République Algérienne Démocratique Et Populaire Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université M'hamed Bougara de Boumerdes

Faculté des hydrocarbures

Polycopié de cours

PHYSIQUE 1

Niveau : 1ère Année STH et ST

Présenté par :

Dr MERIEM Djanette et Dr BLIZAK Salah

Année : 2021

Physique 1

TABLE DES MATIERES

PHYSIQUE 1 .... *0*
Introduction *5*
Introduction historique **5**
Carte conceptuelle de la mécanique du point **7**
CHAPITRE I: RAPPELS MATHEMATIQUES *9*
I-1. L'analyse dimensionnelle *10*
I.1.1. Les grandeurs physiques **10**
I.1.2. Unités des grandeurs **10**
I.1.3. Dimension d'une grandeur physique **14**
I.2. Calcul d'erreurs *18*
I.2.1. Introduction **18**
I.2.2. Les erreurs de mesures systématiques **19**
I.2.3. les erreurs de mesures aléatoires **19**
I.2.4. Incertitude absolue **19**
I.2.5. Incertitude relative **20**
I.2.6. Chiffres significatifs **21**
I.2.7. Calcul d'incertitude **22**
I.2.6. Chiffres significatifs **24**
I.3. Rappel sur les vecteurs *26*
I.3.1. Définition du vecteur **26**
I.3.2. Composantes d'un vecteur. **27**
I.3.3. Opérations sur les vecteurs **28**
Exercices *34*
Chapitre II: Cinématique du point matériel *36*
II.1. Introduction *37*

II.2. Référentiel**..37**
II.3. trajectoire**..38**
II.4. Vecteur Position**..38**
II.5.Vecteur déplacement**..39**
II.6. Vecteur Vitesse**..40**
II.6.1. Vitesse moyenne..40
II.6.2.Vecteur vitesse instantanée..40
II.7. Vecteur accélération**..41**
II.7.1 Accélération moyenne..41
II.7.2 Accélération instantanée..41
II.8. Mouvement rectiligne (Mouvement à une dimension)**..43**
II.8.1 Vitesse moyenne..43
II.8.2. Vitesse instantanée..44
II.8.3. Accélération moyenne..44
II.8.4. Accélération instantanée..44
II.8.5. Cas particuliers de mouvement rectiligne..45
II.10. Mouvement en deux dimensions**..48**
II.10.1 Mouvement en coordonnées cartésiennes..48
II.10.1 Mouvement en cordonnées polaires..50
II.10.2. Mouvement en cordonnées intrinsèques (curvilignes)..52
II.11. Mouvement dans l'espace (trois dimensions)**..57**
II.11.1. Mouvement en coordonnées cylindriques..57
II.11.2. Mouvement en coordonnées sphériques..58
II.12. Mouvement Relatif**..59**
II.12.1. Vecteur position..60
II.12.2. Vecteur vitesse..60
II.12.3. Vecteur accélération..61
II.12.4. référentiel relatif en translation par rapport au référentiel absolu..63
II.12.5. Référentiel relatif en rotation autour d'un axe fixe..63

Exercices ***64***

Chapitre III: Dynamique du point matériel ***69***

III.1. Introduction ***69***

III.2. Référentiel Galiléen ***70***

III.3. Masse et inertie ***70***

III.4. Les trois lois de Newton de la dynamique ***71***

III.4.1. première loi de Newton (Principe d'inertie) **71**

III.4.2. Deuxième loi de Newton (Principe fondamental de la dynamique) **71**

III.4.3 Troisième loi de Newton (Principe des actions réciproques) **72**

III.5. Types de forces ***73***

III.5.1. forces à distance **73**

III.5.2. Les forces de contact **75**

III.6. Application du principe fondamental de la dynamique (PFD) ***79***

III.6.1. Exemples d'application **82**

III.7 Le moment cinétique ***86***

Exercices ***87***

Chapitre IV: Travail et énergie ***91***

IV.1. Introduction ***92***

IV.2. Travail fait par une force constante ***92***

IV.3. Travail fait par une force variable ***94***

IV.4. Le théorème de l'énergie cinétique ***95***

IV.5. L'énergie potentielle et l'énergie totale ***96***

IV.5.1. Les forces conservatives et non conservatives **97**

IV.5.2. L'énergie potentielle pour certaines forces **98**

IV.6. Puissance ***98***

IV.7. Exemples d'application ***99***

IV.8 Le choc ***100***

IV.8.1. Définition **100**

IV.8.2. Chocs élastiques **101**

IV.8.3.Choc inélastique **101**

EXERCICES ***102***

BIBLIOGRAPHIE ***105***

INTRODUCTION

Le programme de physique 1 est consacré à la mécanique du point.

La mécanique est considérée comme la base de l'apprentissage de la physique. Elle est la science du mouvement et de ses causes.

La mécanique du point matériel traite l'étude cinématique statique et dynamique d'un objet considéré comme point matériel. Ce dernier n'est qu'un objet ponctuel doté d'une masse ou tout simplement, un objet sans dimensions spatiales.

L'objectif principal de ce cours est de vous familiariser avec quelques concepts de base de la physique classique, et de vous apprendre à les mettre en œuvre. Vous avez déjà rencontré une grande partie de ces notions et concepts au cours de vos études secondaires (par exemple, celles de vitesse, accélération, force, travail, énergie, puissance). Ce que nous ferons dans ce cours est acquérir une vue synthétique et unifiée de ces notions dans un cadre plus large et général, grâce à des outils mathématiques et en se basant sur quelques principes de la physique générale.

Voici de manière plus précise ce qui est attendu de vous au terme de cette enseignement de (Physique 1: Mécanique du point) :

- Une compréhension solide et profonde des différents concepts de mécanique
- Une bonne maîtrise dans la mise en œuvre des outils mathématiques nécessaires.
- . Une bonne capacité de résoudre des problèmes par la mise en œuvre organisée des différents principes physiques étudiés :

INTRODUCTION HISTORIQUE

Dès les époques les plus reculées, l'homme a cherché à fabriquer des outils et des mécanismes lui permettant de se défendre contre les dangers qui le menaçaient. Et ainsi, dès l'Antiquité les premiers savants réfléchissaient sur ces problèmes et en aborder plus ou moins la solution. Max Von Laue avait raison de dire : « *Au commencement était la mécanique* ».

Nous citons ci-dessous les célèbres savants qui ont contribué au développement de cette science.

- Pythagore (580-497 av J.C) s'est intéressé à déterminer mathématiquement le mouvement des "planètes".

- Aristote (384-322 av J.C.) est le premier à décrire la physique comme une discipline. Il écrit que tout mouvement est un passage de la puissance (*dynamis*) à l'acte (*energeïa*). Le mouvement est décrit de manière entièrement qualitative, sans faire usage à des mathématiques. Il a, aussi, partagé le mouvement en trois catégories :

  - le mouvement *naturel* ;
  - le mouvement *violent ;*
  - le mouvement *volontaire*.

- Aristarque (310-230 av J.C) est le premier à avoir eu l'intuition du mouvement de la terre sur elle-même. Il calcule la distance terre-lune.
- Archimède (~287-212 av J.C.) est le premier à émettre la définition le moment d'une force. Ainsi que celui de la poussée dite "d'Archimède". Il a décrit le centre de gravité d'un objet ainsi que diverses méthodes pour le localiser.
- Erathostène (276-194 av J.C.) a déterminé le rayon de la terre avec une erreur inférieure à 2% de la valeur actuellement admise.
- Galilé (1564-1642) Galilée est le père de la mécanique telle que nous la connaissons actuellement. Il avancera des idées révolutionnaires sur l'héliocentrisme et la rotation de la terre sur elle-même. Il a donné la première explication du mouvement rectiligne uniforme appelé inertie. décrit correctement le mouvement uniformément accéléré.
- Huygens 1626-1995 énonça correctement les lois des chocs (collisions).
- Newton (1643-1727) rétablit les idées de Galilée, l'héliocentrisme, les lois du mouvement. Il invente le calcul infinitésimal (en même temps que Leibniz) et les équations différentielles. Il est le fondateur incontestable de la science du mouvement et de sa dynamique. Ses lois n'ont jamais pu être mise en défaut jusqu'à ce que Einstein, Planck, Bohr et Dirac montrent que les lois de Newton ne sont qu'une approximation parfaitement

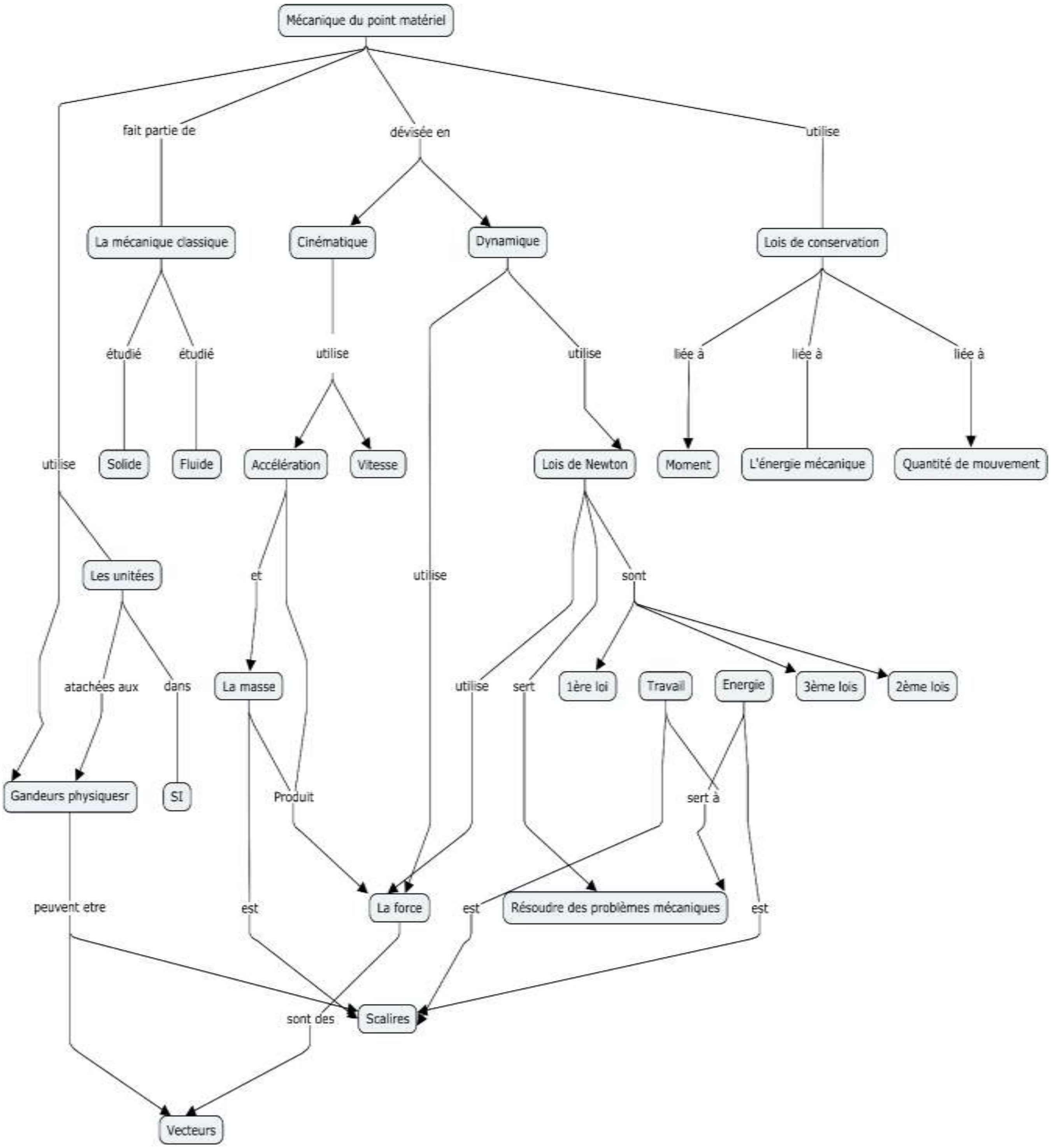
valide de lois beaucoup plus complexes que sont les lois de la relativité générale ou de la mécanique quantique.

- Coriolis (1792-1843) a attiré pour la première fois l'attention sur le problème de la composition des accélérations.
- Foucault (1819-1868), achève de mettre en évidence l'importance du système de lois physiques par rapport auquel la loi fondamentale de la mécanique doit être énoncée.

CARTE CONCEPTUELLE DE LA MECANIQUE DU POINT

La carte conceptuelle, introduite par *Joseph NOVAK en 1972*, est une représentation graphique liant des concepts dans un domaine spéciale selon des règles plus ou moins formelles. Elle permet de prendre conscience du fait que le savoir n’est pas un ensemble de faits isolés, mais une structure conceptuelle dont les éléments sont reliés. Les concepts sont disposés de sorte à mettre certaines relations hiérarchies entre eux.

La carte conceptuelle suivante montre comment sont reliés les concepts de la mécanique du point matériel entre eux.



Carte conceptuelle : Mécanique du point matériel

CHAPITRE I : RAPPELS MATHEMATIQUES

I-1. L'ANALYSE DIMENSIONNELLE

L'analyse dimensionnelle consiste à mettre en relation différentes dimensions entre elles par le biais de lois la de physique ou de relations connues.

Toute grandeur mesurée doit être décrite avant tout de façon qualitative : longueur, temps, masse, etc. Cette qualité est la dimension de la grandeur mesurée.

I.1.1. LES GRANDEURS PHYSIQUES

Pour décrire et interpréter le monde matériel qui nous entoure, les physiciens utilisent des grandeurs physiques.

Une grandeur peut souvent être mesurée, estimée ou calculée et peut être symbolisée par une lettre. Elle est utilisée pour analyser un phénomène physique. On la trouve généralement dans les "lois de la physique" qu'on utilise, en physique ou dans d'autres disciplines.

En mécanique on peut donner les grandeurs suivantes comme exemple :

vitesse, accélération, force, énergie, température, charge électrique, surface, volume…

On remarque qu'il y a deux genres de grandeurs physiques ; des grandeurs physique scalaires et des grandeurs physiques vectorielles (voir tableau suivant)

Grandeur vectorielle	**Grandeur scalaire**
Vitesse	volume
Déplacement	Energie
Force	Mass
Accélérations	temps

Tableau 1.1 : Exemple des grandeurs physiques

I.1.2. UNITES DES GRANDEURS

« *Toute grandeur* physique *est le produit d'un nombre pure et d'une unité* » Maxwell

Les unités sont des grandeurs conventionnelles et abstraites, choisies pour représenter des grandeurs physiques mesurables, telles que la masse, le temps et la longueur.

- **Le Système International (SI)**

Un système d'unités de mesure est défini par un choix conventionnel de grandeurs de base auxquelles sont associées des unités. Exemple :

Système CGS (centimètre, gramme, seconde)

- **SYSTEME MKSA OU DE GIORGI** (mètre, kilogramme, seconde, ampère)
- **SYSTEME SI**

Plutôt que d'utiliser chacun un système d'unités différent, les scientifiques ont décidé d'utiliser un système d'unités commun : c'est le Système International (SI).

Le système international est basé sur 7 grandeurs fondamentales, auxquelles sont associées une dimension et une unité (voir tableau 1.2).

Dans ce système d'unités, on distingue deux classes d'unités SI.

a) **Les unités de base** :

On constate que l'on ne peut pas avoir plus de sept grandeurs dimensionnellement indépendantes. Le choix des sept grandeurs de base n'est pas unique et les physiciens ont adopté sept grandeurs de base, qui définissent d'ailleurs les unités de base du système international :

Mètre, kilogramme, seconde, ampère, kelvin, mole, candela (voir tableau 1.2). Le SI admet aussi deux unités supplémentaires (voir le tableau 1.3). Ces deux unités sont sans dimension.

Grandeur	Dimension	Unité SI	Symbole SI
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	ampère	A

Température	Θ	kelvin	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse1	J	candela	cd

Tableau 1.2 : Les sept unités de base de SI

Grandeur	SYMBOLE	Nom de l'unité	Symbole
Angle plan	α	radian	rad
Angle solide	Ω	stéradian	sr

Tableau 1.3 : Les unités supplémentaires

b) **Les unités dérivées** :

Ces unités résultent de combinaisons d'unités de base d'après des relations algébriques (multiplication et division) liant les grandeurs correspondantes. Elles sont, donc, des unités qui peuvent être exprimées à partir des unités de base. Certaines unités dérivées ont reçu des noms spéciaux (voir tableau 1.4).

Grandeurs	*Symbole*	Unité	Symbole	Unité en SI	Dimension
accélération	*a*	mètre par seconde	m/s^2	m/s^2	LT^{-2}
superficie	*A*	mètre carré	m^2	m^2	L^2
densité	*D*	Kilogramme par mètre cube	kg/m^3	kg/m^3	ML^{-3}
force	*F*	Newton	N	$kg{\cdot}m/s^2$	MLT^{-2}
fréquence	*f*	Hertz	Hz	s^{-1}	T^{-1}
power	*P*	watt	W	$kg{\cdot}m^2/s^3$	ML^2T^{-3}
pressure	*p*	Pascal	Pa	$kg/m{\cdot}s^2$	$ML^{-1}T^{-2}$
vitesse	*v*	mètre par seconde	m/s	m/s	LT^{-1}
volume	*V*	mètre cube	m^3	m^3	L^3
travail	*W*	Joule	J	$kg{\cdot}m^2/s^2$	ML^2T^{-2}
viscosité dynamique	η	Pascal seconde	Pa.s	$m^{-1}{\cdot}kg{\cdot}s^{-1}$	$L^{-1}MT^{-1}$

Tableau 1.4 : Les unités dérivées

2. Multiples et sous-multiples

Lorsque l'écriture de la mesure est trop longue, il est utile d'utiliser un multiple ou un sous-multiple de l'unité. Les multiples et sous-multiples décimaux des unités de base et dérivées sont formés par l'utilisation des préfixes auxquels sont associés noms et symboles (voir le tableau 1.5).

multiples de l'unité			**sous-multiples de l'unité**		
préfixe	**symbole**	**Facteur multiplicatif**	**préfixe**	**symbole**	**Facteur multiplicatif**
déca	da	10	déci	d	10^{-1}
hecto	h	10^{2}	centi	c	10^{-2}
kilo	k	10^{3}	milli	m	10^{-3}
méga	M	10^{6}	micro	□	10^{-6}
giga	G	10^{9}	nano	n	10^{-9}
téra	T	10^{12}	pico	p	10^{-12}
péta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}
exa	E	10^{18}	atto	a	10^{-18}

Tableau 1.5 : Multiples et sous-multiples des unités SI

I.1.3. DIMENSION D'UNE GRANDEUR PHYSIQUE

La dimension d'une grandeur est, pour simplifier, sa nature physique. Une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une énergie, d'une masse, etc. La notion de dimension est très générale, et ne suppose aucun choix particulier de système d'unités. Une grandeur ayant la dimension d'une longueur peut s'exprimer en mètres, en centimètres, en angströms, en miles, etc. Ainsi, quand on demande « quelle est la dimension de l » il faut répondre « La dimension d'une longueur ; L ». Les dimensions des grandeurs de base sont montrées dans le tableau 1.2.

Une grandeur ((purement numérique)), comme le rapport de deux longueurs, est dite sans dimension, ou adimensionnée. L'angle plan, défini comme le rapport de deux longueurs, est donc une grandeur sans dimension ; il a cependant une unité (Le radian, le degré).

1. **Ecriture d'une équation aux dimensions**

Soit G une grandeur physique. Sa dimension est notée [G]. Par exemple, si G est une longueur, on écrira [G] = L. Cette relation est l'équation aux dimensions de la grandeur G. Plus généralement, dans la symbolique dimensionnelle des grandeurs de base, on appelle dimension d'une grandeur dérivée (G), la relation :

$$dimG = [G] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\delta} \theta^{\varepsilon} N^{\mu} J^{\nu}$$

où $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ ... ∈ Q sont les exposants dimensionnels de G.

Le tableau 1.6 montre les équations aux dimensions de certaines grandeurs physiques très utilisées en mécanique.

Remarque:

- Les nombres et les angles sont des grandeurs sans dimension.
- L'équation aux dimensions d'une grandeur G sans dimension se réduit à [G] = 1
- Le rapport de deux grandeurs de même dimension est sans dimension.
- On ne peut additionner (ni soustraire) des dimensions
- Les fonctions mathématiques (cos, sin, tan, exp, ln ...) et leurs arguments sont sans dimension. Par exemple cos(x) et x sont sans dimensions.

Grandeur physique	Dimension
Densité	$[\rho] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}$
vitesse	$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$
Vitesse angulaire	$[\omega] = \frac{LT^{-1}}{L} = T^{-1}$
Accélération	$[a] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$
Force	$[F] = M \times LT^{-2} = MLT^{-2}$

Travail	$[W] = MLT^{-2} \times L = ML^2T^{-2}$
puissance	$[P] = \frac{ML^2T^{-2}}{T} = ML^2T^{-3}$

Tableau 1.6 : Les équations aux dimensions de certaines grandeurs physiques

<u>Exemple :</u>

Vérifier l'homogénéité aux dimensions des équations suivantes :

1. C=P + ρ gz, où P est une pression, h est une hauteur, ρ est une densité et C'est une constante. Donc l'équation est homogène en dimension.
2. x = (l^2 - d)/d, où les trois grandeurs sont des distances.

1. C=P + ρ gz Nous avons :

$[C] = 1$ *et*

$$[P + \rho gz] = [P] = [\rho gz] = ML^{-1}T^{-2}$$

Donc l'équation est **Non homogène** en dimension.

2. x = (l^2 – d^2)/d . Nous avons :

$[x] = L$

$$\left[(l^2 - d^2)/d\right] = \left[l^2/d - d\right] = \left[l^2/d\right] = [d] = L$$

Donc l'équation est **homogène** en dimension.

2. Application de l'équation aux dimensions

L'équation aux dimensions permet :

- de déterminer, la dimension et l'unité, d'une grandeur dérivée en fonction des dimensions et unités des grandeurs fondamentales ;
- d'effectuer éventuellement des changements d'unités ;
- de vérifier l'homogénéité des formules littérales ;

- de prévoir par une analyse dimensionnelle une formule traduisant une loi physique.

3. Recherche de la forme d'une loi physique

L'analyse dimensionnelle permet de trouver la solution de certains problèmes sans avoir à résoudre d'équations.

On suppose qu'une grandeur G peut s'exprimer en fonction de deux autres grandeurs G_1 et G_2 : G=f (G_1, G2). Pour déterminer la forme de f, on exprime la dimension de G_1 et G_2 : G en fonction de la dimension des grandeurs de base, puis on recherche les coefficients α et β , tels que $G_1^{\alpha}G_2^{\beta}$ et G aient la même dimension. Ainsi, l'analyse dimensionnelle est une technique souvent efficace pour vérifier ou même découvrir des lois.

<u>Illustration de la méthode par des exemples</u>

<u>Exemple1</u>

Un projectile *a* été lancée avec une vitesse v. Trouver la formule de sa portée horizontale x en fonction de g et v ?

$$x = f(g, v) \Rightarrow x = kg^{a}v^{b} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\Rightarrow [x] = [k][g^{a}][v^{b}] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$ou' : [x] = L, [k] = 1,\ [g] = LT^{-2}\ et\ \ [v] = LT^{-1}$

On remplaçant les dimensions de x, k, g et v dans l'équation (2), on obtient :

$L = 1.(LT^{-2})^{a}.(LT^{-1})^{b}\ ou\ \ LT^{0} = 1.L^{a}T^{-2a}L^{b}T^{-b} \Rightarrow L^{1}T^{0} = L^{a+B}T^{-2a-b}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a + b \\ 0 = -2a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

En remplaçant a et b par leurs valeurs en (1), on obtient : $x = kg^{-1}v^{2}$ou $x = k\,\frac{v^2}{g}$

<u>Exemple 2</u>

L'expérience a montré que la vitesse de propagation **v** d'une déformation transversale le long d'une corde ne dépendait que de la masse linéique $\boldsymbol{\mu}$ et de la tension $\boldsymbol{F}$ de cette corde.

La vitesse v est fonction de T et μ. Donc : v=f (μ,F)

L'expression de ***v*** peut se mettre sous la forme : $\mathbf{v} = k\,\mu^{\alpha}\,F^{\beta}$

où k est un coefficient sans dimension

Sachant que :

$[\boldsymbol{v}] = LT^{-1}$

$[\boldsymbol{\mu}] = ML^{-1}$

$[F] = MLT^{-2}$

L'équation aux dimensions s'écrit : $LT^{-1} = (ML^{-1})^{\alpha}\,(MLT^{-2})^{\beta} = M^{\alpha+\beta}\,L^{-\alpha+\beta}\,T^{-2\beta}$

Par identification :

$$\left.\begin{array}{r}\alpha+\beta=0\\ -\alpha+\beta=1\\ -2\beta=-1\end{array}\right\} \quad \alpha=-\beta=-\frac{1}{2}$$

D'où la formulation de la vitesse : $v = k\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

I.2. CALCUL D'ERREURS

L'objet de cette partie, très importante pour toute la suite, est de comprendre le rôle de la précision, de savoir l'estimer et s'en servir.

I.2.1. INTRODUCTION

En sciences expérimentales il n'existe pas de mesures exactes, puisque toute mesure d'une grandeur quelconque est nécessairement entachée d'erreur. On ne peut parler que d'estimation de l'erreur de mesure car la valeur vraie est inconnue.

Les erreurs de mesure peuvent provenir de plusieurs sources :

- qualité des instruments ;
- l'expérimentateur (l'erreur est humaine !) ;

- la variabilité de la grandeur mesurée.

Par conséquent, lors du mesurage d'une grandeur, on évaluera son incertitude.
On distingue deux types d'erreur de mesure ; l'erreur de mesure aléatoire et l'erreur de mesure systématique. En conséquence :

- l'erreur de mesure est égale à la somme de l'erreur aléatoire et systématique ;
- l'incertitude sur un résultat peut être écrite sous forme d'incertitude absolue ou relative.

I.2.2. LES ERREURS DE MESURES SYSTEMATIQUES

Ce sont des erreurs constantes qui possèdent la même valeur à chaque fois que la mesure est effectuée. Par conséquence, elles ne seront pas diminuées par une série de mesures répétées. Plus généralement les erreurs systématiques ont des origines diverses :

- erreur d'´étalonnage ;
- oubli d'un paramètre ;
- procédure erronée ;
- dispositif inadapté ou mal utilisé (exemple : une règle dont il manque le premier centimètre).

Les erreurs systématiques sont souvent difficiles à détecter.

I.2.3. LES ERREURS DE MESURES ALEATOIRES

Elles proviennent d'une déviation aléatoire de la valeur d'une mesure. Cette déviation est différente à chaque fois qu'une même mesure est effectuée. Ainsi, Lors de mesures répétées nous obtenons généralement une dispersion des résultats. Contrairement à l'erreur systématique, l'erreur aléatoire ne peut être corrigée. Une répétition des mesures peut l'atténuer.

Exemple : Erreur de lecture sur un appareil à aiguille entraine une erreur aléatoire.

I.2.4. INCERTITUDE ABSOLUE

Par définition l'erreur absolue d'une grandeur mesurée est une estimation de l'erreur que fait l'expérimentateur. L'incertitude absolue est l'écart maximum possible entre la mesure et la valeur exacte. Elle correspond à l'intervalle contenant très probablement la valeur vraie de la grandeur mesurée.

Considérons la grandeur physique *G*, dont on veut donner une mesure avec son incertitude.

On écrit :

$$G = G_0 \pm \Delta G, \text{ où}$$

- G_0 est le résultat numérique
- ΔG est l'incertitude absolue.

L'incertitude absolue a donc toujours la même dimension que la grandeur au quelle elle est attachée.

En général, on l'exprime dans la même unité que G; dans certains (rares) cas, elle peut cependant être exprimée dans un multiple de l'unité de G. Par convention, l'incertitude est un réel positif (on ne notera jamais d'incertitude négative).

Exemple **:** Le résultat de la mesure de la longueur l d'une table peut s'écrire :

$l = (1{,}2 \pm 0{,}1)$ m;

$l = (1{,}2 \pm 10^{-1})$ m;

$l = 1{,}2$ m $\pm 0{,}1$ m;

$l = 1{,}2$ m ± 10 cm.

C'est la première de ces notations qui est la plus fréquemment utilisée, le deuxième et celle qui est recommandée par le système international (écriture scientifique).

I.2.5. INCERTITUDE RELATIVE

On peut aussi présenter une grandeur G de la façon suivante :

$$G = G_0(1 \pm \Delta G/G_0)$$

$\Delta G/G_0$ est alors l'incertitude relative.

Par définition l'erreur relative est le quotient de l'erreur absolue à la valeur vraie. C'est un nombre positif, sans dimension, donc sans unité, en général plus petit que 1, que l'on peut exprimer en pourcentage. Il permet de comparer la précision de différentes mesures. La mesure la plus précise est celle dont l'incertitude relative est la plus faible.

Exemple **:** Incertitude relative de la mesure de la longueur l vu ci-dessus est $\frac{\Delta l}{l} \cdot 100 = 8\%$

Le résultat peut aussi s'écrire l = 1,2 m à 8% près.

I.2.6. CHIFFRES SIGNIFICATIFS

Lorsqu'on exprime une mesure directe ou le résultat d'un calcul, l'incertitude absolue associée au nombre est exprimée avec un seul chiffre significatif**.** Ce sont les chiffres utiles, qui veulent vraiment dire quelque chose. Ils servent à traduire le degré de précision d'une mesure. Il existe quelques règles afin de déterminer le nombre des chiffres significatifs :

- tout chiffre différent de zéro est significatif ;
- les zéros placés entre deux chiffres significatifs sont significatifs ;
- les zéros placés à gauche du premier chiffre différent de zéro ne sont pas significatifs ;
- les zéros placés à droite sont significatifs s'ils sont placés après la virgule ;
- l'incertitude ne doit pas comporter plus de deux chiffres significatifs ;
- le résultat ne doit pas être plus précis que l'incertitude ;
- le dernier chiffre du résultat corresponde à l'ordre de grandeur de l'incertitude.

Exemple

a = 7,35678 ± 0,345 (utilisation incorrecte)

a = 7,3 ± 0,3 (utilisation correcte)

a = 7,35 ± 0,04(utilisation correcte)

a = 7,356 ± 0,005(utilisation correcte)

a = 7,3567 ± 0,0007(utilisation correcte)

Remarque :

Sachant qu'une mesure comporte une incertitude, il est important de conserver le bon nombre de chiffres significatifs associés à cette mesure. On arrondit l'incertitude à 1 chiffre significatif et la valeur au dernier chiffre significatif (voir l'exemple ci-dessous).

Exemple :

a) (8,23 ±0,4)cm = (8,2 ±0,4)cm
b) (2,4 ±0,003)g = (2,400 ±0,003)g
c) (44,87 ±1,3)mm = (44,9 ±1,3)mm
d) (6,5 ±3,5) kL = (6 ±4) kL (si 5 est précédé d'un nombre pair, arrondir vers le bas)
e) (0,75 ±0,25)mW = (0,8 ±0,3)mW (arrondir vers le haut pour l'incertitude)

I.2.7. CALCUL D'INCERTITUDE.

1. Valeur et incertitude sur une série de mesures.

Pour déterminer la valeur et l'incertitude d'un paramètre à partir d'une série de mesures effectuées sur ce paramètre, la méthode des extrêmes fonctionne toujours et est très simple. La valeur est donnée par $G = \frac{G_{\max} + G_{\min}}{2}$ et l'incertitude est donnée par $\Delta G = \frac{G_{\max} - G_{\min}}{2}$.

Exemple: On mesure la largeur d'un bureau à 4 endroits différents.

x1 = 57,3cm ±0,4cm
x2 = 58,1cm ±0,4cm
x3 = 56,7cm ±0,4cm
x4 = 56,9cm ±0,4cm

La valeur est donnée par : $x = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$

L'incertitude par : $\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$ et l'écriture finale par : x ±Δx = (57,4 ±0,7) cm

2. Incertitude sur une somme ou différences

Quand on veut additionner ou soustraire (ou une combinaison des deux) plusieurs valeurs, qui ont une incertitude, on additionne les incertitudes.

Si G=a+ b-c, alors ΔG=Δa+Δb+Δc

3. Incertitude d'une grandeur composé G=f(a,b,c)

Soit une grandeur G=f(a,b,c). Pour déterminer l'incertitude ΔG à partir des incertitudes connues Δa, Δb et Δc, il existe deux méthodes :

a) La méthode de la différentielle totale

La différentielle totale de G s'écrit : $dG = \frac{\partial G}{\partial a} da + \frac{\partial G}{\partial b} db + \frac{\partial G}{\partial c} dc$

L'incertitude absolue est : $\Delta G = \frac{\partial G}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial G}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial G}{\partial c} \Delta c$

<u>Exemple **:**</u>

La quantité de mouvement d'un corps de masse m et de vitesse v donnée par la formule : P=mv. Si $m = (2.0 \pm 0.1)g$ et $v = (1.6 \pm 0.2)g$, donnez la valeur de P et estimez l'erreur sur celle-ci **?**

$$dP = \frac{\partial P}{m} dm + \frac{\partial P}{\partial v} dv \rightarrow \Delta P = \frac{\partial P}{m} \Delta m + \frac{\partial P}{\partial v} \Delta v$$
$$\Delta P = v\Delta m + m\Delta v = 1.6 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 = 0.36 gm/s$$
$$P = 2 \cdot 1.6 = 3.2 gm/s$$
$$P = (3.2 \pm 0.4).10^{-3} kgm/s$$

b) La méthode des différentielles logarithmiques

G=f(a,b,c), donc $\ln G = \ln f(a,b,c)$.

La différentielle de ln G est $\frac{dG}{G}$

Si « d » est remplacée par « Δ », on obtient l'expression de $\frac{\Delta G}{G}$

Exemple :

La résistance d'un conducteur cylindrique R varie avec la section et la longueur selon la formule $R = \rho \frac{\ell}{s}$. Comment varie relativement la résistance si la section augmente de 4% et la longueur augmente de 1% ?

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = +0{,}01 et \qquad \frac{\Delta s}{s} = +0{,}04$$

$$R = \rho \frac{\ell}{s}$$

$$Donc, \ln R = (\ln \rho) + (\ln \ell) - (\ln s)$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\ell}{\ell} - \frac{ds}{s} \rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta\ell}{\ell} + \frac{\Delta s}{s}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = 0{,}01 + 0{,}04 = 0{,}05 = 5\%$$

I.2.6. CHIFFRES SIGNIFICATIFS

Les chiffres significatifs sont les chiffres utiles dans la valeur d'une mesure qui donnent des indications sur le degré de précision (voir la figure 1.2). Pour une écriture d'une mesure soit acceptable scientifiquement il ne faut garder que les chiffres significatifs. Le nombre de chiffres significatifs correspond au nombre de chiffres de cette valeur écrite en notation scientifique (sans la puissance de 10).

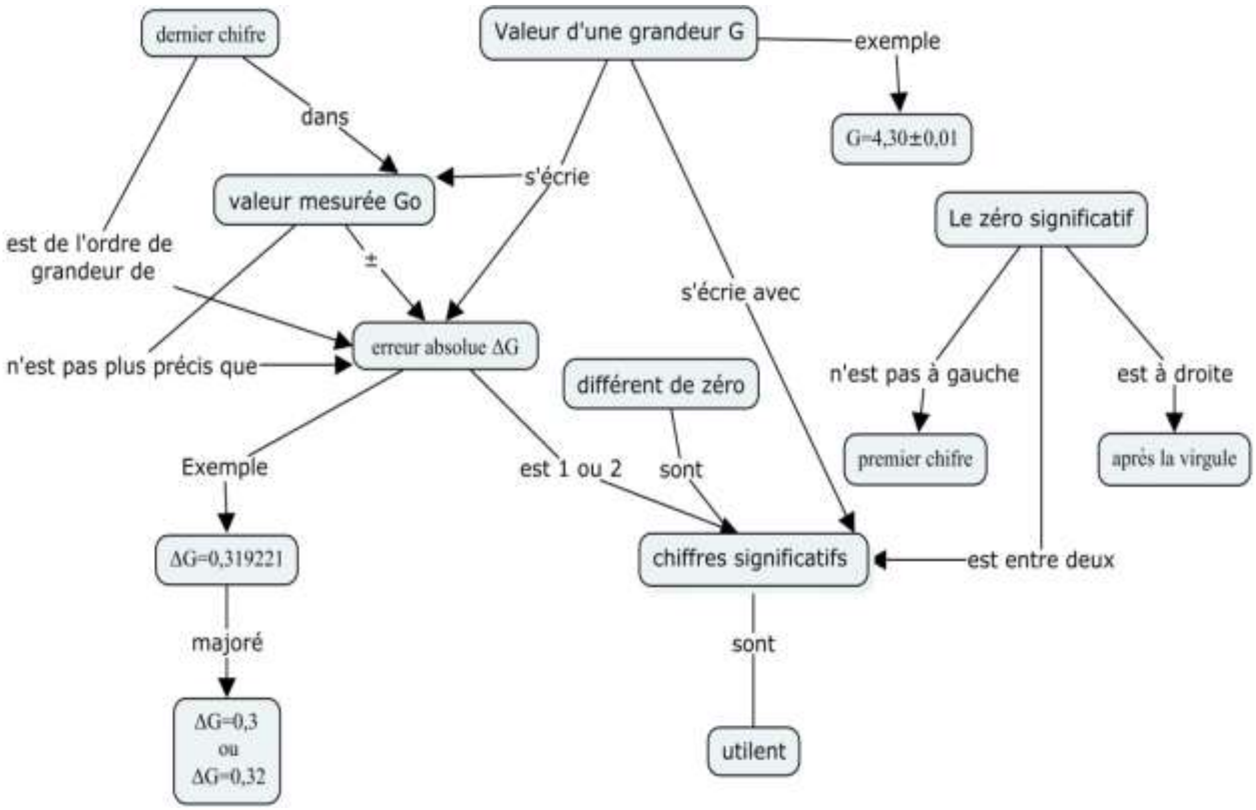


Figure : Catre conceptuelle sur l'écriture de la valeur d'une mesure.

Exemple :

- v=45000m/s = 45. 10^3→Deux chiffres significatifs..
- a=0,002m/s^2=2.10^{-3}→Un seul chiffre significatif.

Il existe aussi des règles qui indiquent comment déterminer le nombre des chiffres significatifs (voir le tableau ci-dessous).

Règle à respecter	**exemple**
Le dernier chiffre de la mesure doit concorder avec l'ordre de grandeur de l'incertitude.	G = 6,350± 0,342 (utilisation incorrecte) G= 6,3 5± 0,34 (utilisation correcte)
L'incertitude ne doit pas comporter plus de deux chiffres significatifs différents de zéros.	G = 6,362 ± 0,034 (utilisation incorrecte) G= 6,3 6± 0,34 (utilisation correcte)
Le chiffre différent de zéro est significatif.	m= 2,8651 kg comprend cinq chiffres significatifs.
Le zéro entre deux chiffres significatifs est significatif.	t=21,07 s comprend quatre chiffres significatifs.

Le zéro à gauche du premier chiffre différent de zéro n'est pas significatif.	l=0,016 cm comprend que deux chiffres significatifs (1 et 6)
Le zéro à droite placé après la virgule est significatif.	F=2400 N comprend deux chiffres significatifs F= 3,8700 N comprend cinq chiffres significatifs

Remarque :

Il est très recommandé d'arrondir une mesure en conservant le bon nombre de chiffres significatifs.

Exemple :

(5,21 ±0,4)cm $\rightarrow$ (8,2 ±0,4)cm.

(32,4 ±0,003)g $\rightarrow$ (2,400 ±0,003)g.

(24,87 ±0,3)mm $\rightarrow$ (24,9 ±0,3)mm.

(6,45 ±0,1)kl $\rightarrow$ (6,4 ±0,1)kl (si 5 est précédé d'un nombre pair, arrondir vers le bas).

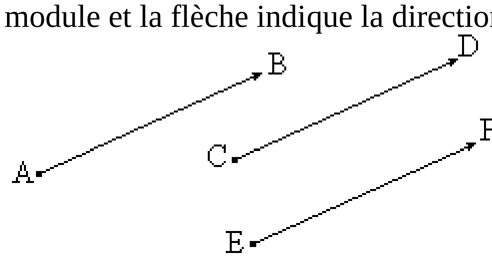
(6,75 ±0,1)kl $\rightarrow$ (6,8 ±0,1)kl (si 5 est précédé d'un nombre impair, arrondir vers le haut).

(0,75 ±0,25)mW $\rightarrow$ (0,8 ±0,3)mW (arrondir toujours vers le haut pour l'incertitude).

I.3. RAPPEL SUR LES VECTEURS

I.3.1. DEFINITION DU VECTEUR

Un vecteur est une quantité qui est à la fois le module et de la direction. Il est représenté par une flèche. La longueur du vecteur représente le module et la flèche indique la direction du vecteur.



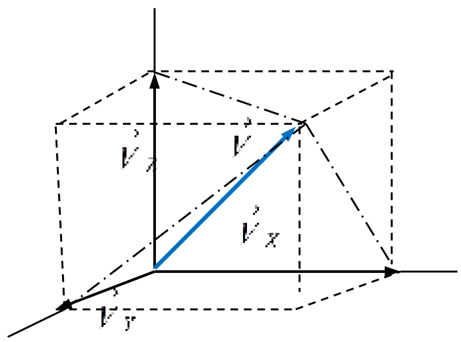
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa direction (celle de la droite (AB)
- son sens (de A vers B)
- sa longueur (La norme ou le module) AB.
- Le point d'application ou origine.

1. **Quelques propriétés**

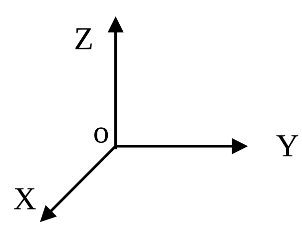
- On dit que deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.
- Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont la même direction ou sont parallèles.
- les points A, B et C sont **alignés** équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$$



I.3.2. COMPOSANTES D'UN VECTEUR.

Le plan étant muni d'un repère (O,X.Y.Z), soit $\vec{V}$ un vecteur donné. Ces projections sur les axes du repère sont : $\vec{V}_X$, $\vec{V}_Y$ et $\vec{V}_Z$.



Ainsi le vecteur $\vec{V}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_X + \vec{V}_Y + \vec{V}_Z}$$

Ou $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$

V_x, V_y et V_z sont les composantes du vecteur $\vec{V}$.

On peut, aussi, écrire le vecteur $\vec{V}$ sous la forme suivante :

- **Le module du vecteur** $\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_Y \\ V_W \end{bmatrix}$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V^2{}_x \quad + V^2{}_y \quad + V_z{}^2}$$

Si l'on a deux points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) dans un plan, alors

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- **Vecteur unitaire**

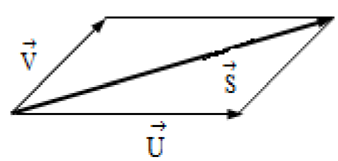
Le vecteur qui a un module =1, est un **vecteur unitaire.**

Le vecteur unitaire est porté par un vecteur.

I.3.3. OPERATIONS SUR LES VECTEURS

1. **La somme de deux vecteurs formant un parallélogramme ABCD**

Soit deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Le vecteur somme (résultant) $\vec{S}$, est le diagonal du parallélogramme formé par les deux vecteurs.



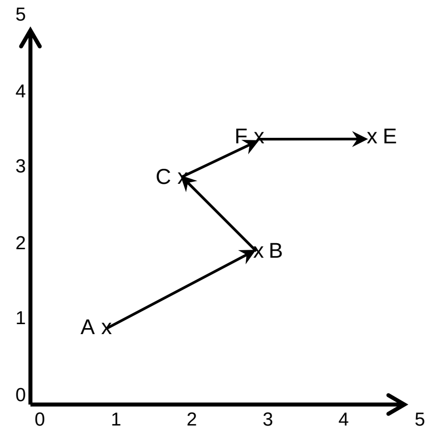
Relation de Chasles

Soit les points A, B, C, F et E représentés sur la figure ci-dessous.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

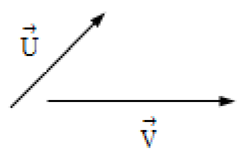
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CE}$$

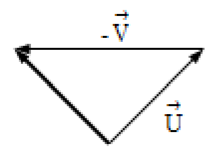
Si on trace des vecteurs l'un après l'autre de façon que l'extrémité du premier se superpose à l'origine du second, alors, la somme de ces vecteurs ou leur résultante est le vecteur qui va de l'origine du premier à l'extrémité du second.



2. **Différence de deux vecteurs.**

$$\vec{R} = \vec{U} - \vec{V} = \vec{U} + (-\vec{V})$$





Produit scalaire

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs

Le Produit scalaire de deux vecteurs est le produit des modules par le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs : $\vec{A}.\vec{B} = A.B\ cos(\vec{A},\vec{B})$

Le produit scalaire de deux vecteurs est toujours un scalaire : $\vec{A}.\vec{B} = a\ (grandeur\ scalaire)$

On note que : $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ et $\vec{A}.\overrightarrow{(B + C + D)} = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C} + \vec{A}.\vec{D}$

$$\vec{A} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{B} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{A.B} = (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\overrightarrow{k)}.(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k})$$

$$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0\ \ et\ \ \vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$

donc, $\overrightarrow{A.B} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Pour trouver l'angle θ entre les deux vecteurs $\vec{A}\ et\ \vec{B}$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2)(x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2)}}$$

<u>Propriétés du produit scalaire</u>

On rappelle les propriétés suivantes du produit scalaire, où $\vec{u}, \vec{v}$ sont des vecteurs et k un nombre réel :

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u} \qquad (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} \qquad (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v}) \qquad (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

- Si les 2 vecteurs sont **perpendiculaires**, $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$
- Si les 2 vecteurs sont **parallèles et dans le même sens**, $\vec{A}\cdot\vec{B} = A.B$
- Si les 2 vecteurs sont **parallèles et dans le sens opposé**, $\vec{A}\cdot\vec{B} = -A.B$

3. Projection d'un vecteur

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{A} et \vec{B}$

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = |\vec{A}|\cos\theta|\vec{B}| = proj(\vec{A}.sur.\vec{B})|\vec{B}|$$

Après avoir défini la direction d'un vecteur arbitraire en termes de système cartésien, vous pouvez trouver la projection d'un vecteur différent sur la direction arbitraire. En divisant l'équation ci-dessus par le module de $\vec{B}$, vous pouvez trouver la projection de $\vec{A}$ dans la direction de $\vec{B}$ (et vice versa)

$$\frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{B}|} = proj(\vec{A}.sur.\vec{B})$$

4. Produit vectoriel

Le module du produit vectoriel de deux vecteurs est le produit du module du premier par la composante du second qui est perpendiculaire au premier.

Dans un repère cartésien (O, X, Y, Z), les vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constituent un trièdre. Dans cette directe, on a:

$$\vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i} \quad ; \quad \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{k} \quad ; \quad \vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$$

et $-\vec{j} = \vec{i} \wedge \vec{k}$; $-\vec{i} = \vec{k} \wedge \vec{j}$; $-\vec{k} = \vec{j} \wedge \vec{i}$

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs

$\vec{A} \wedge \vec{B} \| = |A \; B \; \sin(\vec{A}, \vec{B})|$ et $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$

Le produit vectoriel de deux vecteurs est aussi un vecteur.

$Si \;\; \vec{A} \;\; et \;\; \vec{B} \;\; sont \;\; dans \;\; l'espace$

$$\vec{A} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{B} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

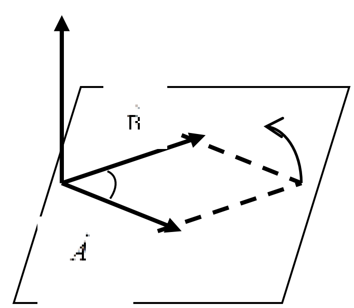
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (x_1 + y_1 + z_1) \wedge (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

<u>Remarque</u>

- Le produit vectoriel est un vecteur perpendiculaire à **A** et à **B** dont le sens est donné par la règle de la main droite ou celle du tire-bouchon.
- Le vecteur ($\vec{A} \wedge \vec{B}$) est perpendiculaire au plan formé les deux vecteurs.
- Le produit vectoriel est nul si les deux vecteurs sont parallèles.
- $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$
- $(\vec{A} + \vec{B}) \wedge \vec{C} = (\vec{A} \wedge \vec{C}) + (\vec{B} \wedge \vec{C})$



- $\left(m\vec{A}\right)\wedge\left(n\vec{B}\right)=mn\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)$
- $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\vec{C}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\vec{B}.\left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right)$
- $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\left(\vec{A}.\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}.\vec{B}\right)\vec{C}$
- $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)\neq\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\wedge\vec{C}$ b

Le produit mixte

- $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ = le produit mixte $\left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right)$ = V (volume du parallélépipède
- Si $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$=0 alors les trois vecteurs sont coplanaires (se trouvent dans le même plan)
- $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)= \begin{vmatrix} x_1\, y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix}$

Exemple

Soit les deux vecteurs :

$\vec{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} et \vec{B}=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$ Calculer le produit vectoriel $\vec{A}\wedge\vec{B}$

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -4\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=+\vec{\imath}\begin{vmatrix}2 & -4\\ -1 & 5\end{vmatrix}+\vec{\jmath}\begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & 5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=6\vec{\imath}-17\vec{\jmath}-7\vec{k}$$

Exemple 2

Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix},\ldots.\vec{B}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}\ldots et\ldots\vec{C}\begin{pmatrix}8\\1\\3\end{pmatrix}$$

Le produit mixte donne le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs:

$$V = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 85$$

V=85 unités de volume

<u>Exemple 3</u>

1. Soit les vecteurs: $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{c} = -\vec{j} + 4\vec{k}$.

Déterminer:

a) $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$

b) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot 3\vec{c}$

c) $-(4\vec{b} - 3\vec{c}) \wedge 2\vec{b}$

d) Les angles formés par le vecteur $\vec{a}$ et les trois axe X,Y et Z

<u>Solution:</u>

a) $\vec{a} - \vec{b} = (-2-4)\vec{i} + [3-(-3)]\vec{j} + (1-3)\vec{k} = -6\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$

$\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{76} = 8{,}7$

b) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot 3\vec{c} = (-2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} - 8\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}) \cdot (-3\vec{j} + 12\vec{k}) = (-10\vec{i} + 9\vec{j} - 5\vec{k}) \cdot (-3\vec{i} + 12\vec{j})$

$= (-10)(0) + (9)(-3) + (-5)(12) = -87$

c) $(4\vec{b} - 3\vec{c}) = 4(4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}) - 3(-\vec{j} + 4\hat{\vec{k}}) = 16\vec{i} - 9\vec{j} \Rightarrow -(4\vec{b} - 3\vec{c}) = -16\vec{i} + 9\vec{j}$

$2\vec{b} = 8\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}$

$$-(4\vec{b}-3\vec{c})\wedge 2\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -16 & 9 & 0 \\ 8 & -6 & 6 \end{vmatrix} = 54\vec{i} + 96\vec{j} + 24\vec{k}$$

d)

Angle entre $\vec{a}$ et X : $\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{-2}{\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha = 122{,}3^o$

Angle entre $\vec{a}$ et Y : $\cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow \beta = 36{,}7^o$

Angle entre $\vec{a}$ et Z : $\cos\gamma = \frac{a_z}{a} = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \gamma = 74{,}5^o$

EXERCICES

Exercice 1 :

Donner l'équation aux dimensions de chacune des grandeurs suivantes : surface, volume, masse volumique, vitesse, accélération, force, pression, énergie, charge électrique. Déduire l'unité des grandeurs dans le système international (SI).

Exercice 2 :

Une distance h est donnée en fonction de deux autres distances h_1 et h_2 par la formule : $h = \frac{\mathbf{h_1 h_2}}{\mathbf{h_1+h_2}}$

Montrer que cette relation est homogène en dimension ?

Exercice 3 :

Vérifier l'homogénéité aux dimensions des équations suivantes :

1. C=P + ρ gz, où P est une pression, h est une hauteur, ρ est une densité et C'est une constante.
2. x = (l^2 - d)/d, où les trois grandeurs sont des distances.
3. l = x.exp(-t), où x et l sont des distances et t est le temps.

4. $E = 1/2\ mv^2 - F.l$, où E est une énergie, v est une vitesse, m est une masse, l est une longueur et F est une force.
5. $v = g/l \cos(\omega t)$, où l est une longueur, g est l'accélération de pesanteur et ω est la vitesse angulaire.

Exercice 4 :

Déterminer la dimension de "k" et son unité dans chacun des cas suivants, sachant que x et y sont des distances, R est un rayon, m est la masse, t est le temps, f est la fréquence en Hertz, T est la température absolue, E est l'énergie et q est la charge électrique.

1. $R=y10^{kx}$
2. $E=ay \sin(k/y)$
3. $F(x,y)=y^2 \sin(kx^2/R)$

Exercice 5 :

Un projectile a été lancée avec une vitesse v. Trouver la formule de sa portée horizontale x en fonction de g et v ?

Exercice 6 :

Quel est le nombre de chiffres significatifs dans chacune des quantités mesurées suivantes :

a) 0.0026 g
b) 23.050 s
c) 11.0250×10^{-3} l
d) 123 m^2
e) 0.00109 kg

Exercice 7 :

Un homme présente une pression artérielle aortique moyenne $P_1=(160\pm0,1)$ mmHg. Le sang rejoint l'oreillette droite avec la pression hydrostatique $P2=(6\pm0,1)$ mm Hg. Le débit cardiaque de ce sujet est $\Phi=3$ l/mm avec une précision de 1% . Calculer la puissance Ƥ fournie par le ventricule gauche, sachant que $Ƥ=(P_1 - P_2).\Phi$?

CHAPITRE II: CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

II.1. INTRODUCTION

La cinématique est la partie de la mécanique qui permet d’étudier et de décrire les mouvements des corps, d’un point de vue purement mathématique. Elle permet d'étudier les mouvements d'un mobile, par rapport à un repère de référence, en fonction du temps indépendamment des causes qui les produisent. Elle a pour but de préciser les trajectoires et les lois horaires

L’analyse des grandeurs cinématiques (position, vitesse et accélération) permet de déterminer la géométrie et les dimensions des composants d’un mécanisme.

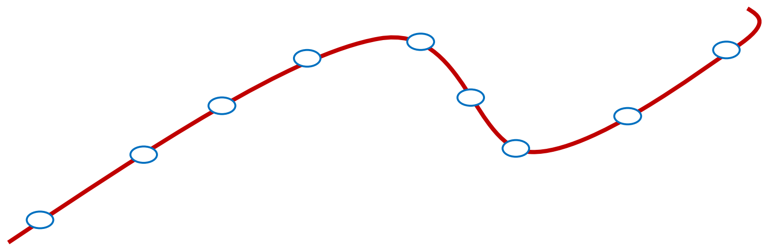
II.2. REFERENTIEL

Un référentiel absolu ou Galiléen est la donnée d'un corps matériel, réel ou imaginaire, considéré comme immobile, auquel sont associés un système de coordonnées lié rigidement au solide de référence, permettant de déterminer les positions successives du point matériel étudié, et un repère de temps. On distingue, ainsi les repères galiléens suivant :

- <u>référentiel du laboratoire</u> : il s'agit d'un référentiel lié à un point quelconque de la Terre. C'est celui qui est en général utilisé pour parler du mouvement dans la vie quotidienne ;
- <u>référentiel géocentrique</u> : il s'agit d'un référentiel dont l'origine est au centre d'inertie de la Terre, les axes pointent vers trois étoiles considérées comme fixe ;
- <u>référentiel héliocentrique</u> : il s'agit d'un référentiel lié au centre d'inertie du Soleil et ses axes pointant vers trois étoiles considérées comme immobiles ;
- <u>référentiel de Copernic</u> : il s'agit d'un référentiel lié au centre de masse du système solaire, dont les axes du repères pointent vers trois étoiles considérées comme immobiles.

II.3. TRAJECTOIRE

La trajectoire d'un point est l'ensemble des positions successives que le point occupe au cours du temps et au cours de son déplacement par rapport à un référentiel donné. Une trajectoire est donc une ligne imaginaire (voir la figure ci-dessous).



- Si la trajectoire est un cercle ou un arc de cercle on dit que le mouvement est circulaire.
- Si la trajectoire est une droite on dit que le mouvement est rectiligne.
- Si la trajectoire est une courbe on dit que le mouvement est curviligne

Cette trajectoire dépend du référentiel d'étude. L'équation cartésienne de la trajectoire, dans le cas d'un mouvement plan, est la donnée de y en fonction de x. On obtient l'équation de la trajectoire par élimination du temps entre les deux équations horaires.

II.4. VECTEUR POSITION

La position du mobile est entièrement déterminée par son vecteur position à chaque instant.

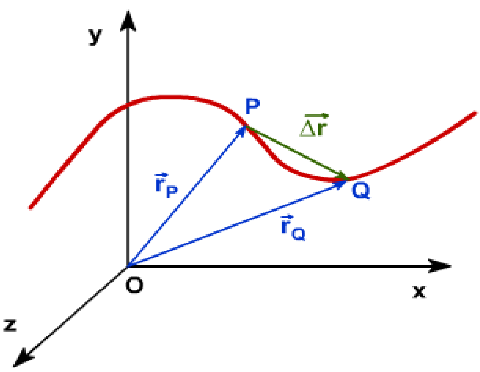
Soit le mobile M repéré par des coordonnées cartésiennes x (t), y(t) et z(t) sur les axes X, Y et Z. dans le repère *R*, à l'instant t.

$x = OM_x$ $\qquad$ $y = OM_y$ $\qquad$ $z = OM_z$

où M_x, M_y et M_z sont respectivement les projections du point M sur les axes Ox, Oy et Oz.

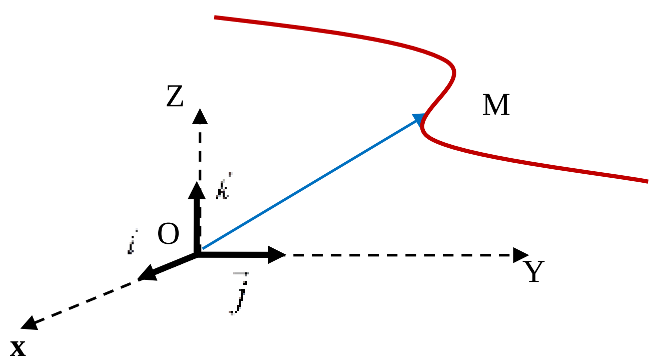
Le vecteur position $\overline{r}$=OM s'écrit en fonction de ses coordonnées :

Si le point *M* est en mouvement :



Le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ où O est l'origine du repère, s'exprime de la manière suivante

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Vecteur position

II.5.VECTEUR DEPLACEMENT

Si le point M à l' instant t est en P et à un instant t' il est en Q, alors son déplacement est caractérisé par le vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$$

II.6. VECTEUR VITESSE

II.6.1. VITESSE MOYENNE

Soit un point matériel en mouvement dans un référentiel (R). A l'instant t le point est en M et à un instant t' il est en M`. La vitesse moyenne du mobile entre t et t' est par définition :

$$\vec{\mathbf{v}}_m = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{t' - t}$$

Cette vitesse moyenne ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée. Cette vitesse moyenne est peu utilisée du fait qu'elle ne rende pas compte de l'évolution de la vitesse entre les instants t et t'.

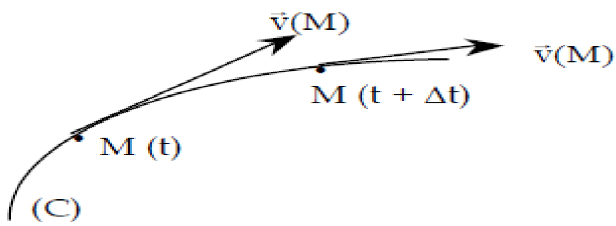
II.6.2. VECTEUR VITESSE INSTANTANEE

Par définition, le vecteur vitesse instantanée du point M dans son mouvement par rapport au repère $\Re$ $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, est égal à la dérivée vectorielle (par rapport au temps) du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, dans le repère $\Re$.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r'}}{\Delta t} \qquad \vec{V} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\Re}$$

où $\overline{\Delta r} \equiv \overline{r(t+\Delta t)} - \overline{r(t)}$ est le vecteur déplacement entre les instants t et t + Δt.

Si l'on connaît Alors,



$$\vec{r}\left|\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right. \qquad \vec{V}\left|\begin{array}{l} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \dfrac{dz(t)}{dt} \end{array}\right.$$

Le vecteur $\vec{V}$ est toujours porté par la tangente à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

On parle de mouvement rectiligne uniforme si le vecteur vitesse est constant v = cst. Le vecteur vitesse garde la valeur constante et aussi même direction et sens. Son origine est confondue avec la position de M à l'instant t ;

Remarque :

La vitesse instantanée est la pente de la tangente à la courbe du graphique position-temps.

II.7. VECTEUR ACCELERATION

II.7.1 ACCELERATION MOYENNE

L'accélération moyenne représente le taux de changement de la vitesse (instantanée)

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

II.7.2 ACCÉLÉRATION INSTANTANÉE

L'accélération associée à un mobile M traduit la variation au cours du temps du vecteur vitesse. Par définition le *vecteur accélération* instantanée du point M dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}$ $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, est égal à la dérivée (par rapport au temps) du vecteur vitesse $\vec{V}$, dans le repère $\mathfrak{R}$.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathfrak{R}}$$

Une accélération s'exprime en m/s^2.

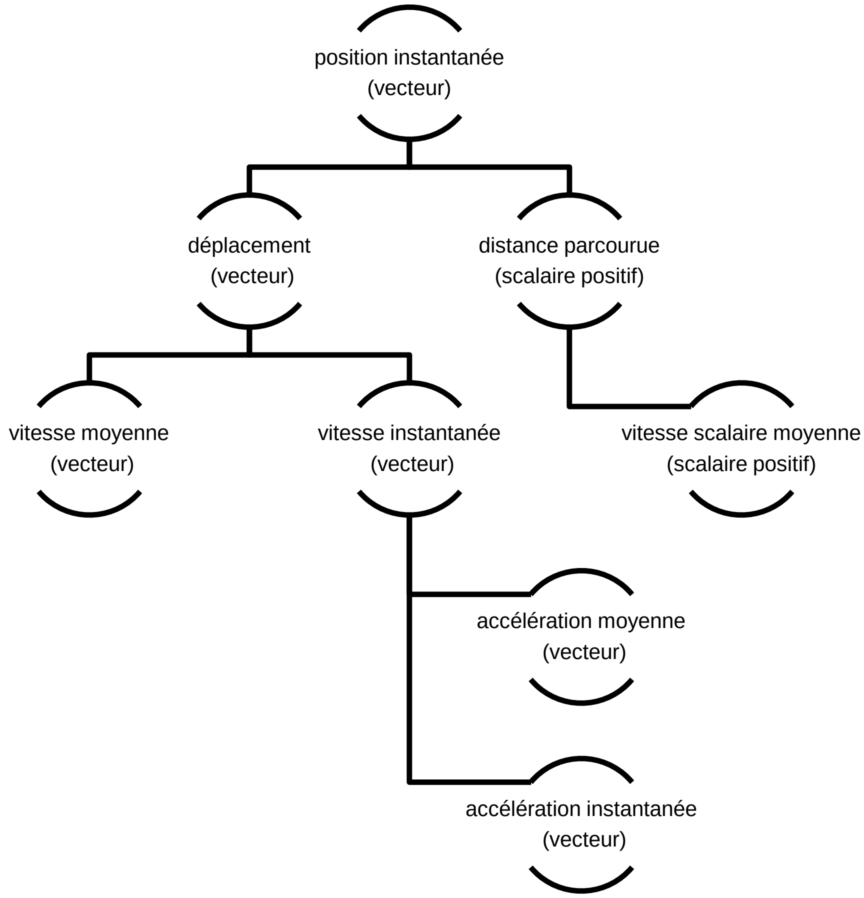
Le vecteur accélération est toujours vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire. Le vecteur accélération est parallèle à la trajectoire dans le cas d'un mouvement rectiligne.

L'accélération instantanée est la pente de la tangente à la courbe sur un graphique vitesse-temps.

Si l'on connaît $\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array} \right.$ Alors, $\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ a_y(t) = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \\ a_z(t) = \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} \end{array} \right.$

<u>Carte conceptuel</u>

On peut résumer ce qu'on vient de voir par la carte conceptuel du mouvement d'un point M.



II.8. MOUVEMENT RECTILIGNE (MOUVEMENT A UNE DIMENSION)

II.8.1 VITESSE MOYENNE

$$\bar{v} \ ou \ v_m = \frac{\text{déplacement}}{\text{durée du déplacement}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

où x_1 et x_2 sont les coordonnées des points M_1 et M_2. Δx est le déplacement du mobile pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

Exemple:

Une automobile roule à 50 km/h durant une heure, s'arrête 30 minutes puis roule à 70 km/h dans la même direction qu'auparavant durant une heure. Quelle a été sa vitesse moyenne ?

La vitesse moyenne :

$$\Delta x = 50\,km/h \times 1h + 70\,km/h \times 1h = 120km$$

$$v_{moyen} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{120}{2.5}\frac{km}{h} = 48\,km/h$$

II.8.2. Vitesse instantanée

C'est la limite de l'expression de la vitesse moyenne quand l'intervalle de temps Δt tend vers un infiniment petit dt :

$$v(t) = \underset{\Delta t \to 0}{\text{limite}} \frac{(x+\Delta x)-x}{(t\ +\Delta t)-t} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{limite}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Par conséquent, pour retrouver la position d'un mobile à chaque instant, à partir de sa vitesse instantanée, on calcule l'intégrale :

$$\mathbf{x(t)\ =\ x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'}$$

Ceci implique la connaissance de la position du mobile à un instant donné t_0, soit : x_0.

II.8.3. ACCELERATION MOYENNE

$$\bar{a} = a_m = \frac{\text{variation de vitesse}}{\text{durée de la variation}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

II.8.4. ACCELERATION INSTANTANEE

L'accélération à un instant donné d'un mobile M, considéré comme un point matériel, est le vecteur dérivé du vecteur vitesse par rapport au temps.

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Par conséquent, pour retrouver la vitesse d'un mobile à chaque instant, à partir de son accélération, on calcule l'intégrale :

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$$

Ceci implique la connaissance de la vitesse du mobile à un instant donné t_0, soit : v_0.

II.8.5. CAS PARTICULIERS DE MOUVEMENT RECTILIGNE

a) Le mouvement rectiligne uniforme (MRU)

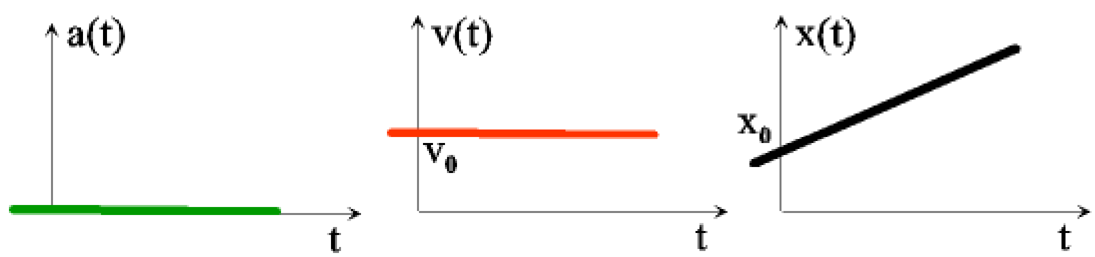
Le MRU est un mouvement rectiligne à vitesse constante :

$$\boxed{\text{MRU} \Leftrightarrow \mathbf{v = cte \ \ et\, a = 0}} \qquad \mathbf{v(t) = v_0}$$

Les équations horaires sont :

$v=cst=v_0$, $a=0$ et $x=vt+x_0$

Par conséquent les graphes du mouvement sont représentés dans la figure suivante.



b) Le mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV)

Le MRUV est un mouvement rectiligne à accélération constante : $\mathbf{a = a_0}$

$$\boxed{\text{MRUV} \Leftrightarrow \mathbf{a = cst}}$$

Les équations horaires sont:

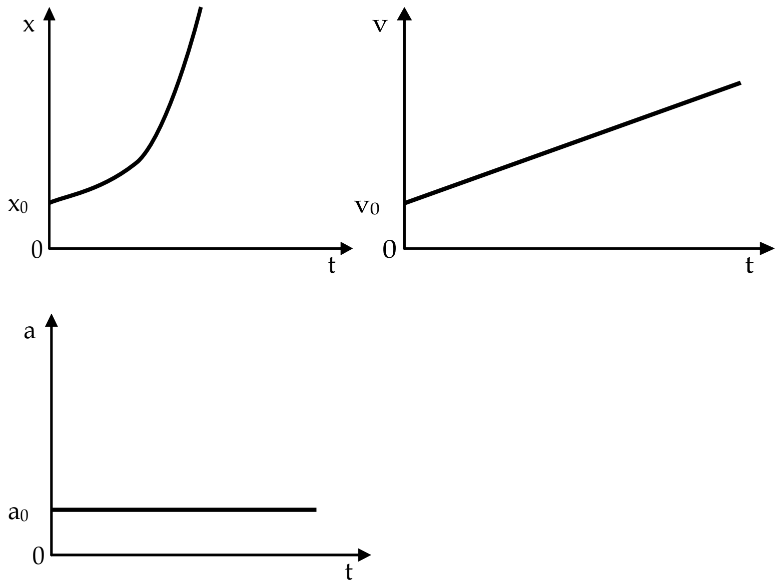
$a = a_0 =$ constante

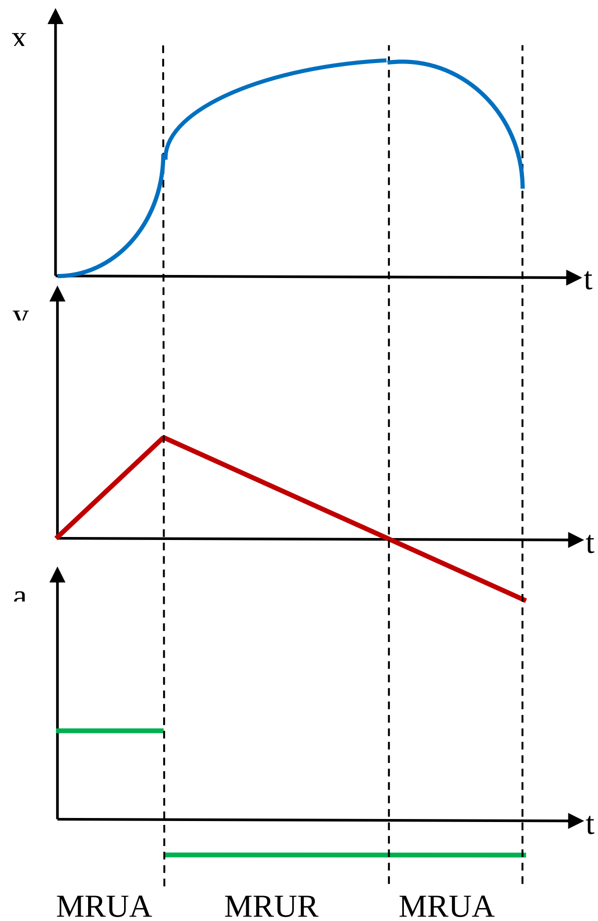
$v = a.(t-t_0) + v_0$

$x = \frac{1}{2}.a.(t-t_0)^2 + v_0.(t-t_0) + x_0$

x_0, v_0 et a_0 sont les ***conditions initiales*** du mouvement.

Les graphes sont représentés dans la figure suivante





Dans le cas ou t_0=0, les équations horaires seront :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$v = v_0 + a.t$$

$$x = x_0 + v_0.t + \frac{1}{2}.a.t^2$$

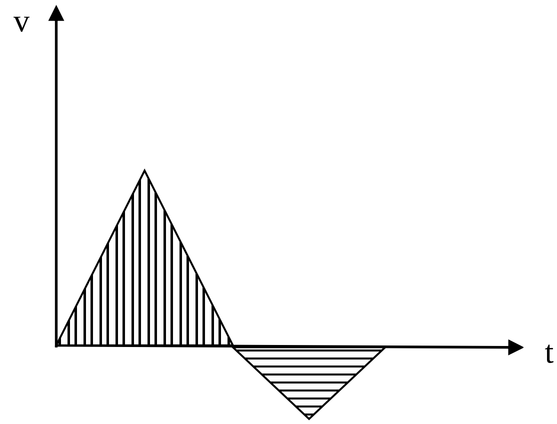
$$v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta x$$

<u>Remarque :</u>

- La vitesse correspond à la pente de la courbe qui représente la distance parcourue en fonction du temps à tout instant.
- L'accélération correspond à la pente de la courbe qui représente la vitesse instantanée en fonction du temps à tout instant.

Le mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV) peut être soit accéléré ou retardé (décéléré) :

1) Le mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) :



- La vitesse augmente en valeur absolue.
- La vitesse et l'accélération dans la même direction.
- a.v>0

2) **Le mouvement rectiligne uniformément retardé (MRUR) :**
   - La vitesse diminue en valeur absolue.
   - La vitesse et l'accélération dans des directions opposées.
   - a.v<0

Voir la courbe ci-contre.

c) La surface sous le graphe de la vitesse ou l'accélération

La surface au-dessus de l'axe du temps = déplacement positive.

La surface au-dessous de l'axe du temps = déplacement négative

- Le déplacement est égal à l'aire sous la courbe de la vitesse en fonction du temps.
- La variation de vitesse est égale à l'aire sous la courbe de l'accélération en fonction du temps.

d) Mouvement en chute libre

Un mouvement qui se produit sous le seul effet de la gravité est appelé chute libre.

En l'absence de résistance de l'air, tous les corps qui tombent avec la même accélération, quelle que soit leur masse, leur taille ou leur forme.

Les équations de la chute libre :

$$\Delta y = \left(\frac{v_{oy} + v_y}{2}\right) t$$

$$v_y = v_{oy} - gt$$

$$\Delta y = v_{oy} t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

<u>Exemple</u>

On lance un caillou vers le haut à 20 m/s. Quelle est sa vitesse au niveau du sol si l'immeuble a une hauteur de 50 m ?

$$v_y{}^2 = v_{oy}{}^2 - 2g\Delta y$$

$$v_y{}^2 = 20^2 - 2(9{,}8)(-50)$$

$$v_y = \pm 37 \text{ m/s}$$

$$v_y = -37 \text{ m/s}$$

II.10. MOUVEMENT EN DEUX DIMENSIONS

II.10.1 MOUVEMENT EN COORDONNEES CARTESIENNES

Vecteur position $\quad \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j}$

Vecteur vitesse

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \qquad \begin{cases} v_x \equiv \dfrac{dx}{dt} \\ v_y \equiv \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

Vecteur accélération

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \qquad \begin{cases} a_x \equiv \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y \equiv \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

Mouvement du projectile

A $t = 0$, un projectile part de l'origine ($x_0 = y_0 = 0$), avec une vitesse v_0 et angle de l`ancement Θ_i

Les équations horaires sont:

$a_x = 0$

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t = v_0 \cos\theta_i t \\ y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\theta_i t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_y = -g \\ v_y = v_{0y} - gt \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$v_y^2 = v_{oy}^2 - 2g\Delta y$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos\theta_i \\ v_y(t) = v_{0y} = v_0 \sin\theta_i - g.t \end{cases}$$

La trajectoire est un parabole

$$\boxed{y = (tg\theta_i)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_i}\right)x^2} \qquad \text{pour } 0 < \theta_i < \frac{\pi}{2}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad tg\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$v_y = 0 \qquad \Rightarrow t^* = \frac{v_0 \sin\theta_i}{g}$

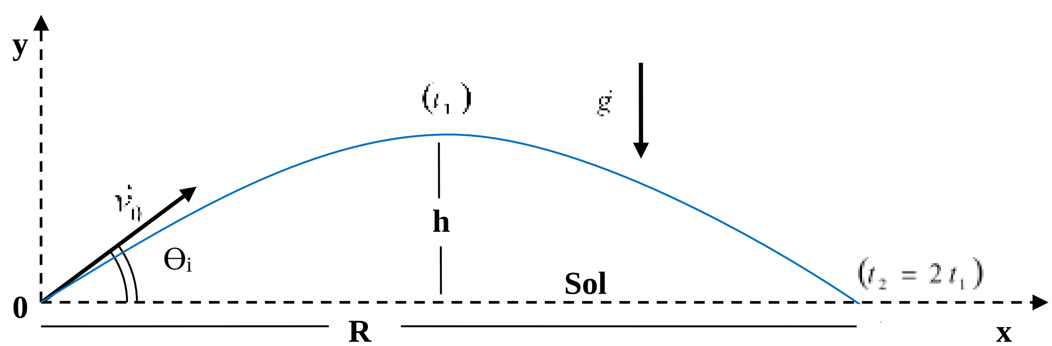
La <u>hauteur maximale</u> : $\boxed{h_{\max} = \dfrac{v_0^{\,2} \sin^2 \theta_i}{2g}}$

<u>La portée horizontale</u>

$$R = x(t_2) \quad ; \quad t_2 = 2t_1 \quad ; \quad \Rightarrow \quad R = v_0 \cos\theta_0 \times t_2 \quad \Rightarrow \quad R = v_0 \cos\theta_0 \times 2\left[\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right]$$

$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Nous obtenons finalement : $\boxed{R = \dfrac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}}$



II.10.1 MOUVEMENT EN CORDONNEES POLAIRES

a) Vecteur position

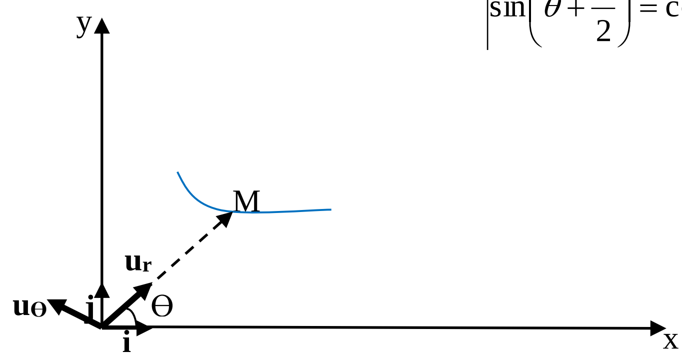
Soit un point matériel *M* ayant une trajectoire quelconque dans le plan *(xOy).* En introduisant les vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, le vecteur position du point M dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, s'écrira ainsi :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} \, . \quad \overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} \, .$$

Puisque $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, nous obtenons $\overrightarrow{u_r} = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j}$

$\frac{x}{r} = \cos\theta$ et $\frac{y}{r} = \sin\theta$, θ étant l'angle polaire entre *(Ox)* et (*OM)*.

*L*es coordonnées de $\overrightarrow{u_r}\begin{vmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{vmatrix}$, Alors que les coordonnées de $\overrightarrow{u_\theta}\begin{vmatrix}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta\\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta\end{vmatrix}$



Remarque

$$\overrightarrow{u_\theta} = \frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta}$$

b) Vecteur vitesse

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\left(r\overrightarrow{u_r}\right)}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Nous avons vu que $\frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta} = \overrightarrow{u_\theta}$, donc

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta}}$$

c) Vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\overrightarrow{u_\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r}\right) + \frac{d}{dt}\left(r\,\frac{d\theta}{dt}\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\overrightarrow{u_r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{u_\theta} + r\,\frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\overrightarrow{u_r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{u_\theta} + r\,\frac{d\theta}{dt}\left(-\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\overrightarrow{u_\theta}}$$

La vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$:

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\,\omega^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

<u>Remarque :</u>

- Dans le cas ou r=R=cst alors :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0, \quad \vec{v}(t) = R\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} = R\omega\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\,\omega^2\,\overrightarrow{u_r} + R\frac{d\omega}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$$

- Si, de plus, la vitesse est constante en norme, donc la vitesse angulaire est aussi constante :

$$d\omega/dt = 0 \quad \vec{v}(t) = R\omega\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\,\omega^2\,\overrightarrow{u_r}$$

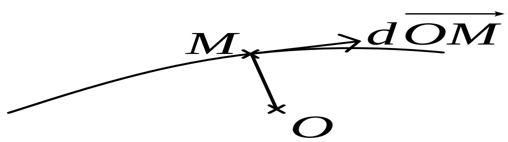
II.10.2. MOUVEMENT EN CORDONNEES INTRINSEQUES (CURVILIGNES)

Dans le mouvement curviligne, on constate le changent constamment de direction. On détermine leurs composantes dans un repère de Frenet, d'origine au centre d'inertie du corps étudié et de vecteurs unitaires

a) Base de Frenet

Elle est utile lorsque le point se déplace sur une courbe d'équation connue.

Vecteur unitaire tangent $\vec{u}_t$:



$$\vec{u}_t = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$$: sens positif, unitaire (s : abscisse curviligne)

Vecteur unitaire normal $\vec{u}_n$:

$$\vec{u}_n = \rho\frac{d\vec{T}}{ds},\ \rho$$ est le rayon de courbure.

$\vec{u}_n$ et $\vec{u}_t$ sont perpendiculaires

Vecteur unitaire binormal : $\vec{u}_B = \vec{u}_t \wedge \vec{u}_n$

b) Vitesse

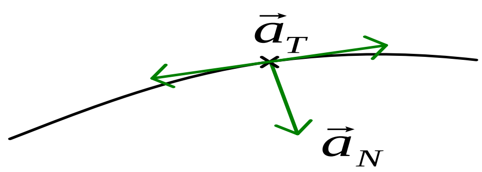
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\frac{ds}{dt}$$, soit $\vec{v} = v\,\vec{u}_t$; v *est* la vitesse curviligne

c) Accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \rightarrow a = \sqrt{a_t^{\ 2} + a_n^{\ 2}}$$

Le vecteur accélération, se décompose en deux termes :



- L'accélération tangentielle :

    - $a_t = \dfrac{dv}{dt}$
    - toujours tangente à la trajectoire et parallèle à la vitesse ;
    - mesure la variation de la grandeur de la vitesse.

- L'accélération normale (ou centripète) :

    - $a_n = v^2/\rho$;
    - toujours perpendiculaire à la vitesse ;
    - responsable de la variation de la direction du vecteur vitesse ;
    - toujours dirigée dans la concavité de la courbe.

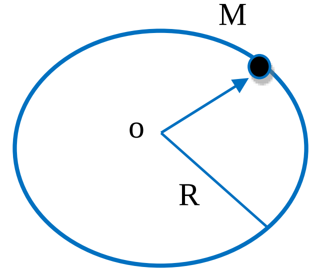
<u>Remarques</u>

- Si le module de la vitesse varie, l'accélération tangentielle a_t est non nulle et réciproquement.
- Si la direction du mouvement varie, c'est-à-dire si la trajectoire est courbe, l'accélération normale (dans la direction perpendiculaire au mouvement) a_n est non nulle et réciproquement.

d) Mouvement circulaire uniforme(MCU)

Un mouvement à vitesse constante v décrivant une trajectoire en forme de cercle ou d'une partie d'un cercle de rayon constant R est MCU. Exemple : un satellite tournant autour de la Terre.
Le vecteur vitesse est constant en norme mais pas en direction.

Soit un point M se déplaçant sur un cercle de centre O et de rayon R avec une vitesse angulaire ω constante (voir la figure ci-contre).



$a_t = \dfrac{dv}{dt}$ et v=cst

Donc : a=0 et $a = \sqrt{a_t{}^2 + a_n{}^2} \Rightarrow a = a_n = \dfrac{v^2}{R}$

L'accélération est donc constante en valeur et dépend de la vitesse ainsi que du rayon de la trajectoire. Elle due au changement d'orientation du vecteur vitesse avec le temps et est donc normale

Ainsi, pour un MCU, on peut utiliser les équations suivantes :

$$\mathrm{v} = \frac{2\pi \mathrm{R}}{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{v}^2}{R} \Rightarrow a = \left(\frac{2.\pi}{T}\right)^2 .R = \frac{4\pi^2}{T^2}.R$$

v

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\mathrm{f}} \Rightarrow \qquad a = 4\pi^2 f^2.R$$

$$v = \omega R \Rightarrow a = \frac{(\omega.R)^2}{R} \qquad a = \omega^2.R$$

- La période T est une autre variable caractéristique d' M.C.U. Elle correspond au temps que met mobile pour faire un tour.

- La fréquence f du mouvement correspond au nombre de révolutions effectuées par unité de temps. L'unité de fréquence f du SI est le Hertz (Hz) ; elle est égale à l'inverse d'une seconde.

Remarque :

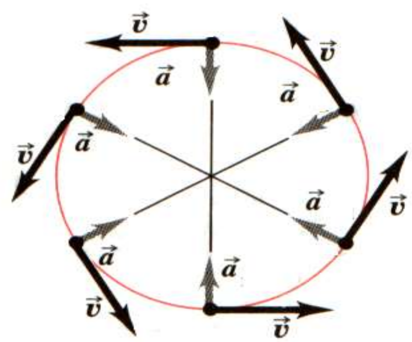
L`accélération a la même expression que celle obtenue en coordonnées polaires. La seul différence est le signe moins qui est dû au fait que $\overrightarrow{u_n} = -\overrightarrow{u_r}$.

L'accélération centripète

L'accélération centripète $\boldsymbol{a_c}$ est le nom que porte l'accélération permettant à un objet d'effectuer une trajectoire circulaire de rayon *r* à vitesse constante *v*. Cette accélération de module constant est toujours orientée vers le centre de la trajectoire circulaire. On écrie $\mathbf{a_c} = (v^2 / R)$.

Etant donné que la vitesse change de direction pendant le mouvement, la particule a toujours une accélération normale ou centripète dirigé vers le centre du cercle.

La figure ci-dessous montre les directions de la vitesse et l'accélération dans différentes parties du mouvement circulaire uniforme d'une particule.

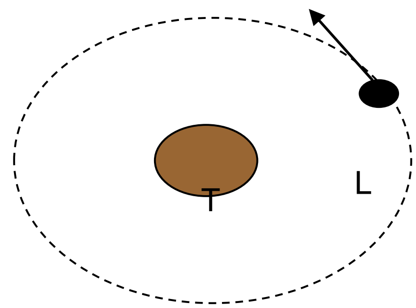


<u>Exemple :</u>

On suppose que la Lune se déplace sur un orbite circulaire avec une vitesse constante.

Si sa période est de 27,3 jours et que le rayon de son orbite est de $3{,}84 \times 10^8$ m, trouver sa viteset son acceleration?

$$v = \frac{2\pi \times 3{,}84 \times 10^8}{27{,}3 \times 24 \times 60 \times 60} \quad m/s$$

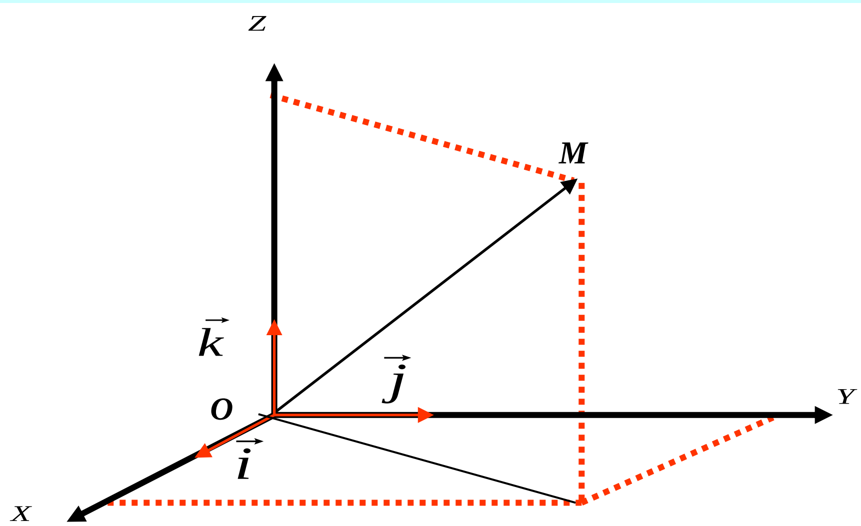


$$\boxed{v = 1{,}023 \times 10^3 \quad m/s}$$

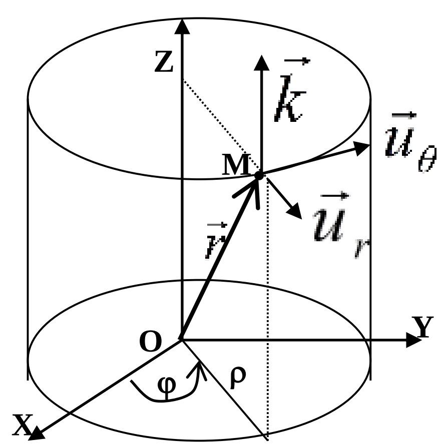
$$a = \frac{v^2}{R} \quad m/s^2$$

$$\boxed{a = \frac{(1{,}023 \times 10^3)^2}{3{,}84 \times 10^8} = 2{,}72 \times 10^{-3} \quad m/s^2}$$

II.11. MOUVEMENT DANS L'ESPACE (TROIS DIMENSIONS)



Nous avons déjà vu, au début de ce chapitre, l'étude de mouvement (cas générale) dans un repère cartésien (O,X,Y,Z). Dans le cas d'un mouvement curviligne dans l'espace, les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques sont les plus adaptées.



II.11.1. MOUVEMENT EN COORDONNEES CYLINDRIQUES

Le repère du système de coordonnées polaires est $\left(O,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\varphi}\right)$. Si, à ce repère à deux dimensions, nous ajoutons le vecteur orthogonal aux deux vecteurs, c'est-à-dire $\overrightarrow{u_Z}$, nous obtenons le repère $\left(O,\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\varphi},\overrightarrow{u_z}\right)$, définissant un système de coordonnées cylindriques.

Dans ce cas, on ajoute les contributions selon l'axe *(Oz)* et on remplace r par ρ.

Pour le point mobile M de coordonnées cartésiennes x, y et z, nous obtenons les équations suivantes :

- Vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$

$\therefore |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2+z^2} \Rightarrow \rho^2 = x^2 + Y^2$

- Vecteur vitesse $\vec{v}(t) = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u_\varphi} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$

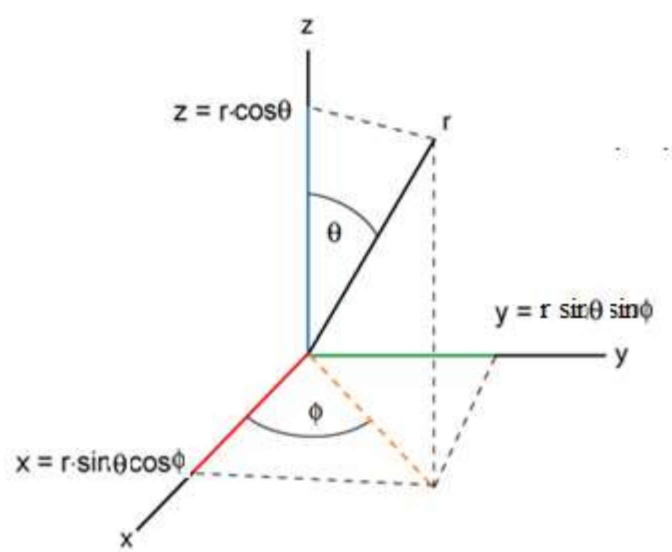
- Vecteur accélération $\vec{a} = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - r\,(\frac{d\varphi}{dt})^2\right)\overrightarrow{u_\rho} + \left(\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\rho}{dt}\right)\overrightarrow{u\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{u_z}$

II.11.2. MOUVEMENT EN COORDONNEES SPHERIQUES

Les coordonnées sphériques $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ d'un point mobile M sont r, θ et φ (voir la figure ci-dessous).

Si les coordonnées du point M sont x, y et z, alors, on peut avoir :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\sin\theta$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



En fonction de ces coordonnées, nous obtenons les équations suivantes.

- Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r$$

- Vecteur déplacement :

$$d\vec{r}(t) = dr(t)\vec{r}_r + r(t)d\theta(t)\vec{u}_\theta + r(t)\sin\theta(t)d\varphi(t)\vec{u}_\varphi$$

- Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\vec{u}_\varphi$$

- Vecteur accélération

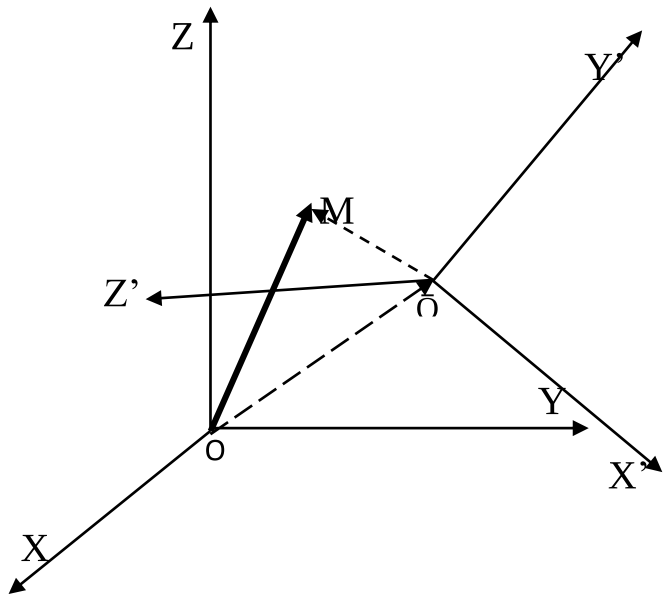
$$\vec{a} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\right)^2 - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{u}_r$$
$$+\left\{2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta + r\frac{d^2\varphi}{dt}\sin\theta + 2r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta\right\}\vec{u}_\theta$$
$$+\left\{2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin\theta\cos\theta\right\}\vec{u}_\varphi$$

II.12. MOUVEMENT RELATIF

Soit un référentiel R défini par ses axes de coordonnées cartésiennes, (O;X,Y,Z), que l'on appellera référentiel fixe ou référentiel absolu, et un autre référentiel R', en mouvement par rapport à R et défini par (O', X', Y', Z') que l'on nommera référentiel mobile ou référentiel relatif.

Soit un point matériel M en mouvement par rapport à un référentiels relatif R`.

II.12.1. VECTEUR POSITION



On peut écrire le vecteur position du point M : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

II.12.2. VECTEUR VITESSE

La vitesse absolue et 1'accélération absolue du point M est sa vitesse et son par rapport au référentiel absolu : $\vec{v}_a = \vec{v}(M/R)$

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d\left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right)}{dt}$$

$$= \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right) + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

La vitesse absolue devient :

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right) + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) \quad ....1$$

que l'on écrit encore :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$$

La vitesse relative du point M est sa vitesse par rapport au référentiel relatif $\vec{v}_r = \vec{v}(M/R')$

La vitesse d'entraînement du point M est la vitesse du point O` par rapport au référentiel absolu : $\vec{v}_e = \vec{v}(O'/R)$

$$\overrightarrow{v_r} = \left(\frac{dx'}{dt} \overrightarrow{i'} + \frac{dy'}{dt} \overrightarrow{j'} + \frac{dz'}{dt} \overrightarrow{k'} \right)$$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x' \frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + y' \frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + z' \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} \right)$$

$$\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{i'}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \overrightarrow{j'}$$

$$\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{j'}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\omega \overrightarrow{i'}$$

Ainsi $x' \frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + y' \frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + z' \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$

donc

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \omega \overrightarrow{k'} \wedge (x' \vec{i'} + y' \vec{j'} + z' \vec{k'})$$

$$= \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}'$$

Nous résumons les expressions de la vitesse absolue comme suit :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = \frac{dx'}{dt} \overrightarrow{i'} + \frac{dy'}{dt} \overrightarrow{j'} + \frac{dz'}{dt} \overrightarrow{k'} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \omega \overrightarrow{k'} \wedge (x' \vec{i'} + y' \vec{j'} + z' \vec{k'})$$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

II.12.3. VECTEUR ACCELERATION

1'accélération absolue du point M est son accélération par rapport au référentiel absolu

$$\vec{a}_a = \vec{a}(M / R).$$

L'accélération absolue est $\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$. En dérivant par rapport à t l'expression (2) de la vitesse absolue, on obtient:

Donc

$$\vec{a}_a = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{v_e}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} + \frac{d^2\overrightarrow{OO}}{dt^2} + \frac{d\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

Par analogue à ce que nous avions trouvé précédemment : $x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$

On trouve :

$$\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$$

Donc $\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

$$\frac{d\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{v_r} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\frac{d\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

En remplaçant (4) et (5) en (3), on obtient

$$\vec{a}_a = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'} + \frac{d^2\overrightarrow{OO}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

Finalement, l'accélération absolue s'écrit :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$

avec

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'} \rightarrow \text{ Accélération relative}$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \rightarrow \text{ Accélération d'entraînement}$$

$$\overrightarrow{a_c} = +\vec{\omega} \wedge \vec{v} \rightarrow_r \quad \text{Accélération de Coriolis}$$

II.12.4. REFERENTIEL RELATIF EN TRANSLATION PAR RAPPORT AU REFERENTIEL ABSOLU

Le référentiel relatif *R*` étant en translation par rapport au référentiel absolu *R*, Les vecteurs unitaires $\vec{i'}, \vec{j'}\, et\, \vec{k'}$ sont constants puisqu'ils sont en translation, leurs dérivées sont donc nulles. S`il n'y a pas de rotation $\omega = 0$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

$$\vec{a}_a = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'} + \frac{d^2\overrightarrow{OO}}{dt^2}$$

II.12.5. REFERENTIEL RELATIF EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

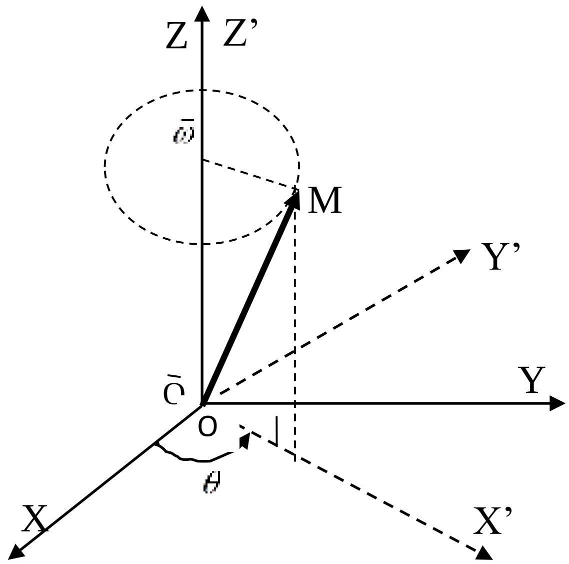
Un référentiel relatif R' tourne avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe du référentiel absolu R (tel que l'axe Z) :

Dans ce cas d'une rotation pure $\quad \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$ et $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_a = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$



EXERCICES

Exercice 1

Un corps se déplace selon l'axe des x suivant la loi :

$\boldsymbol{x(t) = 2t^3 + 5t^2 + 5}$, **x** est en mètre et **t** en seconde.

Trouver :

1- sa vitesse et son accélération à chaque instant ;

2- sa position, sa vitesse et son accélération pour t=2 s et t=3s ;

3- sa vitesse et son accélération moyennes entre t=2 s et t=3 s.

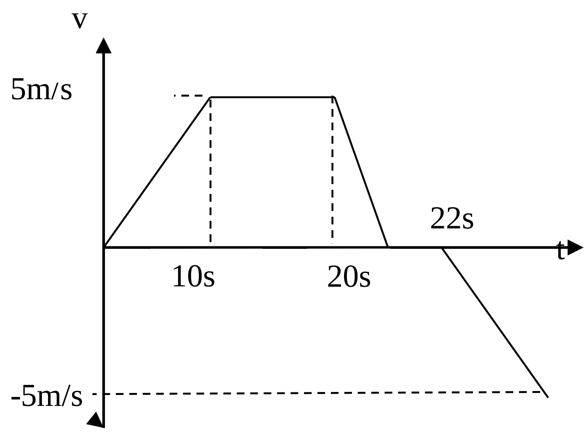
Exercice 2

Le diagramme ci-dessous représente la vitesse d'un mobile en fonction du temps.

1. Indiquer sur chaque intervalle de temps :

a. la valeur algébrique de l'accélération
b. l'expression de v=f(t)
c. la nature du mouvement

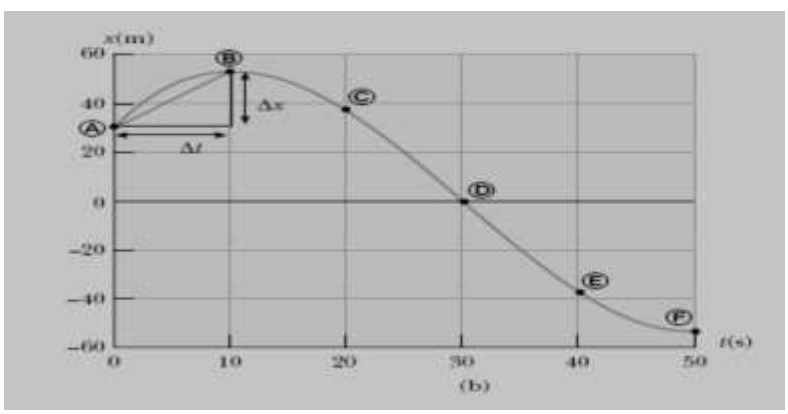
2. calculer la distance totale parcourue par le mobile,



Exercice 3

La position d'une voiture sur une route rectiligne en fonction du temps, est donnée par la figure.

- a) Tracer le graphe de la vitesse en fonction du temps ?
- b) Tracer le graphe de l'accélération en fonction du temps ?



Exercice 4

Soit un point M mobile dans un référentiel galiléen. Ses coordonnées rapportés à un système d'axe O,

X, Y, Z sont, en fonction du temps : $\begin{array}{l} X = 2\cos(\omega t) \\ Y = 2\sin(\omega t) \\ Z = 0 \end{array}$

1. Montrer que le mouvement de M est circulaire et uniforme.

2. Déterminer le vecteur accélération. Préciser son sens.

Exercice 5

Une balle est lancée selon un angle de 55°par rapport à l'horizontale à une vitesse de 40m/s.

1) quelle est sa portée ?
2) Quelle est la durée de son vol ?

Exercice 6

Une balle B_1 est tirée de l'origine d'un repère XY vers le haut, sous l'angle θ_1=40° avec une vitesse initiale v_1=100m/s. Après un temps t_1=10s la balle arrive au point P(x_1,y_1), où
x_1=766m et y_1=152m.
Quelque temps après, une autre balle B_2 est tirée de l'origine vers le haut à une vitesse v_2 sous un angle θ_2=35°.

1) Trouver la valeur de v_2 telle que la balle B_2 passe aussi par le point P
2) Trouver à quel instant doit être tirée la deuxième balle pour que les balles entre en collision en P.

Exercice 7

Un point M se déplace dans le plan xOy. La position du point M est définie par :

$$OM=r=a\cos \omega t$$

et l'angle θ=ωt .   *a* et w sont des constantes positive0 .

Calculer en coordonnées polaires la vitesse et l'accélération du point M.

Exercice 8

Les équations paramétriques du mouvement d'un objet dans un plan sont données par :

$$\begin{cases} X = 2t \\ Y = \dfrac{1}{2}t^2 - 3t + 5 \end{cases}$$

a. Représenter la trajectoire du mouvement ?

b. Calculer le vecteur vitesse ?

c. Calculer le vecteur accélération ?

d. Déterminer les composantes intrinsèques $\vec{a}_t et \vec{a}_n$ du vecteur accélération à t=2s ?

e. Calculer le rayon de la courbure de la trajectoire à cette instant (t=2s) ?

Exercice 9

Soit les coordonnées cartésiennes d'un mobile :

$x(t) = b\cos t^2$

$y(t) = b\sin t^2$

1) Déterminer l'équation de la trajectoire ?
2) Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération ?
3) Calculer le module de la vitesse ?
4) Trouver les composantes tangentielle et normale de l'accélération ?
5) Déduire le rayon de la courbure ?

Exercice 10

Les coordonnées d'un mobile dans un système d'axe O, X , Y, Z sont données en fonction du temps par

$$:\begin{cases} X = t^3 - 3t \\ Y = -3t^2 \\ z = t^3 = 3t \end{cases}$$ (X) est en mètre et (t)en seconde

Etablir la loi du mouvement.

Montrer que le vecteur vitesse $\vec{v}$ fait un angle constant avec l'axe Z

Exercice 9

Soit un mouvement plan dont l'accélération est définie par :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2 - \cos(5t) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 1 - \sin(5t) \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -1 \end{cases}$$

La position à l'instant t= 0 est :

$$x_0 = 10, y_0 = 0, z_0 = 4$$

La vitesse à l'instant t=0 est :

$v_{x,0} = 20$, $v_{y,0} = 10$, $v_{z,0} = 0$.

Trouver sa vitesse et sa position en fonction du temps ?

CHAPITRE III: DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

III.1. INTRODUCTION

La cinématique permet d'étudier les mouvements avec assez de précision, mais ignore les causes des mouvements, Alors que l'étude des mouvements doit être complète. L'analyse des forces ou des interactions entre les objets est très important.

Ainsi, la dynamique vient pour compléter ce qui manque. C'est une partie de la mécanique qui étudie les forces qui causent les variations de mouvement des corps.

Nous abordons dans ce chapitre la relation entre le mouvement et ces causes ainsi que l'interprétation physique du mouvement en utilisant les trois lois de Newton.

Nous allons aussi insister sur quelques concepts nécessaires, telles que la masse et de la force.
Nous verrons également, la célèbre loi de la gravitation universelle.

III.2. REFERENTIEL GALILEEN

Un référentiel Galiléen est un référentiel dans lequel un objet isolé est soit immobile, soit en mouvement rectiligne uniforme. Ce référentiel est en mouvement de translation uniforme par rapport à un référentiel au repos absolu.

Exemples : Référentiel Galiléen

- Référentiel terrestre, lié à la surface de la Terre, (référentiel pseudo galiléen) utilisé pour étudier les mouvements des solides au voisinage proche de la Terre.

- Référentiel géocentrique, lié au centre de la Terre, utilisé pour étudier les mouvements des satellites de la Terre ainsi que celui de la Lun.
- Référentiel héliocentrique (de Copernic), lié au centre de la Soleil, pour étudier les mouvements des planètes autour du soleil.

Remarque

Il n'existe pas de vrai de référentiel absolu, nous supposerons seulement qu'il existe des repères galiléens « approchés ». Tous les référentiels en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel Galiléen sont eux-mêmes des repères Galiléens.

III.3. MASSE ET INERTIE

L'inertie est la difficulté que l'on rencontre lorsqu'on désire modifier l'état de mouvement d'un corps. Plus un corps possède une grande inertie, plus il est difficile de modifier son mouvement.

La masse (m) est, donc, la quantité physique qui sert à mesurer l'inertie d'un corps. Lest point suivants caractérisent la masse.

- La "masse" est une mesure pour la quantité de matière contenue dans le corps

- La masse est une grandeur scalaire.
- L'unité de masse est le kilogramme
- La masse est une constante indépendante de l'endroit où elle se trouve.

III.4. LES TROIS LOIS DE NEWTON DE LA DYNAMIQUE

III.4.1. PREMIERE LOI DE NEWTON (PRINCIPE D'INERTIE)

« Si j'avance, j'avance sans fin. »

Il existe des référentiels d'inertie ou galiléens dans lequel le mouvement de toute particule libre est rectiligne uniforme.

Soit ***M*** un point isolé (soumis à aucune interaction) dans un référentiel (R) galiléen : $\sum \vec{F}_{ext} = 0$

$$\vec{v}_{M/(R)} = \overrightarrow{\text{cte}} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow MRU$$

Le point **M** demeurera immobile (pour F = 0) ou continuera en mouvement rectiligne uniforme (MRU) jusqu'à ce qu'une force (F) intervienne et provoque un changement.

III.4.2. DEUXIÈME LOI DE NEWTON (PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE)

« On me pousse, j'accélère »

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle de toutes les forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée par rapport au temps de sa quantité de mouvement.

On écrie : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

La quantité de mouvement $\vec{P} = m\vec{v}$ et m la masse totale du système considéré.

Si m =cst :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt} = m.\frac{d(\vec{v})}{dt} = m.\vec{a}$$

le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ ou simplement $\vec{F} = m\vec{a}$

Où $\vec{a}$ est l'accélération de masse m.

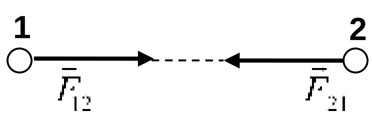
III.4.3 TROISIEME LOI DE NEWTON (PRINCIPE DES ACTIONS RECIPROQUES)

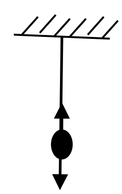
« Celui qui me pousse, recule »

Pour chaque force exercée, il existe une force égale dans la direction opposée.

Soit un système isolé de deux points matériels de masses respectives m_1 et m_2.
Lorsque m_1 exerce une force $\vec{F}_{1/2}$ sur m_2, ce dernier réagit à son tour en exerçant sur m_1 une force $\vec{F}_{2/1}$ de même norme, même direction et de sens opposé à $\vec{F}_{1/2}$.

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$





III.5. La force

Si la vitesse d'un objet change, c'est en raison d'une interaction avec quelque chose. On donne le nom de force à cette interaction. Elle représente toute forme d'influence qui agit sur une masse et qui a pour effet de modifier son état de mouvement. Il faut aussi savoir que :

- la force n'est pas « visible » mais nous ressentons ses effets
- la force est représentée par un vecteur ;

- la force est caractérisée par une grandeur, une direction et un sens ;
- les forces s'ajoutent vectoriellement ;
- Il y a des forces « dites » de contact et des forces qui agissent à distance ;
- l'unité de force est le Newton (N).

III.5. TYPES DE FORCES

Il y a deux catégories de forces :

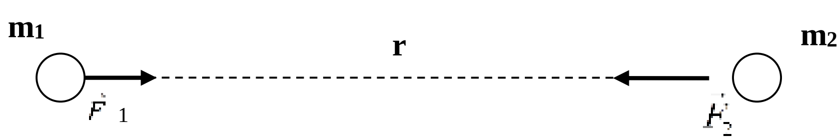
- Forces à distances : force de gravitation, force électrique, magnétique…..
- Forces de contact : force normale, force de frottement, forces de tension ….)

III.5.1. FORCES A DISTANCE

Ce sont des forces qui agissent à distance et qui décroisent lorsque la distance augmente.

1) La force gravitationnelle

Elle a été publiée par Newton en 1687. Cette loi permet de calculer l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle entre deux particules de masse m_1 et m_2



$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$$

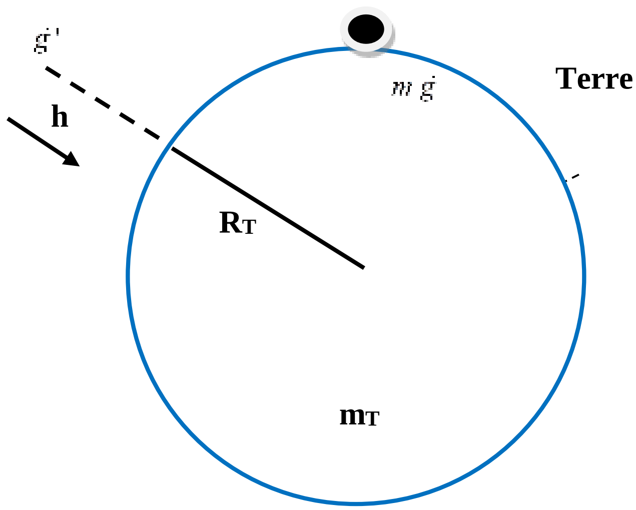
r est la distance entre les deux masses.

G est la constante de gravitation universelle. Elle a été mesurée pour la première fois par Cavendish en 1798. Sa valeur est la suivante :

$$G = 6{,}673 \times 10^{-11} \frac{N\,m^2}{kg^2}$$

Exemple :

la force de gravitation exercée par la Terre sur un objet placé à sa surface (voir la figure ci-dessous)



Nous pouvons donc écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} F_{T/m} &= \frac{G m_T m}{R_T^2} = \frac{(6{,}672 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2)(5{,}98 \times 10^{24} kg)m}{(6{,}37 \times 10^6 m)^2} \\ F_{T/m} &= (9{,}8 N/kg)m \quad = mg = P \end{aligned}}$$

On en déduit :

- Le poids d'un objet correspond à la force de gravitation exercée sur celui-ci est P=mg
- pour un objet placé à la surface de la terre l'accélération de pesanteur

$$g = G\frac{m_T}{R_T^2}$$

- pour un objet placé à une distance h de la surface de la terre

$$g' = G\frac{m_T}{(R_T + h)^2}$$

Remarque

La valeur de g diminue avec l'altitude (h). Par conséquence le poids change avec la h alors que la masse reste constante.

2) Force électrique :

Soit une particule m et de charge électrique q est placée dans un champ électrique $\vec{E}$. La force qui s'exerce sur la particule est :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

3) Force magnétique :

Une particule de masse m de vitesse v et de charge électrique q est placée dans un champ magnétique $\vec{B}$. La force qui s'exerce sur la particule est :

$$\vec{F} = q\left(\vec{V} \wedge \vec{B}\right)$$

III.5.2. LES FORCES DE CONTACT

Lorsqu'il y a contact de deux corps, ces forces se manifestent lorsque, lorsqu'il y a contact de deux corps.

1) Force normale

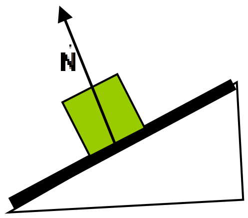
La force normale est la force de réactions exercée par une surface sur en objet en contact avec elle. On l'appelle, aussi, la réaction du support

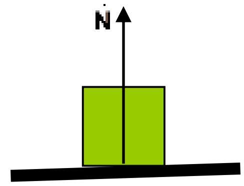
Une force normale est toujours perpendiculaire à la surface de contacte (voir la figure ci-dessous). Elle est présente chaque fois que des solides sont en contact.

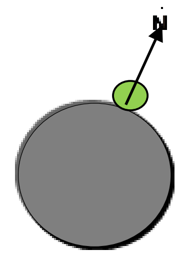
Il est important de préciser que la force normale ne peut pas être évaluée à l'aide d'une formule directement. Chaque situation est différente.

Remarque

D'après le principe de l'action et de la réaction, dans le Cas d'une surface horizontale, l'action de l'objet sur le support est égale au poids de l'objet.

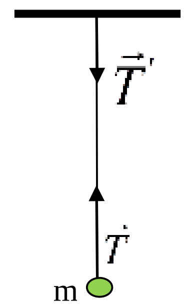






2) **force de tension du fil**

Soit un fil inextensible attaché à une masse m (voir la figure ci-contre). Le fil exerce sur m une force $\vec{T}$ appelée tension du fil parallèle au fil et orienté vers l'extérieur de l'objet.



$$\vec{T}' = -\vec{T} \quad \text{et} \quad \|\vec{T}'\| = \|\vec{T}\|$$

Remarque

S'il n'y a pas de frottements lorsque le fil passe par une poulie, alors la tension du fil est la même en tout point du fil.

3) **force de frottement**

La force de frottement, qui apparaît au contact de deux surfaces, est une force de résistance qui se produit lorsque deux surfaces se déplacent l'une sur l'autre. Elle est toujours dirigée de façon à empêcher le glissement relatif des surfaces. Pour cette raison, une force de frottement est toujours parallèle à la surface dans le sens opposé au mouvement relatif de l'objet par rapport à la surface.

Lorsqu'un bloc est repos sur une surface horizontale, si on tente de le déplacer en appliquant une force F, la force de frottement s'oppose à ce déplacement. A partir d'une certaine valeur de l'action exercée pour déplacer l'objet, la force de frottement ne peut plus croître et l'objet commence à se déplacer.

La figure ci-dessous montre un graphique illustrant la force de frottement *f* en fonction d'une force de poussée *F* appliquée sur un objet initialement immobile. La force de frottement peut être statique f_s, statique maximale $f_{s\,max}$ ou bien cinétique f_c.

On note que la force de frottement statique (avant le mouvement) ajuste sa valeur pour égaler la force appliquée jusqu'à sa valeur maximale.

Il existe, donc, deux types de frottement :

a) Force de frottement statique f_s :

Lorsque les surfaces en contact ne glissent pas l'une sur l'autre

$$0 \le f_s \le \mu_s N$$

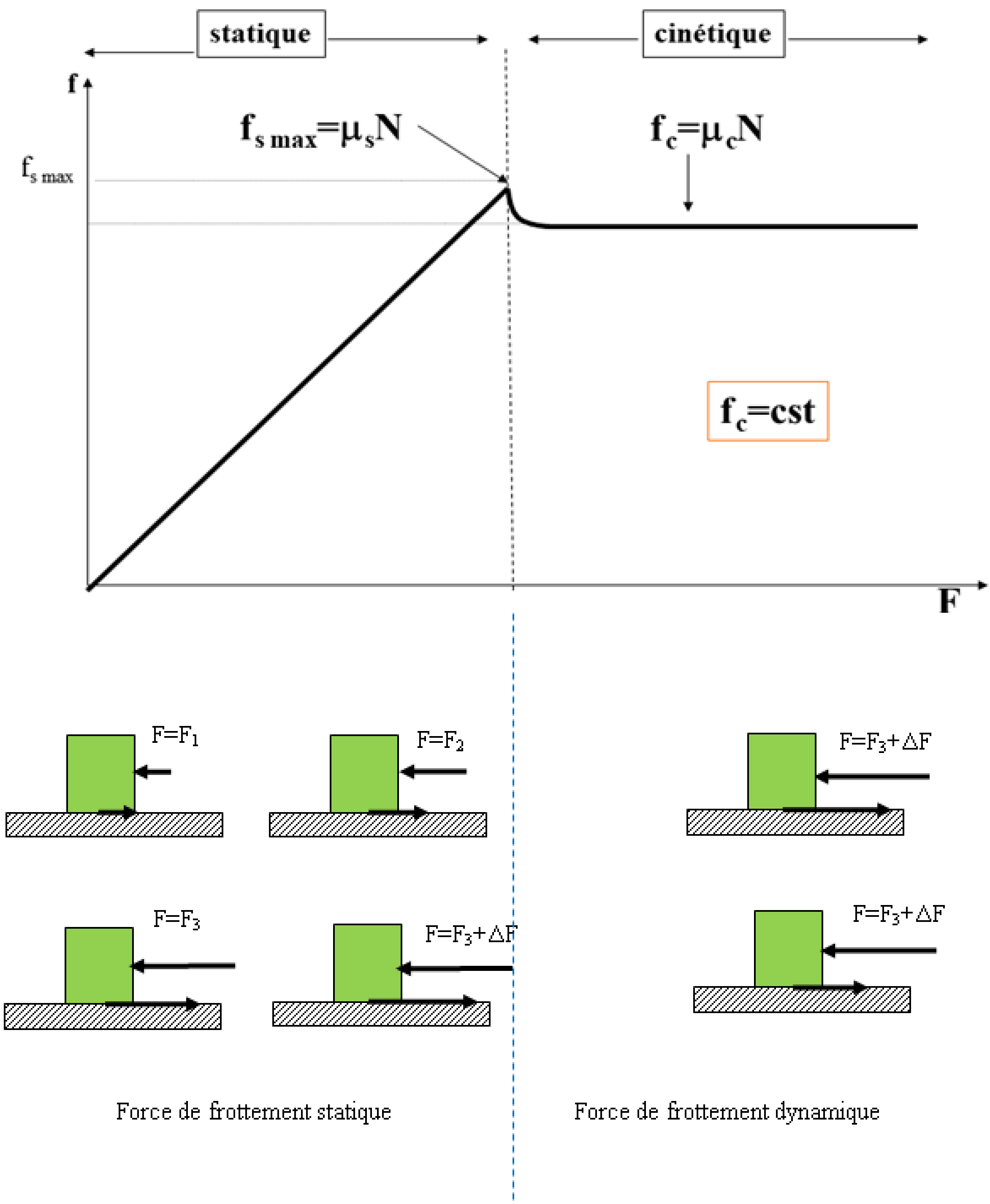
μ_s = coefficient de frottement statique

N =la force normale (réactions de la surface)

b) Force de frottement cinétique (dynamique) f_c :

C`est lorsque les surfaces en contact glissent l'une sur l'autre

$$f_c = \mu_c N \qquad / \mu_c = \text{coefficient de frottement cinétique}$$



<u>Remarque</u>

- Le frottement dépend de la nature des surfaces en contact.
- Le frottement ne dépend pas des autres facteurs (vitesse, aire des surfaces…)

- Les coefficients de frottement (m) sont des quantités adimensionnelles.
- Généralement $\mu_s > \mu_c$.
- μ_s et μ_c sont généralement plus petit que 1.
- μ_s ou μ_c *ne dépend pas* de la masse du corps considéré (*Attention!* La force de frottement, dépend de cette masse).
- En réalité, La force de frottement est la composante horizontale (C_x) de la force de contacte (C) et la force normale N est la composante verticale (C_y).

Le tableau ci-dessous illustre quelques valeurs typiques de coefficients de frottement

Surfaces en contact	Coefficients de frottements	
	statique	cinétique
acier sur acier	0,7	0,55
caoutchouc sur béton	1	0,8
bois sur bois	0,2 à 0,5	0,2
glace sur glace	0,1	0,03
Téflon sur acier	0,04	0,04

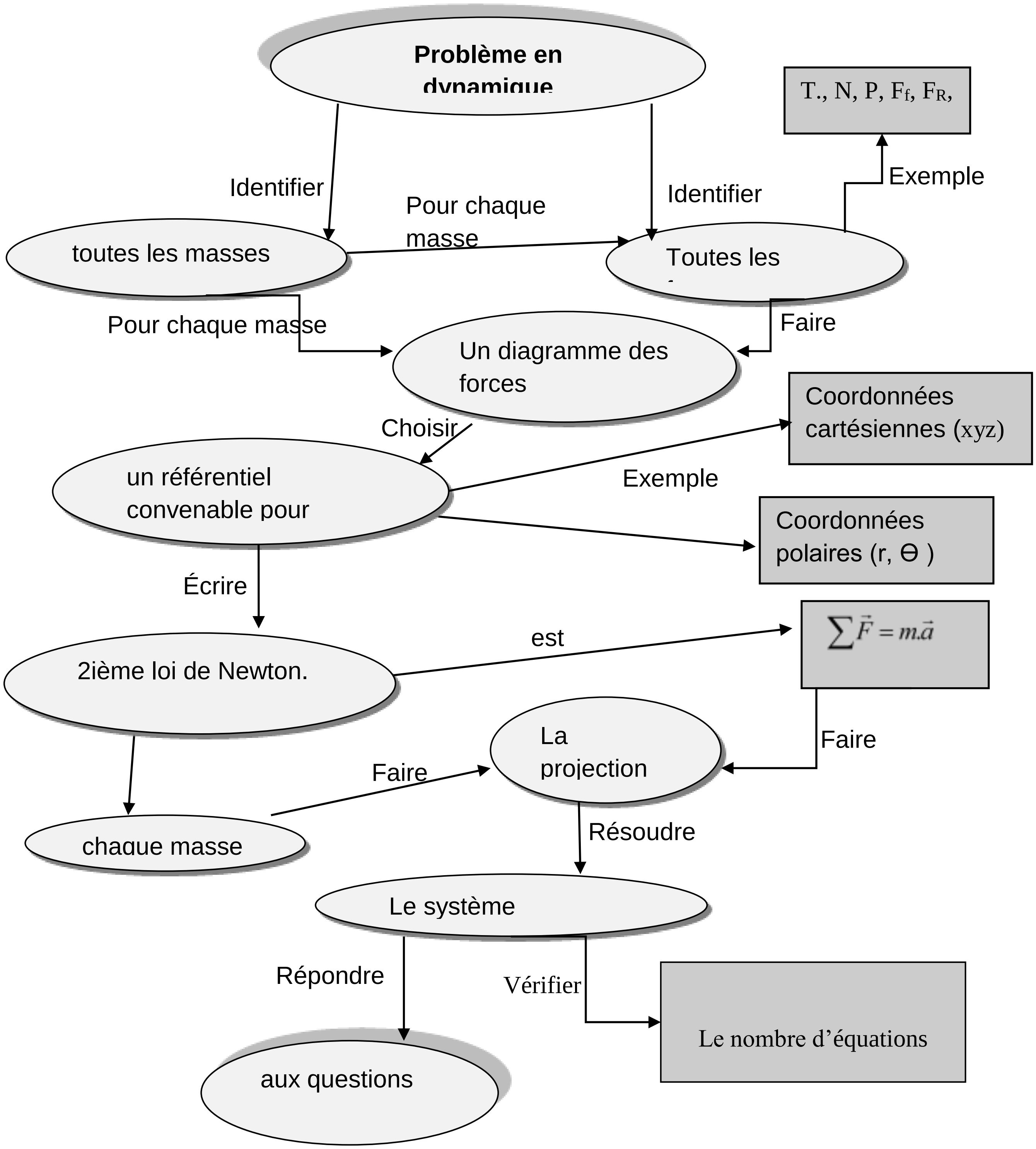
III.6. APPLICATION DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (PFD)

Pour traiter un problème en dynamique à l'aide du PFD, on suit les étapes suivantes :

1. Choisir un référentiel galiléen.
2. Choisir un système de coordonnées adaptées au problème.
3. Connaître l'expression de l'accélération dans ce système
4. Faire le bilan des forces sans en oublier et sans en inventer
5. Projeter ces forces (ou les exprimer) dans le système de coordonnées
6. Ecrire le PFD

La carte conceptuelle suivante donne un aperçu général sur la métrologie à suivre pour résoudre un problème en dynamique.

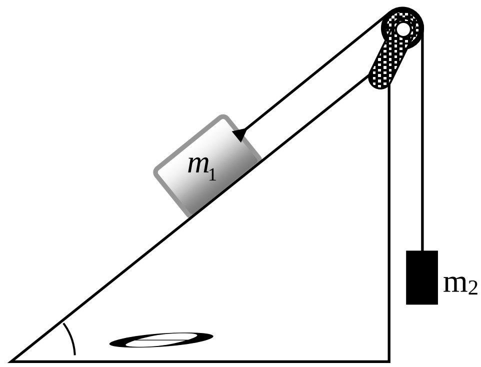
Carte conceptuelle : Résolution d'un problème en dynamique



III.6.1. EXEMPLES D'APPLICATION

Exemple 1**: Plan incliné**

Deux masses sont reliées par un fil inextensible qui passe par une poulie comme dans la figure. La masse **m_1** peut glisser sans frottement sur un plan incliné formant un angle θ avec l'horizontale.

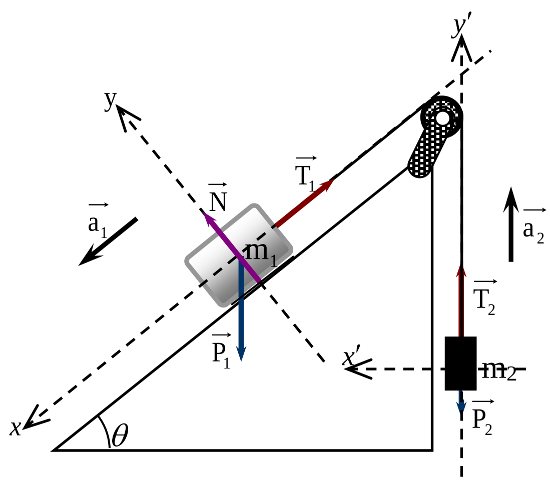


Trouver en fonction de Θ, g, m_1 et m_2 :

L'accélération des deux masses et la tension dans le fil ?

Solution

L'accélération :



Le P.F.D :

Pour m_1 : $\vec{P}_1 + \vec{N} + \vec{T}_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1$ ……….(I)

Pour m_2 : $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2$ ………..(II)

Le fil est inextensible $\Rightarrow$ $\|\vec{a}_1\| = \|\vec{a}_2\| = a$ et

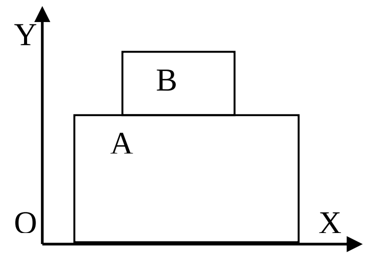
$\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = T$

La projection des relations (I) et (II) sur les axes (xy) et (x'y')

Pour la masse m_1 $\begin{cases} m_1 \cdot g \cdot \sin(\theta) - T = m_1 \cdot a \text{.............(1)} \\ -m_1 \cdot g \cdot \cos(\theta) + N = 0 \text{..............(2)} \end{cases}$

Pour la masse m_2 $\begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ -m_2 \cdot g + T = m_2 \cdot a \text{..............(3)} \end{cases}$

$$(1)+(3) \Leftrightarrow \quad a=\frac{g(m_1\sin(\theta)-m_2)}{m_1+m_2} \quad [m/s^2]$$



La tension dans le fil : $T=\dfrac{15\cdot m_1\cdot m_2}{m_1+m_2}+m_2g$ [N]

Exemple 2 **: Frottement**

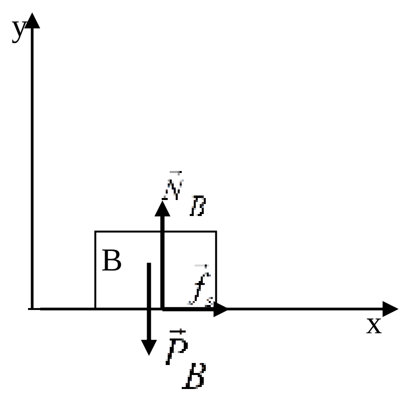
La figure montre un bloc de masse M_A repose sur surface rugueuse horizontale. Un autre boc de masse M_B est Placé sur le premier. Le coefficient de frottement statique entre A et B est μs et le coefficient de frottement cinétique entre A est la surface rugueuses est μc.

1. Déterminer l'accélération minimale du système sans que B ne glisse par rapport a A?
2. Quelle est la valeur de la force horizontale qui doit être appliquée sur A pour acquérir cette accélération.

Solution

1) avant que l'équilibre entre A et B soit rompu, les deux masses ont la même accélération.

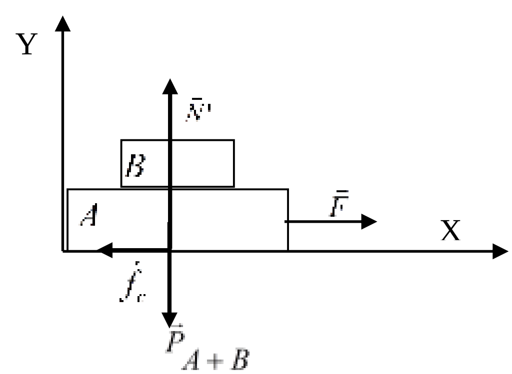
$$\sum\vec{F}=m\vec{a}$$



$$\vec{P}_B+\vec{N}_B+\vec{f}_s=M_B\vec{a}$$

$$\vec{P}_B+\vec{N}_B=\vec{0}\Rightarrow\vec{f}_s=M_B\vec{a}$$

$$f_s\le\mu_S N_B=\mu_S M_B g\Rightarrow M_B a\le\mu_S M_B g\Rightarrow a=\mu_S g$$



2-En appliquant le PFD : $\sum\vec{F}=m\vec{a}$

On obtient $\vec{F}+\vec{P}_{A+B}+\vec{N}'+\vec{f}_c=M_{A+B}\vec{a}$

Comme $\vec{P}_{A+B}+\vec{N}'=\vec{0}\Rightarrow$

Projection sur les axes :

$$F - f_c = M_{A+B}\, a \Rightarrow F = M_{A+B} a + f_c$$

Puisque $f_c = \mu_C N'$ et $N' = P_{A+B}$ Alors,

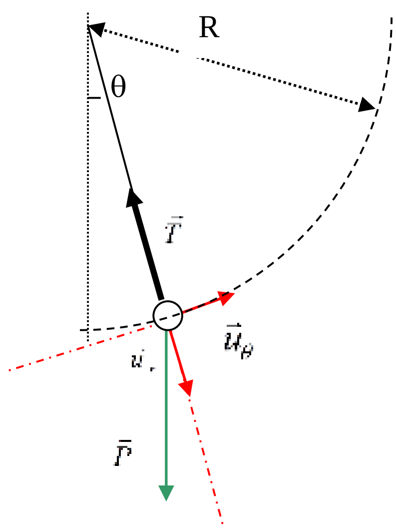
$$: f_c = \mu_c P_{A+B} \Rightarrow F = M_{A+B}(a + \mu_c g)$$

$$f_c = \mu_c M_{A+B}.\, g \rightarrow F = M_{A+B}(\mu_s g + \mu_c g)$$

Donc, $\boldsymbol{F = M_{A+B}\, g(\mu_s + \mu_c)}$

Exemple 3 **: Pendule simple**

Soit un pendule simple constitué d’une masse m et un fil de masse négligeable et de longueur R. Quelle est la tension du fil ? on suppose la vitesse nulle quand le pendule est horizontal (θ=90 degrés).



.

Solution

On représente sur la figure les forces dynamiques.

En coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \vec{P} = mg\cos\theta \cdot \vec{u}_r - mg\sin\theta \cdot \vec{u}_\theta \\ \vec{T} = T \cdot \vec{u}_r \end{cases}$$

Accélération en coordonnées polaires :

$$\bar{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r(d\theta/dt)^2\right)\vec{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\theta$$

- PFD : $\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\bar{a}$

Soit en identifiant :

$$\begin{cases} mg\cos\theta - T = m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r(d\theta/dt)^2\right) \\ -mg\sin\theta = m\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) \end{cases}$$

Le rayon est constant égal à R

Donc

$$\begin{cases} mg\cos\theta - T = -mR(d\theta/dt)^2 = -mR\omega^2 \;\ldots\ldots.1 \\ -mg\sin\theta = mR\frac{d^2\theta}{dt} = mR\frac{d\omega}{dt}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.2 \end{cases}$$

On multiplie l'équation 2 par dθ et on intègre :

$$mg\cos\theta + C = \frac{1}{2}mR\omega^2 \Rightarrow R\omega^2 = C + 2g\cos\theta$$

Pour Θ=π/2, ω=0

$$0 = C + 2g\cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow R\omega^2 = 2g\cos\theta$$

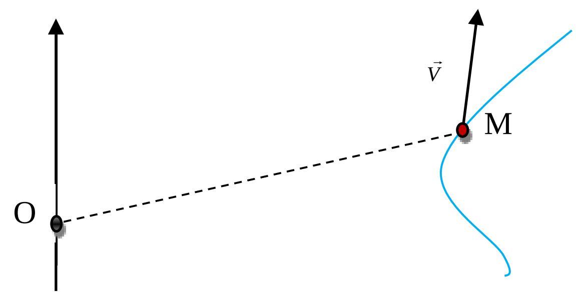
L'équation 1 devient

$$mg\cos\theta - T = -mR\omega^2 = -2mg\cos\theta \Rightarrow T = +3mg\cos\theta$$

III.7 LE MOMENT CINETIQUE

Moment cinétique par rapport à un point

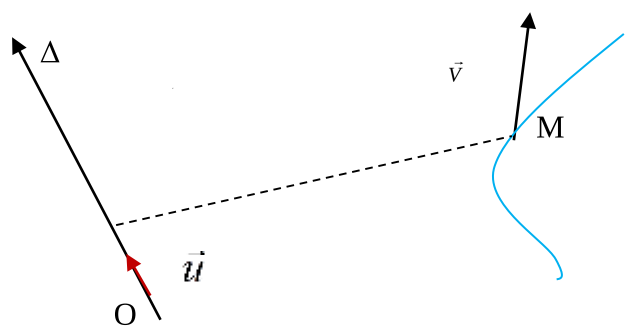
Soit $\vec{L}$ le moment cinétique par rapport à un point O quelconque d'un mobile. On a donc $\vec{L}=\vec{OM}\wedge m\vec{V}$



Moment cinétique par rapport à un axe

Soit l'axe Δ et O un point quelconque de cet axe, on appelle moment cinétique par rapport à l'axe Δ d'un mobile de masse m, L_Δ qui mesure la projection sur cet axe du vecteur $\vec{L}$.

$$L_\Delta = (\vec{OM} \wedge m\vec{V}) \cdot \vec{u}$$



Théorème du moment cinétique

Dérivons par rapport au temps L_Δ le moment cinétique par rapport à l'axe Δ; on a :

[illegible]

$$\Rightarrow \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge m\vec{V} = \vec{V} \wedge m\vec{V} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{OM} \wedge \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Le théorème du moment cinétique est définit par la relation :

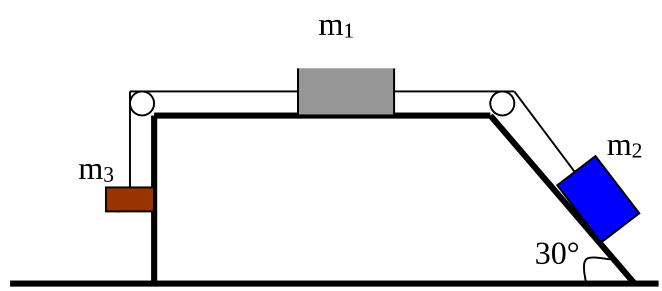
$$\frac{dL_\Delta}{dt} = (\vec{OM} \wedge \vec{F})_\Delta \quad \text{ou} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'une particule par rapport à un point fixe O (ou par rapport à un axe Δ) est égale au moment par rapport à ce point O (ou par rapport à cet axe Δ) des forces appliquées à la particule.

EXERCICES

Exercice1

Un corps de masse $\mathbf{m_1}$ est posé sur une table horizontale. De chaque côté, on lui attache une corde, inextensible et de masse négligeable, qui passe par une poulie sans frottement.



Les autres bouts des cordes sont attachés aux corps m_2 et m_3 (voir la figure ci-contre).

A) Si $\mathbf{m_1=m_2=m_3=m}$ Trouver :
   1)- l'accélération de chaque corps
   2)- les tensions des cordes
B) On suppose maintenant que le coefficient statique entre le corps $\mathbf{m_1}$ et la table est $\boldsymbol{\mu_s=0.5}$ et que $\mathbf{m_1=m_2=m}$. On néglige les frottements pour les autres corps.
   1) Déterminer en fonction de m la valeur minimale qu'il faut donner à $\mathbf{m_3}$ pour que les corps commencent à bouger ?

On donne $g=10m/s^2$

Exercice 2

Un bloc de masse m=20 kg est initialement au repos sur une surface horizontale. Une force horizontale F=80 N est nécessaire pour faire bouger le bloc.

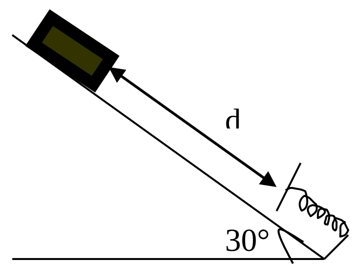
Après qu'il soit en mouvement, une force horizontale F'=60,0 N suffise pour garder le bloc en mouvement à vitesse constante.

L'accélération de la pesanteur $g= 10m/s^2$.

a) Représenter les forces qui agissent sur le bloc
b) Donner la relation de la force de frottement
c) Calculer le coefficient du frottement statique
d) Calculer le coefficient du frottement cinétique

Exercice-3

Soit un bloc de masse **m=100g**. Partant du repos, il glisse sans frottement sur un plan incliné. Il parcourt une distance **d** avant d'atteindre un ressort dont la constante de la raideur **k=40N/m** et la longueur initial **l=50cm.** (voir la figure ci-contre).



Si la compression maximale du ressort est **x=1m**, calculer la distance **d** ?

On donne $g=10m/s^2$.

Exercice 4

1) Calculer les accélérations des masses m_1 et m_2 du système dynamique suivant ainsi que les tensions des fils.(Fig-1) ?
2) Si on remplace la masse m_2 par deux masses m_2 et m_3 (Fig-2), calculer l'accélération de chaque masse ? Les poulies sont identiques et de masses négligeables et les fils sont inextensibles.

Fig-1

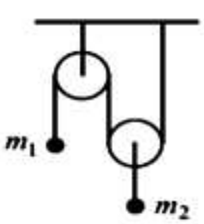
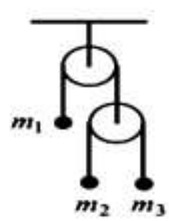
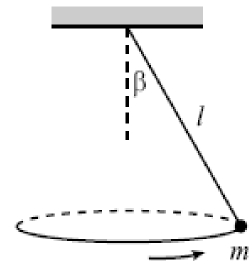


Fig-2



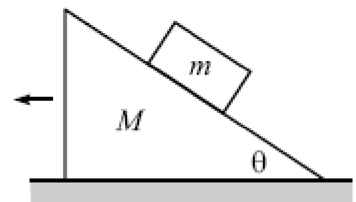
Exercice 6

La figure montre un pendule circulaire de masse m et de longueur l. Trouver la vitesse angulaire du pendule ?



Exercice 7

Un bloc de masse m est libre de glisser sur un plan incline de masse M. On néglige les forces de frottement. Trouver l'accélération horizontale du plan ?



Exercice 8

On pousse un bloc d'acier de masse m sur une surface en bois avec une vitesse initiale v=20m/s. Si le bloc parcourt une distance de 115m avant de s'arrêter, trouver le coefficient de frottement dynamique entre l'acier et le bois (Fig-a) ?

Une fois le bloc est au repos on dépose un bloc A de masse 75kg et un bloc B de masse 15kg. Le coefficient de frottement statique entre les deux blocs A et B est μ_s=0.45. Les forces de frottement entre les surfaces horizontales sont négligeables. Trouver la force minimale qu'il faut appliquer sur A pour que B ne tombe pas (Fig-b) ?

Fig-a

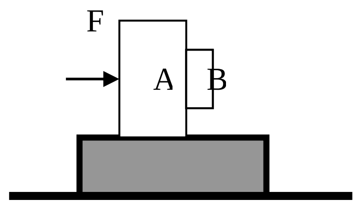
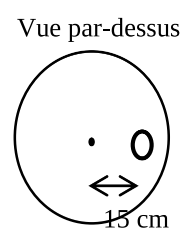


Fig-b

Exercice 9

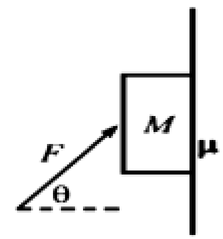
Une pièce de masse m=20g est posée à 15 cm du centre d'un disque qui tourne à 33,3 tours/minute.

Trouver le coefficient de frottement statique minimal entre la pièce et le disque qui lui permet de ne pas glisser ?



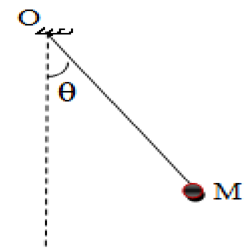
Exercice 10 :

On place un livre de masse M contre le mur. Pour empêcher le livre de tomber, on applique une force F comme le montre la figure .Le coefficient de frottement statique entre le livre et le mur est μ. $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ Pour un angle θ donné, quel est la force minimale exigé ? Trouver la valeur limite de l'angle θ au-dessous de la quel il n'existe pas une force qui peut garder le livre dans sa place ?



Exercice 11

Un pendule simple constitué de longueur L et de masse m. Ce pendule est en mouvement dans un plan vertical. Exprimer le moment des forces appliquées au point M, par rapport à O, lorsque le pendule fait un angle θ par rapport à la verticale.



CHAPITRE IV: TRAVAIL ET ENERGIE

IV.1. INTRODUCTION

Résoudre un problème en dynamique en appliquant le PFD, c'est pas toujours aussi simple. Dans bien des cas, c'est plus pratique d'utiliser des lois en relation avec les notions du l travail et d'énergie. Ces lois conduisent à l'étude du mouvement sans connaître toutes les forces ou savoir des détails sur le mouvement, comme la trajectoire ou les équations horaires, etc ..

Dans ce chapitre, nous allons traiter les points suivants :

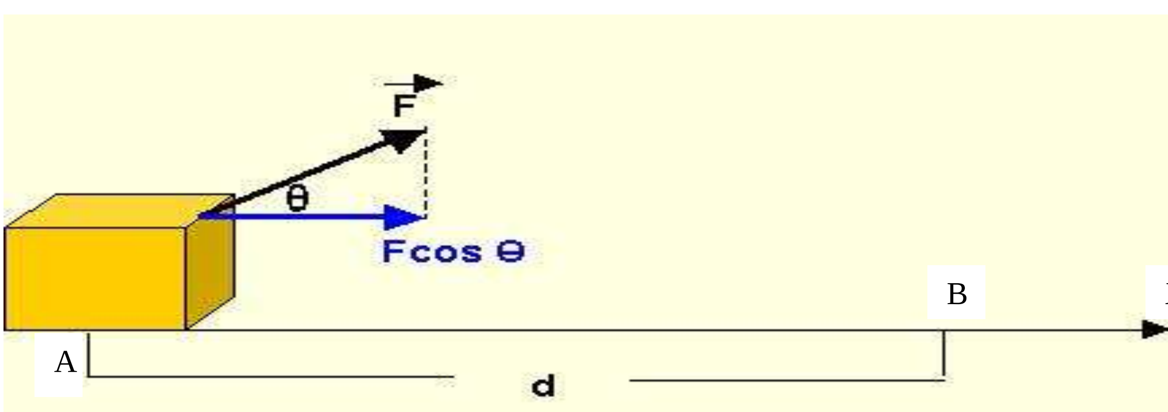
Des définitions reliées au concept du travail, l'énergie cinétique, forces conservatives, énergie potentielle et Conservation de l'énergie mécanique.

Nous finalisons ce chapitre par de exemples d'application.

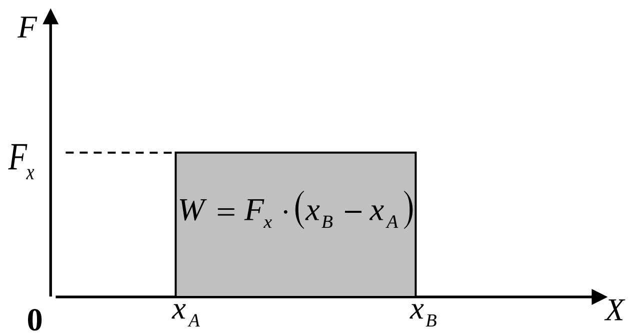
IV.2. TRAVAIL FAIT PAR UNE FORCE CONSTANTE

Soit $\vec{F}$ force constante qui fait déplacer un objet du point A au point B sur une distance d. Le travail mécanique W effectue par cette force est le produit scalaire entre le vecteur $\vec{F}$ et le vecteur $\vec{d}$

$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ $\boxed{= \mathbf{F\ d\ cos\ \Theta}}$ où Θ est l'angle entre la force $\vec{F}$ et le déplacement $\vec{d}$



En utilisant la représentation graphique de la force F en fonction de déplacement (voir la figure), alors, le travaille de cette force correspond à l'aire « sous la courbe ».



Remarque

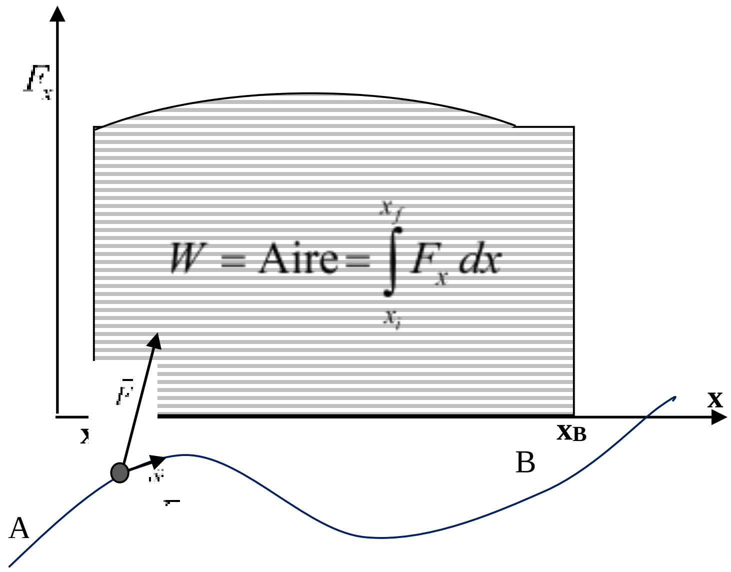
- Une force ne travaille pas si son point d'application ne se déplace pas (d=0).
- Le travail d'une force est une grandeur algébrique (W peut-être positif, négatif ou nul). Trois cas sont possibles :

  - 0<ϴ<90 ; dans ce cas, cos(ϴ)>0 et $W_{AB}>0$, on dit que la force effectue un travail moteur ;
  - 90°< ϴ<180; dans ce cas, cos(ϴ)<0 et $W_{AB}<0$, on dit que la force effectue un travail résistant;
  - ϴ= 90; dans ce cas, cos(ϴ)=0 et $W_{AB}=0$, la force n'effectue aucun travail.

IV.3. TRAVAIL FAIT PAR UNE FORCE VARIABLE

La figure ci-contre représente le graphe d’une force variable en une dimension suivant l’axe X.

Le travail fait par une force variable peut être, aussi, interprété graphiquement. Il correspond à l’air sous la courbe.



Pour le cas de déplacement rectiligne :

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx$$

Pour le cas général :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

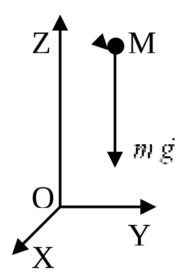
où δW est le travail élémentaire d’une force qui fait déplacer l’objet une distance élémentaire (dr) le long de la trajectoire.

<u>Le travail de quelques forces :</u>

a) <u>Le travail de la force de pesanteur (le poids)</u>

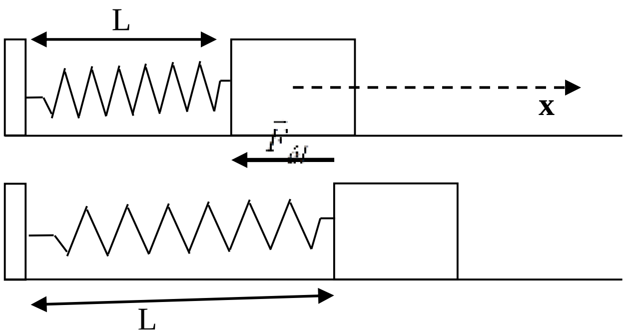
$$\delta W(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -\, mg\vec{k} \cdot dz\vec{k} = -\, mgdz = -\, d(mgz)$$

$$W_{A \to B} = -\, mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B)$$



Le repère est se trouve sur la surface de la terre

Le travail de la force élastique (de retour)



Soit un ressort de constante de raideur k. Suivant la loi de Hooke, la force élastique $F_{él}$ =kx ou` x=L-L_0

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_{él} \cdot d\vec{x} = -k(L - L_0)\vec{i} \cdot dx\vec{i} = -kxdx$$

Donc :

$$W_{A \to B} = \int_A^B \delta W = \int_{X_A}^{X_B} -kxdx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}mx_B^2$$

IV.4. LE THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

La variation d'énergie cinétique d'un mobile en translation dans un référentiel galiléen, entre deux positions A et B, est égale au travail de la somme des forces extérieures appliquées au mobile entre les positions A et B.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\int_A^B d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow W_{AB}(F) = m\int_{v_A}^{v_B} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$E_c = m\frac{v^2}{2}$ présente l'énergie cinétique de la particule.

$$\Rightarrow W_{AB}(F) = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_A^2) = E_C(B) - E_C(A)$$

$$(W_{\vec{F}})_{A\to B} = (\Delta E_C)_{A\to B} = E_C(B) - E_C(A)$$

Le travail effectué sur une masse ponctuelle est égal à la variation de son énergie cinétique.

Dimension : $[W] = [E_C] = MLT^{-2} xL = ML^2T^{-2}$

L'unité de l'énergie et du travail : $N \bullet m \equiv Joule(J)$

Le théorème de l'énergie cinétique, exprimé sous la forme ci-dessus reste valable dans le cas général pour une particule que les forces soient variables ou encore que les trajectoires soient quelconque.

Energie cinétique de rotation d'un solide

Soit un solide en rotation qui a une énergie cinétique E_c. Chaque point de ce solide possède une vitesse propre parce que sa position par rapport à l'axe de rotation est différente. Ainsi tout solide en rotation autour d'un axe ce caractérise par son moment d'inertie J (kg.m²) et sa vitesse de rotation angulaire ω (rad/s). L'énergie se définit de ce cas par la relation suivante :

$$E_C = \frac{1}{2} J \cdot \Omega^2 \quad \begin{cases} E_C : \text{énergie cinétique en Joules} \\ J : \text{moment d'inertie en } kg \cdot m^2 \\ \Omega : \text{vitesse angulaire (en rad} \cdot s^{-1}) \end{cases}$$

Exemple :

- Pour un disque ou cylindre plein de rayon R, $J = \frac{1}{2} MR^2$
- Pour une sphère pleine de rayon R, $J = MR^2$

IV.5. L'ÉNERGIE POTENTIELLE ET L'ÉNERGIE TOTALE

On sait que totale L'énergie peut changer de forme, mais elle ne peut jamais être créée ni détruit. Vu que l'énergie cinétique diminue ou augmente en fonction de la vitesse du mobile, il existe surement une quantité qu'il faut ajouter à l'énergie cinétique E_C, pour que leur somme reste constante. On l'appelle l'énergie potentielle E_P.

On écrie

$E_M = E_C + E_P$ E_M est l'énergie mécanique

Si le mobile se déplace entre les points A et B sans perte d`énergie, on peut écrire :

$$E_M = E_C + E_P = cst \Rightarrow \Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_P = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta E_C = -\Delta E_P$$
$$donc$$
$$E_C(B) - E_C(A) = E_P(A) - E_P(B)$$

On a déjà vu que $\Delta E_C = W_{A\to B}(\vec{F}\ )$

Donc

$$E_P(B) - E_P(A) = -W_{A\to B}(\vec{F}\ ) = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

C'est la différence d'énergie potentielle entre les points A et B.

IV.5.1. LES FORCES CONSERVATIVES ET NON CONSERVATIVES

Une force conservative est une force qui dérive d'une énergie potentielle. C'est-à-dire, on peut définir son énergie potentielle. Ainsi l'énergie mécanique est conservée.

$$E_P(B) - E_P(A) = -\int_A^B \vec{F}(cons)\cdot d\vec{r} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{grad\ E_P} = \overrightarrow{\nabla E_P} = \overrightarrow{-F}$$

Aussi, les forces dont le travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi sont dites conservatives et les autres non conservatives.

Dans le cas générales, lorsque des forces conservatives et non conservatives interviennent, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} W &= W_c + W_{nc} = \Delta E_C \\ &= -\Delta E_P + W_{nc} = \Delta E_C \\ &\Rightarrow W_{nc} = \Delta E_P + \Delta E_C = \Delta E_M \end{aligned}$$

Théorie de l'énergie mécanique : la variation de l'énergie mécanique ΔE_M égale à la variation du travail des forces non conservatives.

IV.5.2. L'ENERGIE POTENTIELLE POUR CERTAINES FORCES

La force d'attraction

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r \Rightarrow \delta W = -d\left(\frac{K}{r}\right) = -dE_P \Rightarrow E_P(r) = -\frac{K}{r} + cste$$

La force de la pesanteur (poids)

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_Z \Rightarrow \delta W = -d(mgZ) = -dE_P \Rightarrow$$
$$E_P(Z) = mgZ + cste$$

La force élastique

$$\vec{F}_{él} = -KX\vec{e}_X \Rightarrow \delta W = -d\left(\frac{KX^2}{2}\right) = -dE_P \Rightarrow E_P = \frac{1}{2}KX^2 + cste$$

IV.6. PUISSANCE

Chaque force effectuant du travail sur un corps en mouvement pendant une certaine durée développe alors une puissance P.

L'unité est le Watt (W).

1 watt = 1 joule / seconde

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

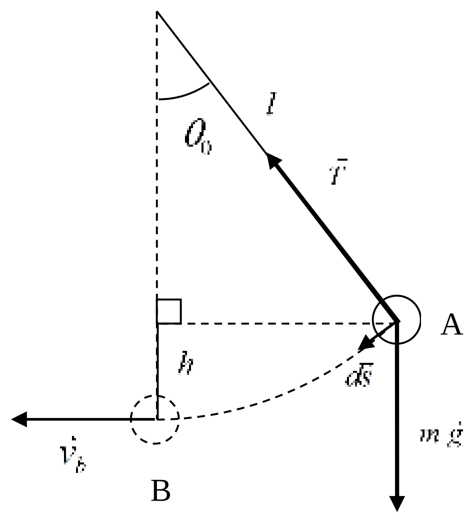
IV.7. EXEMPLES D'APPLICATION

<u>Exemple1</u>

Soit le pendule simple de masse m et de longueur l (voir la figure).

La masse, se trouvant au point A, est lâchée sans vitesse initiale.

Trouver la vitesse de la masse lorsqu'elle se trouve au point le plus bas ?



<u>Solution :</u>

Puisque $\vec{T} \perp d\vec{s}$.

$W_{nc} = W_T = 0$

L'énergie mécanique :

$$\Delta E_M = \Delta E_C + \Delta U_P = 0$$

$$\left\{ m\frac{v_b^2}{2} - 0 \right\} + \{ -m\,g\,h \} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_b = \sqrt{2\,g\,h}$$

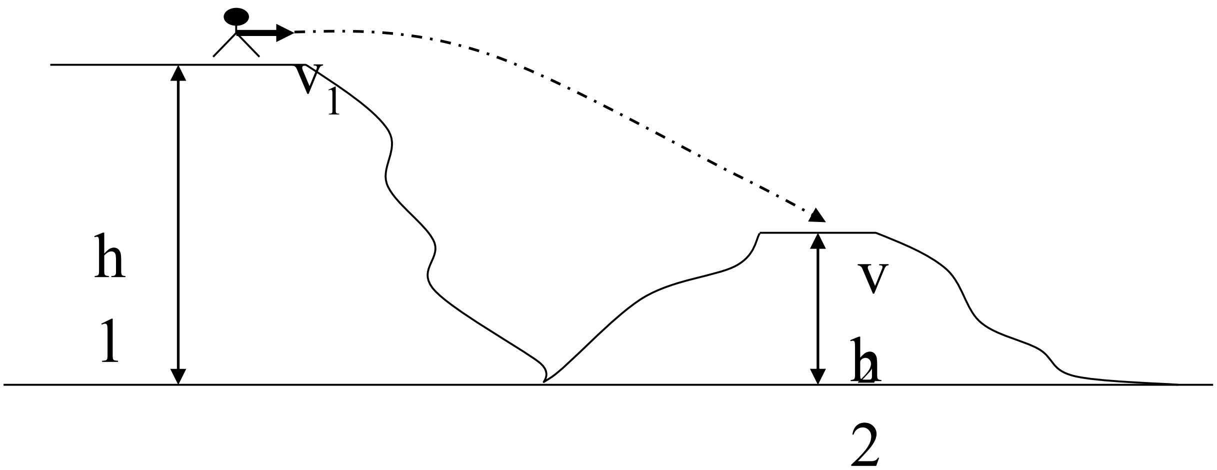
Pour $(h = l - l\cos\theta_0)$

Nous obtenons :

$$v_b = \sqrt{2\,g\,l\,(1-\cos\theta_0)}$$

Exemple 2

Une personne glisse sans frottement sur la piste de la figure suivante. Déterminer la valeur de la vitesse v_2 en fonction de v_1, g, h_1 et h_2?



$E_M(1)=E_M(2)$

$$E_C(1)+E_P(1)=E_C(2)+E_P(2)$$
$$\tfrac{1}{2}mv_1^{\,2}+mgh_1=\tfrac{1}{2}mv_2^{\,2}+mgh_2$$
donc
$$v_2=\sqrt{v_1^{\,2}+2g(h_1-h_2)}$$

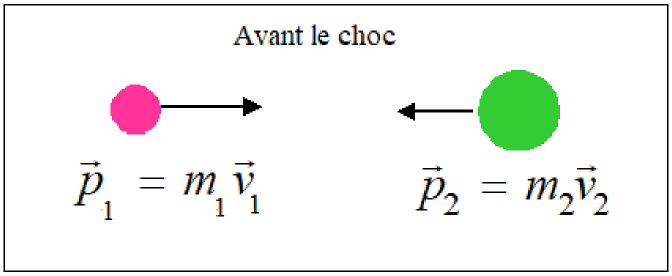
IV.8 LE CHOC

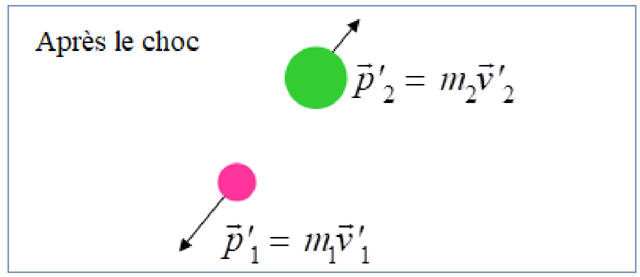
IV.8.1. DEFINITION

On dit qu'il y a collision ou choc entre deux ou plusieurs particules quand ces objets subissent une interaction mutuelle de courte durée et de courte portée. Dans ce cas, la quantité de mouvement totale du système est conservée quelle que soit la nature de la collision.

Soit deux particules de masses m_1 et m_2 qui se déplacent aves les vitesses v_1 et v_2 respectivement sur une ligne droite. Si elles rentrent en collusion, la quantité de mouvement après le choc sera égale à celle avant le choc. Sachant que seules leurs vitesses changent après le choc (v'_1 et v'_2).

$$\vec{p} = \vec{p}' \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$
$$Donc, m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$





IV.8.2. CHOCS ELASTIQUES

Le choc élastique est défini par le fait que l'énergie mécanique est conservée au cours de l'interaction.

Écrivons la conservation de l'énergie mécanique (réduite à l'énergie cinétique) :

$$E = E'$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$$

IV.8.3.CHOC INELASTIQUE

Lorsque l'énergie cinétique totale avant la collision E change après la collision E' la collision est dite **inélastique**. Dans ce cas, l'énergie mécanique n'est pas conservée, une partie de cette énergie est dissipée en déformation, en chaleur etc (Q). Par contre, la quantité de mouvement reste la conservation en absence de force extérieure.

$$E = E' + Q$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 + Q$$

Sachant que Q représente l'énergie perdue

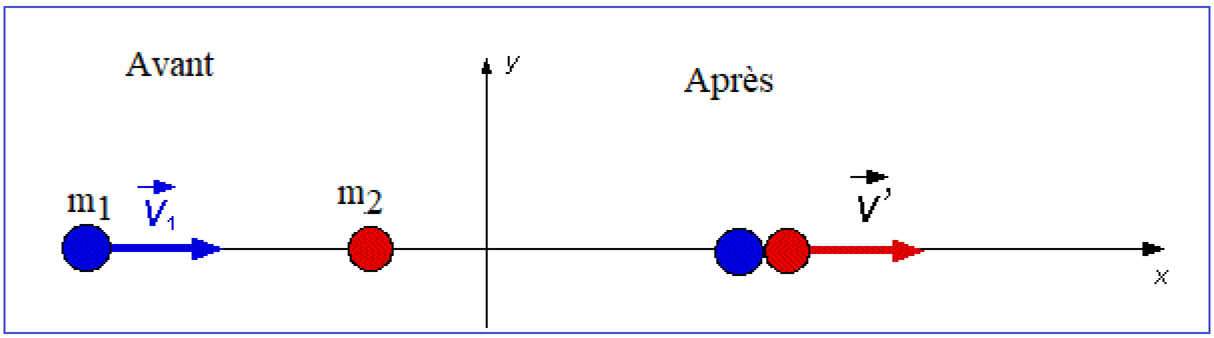
Le choc inélastique peut être parfaitement inélastique ou mou lorsqu'après le choc, les deux masses restent ensemble, ils ne se séparent plus.

Dans le cas ou' v_2=0

$$\text{Energie avant le choc: } E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$\text{Energie apès le choc mou: } E' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)} v_1^2$$

$$Q = \Delta E = E' - E = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)} v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = -\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} E$$



EXERCICES

Exercice1

Soit une pierre, de masse m = 2 kg, qui est lancé verticalement vers le haut d'une hauteur initiale h_A = 100 m (point A) avec une vitesse v_A = 200 km/h :

1) Calculez les énergies cinétique, potentielle et mécanique d de la pierre au point A ?
2) Calculez la hauteur maximale h_B (point B) qu'atteindrait la pierre ?
3) Au point C d'une hauteur h_C = 300 m, calculez les énergies cinétique, potentielle et mécanique de la pierre ?
4) Quelle est la vitesse v_C au point C?

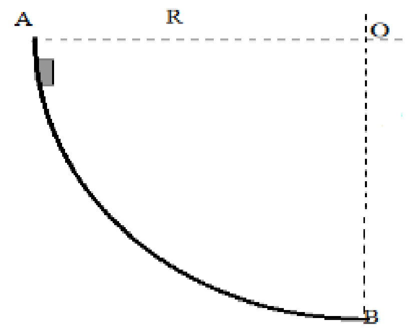
Exercice2

Une voiture entraînée par une force de traction de 800 N , se déplace sans vitesse initiale sur une trajectoire d'une distance de 10km. Calculer :

1. Le travail de la force de traction lorsque ce déplacement s'effectue sur une ligne horizontale ?
2. Le travail de la force de traction lorsque ce déplacement s'effectue sur une pente d'angle 10° par rapport à l'horizontale.

Exercice 3

Un mobile de masse m=300 g peut se déplacer sans frottement et sans vitesse initiale sur une trajectoire circulaire de rayon R=2 m. Il part d'un point A.



1. Déterminer la vitesse du mobile au point B.

2. Si la vitesse en B est de 5 m/s. Déterminer le travail des forces de frottement ?

Exercice 4

On suppose qu'un skieur de masse m=75kg se déplace sans vitesse initiale, sur une piste inclinée d'un angle □=20° par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement dynamique est μ_d=0,2.

Calculer la valeur de la vitesse du skieur après 200m de descente dans les cas :

A. la résistance de l'air sur le skieur est négligeable.
B. la résistance de l'air sur le skieur est estimée à 20,0N.

On donne g=10m/s^2.

Exercice 5

Un pendule simple de longueur l=1m et de masse m=150g, débute son mouvement avec une vitesse initiale V=1,5m/s.

Déterminer l'angle □ existant entre le fil et la verticale lorsque la masse m atteint son altitude maximale.

On donne g=10m/s^2.

Exercice 6

Trois ballons de masses m_a, m_b ,m_c ont été posés sur une surface horizontale. On lance le ballon m_a avec une vitesse initiale dans la direction du ballon m_b. Après la collision entre ces deux ballons, m_b heurte m_c. On suppose que les forces de frottement sont négligeables et que le premier choc est parfaitement élastiques.

Quelle est la vitesse de mb pour que la vitesse de la m_c soit maximale ?

Exercice 7

Une boule de billard de masse m se déplaçant à la vitesse de 4 m/s heurte une boule identique qui est immobile. A la suite de la collision, l'une des boules se déplace à la vitesse de 3 m/s suivant un angle de 45° par rapport à la direction initiale du mouvement.

Trouvez le vecteur vitesse de l'autre boule.

Exercice 8

Une balle en ferre de masse $m = 40\ g$ se déplaçant à une vitesse de 300 m/s rentre en collusion avec une boite de masse M =1kg immobile qui contient un aimant à l'intérieur. À la suite de cette collision, la balle reste collé du bloc et l'ensemble se dirige vers un ressort de constante k = 30 N/m. Quelle sera la compression maximale du ressort si les forces de frottements sont négligeable ?

BIBLIOGRAPHIE

- Fizazi, A. (2016). Mécanique du point matériel, ONU.
- Brasselet, P. (2020) Mécanique MPSI - PCSI, 1ère année cours et exercices (Français) Broché
- Alonso, M. et Finn, I . (1977). Physique générale. Tome 1: mécanique, éditions du renouveau pédagogique.
- M. S. Maalem, A. S. (2005).Mécanique | Alger : E.N.A.G |
- Gautron, L., Monavon, A., Denape, J., Balland, C., Ferrand-Tanaka, L., Angelié, A., ... & Paris, J. Y. (2010). *Physique. Tout-en-un pour la Licence: Cours, applications et exercices corrigés*. Dunod.