

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH  
جامعة أمحمد بوقرة بومرداس  
UNIVERSITY M'HAMED BOUGARA OF BOUMERDES  
كلية المحروقات والكيمياء  
FACULTY OF HYDROCARBONS AND CHEMISTRY



Département Automatisation et Electrification  
des Procédés



**Polycopié de cours**

**SUPPORT DE COURS : TRAITEMENT  
NUMERIQUE DU SIGNAL**

**KHEBLI Abdelmalek**

**Maître de Conférences Classe «B» - UMBB**

**Année Universitaire : 2021/2022**



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH  
جامعة أمحمد بوقرة بومرداس  
UNIVERSITY M'HAMED BOUGARA OF BOUMERDES  
كلية المحروقات والكيمياء  
FACULTY OF HYDROCARBONS AND CHEMISTRY



Département Automatisation et Electrification  
des Procédés

## **Polycopié de cours**

**SUPPORT DE COURS : TRAITEMENT  
NUMERIQUE DU SIGNAL**

**KHEBLI Abdelmalek**

**Maître de Conférences Classe «B» - UMBB**

**Année Universitaire : 2021/2022**

# Sommaire

## Avant-propos

## Table des matières

	<b>Chapitre 1: Introduction au traitement de signal</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction.....	1
1.2	Qu'est-ce qu'un signal ?.....	1
1.2.1	Exemples de signaux.....	2
1.3	Bruit.....	3
1.4	Rapport signal sur bruit.....	3
1.4.1	Signification de SNR.....	3
1.5	Classification des signaux.....	4
1.5.1	Classification phénoménologique.....	5
1.5.1.1	Sous-classes de signaux déterministes.....	5
1.5.2	Classification spectrale.....	6
1.5.2.1	Analyseur de spectre.....	6
1.5.3	Classification morphologique(signal continu ou discret).....	7
1.5.4	Classification énergétique .....	8
1.5.4.1	Energie d'un signal.....	9
1.5.4.2	Puissance d'un signal.....	10
	<b>Chapitre 2 : Série et Transformée de Fourier</b>	<b>11</b>
2.1	Introduction.....	11
2.2	Séries de Fourier.....	11
2.2.1	Définition de la série de Fourier.....	11
2.2.2	Fonctions périodiques.....	12
2.2.3	La décomposition en série de Fourier de signaux périodiques.....	12
2.2.4	Conditions de Dirichlet pour la convergence simple de la série de Fourier .....	13
2.2.5	Symétrie et les coefficients de Fourier.....	16
2.2.5.1	Symétrie paire.....	16
2.2.5.2	Symétrie impaire.....	17
2.2.6	Formes alternatives de la série de Fourier.....	17
2.2.7	Décroissance des coefficients de Fourier .....	18
2.2.8	Spectre de Fourier d'un signal.....	18
2.2.9	Égalité de Parseval - Définition et Explications.....	22

2.3	La transformée de Fourier.....	24
2.3.1	Application de la transformée de Fourier.....	25
2.3.2	Transformée de Fourier d'une fonction.....	25
2.3.3	Conditions d'existence.....	26
2.3.4	Quelques exemples de calcul de transformées de Fourier.....	26
2.3.5	Propriétés de la transformée de Fourier.....	30
2.3.5.1	Linéarité .....	31
2.3.5.2	Translation temporelle.....	32
2.3.5.3	Dérivation.....	33
2.3.5.4	Intégration.....	34
2.3.5.5	Changement d'échelle.....	35
2.3.5.6	Dualité (Symétrie).....	36
2.3.5.7	Dérivation fréquentielle.....	36
2.3.5.8	Translation fréquentielle.....	37
2.3.6	Relation de Parseval (Théorème de Parseval).....	37
2.3.7	Transformée de Fourier d'un produit de convolution.....	38
	<b>Chapitre 03 : Le filtrage analogique</b>	40
3.1	Introduction.....	40
3.2	Applications .....	40
3.3	Différents types de filtres.....	41
3.4	Théorie du filtrage.....	41
3.4.1	Fonction de transfert ou transmittance d'un quadripôle linéaire.....	41
3.4.2	Fonction d'atténuation.....	42
3.4.3	Gain d'un filtre.....	42
3.4.4	Fréquence de coupure.....	43
3.4.5	Diagramme de Bode.....	43
3.4.6	Gabarit.....	43
3.4.7	Notion de fonction d'atténuation.....	44
3.5	Filtre idéal.....	45
3.5.1	Principaux filtres idéaux.....	45

3.5.1.1	Filtre passe-bas.....	45
3.5.1.2	Filtre passe-haut.....	45
3.5.1.3	Filtre passe-bande.....	46
3.5.1.4	Filtre coupe-bande (ou réjecteur de bande).....	46
3.6	Structures classiques pour réaliser des filtres actifs.....	47
3.6.1	Cellule de Rauch.....	47
3.6.1.1	Cellule de Rauch pour filtre passe-bas du second ordre.....	48
3.6.1.2	Filtre actif passe-bande du 2ième ordre - Structure de Rauch.....	49
3.6.2	Structure de Sallen et Key.....	50
3.6.2.1	Structure de Sallen et Key pour filtre passe-bas du second ordre.....	51
3.7	Transformation passe-bas -> passe-haut.....	53
3.7.1	Structure de Rauch pour filtre passe-haut du second ordre.....	54
3.7.2	Structure de Sallen et Key pour filtre passe-haut du second ordre.....	54
3.8	Réalisation de filtres.....	55
3.8.1	Cahier de charge: gabarit.....	55
3.8.2	Différents types de filtres.....	56
3.8.3	Etude du filtre passe-bas de Butterworth.....	57
3.8.3.1	Introduction.....	57
3.8.3.2	Détermination de l'ordre N du filtre pour qu'il satisfasse à un gabarit.....	58
3.8.3.3	Détermination de l'ordre d'un filtre par l'analyse de son diagramme de Bode du gain.....	59
3.8.3.4	Détermination de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas de Butterworth.....	59
3.8.3.5	Détermination des pôles du filtre de Butterworth.....	60
	Références.....	65

## AVANT-PROPOS

Ce présent support de cours pour la matière Traitement Numérique du signal, s'adresse aux étudiants de la faculté des hydrocarbures et de la chimie, spécialité Commande Automatique de la première année Master. Ce support est constitué de trois chapitres :

- le premier chapitre présente une introduction au traitement de signal, en partant de Généralités sur les signaux, jusqu'à la classification des signaux;
- le deuxième chapitre traite la représentation de phénomènes  $2\pi$ -périodiques au moyen de séries de Fourier, en passant par la transformée de Fourier qui permet de représenter en fréquence des signaux qui ne sont pas périodiques.
- le troisième chapitre aborde l'étude des structures de filtres analogiques.

# **Chapitre 1: INTRODUCTION AU TRAITEMENT DE SIGNAL**

## **1.1 Introduction**

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement, d'analyse et d'interprétation des signaux. Parmi les types d'opérations envisageables sur ces signaux, on peut dénoter le contrôle, le filtrage, la compression de données, la transmission de données, le débruitage, la déconvolution, la prédiction, l'identification, la classification, etc.

Bien que cette discipline trouve son origine dans les sciences de l'ingénieur (spécifiquement l'électronique et l'automatique), elle fait actuellement beaucoup appel à de nombreux domaines des mathématiques, comme la théorie du signal, les processus stochastiques, les espaces vectoriels et l'algèbre linéaire et des mathématiques appliquées, surtout la théorie de l'information, l'optimisation ou encore l'analyse numérique.

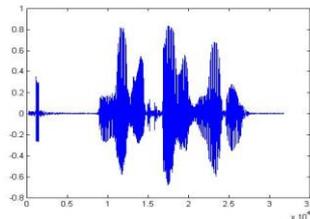
## **1.2 Qu'est-ce qu'un signal ?**

Un signal est une grandeur physique variable contenant l'information à transmettre entre une source et son récepteur. Cette grandeur peut être électrique,

optique, acoustique...Ou bien un **signal** est la **variation d'une grandeur électrique** qui peut être soit une **tension** soit un **courant**.

### 1.2.1 Exemples de signaux

- **Signal 1-D** :  $u(t)$ , par exemple un signal sonore issu d'un microphone.



**Figure 1.1:** Signal de parole

- **Signal 2-D** :  $u(x,y)$ , par exemple une image en niveaux de gris issue d'un capteur CCD (capteur photographique).



**Figure 1.2 :** Image en niveaux de gris

- **Signal 3-D** :  $u(x,y,z)$ , par exemple une image tridimensionnelle issue d'un scanner ou bien  $u(x,y,t)$ , un film issu d'une caméra.



**Figure 1.3 :** Signal 3-D  $u(x,y,t)$ , un film issu d'une caméra

### 1.3 Bruit

Un bruit correspond à tout phénomène perturbateur gênant la transmission ou l'interprétation d'un signal.

### 1.4 Rapport signal sur bruit

Le rapport signal sur bruit (S/N) (*Signal to Noise Ratio* S/N ou SNR en anglais) mesure la quantité de bruit contenue dans le signal. Il s'exprime par le rapport des puissances du signal ( $P_S$ ) et du bruit ( $P_N$ ). Il est souvent donné en décibels (dB) par :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log \frac{P_S}{P_N}$$

#### 1.4.1 Signification de SNR

Les nombres de rapport signal /bruit sont tous liés à la puissance du signal désiré par rapport au bruit indésirable. Plus le nombre est grand, plus le signal souhaité "ressort" par rapport au bruit, ce qui signifie une transmission plus claire d'une meilleure qualité technique. Un nombre négatif signifie que le bruit est plus fort que le signal désiré, ce qui peut causer des problèmes, comme une conversation téléphonique trop brouillée pour comprendre. Pour une transmission de la voix de bonne qualité, comme un signal cellulaire, le SNR atteint en moyenne 30 dB, ou un signal 1000 fois plus fort que le bruit. Certains équipements audio ont un rapport signal sur bruit de 90 dB ou mieux; dans ce cas, le signal est 1 milliard de fois plus fort que le bruit.

#### Exemple1 :

l'amplitude du signal à la sortie d'un amplificateur est de 224mv tandis que le niveau du bruit est de 10mv. le rapport S/N est de 502

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{P_S}{P_N} = \frac{(224)^2}{(10)^2} = 502$$

ce qui équivaut à 27db

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log \frac{P_S}{P_N} = 10 \log(502) = 27db$$

**Exemple 2: S/N en chromatographie**

Toutefois les valeurs indiquées par des logiciels de traitement comme par exemple le logiciel de retraitement des chromatogrammes peuvent parfois être non fiables, notamment pour des signaux proches du bruit de fond. Il est donc important d'être en capacité de l'estimer manuellement.

Une manière simple est de procéder ainsi, pour une analyse ponctuelle :

- 1- Faire un zoom sur le chromatogramme** au voisinage du temps de rétention du composé analysé voir figure 1.4;
- 2- De part et d'autre du pic** du composé, sur une fenêtre de temps suffisamment large (environ 10 x largeur à mi-hauteur du pic) : **tracer deux droites**, l'une passant par le signal maximum du bruit, l'autre par le signal minimum du bruit voir figure 1.4 ;
- 3- Evaluer la hauteur maximale ( $h_{\max}$ ) de variation du bruit de fond** (elle sera prise comme valeur du bruit « N »);
- 4- En déduire une estimation du rapport S/N** pour le pic du composé obtenu sur le chromatogramme considéré.

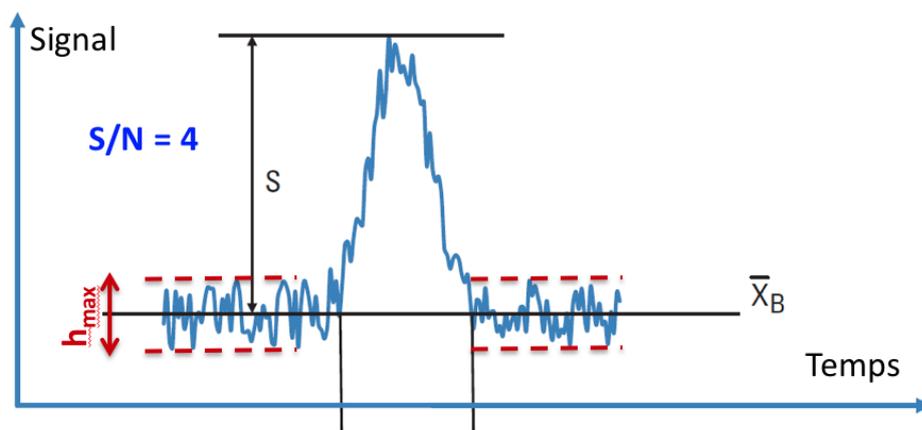


Figure 1.4: S/N en chromatographie

**1.5 Classification des signaux**

Pour faciliter l'étude des signaux, différents modes de classification peuvent être envisagés :

- Classification temporelle des signaux (Classification phénoménologique),
- Classification spectrale,
- Classification morphologique (signal continu ou discret),

- Classification énergétique.

### 1.5.1 Classification phénoménologique

On considère la nature de l'évolution du signal en fonction du temps. Il apparaît deux types de signaux :

- **Les signaux déterministes** : ou signaux certains, leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement modélisée par une fonction mathématique. On retrouve dans cette classe les signaux périodiques, les signaux transitoires, les signaux pseudo aléatoires,... etc.

- **Les signaux aléatoires** : leur comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont stationnaires.

#### 1.5.1.1 Sous-classes de signaux déterministes

Parmi les signaux déterministes, on distingue:

- **Les signaux périodiques**

Un **signal** est dit **périodique** lorsque celui-ci se reproduit identique à lui-même sur un intervalle de temps régulier voir figure 1.5. C'est par exemple le cas des battements du cœur ou le mouvement des planètes autour du Soleil.

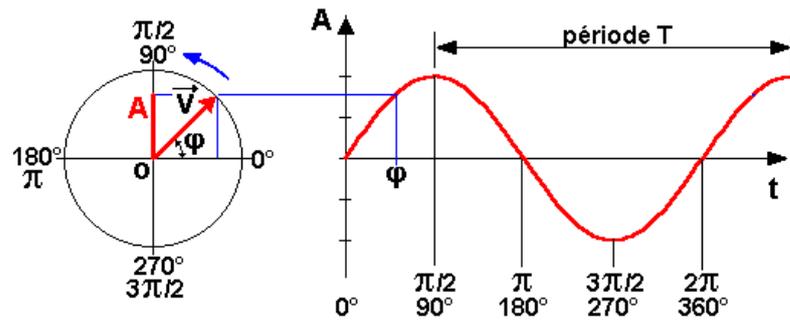
Mathématiquement, on dit qu'une fonction  $x(t)$  est périodique de période  $T > 0$  lorsque la relation  $x(t + T) = x(t)$  est satisfaite pour tout  $t$ .

-L'intervalle de temps minimal nécessaire pour retrouver la même valeur du signal est appelé période  $T$  et s'exprime en seconde (s).

-La fréquence  $f$  du signal, exprimée en Hertz (Hz), est l'inverse de la période  $T$ .

Les deux formules qui permettent de calculer la fréquence  $f$  (en Hz) en fonction de la période  $T$  (en seconde) et réciproquement sont :

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ou} \quad T = \frac{1}{f}$$



22

**Figure 1.5 :** Formation d'un signal sinusoïdal. La durée d'une période correspondant à une rotation de 360 degrés (ou 2 pi radians) sur le cercle trigonométrique

Exemple de calcul

Pour une fréquence de 50 Hz la période est égale à :  $T=1/50 = 20$  ms.

- les signaux non périodiques,

Un **signal non périodique** est un **signal** qui varie au cours du temps, qui n'est pas prédictible.

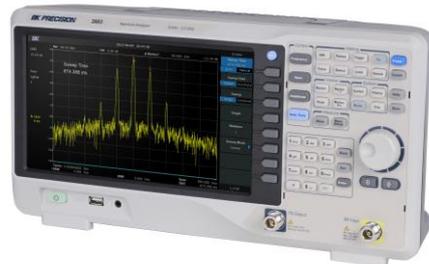
**1.5. 2. Classification spectrale**

L'analyse spectrale d'un signal ( ou la répartition énergétique en fonction de la fréquence ) conduit à une classification :

- Signaux de basses fréquences.
- Signaux de hautes fréquences.
- Signaux à bande étroite.
- Signaux à large bande.

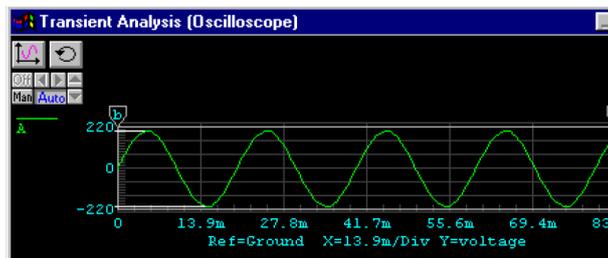
**1.5. 2.1 Analyseur de spectre**

Un analyseur de spectre figure 1.5 est un appareil de mesure, qui représente un signal en fonction de sa fréquence. Alors qu'un oscilloscope représente l'amplitude d'un signal en fonction du temps, l'analyseur de spectre représente l'amplitude d'un signal en fonction de sa fréquence.



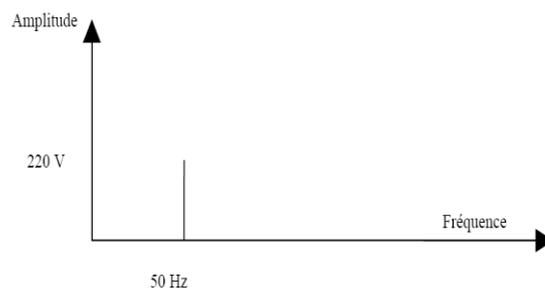
**Figure 1.5 :** Analyseur de spectre

La Société Nationale de l'Electricité et du gaz (sonelgaz) nous fournit un signal à 50 Hz, si on observe l'évolution de la tension en fonction du temps nous observerions le signal suivant :



**Figure 1.6:** Représentation à l'oscilloscope de la tension secteur

Il s'agit d'un signal à 50 Hz, c'est-à-dire un signal dont la seule amplitude non nulle est à 50 Hz. Si on représente dans le domaine fréquentiel (mesure sous l'analyseur de spectre), nous observerions le signal suivant (voir chapitre 2):



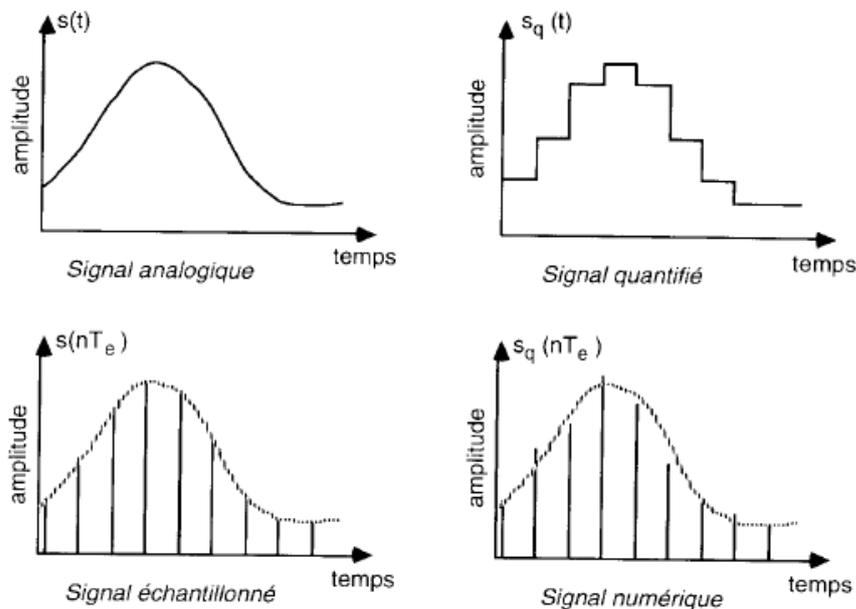
**Figure 1.7 :** Représentation spectrale de la tension secteur

### 1.5.3 Classification morphologique(signal continu ou discret)

On distingue les signaux à variable continue des signaux à variable discrète ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue.

On peut distinguer quatre types de signaux dans cette classe (figure 1.8):

- Les **signaux analogiques** dont l'amplitude et le temps sont continus (signal analogique) :  $s(t)$  ;
- Les **signaux quantifiés** dont l'amplitude est discrète et le temps continu :  $s_q(t)$ . Ce type correspond à celui qui est fourni à la sortie d'un convertisseur numérique analogique pour la commande d'un actionneur ;
- Les **signaux échantillonnés** dont l'amplitude est continue et le temps discret :  $s(nT_e)$ . Ce type obtenu à l'aide d'un échantillonneur-bloqueur, est transmis à un circuit convertisseur analogique numérique pour obtenir un signal numérique utilisable par un ordinateur ;
- Les **signaux numériques** dont l'amplitude et le temps sont discrets :  $s_q(nT_e)$ . Ce dernier type correspond en réalité à une suite de nombres codés en binaire. Ces nombres, utilisés au sein d'un ordinateur.



**Figure 1.8** : Classification morphologique des signaux

### 1.5.4 Classification énergétique

On distingue deux grandes classes de signaux selon leur nature énergétique :

**Les signaux à énergie finie** : il possède une puissance moyenne nulle et une énergie finie. C'est le cas des signaux représentant une grandeur physique.

- Les signaux à puissance moyenne finie : il possède une énergie infinie et sont donc physiquement irréalisable. Cas des signaux périodiques.

#### 1.5.4.1 Energie d'un signal

Le signal dans les circuits électriques est généralement une tension ou un courant. L'énergie dissipée pendant une durée dans une résistance présentant à ses bornes une tension  $v(t)$  est donnée par:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} \frac{(v(t))^2}{R} dt \quad (1.1)$$

En courant on a:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} R(i(t))^2 dt \quad (1.2)$$

L'énergie dans chaque cas est proportionnelle à l'intégrale du carré du signal. Il est commode, le plus souvent, de considérer l'énergie normalisée. Dans ce cas la valeur de la résistance  $R$  est égale à l'unité. Ainsi les équations (1.1) et (1.2) auront la même forme. Il devient alors plus simple de définir l'énergie normalisée associée à tout signal  $s(t)$  par:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} (s(t))^2 dt \quad (1.3)$$

Si le signal  $s(t)$  est complexe. Cette énergie sera définie par:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} s(t)s(t)^* dt = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt \quad (1.4)$$

Un signal  $s(t)$  à énergie finie non nulle est un signal pour lequel l'équation (1.4) reste finie quand le domaine d'intégration s'étendra de  $-\infty$  à  $+\infty$ . En d'autre terme, il vérifie la condition suivante:

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < \infty \quad (1.5)$$

#### **Exemple 1**

Calculer l'énergie du signal  $s(t) = Ae^{-\frac{a}{2}|t|}$  pour  $a > 0$ .

#### **Solution**

La relation (1.5) donne:

$$E = A^2 \int_{-\infty}^0 e^{at} dt + A^2 \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{2A^2}{a}$$

Il s'agit d'un signal à énergie finie non nulle.

**1.5.4.2 Puissance d'un signal**

De nombreux signaux importants ne vérifient pas la condition (1.5). Le cas des signaux périodiques, du signal échelon unité, du signal signe de  $t$ :  $sgn(t)$ , etc. Ces signaux sont caractérisés par leur puissance moyenne.

La puissance moyenne d'un signal  $s(t)$  quelconque dans l'intervalle du temps  $[t_1, t_2]$  est donnée par :

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt \quad (1.6)$$

Un signal  $s(t)$  à puissance moyenne finie non nulle est celui pour lequel l'équation (1.6) reste finie quand le domaine d'intégration s'étendra de  $-\infty$  à  $+\infty$ . En d'autre terme, il vérifie la condition suivante:

$$0 < P = T \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt < \infty \quad (1.7)$$

**Exemple 2**

Calculer la puissance du signal constant  $s(t) = A$ .

**Solution**

La relation (1.7) donne:

$$P = T \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2$$

Ce signal a une puissance moyenne finie non nulle.

**Remarque :** On peut facilement vérifier que l'énergie du signal  $s(t) = A$  est infinie et que la puissance du signal  $s(t) = Ae^{-\frac{a}{2}|t|}$  est nulle. Par conséquent, un signal quelconque peut être classé uniquement soit à énergie finie, soit à puissance moyenne finie non nulle. Cependant, il existe des signaux qui ne peuvent être classés selon leur nature énergétique. Le signal  $s(t) = ae^{at}u(t)$ , où  $a > 0$  est un exemple de ces signaux.

# **CHAPITRE 2 : SÉRIE ET TRANSFORMÉE DE FOURIER**

## **2.1. Introduction**

Il y a deux domaines importants de description du signal selon la nature de la variable indépendante:

- Le domaine de description temporel de la forme  $s(t)$  dans lequel la variable indépendante est le temps  $t$ . Il s'agit du domaine de description usuel des signaux. Dans ce domaine de représentation le signal peut être caractérisé par sa durée, sa période fondamentale, ou son amplitude.
- Le domaine de description fréquentiel de la forme  $S(f)$  dans lequel la variable indépendante est la fréquence  $f$ . Dans ce domaine de représentation le signal peut être caractérisé par sa bande passante, sa fréquence fondamentale, ou sa phase.

Ces deux domaines de description du signal sont reliés entre eux par la transformation de Fourier qui constitue une généralisation de la Série de Fourier.

## **2.2 Séries de Fourier**

### **2.2.1 Définition de la série de Fourier**

Les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. En effet, la théorie des séries de Fourier permet de décomposer toute fonction périodique en une somme de sinusoides, c'est à dire en une somme de

fonctions trigonométriques que l'on appelle polynôme trigonométrique. Cette décomposition passe par le calcul de ce que l'on appelle les coefficients de Fourier.

**Applications :** Les séries de Fourier se rencontrent dans la décomposition de signaux périodiques, dans l'étude des ondes cérébrales, des courants électriques (i.e. résolution d'équations différentielles associés aux circuits électriques), dans la synthèse sonore, le traitement d'images, ...etc .

Les séries de Fourier permettent de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel pour des signaux périodiques, dans le cas contraire, on utilisera la Transformée de Fourier.

### 2.2.2 Fonctions périodiques

On appelle période d'une fonction  $f$  tout nombre réel  $T$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t + T) = f(t)$ . On dit que  $f$  est périodique si elle admet une période non nulle, et plus précisément qu'elle est  $T$ -périodique si  $T$  est une période strictement positive. La plus petite des valeurs de  $T > 0$  est appelée *moindre période* ou période de  $f$ .

#### Exemples

- $\sin(x)$  a pour période  $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$  et pour moindre période  $2\pi$ .
- $\sin(nx)$  a pour moindre période  $\frac{2\pi}{n}$ .
- $\tan(x)$  a pour moindre période  $\pi$ .

### 2.2.3 La décomposition en série de Fourier de signaux périodiques

Soit  $f(x)$  est une fonction définie sur un intervalle  $] -L, L[$  et déterminée à l'extérieur de l'intervalle par  $f(x + 2L) = f(x)$ , c'est à dire  $f(x)$  périodique de période  $T = 2L$ .

Donc la série de Fourier correspondante à  $f(x)$  est définie par :

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.1)$$

où  $a_n$  et  $b_n$  sont les coefficients de la série de Fourier.  $\frac{a_0}{2}$  est appelé valeur moyenne de  $f(x)$  sur une période ou composante continue du signal ou encore la valeur DC du signal. Ils sont déterminées à partir des relations suivantes :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.2)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.3)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (2.4)$$

**Remarques**

- Le terme  $a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$  est appelé **la fondamentale** du signal ou encore la **première harmonique** du signal.
- Le terme  $a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T} t\right)$  est appelé la **n<sup>ième</sup> harmonique** du signal.

**Attention:**

La série de Fourier  $S_f(x)$  correspond à  $f(x)$ , on sait pas si elle converge vers  $f(x)$ .

Le problème de la convergence peut donc s'énoncer comme suit :

*Sous quelles conditions la série  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_f(x)$  converge-t-elle vers  $f(x)$  ?*

Plusieurs types de convergence peuvent être considérées. Considérons par exemple la convergence simple donnée par la définition suivante :

Une série  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  converge simplement vers  $f(x)$  si et seulement si :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x)) = 0 \quad (2.5)$$

**2.2.4 Conditions de Dirichlet pour la convergence simple de la série de Fourier**

Le théorème de Dirichlet est une condition suffisante qui assure la convergence de la série de Fourier de  $S_f(x)$  vers  $f(x)$  . Les conditions de Dirichlet sont:

1.  $f(x)$  est définie sur  $[-L,L]$  sauf peut être en un nombre fini de points;
2.  $f(x)$  est périodique de période  $2L$ ;
3.  $f(x)$  et  $f'(x)$  sont continues par morceaux dans  $[-L,L]$ ;

alors la série de Fourier  $S_f(x)$  converge vers :

- $f(x)$  si  $x$  est un point **de continuité** de  $f$
- $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$  si  $x$  est un point **de discontinuité** de  $f$ .

Donc, on peut écrire:

$$S_f(x) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \text{ en tout point de continuité}$$

et

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \text{ si } x \text{ est un point de discontinuité.}$$

**Remarques:**

Rappelons qu'une fonction  $f$  est dite **continue par morceaux** sur  $[a,b]$  si :

1.  $f$  est continue sur  $[a,b]$  sauf en un nombre fini de points  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ;
2. En chacun des points  $x_1, x_2, \dots, x_k$  les limites à gauche et à droite de  $f$  existent c-à-d :

$$\forall j = 1, \dots, k, f(x_j^-) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_j - h) \text{ et } f(x_j^+) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_j + h) \text{ existent.}$$

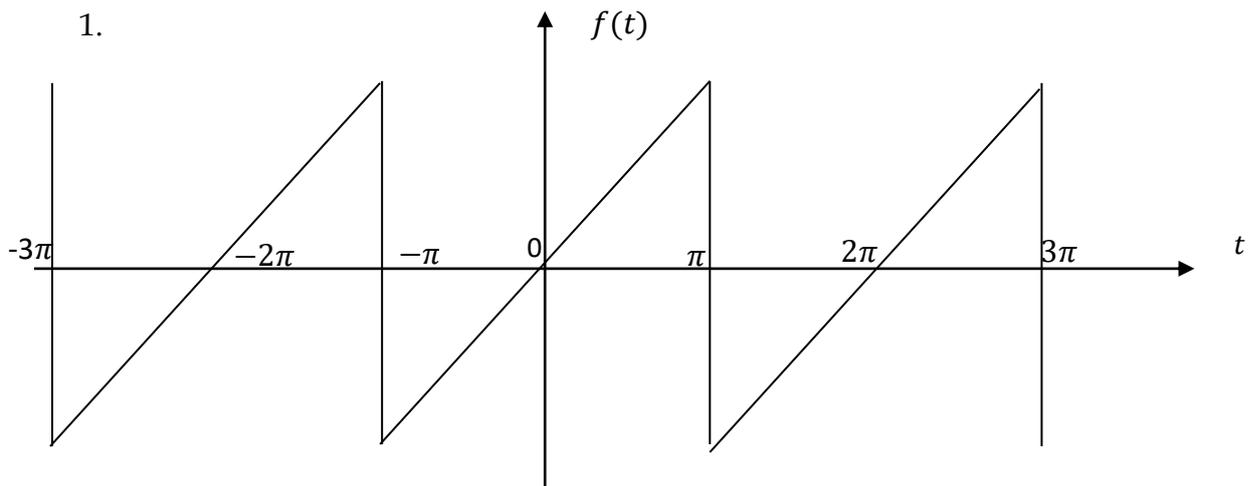
**Exemple01:**

Soit la fonction  $f(t) = t$  définie sur  $[-\pi, \pi]$  et périodique de période  $2\pi$ .

1. Tracer  $f(t)$ ;
2. Cette fonction vérifie les conditions de Dirichlet de la série de Fourier, calculer les coefficients  $a_n, b_n$  et  $a_0$  de la série de Fourier.

**Solution :**

1.



2. Calcul de  $a_0, a_n, b_n$

Calcul de  $a_0$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \equiv a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \text{ avec } L = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right)$$

$$a_0 = 0$$

Calcul de  $a_n$ 

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nx) dx$$

Une intégration par parties donne:

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \cos(nt) \end{cases} \equiv \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{\sin(nt)}{n} \end{cases}$$

$$a_n = \int uv' dt = uv| - \int vu' dt$$

$$\text{Donc } a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \frac{t \sin(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ 0 + \frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Donc,  $a_n = 0$

Calcul de  $b_n$ 

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt$$

Une intégration par parties donne:

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin(nt) \end{cases} \equiv \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \end{cases}$$

$$b_n = \int uv' dt = uv| - \int vu' dt$$

$$b_n = \frac{-1}{\pi n} [t \cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt$$

$$= \frac{-1}{\pi n} (\pi \cos(n\pi) + \pi \cos(-n\pi)) + \frac{1}{n\pi} \left[ \frac{\sin(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2 \pi} (\sin(n\pi) + \sin(n\pi))$$

Donc,  $b_n = -\frac{2}{n} \text{Cos}(n\pi)$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \\ -\frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Donc, on peut écrire

$$S_f(t) = f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \text{Sin}(kt) \quad \text{sur } [-\pi, \pi]$$

**2.2.5 Symétrie et les coefficients de Fourier**

Il y a deux types de symétrie qui peuvent aider à évaluer les coefficients de Fourier :

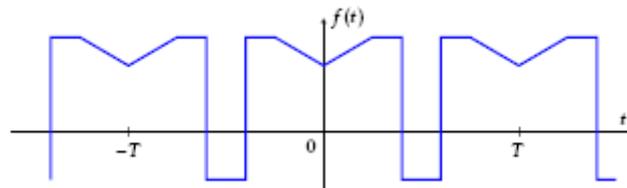
1. Symétrie paire
2. Symétrie impaire

**2.2.5.1 Symétrie paire**

Une fonction est dite paire si :

$$f(t) = f(-t) \tag{2.6}$$

c'est-à-dire qu'on peut faire une copie miroir autour de l'axe y. La figure 2.1 montre un exemple de fonction paire.



**Figure 2.1** - Exemple de fonction paire

Pour des fonctions paires, on peut démontrer que les coefficients de Fourier sont :

$$a_0 = 2 \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \tag{2.7}$$

et

$$a_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \text{Cos} \left[ \left( \frac{n2\pi}{T} \right) t \right] dt \tag{2.8}$$

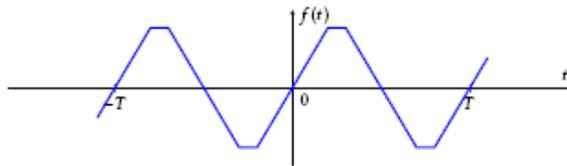
Tous les  $b_n$  sont nuls ( $b_n = 0$ )

**2.2.5.2 Symétrie impaire**

Une fonction est dite impaire si :

$$f(t) = -f(-t) \tag{2.9}$$

c'est-à-dire que  $f(x)$  est symétrique par rapport à l'origine . La figure 2.2 montre un exemple de fonction impaire.



**Figure 2.2** - Exemple de fonction impaire

Pour des fonctions impaires alors tous les  $a_n$  sont nuls ( $a_n = 0$ ) et :

$$b_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \text{Sins} \left[ \left( \frac{n2\pi}{T} \right) t \right] dt \tag{2.10}$$

**2.2.6 Formes alternatives de la série de Fourier**

Il y a deux autres façons d'exprimer la série de Fourier : on peut utiliser la forme d'un développement en harmoniques, ou la forme exponentielle. La forme d'un développement en harmoniques est la suivante :

$$f(t) = S_f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{Cos}(n\omega t - \varphi) \tag{2.11}$$

avec

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

et  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$\varphi$  phase à l'origine des temps telle que:  $\varphi = \text{arctg}(\frac{b_n}{a_n})$

La décomposition en série de Fourier peut aussi s'écrire en utilisant la notation complexe (La forme exponentielle) suivante :

$$f(t) = S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} \quad (2.12)$$

et 
$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

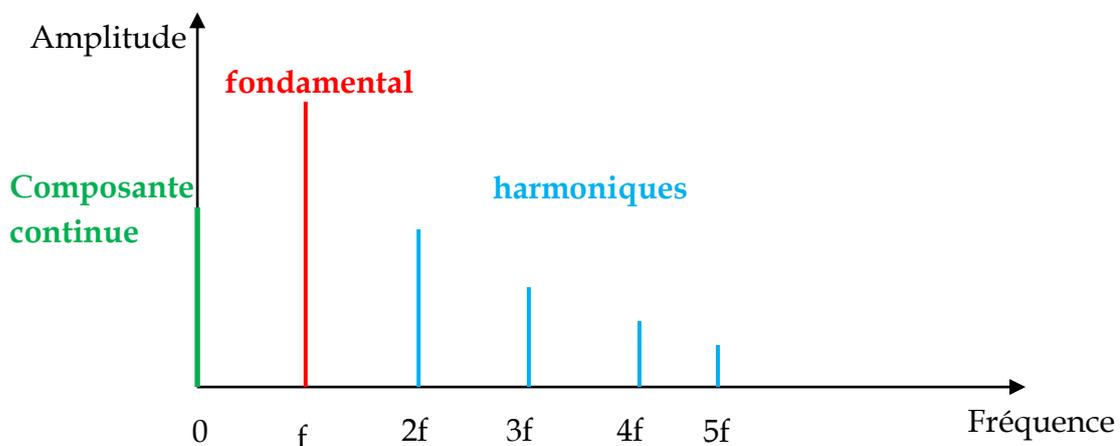
**2.2.7 Décroissance des coefficients de Fourier**

Plus une fonction est **régulière**, plus ses coefficients de Fourier tendent rapidement **vers zéro à l'infini**.

Ce résultat a en physique une conséquence très importante : si en théorie, le nombre des harmoniques est infini, il suffit souvent en pratique de calculer seulement les premiers termes. La suite trigonométrique ainsi obtenue donnera une approximation d'autant meilleure de la fonction  $f(t)$  que l'amplitude des coefficients de Fourier diminuera plus vite si le rang augmente.

**2.2.8 Spectre de Fourier d'un signal**

On appelle spectre d'un signal le diagramme en bâton figure 2.3 représentant  $|A_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  en fonction de  $n$  fois  $\omega$  ( $n\omega$ ). Comme il est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on dessine souvent le demi spectre. Autrement dit: Le spectre d'un signal est la représentation en fonction de la fréquence des amplitudes des différentes composantes présentes dans le signal.



**Figure 2.3 - Spectre d'un signal**

- ✓ La composante continue du signal correspond à  $f = 0$ .
- ✓ La composante fondamentale donne de la fréquence du signal.
- ✓ Les harmoniques sont de fréquences multiples de celle de la fondamentale.

**Remarques:**

1. Le spectre d'une fonction sinusoïdale ne comporte évidemment qu'une seule raie à la fréquence de la sinusoïde.
2. Le problème complet exige la connaissance des deux spectres  $a_n$  et  $b_n$ , qui équivaut à celle de l'amplitude  $A_n$  et de la phase  $\varphi_n$  de l'harmonique de rang  $n$ . Dans certains cas, la phase ne joue aucun rôle: ainsi, dans un son complexe, l'oreille distingue chaque harmonique par son amplitude et n'est pas sensible à  $\varphi_n$  (lorsque on trace un spectre on ne s'intéresse sauf exception qu'à l'amplitude de la composante et pas à sa phase)

**Exemple d'application**

On considère le signal  $x(t)$  donné par:

$$x(t) = 6 + 4\cos(50\pi t) + \sin(100\pi t)$$

1. Quelle est la valeur moyenne du signal  $x(t)$
2. Tracer son spectre unilatéral d'amplitude et de phase
3. Donner le développement en série de Fourier complexe du signal  $x(t)$
4. En déduire le spectre bilatéral d'amplitude et de phase.

**Solution****1. Calcul de la valeur moyenne de  $x(t)$** 

On a

$$\begin{aligned} x(t) &= 6 + 4\cos(50\pi t) + \sin(100\pi t) \\ &= 6 + 4\cos(2\pi \times 25t) + \sin(2\pi \times 25 \times 2t) \end{aligned}$$

avec  $f = \frac{1}{T} = 25 \text{ Hz}$  et  $\frac{a_0}{2} = 6, a_1 = 4, a_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1$

La valeur moyenne de  $x(t)$  est :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad \text{avec } T = \frac{1}{25}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \left[ \int_0^T 6dt + 4 \int_0^T \underbrace{\cos(2\pi \times 25t)}_{=0} dt + \int_0^T \underbrace{\sin(2\pi \times 25 \times 2t)}_{=0} dt \right]$$

Donc,  $\frac{a_0}{2} = \frac{6}{T} [t]_0^T = 6$ .

**2. Traçage du spectre unilatéral d'amplitude et de phase**

On a :

$$x(t) = 6 + 4\cos(50\pi t) + \sin(100\pi t)$$

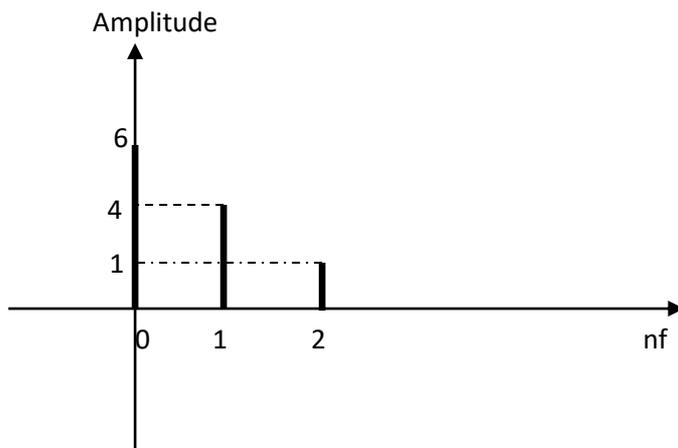
On doit mettre  $\sin(100\pi t)$  sous forme de **Cosinus** :  $\sin(100\pi t) = \cos(100\pi t - \frac{\pi}{2})$

Donc,

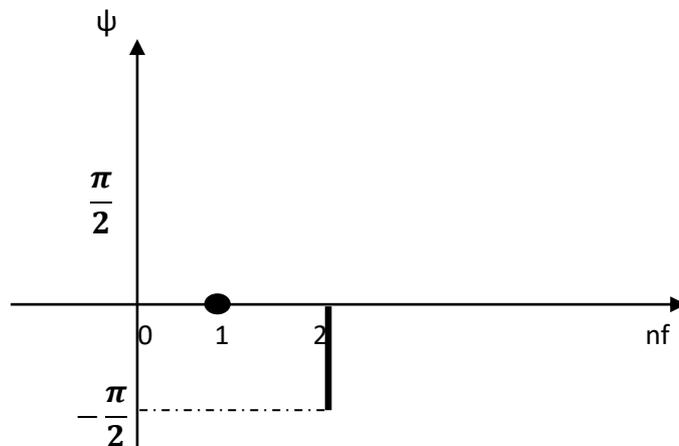
$$x(t) = 6 + 4\cos(50\pi t) + \cos(100\pi t - \frac{\pi}{2})$$

Par identification de  $x(t)$  avec  $S_f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi)$  on trouve :

$$A_0 = 6, A_1 = 4, A_2 = 1, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$$



**Figure 2.4** - Spectre unilatéral d'amplitude du signal  $x(t)$



**Figure 2.5** - Spectre unilatéral de phase du signal  $x(t)$

**3. Le développement en série de Fourier complexe du signal  $x(t)$** 

On a

$$x(t) = 6 + 4\cos(50\pi t) + \sin(100\pi t)$$

$$\text{et } \cos(50\pi t) = \frac{e^{j50\pi t} - e^{-j50\pi t}}{2} \text{ et } \sin(100\pi t) = \frac{e^{j100\pi t} - e^{-j100\pi t}}{2j}$$

Donc,

$$x(t) = 6 + 4 \left( \frac{e^{j50\pi t} - e^{-j50\pi t}}{2} \right) + \frac{e^{j100\pi t} - e^{-j100\pi t}}{2j}$$

$$x(t) = 6 + 2e^{j50\pi t} + 2e^{-j50\pi t} + \frac{e^{j100\pi t}}{2j} - \frac{e^{-j100\pi t}}{2j} \quad (2.13)$$

Par identification de (2.13) avec l'équation (2.12), on trouve :

$$C_0 = 6, C_1 = 2, C_{-1} = 2, C_2 = \frac{1}{2j}, C_{-2} = -\frac{1}{2j}$$

**4. Traçage du spectre bilatéral d'amplitude et de phase**

$$|C_1| = 2, |C_{-1}| = 2, |C_2| = \frac{1}{2}, |C_{-2}| = \frac{1}{2}, C_0 = 6$$

**N.B: Argument de la formule des nombres complexes**

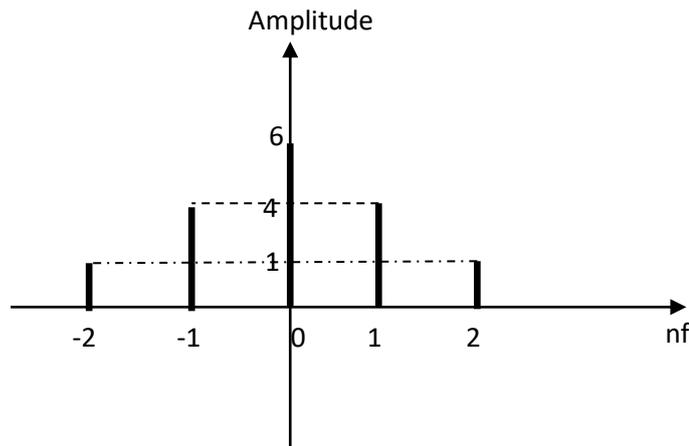
Sous forme polaire, un nombre complexe est représenté par l'équation  $r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ , ici,  $\theta$  est l'argument. La fonction argument est notée  $\arg(z)$ , où  $z$  désigne le nombre complexe, c'est-à-dire  $z = x + jy$ . Le calcul de l'argument complexe peut se faire en utilisant la formule suivante :  $\arg(z) = \arg(x+jy) = \tan^{-1}(y/x)$

Par conséquent, l'argument  $\theta$  est représenté par :  $\theta = \tan^{-1}(y/x)$

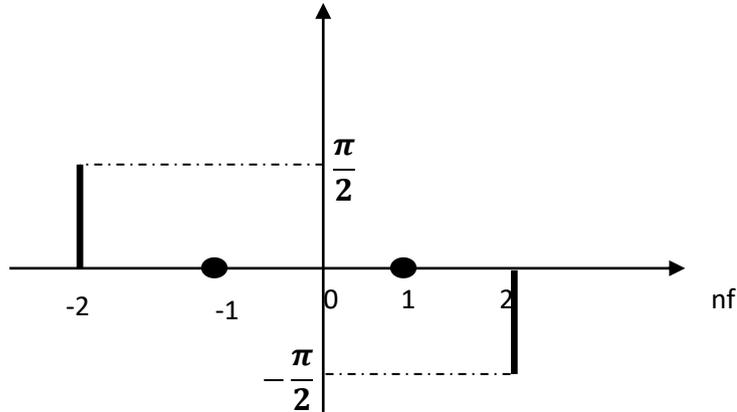
Donc,  $\arg(C_0) = 0, \arg(C_1) = \arg(C_2) = 0$  (car  $C_1$  et  $C_2$  sont des nombres réels)

$$\arg(C_2) = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{0}\right) = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \text{ (car } C_2 = -\frac{j}{2}\text{)}$$

$$\arg(C_{-2}) = \frac{\pi}{2}$$



**Figure 2.6** - Spectre bilatéral d'amplitude du signal  $x(t)$



**Figure 2.7** - Spectre bilatéral de phase du signal  $x(t)$

### 2.2.9 Égalité de Parseval - Définition et Explications

L'égalité de Parseval (parfois appelée également **Théorème de Parseval** ou **Identité de Rayleigh**) est une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier. Cette formule peut être interprétée comme une généralisation du théorème de Pythagore pour les séries dans les espaces de Hilbert.

Dans de nombreuses applications physiques (courant électrique par exemple), cette formule peut s'interpréter comme suit : l'énergie totale s'obtient en sommant les contributions des différents harmoniques. L'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie : fréquentielle ou temporelle.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df$$

L'égalité de Parseval d'une fonction  $f(t)$  périodique de période  $2\pi$  est donné par :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t) dt$$

### Remarques

1. Si  $f(t)$  est une fonction paire  $\leftrightarrow f(t)^2$  est une fonction paire alors :

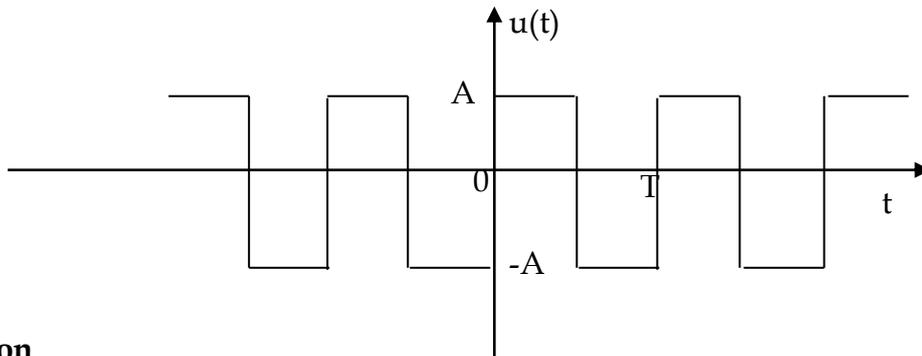
$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t) dt$$

2. Si  $f(t)$  est une fonction impaire  $\leftrightarrow f(t)^2$  est une fonction paire alors :

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t) dt$$

### Exemple d'utilisation de la formule de Parseval en électronique

Quel est le pourcentage de la puissance du signal  $u(t)$  ci-dessous, transporté par les 4 premières harmoniques du signal?



### Solution

On va calculer la puissance du signal  $u(t)$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 dt = A^2$$

Donc la puissance moyenne dissipée par ce signal dans une résistance de  $1\Omega$  est égale  $A^2$ .

On sait que la série de Fourier de  $u(t)$  est:

$$u(t) = S_u(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\omega t)}{2n+1}$$

$$u(t) = \frac{4A}{\pi} (\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \dots)$$

Donc,

Amplitude du fondamental est  $\frac{4A}{\pi}$

Amplitude de l'harmonique 2 = 0

Amplitude de l'harmonique 3 =  $\frac{4A}{3\pi}$

La puissance moyenne dissipée par les 4 premières harmoniques de ce signal dans un résistance de  $1 \Omega$  est donnée par :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt$$

avec  $\frac{a_0^2}{4} = 0$  et  $a_n = 0$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2 + a_4^2 + b_4^2) &= \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left(\frac{4A}{\pi}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{4A}{3\pi}\right)^2 + 0^2 \right) \\ &= \frac{16A^2}{2\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{9} \right) = \frac{80A^2}{9\pi^2} \end{aligned}$$

Le pourcentage de puissance transporté par les 4 premières harmoniques est donc  $\frac{80}{9\pi^2} = 90\%$ .

### 2.3 La transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une opération qui permet de représenter en fréquence (développement sur une base d'exponentielles) des signaux qui ne sont pas périodiques. Il s'agit de l'analogie des séries de Fourier pour les fonctions périodiques (développement sur la base de fonctions sinusoïdales). Elle exprime la répartition fréquentielle de l'amplitude, de la phase et de l'énergie (ou de la puissance) des signaux considérés.

Une fonction non périodique pouvant être considérée comme une fonction dont la période est infinie. Ce passage à la limite nous fait passer des séries aux intégrales.

**2.3.1 Application de la transformée de Fourier**

Caractériser un signal par son spectre de fréquence permet notamment de mettre en évidence l'importance de l'harmonique fondamental ainsi que la décroissance plus ou moins rapide de l'amplitude des harmoniques de rang plus élevé. Il peut aussi servir à déterminer le nombre d'harmoniques nécessaires pour transmettre la quasi-totalité de l'énergie du signal (bande passante, coupe-bande...).

**2.3.2 Transformée de Fourier d'une fonction**

Soit  $x(t)$  un signal quelconque, on note  $X(w)$  ou  $TF[x(t)]$  sa transformée de Fourier telle que :

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.14)$$

avec  $w=2\pi f$

La transformée de Fourier inverse de  $X(w)$  est donnée par:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{j\omega t} dw \quad (2.15)$$

On note:  $x(t) \leftrightarrow X(w)$  ou  $X(w) = TF[x(t)]$  et  $x(t) = TF^{-1}[X(w)]$ .

$X(w)$  ou  $X(f)$  est une fonction complexe même si  $x(t)$  est réel. La transformée de Fourier contient donc une partie réelle et une partie imaginaire et est représentée facilement grâce à son module et à son argument :  $|X(f)|$  est appelé *spectre d'amplitude* et  $arg(X(f))$  le *spectre de phase du signal*. La variable  $f$  s'appelle la fréquence dont l'unité est le Hertz (en abrégé : Hz).

**Remarques importantes :**

1- La transformée de Fourier est un opérateur mathématique qui permet d'analyser et de représenter un signal dans le domaine fréquentiel ( $X(w)$  ou  $X(f)$  indique la "quantité de la fréquence  $f$ " présente dans le signal  $x(t)$  sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ ). La  $TF$  ne modifie pas le signal mais permet seulement de l'observer selon différents

points de vue (temporel ou fréquentiel). Il est important de retenir que  $x(t)$  et  $X(f)$  sont deux descriptions équivalentes du même signal. Ces deux fonctions contiennent la même information il s'agit juste de deux descriptions dans des domaines différents.

2- Pour représenter les transformées de Fourier de signaux, il est communément utilisé l'échelle logarithmique. Pour un signal acoustique, par exemple, on calcule  $20 \log(|X(f)|)$  et  $\arg(X(f))$ .

### 2.3.3 Conditions d'existence

Tous les signaux ne possèdent pas obligatoirement des transformées de Fourier. Pour qu'un signal  $x(t)$  ait une transformée de Fourier, il faut et suffit qu'il vérifie les conditions de Dirichlet suivantes :

1. Le signal  $x(t)$  soit absolument intégrable :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Le signal  $x(t) = \frac{1}{t}$  ne vérifie pas la condition 1.

2. Le signal  $x(t)$  possède un nombre fini de maxima et de minima sur tout intervalle fini. Le signal  $x(t) = \sin(\frac{1}{t})$  présente des sur-oscillations, lorsque  $t$  tend vers zéro, ne vérifie pas la condition 2
3.  $x(t)$  possède un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle fini,

#### NB:

Pratiquement tous les signaux à énergie finie vérifient ces conditions suffisantes. Cependant, certains signaux à puissance moyenne finie, en particulier les signaux périodiques, ne sont pas absolument intégrables et possèdent des transformées de Fourier en faisant intervenir l'impulsion de Dirac.

### 2.3.4 Quelques exemples de calcul de transformées de Fourier

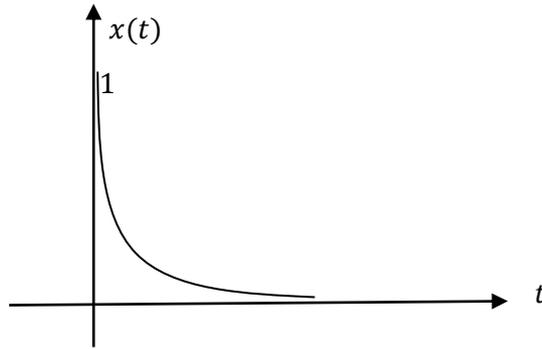
#### Exemple 1

Calculer la TF de  $x(t) = e^{-at}u(t)$ , avec  $a > 0$  et  $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

#### Solution

Calculer la TF de  $x(t)$

Le tracé de  $x(t)$  dans le domaine temporel est donné par la figure suivante

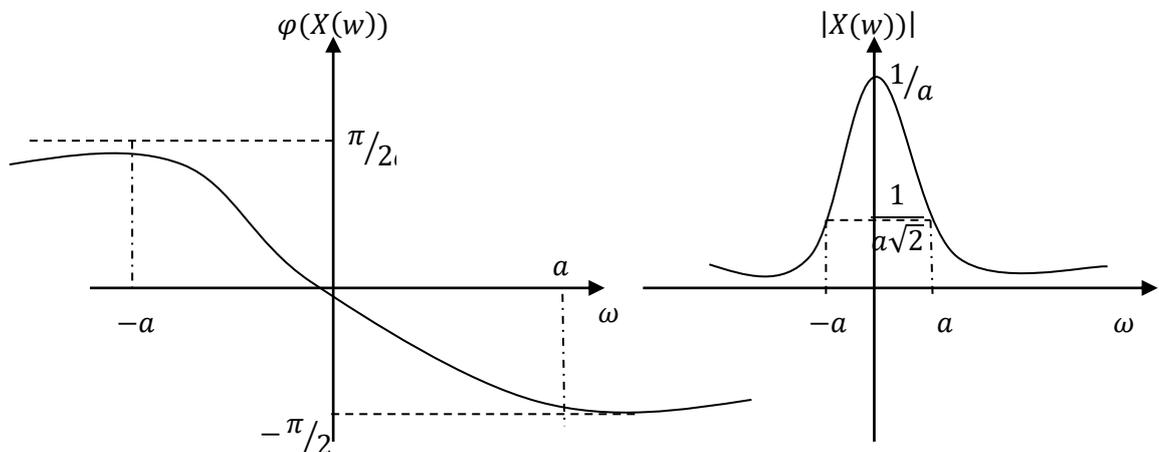


$$\begin{aligned}
 \text{On a } X(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jwt} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-jwt} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-(a+jw)t} dt \\
 &= \left[ \frac{-1}{a+jw} e^{-(a+jw)t} \right]_0^{+\infty}
 \end{aligned}$$

$$X(w) = \frac{1}{a + jw} = \frac{a}{a^2 + w^2} - j \frac{w}{a^2 + w^2}$$

Le graphe de  $|X(w)|$  en fonction de la fréquence est appelé **spectre d'amplitude du signal**, alors que le graphe de  $\arg(X(w))$  est son **Spectre de phase**.

Donc  $|X(w)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+w^2}}$  et  $\arg(X(w)) = \varphi(X(w)) = -\arctg\left(\frac{w}{a}\right)$



**Exemple 2**

Calculer la TF de  $x(t) = e^{-a|t|}$

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t > 0 \\ e^{at} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Donc  $X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

$$\begin{aligned} X(w) &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \left. \frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \right|_{-\infty}^0 - \left. \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega} \right|_0^{\infty} \end{aligned}$$

Donc

$$X(w) = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

**Exemple 3**

Calculer la TF de  $x(t) = \delta(t)$  (Impulsion de Dirac)

Par définition  $X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt$

avec  $\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

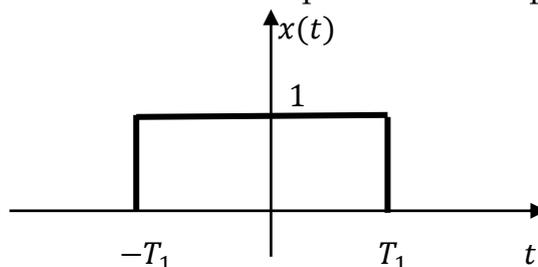
Donc

$$X(w) = \delta(0)e^0 = 1$$

**Exemple 4**

Calculer la TF de  $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < T_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Le tracé de  $x(t)$  dans le domaine temporel est donné par la figure suivante



Par définition  $X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$

$$= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$X(\omega) = \frac{-1}{j\omega} [e^{-j\omega T_1} - e^{+j\omega T_1}]$$

$$= \frac{1}{j\omega} [e^{+j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}]$$

avec  $\text{Sin}(\omega T_1) = \frac{(e^{+j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1})}{2j}$

$$X(\omega) = \frac{2}{2j\omega} [e^{+j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}]$$

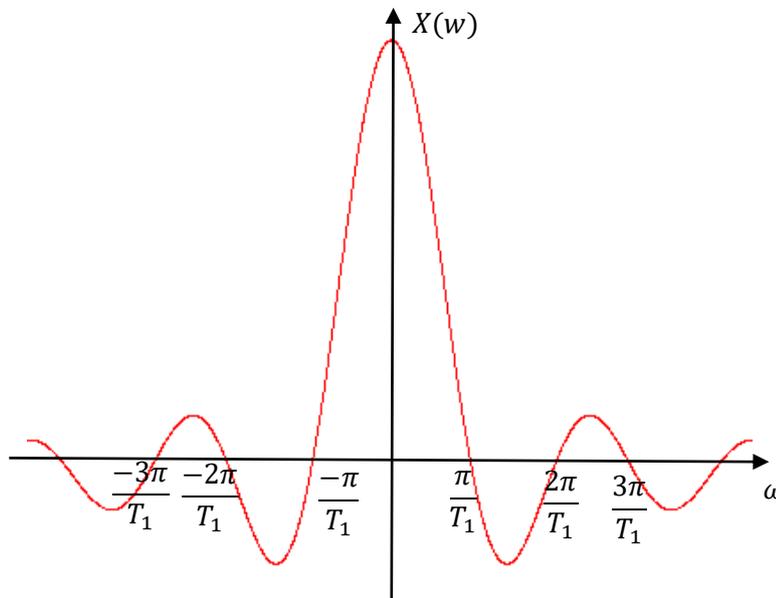
$$X(\omega) = \frac{2}{\omega} \text{Sin}(\omega T_1) = \frac{2T_1 \text{Sin}(\omega T_1)}{\omega T_1}$$

Avec  $\text{Sinc}(\alpha) = \frac{\text{Sin}(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$  ( $\text{Sinc}(\alpha)$  = sinus cardinal)

Donc  $X(\omega) = \frac{2T_1 \text{Sin}(\frac{\omega T_1}{\pi} \pi)}{\frac{\omega T_1}{\pi} \pi}$

$$X(\omega) = 2T_1 \text{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

Le tracé de  $X(\omega)$  est donné par la figure suivante



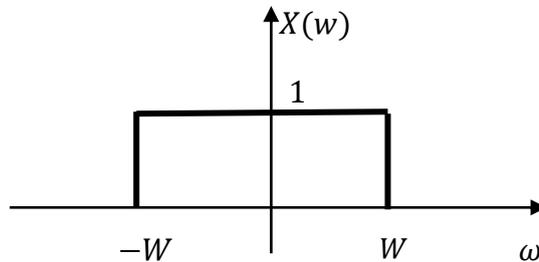
Donc

$$\text{rect}\left(\frac{t}{2T_1}\right) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} 2T_1 \text{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

**Exemple 5**

Soit le signal  $x(t)$  dont la TF de  $x(t)$  est donnée par:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < W \\ 0 & \text{si } |\omega| > W \end{cases}$$



- Calculer  $x(t) = TF^{-1}[X(\omega)]$

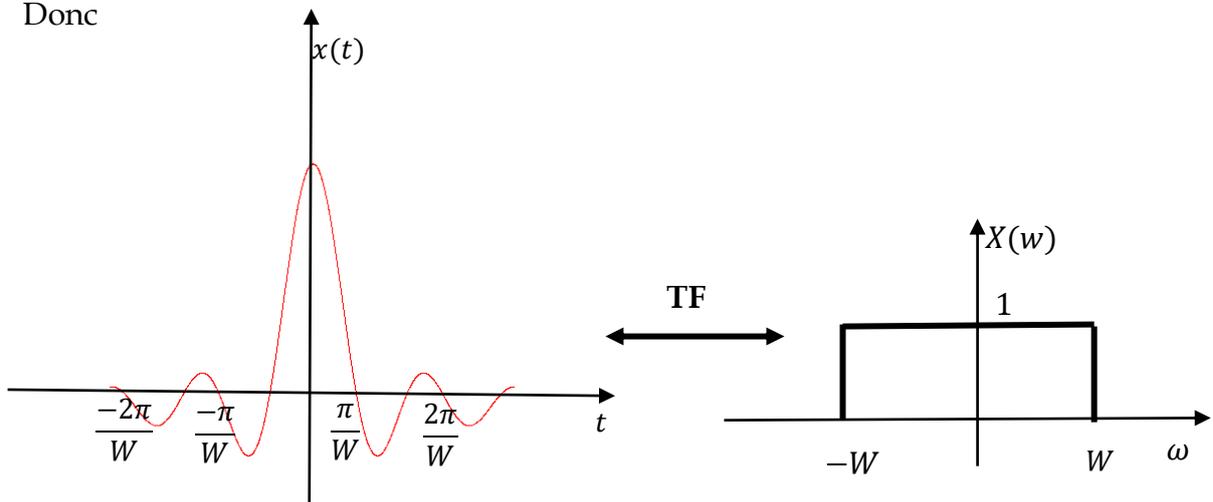
Par définition on a  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{+W} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{jt} \right]$$

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega t)}{t} = \frac{W}{\pi} \frac{\sin(Wt)}{Wt} = \frac{W}{\pi} \text{Sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$

Donc



**2.3.5 Propriétés de la transformée de Fourier**

L'importance de la transformation de Fourier ne réside pas seulement dans la relation qu'elle permet d'établir entre les domaines temporel et fréquentiel, mais

aussi dans ses propriétés qui font que certaines opérations difficiles à effectuer dans l'un des domaines correspondent à des opérations simples dans l'autre domaine. Nous allons considérer dans ce paragraphe quelques propriétés importantes de la transformée de Fourier

**2.3.5.1 Linéarité**

$$\text{Si } \begin{cases} TF[x(t)] = X(w) \\ \text{et } TF[y(t)] = Y(w) \end{cases}$$

alors

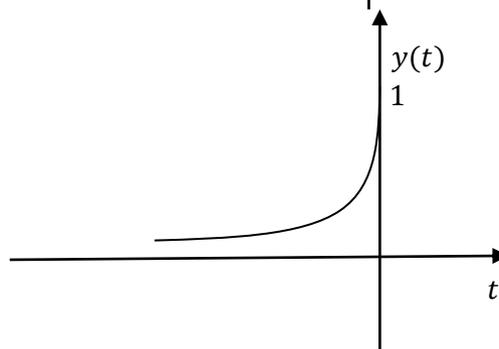
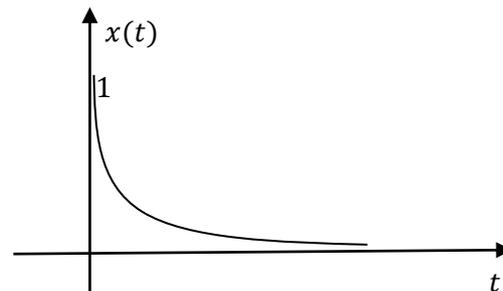
$$TF[ax(t) + by(t)] = aX(w) + bY(w)$$

**Exemple**

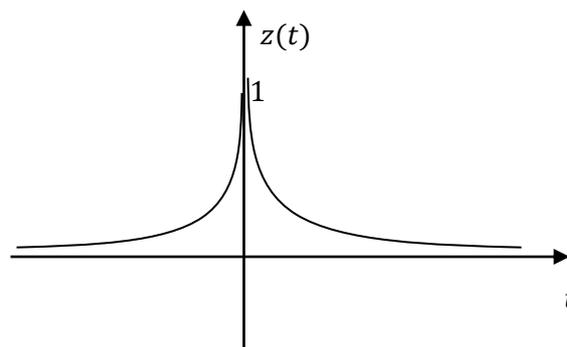
Calculer la TF de  $z(t) = x(t) + y(t) = e^{-|t|}$  en utilisant la propriété de linéarité de la TF

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\text{et } y(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$



Le tracé de  $z(t)$  est donné par la figure suivante



Par définition on a  $X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

$$X(w) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt$$

$$\frac{-1}{1+j\omega} e^{-(1+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega}$$

et  $Y(w) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-j\omega t} dt$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{(1-j\omega)t} dt = \frac{1}{1-j\omega} e^{(1-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0$$

$$= \frac{1}{1-j\omega}$$

donc

$$Z(w) = X(w) + Y(w) = \frac{2}{1 + w^2}$$

**2.3.5.2 Translation temporelle**

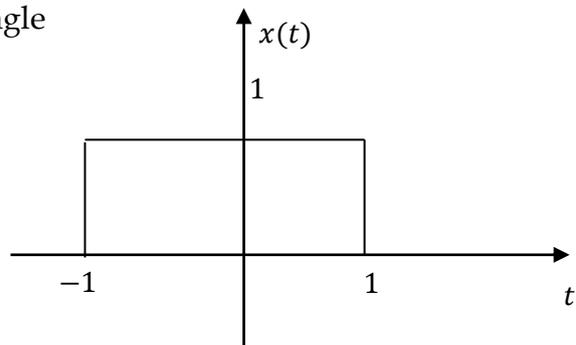
Si  $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(w)$

alors

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{TF} X(w)e^{-j\omega t_0}$$

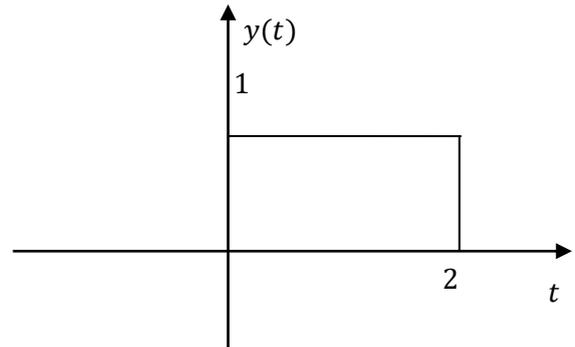
**Exemple** Translation de la fonction rectangle

$$\text{De } x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \xleftrightarrow{TF} X(w) = \frac{2 \sin(w)}{w}$$



on obtient par translation unité

$$y(t) = x(t - 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



donc  $Y(w) == TF(y(t)) = TF(x(t - 1)) = X(w)e^{-jw \times 1}$

$$Y(w) = \frac{2\text{Sin}(w)}{w} e^{-jw}$$

**2.3.5.3 Dérivation**

Soit  $x(t)$  un signal ayant pour TF  $X(w)$ , alors:

$$TF \left[ x(t)' = \frac{dx(t)}{dt} \right] = jwX(w)$$

Si de plus  $x(t)$  est  $n$  fois dérivables, alors:

$$TF \left[ x(t)^n = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right] = (jw)^n X(w)$$

**Exemple:** Dérivation de la fonction exponentielle

$$x(t) = e^{-|t|} = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ e^t & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Calculer la TF  $\left[ \frac{dx(t)}{dt} \right]$

**Première méthode:**

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [e^{-|t|}] = \begin{cases} -e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ e^t & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$TF \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right] = TF \left[ \frac{de^{-|t|}}{dt} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(e^{-|t|})}{dt} e^{-jw t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^t e^{-jw t} dt + \int_0^{\infty} -e^{-t} e^{-jw t} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^0 e^{(1-jw)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(1+jw)t} dt \\
 &= \frac{1}{1-jw} e^{(1-jw)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{1+jw} e^{-(1+jw)t} \Big|_0^{+\infty}
 \end{aligned}$$

donc  $TF \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right] = \frac{1}{1-jw} - \frac{1}{1+jw} = \frac{1+jw-1+jw}{1+w^2}$

$$TF \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right] = \frac{2jw}{1+w^2}$$

**Deuxième méthode (Application de la propriété de dérivation)**

On a  $TF \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right] = jwX(w)$

avec  $x(t) = e^{-|t|}$  et  $X(w) = \frac{2}{1+w^2}$  (d'après l'exemple précédent)

Donc la  $TF \left[ \frac{de^{-|t|}}{dt} \right] = jw \frac{2}{1+w^2} = \frac{2jw}{1+w^2}$

**2.3.5.4 Intégration**

Si  $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(w)$

et  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

alors:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad \xleftrightarrow{TF} \quad \frac{X(w)}{jw} + \pi X(0)\delta(w)$$

avec  $X(0) = X(w)|_{w=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$

Le terme impulsion de Dirac  $\delta(w)$  intervenant dans le membre droite provient de la constante d'intégration, il représente la valeur moyenne ou la composante continue.

**Exemple:**

Soit  $x(t) = u(t)$  échelon unité

avec  $g(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \delta(t) \xleftrightarrow{TF} G(w) = 1$

donc  $x(t) = u(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \xleftrightarrow{TF} \frac{G(w)}{jw} + \pi G(0)\delta(w)$

avec  $G(w) = 1$  et  $G(0)|_{w=0} = 1$

donc  $TF[u(t)] = \frac{1}{jw} + \pi\delta(w) = U(w)$

**Remarque :** En utilisant la propriété de dérivation on peut déterminer la TF de l'impulsion de Dirac .

On a  $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

D'après la propriété de dérivation on trouve:

$$\begin{aligned} TF[\delta(t)] &= TF\left[\frac{du(t)}{dt}\right] = jwU(w) \\ &= jw\left[\frac{1}{jw} + \pi\delta(w)\right] \\ &= 1 + \pi jw\delta(w) = 1 \text{ car } w\delta(w)|_{w=0} = 0 \end{aligned}$$

**2.3.5.5 Changement d'échelle**

Si  $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(w)$  alors:

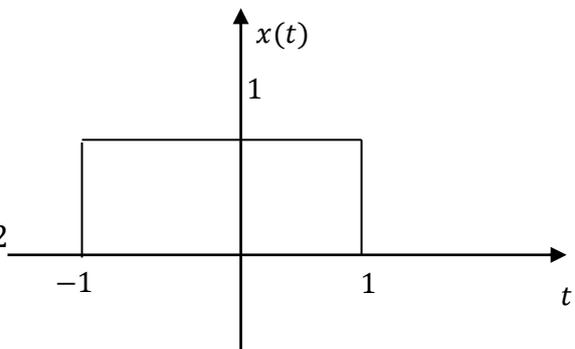
$$x(at) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{w}{a}\right)$$

**Exemple:**

Soit  $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

avec  $X(w) = \frac{2 \sin(w)}{w}$

1- Calculer la TF de  $x(2t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



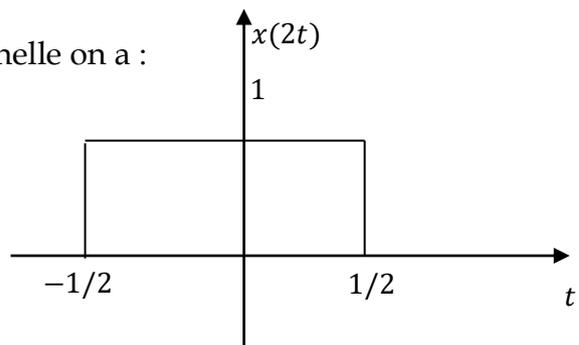
2- Calculer la TF de  $x\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

**Solution**

1-D'après la propriété de changement d'échelle on a :

$$x(at) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{w}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } TF[x(2t)] &= \frac{1}{|2|} X\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin(w/2)}{(w/2)} \end{aligned}$$

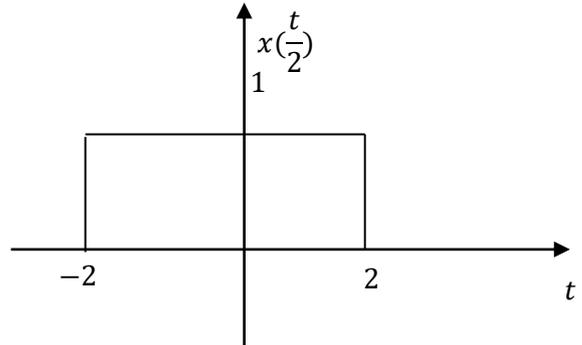


$$= \frac{\sin(w/2)}{(w/2)}$$

2- On a:  $TF \left[ x \left( \frac{t}{2} \right) \right] = \frac{1}{\left| \frac{1}{2} \right|} X \left( \frac{w}{\frac{1}{2}} \right)$

$$= 2X(2w)$$

$$= 2 \left( \frac{2\sin(2w)}{2w} \right) = 2 \frac{\sin(2w)}{w}$$



**2.3.5.6 Dualité (Symétrie)**

Si  $X(w)$  est la transformée de Fourier de  $x(t)$  ( $x(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} X(w)$ ), alors la transformée de Fourier de  $X(t)$  est  $2\pi x(-w) = x(-f)$  donc :

$$x(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} X(w)$$

$$X(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} 2\pi x(-w) = x(-f)$$

**Exemple**

Déterminer la TF de  $g(t) = \frac{2}{1+t^2}$  en utilisant la propriété de dualité(symétrie) .

On a :  $x(t) = e^{-a|t|} \stackrel{TF}{\leftrightarrow} \frac{2a}{a^2+w^2} = X(w)$

Si  $a=1$

$$x(t) = e^{-|t|} \stackrel{TF}{\leftrightarrow} \frac{2}{1+w^2} = X(w)$$

donc  $\frac{1}{1+t^2} \stackrel{TF}{\leftrightarrow} 2\pi x(-w) = 2\pi e^{-|-w|} = 2\pi e^{-|w|}$

**2.3.5.7 Dérivation fréquentielle**

Si  $x(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} X(w)$  alors:

$$-jtx(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} \frac{dX(w)}{dw}$$

**2.3.5.8 Translation fréquentielle**

Si  $x(t) \stackrel{TF}{\leftrightarrow} X(w)$  alors:

$$x(t)e^{jw_0t} \stackrel{TF}{\leftrightarrow} X(w - w_0)$$

**2.3.6 Relation de Parseval (Théorème de Parseval)**

L'énergie du signal dans le domaine temporel est égale à l'énergie évaluée dans le domaine fréquentiel, donc :

$$\text{L'énergie} = E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(w)|^2 dw$$

**Exemple**

Calculer l'énergie dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel du signal  $x(t)$  donné par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Avec  $X(w) = \frac{1}{\alpha + jw}$

**Solution**

1- Calcul de l'énergie dans le domaine temporel

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha t})^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt$$

$$E = \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = \left. \frac{-1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \right|_0^{+\infty}$$

Donc,

$$E = \frac{1}{2\alpha}$$

2- Calcul de l'énergie dans le domaine fréquentiel

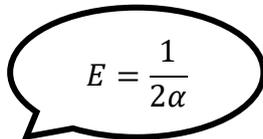
$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(w)|^2 dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\alpha + jw} \right|^2 dw \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + w^2}} \right)^2 dw \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + w^2} dw
 \end{aligned}$$

avec  $\int \frac{1}{\alpha^2 + w^2} dw = \frac{1}{\alpha} \arctg\left(\frac{w}{\alpha}\right)$  et  $\begin{cases} \arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2} \\ \arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc,  $E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + w^2} dw = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha} \arctg\left(\frac{w}{\alpha}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$$E = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{2\pi\alpha} = \frac{1}{2\alpha}$$

Donc,



$$E = \frac{1}{2\alpha}$$

### 2.3.7 Transformée de Fourier d'un produit de convolution

On définit le produit de convolution de deux fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  par :

$$h(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

Si  $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(w)$  et  $y(t) \xleftrightarrow{TF} Y(w)$  alors,

$$h(t) = x(t) * y(t) \xleftrightarrow{TF} X(w).Y(w) = H(w)$$

**Conclusion:**

La transformée de Fourier **d'une convolution de deux fonctions** est un **produit des transformées de Fourier de ces deux fonctions**. Ce résultat est un des résultats les plus importants en traitement du signal aussi bien dans les aspects théoriques que dans les applications.

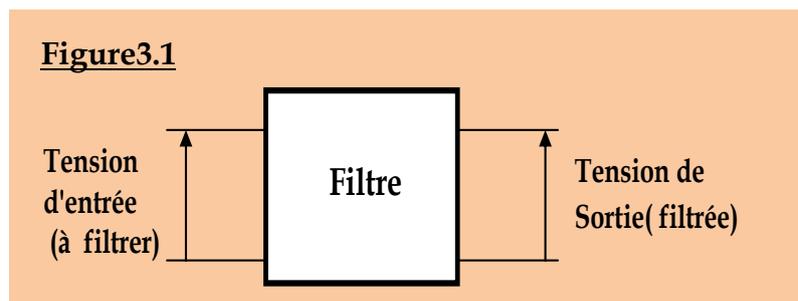
**Remarques**

- 1- Le spectre d'amplitude d'un produit de convolution est égal au produit algébrique des spectres d'amplitude des deux fonctions :  $|H(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |Y(\omega)|$ .
- 2- Le spectre de phase d'un produit de convolution est égal à la somme des spectres de phase de deux fonctions :  $\varphi_h(\omega) = \varphi_x(\omega) + \varphi_y(\omega)$ .

# CHAPITRE 03 : LE FILTRAGE ANALOGIQUE

## 3.1 Introduction

Un filtre est un circuit dont le comportement dépend de la fréquence.



Le filtrage sert à éliminer certaines fréquences présentes dans le signal d'entrée. On peut considérer un filtre comme étant une boîte avec une entrée et une sortie :

### Remarques :

- 1- Une tension continue possède une fréquence nulle.
- 2- Un filtre est un circuit linéaire.
- 3- Si la tension d'entrée est sinusoïdale alors la tension de sortie est sinusoïdale de même fréquence.

## 3.2 Applications

- systèmes de télécommunication (téléphone, télévision, radio, transmission de données...etc);

- systèmes d'acquisition et de traitement de signaux physiques (surveillance médicale, ensemble de mesure, radars...etc );
- alimentation électrique...etc.

### 3.3 Différents types de filtres

On classe les filtres en deux grandes familles : **ANALOGIQUE** et **NUMERIQUE**.

Les **filtres numériques** sont réalisés à partir de structure intégrée microprogrammable (DSP). Ils sont totalement intégrables, souples et performants. Ils sont utilisés chaque fois que c'est possible. Ils sont pour l'instant limités à des fréquences pas trop élevées ( $< 100\text{MHz}$ ).

On ne les utilisera pas si on doit limiter la consommation et ils nécessitent un pré-filtrage pour éviter le repliement spectral avant la numérisation du signal et un post-filtre de lissage.

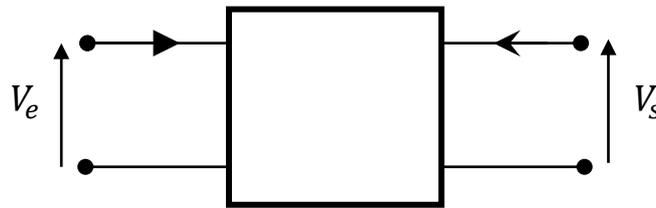
Les **filtres analogiques** se divisent eux mêmes en plusieurs catégories :

- ❖ les filtres passifs qui font appels essentiellement à des inductances de haute qualité et des condensateurs. Jusque dans les années 70, c'était les seuls filtres conçus. Ils sont actuellement utilisés pour les hautes fréquences. (utilisation de quartz) ;
- ❖ les filtres actifs sont constitués de condensateurs, de résistances et d'éléments actifs qui sont essentiellement des Amplificateurs opérationnels (Amp-op). Ils sont moins encombrants, faciles à concevoir et moins coûteux que les filtres passifs mais restent limités en fréquence ( $< 1\text{MHz}$  à cause de l'AIL). Ils consomment plus et nécessitent une source d'alimentation.

### 3.4 Théorie du filtrage

#### 3.4.1. Fonction de transfert ou transmittance d'un quadripôle linéaire

Le comportement d'un filtre est défini par l'étude fréquentielle de la fonction de transfert entre la tension de sortie et la tension d'entrée.



avec

$V_e$ : tension d'entrée

$V_s$  : tension de sortie

Le comportement d'un filtre est défini par une fonction de transfert  $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$

### 3.4.2 Fonction d'atténuation

Dès fois on préfère définir un filtre par rapport à l'atténuation qu'il amène sur la grandeur d'entrée.

$$A(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} = \frac{V_e}{V_s} \quad (3.1)$$

**Remarque :** un filtre passif dissipe toujours de l'énergie et la puissance disponible à la sortie est toujours inférieure à la puissance d'entrée.

### 3.4.3 Gain d'un filtre

Le gain d'un filtre est la grandeur sans dimension

$$G(\omega) = |H(j\omega)| \quad (3.2)$$

Le gain en décibel d'un filtre est la grandeur sans dimension

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| \quad (3.3)$$

avec **log** est le logarithme décimal.

**Remarques :**

- Gain en puissance est donné par  $P_{dB} = 10 \log P(\omega)$ ;
- Lorsque le gain diminue de 20 décibels, l'amplitude du signal de sortie est divisée par 10.

**3.4.4 Fréquence de coupure**

La fréquence de coupure  $f_c$  ( $\omega_c$ ) pour des filtres réels est la fréquence à laquelle l'amplitude de sortie est à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  de la valeur maximale :

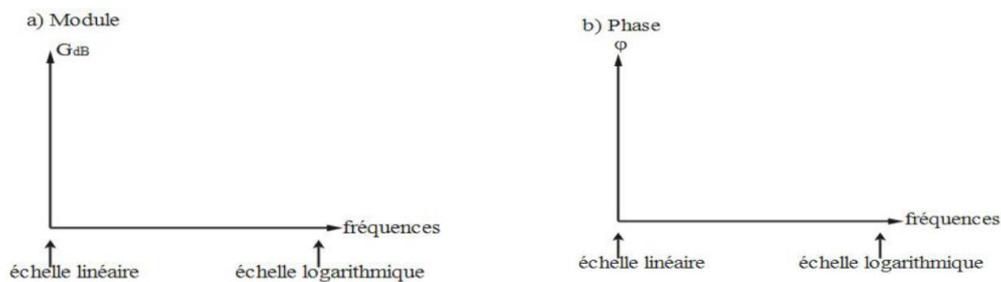
$$|H(j\omega_c)| = G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \quad (3.4)$$

**3.4.5 Diagramme de Bode**

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $H(j\omega)$  est constitué de deux courbes en représentation semi-logarithmique.

$$G = |H(j\omega)|$$

$$et \varphi = arg[H(j\omega)] = arctg\left(\frac{V_s}{V_e}\right)$$



**Remarque**

Dans une échelle logarithmique, une octave est l'écart entre  $X$  et  $2X$  et decade est l'écart entre  $X$  et  $10X$ .

**3.4.6 Gabarit**

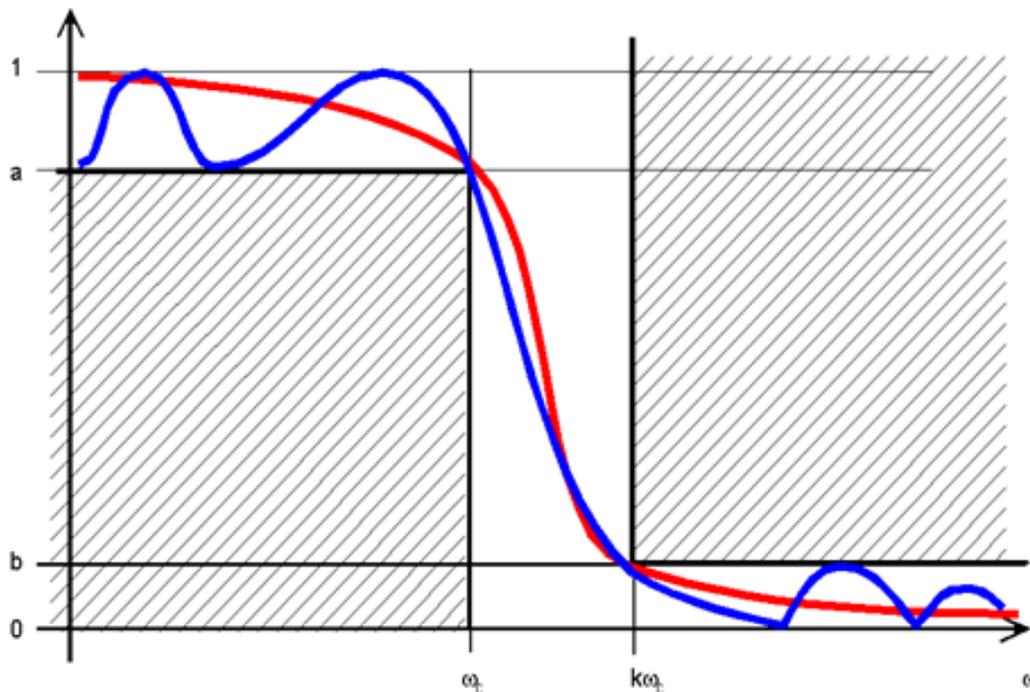
C'est un diagramme qui représente les conditions nécessaires à la réalisation d'un filtre ;

Ces conditions sont :

- Fréquence ou pulsation de coupure  $f_c$  ou  $\omega_c = 2\pi f_c$
- Raideur de la coupure qui est le rapport entre la pulsation de coupure et la pulsation du début de la bande coupée.
- Gain minimal permis dans la bande transmise.
- Gain maximal permis dans la bande coupée.

**Exemple**

Dans l'exemple de la figure 3.2, la courbe du gain de filtre à construire doit s'inscrire dans le gabarit, c'est-à-dire ne pas pénétrer dans les parties hachurées.



**Figure 3.2 :** Gabarit et courbes acceptables

Le gabarit ainsi défini ne précise rien sur le déphasage.

Souvent, on souhaite que le filtre ne déphase pas du tout dans sa bande passante. Cela n'étant pas possible en temps réel, en raison de contraintes de causalité, on se contente de filtres qui retardent toutes les fréquences de la même quantité et que l'on appelle en conséquence "filtres à déphasage linéaire". Ces filtres sont faciles à obtenir avec des filtres de type RIF.

Dans d'autre cas, on préfère des filtres qui retardent le moins possible : "filtres à déphasage minimal". Des structures RII permettent de les obtenir.

**3.4.7 Notion de fonction d'atténuation**

Parfois, on préfère définir un filtre par rapport à l'atténuation qu'il amène sur la grandeur d'entrée :

$$A(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} = \frac{V_e}{V_s} \quad (3.5)$$

En Décibel, on a  $A(dB) = -G(dB)$

### 3.5 Filtre idéal

Un filtre idéal transmettrait toutes les composantes utiles sans atténuation ni déphasage (donc sans retard) tout en éliminant complètement les signaux indésirables. En pratique, la synthèse du filtre idéal est impossible. L'atténuation nulle dans la bande passante, l'atténuation infinie dans la bande atténuée et des transitions verticales donnent une caractéristique de réponse irréaliste.

#### 3.5.1 Principaux filtres idéaux

##### 3.5.1.1 Filtre passe-bas

Ce filtre ne laisse passer que les basses fréquences du signal d'entrée figure 3.3. Les hautes fréquences sont donc filtrées. La limite entre BF et HF est appelée fréquence de coupure  $f_c$ . La bande passante est la gamme de fréquence non filtrée :  $BP = [0, f_c]$ . A noter que les signaux continus ( $f = 0$ ) ne sont pas filtrés.

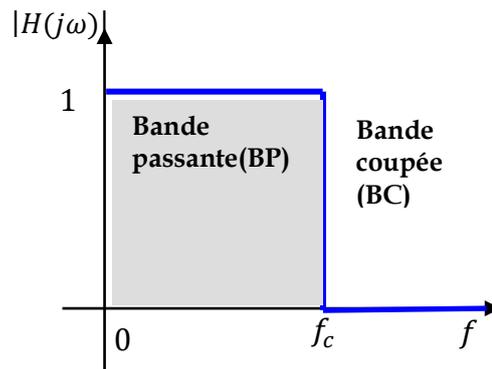


Figure 3.3: Filtre Passe-bas idéal

##### 3.5.1.2 Filtre passe-haut

Ce filtre ne laisse passer que les hautes fréquences figure 3.4 .  $BP = [f_c, \infty]$  .

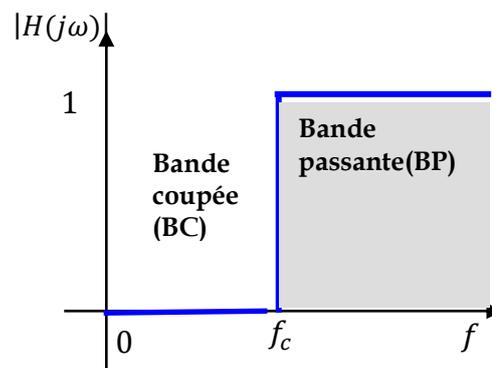


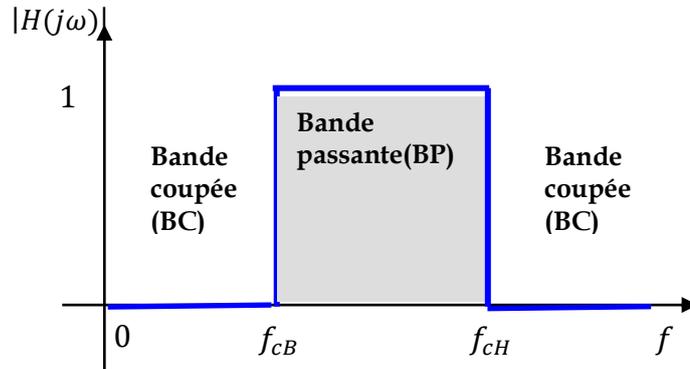
Figure 3.4 : Filtre Passe-haut idéal

**3.5.1.3 Filtre passe-bande**

Ce filtre ne laisse passer qu'une bande de fréquences figure 3.5. Il possède deux fréquences de coupure :

- La fréquence de coupure basse  $f_{cB}$

et la fréquence de coupure haute  $f_{cH}$ ,  $BP = [f_{cB}, f_{cH}]$

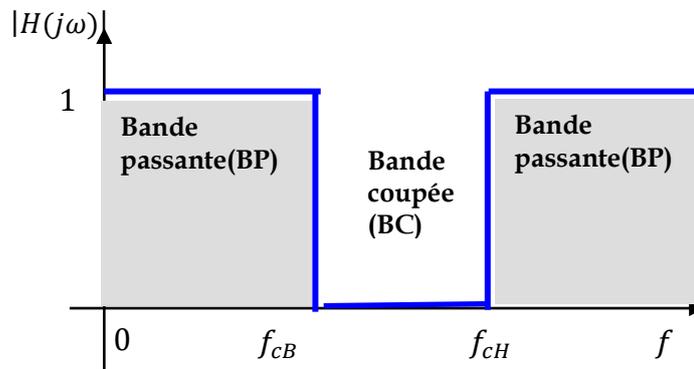


**Figure 3.5 : Filtre Passe-bande idéal**

**3.5.1.4 Filtre coupe-bande (ou réjecteur de bande)**

Un filtre coupe-bande figure 3.6, aussi appelé filtre réjecteur de bande est un filtre empêchant le passage d'un intervalle de fréquences.

Il est composé d'un filtre passe-haut et d'un filtre passe-bas dont les fréquences de coupure sont souvent proches mais différentes, la fréquence de coupure du filtre passe-bas est systématiquement inférieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut.



**Figure 3.6 : Filtre coupe-bande (ou réjecteur de bande) idéal**

**3.6 Structures classiques pour réaliser des filtres actifs**

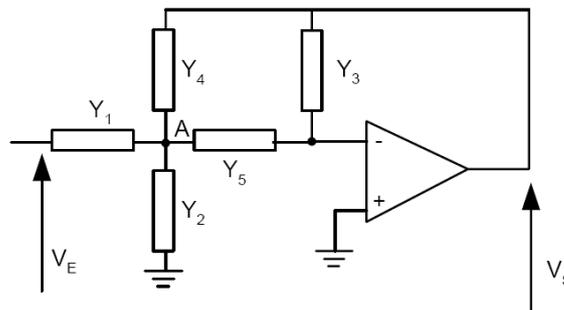
Les filtres actifs seront réalisés à l'aide de résistances, de capacités et d'amplificateurs opérationnels (pas de selfs). On évite ainsi les inconvénients des selfs (encombrement, résistance parasite, imprécision,... etc).

Nous présenterons deux structures fondamentales qui permettent de réaliser des filtres de type passe-bas ou passe-haut du second ordre.

**3.6.1 Cellule de Rauch**

La structure de Rauch est un montage électronique utilisant 5 dipôles d'admittance Y1 à Y5 (résistances ou condensateurs) autour d'un AOP figure 3.7 :

- Si un dipôle est une résistance R son admittance est  $Y=1/R$
- Si un dipôle est un condensateur C son admittance complexe est  $Y=j.C.\omega$



**Figure 3.7 : Cellule de RAUCH**

Déterminons la relation entre  $V_S$  et  $V_E$ :

On applique le théorème de Millman sur le point A :

$$V_A = \frac{V_E Y_1 + V_S Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5}$$

Par ailleurs, on a  $V_A = -\frac{V_S Y_3}{Y_5}$

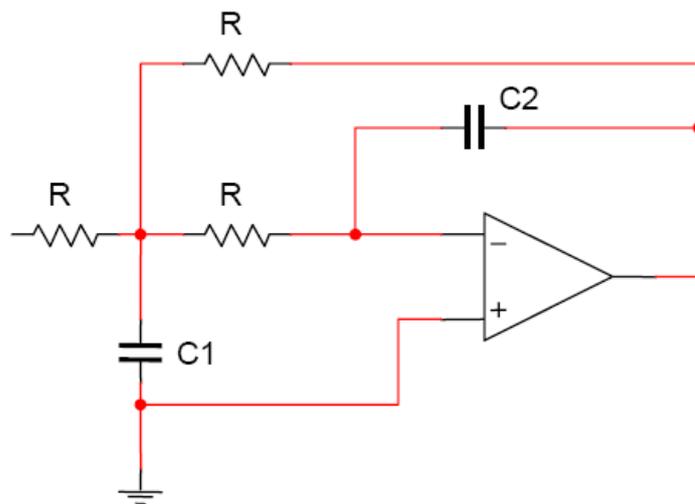
Dans le cas général, la transmittance de la structure de Rauch en fonction des 5 admittances Y1 à Y5 est la suivante :

$$\underline{T} = \frac{V_S}{V_E} = \frac{-Y_1 Y_5}{Y_4 Y_5 + Y_3 (Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5)} \quad (3.6)$$

*Remarque :* étant donné qu'il y a un seul terme au numérateur de la transmittance, la structure de Rauch permet de faire seulement des filtres passe bas, passe haut et passe bande. Les filtres coupe bande (2 termes au numérateur) et passe tout (3 termes au numérateur) ne sont pas réalisables avec la structure de Rauch.

**3.6.1.1 Cellule de Rauch pour filtre passe-bas du second ordre**

Sa structure électronique à base d'AOP est donnée par la figure 3.8



**Figure 3.8:** Structure de Rauch pour les filtres passe-bas du second ordre  
Sa transmittance complexe est obtenue avec :

$$Y_1 = Y_4 = Y_5 = 1/R$$

$$Y_3 = j \cdot C_2 \cdot \omega$$

$$Y_2 = j \cdot C_1 \cdot \omega$$

et en posant  $p = j\omega$

La fonction de transfert s'écrit alors : 
$$\underline{T} = \frac{-1/R^2}{1/R^2 + pC_2(\frac{3}{R} + pC_1)} = \frac{-1}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 3RC_2 p + 1}$$

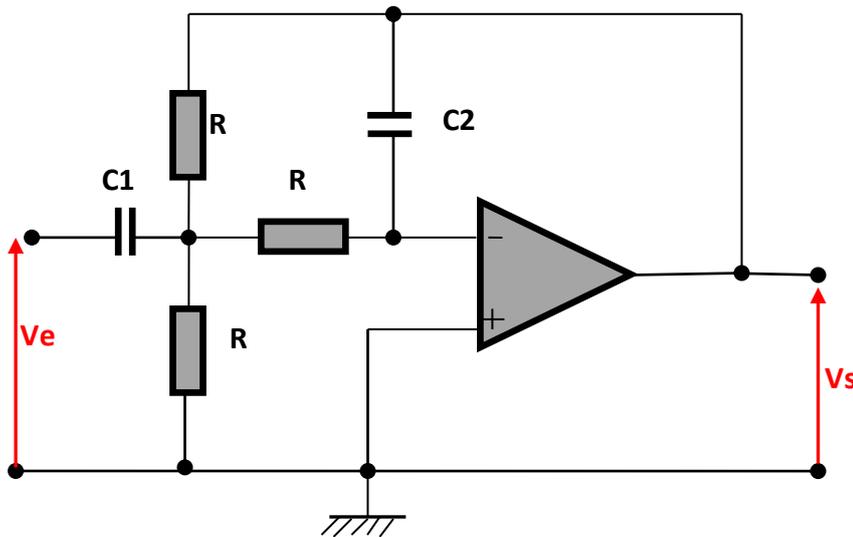
qu'on met sous la forme canonique : 
$$\underline{T} = \frac{T_0}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Où  $m$  est appelé facteur d'amortissement du filtre et  $\omega_0$  sa pulsation de coupure

par identification on trouve ,  $\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C1.C2}}$ ,  $m = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C2}{C1}}$  et  $T_0 = -1$

**3.6.1.2 Filtre actif passe-bande du 2ième ordre - Structure de Rauch**

La structure électronique à base d'AOP d'un filtre actif passe-bande du 2ième ordre- structure de Rauch est donnée par la figure 3.9.



**Figure 3.9:** Structure de Rauch pour les filtres passe-bande du second ordre

La fonction de transfert canonique d'un filtre passe-bande du second ordre est :

$$\underline{T} = T_0 \frac{2m \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

En mettant cette fonction de transfert canonique en regard de la fonction de transfert générique de la structure de Rauch suivante :

$$\underline{T} = \frac{V_S}{V_E} = \frac{-Y_1 Y_5}{Y_4 Y_5 + Y_3 (Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5)}$$

on peut constater que le numérateur doit être imaginaire pur ce qui impose que  $Y_1$  ou  $Y_5$  doit être un condensateur. Au dénominateur, la somme  $(Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5)$  sera complexe à partie réelle et imaginaire. Pour obtenir un second ordre, il faudra opter

pour  $Y_3$  imaginaire, c'est-à-dire un condensateur. Le terme réel au dénominateur est nécessairement apporté par le produit  $Y_4 Y_5$  ce qui impose  $Y_4$  et  $Y_5$  réels, soit des résistances. Comme le produit  $Y_1 Y_5$  doit être imaginaire pur, on choisit pour  $Y_1$  un condensateur. Dès lors, la somme  $(Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5)$  est déjà complexe à partie réelle et imaginaire, on peut donc opter pour une résistance pour  $Y_2$ . Nous avons ainsi déterminé la nature des cinq admittances.

On choisit

$$Y_2 = Y_4 = Y_5 = 1/R$$

$$Y_3 = j.C2.\omega$$

$$Y_1 = j.C1.\omega$$

Il reste à identifier les caractéristiques du filtre sous forme canonique aux composants du montage :

La fonction de transfert de la structure de Rauch s'écrit :

$$T = \frac{-jC_1 \omega/R}{1/R^2 + pC_2 \left(\frac{3}{R} + pC_1\right)} = \frac{-RC_1 p}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 3RC_2 p + 1} = -\frac{C_1}{3C_2} \frac{3RC_2 p}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 3RC_2 p + 1}$$

qu'on met sous la forme canonique :

$$\underline{T} = T_0 \frac{2m \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Où  $m$  est appelé facteur d'amortissement du filtre et  $\omega_0$  sa pulsation de coupure.

Par identification on trouve:

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}, \quad m = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{-C_1}{3C_2}$$

### 3.6.2 Structure de Sallen et Key

Cette structure utilise un AOP en amplificateur non-inverseur ou inverseur et quatre admittances figure 3.10.

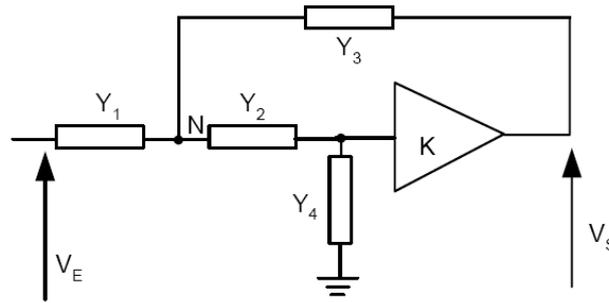


Figure 3.10 : Cellule de Sallen et Key

- Si un dipôle est une résistance R son impédance est  $Y=1/R$
- Si un dipôle est un condensateur C son impédance complexe est  $Y=j.C.\omega$

Déterminons la relation entre  $V_S$  et  $V_E$  :

On applique le théorème de Millman sur le point N :

$$V_N = \frac{V_E Y_1 + \frac{V_S}{K} Y_2 + V_S Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Par ailleurs, on a  $\frac{V_S}{K} = \frac{\frac{1}{Y_4}}{\frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_4}} V_N = \frac{Y_2}{Y_2 + Y_4} V_N$

Finalement, on obtient la fonction de transfert suivante :

$$\frac{V_S}{V_E} = \frac{K Y_1 Y_2}{Y_2 (Y_1 + Y_3 (1 - K)) + Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)} \quad (3.7)$$

**Remarque:** On obtient un filtre passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande par un choix judicieux de résistances et condensateurs pour les admittances  $Y_1$  à  $Y_4$  .

### 3.6.2.1 Structure de Sallen et Key pour filtre passe-bas du second ordre

Pour réaliser un filtre passe-bas du second ordre on utilise deux résistances R identiques et deux condensateurs :

Soit  $Y_1 = Y_2 = \frac{1}{R}$  ,  $Y_3 = jC_1\omega$  et  $Y_4 = jC_2\omega$

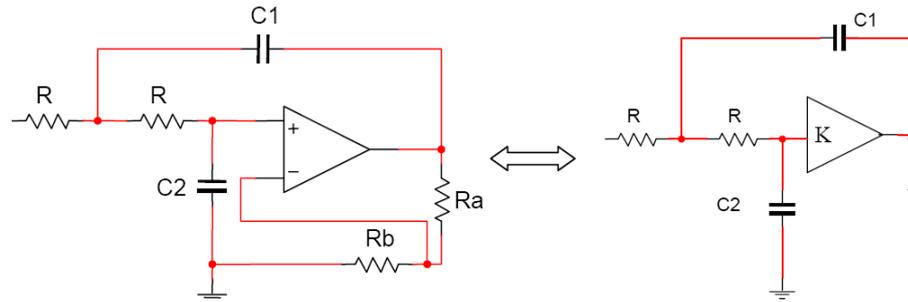


Figure 3.11 : Structure non-inverseuse de SALLEN et KEY pour les filtres passe-bas du second ordre

en posant  $p = j\omega$

La fonction de transfert s'écrit alors :  $T(p) = \frac{K}{R^2 C1 C2 p^2 + R(2C2 + C1(1-K))p + 1}$

qu'on met sous la forme canonique :  $T = \frac{T_0}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

Où  $m$  est appelé facteur d'amortissement du filtre et  $\omega_0$  sa pulsation de coupure

par identification on trouve ,  $\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C1.C2}}$ ,  $2m = \frac{2C2 + C1(1-K)}{\sqrt{C1C2}}$  et  $T_0 = K = 1 + \frac{Ra}{Rb}$

La structure inverseuse de Sallen et Key est donnée en figure 3.12

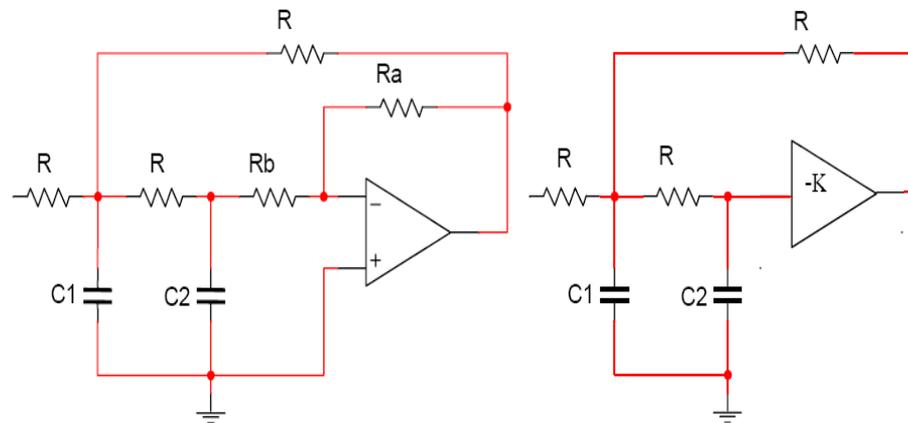


Figure 3.12 : Structure inverseuse de SALLEN et KEY pour les filtres passe-bas du second ordre

en posant  $p = j\omega$

La fonction de transfert de ce filtre est la suivante :

$$T(p) = \frac{-K}{K + 2} \times \frac{1}{\frac{R^2 C1 C2}{K + 2} p^2 + \frac{R(3C2 + C1)}{K + 2} p + 1}$$

qu'on met sous la forme canonique :  $T = \frac{T_0}{1+2m\frac{p}{\omega_0}+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$

Avec,

$$2m = \frac{3C_2+C_1}{\sqrt{(K+2)C_2C_1}}, \omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K+2}{C_1C_2}}, T_0 = \frac{-K}{K+2}, K = \frac{R_a}{R_b}$$

### 3.7 Transformation passe-bas -> passe-haut

La transformation de gabarit permet de réaliser un filtre passe-haut à partir de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas.

Le théorème de MITRA pour transformer un filtre passe-bas vers un filtre passe-haut est donné par :

**Etant donné un réseau composé de résistances et de condensateurs, transformons-le en remplaçant chaque résistance  $R_i$  par une capacité  $C'_i = 1/R_i$  et chaque capacité  $C_i$  par une résistance  $R'_i = 1/C_i$ .  
On remplace aussi  $p$  par  $1/p$  dans l'expression de la fonction de transfert du filtre.**

Exemple :

La fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre est la suivante:

$$T(p) = \frac{1}{RCp + 1}$$

En appliquant le théorème de MITRA à la fonction de transfert précédente, on trouve:

$$T(p) = \frac{1}{\frac{1}{R'C'p} + 1} = \frac{R'C'p}{R'C'p + 1}$$

On retrouve la forme classique d'un filtre passe-haut du premier ordre réalisé avec une résistance et un condensateur.

**3.7.1 Structure de Rauch pour filtre passe-haut du second ordre**

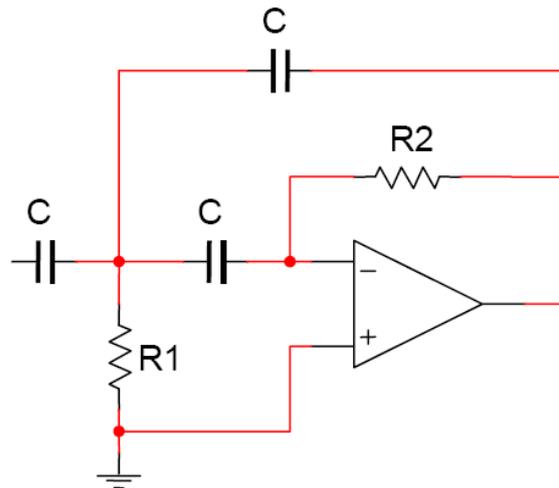
On applique à la fonction de transfert du filtre passe-bas du second ordre du filtre à structure de Rauch la transformation passe-bas → passe-haut :

$$T(p) = \frac{-1}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 3RC_2 p + 1}$$

On obtient, en prenant,  $R'_1 = 1/C_1$ ,  $R'_2 = 1/C_2$  et  $p = 1/P$

$$T'(P) = \frac{-1}{\frac{1}{C_1^2 R'_1 R'_2 P^2} + \frac{3}{C_1 R'_2 P} + 1} = \frac{-R'_1 R'_2 C_1^2 P^2}{1 + 3R'_1 C_1 P + R'_1 R'_2 C_1^2 P^2}$$

Ainsi, pour réaliser un filtre passe-haut du second ordre on utilise trois condensateurs identiques et deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  figure 3.13.



**Figure 3.13** : Structure de RAUCH pour les filtres passe-haut du second ordre

La fonction de transfert de ce filtre est la suivante :

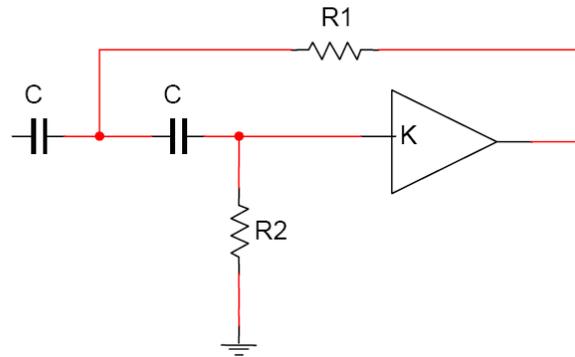
$$T(P) = \frac{-R_1 R_2 C^2 P^2}{1 + 3R_1 C P + R_1 R_2 C^2 P^2} \text{ et } 2m = 3\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}, \omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}, T_0 = -1$$

**3.7.2 Structure de Sallen et Key pour filtre passe-haut du second ordre**

Appliquons-le à la fonction de transfert du filtre passe-bas du second ordre du filtre à structure non-inverseuse de SALLEN et KEY la transformation passe-bas → passe-haut :

$$\text{Soit } Y_1 = Y_2 = jC\omega, Y_3 = \frac{1}{R_1} \text{ et } Y_4 = \frac{1}{R_2}$$

La figure 3.14 représente la structure non-inverseuse de SALLEN et KEY pour les filtres passe-haut du second ordre.



**Figure 3.14 :** Structure non-inverseuse de **SALLEN et KEY** pour les filtres passe-haut du second ordre

La fonction de transfert de ce filtre donnée par :

$$T(P) = \frac{KR_1R_2C^2P^2}{R_1R_2C^2P^2 + (2R_1 + R_2(1 - K))CP + 1}$$

Avec,  $2m = \frac{2R_1+R_2(1-K)}{\sqrt{R_1R_2}}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}$  et  $T_0 = K$

### 3.8 Réalisation de filtres

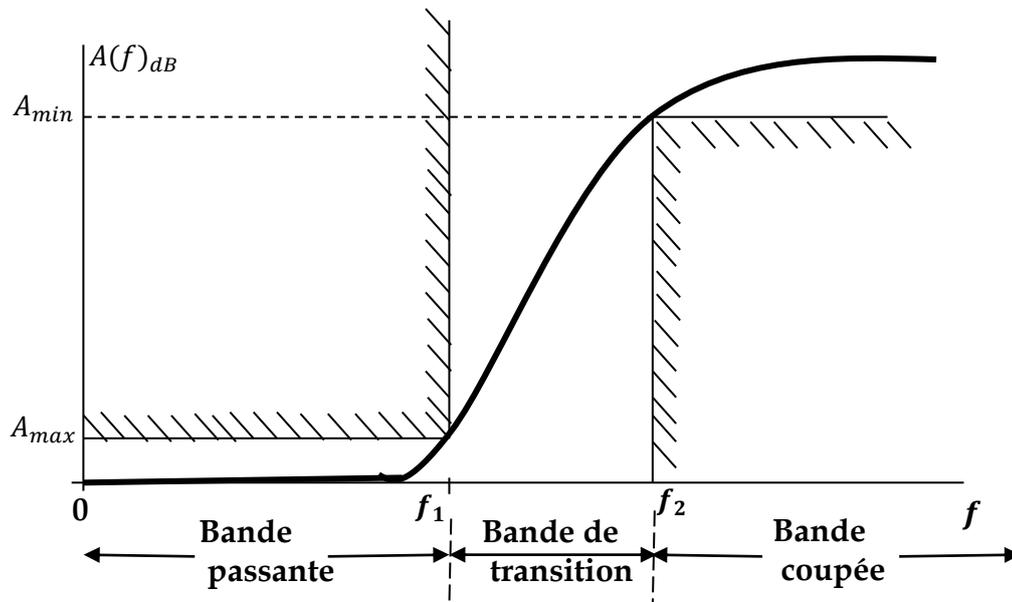
#### 3.8.1 Cahier de charge: gabarit

Les contraintes sur le filtre à réaliser sont généralement reportées dans un gabarit. Ce gabarit représente la courbe désirée d'atténuation (en décibel) en fonction de la fréquence du filtre. Un filtre est construit pour respecter au mieux ce gabarit. On rappelle que l'atténuation est l'inverse du module de la fonction de transfert.

On définit pour un filtre passe-bas quatre paramètres :

- L'atténuation en puissance maximale tolérable  $A_{max}$  dans la bande passante;
- L'atténuation en puissance minimale tolérable  $A_{min}$  dans la bande coupée.
- La largeur de la bande de transition définie par : la première fréquence atténuée  $f_2$  et la dernière fréquence passante  $f_1$ .

La figure 3.15 présente le gabarit souhaité d'un filtre passe-bas avec les quatre paramètres précédents.



**Figure 3.15 :** Gabarit élémentaire d'un filtre passe bas réel

**3.8.2 Différents types de filtres**

Pour concevoir un filtre obéissant à un certain gabarit ou cahier de charge, on a recours à plusieurs modèles. Il s'agit de choisir, à partir de ces spécifications, la fonction de transfert adéquate. Plusieurs modèles existent pour la synthèse de filtre analogique comme les modèles de Tchébychev, Butterworth et Elliptique. Le tableau suivant donne les principaux types de filtres et leurs caractéristiques.

Type	Bande passante	Bande atténuée	Chute ou raideur	Réponse temporelle
<b>Butterworth</b>	Plate	Monotone	Bonne	Bonne
<b>Chebyshev</b>	Ondulée	Monotone	Très bonne	Faible
<b>Elliptique</b>	Ondulée	Ondulée	La meilleure	Faible
<b>Bessel</b>	Plate	Monotone	Faible	La meilleure

Pour illustrer la chute ou raideur des différents filtres nous indiquons dans le tableau suivant les atténuations à la fréquence double de la fréquence de coupure pour des filtres d'ordre 6 :

Type	Atténuation à $f_c$	Atténuation à $2f_c$
Butterworth	3 dB	36 dB
Chebyshev	3 dB	63 dB
Elliptique	3 dB	93 dB
Bessel	3 dB	14 dB

**3.8.3 Etude du filtre passe-bas de Butterworth**

**3.8 .3.1 Introduction**

Le filtre passe bas de Butterworth ou méplat a une réponse d'amplitude constante dans la bande passante et une transition non strictement raide.

Le filtre passe-bas de Butterworth d'ordre N est défini par le module carré de sa fonction de transfert de la manière suivante :

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{T_0^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} \tag{3.8}$$

*Remarques*

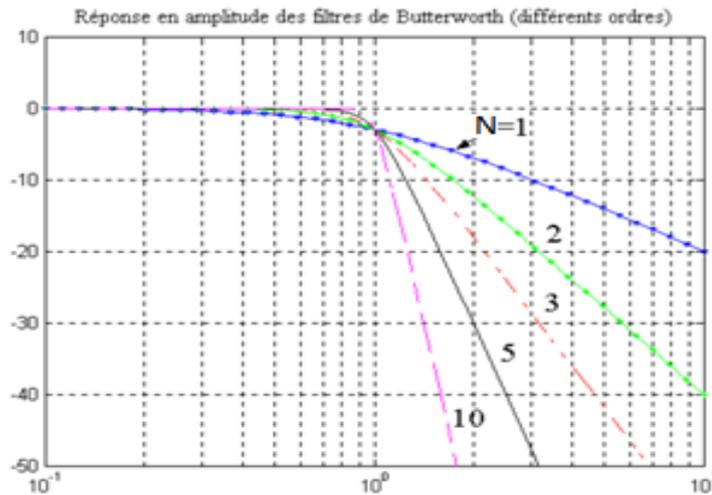
- *Quel que soit l'ordre N de ce filtre, l'atténuation à la pulsation  $\omega = \omega_c$  est toujours de 3 dB. Les réponses en fréquence des filtres de Butterworth d'ordre N quelconque passent donc toutes par ce point caractéristique. En effet, à  $\omega = \omega_c$ , on a :*

$$\frac{|T(j\omega_c)|}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1)^{2N}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soit  $20\log(|T(j\omega_c)|/T_0) = 3\text{dB}$

- *Sa courbe de réponse en fréquence est la plus plate possible dans la bande passante figure 3.16.*
- *$T_0$  est le gain DC (gain à fréquence nulle).*
- *On peut voir que lorsque n tend vers l'infini, le gain devient une fonction rectangulaire et les fréquences inférieures à  $\omega_c$  seront transmises avec le gain  $T_0$  ,*

tandis que les fréquences supérieures à  $\omega_c$  seront supprimées. Pour des valeurs plus petites de  $n$ , la coupure sera moins nette.



**Figure 3.16 :** Réponse en fréquence d'un filtre de Butterworth

**3.8.3.2 Détermination de l'ordre N du filtre pour qu'il satisfasse à un gabarit**

On remarque que, d'après l'expression précédente, deux paramètres seulement permettent de caractériser entièrement ce filtre :  $N$  et  $\omega_c$  (si on exclut le gain statique  $T_0$  qui peut facilement être réalisé grâce un simple montage à amplificateur opérationnel). On pourra donc dans un premier temps considérer que l'amplification en basse fréquence vaut  $T_0 = 1$ .

Le gabarit impose qu'on satisfasse aux deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} 20\log_{10}|T(j\omega_1)| \geq -A_{max} \\ 20\log_{10}|T(j\omega_2)| \leq -A_{min} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} 10\log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)^{2N}\right) \leq A_{max} \\ 10\log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_c}\right)^{2N}\right) \geq A_{min} \end{cases} \tag{3.9}$$

de l'équation (3.9) on trouve :

$$\begin{cases} 2N(\ln\omega_1 - \ln\omega_c) = \ln\left(10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1\right) \\ 2N(\ln\omega_2 - \ln\omega_c) = \ln\left(10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1\right) \end{cases}$$

En retranchant membre à membre, on obtient alors l'expression donnant l'ordre  $N$  du filtre de Butterworth qui satisfait au gabarit souhaité.

$$N = \frac{1}{2} \left\lceil \frac{\ln \left( 10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1 \right) - \ln \left( 10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1 \right)}{(\ln \omega_2 - \ln \omega_1)} \right\rceil$$

**NB:**  $\lceil f \rceil$  signifie  $f$  arrondi à la valeur entière supérieure.

**Exemple:**

Déterminer l'ordre de filtre du Butterworth

avec  $A_{max} = 1dB$ ,  $A_{min} = 40dB$ ,  $f_1 = 10kHz$ ,  $f_2 = 20kHz$ .

L'ordre du filtre de Butterworth satisfaisant au gabarit est la valeur de  $N$  supérieure à celle calculée avec la formule précédente . Soit,  $N = 8$  ( $N = 7.618$ , valeur calculée).

**3.8.3.3 Détermination de l'ordre d'un filtre par l'analyse de son diagramme de Bode du gain**

L'ordre du filtre dépend de la pente du diagramme de Bode du gain.

- **pour les filtres passe haut et passe bas :**
  - ✓ une pente de +/-20dB/décade est équivalent à un filtre d'ordre 1,
  - ✓ une pente de +/-40dB/décade est équivalent à une filtre d'ordre2,
  - ✓ une pente de +/-60dB/décade est équivalent à un filtre d'ordre 3...etc.
- **pour les filtres passe bande et réjecteur de bande :**
  - ✓ si la somme des pentes en valeur absolue est égale à 20dB/décade, c'est équivalent à un filtre d'ordre 1,
  - ✓ si la somme des pentes en valeur absolue est égale à 40dB/décade, c'est équivalent à un filtre d'ordre 2,
  - ✓ si la somme des pentes en valeur absolue est égale à 60dB/décade, c'est équivalent à un filtre d'ordre 3...etc.

**3.8.3.4 Détermination de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas de Butterworth**

Comme nous l'avons vu, le filtre de Butterworth n'est défini que par  $|T(j2\pi f)|^2$  module carré de sa fonction de transfert. Il nous faut donc déterminer la fonction de transfert  $T(j2\pi f)$ . Or, on sait que,

$$|T(j2\pi f)|^2 = T(j2\pi f) \times T^*(j2\pi f) = T(j2\pi f) \times T(-j2\pi f)$$

avec  $T^*(j2\pi f) = T(-j2\pi f)$

Car tous les coefficients de la fonction de transfert sont réels. En effet, elle est réalisée à partir de composants passifs de type (L, C et R) associés avec des amplificateurs opérationnels (filtre actif) ou non (filtre passif).

Par commodité et pour faciliter la lisibilité, on posera par la suite  $p = j\omega$ . On aura d'après l'équation (3.8) :

$$T(p) \times T(-p) = \frac{T_0^2}{1 + \left(\frac{p}{j\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{T_0^2}{1 + (-1)^N \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

car  $j^{2N} = (-1)^N$

**3.8.3.5 Détermination des pôles du filtre de Butterworth**

Pour factoriser  $|T(p)|^2$  sous la forme de  $T(p) \times T(-p)$ , on va calculer les racines ou pôles  $p_i$ . On rappelle que les pôles sont les valeurs qui annulent le dénominateur d'une fonction de transfert.

On pourra l'écrire :

$$|T(p)|^2 = \frac{T_0^2}{\left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{p_1}{\omega_c}\right) \left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{p_2}{\omega_c}\right) \dots \left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{p_{2N}}{\omega_c}\right)}$$

On considérera deux cas selon que N est impair ou N est pair.

- **Cas N impair : filtre d'ordre impair.**

$$1 - \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N} = 0, \text{ soit } \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N} = 1$$

Les racines du dénominateur sont les 2N racines de l'unité. On les trouve facilement en exprimant l'égalité précédente sous la forme suivante (remarquer que  $1 = e^{jk2\pi} = \cos(2k\pi)$ ):

$$\left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N} = e^{jk2\pi}, \text{ k entier}$$

D'où, on tire alors immédiatement la valeur de tous les pôles :

$$\frac{p_i}{\omega_c} = e^{jk\pi/N}$$

avec  $i=k+1$  et  $k \in [0, 2N - 1]$

On remarque que :

- les pôles sont tous disposés sur un cercle de rayon unité dans le plan complexe figure 3.17 et espacés d'un angle  $\theta = k\pi/N$ ,
- ils sont deux à deux complexes conjugués.

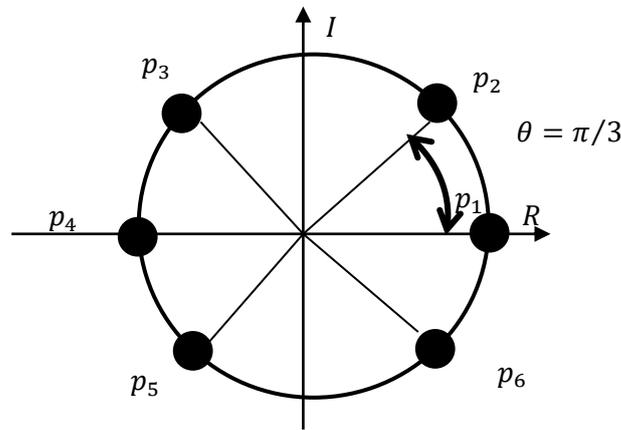
**Exemple :**  $N = 3$ , filtre du troisième ordre.

On a,  $\frac{p_i}{\omega_c} = e^{jk\pi/3}$ , avec  $i=k+1$  et  $k \in [0,5]$

D'où les pôles suivants :

$$p_1/\omega_c = 1, p_2/\omega_c = e^{j\pi/3}, p_3/\omega_c = e^{j2\pi/3}, p_4/\omega_c = e^{j\pi} = -1 = -p_1,$$

$$p_5/\omega_c = e^{j4\pi/3} = p_3^*, p_6/\omega_c = e^{j5\pi/3} = p_2^*$$



**Figure 3.17 :** Disposition des pôles pour un filtre d'ordre  $N = 3$

Les trois pôles à gauche de l'axe imaginaire sont  $p_3, p_4$  et  $p_5$ . Ils correspondent à  $T(p)$ . Les trois pôles à droite de l'axe imaginaire sont  $p_1, p_2$  et  $p_6$ . Ils correspondent à  $T(-p)$ .

Donc, la fonction de transfert est donnée par :

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{T_0}{\left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{p_3}{\omega_c}\right) \left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{p_4}{\omega_c}\right) \left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{p_5}{\omega_c}\right)} \\ &= \frac{T_0}{\left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{p_3}{\omega_c}\right) \left(\frac{p}{\omega_c} + 1\right) \left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{p_3^*}{\omega_c}\right)} \\ T(p) &= \frac{T_0}{\left(\frac{p}{\omega_c} - e^{j2\pi/3}\right) \left(\frac{p}{\omega_c} + 1\right) \left(\frac{p}{\omega_c} - e^{-j2\pi/3}\right)} \\ &= \frac{T_0}{\left(\frac{p^2}{\omega_c^2} - \frac{p}{\omega_c} e^{-j2\pi/3} - \frac{p}{\omega_c} e^{j2\pi/3} + 1\right) \left(\frac{p}{\omega_c} + 1\right)} \end{aligned}$$

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(\frac{p^2}{\omega_c^2} - \frac{p}{\omega_c} (2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)) + 1\right) \left(\frac{p}{\omega_c} + 1\right)}$$

avec  $\begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Donc,

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(\frac{p^2}{\omega_c^2} + \frac{p}{\omega_c} + 1\right) \left(\frac{p}{\omega_c} + 1\right)}$$

(3.10)

Finalement, on obtient :

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{1}{2}(-1 + j\sqrt{3})\right) \left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{1}{2}(-1 - j\sqrt{3})\right) \left(\frac{p}{\omega_c} + 1\right)}$$

**Remarque:**

On peut vérifier que les valeurs du dénominateur de l'équation (3.10) correspondent à celles reportées dans le tableau donnant les polynômes normalisés ( $\omega_c = 1$ ) du dénominateur des filtres de Butterworth .

- **Cas N pair : filtre d'ordre pair.**

On a ,

$$1 + \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N} = 0, \text{ soit } \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N} = -1$$

Les racines du dénominateur sont les 2N racines de -1 que l'on peut facilement trouver si l'on exprime l'équation précédente sous la forme :

$$\left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N} = e^{j(k2\pi+\pi)}, k \in [0, 2N - 1]$$

Donc, on tire la valeur de tous les pôles en utilisant la formule suivante :

$$\frac{p_i}{\omega_c} = e^{j\left(\frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{2N}\right)}$$

avec  $i = k + 1$  et  $k \in [0, 2N - 1]$

**Exemple :  $N = 2$** , filtre du deuxième ordre.

On a ,  $\frac{p_i}{\omega_c} = e^{j(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4})}$  avec  $i=k+1$   $k \in [0,3]$

D'où les pôles suivants :

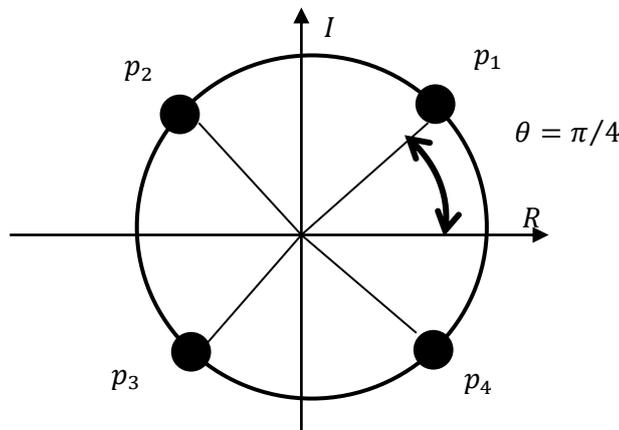
$$\frac{p_1}{\omega_c} = e^{j(\frac{\pi}{4})} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$$

$$\frac{p_2}{\omega_c} = e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + j)$$

$$\frac{p_3}{\omega_c} = e^{j(\pi + \frac{\pi}{4})} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - j) = p_2^*$$

$$\frac{p_4}{\omega_c} = e^{j(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j) = p_1^*$$

$$\text{avec } \begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$$



**Figure 3.18 :** Disposition des pôles pour un filtre d'ordre  $N = 2$

Les deux pôles à gauche de l'axe imaginaire sont  $p_2$  et  $p_3$ . Ils correspondent à  $T(p)$ .

Finalement, on obtient la fonction de transfert suivante :

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{p_2}{\omega_c}\right)\left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{p_3}{\omega_c}\right)}$$

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + j)\right)\left(\frac{p}{\omega_c} - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - j)\right)}$$

Donc,

$$T(p) = \frac{T_0}{\left(\frac{p^2}{\omega_c^2} + \sqrt{2} \frac{p}{\omega_c} + 1\right)}$$

(3.11)

Le tableau suivant donne les polynômes normalisés ( $\omega_c = 1$ ) des filtres passe-bas de Butterworth

Ordre du filtre	polynômes normalisés
N=1	$(p + 1)$
N=2	$(p^2 + \sqrt{2}p + 1)$
N=3	$(p + 1)(p^2 + p + 1)$
N=4	$(p^2 + 1.8477p + 1)(p^2 + 0.7653p + 1)$
N=5	$(p + 1)(p^2 + 1.6180p + 1)(p^2 + 0.6180p + 1)$
N=6	$(p^2 + 1.9318p + 1)(p^2 + \sqrt{2}p + 1)(p^2 + 0.5176p + 1)$
N=7	$(p + 1)(p^2 + 1.0819p + 1)(p^2 + 1.2469p + 1)(p^2 + 0.4450p + 1)$

---

## Références

---

- [1] S. DOS SANTOS, *Cours de traitement du signal Signaux Déterministes (TS1) et Signaux Aléatoires (TS2)*, 2016, [https://sites.google.com/site/sfagispages/Cours\\_TS\\_2016\\_INSACVL.pdf](https://sites.google.com/site/sfagispages/Cours_TS_2016_INSACVL.pdf).
- [2] D. LE RUYET, P. PROVENT, *électronique analogique PHR0 0 2 / ELE 0 0 4 / DUT GEI I 1<sup>ière</sup> année*, 2010, <https://cupdf.com/document/cours-electronique-base.html>.
- [3] R. BEKKA, *Fondements du traitement du signal*, Office des Publications Universitaires, 5<sup>ième</sup> édition, 2015.
- [4] A. GUERCHAOUÏ, *Traitement du signal théorie et applications Partie 1*, Office des Publications Universitaires, 2008.
- [5] C. JUTTEN, *Théorie du signal*, [http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~christian.jutten/mescours/Cours\\_Theorie\\_Signal\\_2018.pdf](http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~christian.jutten/mescours/Cours_Theorie_Signal_2018.pdf), 2018.
- [6] S. PIOCH, *Systèmes électroniques (M2104) « filtrage analogique actif »*, [https://moodle.univtln.fr/pluginfile.php/384556/mod\\_resource/content/1/FILTRAGE\\_ANALOGIQUE.pdf](https://moodle.univtln.fr/pluginfile.php/384556/mod_resource/content/1/FILTRAGE_ANALOGIQUE.pdf).
- [7] J. AUVRAY, *Filtres Actifs*, [http://avrj.cours.pagespersoorange.fr/Cours/SE\\_012\\_Filtres\\_actifs.pdf](http://avrj.cours.pagespersoorange.fr/Cours/SE_012_Filtres_actifs.pdf).