a(u;v)$ *est continue.*

3. *Coercivité de a(. ;.) :*

$$\begin{aligned}
|a(u,u)| &= |\int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx + \int_{\Omega} |u||u| dx + \int_{\Gamma} |\nabla_T u||\nabla_T u| d\Gamma| \\
&= ||\nabla u||_L^2(\Omega)^2 + ||u||_L^2(\Omega)^2 + ||\nabla_T u||_{L^2(\Gamma)}^2 \\
|a(u,u)| &\geq 1||\nabla u||_H^2
\end{aligned}$$

Donc $a(.;.)$ *est coercive.*

$a(u;v)$ *bilinéaire, continue et coercive sur* H *et* $L(v)$ *est linéaire continue sur H, d'aprés le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique faible* $u \in H$ *telle que*

$$a(u;v) = L(v); \ \forall v \in H$$

En utilisant (1) et (2)on obtient :

$$\Delta u = u - (f_1 + f_2) \in L^2(\Omega)$$

comme u, f_1 *et* $f_2 \in L^2(\Omega)$

alors :

$$\Delta u \in L^2(\Omega)$$

d'ou :

$$v = u - f_1 \in H$$

finalement il existe $U = (u; v; \eta)^t \in D(A)$ *qui vérifie* $(\lambda I - A)U = F$ *pour* $\lambda > 0$ *et* $F \in H$*. C'est-à-dire* $(\lambda I - A)$ *est surjectif, donc* A *est maximal. Le théorème de Lax Milgram assure l'existence et l'unicité de solution du problème* (2.1.2) *Ceci terminé la démonstration.*

L'énergie de la solution du problème (2.1.2) *est définie par :*

$$E(t) = E(u; u_t)(t) = \frac{1}{2}||(u; u_t)(t)||_H^2 \tag{2.2.3}$$

En intégrant par partie, on vérifie que pour $(u_0; u_1) \in D(A)$ *on a :*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_{\Gamma_V} |u_t|^2 dt \tag{2.2.4}$$

3

Stabilisation exponentielle

Nous supposons que le bord Γ est composé de deux côtés proximés, c'est-à-dire :

$$\Gamma_0 = \{(x, 1) : 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) : 0 < y < 1\} = \Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2$$

on considère le développement de Fourier partiel de u :

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u^{(j\pi)}(x; t) sin(jy\pi)$$

le coéficient de fourier $u^{(j\pi)}$ de u satisfait le problème suivant dans le domaine entre 0 et 1

$$\begin{cases} u^J_{tt} - u^J_{xx} + J^2 u^J = 0 \quad (0,1), t \geq 0 \\ u^J_{tt}(1,t) + J^2 u^J(1,t) + u^J_x(1,t) + u^J_t(1,t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ u(0,t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ u^J(x,0) = u_0, u^J_t(x,0) = u_1 \end{cases} \tag{3.0.1}$$

avec :

$$\begin{cases} J = j\pi \\ u_0(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} u_0^{j\pi}(y) sin(j\pi x) \\ u_1(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} u_1^{j\pi}(y) sin(j\pi x) \end{cases} \tag{3.0.2}$$

Soit l'expression de l'energie :

$$E_J(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 ((u^J_x(x,t))^2 + J^2(u^J(x,t))^2 + (u^J_t(x,t))^2)dx + \frac{1}{2}(u^J_t(1,t))^2 + \frac{J^2}{2}(u^J(1,t))^2.$$

Ce système est exponentiellement stable selon V. Komornik [18] mais le taux de décroissance est lié à J. Il existe donc deux constantes positives $C(J)$ et $\omega(J)$ telles que :

$$E_J(t) \leq C(J) e^{\omega J t} E_J(0) \tag{3.0.3}$$

Lemme 3.0.1 *Soit u^J une solution régulière du problème, alors :*

$$E'_J(t) = -[(u^J_t(1,t))^2]$$

Preuve 3.0.1 *Soit u^J une solution régulière du problème,utilisant intégrale* *par parties en obtient :*

$$\begin{aligned}
E_J^{'}(t) &= \int_0^1 (\partial_x(u_x^J u_t^J) - u_{xx}^J u_t^J + J^2 u_t^J u^J + u_{tt}^J u_t^J)dx + J^2(u_t^J(1,t)u^J(1,t)) \\
&\quad + u_{tt}^J(1,t)u_t^J(1,t). \\
&= \int_0^1 \partial_x(u_x^J u_t^J)dx + \int_0^1 u_t^J(-u_{xx}^J + J^2 u^J + u_{tt}^J)dx + J^2 u_t^J(1,t)u^J(1,t) \\
&\quad + J^2 u_{tt}^J(1,t)u_t^J(1,t) \\
&= u_x^J(1,t)u_t^J(1,t) - u_x^J(0,t)u_t^J(0,t) + J^2(u_t^J(1,t)u^J(1,t) + u_{tt}^J(1,t)u_t^J(1,t)) \\
&= u_x^J(1,t)u_t^J(1,t) + J^2 u_t^J(1,t)u^J(1,t) + u_{tt}^J(1,t)u_t^J(1,t) \\
&= u_t^J(1,t)[u_x^J(1,t) + J^2 u^J(1,t) + u_{tt}^J(1,t)]
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites, on en déduit que :

$$E_J^{'}(t) = -[(u_t^J(1,t))]^2$$

Afin d'étudier la dépendance explicite des constantes par rapport à J, nous écrivons u^J comme suit

$$u^J = f + g$$

où f satisfait le problème précedent en l'absence de dissipation, g est le reste. Ce sont respectivement des solutions des deux problèmes :

$$\begin{cases}
f_{tt} - f_{xx} + J^2 f = 0 \quad sur(0,1), \forall t \geq 0 \\
f_{tt}(1,x) + f_x(1,t) + J^2 f(1,t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\
f(0,t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\
f(.,0) = u_0^J, f_t(.,0) = u_1^J \quad \forall t \geq 0
\end{cases} \tag{3.0.4}$$

$$\begin{cases} g_{tt} - g_{xx} + J^2 g = 0 \quad sur(0,1), \forall t \geq 0 \\ g_{tt}(1,t) + J^2 g(1,t) + g_x(1,t) + g_t^J(1,t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ g(0,t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ g(.,0) = 0, g_t(.,0) = 0 \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{3.0.5}$$

Nous prouvons qu'une estimation d'observabilité est vérifiée, puis par un argument de perturbation, nous trouvons l'estimation d'observabilité demandée pour le problème de départ (3.0.3). Ici, l'estimation d'observabilité du problème (3.0.4) est obtenue en utilisant une analyse spectrale précise et l'inégalité d'Ingham. Pour l'argument de perturbation, nous étudions la dépendance de la constantes par rapport au temps T, voir aussi [2] et [3].
L'étude du problème (3.0.4) est lié à l'opérateur auto-adjoint positif A_J *de* $L^2(0;1)$ *vers lui-même (avec un inverse compact) et de domaine*

$$D(A_J) = \{v \in H^2(0,1) : v(0) = 0 \ et \ v_x(1) = -J^2 v(1)\}$$

définie par :

$$A_J v = -v_{xx} + J^2 v \quad \forall v \in D(A_J)$$

Proposition 3.0.2 A_J *est un opérateur positif auto-adjoint de* $L^2(0;1)$ *en lui-même. De plus la résolvante* $R_\lambda(A_J)$*est compacte pour tous les* $\lambda \in \rho(A_J)$.

Preuve 3.0.2 *On note (.) le produit scalaire de* $L^2(0;1)$

$$\forall v \in D(A_J); \ (A_J v, v) = \int_0^1 (-\partial_{xx} v + J^2 v) v dx = \int_0^1 -\partial_{xx} v v dx + \int_0^1 J^2 v^2 dx$$

utilisons l'integration par parties en obtient :

$$\begin{aligned}
(A_J v, v) &= -v_x(1)v(1) + \int_0^1 (\partial_x v)^2 dx + \int_0^1 J^2 v^2 dx \\
&= J^2 v(1)^2 + \int_0^1 (\partial_x v)^2 dx + \int_0^1 J^2 v^2 dx \\
(A_J v, v) &\geq 0
\end{aligned}$$

on définit :

$$D(A_J^*) = \left\{ v \in H^2(0;1) : \ \exists c > 0; \, \forall u \in D(A_J); \, |(v; A_J u)| \leq c||u||_{L^2(0;1)} \right\}$$

et :

$$\forall v \in D(A_J^*) \forall u \in D(A_J), (A_J^* v, u) = (v, A_J^* u)$$

on commençe d'abord par montrer que :

$$D(A_J) \subset D(A_J^*) \ et \ A^*_{J|D(A_J)} = A_J$$

soitent $u, v \in D(A_J)$

$$\begin{aligned}
(v, A_J u) &= \int_0^1 v(-\partial_{xx} u) dx + \int_0^1 J^2 uv dx \\
&= \int_0^1 \partial_x v \partial_x u dx - u_x(1)v(1) + u_x(0)v(0) + \int_0 1 J^2 uv dx \\
&= \int_0^1 \partial_x v \partial_x u dx - u_x(1)v(1) + \int_0^1 J^2 uv dx \\
&= v_x(1)u(1) - v_x(0)u(0) + \int_0^1 u(-\partial_{xx} u) dx - u_x(1)v(1) + \int_0^1 J^2 uv dx \\
&= v_x(1)u(1) + \int_0^1 u(-\partial_{xx} u) dx - u_x(1)v(1) + \int_0^1 J^2 uv dx
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} v(0) = 0 \ et \ u(0) = 0 \\ v_x(1) = -J^2 v(1) \ et \ u_x(1) = -J^2 u(1) \end{cases} \tag{3.0.6}$$

donc :

$$(v, A_J u) = \int_0^1 u(-\partial_{xx} v)dx + \int_0^1 J^2 vudx$$

on déduit que :

$$v \in D(A_J^*) \ et \ A_J^* v = A_J v$$

Considérons maintenant l'espace $H^1(0;1)$ *avec le produit scalaire :*

$$\langle u, z \rangle_1 = \int_0^1 (uz + u_x z_x + J^2 uz)dx + J^2 u(1)z(1) + u_t(1)z_t(1)$$

qui définit une norme équivalente à la norme usuelle. On en déduit que, pour tout $f \in L^2(0;1)$*, il existe un unique* $u \in H^1(0;1)$ *tel que*

$$\forall z \in H^1(0;1), \langle u, z \rangle_1 = \int_0^1 fzdz$$

pour $z \in D(0.1)$ *on obtient :*

$$u_{xx} = u + J^2 u - f \quad dans \ D^{'}(0.1)$$

on a :$u \in H^2(0,1)$

$$u + A_J u = f \tag{3.0.7}$$

et :

$$\int_0^1 (uz + u_x z_x + J^2 uz)dx + J^2 u(1)z(1) + u_t(1)z_t(1) = \int_0^1 fzdx \quad \forall z \in H^1(0,1)$$

utilisons l'integration par parties, et pour tout $z \in H^1(0,1)$ *en obtient :*

$$\int_0^1 (u + J^2u - u_{xx})zdx + u_x(1)z(1) - u_x(0)z(0) + J^2u(1)z(1) = \int_0^1 fzdx$$

alors :$\forall z \in H^1(0,1)$

$$\int_0^1 (u + J^2u - u_{xx})zdx + u_x(1)z(1) + J^2u(1)z(1) + u_t(1)z_t(1) = \int_0^1 fzdx$$

puisque $u_{xx} = u + J^2u - f$ *dans* $D^{'}(0.1)$ *alors :*

$$(u_x(1) + J^2u(1))z(1) + u_t(1)z_t(1) = 0 \quad \forall z \in H^1(0,1)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} u_x(1) = -J^2u(1) \\ u_t = 0 \end{cases} \tag{3.0.8}$$

Puisque $u \in H^2(0;1)$ *alors* $u \in D(A_J)$.

Considérons maintenant $v \in D(A_J^*)$, *il existe* $w \in L^2(0;1)$ *tel que :*

$$\forall z \in D(A_J), \int_0^1 A_Jzvdx = \int_0^1 wzdx$$

Soit z *la solution de l'equation* $u + A_Ju = f$ *avec* $f = v + w$.

Donc $w = -v + u + A_Ju$ *et*

$$\int_0^1 A_Jzvdx = \int_0^1 (u-v)zdx + \int_0^1 A_Juzdx = \int_0^1 (u-v)zdx + \int_0^1 uA_Jzdx$$

alors :

$$\forall z \in D(A_J), \int_0^1 (A_Jz + z)(v-u)dx = 0$$

en prenant z *solution de l'equation* $u + A_Ju = f$ *avec* $f = v - u$ *on obtient :*

$$v \equiv u \text{ donc } v \in D(A_J) \text{ et } D(A_J^*) \subset D(A_J)$$

d'ou A_J est un opérateur auto-adjoint

- *si $\lambda = -1 - J^2$ alors :*

$$\begin{aligned}(\lambda I - A_J u, u) &= -||u||^2_{L^2(0,1)} - J^2||u||^2_{L^2(0,1)} - J^2||u||^2_{L^2(0,1)} + ||\frac{\partial_u}{\partial_x}||^2_{L^2(0,1)} - J^2(u(1))^2 \\ u \in D(A_J) & \\ &\leq -(||u||^2_{L^2(0,1)} + ||\frac{\partial_u}{\partial_x}||^2_{L^2(0,1)} + J^2(u(1))^2), u \in D(A_J)\end{aligned}$$

on trouve aussi que :

$$(\lambda I - A_J u, u) \geq (||u||^2_{L^2(0,1)} + ||\frac{\partial_u}{\partial_x}||^2_{L^2(0,1)} + J^2(u(1))^2) \quad u \in D(A_J)$$

Cela signifie que $\lambda \in \rho(A_J)$ et $R_\lambda(A_J) = (\lambda I - A_J)^{-1}$ est compact.
Le théorème suivant donne une caractérisation sur le spectre de l'opérateur A_J

Théorème 3.0.3 *Les racines de l'equation :*

$$tan(\ell) = \frac{-\rho}{J^2 + \lambda^2} \tag{3.0.9}$$

sont les valeurs propres de A_J notées λ^2 avec $\ell = \sqrt{\lambda^2 - J^2}$. En écrivant $\{\lambda_k^2\}_{k=0}^{\infty}$, la suite de ces racines dans l'ordre croissant, forment l'ensemble des valeurs propres de A_J, qui sont simples. Les vecteurs propres normalisés associés sont donnés par :

$$\varphi_k(x) = \alpha_k sin(\rho_k x) \quad \forall x \in (0,1) \tag{3.0.10}$$

où $\rho_k = \sqrt{\lambda_k^2 - J^2}$ et α_k est un nombre réel tel que :

$$\alpha_k \longrightarrow \sqrt{2} \quad et \quad k \longrightarrow \infty \tag{3.0.11}$$

De plus il existe $C_1 > 0$ *tel que*

$$|\varphi_k(1)| \geq \frac{C_1}{J^2} \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.0.12}$$

Enfin, la condition d'écart suivante est vérifiée, à savoir il existe $C_2 > 0$

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \frac{C_2}{J} \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.0.13}$$

Preuve 3.0.3 *Soit* $\Psi \in D(A_J)$*, en utilisant la formule de Green, on écrit :*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 A_J\Psi)(x)\Psi(x)dx &= \int_0^1 (-\psi_{xx} + J^2\psi)(\psi(x))dx \\
&= \int_0^1 (\psi_x)^2 + (-\psi_x\psi|_0^1) + \int_0^1 j^2\psi^2(x)dx \\
&= \int_0^1 ((\psi_x)^2 + j^2\psi^2(x))dx - \psi_x(1)\psi(1) + \psi_x(0)\psi(0)
\end{aligned}$$

les conditions aux limites de (3.0.4) *montrent que :*

$$\textstyle\int_0^1 (A_J\Psi)(x)\Psi(x)dx = \int_0^1 ((\psi_x)^2 + J^2\psi^2(x))dx + J^2\psi(1)^2 \geq J^2 \int_0^1 (\psi)^2 dx$$

Par conséquent, les valeurs propres sont supérieures à J^2

Supposons maintenant que $\lambda^2 \geq J^2$*. On considérera le système suivant :*

$$\begin{cases}
-\varphi_{xx} + J^2\varphi = \lambda^2\varphi \ dans(0,1) \\
\varphi(0) = 0 \\
\varphi_x(1) = -J^2\varphi(1) - \lambda^2\varphi(1)
\end{cases} \tag{3.0.14}$$

La première équation de (3.0.14) *montre qu'il existe* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\varphi(x) = \alpha sin(\rho x) + \beta cos(\rho x)$$

avec $\rho = \sqrt{\lambda^2 + J^2}$ *et*

$$\varphi_x(x) = \rho\alpha cos(\rho x) - \rho\beta sin(\rho x)$$

le première condition aux limites donne :

$$\varphi(0) = 0 \Longrightarrow \beta = 0$$

la deuxième condition aux limites donne :

$$\varphi_x(1) = \rho\alpha cos(\rho) = -J^2\varphi(1)$$

On peut alors écrire :

$$\rho\alpha cos(\rho) = -(J^2 + \lambda^2)\alpha sin(\rho)$$

alors :

$$\rho cos(\rho) = -(J^2 + \lambda^2)sin(\rho)$$

Donc une solution non triviale φ *existe si et seulement si* (3.0.9) *est vérifiée. La forme des vecteurs propres* (3.0.10) *également de cette considération. Comme* (3.0.9) *est équivalent à*

$$tan(\rho) = \frac{-\rho}{J^2 + \lambda^2}$$

On en déduit que ses racines sont simples et vérifient :

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < \rho < (k+1)\pi$$

** Montrons que :*$\alpha_k \sim \sqrt{2}$

De l'hypothèse de normalisation :

$$\int_0^1 \varphi_k^2 dx = 1$$

on obtient :

$$\int_0^1 (\alpha_k sin(\rho_k x))^2 = 1$$

ce qui implique que :

$$\alpha_k^2(\frac{1}{2} - \frac{sin(2\rho_k}{4\rho_k}) = 1$$

Cela conduit à (3.0.11) *puisque* $\rho_k \longrightarrow \infty$ *quand* $k \longrightarrow \infty$*.*

En utilisant la relation $sin(\rho_k)^2 + cos(\rho)^2 = 1$ *et l'équation caractéristique* (3.0.9)*, on peut écrire*

$$sin(\rho_k)^2(1 + \frac{(J^2+\lambda^2)^2}{\rho_k^2})$$

et puisque $\rho_k >> 1$ *, on en déduit que*

$$1 \leq (sin(\rho_k))^2(1 + (J^2+\lambda^2)^2)$$

ce qui prouve (3.0.12)*. La condition d'écart découle directement du cadre* (3.0.14)*.*

* *pour* $\rho_k = \sqrt{\lambda_k^2 - J^2}$ *, on a :*

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1} - \lambda_k &= \sqrt{\rho_{k+1}^2 - J^2} - \sqrt{\rho_k^2 - J^2} \\
&= \frac{\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2}{\sqrt{\rho_{k+1}^2 - J^2} + \sqrt{\rho_k^2 - J^2}} \\
&= (\rho_{k+1} - \rho_k)\frac{\rho_{k+1} + \rho_k}{\sqrt{\rho_{k+1}^2 - J^2} + \sqrt{\rho_k^2 - J^2}} \\
&\geq \frac{\pi}{2}\frac{\varrho_{k+1} + \varrho_k}{\sqrt{\varrho_{k+1}^2 + J^2} + \sqrt{\varrho_k^2 + J^2}}
\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation $\frac{\pi}{2} + k\pi < \rho < (k+1)\pi$ *on obtient :*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \frac{\pi}{2}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1} - \lambda_k &\geq \frac{\pi}{2}\frac{1+\frac{\varrho_k}{\varrho_{k+1}}}{\sqrt{1+\frac{J^2}{\varrho_{k+1}^2}}+\sqrt{\frac{\varrho_k^2}{\varrho_{k+1}^2}+\frac{J^2}{\varrho_{k+1}^2}}} \\
&\geq \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{J^2}{\varrho_{k+1}^2}}+\sqrt{\frac{\varrho_k^2}{\varrho_{k+1}^2}+\frac{J^2}{\varrho_{k+1}^2}}} \\
\lambda_{k+1} - \lambda_k &\geq \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{J^2}{\varrho_{k+1}^2}}} = \frac{\pi}{4J}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{J^2}+\frac{1}{\varrho_{k+1}^2}}}
\end{aligned}$$

Comme $\lambda_{k+1} \geq 1$ *et* $J \geq 1$, *alors :*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \frac{\pi}{4J\sqrt{2}}$$

Proposition 3.0.4 *Soit* $E_f(t)$ *l'energie de la solution de* (3.0.4) *définie par :*

$$E_f(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (f_x(x,t)^2 + J^2 f(x,t)^2 + f_t(x,t)^2)dx + \frac{J^2}{2}(f(1,t)^2) + \frac{1}{2}f_t(1,t)^2$$

avec $E_f'(t) = 0$ *Alors il existe une constante positive* C *indépendante de* J *telle que pour tout* $T > CJ$, *on a :*

$$E_f(0) \leq C_2 J^3 \int_0^T (f_t(1,t)^2)dt$$

Preuve 3.0.4 *Par le théorème spectral, la solution* y *de* (3.0.4) *est donnée par :*

$$f(x,t) = \sum_{k\geq 0}(f_{0k}cos(t\lambda_k) + f_{1k}\frac{sin(t\lambda_k)}{\lambda_k})\varphi_k$$

où $y_{0k}(resp.y_{1k})$ *sont les coefficients de Fourier de* φ_0^J *(resp.* φ_1^J*)*

$$\varphi_0^J = \sum_{k\geq 0} f_{0k}\varphi_k \ \ et \ \varphi_1^J = \sum_{k\geq 0} f_{1k}\varphi_k$$

ce que implique que :

$$f_t(1,t) = \sum_{k\geq 0}(-f_{0k}sin(t\lambda_k) + f_{1k}\frac{cos(t\lambda_k)}{\lambda_k})\lambda_k\varphi_k(1)$$

Ensuite, selon la condition d'écart (3.0.13) *et en utilisant l'inégalité d'Ingham, nous obtenons que :*

$$J\sum_{k\geq 0}^{\infty}(\lambda_k^2|f_{0k}|^2 + |f_{1k}|^2)|\varphi_k(1)|^2 \leq C_3\int_0^{C_4L}|f_t(1,t)|^2dt$$

pour certaines constantes positives C_3, C_4 *indépendantes de* J*. Par l'estimation* (3.0.12)*, on en déduit que :*

$$\sum_{k\geq 0}^{\infty}(\lambda_k^2|f_{0k}|^2 + |f_{1k}|^2) \leq C_5J^3\int_0^{C_4L}|f_t(1,t)|^2dt$$

On conclut maintenant par l'identité :

$$\sum_{k\geq 0}^{\infty}(\lambda_k^2|f_{0k}|^2 + |f_{1k}|^2) = ||\varphi_0^J||^2_{D(A_J^{\frac{1}{2}})} + ||\varphi_1^J||^2$$

où $||.||$ *est la norme* $L^2(0,1)$*, et la propriété :*

$$||v||^2_{D(A_J^{\frac{1}{2}})} = ||A_J^{\frac{1}{2}}v|| = (A_Jv, v) = \int_0^1(v_x(x)^2 + J^2v(x)^2)dx + J^2v(1) \quad ; \forall v \in D(A_J)$$

où $(\cdot,\cdot)$ *est le produit interne* $L^2(0,1)$.

puisque $\varphi_0^{(J)} = f_0(.,0), \varphi_1^{(J)} = f_t(.,0)$ *et :*

$$\sum_{k\geq 0}^{\infty}(\lambda_k^2|f_{0k}|^2 + |f_{1k}|^2) = \int_0^1 (f_x(x,0)^2 + J^2 f(x,0)^2)ds + J^2 f(1,0)^2 = 2E_f(0)$$

il existe donc une constante $C > 0$*, indépendante de* J*, telle que :*

$$E_f(0) \leq C_6 J^3 \int_0^T f_t(1,t)^2 dt$$

pour tou $T \geq C_4 J$ *; on obtient :*

$$E_f(0) \leq C \int_0^T f_t(1,t)^2 dt$$

Proposition 3.0.5 *Il existe une constante* $C > 0$ *et* $T > 0$ *telle que la solution* g *de* (3.0.5) *satisfait*

$$\int_0^T g_t(1,t)^2 dt \leq C(T^2 + T + 1)\int_0^T (\phi_t^{(J)}(1,t))^2 dt \tag{3.0.15}$$

Preuve 3.0.5 *Pour tout* $T > 0$ *fixé on considère* p *solution de :*

$$\begin{cases} p_{tt} - p_{xx} + J^2 p = 0 \ \ dans (0,1), \forall t > 0 \\ p(0,t) = 0 \ \ \forall t > 0 \\ p_{tt}(1,t) + p_x(1,t) = -J^2 p(1,t) - k_1(t) \ \ \forall t > 0 \\ p(.,0) = 0, p_t(.,0) = 0 \end{cases} \tag{3.0.16}$$

ou :

$$\begin{cases} k(t) = \phi_t(1,t) \ \ si \ 0 < t < T \\ 0 \ \ sinon \end{cases} \tag{3.0.17}$$

Comme $p - w$ *satisfait l'équation* $(p-w)tt + A_J(p-w) = 0$ *sur* $(0;T)$ *avec des données initiales nulles et une condition au bord homogène sur* $(0;T)$*, alors* *z=w sur* $(0;1)\times(0;T)$.

Nous utilisons maintenant la technique des multiplicateurs. On multiplie la première équation du problème (3.0.16) *par* $(x-\frac{1}{2})(2T-t)p_x$ *et on intègre le résultat dans* $Q=(0;1)\times(0;2T)$*, il vient :*

$$\int_Q (p_{tt}-p_{xx}+J^2p)((x-\frac{1}{2})(2T-t)p_x)dxdt$$

posons :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_Q (p_{tt})((x-\frac{1}{2})(2T-t)p_x)dxdt \\ I_2 &= \int_Q (-p_{xx})((x-\frac{1}{2})(2T-t)p_x)dxdt \\ I_3 &= \int_Q (J^2p)((x-\frac{1}{2})(2T-t)p_x)dxdt \end{aligned}$$

En intégrant par parties , on obtient :

$$I_1 = \int_Q \partial_t(p_t)((x-\frac{1}{2})(2T-t)z_x)+xp_tp_x-(x-\frac{1}{2})(2T-t)p_{tx}p_tdxdt$$

avec :

$$-(x-\frac{1}{2})p_{tx}p_t=-\frac{1}{2}\partial_x((x-\frac{1}{2})(2T-t)p_t^2)+\frac{1}{2}(2T-t)p_t^2$$

D'ou :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_Q \partial_t(p_t)((x-\frac{1}{2})(2T-t)p_x)dxdt + \int_Q xp_tp_xdxdt \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_Q \partial_x(x-\frac{1}{2})(2T-t)p_t^2dxdt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)p_t^2dxdt \\
I_2 &= \frac{1}{2}\int_Q -\partial_x(x-\frac{1}{2})(2T-t)p_t^2dxdt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)p_t^2dxdt \\
I_3 &= \frac{1}{2}\int_Q J^2-\partial_x(x-\frac{1}{2})(2T-t)p^2dxdt - \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)p^2dxdt
\end{aligned}
$$

En tenant compte des calculs effectués sur I_1, I_2 *et* I_3 *,on obtient :*

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 [(x-\frac{1}{2})(2T-t)p_tp_x]_{t=0}^{t=2T}\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2T} (2T-t)[(x-1/2)p_t^2]_{x=0}^{x=1}\, dt \\
I_2 &= \int_Q (x-1/2)p_tp_x\, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)[p_t^2+p_x^2-J^2p^2]\, dtdx \\
I_3 &= -\frac{1}{2}\int_0^{2T} [(x-1/2)(p_x^2-J^2p^2)]_{x=0}^{x=1}(2T-t)\, dt
\end{aligned}
$$

Cette identité est équivalente à :

$$
\begin{aligned}
0 &= \textstyle\int_Q (x-1/2)p_tp_x\, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)[p_t^2+p_x^2-J^2p^2]\, dtdx \\
&\quad + \textstyle\frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)(J^2p^2(1,t)-p_x^2(1,t)-p_t^2(1,t))\, dt
\end{aligned}
$$

D'ou

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)(p_t^2(1,t))dt &= \int_Q (x-1/2)p_tp_x\, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)[p_t^2+p_x^2-J^2p^2]\, dtdx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)(J^2p^2(1,t)-p_x^2(1,t))\, dt
\end{aligned}
$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$
|\int_Q xp_tp_xdxdt| \le |\int_Q p_tp_xdxdt| \le (\int_Q p_t^2dxdt)^{\frac{1}{2}}(\int_Q p_x^2dxdt)^{\frac{1}{2}}
$$

Comme :

$$(\int_Q p_t^2 dxdt)^{\frac{1}{2}}(\int_Q p_x^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}(\int_Q p_t^2 + p_x^2) dxdt$$

On déduit que :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)(p_t^2(1,t))dt \leq C(T+1)\int_Q (p_t^2+p_x^2)\, dtdx + \frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)[J^2p^2(1,t)-p_x^2(1,t)]\, dt \tag{3.0.18}$$

Où C est une constante positive indépendante de J et $T > 0$. Rappelons que :

$$p_x(1,t) = -J^2p(1,t) - p_{tt}(1,t) - k_1(t)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
J^2(1,t)^2 - p_x(1,t)^2 &= J^2p(1,t)^2 - (J^2p(1,t) + p_{tt}(1,t) + k_1(t))^2 \\
&= J^2p(1,t)^2 - J^4p(1,t)^2 - p_{tt}^2(1,t)^2 - 2J^2p(1,t)p_{tt}(1,t) \\
&\quad -k_1(t)^2 - 2J^2p(1,t)k_1(t) - 2J^2p(1,t)k_1(t) \\
&= (J^2 - J^4 + 2J^2p_{tt}(1,t))p(1,t)^2 - p_{tt}^2(1,t)^2 - k_1(t)^2 \\
&\quad +2J^2p(1,t)k_1(t))^2 + 2J^2p(1,t)k_1(t))^2
\end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$ on a :

$$J^2p(1,t)^2 - p_x(1,t)^2 \leq (J^2 - J^4 + \epsilon J^4)p(1,t)^2 + (\frac{1}{\epsilon} - 1)k_1(t)^2.$$

On fixe alors $\epsilon > 0$ tel que :

$$J^2 - J^4 + \epsilon J^4 \leq 0, \quad \forall J \geq 2$$

Pour ce choix de ϵ*, on obtient :*

$$J^2 p(1,t)^2 - p_x(1,t)^2 \leq C k_1(t)^2$$

En injectant cette dernière estimation dans (3.0.18)*, il vient :*

$$\frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)(p_t^2(1,t)+p_t^2(0,t))dt \leq C(T+1)\int_Q (p_t^2+p_x^2)\,dtdx + C\int_0^{2T}(2T-t)k_1^2(t)\,dt$$

On définit l'énergie de p solution du problème (3.0.16) *par :*

$$E_p(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 ((p_x^2(x,t)) + J^2(p^2(x,t)) + (p_t^2(x,t)))\,dx + \frac{J^2}{2}(p^2(1,t)) + p_t^2(1,t).$$

En intégrant par partie, on obtient pour des solutions régulières :

$$\begin{aligned}
E_p'(t) &= \int_0^1 (p_{xt} + J^2 p_t p + p_{tt} p_t)dx + J^2(p_t(1,t)p(1,t) + p_t t(1,t)p_t(1,t)) \\
&= \int_0^1 (\partial_x(p_{xt}) - p_t p_x x + J^2 p_t p + p_{tt} p_t)dx + J^2 p_t(1,t)p(1,t) + p_t t(1,t)p_t(1,t) \\
&= \int_0^1 p_t(p_t t - p_x x + J^2 p)dx + [p_x p_t]_0^1 + J^2 p_t(1,t)p(1,t) + p_t t(1,t)p_t(1,t) \\
&= p_x(1,t)p_t(1,t) + J^2 p_t(1,t)p(1,t) + p_{tt}(1,t)p_t(1,t)
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites du problème (3.0.16) *donnent :*

$$E_p'(t) = p_t(1,t)(p_x(1,t) + J^2 p(1,t) + p_t t(1,t))$$

d'ou

$$E_p'(t) = p_t(1,t)(-k_1(t)) \tag{3.0.19}$$

En intègrant ce résultat entre 0 et s et en utilisant le fait que $E_p(0) = 0$*, on* *obtient :*

$$E_p(S) - E_p(0) = \int_0^S E_p^{'}(t)\,dt = -\int_0^S k_1(t)p_t(1,t)\,dt.$$

On intègre ensuite cette identité entre 0 et 2T et on utilise le théorème de Fubini,on arrive à :

$$\int_0^{2T} E_p(S)ds = -\int_0^{2T}\int_0^S p_t(1,t)k_1(t)dt\,ds = -\int_0^{2T}(2T-t)p_t(1,t)k_1(t)dt.$$

Et pour tout $\epsilon > 0$,on écrit :

$$\int_0^{2T} E_p(S)ds \leq \epsilon \int_0^{2T} p_t^2(1,t)(2T-t)\,dt + \frac{1}{4\epsilon}\int_0^{2T} k_1^2(t)(2T-t)dt. \quad (3.0.20)$$

On a :

$$\int_Q (p_t^2 + p_x^2)\,dtdx \leq 2\int_0^{2T} E_p(S)ds$$

Cette dernière inégalité donne :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)p_t^2(1,t)dt \leq C(T+1)\int_0^{2T} E_p(S)ds + \int_0^{2T} k_1^2(t)(2T-t)dt.$$

utilisons (3.0.19)

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_0^{2T}(2T-t)p_t^2(1,t)dt \quad &\leq C(T+1)\epsilon\int_0^{2T} p_t^2(1,t)(2T-t)\,dt \\ &+\tfrac{1}{4\epsilon}C(T+1)\int_0^{2T} k_1^2(t)(2T-t)dt \\ &+\int_0^{2T} k_1^2(t)(2T-t)dt.\end{aligned}$$

On choisit ϵ *tel que* $C(T+1)2\epsilon = \frac{1}{4}$, *on obtient :*

$$\frac{1}{4}\int_0^{2T}(2T-t)p_t^2(1,t)dt \quad \leq C(T+1)^2\int_0^{2T}k_1^2(t)(2T-t)dt + \int_0^{2T}k_1^2(t)(2T-t)dt.$$

Comme $2T-t > T$ *sur* $(0;T)$ *et* $z = w$ *sur* $(0;1)\times(0;T)$ *alors :*

$$\int_0^T \left(p_t^2(1,t)+p_t^2(0,t)\right)dt \leq C(T^2+T+1)\int_0^T (p_t^{(J)}(1,t))^2 dt$$

pour une constante C *positive*

Théorème 3.0.6 *Il existe deux constantes positives C1 ; C2 indépendantes de* J *telles que :*

$$E_J(t) \leq C_1 e^{-\frac{C_2}{J^3}t}E_J(0), \quad \forall\, t \geq 0 \tag{3.0.21}$$

Preuve 3.0.6 *De* $u^J = f + g$, *on remarque que* $E_J(0) = E_f(0)$ *et grâce au proposition 2 nous obtenons :*

$$E_J(0) \leq C_2 J^3 \int_0^T y_t(1,t)^2 dt \tag{3.0.22}$$

pour $T > C_1L$. *En utilisant l'estimation* (3.0.16) *du téorème (3) on obtient pour* $T > C_1L$

$$E_J(0) \leq C_3 J^3(J^2+J+1)\int_0^T (u_t^J(1,t)^2 dt,$$

En prenant $T_J = (C_1+1)J$, *on arrive à :*

$$E_J(0) \leq C_4 J^3(J^2+J+1)\int_0^T (E_J(0)-E_J(T_J))dt \tag{3.0.23}$$

Le résultat du lemme permet d'écrire :

$$E_J(T_J) \leq E_J(0) \leq C_4 L^3 (J^2 + J + 1)(E_J(0) - E_J(T_J)) \tag{3.0.24}$$

Ce qui donne finalement :

$$E_J(T_J) \leq \gamma_J E_J(0)$$

ou :$\gamma_J = \frac{C_4 J^3 (J^2+J+1)}{1+C_4 J^3 (J^2+J+1)} < 1.$
d'après le théorème 3 :

$$E_J(t) \leq \frac{1}{\gamma_J} e^{-\omega_J t} E_J(0)$$

avec $\omega_J = \frac{1}{T_J} \ln \frac{1}{\gamma_J} \sim \frac{C}{J^3}$ *et* $\gamma_J \sim 1 - \frac{C}{J^2}$

Remarque 3.0.1 *Vu que le problème* (3.0.1) *est un problème à une dimension (dans l'espace), les valeurs propres associées à l'opérateur* A_J *sont caractérisées par le théorème (3.0.6) C'est pourquoi l'analyse de Fourier conduit à la stabilité exponentielle de l'énergie* E_J.

4

Stabilisation Rationnelle

Dans cette section, nous montrons la stabilité rationnelle du système (0.0.1) dans le cas où Γ_0 est composée de deux côtés proximés :

$$\Gamma_0 = \{(1, y) : 0 < y < 1\} \cup \{(0, y) : 0 < y < 1\}$$

Rappelons l'expression de u en série de Fourier partiel :

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u^{(j\pi)}(x, t) \sin(j\pi y)$$

où $\phi^{(j\pi)}$ est le coéfficient de Fourier de u vérifiant l'équation des ondes avec $J = j\pi$. L'énergie de ce système est donnée par :

$$\begin{aligned} E_{j\pi}(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left((u_x^{(j\pi)}(x,t))^2 + j^2\pi^2(u^{(j\pi)}(x,t))^2 + (u_t^{(j\pi)}(x,t))^2\right) dx \\ &+ \frac{j^2\pi^2}{2}\left(u^{(j\pi)}(1,t)^2\right) + \frac{1}{2}(u_t^{(j\pi)}(1,t))^2 \end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^1 sin^2(j\pi y)\,dy = \frac{1}{2} = \int_0^1 cos^2(j\pi y)\,dy$$

On trouve :

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} E_{j\pi}(t)$$

L'analyse de Fourier , le théorème et les techniques utilisées dans [4] nous permettent de déduire le résultat de la stabilité rationnelle du système (0.0.1) suivant :

Théorème 4.0.1 *Pour tout $k \in IN^\star$, il existe une constante positive C_k telle que pour toute donnée initiale $u_0 \in H^{3k+1}(\Omega)$ telle que $u_{0|\Gamma_1} \in H^{3k+1}(\Gamma_1)$ et $u_1 \in H^{3k}(\Omega)$, la solution u de* (0.0.1) *satisfait :*

$$E(t) \leq \frac{C_k}{t^k}E^{(k)}(0), \tag{4.0.1}$$

$E^{(k)}$ l'énergie d'ordre superieur.

Preuve 4.0.1 *Pour tout $k \in IN^\star$, il existe une constante $c_k > 0$ telle que*

$$x^k e^{-x} \leq c_k, \quad \forall x \geq 0.$$

En injectant cette estimation dans (3.0.20), on obtient :

$$E_{j\pi}(t) \leq C_1 \frac{c_k j^{6k}}{C_2^k t^k} E_{j\pi}(0) = \frac{C_k}{t^k} j^{6k} E_{j\pi}(0).$$

L'analyse de Fourier nous permet d'écrire :

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} E_{j\pi}(t) \leq \frac{1}{2} \frac{C_k}{t^k} \sum_{l=1}^{\infty} j^{6k} E_{j\pi}(0).$$

Posons :

$$E^{(k)}(0) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{6k} E_{j\pi}(0).$$

Comme $j^{6k} < \lambda^{6k}$ *car* $\lambda^2 > J^2 = (j\pi)^2$ *alors :*

$$E^{(k)}(0) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{6k} E_{j\pi}(0)$$

En utilisant ensuite la propriété précédente :

$$\|\upsilon\|_\alpha = (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} \|\upsilon_k\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

Où $\alpha \in IR$, H *un espace de Hilbert et* ,$(\upsilon_k)_{k\geq 0}$ *sont les coefficients de Fourier de* υ, *on obtient :*

$$E^{(k)}(0) \leq \|u_0\|^2_{H^{3k+1}(\Omega)} + \|u_{0|\Gamma_1}\|^2_{H^{3k+1}(\Gamma_1)} + \|u_1\|^2_{H^{3k}(\Omega)}$$

Cette dernière inégalité peut être retrouvée en utilisant l'inégalité de Parseval

■

Conclusion générale

Dans ce travail, on a démontré l'existance et l'unicité de la solution d'un problème d'évolution sous l'action d'un controleur dynamique.
On a réussi ensuite a démontrer la décroissance polynomiale du problème de Wentzell pour l'équation des ondes dans le cas général où la frontière Γ est composée de deux parties aproximés :

$$\Gamma_0 = \{(x,1) : 0 < x < 1\} \cup \{(0,y) : 0 < y < 1\}$$

$$\Gamma_1 = \{(x,0) : 0 < x < 1\} \cup \{(1,y) : 0 < x < 1\}$$

On obtient un résultat analogue où le sous-ensemble

$$\Gamma_1 = \{(x,0) : 0 < x < 1\} \cup \{(1,y) : 0 < x < 1\}$$

ne satisfait pas la condition géométrique de le contrôle mais avec des données initiales moins régulières. L'analyse de Fourier utilisée dans la troisième section permet d'obtenir la dépendance explicite des constantes par rapport à J et aussi de préciser le domaine des données initiales vérifiant l'estimation de la stabilité polynomiale.

Bibliographie

[1] Cours semi groupe, master 2 analyse mathématique, madame Laoubi Karima

[2] F. Abdallah, S. Nicaise, J. Valein and A. Wehbe, Stability results for the approximation of weakly coupled wave equations, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 350 (2012), no. 1-2, pp.29–34.

[3] F. Abdallah, S. Nicaise, J. Valein and A. Wehbe, Uniformly exponentially or polynomially stable approximations for second order evolution equations and some applications, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 19 (2013), no. 3, pp. 844–887.

[4] F.Alabou,P.Cannarsa and V.Komornik, Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equation, J.Evol.Equ. 2,127150(2002).

[5] Imen Ellouze. Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université Paul Verlaine-Metz ; Université de Sfax, 2010. Français. NNT : 2010METZ038S. tel-01749052.

[6] Marie thèse Lacroix-Sonrier, Espace de Sobolev.

[7] Mémoire Master Academique, Équations différentielles à retard et semi-groupes associés.

[8] Module Eléments finis et Applications-Master Analyse Mathématiques madame Laoubi Karima.

[9] Opérateurs non Bornés et Théorie Spectrale-Master Analyse Mathématiques, madame Laoubi Karima.

[10] P.A Raviat et J.M.Thomas, Introduction a l'analyse numérique des équation aux dérivées partielles, Masson, 1988.

[11] Polynomial stability for wave equations with Wentzell boundary conditions, Article in Journal of Nonlinear and Convex Analysis · January 2017.

[12] S. LUBKIN, C0-Semi groups and applications, Elsevier Science B. V. 2003.

[13] Théorie spectrale, Stéphane Maingot David Manceau.

[14]K. LAOUBI. Contrôle et stabilisation dynamique d'un problème hyperbolique. Thèse de Doctorat.