
**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**



UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA BOUMERDES

Faculté de Technologie

Département Génie Mécanique

Cours de Turbomachines Approfondies

Elaboré par : Dr F.Brahimi

TABLE DES MATIERES

Table des matières	2
Avant-propos	4

Chapitre I Rappels sur les turbomachines

I. Introduction.....	6
II. Description.....	6
III. Classification des turbomachines.....	7
IV. Diagrammes des vitesses.....	10
V. Théorie d'Euler-action de l'organe mobile sur le fluide	12
VI. Thermodynamique des machines.....	14
VI.1. Théorème de l'énergie cinétique.....	14
VI.1.1. Système fermé.....	14
VI.1.2. Système ouvert.....	15
VI.2. Travail indiqué et travail net.....	15
VI.2.1. Arbre des travaux pour machines réceptrices.....	17
VI.2.2. Arbre des travaux pour machines motrices.....	17
VI.3. Premier principe de la thermodynamique.....	18
VII. Similitude des turbomachines.....	19
VII.1. Influence du nombre de Reynolds.....	20
VII.2. Machines en fonctionnement semblable.....	20
VII.3. Représentation des caractéristiques des machines.....	22

Chapitre II Aérodynamiques des grilles d'aubes

I. Introduction.....	25
II. Grilles d'aubes.....	26
II.1 Définition géométrique.....	26
II.1.1. Profil d'aube.....	26
II.1.2 Aube ou aubage.....	28
II.1.3. Grille d'aubes.....	28
II.2 Définition cinématique.....	29
II.2.1 Grille d'aubes fixe.....	30
II.2.2 Grille d'aubes mobile sur machine réceptrice axiale.....	31
II.2.3 Grille d'aubes mobile sur machine motrice axiale.....	31
II.3 Classification des grilles planes.....	32
III. Origine des forces de résistance.....	32
IV. Efforts et moments exercés sur un profil.....	34
V. Evaluation de la portance la traînée et le moment	35
VI. Coefficients sans dimensions.....	38

Chapitre III Ecoulements dans les turbomachines

I.	Introduction.....	43
II.	Equations gouvernantes.....	44
II.1.	Equation de continuité.....	44
II.2.	Equations de quantité de mouvement.....	45
II.3.	Equation de conservation de l'énergie.....	47
II.4.	Relations thermodynamiques.....	48
II.5.	Equations sous forme conservative.....	49
II.6.	Equations constitutives.....	50
III.	Expression des équations dans le repère relatif.....	51
III.1.	Equation de continuité.....	51
III.2.	Equations de quantité de mouvement.....	52
III.3.	Equation de conservation de l'énergie.....	53
III.4.	Relations thermodynamiques.....	53
III.5.	Equations sous forme conservative.....	54
IV.	Equations simplifiées.....	54
IV.1.	Ecoulement stationnaire.....	55
IV.2.	Equations d'Euler.....	55
IV.3.	Equations de l'écoulement incompressible.....	56
V.	Solutions axisymétriques.....	57
V.1.	Equation de l'équilibre radial simplifié.....	57
V.1.1.	Ecoulement à vortex libre.....	59
V.1.2.	Ecoulement à vortex constant.....	60
V.1.3.	Ecoulement à vortex forcé.....	60
V.2.	Théorie des disques actuateurs.....	62
V.3.	Ecoulements 2D.....	63
V.3.1.	Ecoulements aube à aube.....	66
V.3.1.1.	Méthodes directes.....	67
V.3.1.2.	Méthodes inverses.....	68
V.3.1.3.	Couches limites et notion de transition.....	68

Exercices

Références bibliographiques

AVANT PROPOS

Ce support de cours et de TD est destiné aux étudiants qui suivent une formation en première année Master spécialités Energétique et Installations énergétiques et turbomachines. Il correspond au module Turbomachines approfondies.

Ce cours se situe dans la continuité des cours de Turbomachines 1 et 2 réalisés en troisième année licence Energétique durant les deux semestres S5 et S6.

Les turbomachines sont employées dans de nombreux secteurs et couvrent une gamme d'applications très large. Ces machines sont au cœur de nombreux processus industriels, comme la production d'énergie thermique et nucléaire, la propulsion aéronautique et spatiale ou encore l'automobile et la distribution d'eau,... Une bonne compréhension des écoulements dans ces machines est indispensable pour accroître leurs performances et diminuer leur coût d'exploitation ainsi que pour la conception et le projet des turbomachines.

Cette cours est fondée sur les connaissances en plusieurs modules tels que la mécanique des fluides, la thermodynamique, l'aérodynamique et les méthodes numériques.

Les écoulements en turbomachines sont parmi les plus complexes rencontrés en mécanique des fluides. Tant la description géométrique du domaine fluide et les structures physiques de l'écoulement sont extrêmement compliquées.

Ce document est retranscrit à travers trois chapitres

dans le premier chapitre nous présentons un rappel sur les turbomachines, des définitions et des théories générales des turbomachines qui ont déjà été détaillés en troisième année License.

Le deuxième chapitre présente des notions d'aérodynamique explicitant le lien entre la turbomachine et le fluide qui la parcourt lors du transfert d'énergie. Le troisième chapitre consiste à la modélisation des écoulements internes dans les turbomachines après avoir exposé les équations générales régissant ces écoulements. Nous présentons les différents types de solutions et leurs hypothèses simplificatrices adaptées à l'analyse de ces écoulements par ordre de complexité, les méthodes unidimensionnelles et bidimensionnelles. Ceci permettra d'aborder la simulation numérique des écoulements qui fournit le seul moyen d'accéder aux informations détaillées des écoulements, les essais réels sur les turbomachines, avec des mesures détaillées dans les canaux tournants étant difficiles, coûteux et, dans beaucoup de cas, impossibles.

Chapitre I

Rappels sur les

turbomachines

I. Introduction

On appelle turbomachine un appareil dont le rôle est d'assurer un échange d'énergie mécanique entre un débit permanent de fluide et un rotor tournant à vitesse constante autour d'un axe. Selon le sens d'échange d'énergie, la turbomachine sera dite génératrice lorsqu'elle communique de l'énergie au fluide et réceptrice lorsqu'elle en reçoit de celui-ci. Puisqu'elle consomme ou recueille de l'énergie mécanique sur son arbre, elle doit nécessairement être accouplée à une autre machine jouant un rôle de moteur dans le premier cas (moteur électrique, moteur Diesel, turbomachine réceptrice) ou de machine entraînée dans le second (dynamo, alternateur, turbomachine génératrice).

Les turbomachines sont des machines tournantes non étanches dans lesquelles la forme des parties fixes et mobiles est conçue de manière à imposer au fluide qui traverse la machine des variations de vitesse et des déviations. Ces changements de vitesse et déviations imposent alors des changements de pression et des travaux, essentiellement liés à la vitesse de rotation de la machine.

Le nombre de turbomachines que nous pouvons rencontrer dans notre quotidien s'en trouve fortement accru. Ainsi, la famille des turbomachines est composée par les ventilateurs, turbines, compresseurs, éoliennes, pompes...

II. Description

Une turbomachine comprend un organe principal spécifiquement moteur ou récepteur appelé roue ou rotor et des éléments situés en amont ou en aval de celle-ci, destinés à amener et à évacuer le fluide (figure I.1). L'élément essentiel dans la construction d'une turbomachine est la roue qui porte les aubages.

2. Forme du rotor :

On distingue principalement trois grands types de machines suivant la manière dont la particule fluide traverse le rotor de la machine par rapport à l'axe de rotation :

- Machines radiales : l'écoulement s'effectue dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. On parle de machines centrifuges dans le cas de machines réceptrices, et de machines centripètes dans le cas de machines motrices (figure I.2).
- Machines axiales : l'écoulement s'effectue dans un plan parallèle à l'axe de rotation (figure I.3).
- Machines hélicoïdales : il s'agit de machines intermédiaires dans lesquelles l'écoulement s'effectue dans des surfaces de révolutions dont la méridienne est inclinée par rapport à l'axe de rotation (figure I.4).

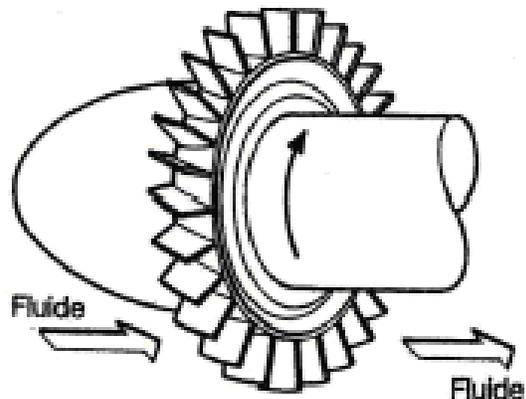


Figure I.2 ; Machine axiale

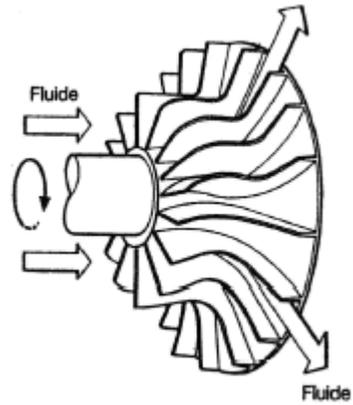


Figure I.3 : Machine radiale

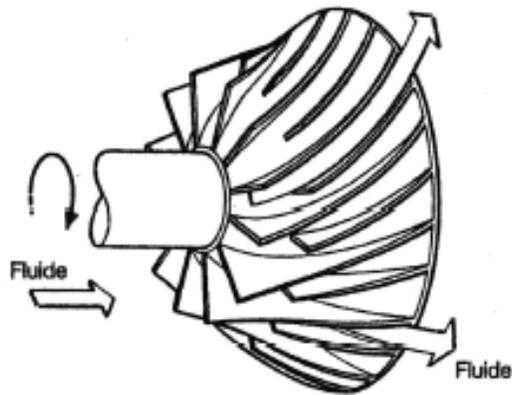


Figure I.4 : Machine hélicoïdale

3. Comportement du fluide

Suivant la modélisation adoptée pour le fluide mis en jeu dans la transformation, on distinguera deux classes de machines :

- Machine à fluide incompressible : le fluide utilisé sera un liquide (muni de l'hypothèse d'incompressibilité) ou bien un gaz se déplaçant à très faible vitesse.
- Machine à fluide compressible : le fluide utilisé dans la transformation est un gaz.

4. Nombres d'éléments disposés en série

Une turbomachine élémentaire comporte en principe deux séries d'aubages, les uns fixes les autres mobiles : machine monocellulaire ou mono étagée.

Dans certains cas il est nécessaire de disposer de plusieurs cellules en série : machine multicellulaire ou multi étagée.

5. Mode d'action du fluide

- Machine à action
- Machine à réaction

6. Degré d'injection

- Tous les canaux sont remplis de fluide actif : machine à injection totale.
- Certains canaux seulement sont remplis de fluide actif : machine à injection partielle.

IV. Diagrammes des vitesses

Dans la roue de la turbomachine, on s'intéresse à la vitesse absolue du fluide ainsi qu'à la vitesse relative par rapport à la roue. Soit une particule M animée d'une vitesse absolue \vec{C} , on décompose alors le vecteur vitesse \vec{C} comme suit :

$$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W} \quad (\text{I.1})$$

avec : \vec{U} vitesse d'entraînement et \vec{W} vitesse relative.

On définit alors les angles α et β tels que :

$$\alpha = (\vec{U}, \vec{C}) \quad \text{et} \quad \beta = (\vec{U}, \vec{W}).$$

- Pour une machine radiale on a à l'entrée $\vec{C}_1 = \vec{U}_1 + \vec{W}_1$ et à la sortie $\vec{C}_2 = \vec{U}_2 + \vec{W}_2$ (figure I.5)

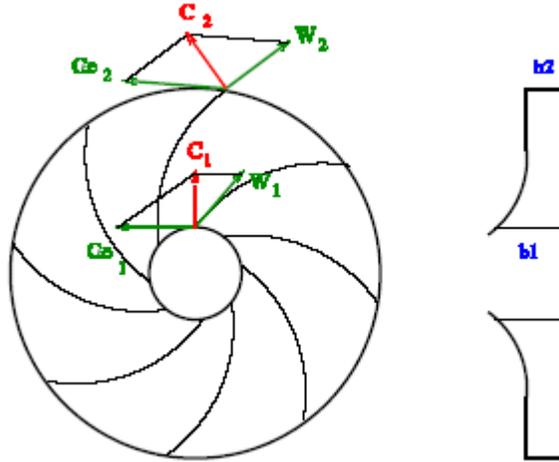


Figure I.5: Diagrammes des vitesses pour une roue radiale

$$\vec{C} \begin{pmatrix} C_r \\ C_u \end{pmatrix} ; \quad \vec{W} \begin{pmatrix} W_r \\ W_u \end{pmatrix} ; \quad \vec{U} \begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix}$$

avec :
$$U = \omega.r = 2\pi.N.r \quad (I.2)$$

r : rayon de la roue.

ω : vitesse de rotation de l'arbre de la machine exprimée en rad/s.

N : vitesse de rotation de l'arbre de la machine exprimée en tours/s.

Conservation du débit massique de l'entrée vers la sortie, on a :

$$q_m = \rho_1 S_1 C_{r1} = \rho_2 S_2 C_{r2} \quad (I.3)$$

S_1 section de passage du fluide à l'entrée de la machine et S_2 section à la sortie.

ou
$$q_m = \rho_1 \pi D_1 b_1 C_{r1} = \rho_2 \pi D_2 b_2 C_{r2}$$

b : largeur de l'aubage et D : diamètre de la roue

- Pour une machine axiale on a $\vec{U}_1 = \vec{U}_2 = \vec{U}$; à l'entrée $\vec{C}_1 = \vec{U} + \vec{W}_1$ et à la sortie $\vec{C}_2 = \vec{U} + \vec{W}_2$ (figure I.6)

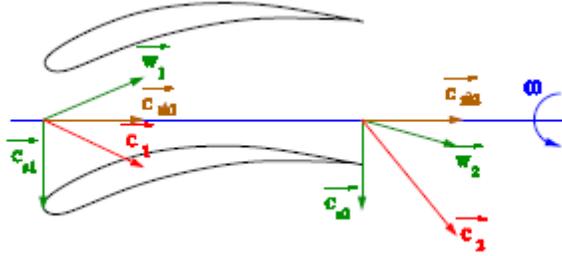


Figure I.6: Diagramme des vitesses pour une roue axiale

$$\vec{C} \begin{pmatrix} C_a \\ C_u \end{pmatrix} ; \quad \vec{W} \begin{pmatrix} W_a \\ W_u \end{pmatrix} ; \quad \vec{U} \begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix}$$

Conservation du débit massique de l'entrée vers la sortie, on a :

$$q_m = \rho_1 S_1 C_{a1} = \rho_2 S_2 C_{a2} \quad (I.4)$$

V. Théorie d'Euler-action de l'organe mobile sur le fluide

Dans une turbomachine l'élément qui produit les changements importants dans le fluide est le rotor. L'objet du théorème d'Euler est d'exprimer le travail moteur sur l'opérateur (rotor) en fonction des caractéristiques de l'écoulement.

$$M_u = Q_m (r_2 C_{u2} - r_1 C_{u1}) \quad (I.5)$$

M_u : le moment de l'ensemble des forces appliquées par les aubes sur le fluide

M est aussi le moment du couple moteur transmis par l'arbre à la roue mobile, $M_u = C$.

On a aussi :
$$P = C.\omega \quad (I.6)$$

P : puissance fournie par l'arbre de la machine au fluide

On obtient donc :
$$P = Q_m (r_2 C u_2 - r_1 C u_1) . \omega = Q_m (U_2 C u_2 - U_1 C u_1)$$

D'où le travail massique :
$$\tau_m = \frac{P}{Q_m} = U_2 C u_2 - U_1 C u_1$$

Dans le cas des machines hydrauliques (pompe) l'équation s'écrit :

$$\tau_m = U_2 C u_2 - U_1 C u_1 = g.H \quad (I.7)$$

$$\Rightarrow H = \frac{U_2 C u_2 - U_1 C u_1}{g} \quad (I.8)$$

L'équation (I.8) représente l'équation d'Euler.

H : hauteur d'Euler, c'est une hauteur représentative de l'énergie mécanique échangée entre la roue et le fluide.

- Pour les pompes (machines réceptrices) H est la hauteur fournie par la pompe au fluide.
- Pour les turbines (machines motrices) H est la hauteur reçue par la turbine du fluide.
- Pour une machine radiale $H = \frac{U_2 C u_2 - U_1 C u_1}{g} = \frac{\Delta(U C u)}{g}$
- Pour une machine axiale $H = \frac{U(C u_2 - C u_1)}{g} = \frac{U \Delta C u}{g} \quad (U_1 = U_2 = U)$

Autre expression de la hauteur d'Euler :

$$H = \frac{(C_2^2 - C_1^2) + (U_2^2 - U_1^2) - (W_2^2 - W_1^2)}{2.g} \quad (I.9)$$

$\frac{C_2^2 - C_1^2}{2}$: variation d'énergie cinétique, appelée énergie d'action.

$H = \frac{U^2 - W^2}{2}$: énergie de réaction

On a :
$$\sigma = \frac{\text{énergie de réaction}}{\text{énergie totale échangée}} = \frac{(U_2^2 - U_1^2) - (W_2^2 - W_1^2)}{(C_2^2 - C_1^2) + (U_2^2 - U_1^2) - (W_2^2 - W_1^2)} \quad (\text{I.10})$$

σ : est le degré de réaction.

VI. Thermodynamique des machines

VI.1. Théorème de l'énergie cinétique

VI.1.1. Système fermé

Soit un système fermé passant de l'état 1 à l'état 2, pour une quantité unitaire de fluide, le théorème de l'énergie cinétique appliqué à ce système prend la forme suivante :

$$W_{e1-2} + W_{int1-2} = \frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^2) \quad (\text{I.11})$$

W_{e1-2} : travail des forces extérieures sur le système

W_{int1-2} : travail des forces intérieures au cours de l'évolution.

Si les états 1 et 2 sont des états d'équilibre, alors les vitesses en 1 et 2 sont telles que :

$$\vec{C}_2 = \vec{C}_1 = Cste$$

et on écrit alors :

$$W_{e1-2} + W_{int1-2} = 0 \Rightarrow W_{e1-2} = -W_{int1-2}$$

- Pour un fluide non visqueux : $W_{int1-2} = \int_1^2 p dv$
- pour un fluide visqueux : $W_{int1-2} = \int_1^2 p dv + W_{f1-2}$

W_{f1-2} : travail dû à la viscosité.

VI.1.2. Système ouvert

Considérons maintenant une machine mécanique M traversée par un fluide allant du point 1 vers le point 2 (figure I.7).

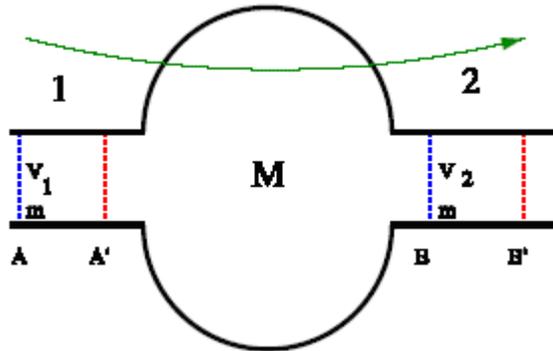


Figure I.7 : Machine traversée par un fluide

La masse de fluide comprise entre les points A et B à l'instant t est comprise entre les points A' et B' à l'instant $t + dt$. La masse de fluide comprise entre les points A' et B est dans un même état thermodynamique aux dates t et $t+dt$, donc tout se passe comme si la masse m de fluide entre A et A' était venue se placer entre B et B' . Pour une masse unitaire, on écrit alors la relation suivante:

$$W_{e1-2} + W_{int1-2} = \frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^2)$$

Les deux états thermodynamiques 1 et 2 sont caractérisés par les variables p_1, v_1 et p_2, v_2 .

VI.2. Travail indiqué et travail net

En considérant un fluide réel en écoulement permanent, le travail nécessaire pour transvaser 1 kg de fluide de l'entrée 1 de la machine (conditions p_1, v_1) à la sortie 2 (conditions p_2, v_2) se divise en deux parties :

1. le travail des forces extérieures comprenant :
 - travail des forces de pression à l'amont et à l'aval $p_1 v_1 - p_2 v_2$
 - travail des forces de pesanteur $gz_1 - gz_2$

(le signe venant du fait que la force est opposée au gradient)

- travail des actions de contact normales et tangentielles de la partie mobile de la machine sur le fluide, ce travail est le travail indiqué W_{i1-2}

2. le travail des forces intérieures :

- travail des forces de pression intérieures $\int_1^2 p dv$
- travail absorbé par les frottements (viscosité) à l'intérieur du fluide W_{f1-2} ; ce travail est toujours négatif.

v est le volume massique du fluide

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre l'entrée et la sortie de la machine on a :

$$W_{c2} - W_{c1} = \underbrace{p_1 v_1 - p_2 v_2 + g z_1 - g z_2 + W_{il}^2}_{W_{ex1}^2} + \underbrace{\int_1^2 p dv + W_{f1}^2}_{W_{in1}^2}$$

On a :

$$d(pv) = p dv + v dp \Rightarrow p_2 v_2 - p_1 v_1 - \int_1^2 p dv = \int_1^2 v dp$$

Cette équation peut s'écrire alors :

$$W_{il}^2 + W_{f1}^2 = \int_1^2 v dp + W_{c2} - W_{c1} + g z_2 - g z_1 = W_{p1}^2 + W_{c1}^2 + W_{z1}^2 = W_{n1}^2 \quad (\text{I.12})$$

W_{n1}^2 : le travail net.

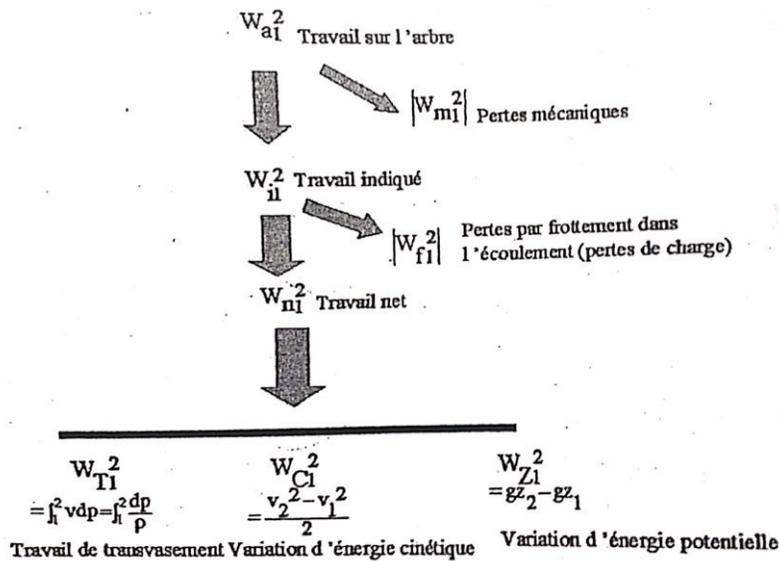
Le travail net est la somme des variations entre l'entrée et la sortie de la machine de toutes les formes d'énergie du fluide ; il correspond à la somme du travail indiqué qui représente le travail échangé par les parties mobiles de la machine et le travail irrémédiablement dissipé en pertes de charge dans la machine W_{f1}^2 (travail finalement dissipé en chaleur comme toute irréversibilité mécanique).

$$W_{a1}^2 + W_{m1}^2 = W_{il}^2 \quad (\text{I.13})$$

W_{m1}^2 : pertes mécaniques elles sont toujours négatives ; W_{a1}^2 : travail sur l'arbre de la machine.

IV.2.1. Arbre des travaux pour machines réceptrices

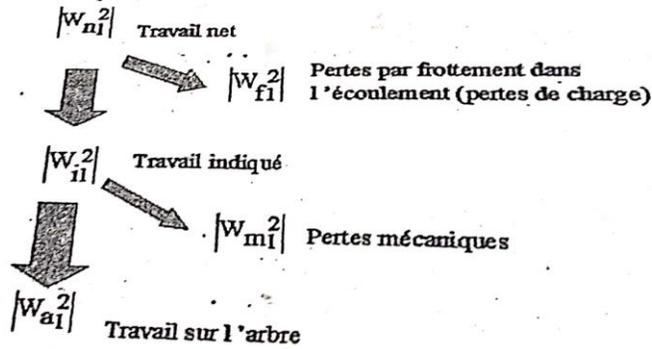
Les machines réceptrices sont des machines qui reçoivent de l'énergie mécanique et fournissent de l'énergie au fluide (compresseurs, pompes, ventilateurs). Dans ce cas les travaux indiqués, net et sur l'arbre sont positifs et les pertes de charge et les pertes mécaniques sont négatives. Ce qui donne l'arbre suivant :



IV.2.2. Arbre des travaux pour machines motrices

Les machines motrices sont des machines qui enlèvent de l'énergie au fluide qui les traverse et fournissent de l'énergie mécanique sur l'arbre (turbines). Dans ce cas les travaux indiqués, net et sur l'arbre sont négatifs et les pertes de charge et les pertes mécaniques sont négatives. Ce qui donne l'arbre suivant :

$$\begin{array}{lll}
 W_{TI}^2 & W_{CI}^2 & W_{ZI}^2 \\
 = \int_1^2 v dp = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} & = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} & = gz_2 - gz_1 \\
 \text{Travail de transvasement} & \text{Variation d'énergie cinétique} & \text{Variation d'énergie potentielle}
 \end{array}$$



VI.3. Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique établit que la somme du travail mécanique et de la quantité de chaleur dissipée, lors du passage d'un état (1) à un état (2) est égale à la somme des variations d'énergie interne (U) et cinétique (Ec), soit :

$$W_{el}^2 + Q_{el}^2 = \Delta U + \Delta E_c = U_2 - U_1 + \frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^2) \quad (I.14)$$

ΔU : variation de l'énergie interne ; ΔE_c variation de l'énergie cinétique

On a :

$$\begin{aligned}
 W_{el}^2 &= p_1 v_1 - p_2 v_2 + gz_2 - gz_1 + W_{iI}^2 \\
 \Rightarrow p_1 v_1 - p_2 v_2 + gz_1 - gz_2 + W_{iI}^2 + Q_{el}^2 &= U_2 - U_1 + \frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^2) \\
 \Rightarrow W_{iI}^2 + Q_{el}^2 &= (U_2 + p_2 v_2) - (U_1 + p_1 v_1) + \frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^2) + g(z_2 - z_1) \\
 \Rightarrow W_{iI}^2 + Q_{el}^2 &= H_2 - H_1 + \frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^2) + g(z_2 - z_1) \quad (I.15)
 \end{aligned}$$

H est l'enthalpie

Cette relation est valable dans tous les cas, que le fluide soit visqueux ou pas, et pour tous les types de machines avec apport d'énergie mécanique et/ou calorifique.

Dans l'étude des fluides compressibles, les termes de pesanteur sont le plus souvent négligés.

VII. Similitude des turbomachines

Les lois de similitude des turbomachines à fluide incompressible résultent de l'étude des deux questions suivantes :

- Comment varie le fonctionnement d'une machine (pompe ou turbine) lorsqu'on change de vitesse de rotation.
- Quelles sont les caractéristiques d'une machine géométriquement semblable à une machine donnée.

L'énergie massique (gH) fournie par une pompe dépend en général des cinq paramètres suivants :

- D, N : caractéristiques de la pompe
- Q_v, ρ, μ : caractéristiques du fluide

Donc le fonctionnement de la machine est régi par la relation :

$$f(gH, Q_v, N, D, \rho, \mu) = 0 \quad (\text{I.16})$$

L'analyse dimensionnelle nous conduit ainsi à écrire :

$$\pi_1 = F(\pi_2, \pi_3) \text{ ou } \mu_R = F(\delta_R, 1/R_e)$$

avec:

$$\pi_1 = \frac{gH}{D^2 N^2} = \mu_R : \text{Coefficient manométrique} \quad (\text{I.17})$$

$$\pi_2 = \frac{Q_v}{D^3 N} = \delta_R : \text{Coefficient de débit ou débitométrique} \quad (\text{I.18})$$

$$\pi_3 = \frac{\mu}{D^2 N \rho} = \frac{1}{\Re} : \text{Inverse du nombre de Reynolds} \quad (\text{I.19})$$

On peut continuer l'étude de la machine et introduire d'autres coefficients caractéristiques.

On trouvera :

$$\tau_R = \frac{P}{\rho \cdot N^3 \cdot D^5} : \text{Coefficient de puissance} \quad (\text{I.20})$$

$$\eta = \frac{P}{\rho Q_v g H} : \text{Rendement} \quad (\text{I.21})$$

$$\gamma_R = \frac{C}{\rho \cdot N^2 \cdot D^5} : \text{Coefficient du couple} \quad (\text{I.22})$$

VII.1. Influence du nombre de Reynolds

Dans le domaine d'utilisation usuelle des machines (pompe, turbine) la turbulence est grande dans l'écoulement en même temps les nombres de Reynolds sont grands : l'expérience montre que les variations de \Re ont alors peu d'influence. On peut donc écrire une première approximation : $\mu_R = F(\delta_R)$ ce qui revient à négliger l'influence de la viscosité (les pertes de charge existantes sont indépendantes de la viscosité). Les variations de \Re n'ayant pratiquement pas d'influence, la condition de Reynolds a disparue.

VII.2. Machines en fonctionnement semblable

- **Cas d'une même machine :**

Considérons une machine à deux régimes de fonctionnement différents \rightarrow les coefficients sans dimension sont constants.

$$\mu_R = \frac{gH}{N^2 D^2} = \frac{gH'}{N'^2 D'^2} \Rightarrow \frac{H'}{H} = \left(\frac{N'}{N} \right)^2$$

$$\delta_R = \frac{Q_v}{R_2^2} = \frac{Q'_v}{R_2'^2} \Rightarrow \frac{Q_v}{Q'_v} = \frac{N'}{N}$$

D'où :

$$\frac{H'}{H} = \left(\frac{Q'_v}{Q_v} \right)^2 \text{ donc varie comme } Q_v^2$$

- **Machines géométriquement semblables :**

Considérons deux machines géométriquement semblables tournant à la même vitesse → les coefficients sans dimension sont constants.

$$\delta_R = \frac{Q_v}{D^3} = \frac{Q'_v}{D'^3} \Rightarrow \frac{Q_v}{Q'_v} = \left(\frac{D}{D'} \right)^3$$

$$\mu_R = \frac{gH}{D^2} = \frac{gH'}{D'^2} \Rightarrow \frac{H}{H'} = \left(\frac{D}{D'} \right)^2$$

- **Formules générales :**

Machines géométriquement semblables en fonctionnement semblable → les coefficients sans dimension sont constants.

$$\delta_R = \frac{Q_v}{N \cdot D^3} = \frac{Q'_v}{N' \cdot D'^3} \Rightarrow \frac{Q_v}{Q'_v} = \frac{N'}{N} \left(\frac{D}{D'} \right)^3$$

$$\mu_R = \frac{gH}{N^2 D^2} = \frac{gH'}{N'^2 D'^2} \Rightarrow \frac{H}{H'} = \left(\frac{N'}{N} \right)^2 \left(\frac{D}{D'} \right)^2$$

VII.3. Représentation des caractéristiques des machines

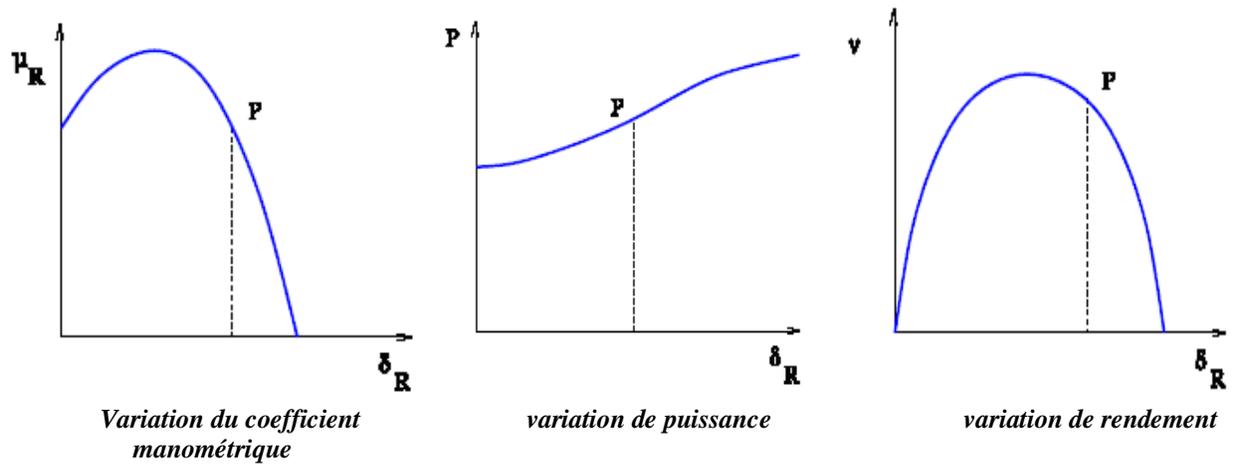


Figure I.8: Courbes caractéristiques d'une turbomachine

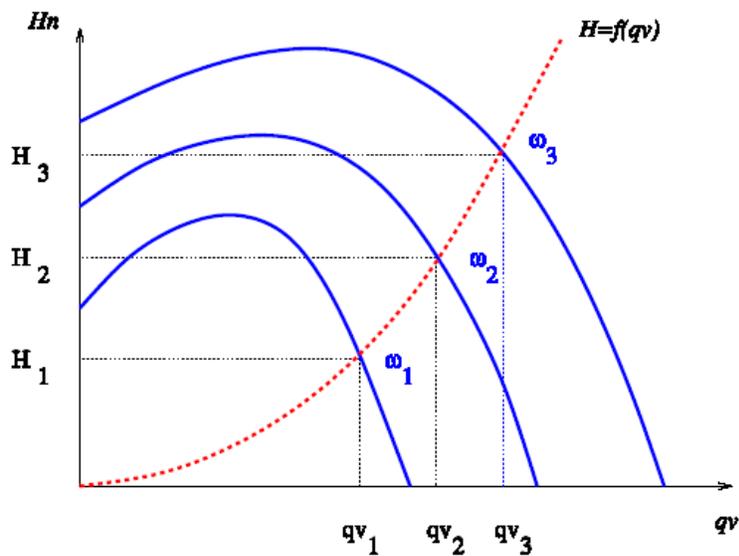


Figure I.9: Caractéristique hauteur-débit pour diverses vitesses de rotation de la machine

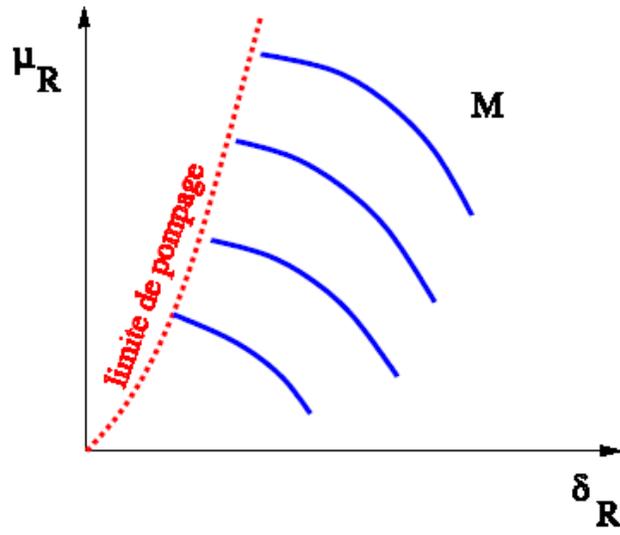


Figure I.10 : Courbe $\mu_R = f(\delta_R, M)$ pour un compresseur

Chapitre II
Aérodynamique des
grilles d'aubes

I. Introduction

L'aérodynamique est une branche de la dynamique des fluides. Elle a pour but d'étudier les phénomènes qui se produisent lorsqu'un corps solide est en mouvement relatif dans un fluide qui l'entoure. L'aérodynamique s'applique aux :

- Véhicules en mouvement dans l'air (automobiles, trains),
- Systèmes de propulsion (hélices, turboréacteurs),
- Installations fixes dans un air en mouvement (bâtiments, ponts) ou destinées à la production d'énergie (éoliennes),
- Systèmes mécaniques transformant une énergie aérodynamique en énergie mécanique et vice versa (turbines, compresseurs).

Ce chapitre s'attache seulement à présenter les principaux concepts qui interviennent dans l'étude du comportement des structures, notamment en turbomachines (profils), soumises aux actions d'un fluide.

En aérodynamique, on se limite à l'étude des fluides faiblement visqueux dont les mouvements sont caractérisés par des nombres de Reynolds très grands, le cas des faibles nombres de Reynolds relevant plutôt de la mécanique des fluides.

L'aérodynamique couvre différents régimes d'écoulement, en fonction du nombre de Mach M ,

caractéristique des effets de compressibilité du fluide : $M_a = \frac{V}{a}$

où V est la vitesse de l'écoulement et a est la célérité du son.

Ainsi, en relation avec la valeur du nombre de Mach on distingue différents régimes d'écoulement :

- **Subsonique** ($M_a < 1$) où les perturbations de l'écoulement se propagent aussi bien en amont qu'en aval.
- **Transsonique** ($0,8 < M_a \leq 1$) qui présente des zones d'écoulement subsonique et des zones d'écoulement supersonique. L'écoulement est dit sonique pour $M_a = 1$.

- **Supersonique** ($1 < M_a < 5$) où les perturbations de l'écoulement ne peuvent pas se propager en amont, cet écoulement est aussi marqué par des zones de discontinuité (du fait des ondes de choc).
- **Hypersonique** ($M > 5$) avec des ondes de choc très intenses et de très hautes températures près des parois.

Les paramètres et les variables fondamentaux de l'aérodynamique sont :

- La pression : $p = \lim \left(\frac{dF}{dA} \right) \quad dA \rightarrow 0$
- La masse volumique: $\rho = \lim \frac{dm}{dv} \quad dv \rightarrow 0$
- La température
- La vitesse de l'écoulement
- Les lignes de courant
- Les forces et moments aérodynamiques

II. Grilles d'aubes

Une turbomachine axiale est composée d'aubes dites planes ressemblant à un profil d'aile d'avion, c'est pour cette raison les calculs aérodynamiques du profil d'aile d'avion sont ceux du profil d'une aube plane de turbomachine axiale.

II.1. Définition géométrique

II.1.1. Profil d'aube

On définit pour un profil d'aile dans le plan (x, z) (figure II.1) les grandeurs suivantes :

- c : la corde ;
- e : l'épaisseur ;
- $z(x)$: la ligne de cambrure moyenne ou squelette ;
- U_∞ : la vitesse à l'infini amont ;
- α : l'angle d'incidence ;
- s : l'abscisse curviligne.

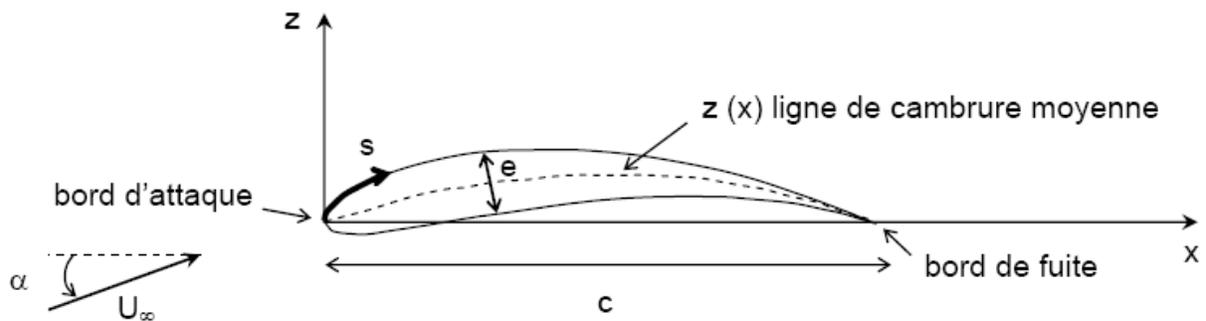


Figure II.1 : Définition d'un profil

De même pour l'aile vue de dessus dans le plan (x, y) (figure II.2) on définit :

- b : l'envergure ;
- c_r : la corde en pied ;
- c_t : la corde en bout d'aile ;
- S : la surface alaire.

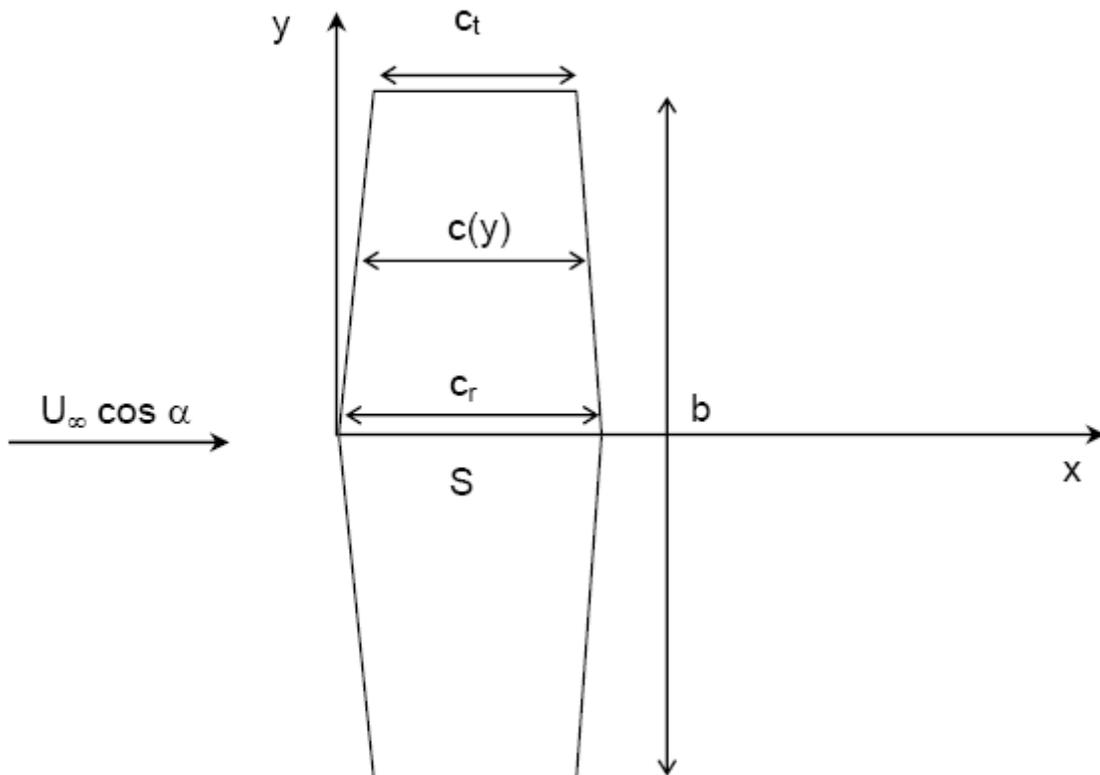


Figure II.2 : Définition d'une aile

II.1.2. Aube ou aubage

Une aube est une succession de sections droites (figure II.3) empilées le long d'une génératrice de sorte à générer un profil aérodynamique. La génératrice de l'aube est le lieu des centres de gravité des sections droites. On désignera par calage l'orientation de la section par rapport à un repère fixe sur la génératrice.

- Si le calage est constant, l'aube est dite cylindrique.
- Si le calage est évolutif, l'aube est dite conique ou vrillée.

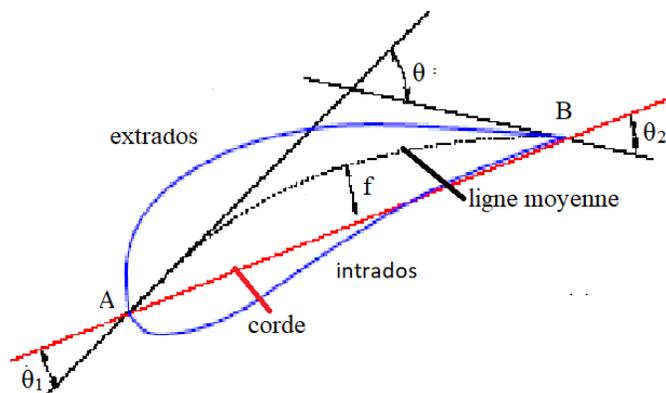


Figure II.3. Section droite d'une aube

On a l'ensemble des définitions ci-dessous :

A : bord d'attaque

B : bord de fuite

f: flèche maximale

$\theta = \theta_1 + \theta_2$: déviation angulaire

II.1.3. Grille d'aubes

Une grille d'aubes est formée d'une succession d'aubes fixes ou mobiles déduites les unes des autres par une opération géométrique donnée. Elle est utilisée pour guider l'écoulement du fluide et pour échanger avec lui des efforts mécaniques. La fonction principale de la grille d'aubes est de modifier l'écoulement du fluide en transformant sa vitesse relative d'entrée W_1 en une vitesse relative de sortie W_2 de norme et/ou de direction différentes.

Nous distinguons :

- Les grilles planes parallèles : construite par translation des aubes d'un pas p .
- Les grilles cylindriques : construite par rotation des aubes d'un angle de $2\pi/z$ (z est le nombre d'aubes), la génératrice est parallèle à l'axe de la grille.
- Les grilles planes radiantées : construite par rotation d'un angle de $2\pi/z$, la génératrice est perpendiculaire à l'axe de la grille.
- Les grilles toriques : les aubes sont imbriquées les unes aux autres et elles ne sont pas identiques.

II.2 Définition cinématique

L'écoulement est supposé permanent et uniforme ce qui par la théorie d'Euler suppose un nombre infini d'aubes très rapprochées les unes des autres. La grille pouvant être fixe ou mobile, on sera amené à travailler soit en vitesse absolue \vec{C} soit en vitesse relative \vec{W} .

- Grille d'aubes fixe \rightarrow vitesse absolue \vec{C}
- Grille d'aubes mobile \rightarrow vitesse relative \vec{W}

Cette partie sera consacrée à l'étude des grilles planes. En effet, les autres grilles d'aubes pourront par approximation se rapporter à des grilles planes. Les paramètres caractéristiques des grilles planes parallèles sont (figure II.4) :

- le pas de la grille : p
- la profondeur de la grille : b , elle est perpendiculaire au fond
- la corde du profil : c
- le calage des aubes de la grille : γ

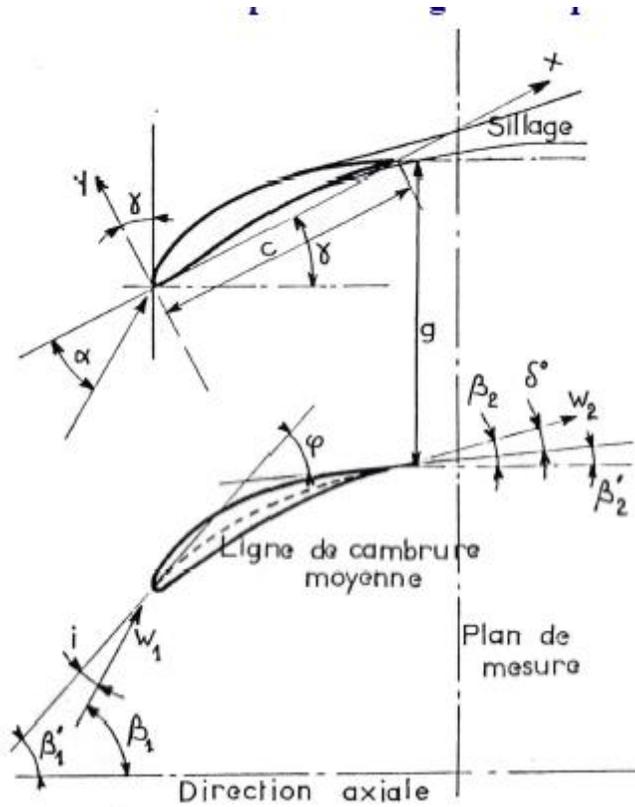


Figure II.4 : Paramètres géométriques d'une grille d'aubes

II.2.1 Grille d'aubes fixe

Dans le cas d'une grille d'aubes fixe (figure II.5) on a :

$$\vec{C}_{moy} = \frac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2}{2} \quad (II.1)$$

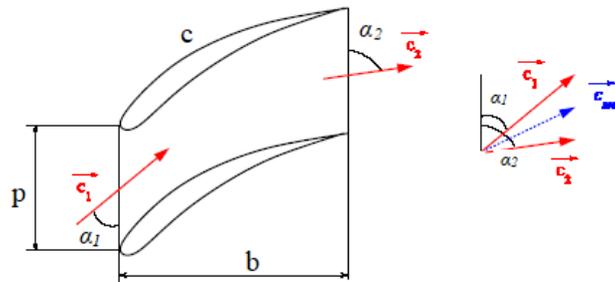


Figure II.5 : Grille d'aubes fixe

C_1 : vitesse absolue de l'écoulement à l'entrée de la grille, C_2 : vitesse absolue de l'écoulement à la sortie de la grille et C_{moy} : vitesse absolue moyenne.

II.2.2 Grille d'aubes mobile sur machine réceptrice axiale

Dans le cas d'une grille d'aubes mobile de machine réceptrice axiale (figure II.6), on a:

β_1 et β_2 orientation du profil ; $U = f(\omega, R_{\text{moyen}})$; $C_a = \text{cte}$. Avec β_1 et β_2 on a la direction de W_1 et W_2 et avec U et C_a on détermine les normes de W_1 et W_2 .

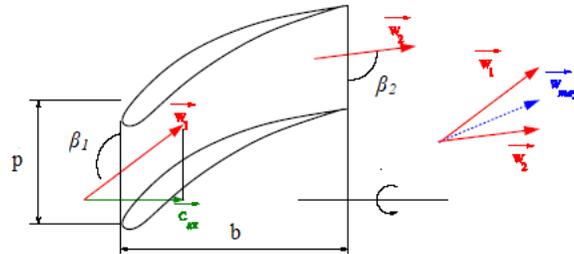


Figure II.6 : Grille d'aubes mobile de machine génératrice axiale

W_1 : vitesse relative de l'écoulement à l'entrée de la grille, W_2 : vitesse relative de l'écoulement à la sortie de la grille et W_{moy} : vitesse relative moyenne.

II.2.3 Grille d'aubes mobile sur machine motrice axiale

Dans le cas d'une grille d'aubes mobile de machine motrice axiale, on applique la même démarche que pour une grille d'aube mobile de machine réceptrice.

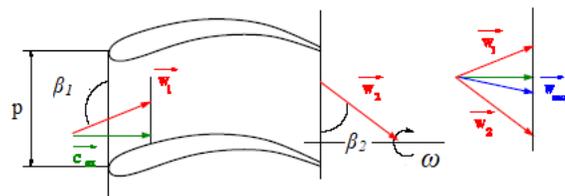


Figure II.7 : Grille d'aubes mobile de machine motrice axiale

II.3 Classification des grilles planes

Pour caractériser l'écoulement d'un fluide non visqueux on utilise l'équation de Bernoulli en fluide parfait :

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = 0 \quad (\text{II.2})$$

Cette équation traduit le fait que la variation de pression implique une variation des vitesses relatives dans le sens contraire. On a alors deux types de grilles :

- une grille de compression à travers laquelle on a : $dp > 0 \Rightarrow W_2 < W_1$
- et une grille de détente à travers laquelle on a : $dp < 0 \Rightarrow W_2 > W_1$

Les principaux paramètres qui ont un effet sur les performances de la grille sont :

- le type de profil utilisé (cambrure, répartition d'épaisseur, état de surface),
- l'angle d'incidence,
- l'angle de calage,
- la solidité,
- le nombre de Reynolds,
- le niveau de turbulence,
- le nombre de Mach.

III. Origine des forces de résistance

Chaque corps en mouvement dans l'air est soumis de la part de celui-ci à une résistance qui tend à s'opposer à ce mouvement. Cette résistance dépend des propriétés de l'air et des caractéristiques du corps concerné. Sur chaque élément de surface dS (figure II.8) on peut décomposer l'action de contact en :

- une composante normale qui est une force de pression et
- une composante tangentielle qui est une force de frottement.

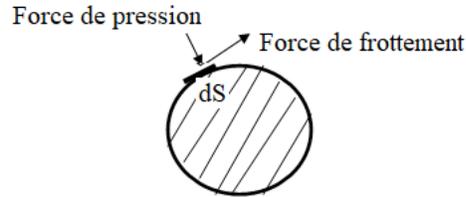


Figure II.8: Forces aérodynamiques sur un élément de surface

La composante de la résultante des forces de pression dans la direction de la vitesse de l'écoulement est appelée résistance de pression.

La composante de la résultante des forces de frottement dans la même direction (direction de la vitesse de l'écoulement) est appelée résistance de frottement.

L'origine des forces de frottement est essentiellement due à la viscosité du fluide. Elles sont déterminées par une analyse de la couche limite qui entoure l'obstacle.

La somme de ces deux résistances est la résistance totale.

Lorsqu'un obstacle présente une envergure limitée, des tourbillons marginaux prennent naissance en introduisant une résistance supplémentaire appelée résistance induite.

Quand un corps se déplace à la surface libre d'un liquide (ou à très grande vitesse dans un fluide compressible), il provoque un système d'ondes, dissipatrices d'énergie, qui introduisent une nouvelle résistance appelée résistance d'ondes.

Les facteurs influençant la résistance de l'air sont : la vitesse de l'écoulement, la masse volumique, la forme du corps et l'aire. La résistance de l'air s'exprime par :

$$R = K\rho SV^2 \quad (\text{II.3})$$

K: coefficient qui tient compte de la forme du corps et de son état de surface, *ρ*: masse volumique, *S* : aire, *V* : vitesse de l'écoulement.

La traînée représente une source de pertes de performances aérodynamiques.

IV. Efforts et moments exercés sur le profil

Les charges aérodynamiques peuvent s'évaluer localement sur une structure à l'aide de la distribution de pression à la paroi ou bien globalement grâce à un torseur d'efforts.

On considère un obstacle profilé (figure II.9). Connaissant la distribution de pression pariétale, il est assez aisé d'en réaliser l'intégration afin d'obtenir les efforts globaux correspondants.

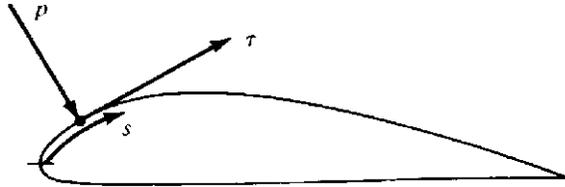


Figure II.9: Forces aérodynamiques sur un élément de surface

L'intégration des distributions des forces de pression et de frottement autour du profil se réduit à une force et un moment aérodynamiques (figure II.10).

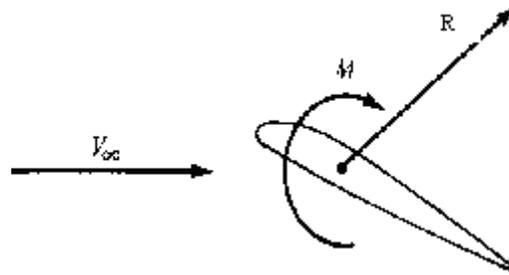


Figure II.10: Force et moment aérodynamiques résultant

Comme représenté sur la figure II.11, la résultante aérodynamique peut être décomposée en deux types de composantes :

Une portance P (composante de R perpendiculaire à V_∞) et une traînée T (composante de R parallèle à V_∞) ; V_∞ étant la vitesse à l'infini amont.

Une force normale N (composante de R perpendiculaire à c) et une force axiale T (composante de R parallèle à c) ; c étant la corde du profil.

α est l'angle d'attaque, il est défini comme l'angle entre c et V_∞ .

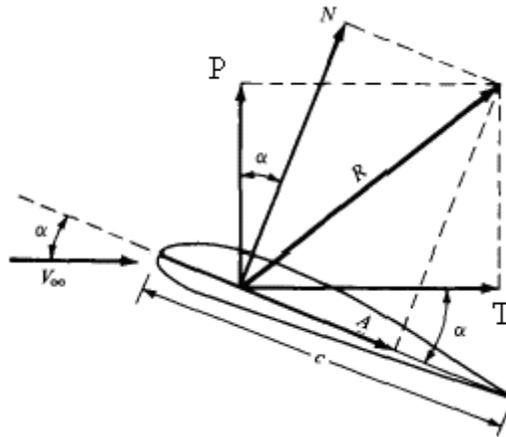


Figure II.11 : Force résultante aérodynamique et ses composantes

Les deux types de composantes sont reliés par les relations suivantes :

$$P = N \cos \alpha - A \sin \alpha \quad (\text{II.4})$$

$$T = N \sin \alpha + A \cos \alpha \quad (\text{II.5})$$

Le point d'application de la résultante aérodynamique s'appelle le centre de poussée.

V. Evaluation de la portance la traînée et le moment

On considère un corps 2D comme représenté sur la figure II.12.

- s_s et s_i : sont les coordonnées curvilignes mesurées à partir du bord d'attaque, pour les faces supérieure et inférieure respectivement.
- $p_s(s_s)$ et $p_i(s_i)$: sont les distributions des pressions sur les faces supérieure et inférieure respectivement.
- $\tau_s(s_s)$ et $\tau_i(s_i)$: sont les distributions des contraintes de cisaillement sur les faces supérieur et inférieur respectivement.

Au voisinage de l'aubage, la pression diffère selon qu'elle est mesurée sur l'intrados ou l'extrados. La différence de pression entre l'intrados et l'extrados engendre une portance qui a tendance à soulever l'aile d'avion ou bien à exercer un couple de rotation sur les aubes de

turbomachine. En raison de cette différence de pression, les filets d'air sont déviés. Lorsqu'ils se rejoignent au bord de fuite, ils créent des tourbillons qui génèrent de la traînée induite.

A un point donné, (figure II.12), la pression est perpendiculaire à la surface et est orientée avec un angle θ par rapport à l'axe z ; la contrainte de cisaillement est tangentielle à la surface et est orientée avec le même angle θ par rapport à l'axe x .

θ est mesuré de la ligne verticale vers la direction de p et de la ligne horizontale vers la direction de τ . Il est positif quand il est dans le même sens des aiguilles d'une montre.

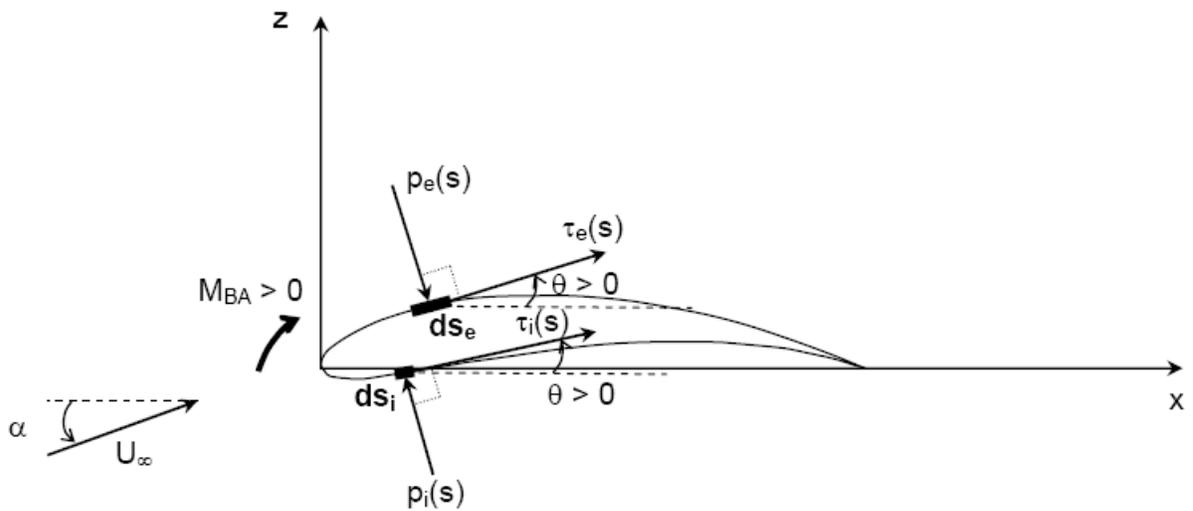


Figure II.12 : Distributions de pression et de cisaillement sur la face supérieure (l'extrados) et la face inférieure (l'intrados) d'un profil

En deux dimensions (2D), les forces et les moments par unité d'envergure, sont notés :

L' , D' , M' , N' et A' .

Les forces élémentaires normale et axiale agissant sur une surface élémentaire ds sur la face supérieure du corps sont données par les relations suivantes :

$$dN'_s = -p_s ds_s \cos \theta - \tau_s ds_s \sin \theta \quad (II.6)$$

$$dA'_s = -p_s ds_s \sin \theta + \tau_s ds_s \cos \theta \quad (II.7)$$

Sur la face inférieure on a :

$$dN'_i = p_i ds_i \cos \theta - \tau_i ds_i \sin \theta \quad (II.8)$$

$$dA'_i = p_i ds_i \sin \theta + \tau_i ds_i \cos \theta \quad (II.9)$$

Les forces axiale et normale totales par unité d'envergure sont obtenues par intégration des équations (II.6) à (II.9) du bord d'attaque jusqu'au bord de fuite.

$$N' = - \int_{BA}^{BF} (p_s \cos \theta + \tau_s \sin \theta) ds_s + \int_{BA}^{BF} (p_i \cos \theta - \tau_i \sin \theta) ds_i \quad (II.10)$$

$$A' = \int_{BA}^{BF} (-p_s \sin \theta + \tau_s \cos \theta) ds_s + \int_{BA}^{BF} (p_i \sin \theta + \tau_i \cos \theta) ds_i \quad (II.11)$$

Le moment par unité d'envergure autour du bord d'attaque dû à p et τ sur la surface élémentaire ds de la face supérieure est donné par :

$$dM'_s = (p_s \cos \theta + \tau_s \sin \theta) x ds_s + (-p_s \sin \theta + \tau_s \cos \theta) y ds_s \quad (II.12)$$

Sur la face inférieure on a :

$$dM'_i = (-p_i \cos \theta + \tau_i \sin \theta) x ds_i + (p_i \sin \theta + \tau_i \cos \theta) y ds_i \quad (II.13)$$

En intégrant les équations (II.12) et (II.13) du bord d'attaque jusqu'au bord de fuite, on obtient le moment par unité d'envergure autour du bord d'attaque :

$$M'_{BA} = \int_{BA}^{BF} [(p_s \cos \theta + \tau_s \sin \theta) x - (p_s \sin \theta - \tau_s \cos \theta) y] ds_s + \int_{BA}^{BF} [(-p_i \cos \theta + \tau_i \sin \theta) x + (p_i \sin \theta + \tau_i \cos \theta) y] ds_i \quad (II.14)$$

Par convention, les moments qui tendent à augmenter sont positifs et les moments qui tendent à diminuer sont négatifs (figure II.13)

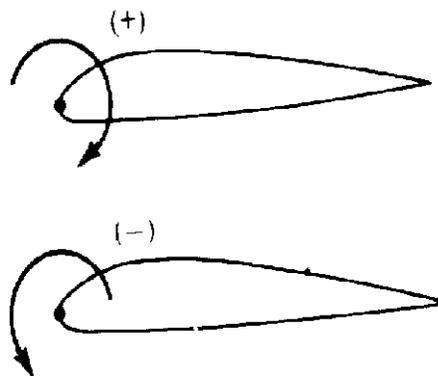


Figure II.13: Convention de signe pour les moments aérodynamiques

VI. Coefficients sans dimensions

En pratique la pression est rendue adimensionnelle. On a coutume de la présenter sous la forme d'un coefficient de pression noté C_p . Dans les écoulements compressibles on rapporte les contraintes à $1/2 \rho V_{ref}^2$. Le C_p est donc donné par :

$$C_p = \frac{p - p_{ref}}{\frac{1}{2} \rho V_{ref}^2} \quad (\text{II.15})$$

p_{ref} : pression statique de référence, la pression de référence choisie en pratique est souvent la pression statique en amont, p : pression statique moyenne, $\frac{1}{2} \rho V_{ref}^2$: pression dynamique moyenne à l'infini amont.

En fonction du nombre de Mach M_a le C_p s'écrit :

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_a^2} (\bar{p} - 1) \quad (\text{II.16})$$

avec : $\bar{p} = \frac{p}{p_{ref}}$ et γ : rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants.

De même la contrainte de frottement, est ramenée à celle du coefficient de frottement pariétal C_f tel que :

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho V_{ref}^2} \quad (\text{II.17})$$

τ : contrainte de frottement.

Les composantes de la résultante aérodynamique et le moment sont quantifiées par leurs coefficients respectifs : coefficient de traînée C_x ; de portance C_z ; coefficient de la force normale C_N ; coefficient de la force axiale C_A et coefficient de moment C_m . Ces coefficients adimensionnels dépendent de la densité ρ du fluide, de la vitesse \vec{V} , de la taille et de l'orientation du corps (profil).

Si on considère des corps géométriquement semblables l'analyse dimensionnelle nous conduit à écrire :

- coefficient de portance : $C_z = \frac{P}{q_\infty S}$ (II.18)

- coefficient de traînée : $C_x = \frac{T}{q_\infty S}$ (II.19)

- coefficient de la force normale : $C_N = \frac{N}{q_\infty S}$ (II.20)

- coefficient de la force axiale : $C_A = \frac{A}{q_\infty S}$ (II.21)

- coefficient de moment : $C_M = \frac{M}{q_\infty S l}$ (II.22)

avec : $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$ pression dynamique à l'infini amont

l: dimension linéaire caractéristique du corps.

S: maître couple du corps (quantité homogène à l²)

Pour les fluides incompressibles C_x , C_z , C_A , C_N et C_M sont fonction seulement du nombre de Reynolds et de α .

Pour les fluides compressibles C_x , C_z , C_A , C_N sont fonction aussi du nombre de Mach, du nombre de Prandtl et du rapport des chaleurs massiques γ .

Pour un corps bidimensionnel, on raisonne sur des forces et des moments par unité d'envergure et la surface de référence S est remplacée habituellement par la dimension caractéristique de la structure (c pour un profil).

- coefficient de portance: $c_z = \frac{P'}{q_\infty c}$ (II.23)

- coefficient de traînée: $c_x = \frac{T'}{q_\infty c}$ (II.24)

- coefficient de la force normale: $c_n = \frac{N'}{q_\infty c}$ (II.25)

- coefficient de la force axiale: $c_a = \frac{A'}{q_\infty c}$ (II.26)

- coefficient de moment: $c_m = \frac{M'}{q_\infty c^2}$ (II.27)

La polaire d'une aile est une courbe tracée point par point qui fait correspondre les coefficients de traînée et de portance déterminés expérimentalement pour différents angles d'incidence. Les performances aérodynamiques d'une aile, représentées par la polaire, varient en fonction de son allongement (rapport envergure / corde) et du nombre de Reynolds, lequel est lié aussi aux dimensions de l'aile (par la corde).

Les coefficients sans dimensions peuvent être exprimés par les relations suivantes :

$$c_p = c_n \cos \alpha - c_a \sin \alpha \quad (\text{II.28})$$

$$c_T = c_n \sin \alpha + c_a \cos \alpha \quad (\text{II.29})$$

$$c_n = \frac{1}{c} \left[\int_0^c (C_{p,i} - C_{p,s}) dx + \int_0^c \left(c_{f,s} \frac{dy_s}{dx} + c_{f,i} \frac{dy_i}{dx} \right) dx \right] \quad (\text{II.30})$$

$$c_a = \frac{1}{c} \left[\int_0^c \left(C_{p,s} \frac{dy_s}{dx} - C_{p,i} \frac{dy_i}{dx} \right) dx + \int_0^c (c_{f,s} + c_{f,i}) dx \right] \quad (\text{II.31})$$

$$\frac{dy_s}{dx} = -\tan g\theta \quad ; \quad \frac{dy_i}{dx} = \tan g\theta$$

$$c_{m_{LE}} = \frac{1}{c^2} \left[\int_0^c (C_{p,s} - C_{p,i}) x dx + \int_0^c \left(c_{f,s} \frac{dy_s}{dx} + c_{f,i} \frac{dy_i}{dx} \right) x dx \right] \\ + \frac{1}{c} \left[\int_0^c \left(C_{p,s} \frac{dy_s}{dx} - C_{p,i} \frac{dy_i}{dx} \right) y_s dx + \int_0^c \left(-c_{p,i} \frac{dy_i}{dx} + c_{f,i} \right) y_i dx \right]$$

Le centre de poussée qui est le point sur le solide par rapport auquel le moment aérodynamique est nul est exprimé par la relation suivante :

$$x_{cp} = -\frac{M'_{BA}}{N'} \quad (\text{II.33})$$

Dans le cas où l'angle d'attaque est faible, $\sin \alpha \approx 0$ et $\cos \alpha \approx 1$; on a :

$$P' \approx N' \quad \text{et} \quad x_{cp} = -\frac{M'_{BA}}{P'}$$

- Quand N' et P' diminuent, x_{cp} augmente.
- Quand les forces approchent zéro ; x_{cp} se déplace vers l'infini.

La force résultante peut être placée à n'importe quel point sur le solide, dans la mesure où la valeur du moment autour de ce point est connue. La figure II.14 illustre trois manières équivalentes pour représenter le système force moment sur un profil d'aile.

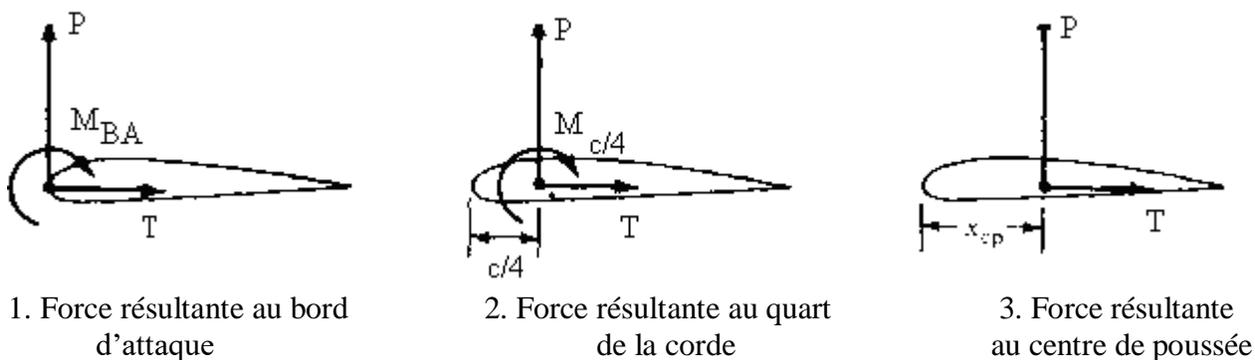


Figure II.14 : Manières équivalentes pour représenter le système force moment sur un profil d'aile.

1. La résultante est placée au bord d'attaque, avec une valeur finie de M'_{BA} .
2. La résultante est placée au quart de la corde, avec une valeur finie de $M'_{\frac{c}{4}}$.
3. La résultante est placée au centre de poussée, avec un moment nul par rapport à ce point.

La relation entre ces trois cas est exprimée par :

$$M_{BA} = -\frac{c}{4}P + M_{\frac{c}{4}} = -x_{cp}P \quad (\text{II.34})$$

Chapitre III

Ecoulements 2D dans les turbomachines

VI. Introduction

Les écoulements dans les turbomachines sont : tridimensionnels, instationnaires, visqueux, turbulents et compressibles.

Les principes fondamentaux des conservations de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement sont les éléments clés pour les applications dans le domaine de turbomachines.

Le calcul du champ des paramètres physiques tels que la vitesse, la pression, la température... de ces écoulements requiert de la résolution des équations par voie numérique.

Des simplifications au niveau de la physique ainsi qu'au niveau de la géométrie sont effectuées.

L'analyse tridimensionnelle classique est basée sur une résolution itérative des équations axisymétriques de l'écoulement méridien et des formulations aube à aube (solution en grilles d'aubes). Comme solutions axisymétriques on peut citer certaines techniques telles que l'équilibre radial simplifié, la théorie des disques actuateurs et les équations moyennées et leurs solutions.

Les solutions axisymétriques sont employées pour prédire globalement les variations radiales des propriétés de l'écoulement. Ces solutions sont strictement valables loin, en amont et en aval des pales, mais certaines hypothèses, comme celle d'Euler, permettent de les utiliser à l'intérieur de la zone aubée.

Une fois que les valeurs locales des paramètres de l'écoulement sont connues, les modèles aube à aube peuvent être utilisés pour prévoir les variations azimutales de la vitesse et de la pression.

Cette technique de combiner les théories axisymétriques avec la théorie des grilles d'aubes est limitée normalement aux turbomachines axiales.

Dans les solutions non axisymétriques généralement on retrouve la méthode des lignes et surfaces de portance, les méthodes quasi-tridimensionnelles et les solutions numériques des équations tridimensionnelles (Euler et Navier-Stokes)

VII. Equations gouvernantes

Le mouvement d'un fluide comporte généralement des déplacements et des déformations qui peuvent être très supérieures à ce qu'un solide peut tolérer, cependant la description Lagrangienne traduit mal ces fortes déformations fluides (par exemple : les tourbillons). Le maillage devient rapidement inacceptable et les éléments peuvent s'enchevêtrer, ceci entraîne de nombreux problèmes numériques que l'on souhaite éviter. Il est donc plus commode de décrire en variables Eulériennes plutôt qu'en variables Lagrangiennes.

En description Eulérienne le maillage est fixe, le milieu continu se déforme par rapport au maillage. La description Eulérienne est souvent utilisée en mécanique des fluides. Les équations présentent des termes de convection non linéaires qui demandent un traitement numérique particulier.

Les équations régissant l'écoulement dans les turbomachines sont basées sur les équations générales de la mécanique des fluides. Les formes différentielles de l'équation de continuité et l'équation de conservation des quantités de mouvement peuvent être obtenues à partir des relations intégrales sur un volume de contrôle et par l'application du théorème de la divergence. Une équation complémentaire associant la masse volumique à la pression et à la température est nécessaire : c'est la loi d'état du fluide.

Ces équations sont accompagnées d'hypothèses simplificatrices, associées à des considérations sur la géométrie, les bilans énergétiques ou la séparation des vitesses en une valeur moyenne et une partie fluctuante. En dehors du repère absolu, les équations peuvent aussi s'exprimer dans le repère relatif, en termes de la fonction de courant ou encore des variables exprimant sa courbure.

II.1. Equation de continuité

Elle exprime l'égalité de la cumulation de matière dans un volume de contrôle et les flux massiques traversant les frontières de ce volume de contrôle. Elle formule la conservation de la matière. L'équation générale de conservation de la masse s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho d\Omega + \oint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{III.1})$$

ρ : masse volumique, \vec{V} : vecteur vitesse, Ω : volume de contrôle, S : surface de contrôle.

Sous forme différentielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{III.2})$$

Le terme $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ est le taux de variation de la masse volumique en un point fixe donné.

Le terme $\text{div}(\rho \vec{V})$ décrit le bilan de flux de matière à travers la frontière d'un volume élémentaire.

II.2. Equations de quantité de mouvement (Equations dynamiques ou de Navier-Stokes)

Elles expriment l'égalité entre la somme des forces et la cumulation de la quantité de mouvement dans un volume de contrôle plus les flux de quantités de mouvement traversant les frontières de ce volume de contrôle. Elles formulent l'équilibre dynamique d'un volume élémentaire.

Si le fluide considéré est Newtonien et si la pesanteur est la seule force de volume agissant sur le domaine considéré. L'équation dynamique peut être exprimée ainsi :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{V} d\Omega + \oint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega + \oint_S \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} \quad (\text{III.3})$$

\vec{f}_e : forces de volume, $\vec{\sigma}$: tenseur des contraintes.

Le tenseur des contraintes a pour expression :

$$\vec{\sigma} = -p\vec{I} + \vec{\tau} \quad (\text{III.4})$$

où, pour un fluide Newtonien, $\bar{\tau}$ représente le tenseur des contraintes visqueuses et p la pression statique, tandis que \bar{I} désigne le tenseur unité.

En appliquant le théorème de la divergence (de Gauss) l'équation (III.3) devient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{V} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{V} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (-p \bar{I} + \bar{\tau}) d\Omega \quad (\text{III.5})$$

Sous forme différentielle les équations s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \vec{\nabla} (p \bar{I} - \bar{\tau}) = \rho \vec{f}_e \quad (\text{III.6})$$

Le terme $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V})$ décrit les effets inertiels dont on peut distinguer deux composantes :

- le terme $\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t}$ qui est le taux de variation de la quantité de mouvement du fluide et il est relatif à l'inertie instationnaire.
- le terme $div(\rho \vec{V} \vec{V})$ qui est relatif à l'inertie convective du fluide.

En plus des efforts inertiels l'équation comporte les termes de contraintes issus du tenseur de Stokes, on y distingue :

- un terme de pression hydrostatique : $g \vec{rad}p$
- un terme de dissipation visqueuse : $div \bar{\tau}$

II.3. Equation de conservation de l'énergie

Pour obtenir l'équation de l'énergie, il faut faire appel au premier principe de la thermodynamique. Il énonce que la dérivée temporelle de l'énergie totale (énergie interne plus énergie cinétique) est égale à la puissance de tous les efforts extérieurs au domaine agissant sur le fluide contenu dans le domaine à laquelle il convient d'ajouter le taux de chaleur reçu par le fluide, contenu dans le domaine, et provenant de l'extérieur de celui-ci. En groupant toutes les contributions l'équation de la conservation de l'énergie, sous forme intégrale s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho E d\Omega + \oint_S \rho E \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oint_S \rho E \vec{\nabla} \tau \cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} \left(\rho \vec{f}_e \cdot \vec{V} + q_H \right) d\Omega + \oint_S \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{V} \right) d\vec{S} \quad (\text{III.7})$$

Après transformation des intégrales de surface en intégrales de volume l'équation sous forme différentielle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} E) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{V}) + W_f + q_H \quad (\text{III.8})$$

En introduisant l'enthalpie totale du fluide H exprimée par :

$$H = h + \frac{\vec{V}^2}{2} = e + \frac{p}{\rho} + \frac{\vec{V}^2}{2} = E + \frac{p}{\rho} \quad (\text{III.9})$$

Et en développant le terme $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{V})$ l'équation (III.8) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{V} H - k \vec{\nabla} T - \vec{\tau} \cdot \vec{V} \right] = W_f + q_H \quad (\text{III.10})$$

$E = e + \frac{\vec{V}^2}{2}$: énergie interne totale, e : énergie interne, h : enthalpie statique

$\rho E \vec{V}$: flux de convection, $-k \vec{\nabla} T$: flux de diffusion

k : coefficient de conductivité thermique et T : température absolue (totale)

q_H : sources de chaleur autres que la conduction (radiations, réactions chimiques)

$W_f = \rho \vec{f}_e \cdot \vec{V}$: travail des forces de volume \vec{f}_e , $\vec{\sigma} \cdot \vec{V}$: travail des forces de surface

Pour des écoulements compressibles, le transport et la génération d'énergie sont couplés à la dynamique du mouvement du fluide, et donc l'équation d'énergie doit être résolue en même temps que les équations de continuité et de quantité de mouvement.

II.4. Relations thermodynamiques

En outre, une équation complémentaire associant la masse volumique à la pression et à la température est nécessaire. L'équation d'état associée à la compressibilité du fluide s'écrit :

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad (\text{III.11})$$

Pour clôturer le système d'équations régissant l'écoulement nous utilisons des relations thermodynamiques entre les variables d'état.

Dans le cas d'un gaz parfait, en utilisant les équations (III.9) et (III.11), la pression est obtenue par la formule suivante :

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (\text{III.12})$$

où $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ désigne le rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants respectivement.

Dans le cas d'un repère fixe nous avons:

$$E = e + \frac{\vec{V}^2}{2} \Rightarrow e = E - \frac{\vec{V}^2}{2} \Rightarrow p = (\gamma - 1)\rho \left(E - \frac{\vec{V}^2}{2} \right) = (\gamma - 1)\rho \left(E - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) \quad (\text{III.13})$$

Pour un écoulement tridimensionnel les équations III.1 à III.12 fournissent six équations pour six inconnues:

- la masse volumique ρ
- les trois composantes de la vitesse \vec{V}
- la pression p
- la température T

Ces variables sont toutes fonction des coordonnées de l'espace et du temps.

II.5. Equations sous forme conservative

Dans beaucoup de cas (telle que la résolution numérique des équations de Navier-Stokes), les équations exprimées en termes de variables "conservatives" sont très utiles. Ces variables, telles que ρ , ρu , ρv , ρw et ρe , qui incluent la masse volumique s'appellent variables conservatives. Quand des variables "conservatives" sont utilisées dans un schéma, les équations discrétisées conservent d'une façon plus précise la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. Ceci peut être un avantage dans des écoulements hypersoniques, parce que les équations sous forme conservative satisfont les relations de Rankine-Hugoniot et produiront les conditions correctes de saut à travers les chocs. Un autre avantage est que la forme de ces équations peut être interprétée en tant que lois intégrales sur le volume de contrôle des mailles de calcul.

Dans un repère absolu les équations de Navier-Stokes (III.2), (III.8) et (III.10) régissant un écoulement tridimensionnel s'écrivent, sous forme compacte, sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ \rho E \end{vmatrix} + \vec{\nabla} \cdot \begin{vmatrix} \rho \vec{V} \\ \rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p\mathbf{I} - \bar{\bar{\tau}} \\ \rho \vec{V} H - \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{V} - k \cdot \vec{\nabla} T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho \vec{f}_e \\ W_f + q_H \end{vmatrix} \quad (\text{III.14})$$

En posant :

$$Q = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ \rho E \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{V} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{F} = \begin{vmatrix} \rho \vec{V} \\ \rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p\mathbf{I} - \bar{\bar{\tau}} \\ \rho \vec{V} H - \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{V} - k \cdot \vec{\nabla} T \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad S_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho \vec{f}_e \\ W_f + q_H \end{vmatrix}$$

On obtient la forme générale contractée : suivante :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathcal{F} = S_0 \quad (\text{III.15})$$

En coordonnées cartésiennes, cette relation s'exprime :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = S_0 \quad \text{ou} \quad \partial_t Q + \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z = S_0 \quad (\text{III.16})$$

F_x , F_y et F_z sont les composantes de \mathcal{F} , soit :

$$\mathcal{F}_x = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho uH - (\vec{\tau} \cdot \vec{v})_x - k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \end{vmatrix}; \quad \mathcal{F}_y = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho vH - (\vec{\tau} \cdot \vec{v})_y - k \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{F}_z = \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{zx} \\ \rho vw - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ \rho wH - (\vec{\tau} \cdot \vec{v})_z - k \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (\text{III.17})$$

tandis que :

$$Q = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad S_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho f_{ex} \\ \rho f_{ey} \\ \rho f_{ez} \\ W_f + q_H \end{vmatrix} \quad (\text{III.18})$$

II.6. Equations constitutives

Nous nous plaçons dans le cadre des fluides isotropes et Newtoniens compressibles sachant que tous les gaz (comme l'air), mais aussi de nombreux liquides (comme l'eau) vérifient cette hypothèse. Un fluide est isotrope lorsque la relation entre les composantes du tenseur des contraintes visqueuses et celles du taux de déformation est identique dans toutes les directions. Il est par ailleurs Newtonien dans le cas où cette relation est linéaire, via la viscosité qui traduit les effets de frottement interne au fluide.

Pour ce type de fluide les composantes du tenseur des contraintes de viscosité s'expriment par la relation suivante :

$$\tau_{ij} = 2\mu \underbrace{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]}_{\text{taux de déformations linéaires}} + \lambda \underbrace{\frac{\partial v_k}{\partial x_k}}_{\text{taux de dilatation volumique}} \delta_{ij} \quad (\text{III.19})$$

qui s'écrit encore :

$$\tau_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) + \lambda v_{k,k} \delta_{ij} \quad (\text{III.20})$$

où :

τ_{ij} : tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation

du fluide .

μ : viscosité dynamique moléculaire.

λ : deuxième viscosité dynamique moléculaire.

δ_{ij} : symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ quand $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ quand $i \neq j$)

Peu de choses sont connues sur cette deuxième viscosité dynamique dans la mesure où son effet est peu important en pratique. Il semble malgré tout, pour un fluide compressible, une bonne approximation de λ soit donnée par la relation :

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (\text{III.21})$$

VIII. Expression des équations dans le repère relatif (repère en rotation)

Dans les turbomachines les systèmes sont en rotation donc il est nécessaire de pouvoir décrire le comportement du fluide par rapport à un système de coordonnées d'un référentiel en rotation, Il est souvent utile, pour ce qui concerne l'étude des turbomachines, d'exprimer les équations régissant l'écoulement en termes de la vitesse relative ce qui revient à les exprimer dans le repère relatif qui constitue le repère d'étude des turbomachines.

Nous considérons que les deux repères cartésiens, absolu et relatif, possèdent la même origine. Nous supposons que le système est en rotation continue avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe (z) la composition du mouvement s'écrit :

$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{U} = \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\text{III.22})$$

\vec{V} : vitesse absolue ; \vec{W} : vitesse relative et \vec{U} : vitesse d'entraînement

\vec{r} : vecteur position de composantes (x, y, z) perpendiculaire à l'axe de rotation z

ω : vitesse angulaire de composantes $(0, 0, \omega)$

III.1. Equation de continuité

Puisque la vitesse d'entraînement ne contribue pas dans l'équilibre de la masse, l'équation de continuité demeure invariante et peut être écrite dans le système relatif comme suit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{W}) = 0 \quad (\text{III.23})$$

III.2. Equations de quantité de mouvement

En ce qui concerne les équations de quantité de mouvement, elles ne restent pas les mêmes dans les deux systèmes de référence. Nous devons prendre en considération les effets dus à la force de Coriolis ainsi ceux dus à la force centrifuge. La force de Coriolis par unité de masse est définie par :

$$\vec{f}_{cor} = -2(\vec{\omega} \times \vec{W}) \quad (\text{III.24})$$

La force centrifuge par unité de masse est définie par :

$$\vec{f}_{cent} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 \cdot \vec{r} \quad (\text{III.25})$$

En introduisant la vitesse relative dans l'équation de quantité de mouvement (II.3) et après calculs, les équations de la quantité de mouvement dans le système relatif prennent la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \vec{W}}{\partial t} d\Omega + \int_S \rho \vec{W} (\vec{W} \cdot d\vec{S}) = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_{cor} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_{cent} d\Omega - \int_S p d\vec{S} + \int_S \vec{\tau} \cdot d\vec{S} \quad (\text{III.26})$$

Après transformation des intégrales de surface en intégrales de volume on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \vec{W}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{W} \otimes \vec{W}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_{cor} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_{cent} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (-p \vec{I} + \vec{\tau}) d\Omega$$

Sous forme différentielle l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\frac{\partial \rho \vec{W}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{W} \otimes \vec{W}) = \rho \vec{f}_e + \rho \vec{f}_{cor} + \rho \vec{f}_{cent} + \vec{\nabla} \cdot (-p \vec{I} + \vec{\tau}) \quad (\text{III.27})$$

En introduisant les expressions (III.24) et (III.25) on obtient :

$$\frac{\partial \rho \vec{W}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{W} \otimes \vec{W}) = \rho \vec{f}_e - 2\rho(\vec{\omega} \times \vec{W}) - \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (\text{III.28})$$

III.3. Equation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie dans le système relatif est obtenue en additionnant le travail des forces centrifuges, les forces de Coriolis ne contribuant pas dans l'équilibre de l'énergie de l'écoulement. L'équation différentielle sous forme conservatrice s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{\bar{W}^2}{2} - \frac{\bar{U}^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \bar{W} \left(h + \frac{\bar{W}^2}{2} - \frac{\bar{U}^2}{2} \right) - k \vec{\nabla} T - \vec{\tau} \cdot \bar{W} \right] = W_f + q_H \quad (\text{III.29})$$

avec $W_f = \rho \vec{f}_e \cdot \bar{W}$.

En considérant :

$$E = e + \frac{\bar{W}^2}{2} - \frac{\bar{U}^2}{2} ; \quad I = h + \frac{\bar{W}^2}{2} - \frac{\bar{U}^2}{2} = H - \vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\text{III.30})$$

La relation (III.29) s'écrit aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \bar{W} I - k \vec{\nabla} T - \vec{\tau} \cdot \bar{W} \right] = W_f + q_H \quad (\text{III.31})$$

où :

E : énergie totale relative par unité de masse.

I : appelée la rothalpie, elle représente l'énergie totale dans un repère en rotation.

Il s'avère que la rothalpie est approximativement constante le long des lignes de courant.

III.4. Relations thermodynamiques

Dans le cas d'un repère en rotation nous avons :

$$E = e + \frac{\bar{W}^2}{2} - \frac{\bar{U}^2}{2} \Rightarrow e = E - \frac{\bar{W}^2 - \bar{U}^2}{2} \quad (\text{III.32})$$

On déduit :

$$p = (\chi - 1) \rho \left(E - \frac{\bar{W}^2 - \bar{U}^2}{2} \right) \quad (\text{III.33})$$

Dans les deux repères l'enthalpie totale est exprimée par la relation suivante :

$$H = E + \frac{p}{\rho} = e + \frac{\vec{W}^2}{2} - \frac{\vec{U}^2}{2} + \frac{p}{\rho} \quad (\text{III.34})$$

II.5. Equations sous forme conservative

Dans le repère relatif, les équations régissant un écoulement tridimensionnel sous forme compacte prennent la même forme que dans un repère absolu, seulement, le vecteur S prend la forme suivante :

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \vec{f}_e + \rho \vec{f}_{Cor} + \rho \vec{f}_{cen} \\ W_f + q_H \end{pmatrix} \quad (\text{III.35})$$

En remplaçant les différentes forces et le travail des forces extérieures par leurs expressions on retrouve la forme suivante :

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_{ex} + \rho \omega (\omega x + 2W_y) \\ \rho f_{ey} + \rho \omega (\omega y - 2W_x) \\ \rho f_{ez} \\ \rho \vec{f}_e \cdot \vec{W} + q_H \end{pmatrix} \quad (\text{III.36})$$

IV. Equations simplifiées

Les équations du mouvement régissant les écoulements turbulents en turbomachines sont fortement non linéaires et la plupart des solutions analytiques disponibles sont pour des écoulements très simples. La résolution implique plusieurs hypothèses selon le type de machine, la géométrie des aubages et les conditions d'écoulement.

Les équations qui régissent l'écoulement peuvent souvent être simplifiées pour fournir des formes plus appropriées pour le traitement analytique ou numérique. Dans la plupart des écoulements internes, les effets de la pesanteur négligés.

IV.1. Ecoulement stationnaire

Pour un écoulement stationnaire les variables du fluide ne dépendent que des coordonnées spatiales, donc les équations de continuité se réduisent à :

$$\oint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{III.37})$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{III.38})$$

Les équations de quantité de mouvement se réduisent à :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega + \int \vec{\nabla} \cdot (-p\vec{I} + \vec{\tau}) d\Omega \quad (\text{III.39})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (p\vec{I} - \vec{\tau}) = \rho \vec{f}_e \quad (\text{III.40})$$

Et l'équation de l'énergie devient :

$$\oint_S \rho E \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oint_S \rho E \vec{\nabla} \tau \cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} (\rho \vec{f}_e \cdot \vec{V} + q_H) d\Omega + \oint_S (\vec{\sigma} \cdot \vec{V}) d\vec{S} \quad (\text{III.41})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} E) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{V}) + W_f + q_H \quad (\text{III.42})$$

IV.2. Equations d'Euler

Nous supposons tout d'abord que l'écoulement peut se partager en un écoulement principal sans frottement dans une zone dite saine dont les effets visqueux sont négligeables et un écoulement pariétal avec frottement du type couche limite dans une zone dite visqueuse près des parois où les effets dus aux gradients de vitesses sont importants (figure III.1). Dans la zone visqueuse, ce sont les équations Navier-Stokes qui régissent l'écoulement, souvent sous une forme simplifiée. Dans la zone saine, on peut utiliser les équations d'Euler avec un important gain en simplicité et temps de calcul.

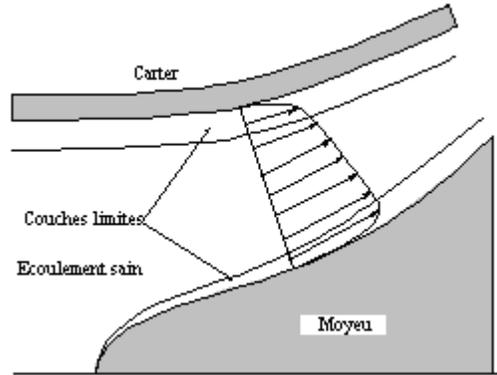


Figure III.1 *Modèle de l'écoulement à deux zones*

Pour les écoulements non visqueux ($\mu = 0$), l'équation de continuité ne change pas mais les deux derniers termes dans les équations de quantité de mouvement sont nuls. Ces dernières deviennent respectivement :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{V} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (-p \vec{I}) d\Omega \quad (\text{III.43})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (p \vec{I}) = \rho \vec{f}_e \quad (\text{III.44})$$

Elles sont connues sous le nom de l'équation d'Euler.

IV.3. Equations de l'écoulement incompressible

Quand le fluide est un liquide ou un gaz qui s'écoule à faible vitesse le fluide peut être supposé incompressible ($\rho = \text{constante}$) et les gradients de viscosité sont faibles.

Pour les écoulements laminaires incompressibles, la masse volumique et la viscosité sont supposées constantes. Dans ce cas les équations de continuité deviennent respectivement :

$$\oint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{III.45})$$

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{III.46})$$

Les termes visqueux des équations de quantité de mouvement peuvent alors être simplifiés

$$\rho \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\vec{V}) + \rho \cdot \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) + \vec{\nabla}(p\bar{I}) = \rho \vec{f}_e + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{III.47})$$

et l'équation d'énergie n'est pas prise en compte.

IX. Solutions axisymétriques

V.1. Equation de l'équilibre radial simplifié

L'équilibre radial simplifié (ERS) est la méthode la plus simple et la plus répandue lors du dimensionnement ou de la définition d'une vue méridienne. Les hypothèses simplificatrices utilisées sont :

- Ecoulement permanent
- Ecoulement bidimensionnel
- Surface de courant cylindrique (machine axiale)
- Ecoulement axisymétrique
- Tensions de contraintes visqueuses négligées (fluide parfait)
- Forces volumiques négligées

Dans une pompe axiale l'équilibre radial permet de maintenir sur un même rayon à la traversée de la grille du rotor. Il vise donc à éliminer la composante radiale de la vitesse qui serait due à l'effet des forces centrifuges.

Considérons une particule quelconque à laquelle on applique l'équation dynamique du mouvement d'un fluide parfait (équation d'Euler) :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} \bar{p} \quad (\text{III.48})$$

Si (u, v, w) les composantes du vecteur vitesse dans un repère cartésien, les projections de l'équation V s'écrivent :

$$\frac{du}{dt} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{III.49})$$

$$\frac{dv}{dt} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{III.50})$$

$$\frac{dw}{dt} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{III.51})$$

Écoulement permanent : $\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$

Dans un repère cylindrique la particule est repérée par les coordonnées (a, r, θ).

Pour un écoulement axisymétrique : la vitesse, la pression et la masse volumique ne dépendent pas de θ . Elles sont fonction seulement de r et a. Les équations d'Euler (III.49)

(III.50) et (III.51) en coordonnées cylindriques deviennent :

$$C_r \frac{\partial C_a}{\partial r} + C_a \frac{\partial C_a}{\partial a} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial a} \quad (\text{III.52})$$

$$C_u \frac{C_r}{r} + C_r \frac{\partial C_u}{\partial r} + C_a \frac{\partial C_u}{\partial a} = 0 \quad (\text{III.53})$$

$$-\frac{C_u^2}{r} + C_r \frac{\partial C_r}{\partial r} + C_a \frac{\partial C_r}{\partial a} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{III.54})$$

Si l'on désire que l'écoulement soit cylindrique et bidimensionnel il faut imposer la condition $C_r = 0$. Les équations (III.53) et (III.54) deviennent :

$$\frac{\partial C_u}{\partial a} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_u = C_u(r) \quad (\text{III.55})$$

$$\frac{C_u^2}{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{III.56})$$

L'équation (III.56) est la relation de l'équilibre radial, équation qui exprime que les différences de pression entre les filets s'établissent de telle sorte qu'elles équilibrent les forces centrifuges du mouvement giratoire.

Cette équation établit l'équilibre entre la force centripète et le gradient de pression dans la direction radiale. Elle permet de connaître la position des lignes de courant au cours de la traversée de la machine.

Pour l'équation (III.55) toutes les relations sont valables pour $C_u(r)$ et aucune n'étant en contradiction avec la relation de l'équilibre radial.

Pour simplifier nous supposons qu'en amont de la roue tous les filets ont la même énergie et que la vitesse C_1 est uniquement axiale. Tous les filets amont ont donc la même pression et la même vitesse.

En aval de la roue, l'énergie des différents filets sera l'énergie amont accrue de la hauteur H fournie par chaque tranche de la roue ce qui donne :

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{C_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{C_1^2}{2g} + H_{th} \quad (\text{III.57})$$

D'autre part on a :

$$H_{th} = \frac{U_2 C_{u2}}{g} \quad (\text{III.58})$$

V.1.1. Ecoulement à vortex libre (free vortex)

Généralement en pratique on prend $H_{th}(r) = Cste$. A un rayon quelconque on peut écrire :

$$H_{th} = \frac{U_2 C_{u2}}{g} \quad \text{avec: } U_2 = \omega \cdot r \quad \text{et } C_{u2} = C_{u2}(r)$$

$$C_{u2}(r) = \frac{gH_{th}}{U_2} = \frac{Cste}{r} \quad \text{avec } Cste = \frac{gH_{th}}{\omega}$$

On suppose que la hauteur reçue par tous les filets fluides est la même :

$$\Rightarrow \frac{dH}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(U_2 C_{u2}) = \omega \frac{d}{dr}(r C_{u2}) = 0 \Rightarrow r C_{u2} = cste = k_1 \Rightarrow C_{u2} = \frac{k_1}{r} \quad (\text{III.59})$$

D'autre part la hauteur totale en un point quelconque de l'espace aval (2) s'écrit :

$$H = \frac{p}{\rho g} + \frac{C^2}{2g}$$

Avec l'hypothèse d'écoulement isoénergétique on a :

$$\frac{\partial H}{\partial r} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{d}{dr} \left(\frac{C^2}{2} \right) &= 0 \\ \frac{C_{u2}^2}{r} + C_{u2} \frac{dC_{u2}}{dr} + \frac{d}{dr} \left(\frac{C_{a2}^2}{2} \right) &= 0 \\ \frac{k_1^2}{r^3} - \frac{k_1^2}{r^3} + \frac{d}{dr} \left(\frac{C_{a2}^2}{2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_{a2}(r) = cste \quad (\text{III.60})$$

V.1.2. Ecoulement à vortex constant

$$H = k \cdot r \Rightarrow C_{u2} = \frac{gkr}{\omega r} = cste = k_3$$

$$H = \frac{U_2 C_{u2}}{g} = \frac{\omega k_3}{g} = \frac{\omega k_3}{g} \cdot r$$

$$\frac{dH}{dr} = \frac{\omega k_3}{g} = \left[\frac{k_3^2}{r} + \frac{d}{dr} \left(\frac{C_{a2}^2}{r} \right) \right] \frac{1}{g}$$

$$\Rightarrow C_{a2}(r) = \sqrt{2k_3(\omega r - k_3 \ln r) + C}$$

$$\Rightarrow C_{a2}(r) = \sqrt{2C_{u2}(U - C_{u2} \ln r) + C}$$

(III.61)

V.1.3. Ecoulement à vortex forcé

$$C_{u2}(r) = k_2 \cdot r \Rightarrow H = \frac{U_2 C_{u2}}{g} = \frac{\omega k_2 r}{g} = \frac{\omega k_2 r^2}{g}; \quad \frac{dH}{dr} = \frac{2\omega k_2}{g} \cdot r$$

$$H = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{C_2^2}{2g} \Rightarrow \frac{dH}{dr} = \frac{1}{\rho g} \cdot \frac{dp}{dr} + \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{C_{u2}^2}{2} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{C_{a2}^2}{2} \right) \right] \frac{1}{g}$$

$$2\omega k_2 r = \frac{C_{u2}^2}{r} + C_{u2} \cdot \frac{dC_{u2}}{dr} + \frac{d}{dr} \left(\frac{C_{a2}^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{C_{a2}^2}{2} \right) = -k_2^2 \cdot r + 2\omega k_2 \cdot r - k_2^2 \cdot r$$

$$\Rightarrow \frac{C_{a2}^2}{2} = 2\omega k_2 \cdot \frac{r^2}{2} - k_2^2 \cdot r^2 + C$$

$$\Rightarrow C_{a2} = \sqrt{2k_2(\omega - k_2)r^2 + C} \quad \text{(III.62)}$$

C: constante d'intégration que l'on détermine par l'équation de conservation du débit:

$$Q_v = \int_{r_i}^{r_e} 2\pi r C_{a2}(r) dr \quad \text{(III.63)}$$

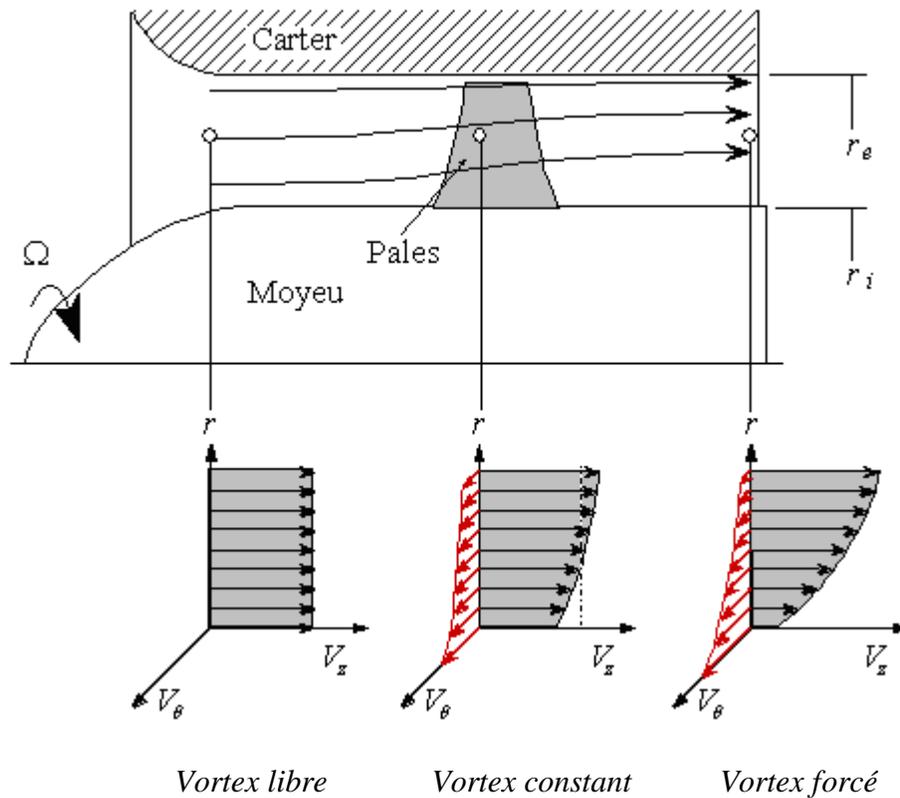


Figure III.2 : Evolution des vitesses dans une machine axiale pour les types de vortex les plus courants

On aurait pu aussi bien traiter des cas plus compliqués tels que :

- Energie H variable des différents filets amont.

- $P_1 = \text{cste}$ mais C_{a1} variable (C_{u1} restant nulle).
- Répartition de C_{a1} et C_{u1} quelconque

V.2. Théorie des disques actuateurs

La théorie des disques actuateurs fournit un moyen simple pour améliorer l'analyse issue de l'équilibre radial en permettant un développement progressif du profil de vitesse axiale à travers la machine ou la grille d'aubes (à l'amont et à l'aval de la zone aubée). Le principe d'un disque actuateur est schématisé sur la figure III.3.

Cette approche considère que la déviation induite par la pale sur le champ méridien de l'écoulement est produite par un plan imaginaire localisé à une distance moyenne entre le bord d'attaque et le bord de fuite.

Dans ce modèle mathématique, la grille d'aubes est substituée par un plan de discontinuité nommé disque actuateur (figure III.3). Les changements de pression qui se produisent en traversant les pales sont supposés comme étant concentrés dans ce plan, de même que pour la déflexion de l'écoulement. La vitesse tangentielle C_u ainsi que la pression statique p présentent un saut au passage du disque, tandis que les vitesses axiale et radiale varient de façon continue.

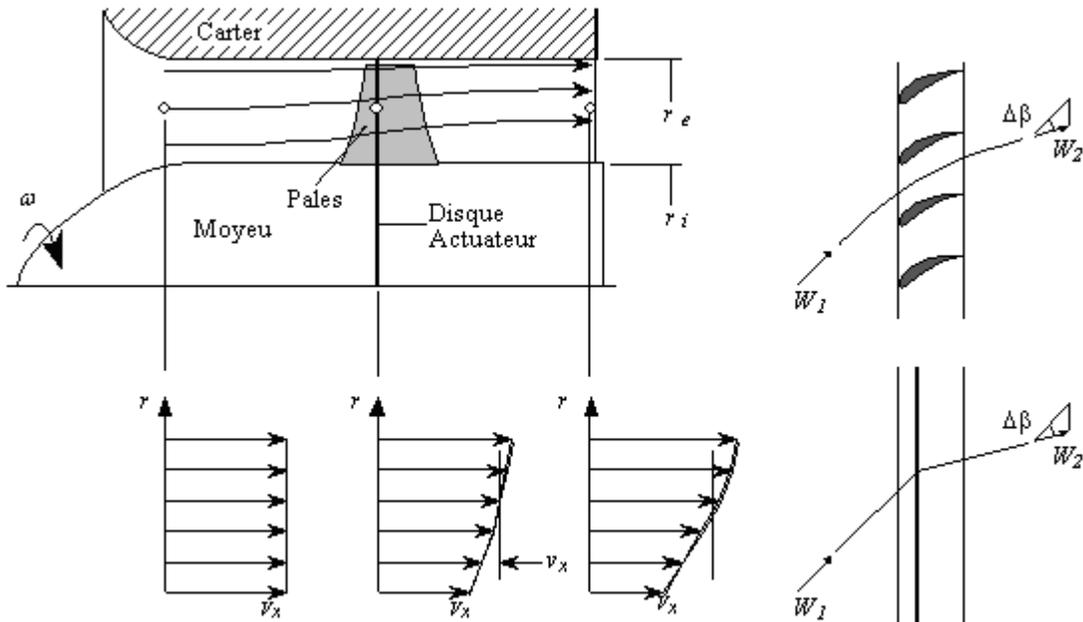


Figure III.3 : Evolution axiale des caractéristiques dans la théorie des disques actuateurs

Cette méthode peut être appliquée pour des machines axiales ou mixtes à écoulement compressible et incompressible. Les hypothèses utilisées dans cette méthode sont :

- l'écoulement est stationnaire
- l'écoulement est axisymétrique
- la vitesse radiale est faible partout
- l'écoulement est en équilibre radial à l'amont et à l'aval loin des pales
- l'évolution est adiabatique et réversible

Ces modèles peuvent être classés en deux grandes familles :

- méthode linéaire : où les perturbations dues aux pales sont supposées faibles.
- méthode non linéaire : où on a de larges perturbations.

les vitesses à l'amont et à l'aval sont décomposées en une partie constante et une perturbation produite par l'action des pales :

$$\begin{aligned} V_r(r,z) &= v_r(r,z) \\ V_\theta(r,z) &= V_{\theta\infty}(r) + v_\theta(r,z) \\ V_z(r,z) &= V_{z\infty}(r) + v_z(r,z) \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

Les termes v_r , v_θ , v_z représentant les perturbations dues au disque sont de caractère potentiel, ils s'écrivent :

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}; \quad v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

L'équation de continuité s'écrit:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \nabla^2\phi = 0 \quad (\text{III.65})$$

Cette équation peut être résolue par séparation de variables.

V.3. Ecoulements 2D

Depuis longtemps, les concepteurs ont traité l'écoulement tridimensionnel complexe dans les machines comme la superposition d'un certain nombre d'écoulements bidimensionnels. La première formalisation de cette idée a été proposée par Wu en 1952. Ceci a permis une démarche simplifiée du tracé des pales ou des techniques de sélection de profils. Wu a démontré qu'en combinant les différentes composantes des équations dynamiques qui régissent l'écoulement, on

peut obtenir des systèmes d'équations pour les deux types de surfaces définies en figure III.4. Cette décomposition est à l'origine de deux types d'écoulements : l'écoulement "méridien" et l'écoulement "aube à aube". C'est ainsi que ces deux types des surfaces S_1 et S_2 sont appelées, respectivement, surfaces aube à aube et surfaces méridiennes. On peut définir un nombre arbitraire de surfaces de chaque type, mais

Les méthodes les plus utilisées considèrent une seule surface méridienne moyenne.

Cette simplification équivaut à négliger les différences induites par la proximité des pales sur les surfaces aube à aube. Néanmoins, la méthode proposée par Hirsch et Warzee prend en compte ces différences par les moyennes azimutales des équations dynamiques.

L'écoulement qui se développe sur chaque surface S_1 peut être étudié à l'aide de la transformation conforme qui transforme le système de coordonnées (m, θ) en (ξ, η) et qui permet de ramener la grille circulaire à la grille plane de la figure III.5.

L'écoulement tridimensionnel complet peut donc être modélisé par une série de grilles planes bidimensionnelles, chacune correspondant à une surface S_1 axisymétrique, plus ou moins régulièrement distribuées dans l'espace annulaire. Normalement, six à dix sections seront suffisantes pour représenter correctement l'écoulement dans une machine classique.

L'avantage de cette approche simplifiée réside dans le fait que l'équation de l'écoulement peut être appliquée à chaque section de façon indépendante pour déterminer les triangles de vitesse à l'entrée et à la sortie de chaque section. La tâche du concepteur consiste à sélectionner la forme du profil pour obtenir la déflection requise entre l'angle β_1 à l'entrée et l'angle β_2 à la sortie tout en limitant les pertes d'énergie par frottement.

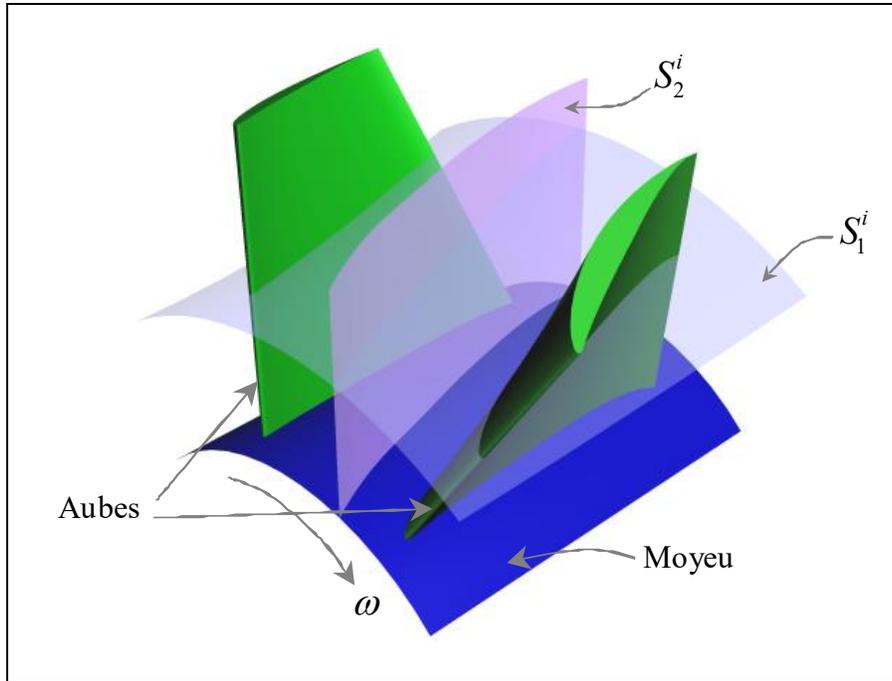


Figure III.4 : Surfaces de courant au sein d'une turbomachine

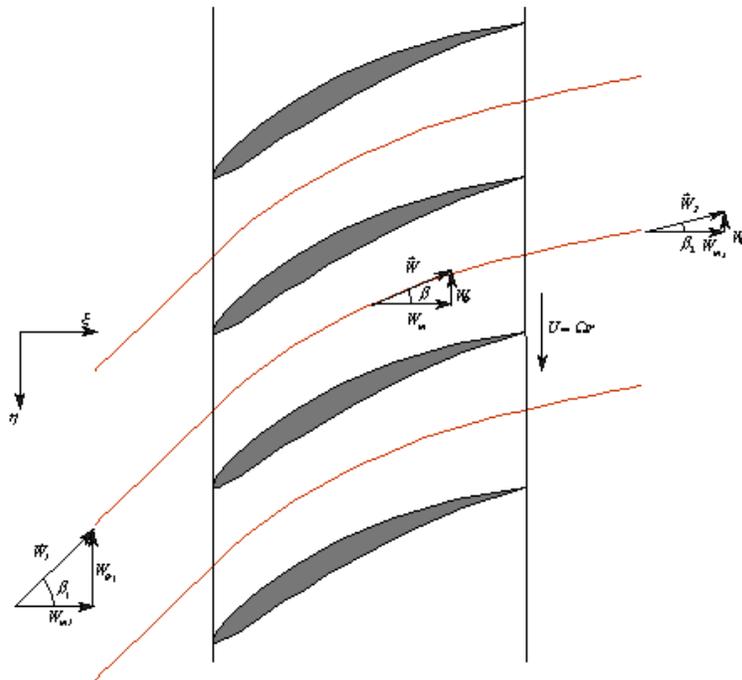


Figure III.4 : Définition des paramètres de l'écoulement dans le plan aube à aube transformé

La mécanique des fluides des aubages peut être considérée sous deux aspects :

-
- l'aspect canaux, où on considère que le fluide est guidé par des parois qui délimitent un canal ; cette conception est plus particulièrement applicable aux machines centrifuges.
 - l'aspect profils, où on considère que le fluide s'écoule autour de profils ressemblant à de petites ailes d'avion et cette conception est plus particulièrement recommandée dans l'étude des machines axiales.

Si on veut arriver à un prix de revient faible associé à un bon rendement, tout aubage doit être examiné successivement sous les deux aspects.

L'utilité du calcul de l'écoulement aube à aube s'explique par le fait que :

- Il s'agit souvent d'une étape utile avant l'élaboration de cas plus compliqués, en particulier au niveau des méthodes de calcul.
- Les calculs 2D sont souvent suffisants pour analyser l'influence de certains paramètres comme par exemple le pas relatif, la répartition de la courbure du squelette, la répartition de la loi d'épaisseur etc....
- La conception de profils de base est souvent effectuée en 2D.

V.3.1. Ecoulement aube à aube

L'utilité de cette approche s'explique par le fait que :

- il s'agit souvent d'une étape utile avant l'élaboration de cas plus compliqués, en particulier au niveau des méthodes de calcul ;
- les calculs 2D sont souvent suffisants pour analyser l'influence de certains paramètres comme par exemple le pas relatif, la répartition de la courbure du squelette, la répartition de la loi d'épaisseur, etc... ;
- la conception de profils de base est souvent effectuée en 2D.

V.3.1.1. Méthodes directes

Les caractéristiques de ces méthodes sont :

- Elles déterminent toutes les caractéristiques de l'écoulement pour une roue à géométrie donnée.
- Elles utilisent des équations discrétisées, nécessitant un maillage approprié du domaine de calcul. Cela peut entraîner, a priori, un manque de précision dans les régions où les gradients de vitesse sont très élevés et la densité du maillage insuffisante.
- La périodicité de l'écoulement relatif qui permet le calcul de l'écoulement dans un seul canal inter-aubes (figure III.5).

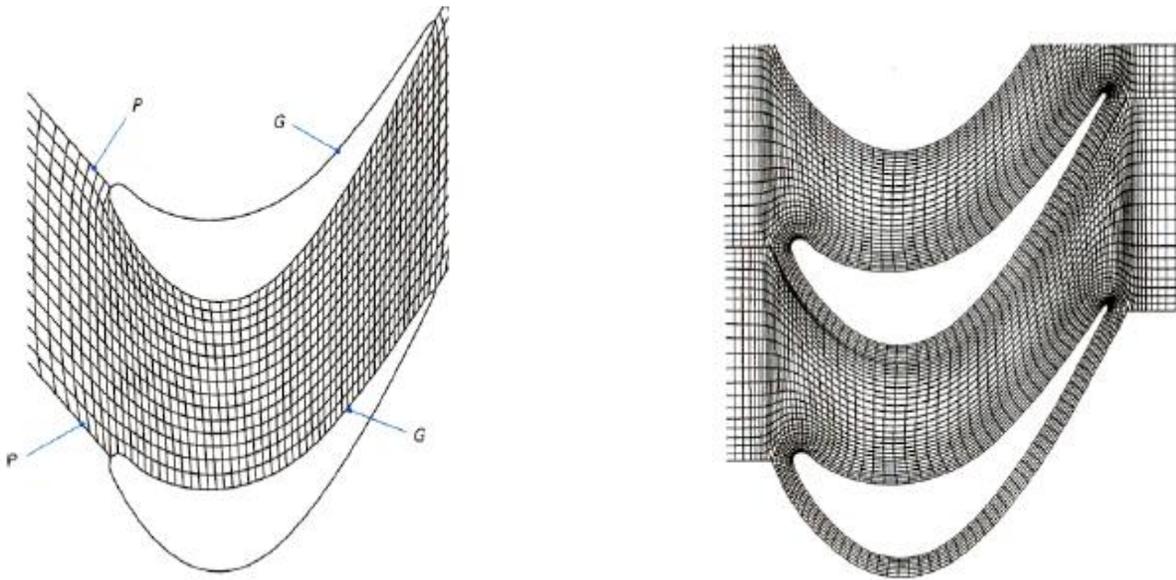


Figure III.5 : Maillages de types mono et multidomaine

- G : la condition de glissement imposée sur l'extrados d'une aube et l'intrados de l'aube adjacente qui forment le canal.
- P : la condition de périodicité qui est appliquée sur les frontières supérieure et inférieure en amont et en aval des aubes.

Les limites amont et aval du domaine de calcul sont à distance finie de la roue mais prises suffisamment éloignées pour qu'il n'y ait plus d'influence des aubes sur l'écoulement local, en particulier où le gradient de pression statique est pratiquement nul.

Les conditions aérodynamiques imposées sur les limites amont et aval du domaine dépendent à la fois de la nature de l'écoulement et de la méthode de calcul choisie.

Il existe des méthodes de calcul très précises (en particulier bord d'attaque et bord de fuite), telles que la méthode de singularités ; la méthode matricielle, la méthode par éléments finis et la méthode instationnaire.

V.3.1.2. Méthodes inverses

Les caractéristiques de ces méthodes sont :

- Elles sont destinées à la restitution de la géométrie d'une roue correspondant à une répartition de vitesse ou de pression souhaitée sur le profil.
- Elles sont utilisées pour l'optimisation de certaines performances
- Le calcul conduit fréquemment à des formes d'aubes totalement irréalistes. En réalité, il est judicieux de s'inspirer des résultats d'un calcul direct appliqué à une géométrie réaliste et de considérer la méthode inverse comme une méthode corrective.

On trouve la méthode hodographique et la méthode pseudo-instationnaire

V.3.1.3. Couches limites et notion de transition

Dans le cadre du problème direct, on sépare généralement l'écoulement en deux zones :

- la zone saine où l'écoulement peut être considéré comme proche d'un écoulement en fluide parfait (les effets visqueux sont négligeables).
- la zone visqueuse située au voisinage immédiat des parois : aubages, enveloppes : moyeu et carter extérieur, où les effets dus aux gradients de vitesses sont importants

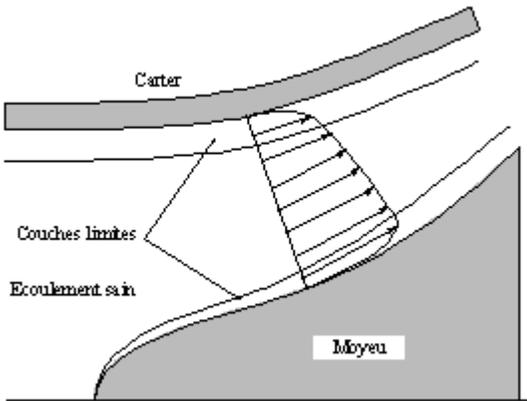


Figure III.6: Modèle de l'écoulement à trois zones

Dans la zone visqueuse, ce sont les équations Navier-Stokes qui régissent l'écoulement, souvent sous une forme simplifiée adaptée au rapport des échelles longitudinales et transversales qui caractérisent les couches limites.

Dans la zone saine, on peut utiliser les équations d'Euler avec un important gain en simplicité et temps de calcul.

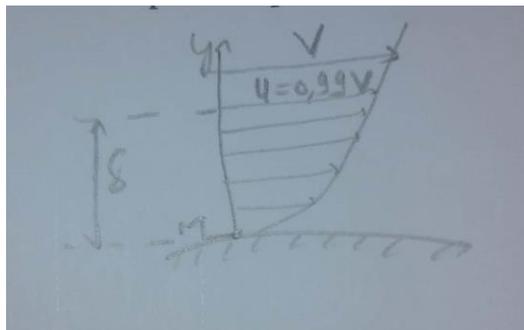
L'approche fonction de courant peut également être utilisée dans l'analyse des écoulements visqueux.

Dans la couche limite, les gradients de vitesse sont grands donc aussi les forces de frottement.

Loin de la paroi, les gradients de vitesse sont faibles donc aussi les forces de frottement.

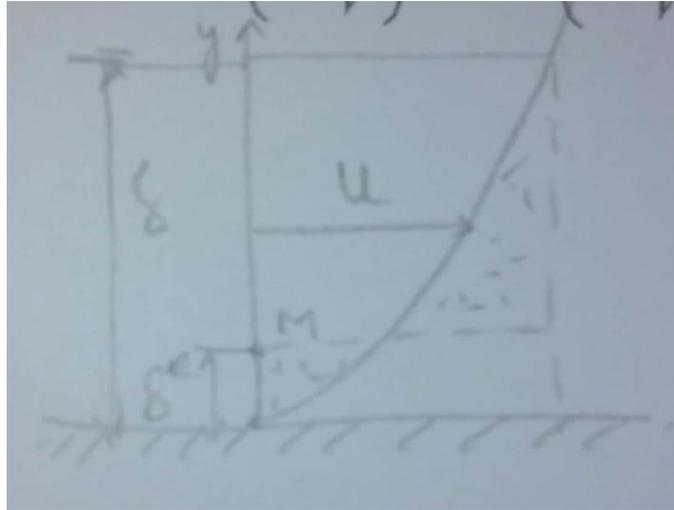
L'épaisseur de la couche limite est définie par :

- δ qui est la distance pour laquelle la vitesse u est égale à V à 1% près.



- δ^* qui est l'épaisseur de déplacement ou épaisseur de refoulement. Pour un fluide incompressible elle s'écrit :

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy \quad (\text{III.66})$$



- θ^* qui est la quantité de mouvement. Pour un fluide incompressible elle s'écrit:

$$\theta^* = \int_0^\infty \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy = \int_0^\delta \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy \quad (\text{III.67})$$

Un paramètre fréquemment utilisé est le facteur de forme de la couche limite :

$$H^* = \frac{\delta^*}{\theta^*} \quad (\text{III.68})$$

La couche limite est d'abord laminaire puis apparaît une zone de transition au delà de laquelle l'écoulement devient turbulent \rightarrow décollement.

EXERCICES

Exercice N °1 :

Les caractéristiques géométriques d'une pompe centrifuge sont : $R_1 = 0.074$ m ; $R_2 = 0.17$ m ; $b_1 = 0.048$ m et $b_2 = 0.022$ m. Déterminez les triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue pour obtenir le point de fonctionnement suivant : $H = 30$ m ; $Q_v = 284$ m³/h et $N = 1450$ tr/mn.

On prend $C_{u1} = 0$.

Exercice N °2 :

Soit un étage d'un compresseur axial de rayon moyen $R_m = 0.275$ m, la vitesse de rotation $N = 7000$ tr/mn. Les comportements à la sortie et à l'entrée du rotor sont reliés par : $C_{u2} = 2.5 C_{u1}$. L'angle d'écoulement absolu à l'entrée du rotor est $\alpha_1 = 55^\circ$. La pression et la température à l'entrée de l'étage sont $T_1 = 300$ K et $p_1 = 2.2$ atm. Le travail effectué par le rotor sur le fluide est de 8000 J / kg.

1. Tracez les triangles de vitesse à l'entrée et à la sortie de la roue
2. Calculez la température et la pression à la sortie du rotor.

Exercice N °3 :

Les caractéristiques géométriques d'une roue de pompe centrifuge sont données par :

$$b_1 = 15 \text{ mm} ; b_2 = 10 \text{ mm} ; r_2 = 180 \text{ mm} ; \beta_1 = 25^\circ \text{ et } \beta_2 = 20^\circ.$$

A la vitesse de rotation de 1450 tr/mn, la caractéristique de la pompe peut être assimilée par l'équation suivante : $H_n = 34,25 + 846Q_v - 16420Q_v^2$

On suppose une entrée radiale et on néglige les pertes par fuite.

1. Déterminez l'équation de la caractéristique théorique en fonction du débit volumique à la vitesse 1450 tr/mn.
2. Déterminez le débit d'adaptation.
3. Calculez les éléments des triangles des vitesses et le rayon d'entrée de la roue

-
4. Calculez l'accroissement de pression statique à travers la roue
 5. Calculez le rendement global et la puissance absorbée si le rendement mécanique est de 0,94.

Exercice N °4 :

On se propose d'étudier une pompe centrifuge dont les caractéristiques sont:

$r_1 = 50 \text{ mm}$; $r_2 = 150 \text{ mm}$; $b_1 = 20 \text{ mm}$; $b_2 = 10 \text{ mm}$; $\beta_1 = 45^\circ$ et $\beta_2 = 30^\circ$.

Cette pompe puise de l'eau à partir d'un puit et la refoule vers un réservoir, la différence d'altitude des deux plans est de 12 m. la conduite d'aspiration et de refoulement a une longueur équivalente de 66 m et elle est définie par une perte de charge linéique de 0,03 m/m.

La pompe est définie par un rendement global de 0,75 et on néglige les pertes mécaniques et par fuite.

1. Calculez la hauteur nette et la hauteur théorique de la pompe.
2. Déterminez la cinématique de l'écoulement à l'intérieur de la roue.
3. Calculez la vitesse de rotation, le débit et la puissance absorbée par la pompe.

On suppose le régime adapté et l'entrée du fluide radiale.

Exercice N °5 :

Un ventilateur centrifuge opère avec les caractéristiques suivantes :

$$Q_v = 4.25 \text{ m}^3/\text{s} ; N = 1750 \text{ tr/m} \text{ et } H = 0.153 \text{ m.}$$

On désire construire un ventilateur plus grand avec la même tête ; le même rendement mais avec une vitesse de rotation $N = 1440 \text{ tr/mn}$. En supposant qu'on peut négliger les effets de Reynolds quel sera le débit volumique du grand ventilateur.

Exercice N °6 :

On réalise une maquette au 1/3 d'une pompe centrifuge. Cette maquette a une roue de diamètre D , tourne à 3000 tr / mn et véhicule un débit q_v d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité μ . On mesure une

différence de pression $\Delta p = 3$ bars entre l'entrée et la sortie de cette maquette. Le prototype transporte le même fluide.

1. Quelle sera l'élévation de pression fournie par le prototype s'il y'a similitude complète
2. Quelle sera alors la vitesse de rotation du prototype.

Exercice N °7:

Une aile de 300 mm de corde et 1,5 m d'envergure a été testée dans un canal hydrodynamique dans lequel l'écoulement de l'air se fait à incidence nulle et une vitesse de 36 m / s. La force résultante mesurée est de 310 N inclinée d'un angle de 4° par rapport à l'axe vertical (axe de portance). La masse volumique de l'air est de $1,25 \text{ kg/m}^3$.

Calculez les coefficients de portance et de traînée.

Exercice N °8:

On considère un écoulement supersonique qui se développe sur un profil en biseau de demi-angle au sommet de 5° , de corde $c = 2$ m, à incidence nulle et attaqué par la pointe (figure 1). Le nombre de Mach en amont du profil est $M_\infty = 2$. La pression de l'écoulement incident et sa masse volumique sont respectivement $p_\infty = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $\rho_\infty = 1,23 \text{ kg.m}^{-3}$. Les répartitions de pression sur les deux faces du profil sont égales :

$$p_s = p_i = 1,31 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

et la pression exercée à l'arrière du profil vaut p_∞ . Le cisaillement sur les deux faces est constant :

$$\tau_s = \tau_i = 431 \cdot \text{s}^{-0.2} \text{ Pa.}$$

Calculez le coefficient de traînée de ce profil.

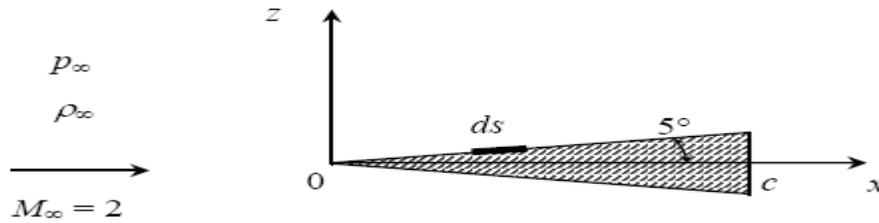


Figure 1: Profil en biseau à incidence nulle

Exercice N °9:

On considère un profil d'aile NACA 2412 avec une corde de 0.64 m dans un écoulement d'air aux conditions standards ($\rho_\infty = 1,23 \text{ kg / m}^3$; $\mu_\infty = 1,789 \cdot 10^{-5} \text{ kg / m.s}$). La vitesse à l'infini amont est de 70 m / s. La portance par unité d'envergure est de 1254 N / m. En s'aidant des graphes (figures 1 et 2) :

1. Calculez l'angle d'attaque.
2. Calculez la traînée par unité d'envergure.

Exercice N °10:

La distribution de pression autour d'un profil à incidence nulle est exprimée comme suite :

- Surface supérieure : $C_p = -0.8$ du bord d'attaque jusqu'à 60% de la corde puis il augmente linéairement jusqu'à la valeur de $+0.1$ au bord de fuite.
- Surface inférieure : $C_p = -0.4$ du bord d'attaque jusqu'à 60% de la corde puis il augmente linéairement jusqu'à la valeur de $+0.1$ au bord de fuite.

Les forces de viscosité sont négligées.

-
1. Trouvez la distribution du coefficient de pression autour de la section du profil.
 2. Calculez le coefficient de portance.

Exercice N °11:

On considère un écoulement incompressible autour d'une aile de dimension caractéristique L_1 qui se déplace dans l'air à la vitesse $U_{\infty,1} = 42 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour étudier l'écoulement autour de cette aile, on réalise des essais en canal hydrodynamique.

1. Déterminer la dimension caractéristique de la maquette pour que l'écoulement d'eau de vitesse $U_{\infty,2} = 2,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans le canal hydrodynamique soit en similitude réduite au nombre de Reynolds par rapport à l'écoulement d'air autour de l'aile réelle. On se place, aussi bien dans l'air que dans l'eau, dans les conditions de l'atmosphère standard (101 325 Pa et 15 °C).
2. Déterminer la force qui s'exerce sur la maquette de l'aile dans l'eau pour avoir une similitude complète, c'est-à-dire similitude du nombre de Reynolds et du coefficient d'effort.

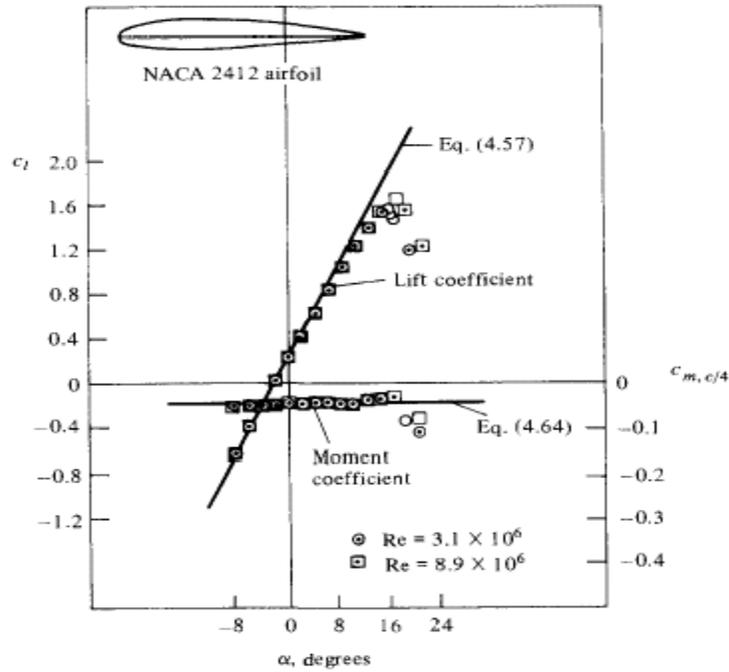


Fig 1 : Experimental data for lift coefficient and moment coefficient about the quarter-chord point for an NACA 2412 airfoil

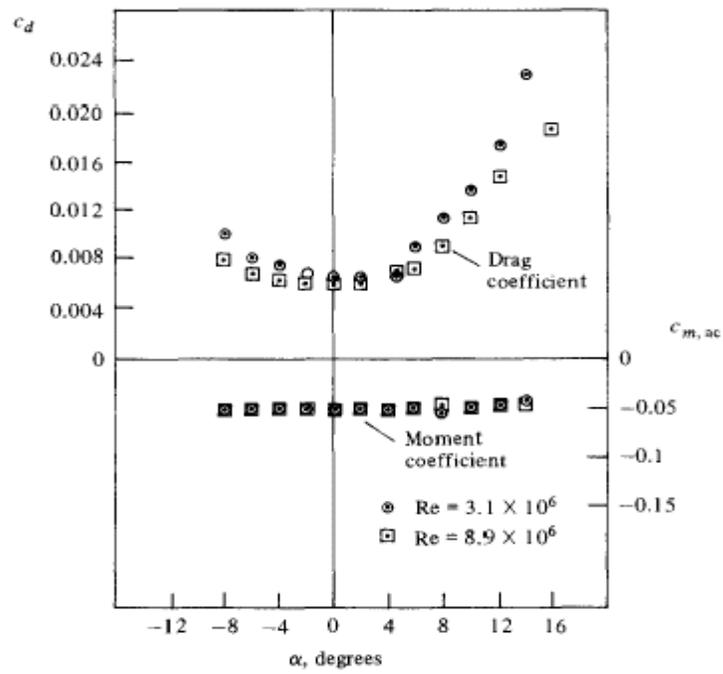


Fig 2 : Experimental data for profile drag coefficient and moment coefficient about the aerodynamic center

Références bibliographiques

- [1] **E. José**, *Modélisation en Régime Nominal et Partiel de l'Écoulement Méridien dans les Turbomachines Axiales et Hélicocentrifuges*, Thèse de Doctorat, Spécialité Mécanique, Laboratoire d'Energétique et Mécanique des Fluides Internes, Arts et Métiers [ENSAM], 2002.
- [2] **F. Brahim**, *Simulation Numérique de l'Écoulement Instationnaire dans une Grille d'Aubes de Compression en Mouvement Vibratoire*, Mémoire de magister en énergétique, Département Energétique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université M'Hamed Bougara, Boumerdes, 2003.
- [3] **C. Farhat, M. Lesoinne et P. Letallec**, *Load and Motion Transfer Algorithms for Fluid/Structure Interaction Problems With Non-Matching Discrete Interfaces: Momentum and Energy Conservation, Optimal Discretization and Application to Aeroelasticity*, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 157: pp. 95-114, 1998.
- [4] **Ch. Hirsch**, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Volume 1: *Fundamentals of Numerical Discretisation*, Volume 2: *Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, A Wiley-Interscience Publication, 2000.
- [5] **C.H. Wu**, *A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachine in Radial, Axial and Mixed Flow Types*, NACA TN 2604, 1952.
- [6] **C. Hirsch et G. Warzee**, *A Finit Element Method for Through Flow Calculations in Turbomachines*, *J. Fluids Eng.*, Vol. 98, pp. 403-421, 1976.
- [7] **M. Pluiose**, *Génie Energétique Ingénierie des Turbomachines Circuits, Aubages, Vibrations, Effets Instationnaires...*, Ellipses Edition Marketing S.A., 2003.
- [8] **I. Trebinjac**, *Mesure et Analyse des Ecoulements Tridimensionnels et Instationnaires dans les Turbomachines à Haute Vitesse*, Habilitation à diriger des recherches, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [9] **Ch. Hirsch**, *Développements Récents des Méthodes de Calculs dans les Turbomachines*, *Revue Française de Mécanique* N° 4, pp. 5-10, 1988.
- [10] **P.S. Murthy, V.S. Holla et H. Kamath**, *Unsteady Navier-Stokes Solutions for a NACA 0012 Airfoil*, *J. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 186: pp. 85-99, 2000.
- [11] **N. Gourdain**, *Simulation Numérique des Phénomènes de Décollement Tournant dans les Compresseurs Axiaux*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon, Spécialité : Mécanique, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique - UMR 5509, 2005.
- [12] **G. Meauze**, *Turbomachines : Calcul des Ecoulements Compressibles*, Techniques de l'ingénieur B 4181, pp. 1-20.

[13] **X. Ottavy**, *Cours de Turbomachine à Fluide Compressible*, ENSHMG 3^{ème} année, CNRS UMR 5509, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, Année 2006-2007.

[14] **J. Neubauer**, *Aérodynamique 3-D Instationnaire des Turbomachines Axiales Multiétages*, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris 6, Spécialité : Mécanique, 2004.

[15] **D. Fedala**, *Simulation Numérique des Ecoulements Internes dans les Turbomachines, CAO-DAO des Turbomachines, Initiation à la CFD, Manuel de Maillage sous Gambit et de Simulation sous Fluent Applications*, Cours, Laboratoire d'Energétique et de Mécanique des Fluides Interne ENSAM, CER de Paris, 2007.