

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'hamed Bougara Boumerdes
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques



Mémoire Présenté
Pour L'Obtention Du Diplôme De Master
En Mathématiques Financières

Par : MERZOUK Mehdi
Et : TAOUCHICHET Asma

Etude de certaines méthodes stochastiques
d'évaluation des provisions pour sinistre à payer
dans les assurances .

Soutenu à l'UMBB, le 24/06/2018, devant le jury composé de :

M ^r MISSOUM.R	M.A.A	Président	l'UMBB -Département Mathématiques.
M ^r ZITOUNI.M	M.A.A	Encadreur	l'UMBB - Département Mathématiques
M ^{me} GATT.F	M.A.B	Examineur	l'UMBB - Département Mathématiques.

Année Universitaire 2017 – 2018

Remerciements

Ce mémoire est le résultat d'un travail de plusieurs mois. En préambule, On adresse tous nos remerciements aux personnes avec lesquelles on a pu échanger et qui nous ont aidés pour la rédaction de ce modeste travail.

En commençant par remercier tout d'abord monsieur ZITOUNI.M, notre promoteur , pour son aide précieux, ses conseils et pour le temps qu'il nous a consacré.

notre gratitude va également à monsieur METREF.M directeur de l'agence caar de rouiba, pour ses remarques et son aide qui nous a permis d'avoir une autre vision de notre travail et approfondir l'étude présentée dans ce document.

Merci également à l'ensemble des professeurs : BEZOUI.M, MISSOUM.R, FERRANI.Y, KHALDI.K, GATT.F pour la qualité de leurs enseignements, et leurs remarques et conseils pendant notre cursus.

Merci aux membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

nous adressons nos plus sincères remerciements à nos familles : parents, frères et soeurs, proches et amis, qui nous ont accompagnés, aidés, soutenus et encouragés tout au long de la réalisation de ce mémoire.

En fin, nous adressons nos plus sincères condoléances à la famille de notre cher professeur AKLIOUAT, qui nous a quitté cette année, son image est toujours gravé dans nos mémoire, paix à son âme.

Table des matières

Liste des figures	IV
Introduction générale	1
1 Définitions générales et notations	3
1.1 Introduction	3
1.2 Notions fondamentales	3
1.2.1 L'Assurance	3
1.2.2 Les provisions techniques	6
1.2.3 Sinistre	8
1.3 Notations générales	9
2 L'évaluation des provisions	12
L'évaluation des provisions	12
2.1 Introduction	12
2.2 Méthodes déterministes	12
2.2.1 Méthode Chain-Ladder	13
2.2.2 Méthode Bornhuetter-Ferguson	14
2.2.3 Comparaison de ces deux méthodes	15
2.3 Méthodes stochastiques	16
2.3.1 Méthode de Mack	17
2.3.2 Méthode de Bornhuetter-Ferguson Stochastique	19
2.3.3 Comparaison de ces deux méthodes	23
2.3.4 Intervalles de confiance autour des provisions estimées	23
3 Application des méthodes de provisions sur des données réelles	25

Application des méthodes de provisions sur des données réelles	25
3.1 Présentation de l'organisme d'accueil	25
3.2 Outils	28
3.3 Description de l'application	28
3.3.1 Les triangles de liquidation :	28
3.3.2 Application numérique	30
3.3.3 Etude comparative des résultats	44
Conclusion générale	50
Bibliographie	51
Annexe A	54
Annexe B	55
Annexe C	62

Table des figures

1.1	Schéma simplifié du fonctionnement d'un contrat d'assurance, Source : Elaboré par nos soins	4
1.2	Inversion du cycle de production, Source : Elaboré par nos soins	5
1.3	Bilan simplifié d'une compagnie d'assurance, Source : Elaboré par nos soins	6
1.4	l'évolution des termes définis précédemment pour une année de survenance, au cours des années de développement, Source : Elaboré par nos soins	7
1.5	la dynamique de la vie d'un sinistre, Source : Elaboré par nos soins.	9
3.1	Organigramme de la compagnie.	27
3.2	L'évaluation des paiements des sinistres.	29
3.3	Les facteurs de développement.	31
3.4	Nuages des points $C_{i,j}$	33
3.5	Evolution du Loss-ratio (q_i) de DP	35
3.6	Le nuage de point de $(r_{i,1}, C_{i,1})$	37
3.7	Les résultats de Mack Chain-Ladder.	38
3.8	Représentation des logarithmes des cadences retenues après lissage en fonction des années de développement.	40
3.9	Représentation de la log des \hat{s}_j^{*2} en fonction des valeurs absolues de \hat{y}_j^*	41
3.10	incertitudes associées aux Cadences de règlement incrémentales.	42
3.11	Les réserves obtenues pour les différentes méthodes pour la catégorie DP.	47
3.12	Les réserves obtenues pour les différentes méthodes pour la catégorie DF	47
3.13	Les facteurs de développement pour les catégories DP et DF.	48

Introduction générale

De nos jours, les compagnies d'assurances doivent faire face à tout type de risque. Afin de répondre aux engagements pris envers leurs assurés et être en mesure de pouvoir rembourser les sinistres futurs éventuels, ces compagnies constituent des provisions qui dépendent directement du risque couvert : les provisions pour sinistres à payer.

donc, le souci majeur de l'assureur est être capable de tenir ces engagements vis-à-vis de ses assurés. Pour ce faire, l'assureur doit estimer le montant des réserves pour les sinistres à venir. À cet effet des techniques de provisionnement sont utilisées, à savoir les méthodes déterministes qui se caractérisent principalement par la simplicité de leur mise en oeuvre et de leurs calculs. En revanche, les méthodes déterministes ne nous permettent pas de calculer l'erreur de prédiction. C'est pourquoi, dans un second temps, nous utiliserons des méthodes stochastiques inspirées de ces méthodes déterministes. Ces méthodes ont été introduites justement afin d'obtenir une estimation de cette erreur de prévision et construire des intervalle de confiance.

L'objectif de ce mémoire est tout d'abord, l'estimation des provisions pour sinistres à payer en assurance non-vie, ainsi que le calcul de l'erreur inhérent au méthodes stochastiques utilisées, donc une comparaison entre les différentes méthodes afin de sélectionner le(s) modèle(s) adéquat. donc comment arriver à choisir la méthode adéquate pour une branche d'assurance ?

Pour fonder l'axe de ce mémoire, nous proposons de traiter le sujet en trois chapitres. Le premier introduit les notions essentielles à la bonne compréhension des principes des modèles étudiés [8], [13] .

Pour bien comprendre les modèles actuariels qui se développent chaque jours, nous avons besoin de faire une présentation détaillée de ces dernières, c'est l'objectif du second chapitre, à savoir le modèle de Chain Ladder [11], [14], la méthode de Bornhuetter-Ferguson [8], [9], [19] le modèle de Mack [8], [21], [22], et la méthode de Bornhuetter-Ferguson stochastique [19].

quand au dernier chapitre, il est consacré à l'application des modèles étudiés sur

des données réelles issues de la compagnie algérienne d'assurances et de reassurance (CAAR) à l'aide de programmes établis sous R, ainsi que l'analyse des résultats obtenus.

1

Définitions générales et notations

1.1 Introduction

Avant d'entamer la présentation des différentes méthodes nous devons introduire quelques définitions et notions essentielles pour une bonne compréhension des ces dernières, tels assurance, provisions pour sinistre à payer, etc..

1.2 Notions fondamentales

1.2.1 L'Assurance

Fonctionnement général

De nos jours, le rôle des compagnies d'assurances est devenu essentiel dans un environnement risqué et constamment soumis à l'aléa, pouvant entraîner d'importants impacts financiers, physiques, matériels ou d'autres natures. Dans ce contexte et cette volonté de se prémunir contre les risques auxquels chacun est exposé, l'opération d'assurance consiste à transférer une partie ou la totalité de ces risques à autrui. Cette opération s'effectue via le paiement d'une prime de la part de l'assuré auprès de l'assureur qui lui versera alors une prestation en cas de réalisation effective du risque (sinistre) [8].

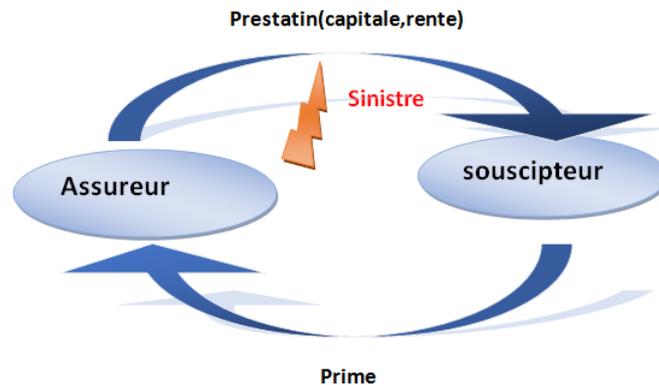


FIGURE 1.1 – Schéma simplifié du fonctionnement d'un contrat d'assurance, Source : Elaboré par nos soins

L'inversion du cycle de production

Un aspect bien spécifique du fonctionnement de l'activité d'assurance repose sur l'inversion du cycle de production. En effet, contrairement aux autres industries traditionnelles où le prix de revient d'un produit est connu à l'avance (avant même le moment de sa mise en vente), l'activité d'assurance repose sur un schéma inversé dans la mesure où le prix de revient d'un produit donné ne peut être connu qu'a posteriori. En effet, on a le schéma suivant :

- L'assureur calcule tout d'abord la prime qu'il fera payer chaque assuré afin de les couvrir.
- L'assureur provisionne alors de manière adéquate pour faire face à ces risques en cas de survenance, mais sans savoir s'ils auront lieu un jour ou non et surtout sans même avoir d'idée précise du montant qu'il devra payer.
- En cas de réalisation du risque, l'assureur doit à tout moment être en parfaite capacité d'indemniser ses assurés.

C'est cette inversion du cycle de production qui régit le fonctionnement de base de l'activité d'assurance, et qui repose sur une comptabilité très réglementée visant à assurer la sérénité et la fiabilité des assurances.

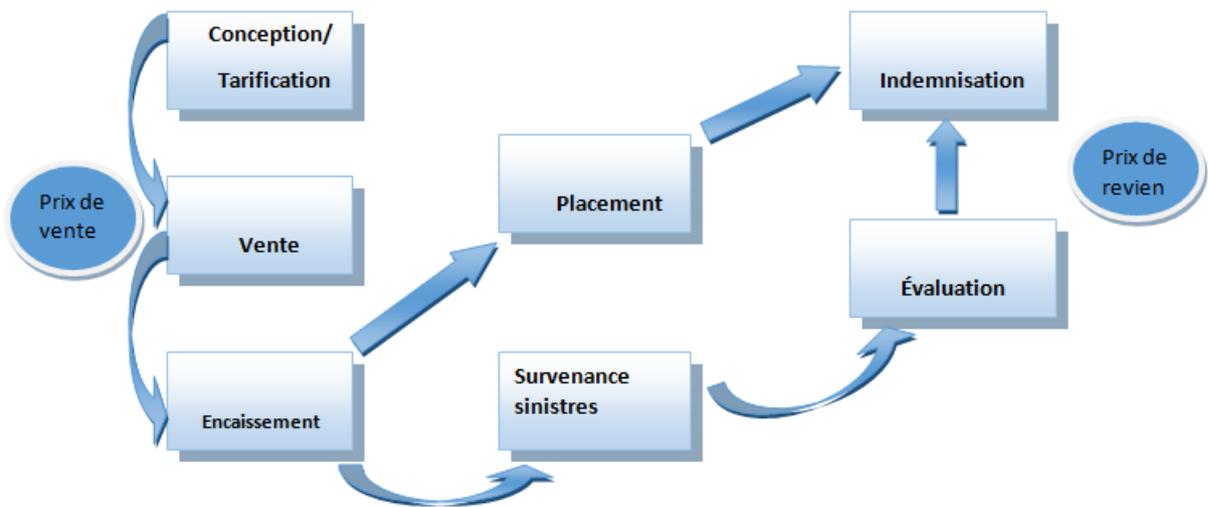


FIGURE 1.2 – Inversion du cycle de production, Source : Elaboré par nos soins

Cette inversion du cycle de production joue notamment un rôle important dans l'économie, et plus largement l'activité d'assurance en elle-même. En effet, les primes d'assurance étant perçues avant le paiement des prestations, l'assureur dispose de capitaux conséquents à investir sur les marchés, permettant ainsi de contribuer notamment au développement d'entreprises grâce à cet apport massif de capitaux.

Un indicateur crucial : la solvabilité

En toutes circonstances, l'assureur doit être capable d'honorer ses engagements envers ses assurés en cas de réalisation d'un risque couvert par le contrat d'assurance : on dit qu'il doit être solvable. Le concept de solvabilité désigne donc la capacité financière d'une compagnie d'assurance à faire face à ses engagements. Cette solvabilité dépend des engagements (provisions techniques) et des ressources dont dispose la société, notamment de ses fonds propres et des actifs qu'elle détient. Le bilan simplifié d'une compagnie d'assurance peut être synthétisé comme ceci :

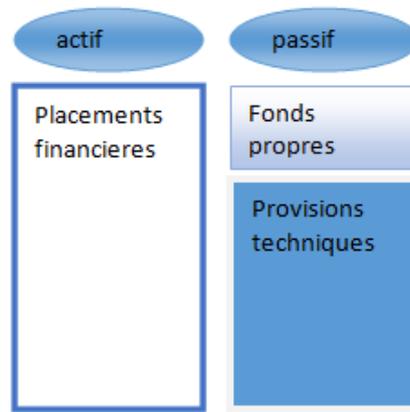


FIGURE 1.3 – Bilan simplifié d’une compagnie d’assurance, Source : Elaboré par nos soins

Les fonds propres d’un assureur représentent alors un matelas de sécurité pour les créanciers de l’entreprise en cas de choc important à l’actif ou sur le passif assurantiel (sinistralité exceptionnelle, catastrophes, etc.) en intervenant en supplément des provisions techniques si nécessaire. Ils garantissent aussi la bonne santé de la compagnie sur le long terme et sa stabilité financière. Dans le scénario défavorable où les fonds propres seraient insuffisants pour faire face à une perte annuelle, la compagnie serait alors en situation dite d’insolvabilité.

1.2.2 Les provisions techniques

Les provisions techniques constituent la part la plus importante du passif d’un organisme d’assurance. Dans le cadre d’une compagnie d’assurance non-vie, les provisions techniques sont classées dans trois principales catégories [15] .

Provision pour primes non Acquisées

La provision pour primes non acquises permet de couvrir, pour chacun des contrats, la part des primes émises au cours d’un exercice comptable qui doit être affectée à la période de l’exercice suivant comprise entre la date de clôture du bilan et la date d’échéance de ces contrats.

Les Provisions pour risques en Cours

c’est des provisions destinée à couvrir, pour l’ensemble des contrats en cours, la charge des sinistres et des frais afférents aux contrats, pour la part de ce coût qui n’est pas

couvert. Cette provision est établie dans le but de compenser une tarification insuffisante.

Provisions pour sinistres A Payer (PSAP)

La provision pour sinistre à payer correspond au montant estimé à un instant donné, des paiements restant à effectuer par la compagnie pour tous les sinistres survenus qui sont déjà déclarés.

La dénomination de PSAP est en fait utilisée le plus souvent abusivement comme étant liée au provisionnement (dossier à dossier) réalisé par les départements indemnisation, soit selon des méthodes forfaitaires, soit selon l'expérience de la société d'assurance. Dans le cas de cette dénomination, il convient d'évaluer les provisions manquantes, dites *Incurred But Not Reported (IBNR)*. Les IBNR correspondent ainsi au différentiel entre les PSAP et la sinistralité finale (ultime), et comportent eux-mêmes deux sous-composantes :

- Les *Incurred But Not Enough Reserved (IBNER)* : ces sinistres sont connus de l'assureur mais ont été sujets à une inexactitude lors de l'établissement des provisions.
- Les *Incurred But Not Yet Reported (IBNYR)* : ces sinistres n'ont pas été déclarés à l'assureur. Les provisions dossier/dossier concernant ce type de sinistres sont donc inexistantes, et il convient de les provisionner intégralement.

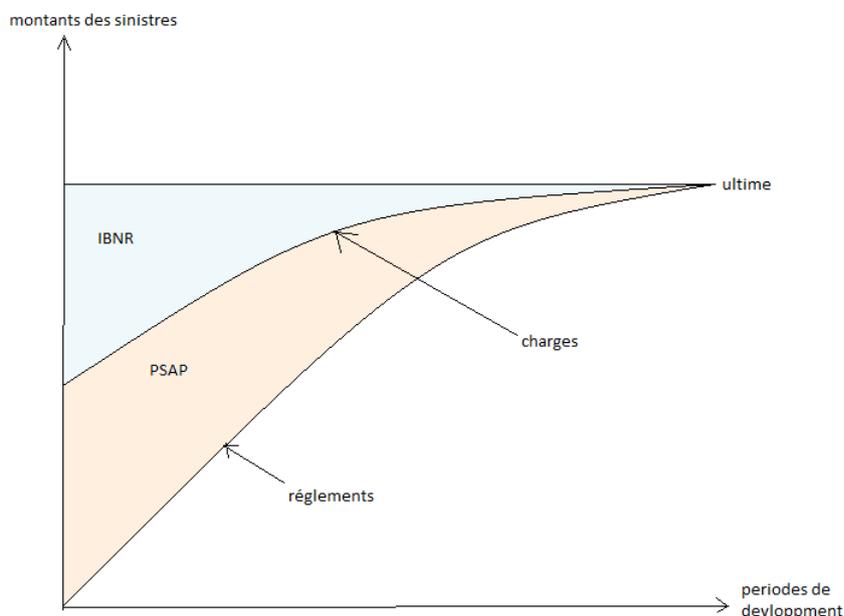


FIGURE 1.4 – l'évolution des termes définis précédemment pour une année de survenance, au cours des années de développement, Source : Elaboré par nos soins

Dans le cadre de ce mémoire nous limiterons nos études aux provision pour sinistres à payer (PSAP). Celles-ci représentent la part la plus importante des provisions techniques du bilan, soit près de 80%.

1.2.3 Sinistre

Charge sinistre

correspond aux montants d'indemnisations dus aux victimes ou aux assurés majorés des coûts externes liés aux dossiers (experts, avocats, . . .). Selon le contexte, on ne considère que les montants constitués dans les dossiers (règlements et provisions pour sinistre à payer)[8].

prime

Somme versée, périodiquement ou en une seule fois, par le souscripteur à l'assureur en échange de la prise en charge d'un risque. Dans notre mémoire, on s'intéresse à :

- **Prime acquise** : primes acquises à l'exercice de souscription, primes émises diminuées d'une dotation à la provision pour prime non acquise.
- **Prime non acquise** : Les primes non acquises correspondent à la fraction des primes émises ou des primes acquises et non émises qui concerne l'exercice suivant ou les exercices ultérieurs.
- **Prime émises** : montant total des primes (net de taxes) relatives aux contrats souscrits pendant l'exercice.

la cadence de règlement

c'est les nombres ou les volumes de sinistres à payer pour chaque exercice de survenance non encore totalement liquidé. c'est à dire le rythme des paiements exprimé en pourcentage de la charge finale de sinistres.

Loss Ratio

Le ratio de sinistres/primes est un ratio, calculé par les assureurs, qui met en rapport la charge ultime des sinistres divisés par le montant total des primes acquises [18].

Triangle

Ensemble des données agrégées de la charge totale des sinistres. Il s'agit d'une matrice (i, j) : les lignes i correspondent aux années de survenance et les colonnes j correspondent aux années de développement.

La vie d'un sinistre

L'activité de l'assurance consiste à couvrir un risque aléatoire moyennant une prime, La survenance du risque s'appelle un sinistre.

Trois notions de date sont importantes en matière de sinistre :

- la date à laquelle le sinistre a lieu : date de survenance.
- la date à laquelle il est déclaré : date de déclaration.
- les dates auxquelles les remboursements sont effectués : date de règlement.

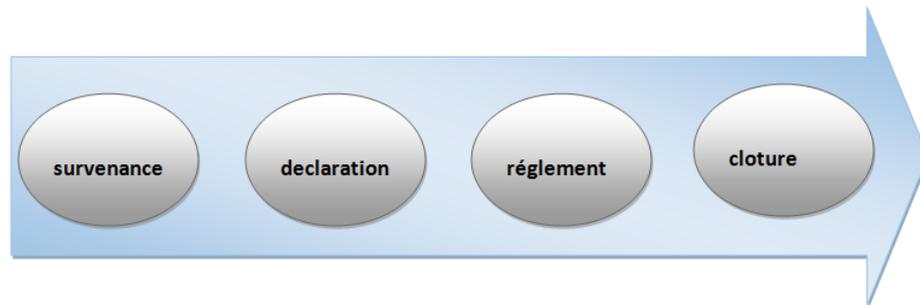


FIGURE 1.5 – la dynamique de la vie d'un sinistre, Source : Elaboré par nos soins.

Si un sinistre survient pendant la période de couverture, l'assuré le déclare à l'assureur qui effectue des remboursements. Le sinistre est clôturé une fois qu'il n'y a plus de règlements. Le montant de ces paiements est estimé par la compagnie d'assurance à partir de différents critères. mais cela ne concerne que les sinistres survenus et effectivement déclarés à la compagnie. La difficulté réside alors dans l'estimation des règlements au titre des sinistres survenus mais non encore déclarés à la compagnie à la date de l'inventaire, comme l'exige la réglementation. Les sinistres survenus après la date d'inventaire, qu'ils soient connus ou non, doivent également être sujets à une évaluation.

Ainsi, l'organisme assureur doit constituer des provisions afin d'honorer ses engagements envers les assurés et les bénéficiaires des contrats.

1.3 Notations générales

La majeure partie des méthodes actuarielles permettant l'estimation des réserves sinistres utilisent les données sous forme de triangles [13]. Les triangles de données (où le

trainage de liquidation) se présentent de la façon suivante :

i, j	1	...	j	...	n
1	$C_{1,1}$...	$C_{1,j}$...	$C_{1,n}$
...	
i	$C_{i,1}$...	$C_{i,j}$		
...			
n	$C_{n,1}$				

- n = nombre maximal d'années nécessaires pour clore un sinistre et le régler en totalité,
- i = indice des années de survenance des sinistres ($i = 1, \dots, n$),
- j = indice des années de développement ou de déroulement ($j = 1, \dots, n$),
- $i + j$ = l'année calendaire de paiement (pour les incréments),
- $S_{i,j}$ = représente l'incrément des années de survenance i et de développement j ,
- $C_{i,j}$ = montant cumulé des sinistres survenus l'année i et payés en j années de développement, c'est-à-dire entre l'année i et l'année $i + j$: $C_{i,j} = \sum_{k=1}^j S_{i,k}$.

Les triangles peuvent également contenir des données sinistres autres comme les ratios ($S/P...$), ou des primes P_i (afin de permettre l'estimation des primes finales et des primes à émettre).

Le calcul des provisions consiste alors à prévoir le montant final des sinistres afin de provisionner les paiements non encore effectué. Pratiquement, sous l'hypothèse que n est le temps maximal nécessaire pour clore une année, cela signifie qu'il s'agit de compléter la partie inférieur du triangle. On cherche alors les $\hat{S}_{i,j}$ et $\hat{C}_{i,j}$ pour $i + j \geq n + 2$ c'est-à-dire ceux sous la diagonale :

i, j	1	2	...	$n-1$	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,n-1}$	$\hat{C}_{2,n}$
...
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$...	$\hat{C}_{n-1,n-1}$	$\hat{C}_{n-1,n}$
n	$C_{n,1}$	$\hat{C}_{n,2}$...	$\hat{C}_{n,n-1}$	$\hat{C}_{n,n}$

Ayant estimé ces paiements futurs, le montant de provisions pour l'année de souscription i est alors donné par :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - \hat{C}_{i,n-i+1}$$

soit, un montant total de réserve nécessaire :

$$\hat{R} = \sum_i^n \hat{R}_i = \hat{R}_1 + \dots + \hat{R}_n$$

Finalement, on note par λ_j le facteur multiplicatif pour passer de la période j à la période suivante (le facteur de développement) calculé par la formule suivante :

$$\lambda_j = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

et par Z_j les cadences cumulées de règlement tel que :

$$Z_j = \frac{C_{i,j}}{C_{i,n}}, 1 < j < n - 1$$

Il existe une correspondance biunivoque entre les cadences (Z_1, \dots, Z_{n-1}) et les facteurs de développement $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, donnée par :

$$\lambda_j = \frac{Z_{j+1}}{Z_j}$$

d'où :

$$Z_j = \prod_{k=j}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k}$$

avec la convention

$$Z_n = 1$$

Après avoir vu dans ce chapitre quelques concepts sur les assurances et les éléments principaux des provisions techniques, sinistre..., on va consacrer le deuxième chapitre pour présenter quelques méthodes déterministes et stochastiques dans le calcul de montant de provision pour sinistre à payer.

2

L'évaluation des provisions

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les méthodes déterministes et stochastiques pour calculer le montant des provisions pour sinistre à payer. Généralement, elles proposent une vision à long terme, c'est-à-dire l'étude du développement des sinistres jusqu'aux sinistres ultimes. Les méthodes utilisées dans ce mémoire en déterministe sont les suivantes : Chain-Ladder, Bornhuetter-Ferguson, et en stochastique : T. Mack, Bornhuetter-Ferguson stochastique.

2.2 Méthodes déterministes

Les méthodes déterministes reposent sur l'hypothèse de stabilité du délai s'écoulant entre la survenance d'un sinistre et le(s) règlement(s), quel que soit l'exercice de survenance, en absence d'inflation, de changement de structure de portefeuille, des garanties des contrats, des franchises, et plus généralement de la gestion des sinistres. Si toutes ces hypothèses sont vérifiées sur une période suffisamment longue (au moins 5 ans), les méthodes déterministes peuvent être un premier outil intéressant pour prévoir la charge finale, en utilisant des cadences de règlement observées sur le passé.

2.2.1 Méthode Chain-Ladder

La méthode Chain-Ladder (CL) [9], est une méthode standard, couramment utilisée sur les marchés depuis les années 30 du fait de sa simplicité. Cette méthode est applicable à toute sorte de triangles (de dépenses, de charges, de nombre de sinistres). C'est la méthode déterministe la plus répandue et la plus connue.

Les coefficients de développement

Le principe de la méthode de Chain Ladder est de considérer que la cadence des paiements [11] dépend de coefficients de développement λ_j (également appelés link-ratios) qui dépendent uniquement de l'année de développement j . Cela revient à supposer que les $(C_{i,j})_{j=1,\dots,n}$ sont liés par le modèle suivant :

$$C_{i,j+1} = \lambda_j \times C_{i,j}, \text{ pour } i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n-1\}$$

Cette méthode de provisionnement (CL) suggère d'approcher ces link ratios par un estimateur sans biais $\hat{\lambda}_j$

Ce modèle repose sur deux hypothèses sous-jacentes :

- H1 : les années de survenances sont indépendantes,
- H2 : la cadence des règlements est régulière.

Sous ces deux hypothèses, les coefficients de développement sont estimés de la façon suivante :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}, \text{ pour } j \in \{1, \dots, n-1\}$$

Une fois les facteurs de développement calculés, les valeurs de la partie inférieure du triangle de liquidation peuvent être estimées de la façon suivante :

$$\hat{C}_{i,j} = (\hat{\lambda}_{n-i+1} \times \dots \times \hat{\lambda}_{j-1}) \times C_{i,n+1-i}, \text{ pour } i \in \{2, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}$$

En particulier, nous calculons alors les charges ultimes $\hat{C}_{i,n}$ pour chaque année de survenance i :

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i+1} \prod_{k=n-i+1}^{n-1} \hat{\lambda}_k, \text{ pour } i \in \{2, \dots, n\}$$

Les réserves de Chain-Ladder pour chaque année de survenance sont obtenus par la différence entre l'estimation du montant de la charge totale et le dernier montant connu :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}, \text{ pour } i \in \{2, \dots, n\}$$

Enfin, le montant total R de la provision se calcule :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$$

2.2.2 Méthode Bornhuetter-Ferguson

Présentation de la méthode

Bornhuetter-Ferguson (BF) (1972) ont introduit leur méthode pour estimer la réserve afin de faire face à une faiblesse de la méthode Chain Ladder, Cette méthode est dite de Loss ratio, Le Loss ratio est un taux de sinistralité : c'est la proportion entre le montant des sinistres et celui des primes encaissées. l'estimation de réserve BF évite la dépendance du montant de la charge ultime par la dernière position connue. sa particularité est d'estimer des charges ultimes a priori qu'on ne tra μ_i et les provisions en y intégrant une information exogène au triangle des paiements.

Tout d'abord, nous considérons cette faiblesse. La méthode de Chain Ladder utilise les facteurs de développement $\hat{\lambda}_j$ pour projeter le montant des réclamations courantes à ultime $\hat{C}_{i,n+1-i}$ et comme on a déjà vu la réserve CL :

$$\hat{R}_i^{CL} = C_{i,n-i+1}(\hat{\lambda}_{n+1-i} \times \dots \times \hat{\lambda}_{n-1} - 1)$$

Cela signifie que la réserve dépend fortement du montant actuel $C_{i,n-i+1}$ qui peut conduire à une réserve absurde $\hat{R}_i = 0$

L'estimation de réserve BF évite cette dépendance par rapport aux $C_{i,n-i+1}$ Les provisions pour chaque année de survenance i est :

$$\hat{R}_i^{BF} = (1 - \hat{Z}_{n-i+1})\hat{\mu}_i$$

où le terme $(1 - \hat{Z}_{n-i+1})$ représente le pourcentage des pertes qui seront encourues dans l'avenir.

L'estimateur BF pour la charge ultime $C_{i,n}$ est donnée par :

$$\hat{C}_{i,n}^{BF} = C_{i,n-i+1} + (1 - \hat{Z}_{n-i+1})\hat{\mu}_i$$

Où \hat{Z}_{n-i+1} est un estimateur a posteriori de Z_{n-i+1} et $\hat{\mu}_i$ est un estimateur a priori de la charge ultime espérée $E(C_{i,n})$.

L'estimateur proposé par Bornhuetter-Ferguson est obtenu simplement à partir de la méthode Chain Ladder, en posant :

$$\hat{Z}_j = \prod_{k=j}^{n-1} \frac{1}{\hat{\lambda}_k}$$

l'estimateur $\hat{\mu}_i$ est déterminée à partir d'un loss ratio (s/p)

$$\begin{cases} (s/p)_i = C_{i,n}/p_i, \\ \hat{\mu}_i = \hat{q}_i p_i. \end{cases}$$

où :

- $C_{i,n}$ est la charge ultime
- p_i les primes acquises
- \hat{q}_i est un estimateur a priori du loss ratio ultime (ULR)

La détermination de ratio \hat{q}_i est le travail le plus délicat à effectuer du fait qu'il n'existe pas de méthode bien définie pour déterminer ces ratios. Nous avons donc utilisé la procédure proposée par Mack [20] pour estimer le loss ratio a priori \hat{q}_i donné par :

$$\hat{q}_i = (\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_n)r_i$$

tel que :

$$\begin{cases} \hat{m}_j = \sum_{i=1}^{n+1-i} S_{i,j} / \sum_{i=1}^{n+1-i} P_i, \\ r_i = \sum_{j=1}^{n+1-i} \frac{\hat{m}_j S_{i,j}/P_i}{\sum_k \hat{m}_k} = \frac{C_{i,n-i+1}/P_i}{\sum_{j=1}^{n+1-i} \hat{m}_j}. \end{cases}$$

où :

- \hat{m}_j est la moyenne incrémentale du loss ratio
- r_i est l'indice du loss ratio.

2.2.3 Comparaison de ces deux méthodes

La méthode de Bornhuetter-Ferguson ayant été développée plus récemment que la méthode Chain-Ladder, nous pourrions supposer a priori qu'elle est plus performante. Néanmoins, ces méthodes ont chacune leurs avantages et inconvénients.

Avantages Chain-Ladder :

La méthode standard de Chain Ladder présente l'avantage d'être simple à appliquer et à comprendre, les paramètres utilisés sont facilement estimables et interprétables. Elle sert également de base aux méthodes stochastiques d'estimation des provisions techniques.

Inconvénients Chain-Ladder :

Le premier inconvénient de cette méthode est qu'elle ne fait aucune hypothèse sur la loi suivie par les coûts et les fréquences des sinistres, et elle ne fournit donc pas une estimation robuste du montant des provisions. De plus, comme toutes les méthodes déterministes, elle ne permet pas d'évaluer la précision de l'estimation obtenue.

La sensibilité de la méthode aux dernières années de développement est un autre inconvénient. En effet, tout d'abord, les derniers coefficients se calculent à l'aide de peu d'années d'observations (notamment une seule année pour $\hat{\lambda}_{n-1} = \frac{C_{1,n}}{C_{1,n-1}}$),

l'incertitude de l'estimation est donc non négligeable. Et ensuite, les montants des dernières colonnes sont ceux dont l'estimation s'effectue avec le maximum de coefficients de développement (par exemple : $\hat{C}_{n,n} = \hat{\lambda}_1 \times \dots \times \hat{\lambda}_{n-1} \times C_{n,1}$ se calcule grâce à $n - 1$ coefficients), l'incertitude de l'estimation est donc démultipliée.

En outre, cette méthode ne peut s'appliquer que si la cadence de règlements reste globalement la même d'une année sur l'autre. Elle ne peut donc pas être mise en oeuvre en cas de changement au niveau de la réglementation ou au niveau de la gestion des sinistres par l'entreprise susceptible de modifier le schéma habituel de déroulement des sinistres.

Avantages Bornhuetter-Ferguson :

Un des avantages de la méthode Bornhuetter-Ferguson est qu'en plus d'utiliser le triangle de paiements, elle incorpore une information exogène appelée avis d'expert pour estimer la charge ultime des sinistres d'une année d'incidence donnée. En effet, elle se base sur une combinaison des méthodes du Loss Ratio (méthode selon laquelle nous supposons connaître le rapport du coût des sinistres sur la prime ultime) et de Chain-Ladder. Un autre avantage de ne pas dépendre du dernier montant observé est qu'il n'est pas nécessaire d'avoir un triangle contenant beaucoup d'années pour obtenir de bonnes provisions.

Inconvénients Bornhuetter-Ferguson :

La détermination du Loss ratio est fortement subjective et dépend beaucoup de l'expert. Si ce Loss ratio est mal estimé, nous courrons ainsi le risque d'estimer une charge ultime des sinistres fortement biaisée étant donné qu'elle dépend fortement de ce ratio. La méthode ne garantit donc pas une stabilité du résultat année après année.

Conclusion :

Pour conclure, toutes ces méthodes déterministes permettent d'estimer les réserves des sinistres. Elles sont relativement simples à utiliser, mais présentent l'inconvénient d'être très sensibles à des variations dans les données observées. Pour mesurer cette incertitude de provisionnement, nous allons donc avoir recours aux méthodes stochastiques de provisionnement pour calculer les réserves.

2.3 Méthodes stochastiques

Dans une optique de gestion des risques, il peut être plus judicieux d'utiliser des méthodes stochastiques qui permettent de quantifier le risque d'estimation des provisions (l'erreur associée à cette réserve). Deux méthodes stochastiques sont plus particu-

lièrement connues en assurance non-vie : la méthode de Mack et celle du Bornhuetter-Ferguson Stochastique.

2.3.1 Méthode de Mack

Thomas Mack a proposé une méthode non paramétrique qui correspond à la version stochastique de la méthode de Chain Ladder. Elle fournit une estimation de la moyenne et de l'écart-type pour l'estimateur \hat{R} de la variable aléatoire R qui représente la provision technique à constituer.

Hypothèses du modèle

Ce modèle repose sur les hypothèses suivantes :

(H1) : Les années de survenance des sinistres sont indépendantes les unes des autres.

(H2) : L'hypothèse basique de Chain-Ladder est qu'il existe des facteurs de développement $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tel que pour $i = 1, \dots, n$ on a :

$$E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \lambda_j C_{i,j}$$

Sous ces deux hypothèses, Mack a montré que le modèle stochastique fournit exactement les mêmes réserves que la méthode standard de Chain-Ladder.

Rappelons que la méthode Chain-Ladder consiste à estimer :

– les λ_j par :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}, \text{ pour } j \in \{1, \dots, n-1\}$$

– Le montant de la charge ultime $C_{i,n}$ par :

$$\hat{C}_{i,j} = (\hat{\lambda}_{n-i+1} \times \dots \times \hat{\lambda}_{j-1}) C_{i,n+1-i}$$

– Et la réserve R_i par :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}$$

(H3) : Mack a produit des estimateurs des paramètres inconnus $\sigma_j^2, 1 \leq j \leq n-1$. en formulant d'autre hypothèse, c'est l'hypothèse de la volatilité interne du triangle pour l'année de développement j , nous avons alors :

$$VaR(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}.$$

Comme le note Mack (1993), cette méthode repose sur trois hypothèses fondamentales. Si ces trois hypothèses ne sont pas vérifiées, le modèle n'est pas alors valide. Différentes approches qui ont été proposées par Mack permettent de vérifier empiriquement la validité de (H1), (H2) et (H3).

L'hypothèse (H1) suppose l'indépendance entre différentes années de survenance. Cette hypothèse peut en effet ne pas être vérifiée. Dans la pratique, l'indépendance des années de survenance peut être déformée par certains effets comme :

- changement dans l'organisation de l'équipe de gestion des sinistres, qui peut par exemple payer plus rapidement.
- facteur d'inflation (qui certes n'intervient pas de façon calendaire, par ligne, mais plutôt par diagonale, mais qui rendra les vecteurs non indépendants).

L'hypothèse (H2) se traduit quant à elle par le fait que à j donné, les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ doivent être sensiblement alignés sur une droite de pente $\hat{\lambda}_j$ passant par l'origine.

De façon similaire, il est possible de donner une interprétation graphique à l'hypothèse (H3) : à j fixé, les points $(C_{i,j}, \hat{r}_{i,j}^{Mack})$ où :

$$\hat{r}_{i,j}^{Mack} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

correspond aux résidus d'une estimation par la méthode des moindres carrés, doivent être non structurés, c'est-à-dire, ne présentent pas une tendance spécifique. Une fois les hypothèses validées, nous sommes alors en mesure d'énoncer le résultat suivant.

L'erreur de prédiction

Tout d'abord, Thomas Mack a commencé dans son modèle à calculer la variance estimée σ_j^2 associée aux estimations des facteurs de développement $\hat{\lambda}_j$. il montre également qu'une moyenne pondérée est préférable, car elle présente une variance plus faible, cette dernière est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \lambda_j \right)^2, j = 1, \dots, n-2$$

La valeur de σ_j^2 pour $j = n-1$ est donnée par :

$$\sigma_{n-1}^2 = \sigma_{n-1}^2 = \min \left\{ \frac{\sigma_{n-2}^4}{\sigma_{n-3}^2}, \min(\sigma_{n-3}^2, \sigma_{n-2}^2) \right\}$$

L'erreur quadratique moyenne $msep(\hat{C}_{i,n})$ où (Mean Square Error of Prediction) de l'estimateur $\hat{C}_{i,n}$ est définie comme étant

$$msep(\hat{C}_{i,n}) = E((\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 | D)$$

Où $D = \{C_{i,j}, i + j \leq n\}$ est l'ensemble de toutes les données observées. Dans la pratique, nous nous intéressons à l'avantage de l'erreur quadratique moyenne conditionnelle à la quantité estimée particulière $\hat{C}_{i,n}$ en fonction de l'ensemble de données spécifiques D observé et donc à utiliser $E((\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 | D)$ qui nous donne l'écart moyen entre $\hat{C}_{i,n}$ et $C_{i,n}$. Nous voyons cela

$$msep(\hat{R}_{i,n}) = E((\hat{R}_{i,n} - R_{i,n})^2|D) = E((\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2|D) = msep(\hat{C}_{i,n})$$

Ensuite, en raison de la règle générale :

$$msep(\hat{C}_{i,n}) = \underbrace{Var(C_{i,n}|D)}_1 + \underbrace{(E(C_{i,n}|D) - \hat{C}_{i,n})^2}_2$$

- Le premier terme de la somme est défini comme la variance du processus, c'est-à-dire la variabilité autour de la moyenne, due au processus stochastique. Cette erreur ne peut donc pas être supprimée.
- Le second terme de la somme est l'erreur d'estimation. Elle provient de l'incertitude de l'estimation que l'on fait des paramètres servant à déterminer $\hat{C}_{i,n}$, En général celle-ci devrait diminuer avec l'augmentation de l'information disponible.

Ce qui montre que l'erreur quadratique moyenne est la somme de l'erreur stochastique (variance du processus) et de l'erreur d'estimation. En vertu des hypothèses (1), (2) et (3), l'erreur quadratique moyenne $msep(\hat{R}_{i,n})$ peut être estimée par :

$$m\hat{sep}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j^2}{\hat{\lambda}^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right).$$

Où $\hat{C}_{i,j}$ correspondent aux valeurs estimées du triangle inférieur et $\hat{C}_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1}$. De plus, on peut estimer l'erreur quadratique moyenne de l'estimation de réserve globale \hat{R} grâce à la seconde formule de T. Mack :

$$m\hat{sep}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left\{ m\hat{sep}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{k,n} \right) \left(\sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2 / \hat{\lambda}^2}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \right) \right\}.$$

Cette méthode est la plus connue parmi toutes les méthodes stochastiques. Elle est basée sur la méthode de Chain-Ladder et permet d'obtenir l'incertitude associée à l'estimation des provisions pour sinistre à payer. Cette méthode permet seulement de connaître les moments d'ordre 1 et 2, mais ne permet pas de connaître la distribution suivie par les provisions. Mais on peut supposer une distribution suivie par les provisions (loi normale ou log-normale) et utiliser les paramètres fournis par Mack (moyenne et variance) pour estimer ces grandeurs.

2.3.2 Méthode de Bornhuetter-Ferguson Stochastique

Il existe différents modèles de la méthode de Bornhuetter-Ferguson Stochastique pour déterminer l'erreur de prédiction, nous choisirons une méthode proposée par Mack, introduite dans le document The Prediction Error of Bornhuetter-Ferguson (2008).

Le modèle de Mack

Nous travaillons donc avec le modèle suivant pour les incréments de paiement $S_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$:

- (BF1) Les incréments $S_{i,j}$ sont indépendants.
- (BF2) Il existe des paramètres inconnus x_i, y_j tels que : $E(S_{i,j}) = x_i y_j$ avec,

$$\begin{cases} x_i = E(\mu_i), 1 \leq i \leq n \\ \sum_{j=1}^{n+1} y_j = 1 \end{cases}$$
- (BF3) Il existe des constantes inconnues de proportionnalité S_j^2 avec,

$$Var(S_{i,j}) = x_i S_j^2$$

$$E(R_i) = x_i(y_{n+2-i} + \dots + y_{n+1}) = x_i(1 - Z_{n+1-i}) \text{ avec } Z_j : y_1 + \dots + y_j$$

$$Var(R_i) = x_i(S_{n+2-i}^2 + \dots + S_{n+1}^2) \quad (1)$$

ce qui prouve que la provision pour sinistres à payer prévue a la même forme comme l'évaluation de la réserve de BF. L'estimation des paramètres dans le modèle de Mack doit prendre en compte la queue de développement. C'est pourquoi les années de développement j appartiennent à l'intervalle $[1, n+1]$ dans notre modèle. Le facteur de queue de développement est alors estimé pour prolonger le développement des sinistres et ainsi éviter que les charges ultimes soient sous-estimées.

Pour la suite du raisonnement, nous notons qu'avec x_1, \dots, x_n connu,

$$\begin{cases} \hat{y}_j = \sum_{i=1}^{n+1-j} S_{i,j} / \sum_{i=1}^{n+1-j} x_{i,j}, 1 \leq j \leq n \\ \hat{S}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n+1-j} (S_{i,j} - x_i \hat{y}_j)^2 / x_i, 1 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

des meilleures estimations sans biais respectivement de $y_j, 1 \leq j \leq n$, et de $S_j^2, 1 \leq j \leq n-1$

Dans son article, Mack propose $\hat{\mu}_i$ comme un estimateur de x_i , Par la suite, l'actuaire devra déterminer \hat{y}_j^* et \hat{S}_j^* pour $1 \leq j \leq n+1$ à partir des méthodes de régression et de lissage des données. En ce qui concerne les estimations des cadences des règlements non cumulés, nous vérifierons en plus $\sum_{j=1}^{n+1} \hat{y}_j^* = 1$.

L'ajustement et l'extrapolation de ces paramètres nous permettent alors d'obtenir une estimation de la provision Bornhuetter-Ferguson :

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{\mu}_i(\hat{y}_{n+2-i}^* + \dots + \hat{y}_{n+1}^*) = \hat{\mu}_i(1 - \hat{Z}_{n+1-i}^*) \text{ avec } \hat{Z}_j^* = \hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_j^*.$$

L'erreur de prédiction

Comme on s'intéresse à la variabilité future seulement, compte tenu des données observées jusqu'à présent, l'erreur quadratique moyenne de prédiction de toute estimation de réserve (\hat{R}_i) est définie comme étant :

$$MSEP(\hat{R}_i) = E[(\hat{R}_i - R_i)^2 | S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}]$$

Selon (BF1), $R_i = S_{i,n+2-i} + \dots + S_{i,n+1}$ est indépendant de $S_{i,1} + \dots + S_{i,n+1-i}$. De plus, l'estimation de la réserve de BF (\hat{R}_i^{BF}) peut être considérée indépendante de $S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}$, plus précisément, R_i et \hat{R}_i^{BF} sont considérés comme étant communément indépendants de $S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} MSEP(\hat{R}_i^{BF}) &= E[(\hat{R}_i^{BF} - R_i)^2] \\ &= Var[(\hat{R}_i^{BF} - R_i)] + [(E(\hat{R}_i^{BF}) - E(R_i))^2] \\ &= Var[(\hat{R}_i^{BF})] + Var[(R_i)] \end{aligned}$$

donc l'erreur quadratique moyenne de la prédiction est la somme de l'erreur d'estimation $Var[(\hat{R}_i^{BF})]$ et de l'erreur de processus $Var[(R_i)]$. L'erreur de processus (1) est estimée simplement par :

$$\hat{V}ar(R_i) = \hat{\mu}_i(\hat{S}_{n+2-i}^{2*} + \dots + \hat{S}_{n+1}^{2*})$$

En revanche, déterminer l'erreur d'estimation est un peu plus compliqué. En effet, pour commencer nous devons d'abord calculer l'incertitude des ultimes a priori $\hat{\mu}_i$:

$$(SE(\hat{\mu}_i))^2 = \frac{p_i}{n-1} \sum_{j=1}^n p_j \left(\frac{\hat{\mu}_j}{p_j} - \hat{q} \right)^2, \text{ avec } \hat{q} = \sum_{j=1}^n \hat{\mu}_j / \sum_{j=1}^n p_j \quad (2)$$

sous l'hypothèse de non corrélation des ($\hat{\mu}_i$), Or dans la pratique, il est très rare que cette hypothèse soit vérifiée et les ($\hat{\mu}_i$) en remplaçant le terme $n - 1$ de (2) par $n - \sqrt{n}$ pour un coefficient de corrélation constant $\rho_{i,j}^\mu = 1/\sqrt{n}$ entre ($\hat{\mu}_i$) et ($\hat{\mu}_j$) ou avec (approximativement), $n - \sqrt{2n}$ pour un coefficient de corrélation décroissant $\rho_{i,j}^\mu = 1/(1 + |i - j|)$.

Ensuite, il nous faudra estimer l'erreur sur les cadences des règlements incrémentaux \hat{y}_j^* puisque

$$Var(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*) = Var(\hat{z}_{n+1-i}^*) = Var(\hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_{n+1-i}^*) = Var(\hat{y}_{n+2-i}^* + \dots + \hat{y}_{n+1}^*)$$

Nous estimons ainsi $Var(\hat{y}_j^*)$ par :

$$(SE(\hat{y}_j^*))^2 = \frac{\hat{S}_j^{2*}}{\sum_{k=1}^{n+1-j} \hat{\mu}_k}, \quad 1 \leq j \leq n$$

Il en découlera alors l'erreur d'estimation des \hat{z}_j^* :

$$\begin{cases} (SE(\hat{z}_j^*))^2 &= \min((SE(\hat{y}_1^*))^2 + \dots + (SE(\hat{y}_j^*))^2, (SE(\hat{y}_{j+1}^*))^2 + \dots + (SE(\hat{y}_{n+1}^*))^2) \\ (SE(\hat{z}_{n+1}^*))^2 &= SE(1) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons finalement l'estimateur suivant pour l'erreur quadratique moyenne de la prédiction :

$$MSEP(\hat{R}_i^{BF}) = \underbrace{\hat{\mu}_i(\hat{S}_{n+2-i}^{2*} + \dots + \hat{S}_{n+1}^{2*})}_1 + \underbrace{((SE(\hat{\mu}_i))^2 + \hat{\mu}_i^2)(SE(\hat{z}_{n+1-i}^*))^2 + (SE(\hat{\mu}_i))^2(1 - \hat{Z}_{n+1-i}^*)}_2.$$

– 1 : Erreur de processus,
– 2 : Erreur d'estimation.

Pour la réserve globale R nous avons l'estimation $\hat{R}^{BF} = \hat{R}_1^{BF} + \dots + \hat{R}_n^{BF}$ son erreur quadratique moyenne de prédiction est :

$$MSEP(\hat{R}^{BF}) = Var[(\hat{R}^{BF})] + Var[(R)]$$

Pour l'erreur de processus nous avons $Var(R) = Var(R_1) + \dots + Var(R_n)$ en raison de l'indépendance des années de survie (BF1) et ainsi obtenir l'estimation :

$$Var(R) = \sum_{i=1}^n \hat{\mu}_i(\hat{S}_{n+2-i}^{2*} + \dots + \hat{S}_{n+1}^{2*}).$$

L'erreur d'estimation $Var(\hat{R}^{BF})$ est donnée par :

$$Var(\hat{R}^{BF}) = \sum_{i=1}^n Var(\hat{R}_i^{BF}) + 2 \sum_{i < j} Cov(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}).$$

La covariance étant donnée par la formule suivante :

$$Cov(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}) = \rho_{i,j}^\mu \sqrt{Var(\hat{\mu}_i)Var(\hat{\mu}_j)} E(1 - \hat{Z}_{n+1-i}^*) E(1 - \hat{Z}_{n+1-j}^*) + \rho_{i,j}^z \sqrt{Var(\hat{Z}_{n+1-i}^*)Var(\hat{Z}_{n+1-j}^*)} E(\hat{\mu}_i) E(\hat{\mu}_j)$$

Avec les coefficients de corrélation

$$\begin{cases} \rho_{i,j}^z = Cov(1 - \hat{Z}_{n+1-i}^*, 1 - \hat{Z}_{n+1-j}^*) / \sqrt{Var(\hat{Z}_{n+1-i}^*)Var(\hat{Z}_{n+1-j}^*)} \\ \rho_{i,j}^\mu = Cov(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j) / \sqrt{Var(\hat{\mu}_i)Var(\hat{\mu}_j)} \end{cases}$$

Ainsi, nous n'avons qu'à estimer ces coefficients de corrélation car nous avons des évaluations pour toutes les autres limites. Finalement nous obtenons :

$$(SE(\hat{R}^{BF}))^2 = \sum_{i=1}^n (SE(\hat{R}_i^{BF}))^2 + 2 \sum_{i < j} Cov(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF})$$

avec,

$$\begin{aligned} \hat{Cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}) = & \hat{\rho}_{i,j}^{\mu} \sqrt{Var(\hat{\mu}_i)Var(\hat{\mu}_j)(1 - \hat{Z}_{n+1-i}^*)(1 - \hat{Z}_{n+1-j}^*)} + \\ & \hat{\rho}_{i,j}^z \sqrt{Var(\hat{Z}_{n+1-i}^*)Var(\hat{Z}_{n+1-j}^*)} \hat{\mu}_i \hat{\mu}_j \end{aligned}$$

L'avantage de ce modèle réside dans la grande liberté laissée à l'actuaire pour déterminer les paramètres. Il pourra ainsi les ajuster selon la branche considérée.

2.3.3 Comparaison de ces deux méthodes

Avantages Mack

- Mêmes résultats que Chain-Ladder,
- permet d'obtenir l'incertitude associé.

Inconvénients Mack

- Hypothèses fortes,
- Sensibilités fortes des estimations des provisions.

Avantages Bornhuetter-Ferguson stochastique

- Evite la dépendance sur le montant de la perte courante $C_{i,n-i+1}$.

Inconvénients Bornhuetter-Ferguson stochastique

- Besoin de données exogènes.

2.3.4 Intervalles de confiance autour des provisions estimées

L'idée dans cette partie est de pouvoir construire des intervalles de confiance des réserves estimées [5]. Sous des hypothèses portant sur le choix d'une distribution "prédicive" conditionnelle pour la réserve totale R , T. MACK construit des intervalles de prédiction pour la provision. On peut cependant noter le caractère arbitraire d'un tel choix, à l'opposé du caractère non paramétrique de cette approche.

Les paramètres de la distribution retenue (à deux paramètres) seront déterminés par égalité de ses premiers moments aux estimations des moyenne et écart-type conditionnels de R soit $E(R) = \hat{R}$ et $sep(\hat{R})$.

choix 1 : Les provisions suivent une loi Normale $N(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = \hat{R}$ et $\sigma = sep(\hat{R})$, un intervalle (symétrique) de prédiction à 95% conditionnel pour R est :

$$[\hat{R} - 1.96sep(\hat{R}); \hat{R} + 1.96sep(\hat{R})]$$

où 1.96 est le quantile d'ordre de la loi Normale standard Pour un niveau de confiance de 95%.

Cependant, il est possible de remettre en cause l'utilisation de la loi normale, étant donné la symétrie de sa distribution qui ne semble pas se vérifier en pratique et la possibilité d'obtenir une borne inférieure négative en dépit du fait que le montant de provision espéré ne peut être négatif.

choix 2 : Les provisions suivent une loi Log-Normale $LogN(\mu, \sigma^2)$ pour laquelle $\ln R$ suit la loi Normale $N(\mu, \sigma^2)$, (μ, σ^2) est déterminé par le système :

$$\exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}) = \hat{R}, \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1) = (sep(\hat{R}))^2$$

d'où il résulte : $\sigma^2 = \ln\{1 + \frac{(sep(\hat{R}))^2}{\hat{R}^2}\}$, $\mu = \ln\hat{R} - \frac{\sigma^2}{2}$

L'intervalle de prédiction pour R est :

$$[\exp(\mu - 1.96\sigma); \exp(\mu + 1.96\sigma)]$$

Equivalent à :

$$[\hat{R}\exp(\frac{-\sigma^2}{2} - 1.96\sigma); \hat{R}\exp(\frac{-\sigma^2}{2} + 1.96\sigma)]$$

3

Application des méthodes de provisions sur des données réelles

3.1 Présentation de l'organisme d'accueil

Notre projet s'est déroulé au sein de la compagnie algérienne d'assurances et de réassurance (CAAR), elle a été créée au lendemain de l'indépendance en 1963 en tant que Caisse d'Assurance et de Réassurance. Elle était chargée de la cession légale dans le but de permettre à l'Etat Algérien de contrôler le marché des assurances. Elle a connu un développement plus remarquable depuis 2005, grâce à la mise en place d'une stratégie de croissance, sur le moyen et long terme, fondée sur une gestion adaptée aux exigences. Elle a relevé son chiffre d'affaires à 15,08 milliards de dinars en 2016.

Historique

Depuis sa création, il y a plus de cinquante ans, la CAAR a eu à assumer de multiples missions qui se résument, entre autres : Le passage à l'autonomie des entreprises publiques ainsi que l'ensemble des réformes économiques menées depuis n'ont pas manqué d'avoir des répercussions sur le secteur des assurances parmi lesquelles il y a lieu de citer notamment :

- La levée de la spécialisation, avec comme implication directe, une concurrence entre les différents opérateurs.
- Le désengagement de l'Etat sur la gestion des entreprises publiques avec tous les aspects liés à l'autonomie de l'entreprise.

- La libération de l'activité et les opportunités offertes au secteur privé d'exercer dans le secteur des assurances.

La CAAR conformément à l'agrément obtenu du Ministère des Finances, a été habilitée à pratiquer toutes les opérations d'assurance y compris la réassurance.

En 2011, le secteur algérien des assurances connaît une nouvelle phase de son développement avec la loi 06-04 qui avait donné un délai de cinq ans pour séparer les assurances de personnes à des assurances dommages : c'est ainsi que CAARAMA assurances voit le jour. Dotée d'un capital d'un milliard de dinars, la filiale a été agréée le 09 mars 2011.

Aujourd'hui, et en dépit de la concurrence et des aléas du marché, la CAAR a pu non seulement maintenir son statut de leader du risque industriel mais également augmenter sa part du marché, grâce à une répartition étudiée de son portefeuille : en effet, sa part de marché passe de 11% en 2004 pour atteindre 16% en 2012.

La CAAR se situe, en termes de chiffre d'affaires à la deuxième place et à la première place en termes de résultats.

la Compagnie compte bien poursuivre sa politique de développement afin de marquer d'un sceau d'or son apport dans l'évolution du secteur des assurances du pays ainsi que de son économie.

Effectif de la compagnie

La Compagnie Algérienne d'Assurance et de Réassurance (CAAR), compte en 2016, 1838 employés et 189 agences dont 134 agences agréés (directs et indirects) et 55 points de vente au titre de la bancassurance avec le Crédit Populaire d'Algérie (CPA) et la Banque Nationale d'Algérie (BNA). La CAAR propose des produits d'assurances variés et adaptés aussi bien aux entreprises qu'aux particuliers, en conjuguant les efforts pour un service de qualité à la hauteur de la réputation acquise auprès de ses différents partenaires.

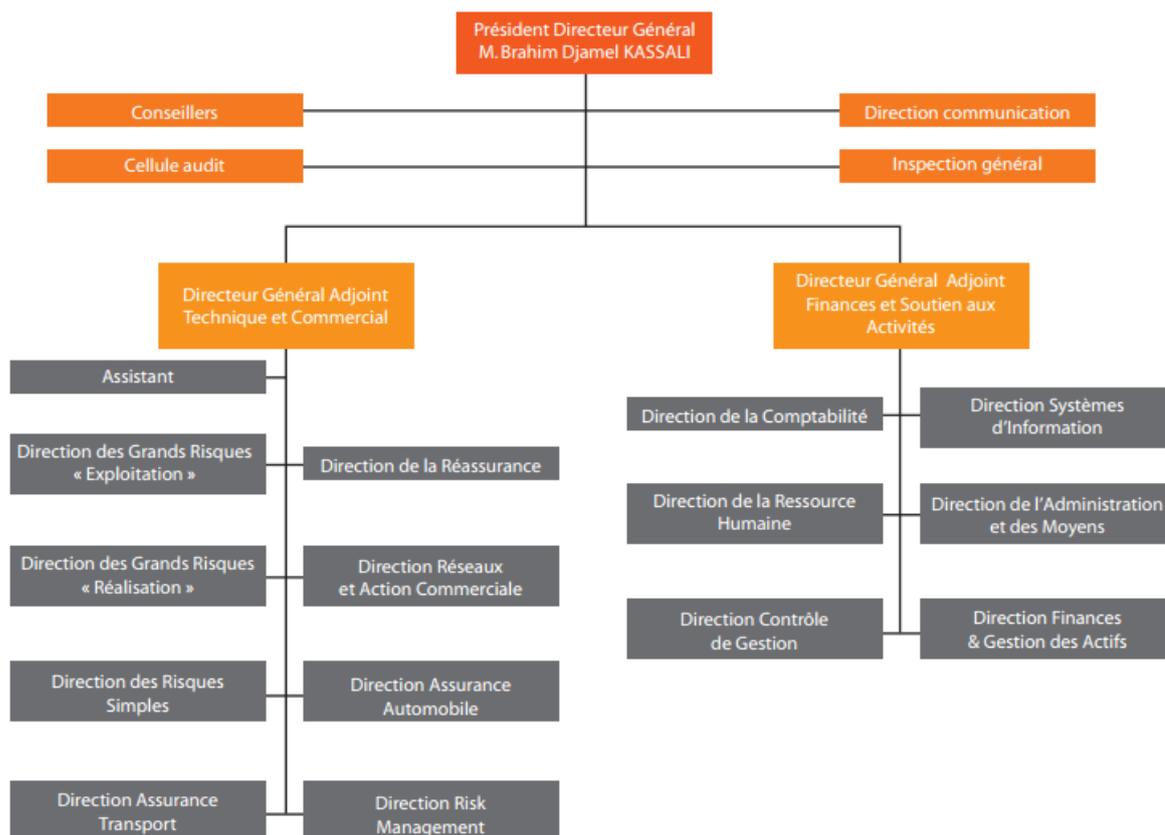


FIGURE 3.1 – Organigramme de la compagnie.

Activité de la compagnie

La compagnie commercialise une panoplie de produits à savoir :

- Assurances automobiles : Responsabilité civile et dommages automobiles et assistance.
- Assurance risques divers : Incendie, explosions et risques annexes, dégâts des eaux, vol des marchandises, vol en coffre, vol sur la personne, bris des glaces, responsabilité civile générale, multirisques habitation, multirisques professionnelles des artisans, commerçants et professions libérales.
- Assurances des risques industriels : Incendie, explosion et risques annexes, bris de machines, responsabilité civiles des produits livrés, marchandises en entrepôt frigorifique, pertes d'exploitation après incendie et bris de machines, multirisque des entreprises industrielles et commerciales, tous risques informatiques.
- Assurances des risques engineering et construction : Responsabilité civile professionnelle des architectes et entrepreneurs, tous risques chantiers, tous risques engins de chantier, tous risques montage, responsabilité civile décennale.
- Assurances de transport (maritime, terrestre, ferroviaire, arien) : Assurance facultés, assurances corps de navire, de pêche et autres. Assurances des catastrophes

naturelles.

En plus il y a les assurances de personnes qui sont gérées par CAARAMA assurances filiale de la compagnie spécialisée en produits et services d'assurances de personnes.

3.2 Outils

Les principaux outils informatiques utilisés dans ce mémoire sont :

- Excel (graphes).
- Le logiciel statistique : R.

Notre outil principal sera plus particulièrement R, et cela revient à sa puissance et ses fonctionnalités diverses, il nous a permis d'effectuer tous types de calculs sur un volume de données important et surtout d'élaborer des codes nécessaires pour l'estimation des provisions par les méthodes étudiées.

3.3 Description de l'application

Nous avons utilisés les données relatives à une sélection du portefeuille automobile d'une compagnie algérienne d'assurances et de réassurance couvrant la période de 2012 jusqu'à 2017, il s'agit de deux catégories : Dommages-particuliers et Dommages-flottes.

Dommages-particuliers

Concernant un contrat qui contient un seul véhicule.

Dommages-flottes

Une « flotte » est un ensemble de véhicules appartenant à un même propriétaire, ou assurés par une même entité (Entreprise). Elle peut couvrir différents types de véhicules (automobiles, autres véhicules de transport public de marchandises ou de personnes, engins de chantiers, cyclos et motos...).

3.3.1 Les triangles de liquidation :

On présente tout d'abord les triangles des règlements incrémentaux et cumulés de la branche automobile, catégorie : Dommages-particuliers (DP)

années	primes	1	2	3	4	5	6
2012	45549566	40209423	23377874	3087588	1323985	1680855	3124631
2013	40543334	34896475	19201502	4689520	3461990	4369470	
2014	38032659	29141513	22306454	4533344	1770325		
2015	39786441	24101059	21559849	2618142			
2016	48962547	25815508	13142442				
2017	43930249	26851381					

TABLE 3.1 – Le triangle des règlements incrémentaux.

années	primes	1	2	3	4	5	6
2012	45549566	40209423	63587297	66674885	67998870	69679725	72804356
2013	40543334	34896475	54097977	58787497	62249487	66618957	
2014	38032659	29141513	51447967	55981311	57751636		
2015	39786441	24101059	45660908	48279050			
2016	48962547	25815508	38957950				
2017	43930249	26851381					

TABLE 3.2 – Le triangle des règlements cumulés

À partir des données de tableau des règlements incrémentaux, nous établissons le graphique suivant, représentant l'évolution des paiements des sinistres au cours des années d'origine.



FIGURE 3.2 – L'évaluation des paiements des sinistres.

D'après le graphique précédant, nous remarquons que les courbes de paiements ont un caractère dégressif à partir de la 1^{re} année de développement, ce qui s'explique par la politique de la compagnie qui préfère régler la plus grande partie des indemnités pendant la première année qui suit la date de déclaration d'un sinistre. sachant que les trois premières années la compagnie fait des règlements importants.

3.3.2 Application numérique

Les méthodes déterministes

Chain-Ladder (CL)

Résultats obtenus : A partir de triangle des règlements cumulés, On commence par estimer les facteurs de développements, en appliquant le **Code 1.1** nous obtenons les valeurs suivantes :

fact.de développement	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$
DP	1.645988	1.069502	1.036134	1.046452	1.044843

TABLE 3.3 – Facteurs de développement.

À partir du tableau précédent, nous observons une décroissance des facteurs de développement au cours du temps. En effet, la majorité des assurés sera en règle générale dédommagée les premières années, et la figure suivante confirme cette hypothèse.

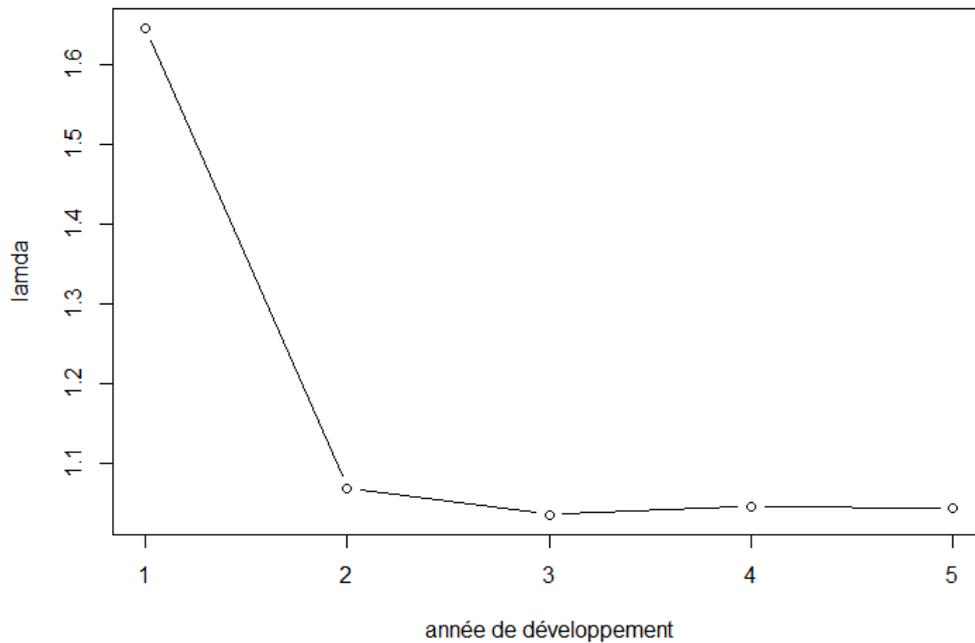


FIGURE 3.3 – Les facteurs de développement.

Triangle de la charge totale complété : les facteurs de développement nous permettent ensuite de compléter la partie inférieure du triangle des règlements cumulés, en appliquant le **Code 1.2** :

i, j	1	2	3	4	5	6
2012	40209423	63587297	66674885	67998870	69679725	72804356
2013	34896475	54097977	58787497	62249487	66618957	69606335
2014	29141513	51447967	55981311	57751636	60434328	63144369
2015	24101059	45660908	48279050	50023569	52347275	54694671
2016	25815508	38957950	41665600	43171148	45176544	47202384
2017	26851381	44197058	47268836	48976852	51251935	53550213

TABLE 3.4 – L'estimation de la partie inférieure du triangle DP

Réserves par année de survenance et provision totale : À partir du tableau précédent on peut trouver le montant des prestations que l'assureur devra verser dans les années à venir, donc nous déduisons le tableau des provisions en appliquant le **Code 1.3** :

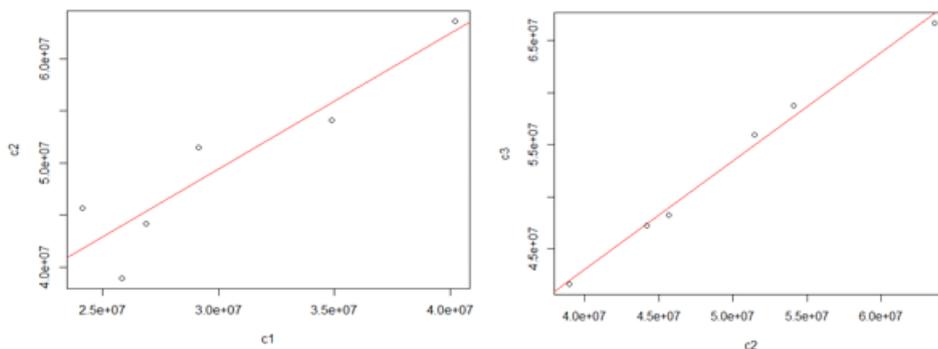
i	$C_{i,n-i+1}$	$\hat{C}_{i,n}$	\hat{R}_i
2012	72804356	72804356	0
2013	66618957	69606335	2987378
2014	57751636	63144369	5392733
2015	48279050	54694671	6415621
2016	38957950	47202384	8244434
2017	26851381	53550213	26698832
Total	-	-	49738998

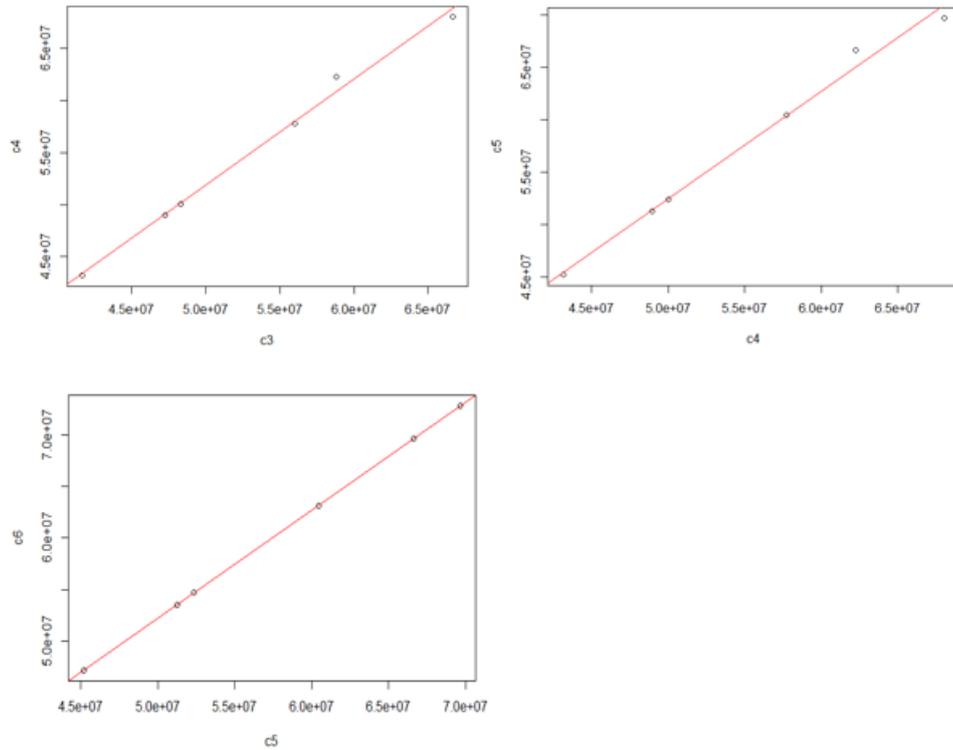
TABLE 3.5 – Les réserves de DP

Nous remarquons une hausse de montant de la réserve sur les années étudiées ceci s'explique par le fait que la charge totale des sinistres pour chaque année de survenance augmente. Plus nous approchons des années récentes, plus la charge sinistre augmente et le montant de la réserve augmente aussi.

Tests et validation des hypothèses : Afin de pouvoir appliquer la méthode Chain Ladder et prendre en considération ses résultats, il est nécessaire de faire des tests sur les hypothèses du modèle et de les valider.

1. **Validation de (H1) :** Cette hypothèse est généralement vérifiée auprès de toutes les compagnies d'assurance.
2. **Validation de (H2) :** Pour ce faire, nous avons eu recours à une illustration graphique. En effet, nous proposons de présenter graphiquement les variations des facteurs individuels par année de développement pour la catégorie DP.



FIGURE 3.4 – Nuages des points $C_{i,j}$.

On remarque que les points semblent alignés sur la droite de régression. Ainsi, l'hypothèse du modèle de Chain-Ladder est validée.

De plus, le coefficient de détermination R^2 est proche de 1.

Modèle	$\hat{C}_{i,2}$	$\hat{C}_{i,3}$	$\hat{C}_{i,4}$	$\hat{C}_{i,5}$	$\hat{C}_{i,6}$
R^2	0.8167	0.9892	0.9916	0.9885	1

TABLE 3.6 – Les coefficients de détermination R^2 .

A partir du tableau précédent, nous remarquons que le coefficient de détermination R^2 prend des valeurs très proches de 1. Ceci s'explique par le fait que ce modèle est une simple relation affine entre les couples étudiés.

Bornhuetter-Ferguson

Nous illustrons la méthode de **BF** en utilisant les données des tableaux précédents de **Chain Ladder**. Les coefficients \hat{Z}_j sont déterminés à partir des facteurs de développement λ_j . Pour la charge ultime a priori $\hat{\mu}_i$, il est essentiel de disposer les valeurs des primes acquises P_i pour chaque année de survenance étudiée, qui sont données dans le tableau ci-dessous :

DP	1	2	3	4	5	6
P_i	45549566	40543334	38032659	39786441	48962547	43930249

TABLE 3.7 – Les primes acquises associées aux années de survenance.

Et qui sont calculées par la formule suivante : *la prime acquise*(n) = *prime émise*(n) - *la prime non acquise*(n)

Dans cette méthode, nous utilisons aussi une information exogène qui est le "Loss-ratio" à l'ultime \hat{q}_i . La valeur de cette information peut être estimée à partir des paramètres \hat{m}_j et \hat{r}_i . L'application des différents codes de la méthode BF nous permet d'obtenir le tableau suivant :

i	$C_{i,n-i+1}$	$\hat{C}_{i,n}$	$\hat{Z}_{n+1-i}\%$	$\hat{m}_j\%$	$\hat{r}_i\%$	$\hat{q}_i\%$	$\hat{\mu}_i$	\hat{R}_i
2012	72804356	72804356	100	70.48	10.98	159.83	72804356	0
2013	66618957	69606335	95.71	46.78	11.85	172.44	69914107	3000587
2014	57751636	63144369	91.46	09.10	11.53	167.86	63843300	5452424
2015	48279050	54694671	88.27	05.28	96.01	139.75	55602219	6522075
2016	38957950	47202384	82.53	07.02	67.84	98.75	48351835	8445199
2017	26851381	53550213	50.14	06.85	86.71	126.21	55444489	27643272
Total	-	-	-	-	-	-	-	51063557

TABLE 3.8 – Les réserves par année de survenance estimées par la méthode BF

La figure ci-dessous montre une étude de l'évolution du Loss-ratio dans la catégories Dommages-particuliers, on remarque une tendance à la baisse durant la plupart des années étudiées.

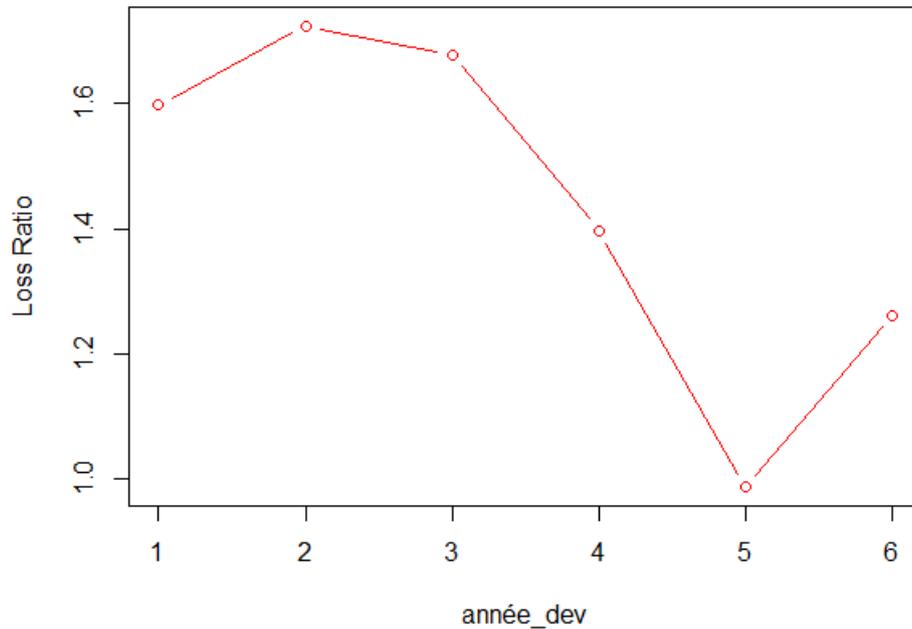


FIGURE 3.5 – Evolution du Loss-ratio (q_i) de DP .

Les méthodes stochastiques

Le modèle de Mack

Avant d'utiliser ce modèle, il faut vérifier et valider les hypothèses suivantes :

Test et validation des hypothèses :

1. Validation de (H1) et (H2) :

Comme le modèle de Mack est la version stochastique de la méthode de Chain Ladder standard, alors les hypothèses d'indépendance des années de survenance (H1) et l'existence des facteurs de développement (H2) ont déjà été validées graphiquement dans la partie portant sur le modèle de Chain Ladder (Voir test et validation des hypothèses). Néanmoins, il existe une autre méthode qui permet aussi de vérifier ces hypothèses. Cette dernière est basée sur le calcul du "triangle de développement" qui est défini par les facteurs de développement individuels $\lambda_{i,j}$. Pour ce faire, nous avons établi le **Code 1.4** qui donne le tableau suivant :

i, j	1	2	3	4	5
2012	1.581403	1.048557	1.019857	1.024719	1.044843
2013	1.550242	1.086686	1.058890	1.070193	
2014	1.765453	1.088115	1.031624		
2015	1.894560	1.057339			
2016	1.509091				

TABLE 3.9 – Le D-triangle (facteurs de développement)

On remarque que les coefficients de développement sont également sensiblement constants durant les années de développement, ce qui confirme l'hypothèse forte de l'indépendance.

2. validation de (H3) :

Comme on a déjà cité dans la partie de Mack, l'hypothèse (H3) suppose que les points $(C_{i,j}, \hat{r}_{i,j})$ doivent être non structurés. Afin de valider (H3), nous devons donc estimer les résidus de notre modèle. Par la suite, nous vérifions graphiquement s'il existe une tendance spécifique de ces résidus ou non.

Rappelons que l'expression des résidus estimés par la méthode des moindres carrés est :

$$\hat{r}_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

Les résidus de notre modèle sont détaillés dans le tableau suivant :

i, j	1	2	3	4	5
2012	-409.5	-167	-132.9	-179.2	-0.002
2013	-565.6	126.3	174.4	187.3	
2014	644.9	133.5	-33.74		
2015	1220.3	-82.2			
2016	4385.33				

TABLE 3.10 – Les résidus de Mack.

Nous avons ci-dessous la représentation graphique des couples $(\hat{r}_{i,j}, C_{i,j})$ pour $j = 1$.

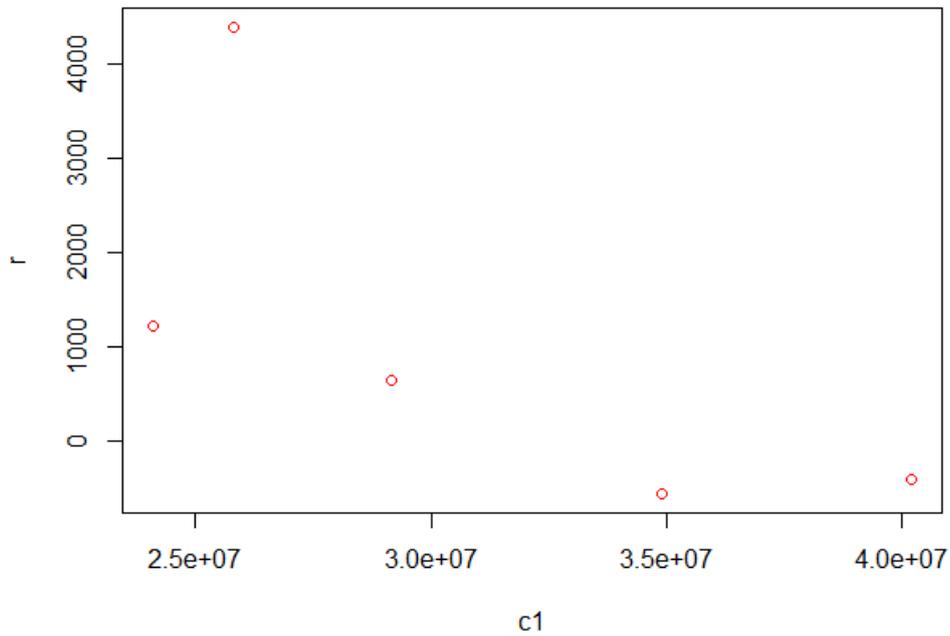


FIGURE 3.6 – Le nuage de point de $(r_{i,1}, C_{i,1})$.

D'après le graphe, on remarque que les points $(\hat{r}_{i,1}, C_{i,1})$ ne présente aucune structure, ce qui nous amène à dire que les résidus ont un caractère aléatoire. Donc l'hypothèse (H3) est validée.

Résultats obtenus :

Les hypothèses du modèle étant validées précédemment. De plus, les coefficients de développement estimés par le modèle de Mack sont les mêmes coefficients estimés par la méthode Chain Ladder, alors nous entamerons directement le calcul de la $MSEP(\hat{R}_i)$.

Réserves par année de survenance et provision totale :

l'utilisation de la fonction `MackChainLadder(triangle)` permet de résumer les résultats dans le tableau suivant :

j	Latest	Ultimate	Dev.To.Date	Reserve(\hat{R}_i)	Mack.S.E	CV(\hat{R}_i)
1	72804356	72804356	1	0	0	NaN
2	66618957	69606335	0.9571	2987378	1791258	0.600
3	57751636	63144369	0.9146	5392733	2982334	0.553
4	48279050	54694671	0.8827	6415621	3022587	0.471
5	38957950	47202384	0.8253	8244434	2984371	0.362
6	26851381	53550213	0.5014	26698832	6613108	0.248

TABLE 3.11 – Le résumé des résultats de Mack

Total :

Latest	Ultimate	Dev.To.Date	Reserve(\hat{R}_i)	Mack.S.E	CV(\hat{R}_i)
311263330	361002328	0.86	49738998	10705747	0.22

TABLE 3.12 – Le total des résultats.

- **Latest** : le dernier règlement (il correspond à la diagonale du triangle de liquidation des paiements cumulés).
- **Ultimate** : la charge ultime prédite $\hat{C}_{i,n}$ (elle correspond à la dernière colonne du rectangle des paiements cumulés).
- **Dev.To.Date** : le rapport entre le **Latest** et **Ultimate**.
- **Reserve(\hat{R}_i)** : la réserve estimée.
- **Mack.S.E** : l'erreur standard de la charge ultime prédite.
- **CV(\hat{R}_i)** : coefficient de variation, ou le rapport de l'erreur standard sur la **Reserve(\hat{R}_i)**.

On peut tirer aussi le graphe pour la catégorie DP, en utilisant la commande `plot(MackChainLadder(triangle))`

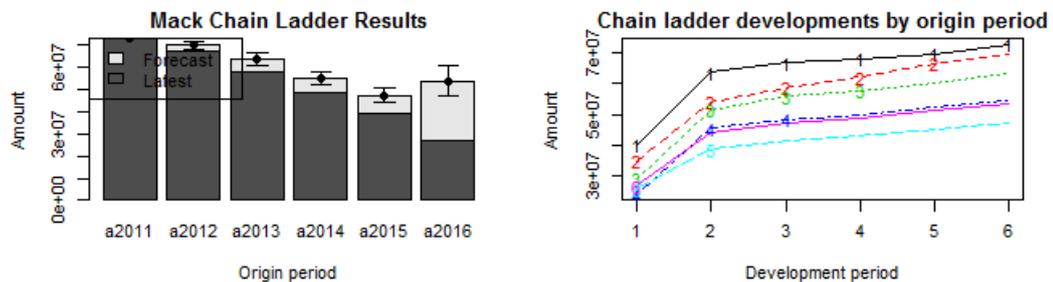


FIGURE 3.7 – Les résultats de Mack Chain-Ladder.

Les deux figures représentent les résultats fournis par le rectangle des paiements cumulés en fonction des années d'origine et des années de développement.

Et pour calculer la variance $\hat{\sigma}_j^2$ associée aux estimations de ces facteurs de développement, on applique le **Code 1.5**, On obtient ainsi le tableau suivant :

j	1	2	3	4	5
$\hat{\sigma}_j^2$	719124.17	22816.48	24622.55	67203.45	24622.55

TABLE 3.13 – La variance estimée pour les facteurs de développement par la méthode de Mack.

Bornhuetter-Ferguson stochastique

Selon Mack [19], l'information a priori sur les ultimes doit impacter les cadences de règlement, c'est pourquoi celles-ci diffèrent des cadences Chain Ladder. Dans l'approche de Mack, il est possible d'ajuster les cadences de règlement non cumulées en effectuant une régression log-linéaire. Le tableau suivant présente les cadences de règlement incrémentales \hat{y}_j estimées, puis les cadences retenues après l'ajustement \tilde{y}_j et normalisation \hat{y}_j^* . Les paramètres \hat{s}_j^2 également introduits dans ce modèle sont obtenus d'une manière identique.

j	1	2	3	4	5	6	7
\hat{y}_j	0.49463113	0.32071835	0.05694373	0.03174014	0.04239343	0.04291819	-
\tilde{y}_j	0.34554775	0.20149526	0.11749560	0.06851385	0.03995169	0.02329657	0.01358466
\hat{y}_j^*	0.42666254	0.24879479	0.14507683	0.08459697	0.04933005	0.02876526	0.01677355
\hat{s}_j^2	463159.76	543183.42	692309.91	306800.29	62261.28	-	-
\hat{s}_j^{*2}	720495.3	390083.4	272754.3	221392.7	196032.5	182607.6	175207.7

TABLE 3.14 – Paramètres estimés par le modèle de Mack.

Une régression log-linéaire a été effectuée sur les cadences de règlement incrémentales \hat{y}_j à partir de \hat{y}_1 . Sur le schéma suivant, les logarithmes des cadences \tilde{y}_j sont représentés en fonction des années de développement.

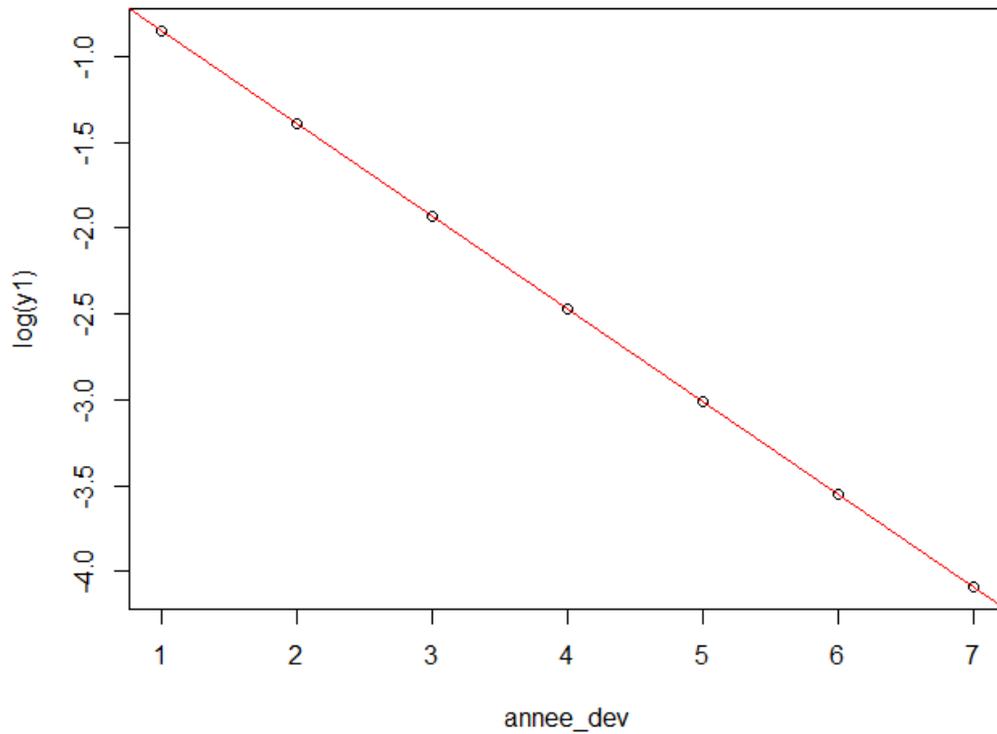


FIGURE 3.8 – Représentation des logarithmes des cadences retenues après lissage en fonction des années de développement.

Le coefficient de détermination R^2 est de 100%, ce qui traduit une excellente qualité d'ajustement. On a ajusté tous les paramètres de \hat{y}_1 à \hat{y}_6 et extrapolé ces cadences pour obtenir une valeur pour \hat{y}_7 .

De la même manière, en effectuant une régression log-linéaire sur les paramètres \hat{s}_j^{*2} en fonction des valeurs absolues de \hat{y}_j^* , pour R^2 de 100% et ainsi extrapoler \hat{s}_6^{*2} , \hat{s}_7^{*2} .

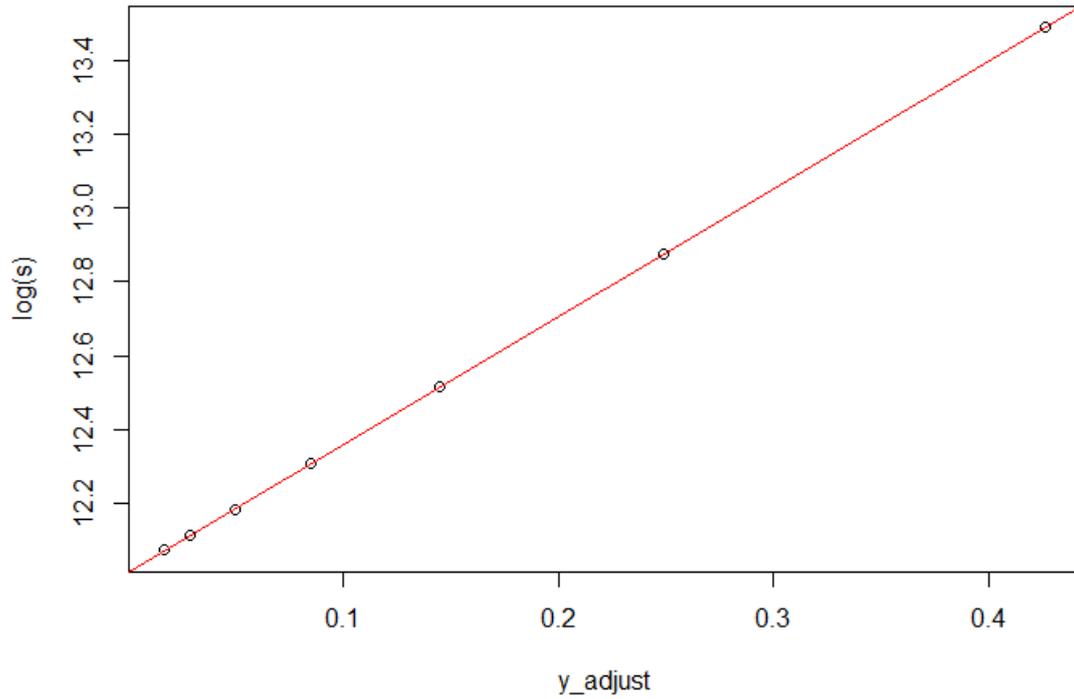


FIGURE 3.9 – Représentation de la log des \hat{s}_j^{*2} en fonction des valeurs absolues de \hat{y}_j^* .

Un autre point où l'actuaire doit faire intervenir est l'incertitude sur la cadence de règlement incrémental \hat{y}_j^* .

j	1	2	3	4	5	6	7
\hat{y}_j^*	0.42666254	0.24879479	0.14507683	0.08459697	0.04933005	0.02876526	0.01677355
$\widehat{mse}(\hat{y}_j^*)$	0.001968	0.001256	0.001040	0.001071	0.001373	0.002508	0.002508

TABLE 3.15 – Cadences de règlement incrémentales et incertitudes associées.

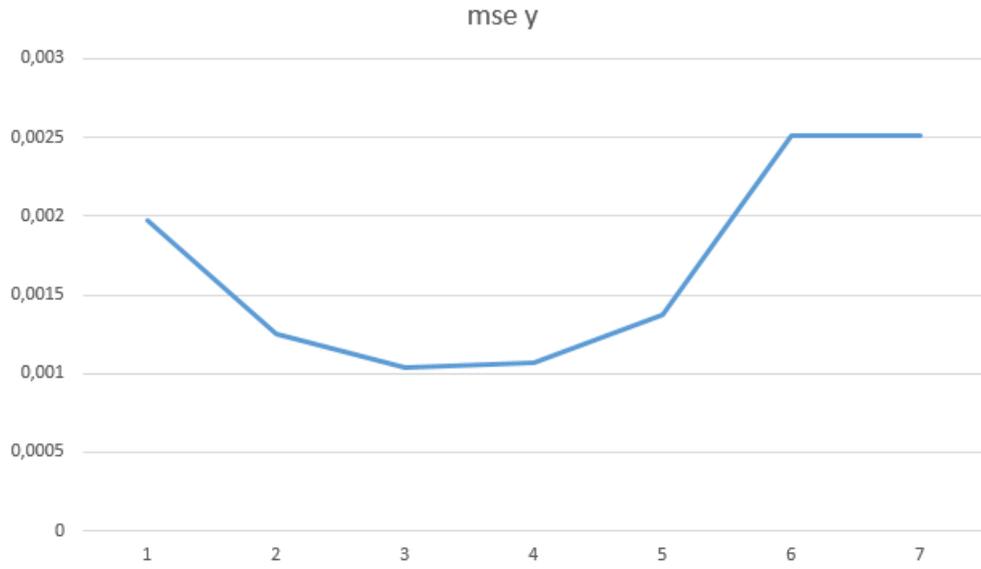


FIGURE 3.10 – incertitudes associées aux Cadences de règlement incrémentales.

L'incertitude sur la dernière cadence de règlement incrémentale a été choisie de sorte qu'elle soit équivalente à $m\hat{se}(\hat{y}_6^*)$. En effet, les deux cadences \hat{y}_6^* et \hat{y}_7^* sont très proches l'une de l'autre.

Erreur de prédiction de la provision en fonction du coefficient de corrélation

Comme c'est souvent le cas en pratique, les ultimes a priori $\hat{\mu}_i$ sont positivement corrélés, de sorte qu'on ne peut utiliser l'égalité proposée dans la deuxième partie de ce mémoire pour le calcul de l'erreur de ces $\hat{\mu}_i$. Dans le calcul de l'erreur d'estimation de la provision, un terme de covariance apparaît. Ce dernier contient les estimations des coefficients de corrélations $\rho_{ij}^\mu, \rho_{ij}^Z$.

- On se place tout d'abord dans le cas d'un coefficient de corrélation ρ_{ij}^μ constant. On a alors :

$$\rho_{ij}^\mu = 1/\sqrt{n} = 1/\sqrt{6} = 0.409$$

Dans ce cadre, l'erreur d'estimation des ultimes a priori $\hat{\mu}_i$ s'écrit :

$$(SE(\hat{\mu}_i))^2 = \frac{p_i}{n-\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n p_j (\frac{\hat{\mu}_j}{p_j} - \hat{q})^2 \text{ avec } \hat{q} = \sum_{j=1}^n \hat{\mu}_j / \sum_{j=1}^n p_j$$

Dès lors, nous avons obtenu les résultats suivants :

i	PSAP estimée	Erreur de prédiction
2012	1221188	5166749
2013	3183806	7141084
2014	6056742	7738272
2015	9978699	7978467
2016	15692234	9229484
2017	31788403	12629460
Total	67921071	26811102

TABLE 3.16 – PSAP et l’incertitude à l’ultime estimées pour coefficient de corrélation constant

- On se place désormais dans le cas d’un coefficient de corrélation ρ_{ij}^μ décroissant défini par :

$$\rho_{ij}^\mu = 1/(1 + |i - j|).$$

Dans ce cadre, l’erreur d’estimation des ultimes a priori $\hat{\mu}_i$ s’écrit :

$$(SE(\hat{\mu}_i))^2 = \frac{p_i}{n - \sqrt{2n}} \sum_{j=1}^n p_j (\frac{\hat{\mu}_j}{p_j} - \hat{q})^2 \text{ avec } \hat{q} = \sum_{j=1}^n \hat{\mu}_j / \sum_{j=1}^n p_j$$

De ces formules, nous avons obtenu les résultats récapitulés dans le tableau suivant :

i	PSAP estimée	Erreur de prédiction
2012	1221188	5191654
2013	3183806	7181832
2014	6056742	7809478
2015	9978699	8161017
2016	15692234	9796658
2017	31788403	13747641
Total	67921071	28304006

TABLE 3.17 – PSAP et l’incertitude à l’ultime estimées pour coefficient de corrélation décroissant.

Construction des intervalles de confiance

Thomas Mack propose de construire des intervalles de prédiction pour la provision. Contrairement au caractère non paramétrique de ce modèle, le choix d’une distribution reste lui très arbitraire.

Nous présentons dans le tableaux ci-dessous les intervalles de confiance autour des provisions totale estimées pour les méthodes Mack et BF stochastique, quand l’hypothèse faite sur ces provisions suppose qu’elles suivent la loi Normale puis la loi log-Normale.

méthodes	coefficients	$N(Inf_{95\%})$	$N(Sup_{95\%})$	$LogN(Inf_{95\%})$	$LogN(Sup_{95\%})$
BF	$\rho_{ij}^\mu = \text{constant}$	15371311.08	120470830.92	22342197.6	113499944.4
BF	$\rho_{ij}^\mu = \text{décroissant}$	12445219.24	123396922.72	19804260.8	116037881.2
Mack	-	28755733.88	70722262.12	31539228.1	67938767.9

TABLE 3.18 – Intervalles de confiance autour des réserves estimées.

À partir du tableau précédent, on remarque que les réserves calculées par les deux méthodes ($\hat{R}_i^{Mack} = 49738998$, $\hat{R}_i^{BF} = 67921071$) appartiennent à l'intervalle de confiance des lois Normale et LogNormale.

3.3.3 Etude comparative des résultats

Résumés des résultats

De nombreux modèles ont été étudiés dans cette partie. Afin de mieux observer quels sont les effets de chacune des méthodes, nous avons donc appliqué quelques méthodes de comparaison des résultats afin d'avoir une parmi ces méthodes qui s'avère être la plus adaptée au triangle considéré, dans la mesure où elle serait la méthode qui colle le mieux au développement passé (information connue) du triangle.

Tout d'abord, il nous a semblé intéressant de récapituler les principaux résultats obtenus dans le tableau suivant. On indique par C : constant et D : décroissant.

branches	méth de prov	CL	BF.Dét	Mack	BF.Stoc
DP	prov.totale	49738998	51063557	49738998	67921071
DP	Erreur de Préd	-	-	10705747	$\rho_{ij}^\mu = C(26811102), D(28304006)$
DF	prov.totale	30347182	34038790	30347182	33405132
DF	Erreur de Préd	-	-	12020207	$\rho_{ij}^\mu = C(18976491), D(21608323)$

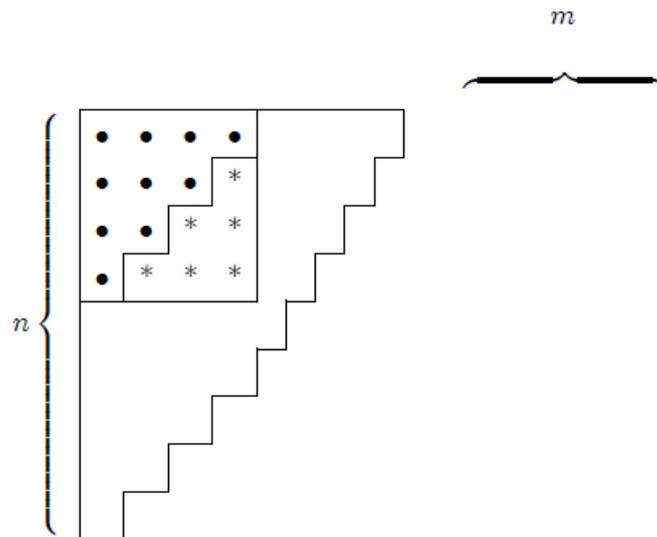
TABLE 3.19 – Les résultats obtenus par les différentes méthodes pour les catégories DP et DF.

D'après le tableau ci-dessus, on remarque que la méthode de Mack dégage des erreurs inférieures à celles de la méthode de BF stochastique pour les deux catégories DP et DF. ainsi pour la méthode de Mack, on remarque qu'elle dégage des erreurs inférieures dans la catégorie DP par rapport à DF, par contre BF stochastique dégage des erreurs inférieures dans la catégorie DF par rapport à DP.

Interprétation des résultats

Choix de la méthode de provisionnement

Dans ce panorama des méthodes de provisionnement, nous avons présenté quatre modélisations parmi un très grand nombre pouvaient être proposées. Et comme il n'existe pas a priori de méthode universelle qui puisse s'appliquer à toutes les compagnies, tous les types de gestion des sinistres, tous les types de risques ..., le choix de l'actuaire peut s'avérer délicat. En pratique, face à l'ensemble des estimations possibles, il peut s'avérer difficile de trouver "le" niveau de provisionnement adéquat. quelques idées peuvent néanmoins être utilisées pour choisir entre les différents modèles. On peut ainsi par exemple étudier la façon dont le triangle a grossi par le passé, et voir quel modèle a proposé les meilleurs estimation. Pour cela, Denuit et Charpentier [2005] ont proposé une méthode qui met en évidence l'erreur d'estimation des provisions faites dans le passé de chacune des méthodes par rapport aux vraies valeurs observées dans le passé. Il est important de noter encore une fois que cette technique, bien que pouvant paraître objective et pertinente, ne se fonde que sur un critère historique, particulier au triangle. On dispose d'un triangle comprenant n exercices, et on s'intéresse au premier sous-triangle de m années, reste inclus dans le triangle de base.



Trois ensembles sont alors à distinguer dans le triangle :

1. le triangle supérieur (points noirs ●), correspondant au triangle observé voilà $(n - m)$ années.
2. le complément du triangle supérieur (étoilles *) correspondant à ce qui était prédit à l'aide du triangle supérieur (1).
3. le complément (en blanc dans le triangle), comprenant à la fois les années de surveillance les plus récentes (les $(n - m)$ dernières), qui n'étaient pas prises en compte lors de la constitution du triangle supérieur, et les $(n - m)$ dernières années de déroulé.

Après avoir complété le sous-triangle par une des méthodes, on compare les provisions estimées dans le triangle (2) avec les vraies valeurs lisibles dans le triangle de base. La méthode la plus adaptée au triangle sera alors celle qui minimise la somme des carrés des erreurs. Pour améliorer cet outil de comparaison, nous ne choisirons pas qu'un sous-triangle mais tous les sous-triangles possible du triangle de départ, au nombre de $(\lfloor n/2 \rfloor - 2)$. Ainsi, pour chacune des méthodes, la somme des carrés des erreurs se calcule comme suit :

$$SSE = \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{i=1}^m \sum_{j=m-i+1}^m (\hat{C}_{i,j} - C_{i,j})^2$$

Remarque :

D'après **M. Denuit, A. Charpentier [13]**, cette approche ne peut pas être utilisée que si l'on dispose d'un **grand nombre** d'années d'observation, ce qui est loin d'être toujours le cas.

Donc, on ne peut pas appliquer ce critère puisque le nombre d'années d'observation dans notre cas est égale à six.

Comparaison par stabilisation de triangle

Le tableau ci-dessous représente les provisions obtenues pour les différentes méthodes déterministes et catégories de branches d'assurance, Ainsi leurs présentation graphique.

branches d'assurance	Chain Ladder/Mack	BF déterministe
DP	49738998	51063557
DF	30347182	34038790

TABLE 3.20 – Les provisions totales pour les catégories DP et DF.

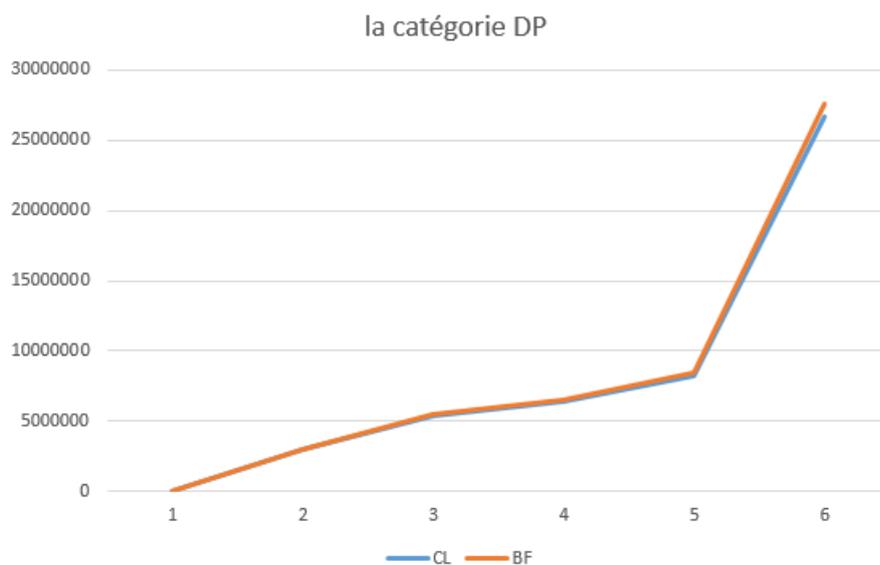


FIGURE 3.11 – Les réserves obtenues pour les différentes méthodes pour la catégorie DP.

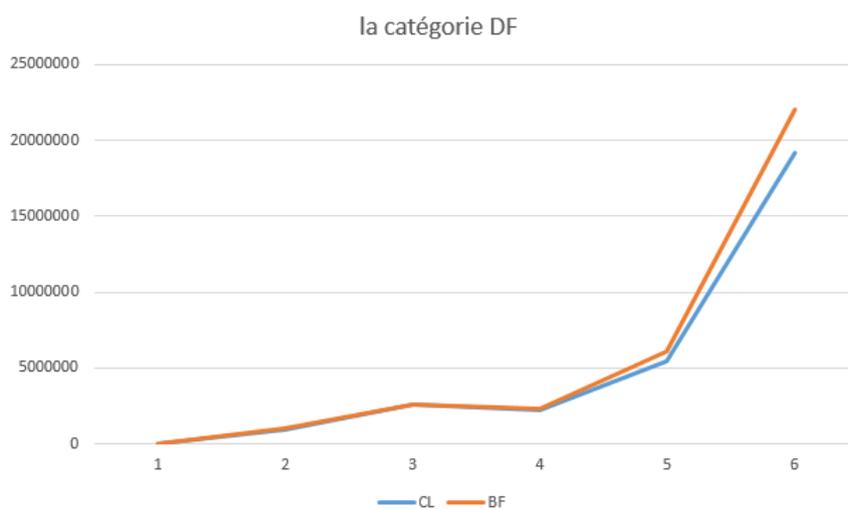


FIGURE 3.12 – Les réserves obtenues pour les différentes méthodes pour la catégorie DF .

D'après les figures précédentes, on constate que la méthode BF propose des réserves plus au moins égale à celles données par la méthode CL pour la catégorie DP, et différent sensiblement à partir de la quatrième année pour la catégorie DF.

Nous remarquons aussi que la provision totale estimée par la méthode BF est plus importante que celle fournie par la méthode CL pour les deux types de catégories.

Lorsque les réserves estimées par différentes méthodes sont plus au moins proches, les compagnies d'assurances jugent nécessaire de choisir la réserve la plus importante et ceci afin de se prémunir contre un déficit budgétaire, dans le cas contraire, le reste est remis dans le passif de la compagnie.

Par conséquent, les réserves retenues dans notre cas pour les méthodes déterministes est celles fournies par la méthodes BF. Néanmoins, on ne peut pas généraliser cette constatation car les deux méthodes CL et BF n'ont été appliquées que sur deux types de catégories différentes.

Dans la suite, on cherche s'il existe des similitudes dans chacune de ces catégories à partir de la représentation graphique des facteurs de développement pour les deux triangles.

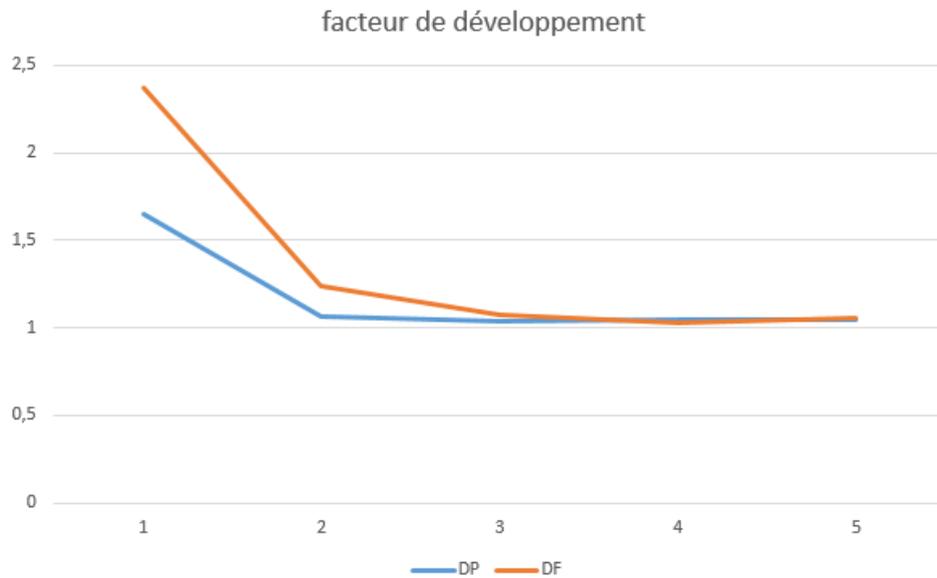


FIGURE 3.13 – Les facteurs de développement pour les catégories DP et DF.

Nous observons que la stabilisation des facteurs de développement pour la catégorie DF est plus lente que la catégorie DP.

Selon **I. HABIB, S. RIBAN [10]**, une approche a été proposée pour vérifier le résultat de cette dernière. Elle est basée sur le calcul de "l'indice de stabilisation" associé à chaque triangle, plus cet indice est élevé et plus la stabilisation est rapide. Il est défini comme suit :

$$I = \sum_{j=1}^n \frac{\hat{\lambda}_j}{\prod_{k=1}^n \hat{\lambda}_k} \frac{1}{j+1}$$

Après le calcul, nous avons obtenu les résultats suivants pour les deux triangles :

Branche d'assurance	La valeur de l'indice
DP	0.91
DF	0.66

TABLE 3.21 – Valeurs de l'indice de stabilisation pour les catégories DP et DF.

Nous remarquons que l'indice le plus élevé est celui de la catégorie Dommage particulier, ceci signifie que la stabilisation du triangle DP paraît plus rapide que celui de la catégorie DF. Ce résultat exprime aussi que les sinistres couverts par la catégorie DP sont réglés la première année.

Comparaison des modèles en utilisant le coefficient de variation

Pour cette approche, nous utilisons un coefficient de variation $CV(\hat{R}_i)$ défini par Mack :

$$CV(\hat{R}_i) = SE(\hat{R}_i)/\text{Reserve}(\hat{R}_i)$$

branches	méthode	Réserve	$SE(\hat{R}_i)$	$CV(\hat{R}_i)$
DP	Mack	49738998	10705747	21%
DP	BF, $\rho_{ij}^\mu = \text{constant}$	67921071	26811102	39%
DP	BF, $\rho_{ij}^\mu = \text{décroissant}$	67921071	28304006	42%
DF	Mack	30347182	12020207	39%
DF	BF, $\rho_{ij}^\mu = \text{constant}$	33405132	18976491	57%
DF	BF, $\rho_{ij}^\mu = \text{décroissant}$	33405132	21608323	65%

TABLE 3.22 – Tableau récapitulatif des résultats fournis par les différents modèles pour les catégories DP et DF.

Une première observation peut être tirée de ce tableau : Une valeur identique de coefficient de variation entre méthode de Mack dans la catégorie DF et méthode BF stochastique ($\rho_{ij}^\mu = \text{constant}$) dans la catégorie DP.

D'après le tableau, on constate que le modèle Mack est meilleur que celui de BF stochastique pour les deux catégories DP et DF car il donne un coefficient de variation inférieur par rapport aux deux cas (ρ_{ij}^μ constant et décroissant).

Finalement, les méthodes retenus pour les deux catégories DP et DF sont :

1. Pour les méthodes déterministes, nous avons pris la réserve estimée par la méthode de BF pour les deux catégories.
2. Pour les méthodes stochastiques, nous avons pris la méthode de Mack pour les deux catégories, car elle donne une meilleure estimation de la réserve.

Conclusion générale

Au terme de cette étude, plusieurs constats peuvent être faits. L'objectif principal étant, en premier lieu le calcul des provisions pour sinistres à payer en assurances non-vie, en utilisant plusieurs modèles et en second lieu, comparer les résultats trouvés afin de sélectionner le modèle le plus adéquat.

Pour atteindre cet objectif, nous avons commencé par présenter quelques concepts fondamentaux sur l'assurance, provision, sinistre à payer et triangle de liquidation. Nous avons ensuite présenté les méthodes d'évaluation des provisions dont deux sont dites déterministes où l'une repose sur les facteurs individuels de développement appelée méthode de Chain Laidier et l'autre sur une information exogène appelée Bornhuetter-Ferguson . quand aux deux autres méthodes dites stochastiques, elles sont des extensions des deux premières, permettant ainsi le calcul de l'erreur de prédiction, à savoir la méthode de Mack et la méthode Bornhuetter-Ferguson stochastique.

Nous avons ensuite établi une application numérique sur un triangle de liquidation pour deux types de catégories d'une branche. Ceci nous a permis d'obtenir une disparité de réserves estimées par les différentes méthodes étudiées. Ainsi que l'erreur de prédiction associée à ces réserves.

D'après les résultats obtenus, la méthode Bornhuetter-Ferguson déterministe propose une provision totale plus importante que celle fournie par la méthode Chain-Ladder pour les deux types de catégorie, tandis que l'erreur de prédiction présentée par la méthode Mack est plus faible que celle de Bornhuetter-Ferguson stochastique . Ceci nous amène à dire que la méthode Mack fournie une meilleur estimation de la réserve que celle proposés par Bornhuetter-Ferguson stochastique pour les deux catégories DP, DF.

Finalement, nous pouvons dire que le choix d'une méthode de provisionnement est délicat. Il n'existe pas de méthode universelle qui puisse s'appliquer à toutes les compagnies et pour tout types de branches. dans notre étude nous avons trouvé que Bornhuetter-Ferguson déterministe mieux que Chain Laidier et Mack mieux que Bornhuetter-Ferguson stochastique, mais on ne peut pas généraliser cette constatation car les méthodes utilisées n'ont été appliquées que sur deux types de catégories différentes. Donc nous proposons que les compagnies d'assurance utilisent une combinaison de ces méthodes de provisionnement Pour utiliser leurs avantages respectifs et minimiser leurs défauts.

Bibliographie

- [01] A.ACME, "study on non-life long tail liabilities : reserve risk and risk margin assessment under Solvency II.", october 2007.
- [02] A. Carrato, F. Concina, M. Gesmann, D.Murphy, M.Wüthrich and W. Zhang, "Claims Reserving with R : ChainLadder-0.2.4 Package Vignette.", 2017.
- [03] A. Charpentier, "partie 1 - assurance non-vie tarification provisionnement", Université de Montréal, <https://freakonometrics.blog.free.fr/>.
- [04] A. Le Tesson, A. Lenain, S. Samba, J. Ung, "Estimation de l'erreur de prédiction dans le cas de l'utilisation d'une combinaison de méthodes pour le calcul de provisions en assurance IARD", Brest, le 26 mai 2014.
- [05] C. Partrat, J. Marie Nesi, E. Nisipasu et O. Reiz "Provisionnement Technique en Assurance Non Vie : Perspectives actuarielles modernes.", Assurance Audit Actuariat, Economica, 2007.
- [06] C. MICHAUD, "La mesure du risque de provisionnement à horizon un an en assurance non-vie- prise en compte du jugements d'expert et de données exogènes". 50 Avenue Tony Grnier 69366 Lyon Cedex 07.
- [07] C. Partrat, E. Loeur, J. Marie Nesi, E. Nisipasu, O. Reiz, "Provisionnement Technique En Assurance Non-Vie". Ed. ECONOMICA, 2007.
- [08] D.SENGDY, "Optimisation du SCR Risque de Réserve sous Solvabilité II". 28 janvier 2014.
- [09] D. H. Alai, M. Merz et M. V. Wüthrich (2009), "Mean Square Error of Prediction in the Bornhuetter-Ferguson Claims Reserving Method". Annals of Actuarial Science, 4, pp 7-31. <https://journals.cambridge.org/AAS>.

- [10] I. HABIB, S. RIBAN, "Quelle méthode de provisionnement pour des engagements non-vie dans Solvabilité 2 ". Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique (ENSAE) 3, Avenue Pierre Larousse - 92245, MALAKOFF CEDEX, FRANCE.
- [11] K. D. Schmidt et A.Wfinsche(Dresden), "Chain Ladder, Marginal Sum and Maximum Likelihood Estimation".
- [12] K. D. Schmidt, M. Zocher, "The Bornhuetter-Ferguson Principle", CASUALTY AC-TUARIAL SOCIETY. VOLUME 2/ISSUE 1.
- [13] M. Denuit, A. Charpentier, "Mathématique De l'assurance Non-Vie", Tome 2 : Tarification et provisionnement.
- [14] M. V. Wuthrich*, M. Merz et N. Lysenko*, "Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method". Scandinavian Actuarial Journal, 2009, 1, 63-84.
- [15] M. Kelle, "Provisionnement pour Sinistres a Payer : Analyses et Modélisations sur Données Détaillées". Bulletin francais d'actuariat, 2007
- [16] M.BERGERON, "Incertitude dans le calcul des Provisions pour sinistres à payer", Universitaire d'actuariat de l'ISFA, 14 janvier 2015
- [17] S. Jaziri, "Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an". Université Claude Bernard-Lyon 1, 2011.
- [18] S. Savarre et B. Payre, "Charge ultime nette de réassurance en RC corporelle : 2 modèles stochastiques pour les flottes automobiles".Mémoire IA, CEA, 2012
- [19] T.MACK, "The Prediction Error Of Bornhuetter/Ferguson" Astin Bulletin 38(1), 87-103, 2008, <https://www.cambridge.org/core>.
- [20] T. MACK, M. Re (2006), "Parameter Estimation for Bomhuetter/Ferguson". Casualty Actuarial Society Forum, Fall 2006.
- [21] T. MACK, M. Re, Munich (1993), "Distribution-Free Calculation Of The Standard Error Of Chain Ladder Reserve Estimates". ASTIN BULLETIN, Vol. 23, No. 2, 1993.
- [22] T. MACK,M. Re, Munich, "The Standard Error Of Chain Ladder Reserve Estimates :Recursive Calculation And Inclusion Of A Tail Factor". ASTIN BULLETIN,

Vol. 29, No. 2, 1999, pp. 361-36

[23] X.Bing Zhao et Xian Zhou, "Applying copula models to individual claim loss reserving methods." *Mathematics and Economics*, 46(2), 2010.

[24] <https://github.com/mages/ChainLadder>.

[25] <https://www.info.univ-angers.-fr/gh/tuteurs/tutrstat.htm>.

[26] <https://opensourceofware.casact.org/-ChainLadder>.

Présentation du logiciel R

R [25] est un logiciel de statistiques gratuit disponible pour Windows, Linux et MacIntosh. Il est interactif, programmable et facile à apprendre. Il est créé par Ross Ihaka et Robert Gentleman.

Le langage R permet, par exemple, de programmer des boucles qui vont analyser successivement différents jeux de données. Il est aussi possible de combiner dans le même programme différentes fonctions statistiques pour réaliser des analyses plus complexes.

Le package Chain-Ladder

Le package Chain-Ladder [2] sous R fournit des méthodes et des modèles qui sont habituellement utilisés dans la réservation des sinistres d'assurance. Le paquet est issu des présentations faites lors du séminaire de réservation stochastique à l'Institut des actuaires en 2007 et 2008 et suivis de discussions aux réunions du CAS en 2008 et 2010. Plus d'informations sont disponibles sur le site Web du projet <https://github.com/Mages/ChainLadder>. Pour plus de forfaits financiers, voir aussi CRAN Task View 'Emperical Finance' à <https://CRAN.R-project.org/view=Finance>. Il y a principaux types de fonctions dans ce package, dont nous avons utilisé une seule fonction

- **MackChainLadder** : Le modèle utilise l'approche de Chain Ladder pour prédire les valeurs ultimes et la réserve pour chaque rangée (dans ce cas, année d'accident) pour un triangle de perte cumulatif. Ce modèle fournit plusieurs méthodes pour prédire les ultimates, les réserves et l'erreur type de ces réserves.

Annexe B

Les programmes suivants sont directement applicables à partir des données importées ci-dessous.

Triangle des règlements incrémentaux

```
a2012=c(40209423,23377874,3087588,1323985,1680855,3124631)
a2013=c(34896475,19201502,4689520,3461990,4369470,NA)
a2014=c(29141513,22306454,4533344,1770325,NA,NA)
a2015=c(24101059,21559849,2618142,NA,NA,NA)
a2016=c(25815508,13142442,NA,NA,NA,NA)
a2017=c(26851381,NA,NA,NA,NA,NA)
pr=c(45549566,40543334,38032659,39786441,48962547,43930249)
DP1=rbind(a2012,a2013,a2014,a2015,a2016,a2017)
```

Triangle des règlements

```
a2012=c(40209423,63587297,66674885,67998870,69679725,72804356)
a2013=c(34896475,54097977,58787497,62249487,66618957,NA)
a2014=c(29141513,51447967,55981311,57751636,NA,NA)
a2015=c(24101059,45660908,48279050,NA,NA,NA)
a2016=c(25815508,38957950,NA,NA,NA,NA)
a2017=c(26851381,NA,NA,NA,NA,NA)
pr=c(45549566,40543334,38032659,39786441,48962547,43930249)
DP=rbind(a2012,a2013,a2014,a2015,a2016,a2017)
```

Chain Ladder

Code1.1 #Les facteurs de développement

```
n <- nrow(DP)
LAMBDA <- rep(1, (n-1))
for(i in 1:(n-1)){
LAMBDA[i]= sum(as.numeric(DP[1:(n-i), i+1]))/sum(as.numeric(DP[1:(n-i), i]))}
```

Code1.2 #Rectangle

```
x <- DP
for(i in 1:(n-1)){
x[(n-i+1):(n), i+1]=(as.numeric(LAMBDA[i]))* x[(n-i+1):(n), i]}
```

Code1.3 #La réserve

```
ultime <- DP[ ,6]*(1+0.00)
paiment.as.at <- diag(as.matrix(DP[,6:1]))
reserves <- ultime - paiment.as.at
```

Code1.4 #D-triangle

```
f = DP[ ,2:n]/DP[ ,1:(n-1)]
```

Code1.5 #Variance

```
SIGMA=0
for(j in 1:(n-2)){
SIGMA[j]=(1/(n-j-1))*sum(DP[1:(n-j), j]*
((DP[1:(n-j), j+1]/DP[1:(n-j), j]) -LAMBDA[j])^2)}
SIGMA[n-1]=min((SIGMA[n-2]^2)/(SIGMA[n-3]), SIGMA[n-2], SIGMA[n-3])
```

Bornhuetter-Ferguson

Code1.2 #La moyenne incrémentale du loss ratio (ILR)

```
m = rep(1, n)
for(i in 1:n) {
m[i] = sum(DP1[, i], na.rm=TRUE)/sum(pr[1:(n+1-i)])}
```

```
sum(m)
```

Code2.2 # *Indice du loss ratio*

```
r = rep(1,n)
for(i in 1:n){
r[i] = (DP[i,(n+1-i)]/pr[i])/sum(m[1:(n+1-i)])}
```

Code2.3 # *Les loss ratios*

```
q = rep(1,n)
for(i in 1:n){
q[i] = sum(m)*r[i]}
```

Code2.4 # *L'ultime a priori*

```
u <- as.numeric()
for( i in 1:n){
u[i] = q[i]*pr[i]}
```

Code2.5 # *La charge actuelle (Le dernier paiement connue)*

```
ca = rep(1,n)
for (i in 1:n){
ca[i] = DP[i,(n-i+1)]}
```

Code2.6 # *Les cadences incrémentales*

```
Z = rep(1,n)
for (i in 1:n){
Z[i] = ca[i]/x[i,n]}
```

Code2.7 # *La réserve*

```
R = rep(1,n)
for (i in 1:n){
R[i] = (1-Z[i])*u[i]}
sum(R)
```

Bornhuetter-Ferguson stochastiques

Code3.1 #Calcul de y

```

y1 = rep(1,n)
for (i in 1:n){
y1[i] = sum(DP1[,i],na.rm=TRUE)/sum(u[1:(n+1-i)])}
sum(y1)
N <- c(1:n)
fit = lm(log(y1)~N)
Summary(fit)
plot(N,log(y1))
abline(fit,col="red")

```

Code3.2 #Calcul de y7

```

y1 = c(y1,(exp(fit$coefficients[2]*7+fit$coefficients[1])))

```

Code3.3 #Adjustement

```

r <- c(1:(n+1))
y_adj = exp(fit$coefficients[2]*r+fit$coefficients[1])
y1 = y_adj
sum(y_adj)
fit1 = lm(log(y1)~r)
summary(fit1)
plot(r,log(y1))
abline(fit1,col="red")

```

Code3.4 #Normalisation

```

y1 = y1/sum(y1)
sum(y1)

```

Code3.5 #Calcul de s

```

s = rep(1,(n-1))
for (j in 1:(n-1)){
s[j] =1/(n-j)*sum(((DP1[1:(n+1-j),j]-u[1:(n+1-j)]*y1[j])^2)/u[1:(n+1-j)])}
y_abs=abs(y1)

```

```
fit2 = lm(log(s)~y_abs[-c(6,7)])
summary(fit2)
plot(y_abs[-c(6,7)],log(s),xlab="y_adjust")
abline(fit2,col="red")
```

Code3.6 #Calcul de s_6 et s_7

```
s=c(s,(exp(fit2$coefficients[2]*y1[n]+fit2$coefficients[1])),
(exp(fit2$coefficients[2]*y1[n+1]+fit2$coefficients[1])))
```

Code3.7 #Lissage

```
s_adj = 1
s_adj = exp(fit2$coefficients[2]*y1+fit2$coefficients[1])
s = s_adj
fit3 = lm(log(s)~y_abs[-c(0,16)])
summary(fit2)
plot(y_abs[-c(0,16)],log(s),xlab="y_adjust")
abline(fit2,col="red")
```

Code3.8 #La réserve

```
R = 1
for (i in 1:6){
R[i] = as.numeric(sum(y1[(8-i):(7)])*u[i])}
sum(R)
```

Code3.9 #Erreur du processus

```
err_proc = rep(1,n)
for (i in 1:n){
err_proc[i] = sum(s[(n+2-i):(n+1)])*u[i]}
sum(err_proc)
```

Code3.10 #Erreur des cadences de règlements incrémentaux y

```
mse_y = rep(1,n)
for(i in 1:n){
mse_y[i] = s[i]/sum(u[1:(n+1-i)])}
mse_y=c(mse_y,mse_y[n])
```

Code3.10 # *Code 3.11 Erreur d'estimation des Z*

```
mse_Z=rep(0,(n+1))
for (i in 1:n){
mse_Z[i]=min(sum(mse_y[1:i]),sum(mse_y[(i+1):(n+1)]))}
```

Code3.11 # *Erreur d'estimation des Z*

```
mse_Z=rep(0,(n+1))
for (i in 1:n){
mse_Z[i]=min(sum(mse_y[1:i]),sum(mse_y[(i+1):(n+1)]))}
```

*****Cas de coefficient de corrélation décroissant*****

Code 3.12 *Erreur du processus*

```
q = sum(u)/sum(pr)
mse_u = 1
for(i in 1:n){
mse_u[i] = pr[i]/(n-sqrt(2*n))*sum(pr[1:n]*(u[1:n]/pr[1:n]-q)**2)}
```

Code 3.13 # *Erreur d'estimation*

```
err_est=rep(1,n)
Z = y1
for (i in 1:(n)){
Z[i+1] = Z[i] + y1[i+1]}
for (i in 1:n){
err_est[i] = (u[i]^2 + mse_u[i])*mse_Z[n+1-i] + mse_u[i]*((1-Z[n+1-i])^2)}
```

Code 3.14 # *Erreur quadratique moyenne de la prédiction*

```
msep_decroissant = 1
msep_decroissant = err_proc + err_est
msep_decroissant
```

Code 3.15 # *Covariance*

```
coeff_Z = matrix(NA,n,n)
for (j in 2:n){
```

```

for (i in 1:(j-1)){
coeff_Z[i,j] = sqrt(Z[n+1-j]*(1-Z[n+1-i])/Z[n+1-i]/(1-Z[n+1-j]))}
coeff_u_decroissant = matrix(1,n,n)
for (i in 1:n){
for (j in 1:n){
coeff_u_decroissant[i,j] = 1/(1+abs(i-j))}}
Covariance = matrix(NA,n,n)
for (j in 1:n){
for (i in 1:(j-1)){
Covariance[i,j] = coeff_u_decroissant[i,j]*sqrt(mse_u[i])*sqrt(mse_u[j])*
(1-Z[n+1-i])*(1-Z[n+1-j])+ coeff_Z[i,j]*sqrt(mse_Z[n+1-i])*
sqrt(mse_Z[n+1-j])*u[i]*u[j]}}

```

Code 3.16 # *Erreur quadratique moyenne de prédiction pour la réserve globale*

```
MSEP_decroissant = sum(err_proc)+sum(err_est)+2*sum(Covariance,na.rm=TRUE)
```

*****Cas de coefficient de corrélation constant*****

Code 3.17 *Erreur du processus*

```

q = sum(u)/sum(pr)
mse_u = 1
for(i in 1:n){
mse_u[i] = pr[i]/(n-sqrt(n))*sum(pr[1:n]*(u[1:n]/pr[1:n]-q)**2)}

```

Et on applique les différents code de (3.13) à (3.16).

Annexe C

Dans cette partie nous présentons les paiements cumulés et les primes acquises de la catégorie Dommages-Flottes respectivement utilisées ci-dessous :

années	1	2	3	4	5	6
2012	1660797	8139091	11084765	11376964	11793770	12407800
2013	3688432	14203620	16442652	18273256	18636434	
2014	12001036	23379263	30388167	32566569		
2015	4753369	12302891	13868054			
2016	7605543	12452576				
2017	7963762					

TABLE 23 – Le triangle des règlements cumulés pour la catégorie DF

DP	1	2	3	4	5	6
P_i	42999032	78096106	78699872	79740482	178217497	151689914

TABLE 24 – Les primes acquises pour la catégorie DF.

Résumé

L'objet de ce mémoire est de présenter les différentes méthodes qui peuvent être appliquées en pratique au sein d'une société d'assurance pour estimer les provisions techniques, c'est-à-dire la couverture des engagements portés par la société vis-à-vis de ses assurés.

Dans ce contexte, le calcul des différents éléments constituant les provisions techniques nécessite la mise en place de techniques actuarielles nouvelles, plus prudentes, permettant de prendre en compte, au-delà du simple calcul de l'espérance (approche déterministe), l'incertitude liée au risque concerné. Cette approche nécessite des méthodes de calcul stochastiques, permettant d'évaluer la volatilité des provisions et ainsi de pouvoir intégrer une marge de sécurité.

Les provisions techniques présentées dans ce mémoire répondent aux spécificités liées à l'assurance, et au risque de type non-vie. L'essentiel du sujet concerne donc l'estimation des provisions pour sinistres à payer (PSAP), et comparer les résultats selon une approche déterministe puis stochastique.

Mots-clés : Provision, estimation, Chain Ladder, Bornhuetter Ferguson, Mack, réserve, Bornhuetter Ferguson stochastique.

Abstract

This thesis aims at addressing the different methods which are applied in insurance industry in order to estimate the required technical reserves meaning the coverage of commitments made by the company towards the insured party.

As it is, new actuarial calculating methods are required to calculate all technical provisions. In addition to the simple mathematical expectation (deterministic approach), these new calculating methods take into account the uncertainty linked to the taken risk through stochastic calculations. This enables to evaluate provisions volatility and thus incorporate an additional caution.

The technical provisions addressed on this paper are typically related to insurance industry and to the specific non life risk. Consequently, the main topic concerns the estimation of the outstanding claims reserves, according to a deterministic approach and then a stochastic one.

Keywords : Provision, estimation, Chain Ladder, Bornhuetter Ferguson, Mack, reserve, Bornhuetter Ferguson stochastique.