

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ M'HAMED BOUGARA DE BOUMERDES  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



# APPLICATION DE LA NOTION DE MESURE DE NON COMPACTITÉ À L'ÉTUDE D'UN EXEMPLE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES NON LINÉAIRES DE TYPE VOLTERRA

Par

**MAHSAS** Allel

MÉMOIRE PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE  
**MASTER EN MATHÉMATIQUES**  
DOMAINE: MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES  
SPÉCIALITÉ : ANALYSE

Soutenu publiquement, le 04 Juillet 2018 devant le jury composé de:

|                           |                                |                   |
|---------------------------|--------------------------------|-------------------|
| <i>Mme RAGGAS Nassima</i> | <i>Université de Boumerdes</i> | <i>Président</i>  |
| <i>Mme LAOUBI Karima</i>  | <i>Université de Boumerdes</i> | <i>Examineur</i>  |
| <i>Mme SEBA Djamila</i>   | <i>Université de Boumerdes</i> | <i>Rapporteur</i> |

*A mes parents*

# Table des Matières

|                                                                             |            |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Table des Matières</b>                                                   | <b>iii</b> |
| <b>Résumé</b>                                                               | <b>iv</b>  |
| <b>Remerciements</b>                                                        | <b>v</b>   |
| <b>Introduction générale</b>                                                | <b>1</b>   |
| <b>1 Notions préliminaires</b>                                              | <b>3</b>   |
| 1.1 Topologie Générale . . . . .                                            | 3          |
| 1.2 Notion de base d'analyse Fonctionnelle . . . . .                        | 8          |
| <b>2 Mesure de non compacité et <math>\mu</math>-normes</b>                 | <b>17</b>  |
| 2.1 Introduction . . . . .                                                  | 17         |
| 2.2 Mesure de non compacité de Kuratowski . . . . .                         | 17         |
| 2.3 Mesure de non compacité de Hausdorff . . . . .                          | 18         |
| 2.4 Mesure de non compacité de Istraescu . . . . .                          | 18         |
| 2.5 Propriétés élémentaires de la MNC de Kuratowski . . . . .               | 19         |
| 2.6 Théorème des ensembles emboîtés de Cantor . . . . .                     | 26         |
| 2.6.1 Théorème de Cantor . . . . .                                          | 26         |
| 2.6.2 Théorème de Cantor généralisé . . . . .                               | 26         |
| <b>3 Application à une équation intégrale non linéaire de type Volterra</b> | <b>28</b>  |
| 3.1 Introduction . . . . .                                                  | 28         |
| 3.2 Equation de type Volterra . . . . .                                     | 28         |
| 3.2.1 Existence de solutions . . . . .                                      | 28         |
| <b>Bibliography</b>                                                         | <b>35</b>  |

# Résumé

La théorie de la mesure de non compacité est une méthode très importante dans la recherche des solutions des équations différentielles et intégrales. Dans ce mémoire on s'intéresse à l'application de cette méthode dans l'étude de l'existence des solutions d'une équation intégrable non linéaire de type Volterra.

Ce travail est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à des notions et des définitions préliminaires concernant la mesure de non compacité dans les espaces métriques.

Dans le deuxième chapitre, on donne quelques exemples de mesure de non compacité.

Et finalement on applique la théorie de la mesure de non compacité pour prouver l'existence d'une solution d'une équation intégrable non linéaire de type Volterra.

# Remerciements

Je tiens à remercier Allah qui m'a donné la force et la volonté pour terminer ce travail.

Mes grands remerciements reviennent à mes parents qui m'ont beaucoup encouragé.

Grands remerciements et considérations à mon encadreur Dr. SEBA Djamila qui a facilité la réalisation de ce travail grâce à ses nombreux conseils, orientation, et assistance.

Je tiens à remercier, sincèrement, Madame RAGGAS pour avoir accepté de présider le jury de ma soutenance et Mme LAOUBI d'avoir accepté d'examiner mon travail et de participer au jury.

Je remercie tous les enseignants qui m'ont guidé et qui ont participé dans ma formation avec épanouissement.

Sans oublier tous ceux qui m'ont été d'un très grand soutien, en outre tous les étudiants de ma promotion.

# Introduction générale

La résolution des équations différentielles et intégrales est une étape très importante dans toutes les sciences : physique, Chimie, mécanique, électronique, etc.

Nous avons vu dans la matière de la théorie du point fixe plusieurs théorèmes qui ont pour rôle de confirmer l'existence d'une ou plusieurs solutions sous certaines conditions sur le problème étudié. D'un autre côté, dans la matière : Equations intégrales, on a vu que face aux difficultés rencontrées lors de la recherche des solutions, on fait recours aux méthodes numériques approximatives.

Dans ce travail, j'ai essayé de combiner les deux matières : Théorie du point fixe et Equations intégrales en essayant d'appliquer le théorème de point fixe de Darbo qui utilise la mesure de non compacité aux équations intégrales et spécialement sur une équation de type Volterra.

La théorie de la mesure de non compacité est développée dans plusieurs livres. Pour mon travail, j'ai utilisé la thèse de mon encadreur Mme SEBA Djamil, soutenue publiquement à l'université de Sidi Bel-Abbes en 2011 sous la direction du Professeur Moufak Benchohra. Ce dernier a initié l'application de la mesure de non compacité à l'étude de l'existence des solutions des équations d'ordre fractionnaire. Pour plus de détail, je dirige le lecteur vers cette thèse qui est disponible dans la Bibliothèque de l'université de Sidi Bel-Abbès ainsi que dans la bibliothèque numérique de l'université

de Boumerdes.

Le but de ce projet est de donner un aperçu sur la notion de mesure de non compacité des ensembles bornés et quelques unes de ses applications aux équations intégrales de type volterra.

Ce travail est subdivisé en trois chapitres :

1. Le premier chapitre est consacré à des notions et des définitions préliminaires concernant la mesure de non compacité dans les espaces métriques.
2. Dans le deuxième chapitre, on donne quelques exemples de mesure de non compacité de Kuratowski, de Hausdorff et d'Istratescu, et les relations entre ces mesures. Nous présentons également leurs propriétés et nous donnons aussi quelques théorèmes associées à la mesure de non compacité.
3. Le troisième chapitre présente ma contribution : l'étude de l'existence de solutions d'une équation intégrale dans l'espace de Banach des fonctions continues sur  $I$  de la forme :

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t v(t, \tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in I,$$

où  $v$  est une fonction continue,  $T$  un opérateur continu et  $a$  une fonction croissante et positive.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions qui sont utiles tout le long de ce mémoire.

Toutes les notions de ce chapitre et ceux qui suivent, ont été collectées de [1] et [2] et de quelques sites internet.

### 1.1 Topologie Générale

**Définition 1.1.1. (*Espace métrique*) :** Une distance sur un ensemble  $E$  est une application

$$\begin{aligned}d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\(x, y) &\longmapsto d(x, y)\end{aligned}$$

vérifiant les trois axiomes suivantes :

$d_1$ -) *Propriété de séparation* :  $d(x, y) = 0$  si  $x = y$ .

$d_2$ -) *Symétrie* :  $d(x, y) = d(y, x)$ , pour tous  $x, y \in E$ .

$d_3$ -) *Inégalité triangulaire* : Pour tous  $x, y, z \in E$ , on a :

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Un ensemble  $E$  muni d'une distance est appelé "espace métrique" qu'on note  $(E, d)$ .

**Définition 1.1.2. (*Espace vectoriel normé*) :** Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle norme sur l'espace  $E$  toute application notée  $\|.\|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , vérifiant pour tout  $x, y$  dans  $E$  et  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$  :

(i)  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

(ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ .

(iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

**Définition 1.1.3. (*Espace topologique*) :** Soit  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble de tout les sous ensemble de  $X$   $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ , on dit que  $\tau$  définit une topologie sur  $X$  si elle vérifie les conditions suivantes :

i)  $X, \emptyset \in \tau$ .

ii)  $\tau$  est stable par intersection finie, i.e. Toute intersection finie d'éléments de  $\tau$  est un élément de  $\tau$

$$(O_1, O_2 \in \tau \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau).$$

iii)  $\tau$  est stable par réunion quelconque, i.e. Toute réunion quelconque (finie ou infinie) d'éléments de  $\tau$  est un élément de  $\tau$

$$(\{O_i\}_{i \in I} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau).$$

- $X$  muni de la topologie  $\tau$  est un espace topologique, noté généralement  $(X, \tau)$ .

- les éléments  $O \in \tau$  sont des ouverts de  $X$ .

**Exemple 1.1.1.** Tout espace métrique est un espace topologique.

**Définition 1.1.4. (*Boule ouverte, fermée*) :**

Soit  $(E, d)$  un espace métrique, pour tout  $x_0 \in E$  et tout  $r > 0$ ,

1. On appelle **boule ouverte** de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ , l'ensemble :

$$B(x_0, r) = \{x \in E; d(x, x_0) < r\}.$$

2. on appelle **boule fermée** de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ , l'ensemble :

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E; d(x, x_0) \leq r\}.$$

**Définition 1.1.5. (Partie ouverte, fermée) :**

1. Une partie  $O$  de  $E$  est un ouvert de  $E$ , si pour tout  $x \in E$  il existe  $r > 0$ , tel que  $B(x, r) \subset O$ .
2. Une partie  $F$  de  $E$  est un fermé de  $E$ , si et seulement si son complémentaire  $C_E^F$  dans  $E$  est ouvert.

**Remarque 1.1.1.** Dans un espace topologique  $(X, \tau)$ , les ensembles  $X$  et  $\emptyset$  sont des ouverts et fermés à la fois.

**Définition 1.1.6. (Voisinage) :** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique, et soit  $x \in X$ . On appelle **voisinage** de  $x$  dans  $X$ , toute partie de  $X$  contenant un ouvert qui contient  $x$ . On note  $\mathcal{V}(x)$  l'ensemble des voisinages de  $x$  :

$$\mathcal{V}(x) = \{V \in \mathcal{P}(X); \exists O \in \tau; x \in O \subset V\}$$

**Définition 1.1.7. (Intérieur) :** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique, et  $A$  une partie de  $X$ . On appelle **intérieur** de  $A$ , et on note  $\overset{\circ}{A}$ , la réunion de tous les ouverts contenus dans  $A$ . Autrement dit, c'est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .

Les points de  $\overset{\circ}{A}$  sont dits **points intérieurs** à  $A$ , qui sont caractérisés par :

$$x \in \overset{\circ}{A} \iff A \in \mathcal{V}(x), \exists O \in \tau, x \in O \subseteq A.$$

**Définition 1.1.8. (Adhérence) :** On appelle **adhérence** de  $A$ , notée souvent  $\overline{A}$ , l'intersection de tous les fermés contenant  $A$ . C'est le plus petit fermé qui contient  $A$ . Les points de  $\overline{A}$  sont dits **points adhérents** à  $A$ , ils sont caractérisés par :

$$x \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathcal{V}(x); V \cap A \neq \emptyset$$

**Définition 1.1.9. (Frontière) :** On appelle **frontière** d'une partie  $A$  de  $X$  l'ensemble :

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A}^c$$

**Définition 1.1.10. (*Les recouvrements*) :** Un recouvrement de  $X$ , est une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'ensembles dont l'union vérifie :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X$$

Autrement dit : tout éléments de  $X$  appartient au moins à l'un des  $A_i$ .

**Remarque 1.1.2.** Si tous les ensembles  $A_i$  sont des ouverts (respectivement fermés), on dit que le recouvrement  $(A_i)_{i \in I}$  est ouvert (respectivement fermé).

**Exemple 1.1.2.** Soit  $X = ]0, 1[$ , on prend l'intervalle  $] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} [$ , on remarque que :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} ] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} [ = X$$

Donc la famille des parties  $] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} [$  forment un recouvrement de  $X$ .

**Définition 1.1.11. (*Recouvrement localement fini*) :**

Soit  $A$  une partie d'un espace topologique  $X$ , et soit  $(A_i)$  un recouvrement de  $A$ . On dit que le recouvrement est localement fini si pour tous  $x$  de  $A$ , il existe un voisinage de  $x$  qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles  $A_i$ .

**Définition 1.1.12. (*Raffinement*) :**

Un raffinement  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{U}$  est un recouvrement dont chaque élément de  $\mathcal{V}$  est inclus dans un élément de  $\mathcal{U}$ , autrement dit :

$$\mathcal{V} \text{ est un } \textbf{raffinement} \text{ de } \mathcal{U} \text{ si } \forall V \in \mathcal{V}; \forall U \in \mathcal{U} : V \subset U$$

On dit aussi que  $\mathcal{V}$  raffine  $\mathcal{U}$  et on note  $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ .

**Définition 1.1.13. (*Espace Séparé*) :** Un espace de **Hausdorff**, dit aussi **espace séparé**, ou (**la condition de séparation  $T_2$** ), est un espace topologique dans lequel deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints. Cette condition est appelée axiome  $T_2$  des axiomes de séparation. c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in X, x \in U, y \in V \text{ et } U \cap V = \emptyset.$$

**Propriété 1.1.3. (Borel-Lebesgue) :**

*De tout recouvrement ouvert de  $X$  on peut extraire un sous recouvrement fini. C'est à dire :*

*$(A_i)_{i \in I}$  de  $X$  avec  $X = \cup_{i \in I} A_i$ , il existe un ensemble fini  $J \subset I$  tel que :  $X = \cup_{j \in J} A_j$*

**Définition 1.1.14. (Compacité des espaces topologiques) :** *On dit q'un espace topologique  $(X, \tau)$  est compact si :*

- (i)  $X$  est séparé,*
- (ii)  $X$  vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.*

**Exemple 1.1.4.** *Tout ensemble fini avec n'importe quelle topologie est compact.*

**Théorème 1.1.5. (Bolzano-weistrass) :**

*De toute suite d'éléments de  $A$ , on peut extraire une sous-suite convergente dans  $A$ .*

**Définition 1.1.15. (Compacité des espaces métriques) :** *Un espace métrique  $(E, d)$  est compact s'il vérifie la propriété de Bolzano-weistrass.*

**Exemple 1.1.6.** *Tout intervalle  $[a, b]$  fermé borné de  $\mathbb{R}$  est compact.*

**Définition 1.1.16. (Ensemble relativement compact) :** *Une partie  $A$  d'un espace topologique séparé est relativement compacte si et seulement si son adhérence est compact.*

**Cas d'un espace métrique :**

Une partie  $A$  d'un espace métrique  $(E, d)$  est dite relativement compacte si toute suite dans  $A$  possède une sous-suite qui converge dans  $E$ .

**Définition 1.1.17. (Espace paracompact) :** *Un espace topologique est dit paracompact, s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un raffinement ouvert localement fini.*

**Définition 1.1.18. (Espace précompact) :** *Un espace métrique  $E$  est dit précompact, si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un recouvrement fini par des boules de rayon  $\varepsilon$ . Autrement dit si : pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut recouvre  $E$  par un nombre fini des boules ouvertes de rayon  $\varepsilon$ .*

**Exemple 1.1.7.** *Tout espace métrique compact est précompact.*

## 1.2 Notion de base d'analyse Fonctionnelle

on présente quelques résultats concernant certains espaces fonctionnelles, et nous introduisons la notion de la mesure de non-compactité et quelques théorèmes de point fixe.

Soit  $(E, ||.||)$  un espace de Banach. Notons par  $X$  un sous-ensemble de  $E$ , et  $\partial X$  la frontière de  $X$ . De plus, rappellons :

$$\text{diam}X = \sup\{||x - y||; x, y \in X\}$$

le diamètre de  $X$ , et :

$$\text{dist}(x, X) = \inf\{||x - y||; x, y \in X\}$$

la distance entre  $x$  et  $X$ .

**Définition 1.2.1. (*Enveloppe convexe*) :** Soit  $X$  un sous-ensemble de  $E$ , alors l'enveloppe convexe notée  $\text{conv}X$  de  $X$  est l'intersection de tous les ensembles convexes qui contenant  $X$

Si  $X$  est un sous-ensemble de  $E$ , alors  $\overline{X}$  et  $\overline{\text{conv}X}$  sont la fermeture et l'adhérence de l'enveloppe convexe de  $X$  respectivement. Notons par :

$$B_r(E, x) = B_r = \{x \in E : ||x|| \leq r\}, \quad B_1(E) = B(E)$$

la boule fermée dans  $E$  de centre  $x$  et de rayon  $r$ , et :

$$S_r(E) = \partial B_r = \{x \in E : ||x|| = r\}, \quad S_1(E) =: S(E)$$

la sphère dans  $E$ .

De plus nous désignerons par  $M_E$  la famille des sous-ensembles bornés non vides de  $E$ , et par  $N_E$  la famille des sous-ensembles relativement compacts de  $E$ .

Un espace de Banach que nous utiliserons très souvent dans les exemples est l'espace  $l_p$  de toutes les suites  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  telle que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge pour  $(1 \leq p < \infty)$ , et les suites bornées si  $p = \infty$ , muni de la norme :

$$\|x\| = \begin{cases} (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup\{|x_n| : n = 1, 2, 3, \dots\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

ainsi que le sous-espace  $c \subset l_{\infty}$  de toutes les suites convergentes et le sous-espace  $c_0 \subset l_{\infty}$  de tous les suites qui convergent vers 0. De plus, plusieurs exemples seront construits dans l'espace de Chebyshev  $C = \mathcal{C}(I)$  de toutes les fonctions continues sur  $[0,1]$  muni de la norme :

$$\|x\| = \max\{|x(t)|, t \in I\}, \quad \text{où } I \text{ est un intervalle compact de } \mathbb{R}.$$

Nous utiliserons particulièrement l'espace de Banach  $\mathcal{BC}(I, \mathbb{R})$  des fonctions continues et bornées sur  $I$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme :

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|, t \in I\}, \quad \text{où } I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}.$$

$L^p = L^p[0, 1]$  est l'espace de Lebesgue (classe d'équivalence) de toutes les fonctions mesurables sur  $[0,1]$  telle que  $\int_0^1 |x(t)|^p dt$  converge pour  $(1 \leq p < \infty)$  ou  $\text{ess sup } |x(t)| < \infty$ .

Pour  $p = \infty$  muni de la norme :

$$\|x\| = \begin{cases} \left( \int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}\{|x(t)| : 0 \leq t \leq 1\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Ici le supremum essentiel dans  $L^{\infty}$  est défini par :

$$\text{ess sup}\{|x(t)| : 0 \leq t \leq 1\} = \inf_{\text{mes } D=0} \sup \text{ess sup}\{|x(t)| : t \in [0, 1] \setminus D\},$$

où  $\text{mes } D$  désigne la mesure de lebesgue du sous-ensemble  $D$ .

**Définition 1.2.2.** Soit  $X$  un espace de Banach, l'ensemble  $K$  est fermé non vide de  $X$  s'appelle cone si :

$$(i) \quad K + K \subseteq K$$

$$(ii) \quad \lambda K \subseteq K \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$$(iii) \quad \{-K\} \cap K = \{0\}, \text{ où } 0 \text{ est un élément de } X.$$

Le cone est positive si :

$$(iv) \quad K \circ K \subseteq K, \text{ où } \circ \text{ c'est la composition de multiplication dans } X.$$

Nous introduisons la relation d'ordre  $\leq$  dans  $X$ . Soient  $x, y \in X$ . Alors  $x \leq y$  si et seulement si  $y - x \in K$ .

**Définition 1.2.3.** Soient  $E$  un espace de Banach et  $(A, \geq)$  ensemble ordonné partiellement. L'application

$$\gamma : P(E) \longrightarrow A$$

est dite mesure de non compacité (MNC) dans  $E$  si :

$$\gamma(\overline{\text{conv} X}) = \gamma(X).$$

Notons que si  $D$  est dense dans  $X$ , alors  $\overline{\text{conv} X} = \overline{\text{conv} D}$ , d'où  $\gamma(X) = \gamma(D)$ .

La mesure de non compacité est dite :

$$(i) \quad \text{Monotone si pour tout } X, Y \in P(E), X \subseteq Y \implies \gamma(X) \leq \gamma(Y).$$

$$(ii) \quad \text{Non singulière si } \gamma(\{a\} \cup X) = \gamma(X) \text{ pour tout } a \in E, X \in P(E).$$

$$(iii) \quad \text{Invariante par réunion avec les compacts si } \gamma(K \cup X) = \gamma(X) \text{ pour tout } K \in M_E \text{ et } X \in P(E).$$

$$(iv) \quad \text{Semi-additive si } \gamma(X \cup Y) = \max\{\gamma(X), \gamma(Y)\} \text{ pour tout } X, Y \in P(E).$$

$$(v) \quad \text{Invariante par symétrie par rapport à l'origine si } \gamma(-X) = \gamma(X) \text{ pour tout } X \in P(E).$$

(vi) Réelle si  $A = \overline{R_+} = [0, +\infty]$  et  $\gamma(X)$  pour tout  $X \in M_E$ .

Dans ce cas, prenons  $\gamma := \mu$  où

$$\mu : M_E \longrightarrow [0, +\infty]$$

est la mesure de non-compacité dans  $E$  qui satisfait les conditions supplémentaires suivantes :

(vii) La famille  $\ker \mu = \{X \in M_E : \mu(X) = 0\} \neq \emptyset$  et  $\ker \mu \subset N_E$ .

(viii) Régulière ; c.à.d,  $\mu(X) = 0$  est équivalente à dire que  $X$  est relativement compact.

(ix)  $\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y)$  pour  $\lambda \in [0, 1]$ .

(x)  $\mu$  est dit semi-norme si :

$$\begin{cases} \mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X) \\ \mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y). \end{cases}$$

(xi) Lipchitzienne si  $|\mu(X) - \mu(Y)| \leq L_\mu d(X, Y)$ , où  $L_\mu$  est dite la semi-métrique de Hausdorff.

(xii) Si  $\{X_n\}$  est une suite d'ensembles de  $M_E$  tel que  $X_{n+1} \subset X_n$ ,  $\overline{X_n} = X_n$ ,  $(n = 1, 2, \dots)$ , et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0$ , alors  $X_\infty = \bigcap X_n$ .

La mesure de non-compacité  $\mu$  s'appelle aussi fonctionnelle régulière de Sadoskij.

Nous allons voir par suite des exemples sur la mesure réelle de non compacité si vérifient toutes les propriétés ci dessus.

**Définition 1.2.4.** On dit qu'un ensemble  $X$  admet un  $\varepsilon$ -réseau  $S$  s'il existe un ensemble fini  $S \subset X$  tel que :

$$X \subset S + \varepsilon \overline{B} = \{s + \varepsilon b, s \in S, b \in \overline{B}\}$$

**Définition 1.2.5.** Une mesure de non compacité  $\mu$  est dite Lipchitzienne qui satisfait la condition de Lipchitz :

$$|\mu(X) - \mu(Y)| \leq \mu(B(E))H(X, Y)$$

pour tous  $X, Y \subset E$  et  $B(E)$  la boule fermée dans  $E$  de centre  $x$  et de rayon 1 avec :

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= \max\{\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X)\} \\ &= \inf\{r > 0 : X \subseteq Y + B_r(E)\} \end{aligned}$$

De plus cette distance de Hausdorff sur  $X$  est uniformément continue.

**Lemme 1.2.1.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces métriques,  $A : E \longrightarrow F$  un opérateur linéaire borné et  $\mu$  une mesure de non-compacité. Alors il existe  $k > 0$  tel que :

$$\mu(A(X)) \leq k\mu(X). \quad (1.2.1)$$

Cette condition s'appelle condition de Dorbo avec la constante  $k$  liée à la mesure de non compacité  $\mu$ , pour tout sous ensemble borné  $X \subset E$ ,  $k = \|A\|$ . En fait, si  $\{x_1, \dots, x_m\}$  est fini et est un  $\varepsilon$ -réseau de  $X$ , alors  $\{Ax_1, \dots, Ax_m\}$  est fini et  $(\|A\|\varepsilon)$ -réseau de  $A(X)$ .

Plus généralement, nous avons :

$$[A]_\mu = \inf\{k > 0 : \mu(A(N)) \leq k\mu(N) \text{ pour un borné } N \subseteq X\}. \quad (1.2.2)$$

On peut donc employer la formule équivalente :

$$[A]_\mu = \sup\{k > 0 : \mu(A(N)) \geq k\mu(N) \text{ pour un borné } N \subseteq X\}. \quad (1.2.3)$$

Cette caractéristique  $[A]_\mu$  est dite mesure de non-compacité (ou  $\mu$ -norme de  $A$ ). En particulier,

- (a) On dit que  $A$  est une  $\mu$ -contraction ou  $k$ -contraction si  $[A]_\mu < 1$ .
- (b) On dit que  $A$  est condensante si  $[A]_\mu = 1$ .

La condition  $[A]_\mu < 1$  signifie que l'image  $A(X)$  de l'ensemble borné  $X$  est "plus compact" que  $X$  lui-même.

La norme inférieure  $\mu$  de  $A$  peut être calculée entre les espaces de dimension infinie d'une manière équivalente par la formule :

$$[A]_\mu^- = \inf \left\{ \frac{\mu(A(N))}{\mu(N)} : N \subseteq X \text{ borné, } \mu(N) > 0 \right\}. \quad (1.2.4)$$

**Proposition 1.2.2.** Les formules (1.2.2) et (1.2.3) possèdent les propriétés suivantes :  $A, B \in L(E, F)$ ,  $\lambda \in K$  :

(a)  $[A]_\mu = 0$  si et seulement si  $L$  est compact.

(b)  $[A + B]_\mu \leq [A]_\mu + [B]_\mu$ .

(c)  $[\lambda A]_\mu \leq |\lambda|[A]_\mu$ .

(d)  $[A]_\mu^- [B]_\mu^- \leq [AB]_\mu \leq [A]_\mu^- [B]_\mu$ .

(e)  $[A]_\mu \leq \|A\|$ .

(f)  $[A]_\mu^- \leq [A]_\mu$  si  $\dim E = \infty$ .

**Remarque 1.2.1. :**

(a) Si une  $k$ -contraction stricte est appliquée à un fermé, borné, ce dernier ne devient pas nécessairement compact (n'a même pas un diamètre plus petit), mais devient plus compact qu'il ne l'était.

(b)  $\bullet$   $f$  condensante  $\implies f$  1-contraction.

$\bullet$   $f$   $k$ -contraction stricte  $\implies f$  condensante.

$\bullet$   $f$  compacte  $\iff f$  0-contraction (dans un e.m. complet).

(c)  $f$   $k$ -contraction et  $g$  compacte  $\implies (f + g)$   $k$ -contraction.

**Lemme 1.2.3. (Arzela-Ascoli) :** Si  $K \subset \mathcal{C}([a, b], X)$  est borné avec  $X$  est espace métrique, alors  $K$  est pré-compact (relativement compact) si et seulement si :

(1)  $K$  est équicontinue.

(2) Pour tout  $t \in [a, b]$ , l'ensemble  $\{f(t), f \in K\}$  est relativement compact.

**Définition 1.2.6.**  $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite Carathéodory si :

(i)  $t \mapsto f(t, y)$  est mesurable  $\forall y \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $y \mapsto f(t, y)$  est continue p.p  $t \in J$

et elle est dite  $L^1$ -Carathéodory si :

(iii) Pour tout  $r > 0$ , il existe une fonction  $h_r \in L^1(J, \mathbb{R})$  tel que :

$$|f(t, y)| \leq h_r(t), \quad \text{p.p } t \in J$$

pour tout  $y \in \mathbb{R}$  avec  $|y| < r$ .

**Définition 1.2.7.** Soit  $E$  un espace de Banach ordonné par une relation d'ordre  $\leq$ . L'application  $T : E \rightarrow E$  est dit isotone croissante si  $x, y \in E$  avec  $x \leq y$  entraîne  $Tx \leq Ty$ .

**Définition 1.2.8.** Deux applications  $S, T : E \rightarrow E$  sont dit faiblement isotones croissantes si  $Sx \leq TSx$  et  $Tx \leq STx$  pour tout  $x \in E$ .

De même; les applications  $S, T : E \rightarrow E$  sont dites faiblement isotones décroissantes si  $Sx \geq TSx$  et  $Tx \geq STx$  pour tout  $x \in E$ . Les deux applications sont dites faiblement isotones si elles sont faiblement isotones croissantes et décroissantes en même temps sur  $E$ .

**Définition 1.2.9.** Un opérateur  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  est semi-Fredholm à droite ( $L \in \phi_+(E, F)$ ) si  $N(L) = \{x \in E : Lx = 0\}$  est de dimension finie et son image  $R(L) = \{Lx : x \in E\}$  est fermé. De même,  $L$  est semi-Fredholm à gauche ( $L \in \phi_-(E, F)$ ) si son image  $R(L)$  est fermé et de codimension finie.

Chaque opérateur  $(L \in \phi(E, F)) := (L \in \phi_+(E, F)) \cap (L \in \phi_-(E, F))$  s'appelle l'opérateur de Fredholm, le nombre  $L := \dim N(L) - \text{codim} R(L) \in \mathbb{Z}$  est son indice.

**Définition 1.2.10.** Si la dimension ou la codimension d'un sous-espace de Banach  $E$  est finie, alors  $E$  peut être décomposé en somme directe  $E_1 \oplus E_2$  où  $E_2$  est un sous-espace de  $E$ . Si la codimension  $E_1$  de  $E$  est finie, elle est égale à la dimension de  $E_2$ .

**Définition 1.2.11.** Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux espace de Banach. Tout opérateur bijectif  $A \in L(E_1, E_2)$  possède un opérateur inverse continu  $A^{-1} : E_2 \rightarrow E_1$ .

**Lemme 1.2.4. (Riesz) :** Dans un espace normé de dimension infini il existe une suite  $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$  telle que :

$$\|x_n\| = 1 \text{ et } \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \quad (n, m = 1, 2, \dots, n \neq m)$$

.

**Théorème 1.2.5. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) :** On considère un sous-ensemble  $X$  mesurable de  $\mathbb{R}^d$  muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

Soit  $f_n$  une suite de fonctions mesurables sur  $X$ . On fait les deux hypothèses suivantes :

- pour presque tout  $x \in X$ , la suite  $(f_n(x))$  est convergente, et la limite  $f(x)$  est une fonction mesurable.

- il existe une fonction  $g$ , positive et intégrable sur  $X$ , telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour presque tout  $x \in X$ ,  $\forall f_n(x) \leq g(x)$ .

Alors :

- la fonction  $f$  est intégrable sur  $I$ .

-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f - f_n| dx = 0$ , en particulier,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n dx = \int_X f dx$ .

**Théorème 1.2.6. (Théorème du point fixe de Darbo) :** Soit  $E$  un espace de Banach,  $X \subset E$  un sous-ensemble non vide, fermé, convexe, borné, et  $A : X \rightarrow X$  opérateur  $\alpha$  – contraction, c. à. d,  $[A]_\alpha < 1$ . Alors  $A$  possède un point fixe en  $X$ .

*Démonstration.* Définissons une suite  $(X_n)_n$  de sous-ensembles de  $X$  en posant :

$$X_1 := \overline{\text{co}}A(X), X_2 := \overline{\text{co}}A(X_1), \dots, X_{n+1} := \overline{\text{co}}A(X_n)$$

et soit  $X_\infty$  l'intersection de tous les ensembles  $X_n$ . Il est facile de voir par le théorème de Cantor que  $X_\infty$  est compact et  $A(X_\infty) \subseteq X_\infty$ . la seule partie non triviale est de prouver que  $X_\infty \neq \emptyset$ ; ceci résulte de la propriété d'intersection de type Cantor de la mesure de non-compactité  $\alpha$ , le théorème du point fixe de Schauder implique que  $A$  a un point fixe dans  $X_\infty \subseteq X$ .

Considérons quelque remarque sur le théorème. Tout d'abord, la difficulté est de prouver que  $X_\infty \neq \emptyset$ ; ce ci peut être surmonté en fixant à l'avance un point  $x_0 \in X$  et en définissant la suite  $(X_n)_n$  par :

$$X_1 := \overline{\text{co}}[A(X) \cup \{x_0\}], X_2 := \overline{\text{co}}[A(X_1) \cup \{x_0\}], \dots, X_{n+1} := \overline{\text{co}}[A(X_n) \cup \{x_0\}]$$

Nous précisons également qu'un cas où  $X = B(E)$ , on pourrai supposer sans perte de généralité que  $A \equiv 0$  sur la frontière  $S(X)$ . En fait , de  $A : B(X) \longrightarrow B(X)$  on peut passer à l'opérateur  $\tilde{A} : B(X) \longrightarrow B(X)$  défini par :

$$\tilde{A}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}A(2x), & \text{si } \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ (1 - \|x\|)A\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \text{si } \frac{1}{2} < \|x\| \leq 1. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Cet opérateur satisfait  $[\tilde{A}]_\alpha = [A]_\alpha$  et, de plus,  $\tilde{A}(x) \equiv 0$  sur  $S(X)$ . Il est facile de voir qu'on ne peut pas avoir les points fixes  $x^*$  de la norme  $\|x^*\| > \frac{1}{2}$  car :

$$\frac{1}{2} < \|x^*\| = (1 - \|x^*\|) \left\| A \left( \frac{x^*}{\|x^*\|} \right) \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| A \left( \frac{x^*}{\|x^*\|} \right) \right\| \leq \frac{1}{2}$$

Donc l'homéomorphisme  $x \mapsto 2x$  est une correspondance entre les points fixes de  $\tilde{A}$  dans  $B_{\frac{1}{2}}(E)$  et les points fixes  $A$  dans  $B(E)$ . D'où l'opérateur  $A$  admet un point fixe.  $\square$

# Chapitre 2

## Mesure de non compacité et $\mu$ -normes

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définition et exemples de mesure de non compacité de Kuratowski, Hausdorff et Istraescu ainsi que leurs propriétés principales.

### 2.2 Mesure de non compacité de Kuratowski

**Définition 2.2.1.** Soit  $(E, ||.||)$  un espace de Banach et  $X$  un sous-ensemble de  $E$ .

La mesure de non compacité de Kuratowski de  $X$  est définie par :

$$\alpha(X) = \inf \{d > 0 : X \text{ admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre } \leq d\}$$

autrement dit :

$$\alpha(X) = \inf \left\{ d > 0 : \exists X_1, \dots, X_n \subset X \text{ tels que } : X = \bigcup X_i \text{ et } \text{diam} X_i \leq d \right\}$$

## 2.3 Mesure de non compacité de Hausdorff

**Définition 2.3.1.** *La mesure de non compacité de Hausdorff de  $X$  est définie par :*

$$\chi(X) = \inf \{ \varepsilon > 0 : X \text{ admet un recouvrement fini par des boules de rayon } \leq \varepsilon \}$$

*autrement dit :*

$$\chi(X) = \inf \{ \varepsilon > 0 : X \text{ admet un } \varepsilon - \text{réseau dans } E \}$$

*La mesure interne de non-compacité de Hausdorff de  $X$  est définie par :*

$$\chi_i(X) = \inf \{ \varepsilon > 0 : X \text{ admet un } \varepsilon - \text{réseau dans } X \}$$

## 2.4 Mesure de non compacité de Istratescu

**Définition 2.4.1.** *La mesure de non compacité de Istratescu de  $X$  est définie par :*

$$\beta(X) = \sup \{ \varepsilon > 0 : \text{il existe une suite } (X_n)_n \text{ dans } X \text{ avec } \|x_m - x_n\| \geq \varepsilon \text{ pour } m \neq n \}.$$

**Exemple 2.4.1.** *Soit  $E = \mathcal{C}[0, 1]$  l'espace de Banach de toutes les fonctions continues sur  $[0, 1]$ , muni de la norme du sup.  $X = B(E)$ , alors nous avons :*

$$\chi(X) = 1, \quad \alpha(X) = 2$$

*puisque  $\text{diam } B(E) = 2$  et le rayon de  $B(E)$  est 1.*

$$D'autre part, l'ensemble  $X := \{u \in B(E) : 0 = u(0) \leq u(t) \leq u(1) = 1 = B^+(E)\}$$$

*satisfait :*

$$\chi(X) = \frac{1}{2}, \quad \alpha(X) = 1$$

*puisque  $\text{diam } B^+(E) = 1$  et le rayon de  $B(E)$  est  $\frac{1}{2}$ .*

## 2.5 Propriétés élémentaires de la MNC de Kuratowski

**Proposition 2.5.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux parties bornées d'un espace de Banach  $E$ , alors :*

$$(i) \quad X \subset Y \Rightarrow \alpha(X) \leq \alpha(Y) \quad (\alpha \text{ croissante})$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \alpha(X \cup Y) = \max(\alpha(X), \alpha(Y)) \\ \alpha(X \cap Y) \leq \min(\alpha(X), \alpha(Y)) \end{cases}$$

$$(iii) \quad \alpha(X) = \alpha(\dot{X}) = \alpha(\overline{X}) = \alpha(\overline{\text{conv} X}) \quad (\text{invariante par passage à la fermeture et à l'enveloppe convexe}).$$

$$(iv) \quad \begin{cases} \alpha(X + Y) \leq \alpha(X) + \alpha(Y) \\ \alpha(\lambda X) = |\lambda| \alpha(X) \end{cases} \quad (\text{semi-norme})$$

$$(v) \quad \alpha(x_0 + X) = \alpha(X), \forall x_0 \in E \quad (\text{invariance par translation})$$

$$(vi) \quad \alpha \text{ est 2-Lipchitzienne.}$$

*Démonstration.* (i) Tout recouvrement de  $Y$  est un recouvrement de  $X$

$$(ii) \quad \text{D'après (i) ; } \max(\alpha(X), \alpha(Y)) \leq \alpha(X \cup Y)$$

Réciproquement, on a par définition :

$$\forall d > 0, \exists \{X_i\}_{1 \leq i \leq n}, \exists \{Y_j\}_{1 \leq j \leq m}$$

tels que :

$$X \subset \bigcup_{i=1}^n X_i, \quad Y \subset \bigcup_{j=1}^m Y_j$$

et

$$\text{diam} X_i \leq \alpha(X) + \frac{d}{2}, \quad \forall i \in \overline{[1, n]},$$

$$\text{diam} Y_j \leq \alpha(Y) + \frac{d}{2}, \quad \forall j \in \overline{[1, m]}.$$

Comme les ensembles  $C_{ij} = (X_i \cup Y_j)$  pour chacun des indices  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$  recouvrent l'ensemble  $X \cup Y$ , On a :

$$\forall d > 0, \quad \text{diam}(C_{ij}) \leq \max(\alpha(X), \alpha(Y)) + d$$

alors :

$$\alpha(X \cup Y) \leq \max(\alpha(X) + \alpha(Y))$$

$$(iii) \quad (a) \quad X \subset \overline{X} \Rightarrow \alpha(X) \leq \alpha(\overline{X}).$$

$$(b) \quad \forall d > 0, \exists \{X_i\}_{1 \leq i \leq n}, \text{ tel que : } X \subset \bigcup_{i=1}^n X_i, \text{ et } \text{diam} X_i \leq \alpha(X) + d.$$

Comme  $\overline{X} \subseteq \bigcup_{i=1}^n X_i$  et :

$$\text{diam} X_i = \text{diam} \overline{X}_i, \quad \forall i$$

on a l'inégalité :

$$\alpha(\overline{X}) \leq \alpha(X)$$

D'où :

$$\alpha(X) = \alpha(\overline{X})$$

(c)  $X \subset \text{conv}X$  entraîne  $\alpha(X) \leq \alpha(\text{conv}X)$ .

(d)  $\forall d > 0, \exists \{X_i\}_{i=1}^n$ , tel que :  $\text{diam}X_i \leq \alpha(X) + d, \forall i$ .

Si chaque  $X_i$  est convexe, alors :  $\text{diam}(\text{conv}X) = \text{diam}X$ .

Définissons :

$$\sigma = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

et  $A(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$  pour tout  $\lambda \in \sigma$  tel que :

$$\alpha(A(\lambda)) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(X_i) \leq \alpha(X) + \varepsilon$$

Montrons maintenant que l'ensemble  $\bigcup_{\lambda \in \sigma} A(\lambda)$  est convexe.

Soit  $z = \lambda x + (1 - t)y$  et  $\eta = t\lambda + (1 - t)\xi$ .

Il suffit de montrer que si :  $0 \leq t \leq 1$ ,  $x \in A(\lambda)$ , et  $y \in A(\xi)$ , alors :  $z \in A(\eta)$ .

En effet, soit  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n \xi_i y_i$ ,

où  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \sigma$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \sigma$  et  $x_i, y_i \in X_i$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$

On peut écrire  $z = \sum_{i=1}^n \xi_i z_i$  où  $z = \rho_i x_i + (1 - \rho_i) y_i$  et

$$\rho = \begin{cases} t\lambda_i/\eta_i & \text{si } \eta_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } \eta_i = 0 \end{cases}$$

Ainsi  $z \in A(\eta)$ , avec  $\eta \in \sigma$  et  $z_i \in X_i$ , car  $X_i$  est convexe.

Alors  $X \subset \bigcup_{i=1}^n X_i \subset \bigcup_{\lambda \in \sigma} A(\lambda)$  qui est convexe, d'où :

$$\text{conv}X \subset \bigcup_{\lambda \in \sigma} A(\lambda)$$

L'ensemble  $\sigma$  étant compact, pour  $\varepsilon > 0$  il existe  $\lambda^1, \dots, \lambda^m$  dans  $\sigma$  tels que :

$$\min \{ \|\lambda - \lambda^i\| : i = 1, \dots, m \} < \frac{\varepsilon}{M}; \forall \lambda \in \sigma$$

où  $M = \sup \{ \|x\| : x \in X_i, i = 1, \dots, m \} < \infty$

Ainsi, si  $x \in \bigcup_{\lambda \in \sigma} A(\lambda)$ ,  $x = \sum_i \lambda_i x_i$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_i \lambda_i = 1$ ,

il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$ , tel que :  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i - \lambda_i^j| < \frac{\varepsilon}{M}$ .

Si :  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^j x_i$ , alors :

$$\|x - \bar{x}\| < \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \lambda_i^j| \|x_i\| < \varepsilon$$

Donc :

$$\text{conv}(X) \subset \bigcup_{i=1}^m \left( A(\lambda^i) + \varepsilon \overline{B(0, 1)} \right)$$

Par conséquent :

$$\alpha(\text{conv} X) \leq \max \left\{ \alpha(A(\lambda^i)) + \alpha(\varepsilon \overline{B(0, 1)}) \right\} \leq \alpha(B) + \varepsilon + 2\varepsilon$$

d'où :

$$\alpha(\text{conv} X) \leq \alpha(B)$$

Finalement :

$$\alpha(X) = \alpha(\bar{X}) = \alpha(\text{conv} X)$$

(iv) (a) Si  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$  et  $\{Y_j\}_{1 \leq j \leq m}$  sont deux recouvrements respectifs des ensembles  $X$  et  $Y$ , alors les ensembles  $\{X_i + Y_j\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$  recouvrent la somme  $X + Y$ , Or :

$$d(X + Y) \leq d(X) + d(Y), \forall i, j$$

D'où le résultat.

(b) Resultat du fait que :  $d(\lambda X) = |\lambda|d(X)$ .

(v) Ecrivons  $X = (X + x_0) - x_0$ , alors  $\alpha(X + x_0) \leq \alpha(X) + \alpha(x_0) = \alpha(X)$ , et  $\alpha(X) \leq \alpha(X + x_0) + \alpha(-x_0) = \alpha(X + x_0)$ .

□

**Proposition 2.5.2.** (i)  $0 \leq \alpha(X) \leq \text{diam}(X) < \infty$ .

(ii)  $\text{diam}(X) = 0 \Rightarrow X = \{x_0\}$  où  $X = \emptyset$ .  $X$  fini  $\Rightarrow \alpha(X) = 0$ .

(iii) Si  $(E, d)$  est complet alors :

$$\alpha(X) = 0 \Leftrightarrow X \text{ est relativement compact}$$

*Démonstration.* (i) Noter que  $X \subseteq X$ .

(ii)  $\text{diam}(X) = 0 \Rightarrow X = \{x_0\}$  où  $X = \emptyset$  d'après la définition  $\alpha\{x_0\} = 0$  et  $\alpha(\emptyset) = 0$ .

(iii)  $(E, d)$  étant complet,  $X$  relativement compact  $\Leftrightarrow X$  totalement borné (pré-compact); d'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X_i \quad 1 \leq i \leq n, \text{ tel que : } X \subset \bigcup_{i=1}^n X_i \text{ et } d(X_i) \leq \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n.$$

Alors :  $d(X) = 0$ .

□

**Théorème 2.5.3.** Les mesure de non-compacité de Kuratowski, Hausdorff et Istratescu sont liées par l'inégalité suivante :

$$\chi(\Omega) \leq \chi_i(\Omega) \leq \beta(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\chi(\Omega)$$

*Démonstration.* Pour prouver  $\chi_i(M) \leq \beta(M)$ , nous pouvons supposer que  $\chi_i(M) > 0$ .

Soit  $0 < \varepsilon < \chi_i(M)$ , nous définissons une suite  $x_n \in M$  telle que : en choisissant arbitrairement  $x_1 \in M$ , et si  $x_1, \dots, x_n$  sont déjà définis, il y a un certain élément  $x_{n+1} \in M$  tel que :  $d(x_m, x_{n+1}) > \varepsilon$  ( $m = 1, \dots, n$ ), autrement  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$  forme un  $\varepsilon$ -réseau fini pour  $M$  ce qui impliquerait  $\chi_i(M) \leq \varepsilon$ . Mais la suite  $x_n \in M$  satisfait maintenant  $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$  ( $n \neq m$ ) ce qui implique  $\beta(M) \geq \varepsilon$ , et ainsi  $\beta(M) > \chi_i(M)$ .

L'estimation  $\beta(M) \leq \alpha(M)$  n'a pas lieu si  $\beta(M) = 0$ . Autrement, si  $0 < \varepsilon < \beta(M)$ , nous trouvons une suite  $x_n \in M$ , tel que :  $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$  ( $n \neq m$ ). Si un nombre fini d'ensembles  $D_1, \dots, D_N$  recouvrent  $M$ , certains de ces ensembles  $D_k$  doivent contenir des éléments finis de la suite ; en particulier  $\text{diam} D_k \geq \varepsilon$ . Par conséquent,  $\alpha(M) \geq \varepsilon$ , et donc  $\alpha(M) \geq \beta(M)$ .

En conclusion, si  $r > \varepsilon > \chi(M)$ , et  $x_1, \dots, x_n \in X$  est un  $\varepsilon$ -réseaux fini pour  $M$ , alors les ensembles  $B_\chi(x_k, r) \cap M$  ( $k = 1, \dots, n$ ) constituent un recouvrement fini de  $M$  avec des ensembles de diametre inferieur à  $2r$ . Par conséquent,  $\alpha(M) \leq 2\chi(M)$ .  $\square$

**Théorème 2.5.4.** *Soit  $B = B(0, 1)$  la boule centrée d'un espace de Banach  $E$ .*

*Alors :*

$$\begin{cases} \alpha(B) = \alpha(\overline{B}) = \alpha(\partial B) = 0 \\ \chi(B) = \chi(\overline{B}) = \chi(\partial B) = 0 \end{cases} \quad \text{si } E \text{ est de dimension finie.}$$

*De plus :*

$$\begin{cases} \alpha(B) = \alpha(\overline{B}) = \alpha(\partial B) = 2 \\ \chi(B) = \chi(\overline{B}) = \chi(\partial B) = 1 \end{cases} \quad \text{si } E \text{ est de dimension infinie.}$$

*Démonstration.* Si  $E$  est de dimension finie, le résultat découle des définitions de la MNC de Kuratowski et de Hausdorff;  $B$  est relativement compact d'après la régularité

$$\text{de } \mu(\mu = \alpha, \chi), \text{ alors : } \begin{cases} \alpha(B) = \alpha(\overline{B}) = \alpha(\partial B) = 0 \\ \chi(B) = \chi(\overline{B}) = \chi(\partial B) = 0 \end{cases}$$

Il reste à considérer le cas où la dimension est infinie.

Comme  $B = B(0, 1)$ , alors :  $\chi(B(0, 1)) \leq 1$ .

Supposons que :  $\chi(B(0, 1)) = r < 1$ . et soit  $\varepsilon > 0$ , tel que :  $\varepsilon + r < 1$ .

Il existe  $\{x_1, \dots, x_m\}$  dans  $E$  tels que :

$$B(0, 1) \subset \bigcup_{k=1}^m B(x_k, r + \varepsilon) = \bigcup_{k=1}^m B(x_k) + (r + \varepsilon)B(0, 1)$$

Par suite :

$$r = \chi(B) \leq (r + \varepsilon)\chi(B) = r(r + \varepsilon) \Rightarrow r = 0$$

□

ce qui est impossible car  $B$  n'est pas relativement compact, d'où :  $\chi(B) = 1$ .

Pour la preuve du résultat pour  $\alpha$ , nous utiliserons le théorème des antipodes de Lyustrnik-Shnirel'man-borsnk suivant.

**Théorème 2.5.5.** *Soit  $S$  une sphère dans un espace vectoriel normé de dimension  $n$  et  $\{B_k\}_{1 \leq k \leq n}$  un recouvrement de  $S$  par des fermés. Alors au moins un des ensembles  $B_k$  contient 2 points antipodes, i.e  $\text{diam} B > \text{diam} S$ .*

*Danc, si  $\alpha(B) < 2$  et  $B \subset \bigcup_{k=1}^m B_k$  avec  $\text{diam} B_k < 2, \forall k = 1, \dots, m$  (on part de la supposition que les  $A_k$  sont fermés).*

Alors, prenant l'intersection  $A_k = B_k \cap E_k$ , nous obtenons une contradiction avec le théorème des antipodes.

## 2.6 Théorème des ensembles emboîtés de Cantor

### 2.6.1 Théorème de Cantor

**Définition 2.6.1. (Famille Emboîtée) :** Soit  $\mathcal{F}$  une famille quelconque d'intervalles de  $\mathbb{R}$ . On dit qu'ils sont emboîtés si pour tout  $]a, b[, ]c, d[$ , on a soit  $]a, b[ \subset ]c, d[$ , soit  $]c, d[ \subset ]a, b[$ .

dans le cas d'une famille  $I_n = ]a_n, b_n[$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , on dit qu'ils sont emboîtés décroissants si :

$$]a_1, b_1[ \supset ]a_2, b_2[ \supset \dots \supset ]a_n, b_n[$$

**Théorème 2.6.1.** Pour toute suite de segments emboîtés  $I_n = ([a_n, b_n])_n$  on a :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n \neq \emptyset$$

### 2.6.2 Théorème de Cantor généralisé

**Théorème 2.6.2.** Dans un espace métrique complet  $(E; d)$  toute suite décroissante de fermés, non vides  $F_n$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F_n) = 0$  est d'intersection compact non vide.

*Démonstration.* (i)  $F_\infty = \bigcap_n F_n$  est compact. En effet,  $0 \leq \alpha(F_\infty) \leq \alpha(F_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  car  $\alpha$  est croissante. Donc  $\alpha F_\infty = 0 \Rightarrow F_\infty$  relativement compact alors il est compact car c'est un fermé.

(ii)  $F_\infty \neq \emptyset$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $x_n \in F_n, \forall n$  et soit  $C_n = \{x_k, k \geq n\}$ , alors :  
 $(C_n)_n$  est décroissante et  $C_N \subset F_N, \forall n$ , car  $x_N \in F_N$  et  $x_{n+1} \in F_{n+1}$ .

De plus :

$$\alpha(C_n) \leq \alpha(F_n), \quad \forall n$$

comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F_n) = 0$ , alors  $\alpha(C_1) = 0$  et donc l'ensemble est relativement compact.

Soit donc  $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , alors  $\bar{x} \in F_n, \forall n$  ce qui entraîne que :

$$\bigcap_n F_n \neq \emptyset$$

□

## Chapitre 3

# Application à une équation intégrale non linéaire de type Volterra

### 3.1 Introduction

Dans cette partie, On étudie l'existence des solutions pour une équation intégrale non-linéaires de type Volterra.

Grâce à la mesure de non compacité, on montre que cette équation intégrale possède des solutions dans un espace de Banach.

### 3.2 Equation de type Volterra

#### 3.2.1 Existence de solutions

Dans cette partie, on applique la notion de mesure de non-compacité  $\mu$ , définie dans les chapitres précédents, à l'étude de la solution monotone d'une équation intégrale.

Considérons l'équation de Volterra suivante :

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t v(t, \tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in I \quad (3.2.1)$$

Les fonctions  $a(t)$  et  $v(t, \tau, x(\tau))$  qui apparaissent dans cette équation sont données tandis que  $x = x(t)$  est une fonction inconnue.

Cette fonction sera examinée sous les hypothèses suivantes :

- (i)  $a \in \mathcal{C}(I)$  est une fonction croissante et positive sur l'intervalle  $I$ .
- (ii)  $v : I \times I \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction continue.
- (iii) Il existe une fonction croissante  $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  telle que l'inégalité

$$|v(t, \tau, x(\tau))| \leq f(|x|)$$

est vraie pour tout  $t, \tau \in I$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

- (iv) L'opérateur  $T : \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$  est continu et satisfait les conditions du théorème de Darbo pour la mesure de non-compacité  $\mu$  avec la constante  $Q$  :

$$\mu(TX) \leq Q\mu(X)$$

D'ailleurs,  $T$  est un opérateur positif; i.e,  $Tx \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

- (v) Il existe  $c, d$  des constantes positives telles que :

$$|(Tx)(t)| \leq c + d \|x\|$$

pour chaque  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $t \in I$ .

- (vi) L'inégalité  $\|a\| + (c + dr)Mf(r) \leq r$  possède une solution positive  $r_0$  telle que :

$$Mf(r_0)Q \leq 1$$

Alors, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1.** *Sous les hypothèses (i) – (vi) l'équation (3.2.1) possède au moins une solution  $x = x(t)$  qui appartient à l'espace  $\mathcal{C}(I)$  et est croissante sur l'intervalle  $I$*

*Démonstration.* Considérons l'opérateur  $V$  défini sur l'espace  $\mathcal{C}(I)$  de la façon suivante :

$$(Vx)(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t v(t, \tau, x(\tau)) d\tau.$$

D'après les hypothèses (i), (ii), et (iv), la fonction  $Vx$  est continue sur  $I$  pour n'importe quelle fonction  $x \in \mathcal{C}(I)$ , i.e,  $V$  transforme l'espace  $\mathcal{C}(I)$  en lui même.

De plus, avec les hypothèses (iii) et (v), nous obtenons :

$$|(Vx)(t)| \leq \|a\| + (c + d\|x\|)Mf(\|x\|).$$

Par conséquent,

$$\|(Vx)\| \leq \|a\| + (c + d\|x\|)Mf(\|x\|).$$

Ainsi, de l'hypothèse (vi) soit  $r_0$  tel que  $Mf(r_0)Q < 1$  et tel que l'opérateur  $V$  transforme la boule  $B_{r_0}$  en elle même .

Dans ce qui suit nous allons démontrer que l'opérateur  $V$  transforme l'ensemble  $B_{r_0}^+$  en un ensemble non vide, borné, fermé et convexe. Alors avec les hypothèses (i), (ii) et (iv) nous déduisons facilement que  $V$  transforme  $B_{r_0}^+$  en elle même.

Maintenant nous prouvons que  $V$  est continu sur l'ensemble  $B_{r_0}^+$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé et  $x, y \in B_{r_0}^+$  pris arbitrairement tel que  $\|x - y\| \leq \varepsilon$ . Alors pour  $t \in I$ , nous obtenons l'inégalité suivante :

$$|(Vx)(t) - (Vy)(t)| \leq \|T_x - T_y\|Mf(r_0) + (c + dr_0)\beta_{r_0}(\varepsilon)M$$

où  $\beta_{r_0}(\varepsilon)$  est définie par :

$$\beta_{r_0}(\varepsilon) = \sup \{ |v(t, \tau, x) - v(t, \tau, y)| : t, \tau \in I; x, y \in [0, r_0], |x - y| \leq \varepsilon \}$$

Nous avons l'inégalité suivante :

$$\|Vx - Vy\| \leq \|Tx - Ty\|Mf(r_0) + (c + dr_0)M\beta_{r_0}(\varepsilon)$$

De la continuité uniforme de la fonction  $v$  sur l'ensemble  $I \times I \times [0, r_0]$  et de la continuité de  $V$ , la dernière inégalité implique la continuité de l'opérateur  $V$  sur l'ensemble  $B_{r_0}^+$ .

Dans ce qui suit, prenons un ensemble  $X \in B_{r_0}^+$ . De plus, fixons arbitrairement  $\varepsilon > 0$  et choisissons  $x \in X$  et  $t, s \in [0, M]$ , tel que  $|t - s| \leq \varepsilon$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $t \leq s$ . D'après nos hypothèses, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |(Vx)(t) - (Vx)(s)| &\leq |a(t) - a(s)| \\ &\quad + |(Tx)(s) \int_0^s v(s, \tau, x(\tau))d\tau - (Tx)(t) \int_0^t v(t, \tau, x(\tau))d\tau| \\ &\leq \omega(a, \varepsilon) \\ &\quad + |(Tx)(s) \int_0^s v(s, \tau, x(\tau))d\tau - (Tx)(t) \int_0^s v(s, \tau, x(\tau))d\tau| \\ &\quad + |(Tx)(t) \int_0^s v(s, \tau, x(\tau))d\tau - (Tx)(t) \int_0^s v(s, \tau, x(\tau))d\tau| \\ &\quad + |(Tx)(t) \int_0^s v(s, \tau, x(\tau))d\tau - (Tx)(t) \int_0^t v(t, \tau, x(\tau))d\tau| \\ &\leq \omega(a, \varepsilon) + \omega(Tx, \varepsilon) \int_0^s f(r_0)d\tau \\ &\quad + (c + dr_0) \int_0^s \gamma_{r_0}(\varepsilon)d\tau \\ &\quad + (c + dr_0)f(r_0)(s - t) \\ &\leq \omega(a, \varepsilon) + \omega(Tx, \varepsilon)Mf(r_0) \\ &\quad + (c + dr_0)M\gamma_{r_0}(\varepsilon) + (c + dr_0)f(r_0)\varepsilon, \end{aligned}$$

où  $\gamma_{r_0}(\varepsilon)$  est définie par :

$$\gamma_{r_0}(\varepsilon) = \sup \{ |v(s, \tau, x) - v(t, \tau, x)| : t, s \in I; |s - t| \leq \varepsilon; x \in [0, r_0] \}.$$

D'après la continuité de la fonction  $v$  sur  $I \times I \times [0, r_0]$  nous avons  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_{r_0}(\varepsilon) = 0$ .

Ceci avec les estimations ci-dessus, nous aurons l'inégalité suivante :

$$\omega_0(VX) \leq Mf(r_0)\omega(TX). \quad (3.2.2)$$

D'autre part, fixons arbitrairement  $x \in X$  et  $t, s \in I$  tels que  $t \leq s$ . Alors, nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} & |(Vx)(t) - (Vx)(s)| - [(Vx)(t) - (Vx)(s)] \\ & \leq [|a(t) - a(s)| - [|a(t) - a(s)|]] \\ & + [(Tx)(s) \int_0^s v(s, \tau, x(\tau)) d\tau - (Tx)(t) \int_0^t v(t, \tau, x(\tau)) d\tau] \\ & - [(Tx)(s) \int_0^s v(s, \tau, x(\tau)) d\tau - (Tx)(t) \int_0^t v(t, \tau, x(\tau)) d\tau] \\ & \leq [(Tx)(t) - Tx(s)] - [(Tx)(t) - Tx(s)] Mf(r_0) \\ & \leq Mf(r_0)i(Tx). \end{aligned}$$

avec :

$$i(x) = \sup \{ |(x)(t) - (x)(s)| - [(x)(t) - (x)(s)] : t, s \in I, t \leq s \}$$

Par conséquent, on a :

$$i(Vx) \leq Mf(r_0)i(Tx) \quad , \forall x \in X$$

D'où :

$$i(VX) \leq Mf(r_0)i(TX) \quad (3.2.3)$$

Finalement, avec (3.2.2) et (3.2.3) et la définition de la (MNC)  $\mu$  et l'hypothèse (iv) nous obtenons :

$$\mu(VX) \leq Mf(r_0)\mu(TX) \leq Mf(r_0)Q\mu(X)$$

Comme  $QMf(r_0) \leq 1$ (vi), le résultat découle du théorème de Darbo.  $\square$

**Exemple 3.2.2.** *Considérons l'équation intégrale non-linéaire suivante :*

$$x(t) = t^3 + \left(\frac{1}{4}x(t) + \frac{1}{4}\right) \int_0^1 \left(t + \cos\left(\frac{x^2(\tau)}{1+x^2(\tau)}\right)\right) d\tau.$$

*Nous étudions cette équation dans l'espace  $\mathcal{C}([0, 1])$ . On a :*

$$a(t) = t^3 \text{ et } \|a\| = 1 \text{ et } v(t, \tau, x) = t + \cos\left(\frac{x^2(\tau)}{1+x^2(\tau)}\right).$$

*D'autre part, nous avons  $|v(t, \tau, x)| \leq 2$  pour  $t, \tau \in [0, 1]$  et  $x \in \mathbb{R}$ , ainsi la fonction  $f(r) = 2$ . De plus la fonction  $t \mapsto v(t, \tau, x)$  est croissante sur  $[0, 1]$  pour  $\tau \in [0, 1]$  fixé et  $x \in \mathbb{R}$ . L'opérateur  $T$  définie par :*

$$Tx(t) = \left(\frac{1}{4}x(t) + \frac{1}{4}\right)$$

*Vérifie l'hypothèse (iv) et (v) avec  $Q = \frac{1}{4}$ ,  $c = \frac{1}{4}$ , d'où l'inégalité :*

$$\|a\| + (c + dr)Mf(r) \leq r$$

*prend la forme :*

$$1 + \left(\frac{1}{4}r + \frac{1}{4}\right) \times 1 \times 2 \leq r$$

*laquelle possède une solution positive  $r_0 = 3$  et*

$$Mf(r_0)Q = 1 \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1.$$

*Ceci entraîne l'existence d'une solution dans l'espace  $\mathcal{C}([0, 1])$  croissante sur l'intervalle  $[0, 1]$ .*

## Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté la mesure de non compacité de Kuratowski.

Ces propriétés essentielles ont été étudiées.

L'accent a été mis en suite sur une des nombreuses applications de cette notion, la recherche de solution d'un problème lié à une équation intégrale de type Volterra.

On pense avoir donné, dans ce mémoire une application directe des cours des deux matières : Théorie du point fixe et équations intégrales.

# Bibliographie

- [1] D. Seba, *Measure of noncompactness and fractional differential equations*, Thèse de Doctorat, Université de Sidi Bel-Abbès, Algérie, 2011.
- [2] ———, *Equations intégrales, cours S3, Université de Boumerdes*, (2018).