Université M'hamed Bougara de Boumerdes
Faculté des Science
Département de Mathématiques

Dr. YASSINE ADJABI

Équations Différentielles Ordinaires

Polycopié de cours

Notes de cours avec tests et exercices corrigés

au profit des étudiants en Mathématiques, Licence MI, ST et SM

(Polycopié de 208 pages)

2022 - 2023

Table des matières

PRÉFACE

Ce polycopié est intitulé : « *Équations différentielles ordinaires. Notes de cours avec tests et exercices corrigés* » . Il regroupe les notes de cours du module équations différentielles ordinaires du programme du Licence ST et SM. Il englobe le module équations différentielles ordinaires du programme du Licence de mathématiques .

J'ai donné ce cours à l'université de M'hamed Bougara Boumerdes en deuxième et troixième années de licence durant les années universitaires 2007-12, 2013-16, 2019-22.

Le but premier visé est de fournir aux étudiants une référence en français qui couvre tous les sujets du cours.

J'ai inclus dans le polycopié les principales définitions et les résultats fondamentaux, illustrés par des exemples. Il continant 134 tests avec 73 exercices corrigés. En s'appuyant essentiellement sur les outils de base de l'Analyse.

Ce polycopié comprend les chapitres suivants :

❒ Système d'équations linéaires d'ordre 1.

❒ Généralités sur les équations différentielles ordinaires.

❒ Équations différentielles linéaires du premier ordre.

❒ Équations différentielles linéaires du second ordre.

❒ Équations différentielles linéaires d'ordre n.

❒ Système d'équations non linéaires d'ordre 1.

❒ Équations différentielles non linéaires du premier ordre.

❒ Équations différentielles non linéaires du deuxième ordre.

❒ Sur l'étude qualitatives.

❒ Solutions des exercices.

Ce polycopié n'est qu'une première introduction à la théorie des équations différentielles ordinaires. Ce cours ne contient pratiquement rien de théorique ; seulement des méthodes de calcul classiques, pour les équations différentielles les plus simples. Quelle que soit votre orientation scientifique, vous rencontrerez un jour des équations différentielles. Les équations différentielles ordinaires et les systèmes différentiels représentent un sujet d'étude d'une grande importance à la fois en mathématiques pures et appliquées.

Le but du cours est une ouverture vers des techniques mathématiques appliquées à des problèmes issus des mathématiques, de la chimie ou de la physique ; voilà donc une raison d'assimiler la culture de base que vous donne ce cours. Auparavant, il serait bon de réviser les techniques de calcul des primitives.

Les principales références pour le cours sont :

– S. D. Chatterji, Cours d'analyse, vol. 1, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1997.

– L. Barreira. Analyse complexe et équations différentielles. 2011.

On pourra aussi utilement consulter :

1. J.H. Hubbard and B.H. West. Equations différentielles et systèmes dynamiques. Enseignement des mathématiques. Cassini, 1999.

2. J.P. Demailly. Analyse numérique et équations différentielles. Collection Grenoble sciences. EDP sciences, 2006.

3. V. Arnold. Equations différentielles ordinaires. MIR, 1988.

4. M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko . Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. MIR, 1978. 5. L. Pontriaguine, Equations diff´erentielles ordinaires. Editions Mir. Moscou, 1975.

6. J.L. Pac, Systèmes dynamiques. Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2012. 7. D. Azé, C. Guillaume, J.B. Hiriart-Urruty. Calcul différentiel et équations différentielles. 2012. L'étude préliminaire sur les équations différentielles ordinaires en dimension un est trés classique, on peut se reporter au début du livre [1], qui contient beaucoup d'exemples, souvent éclairants.

À la fin du cours, l'étudiant doit avoir une bonne compréhension de la théorie des équations différentielles ordinaires et devrait être en mesure d'appliquer ces connaissances pour :

❒ Résoudre les exercices dans une variété de contextes.

❒ Étudier les propriétés élémentaires solutions des équations différentielles ordinaires nécessaires pour suivre un cours du calcul différentiel niveau Master, présenter l'agrégation de mathématiques ou comprendre certains phénomènes physiques.

❒ Forme d'enseignement.

Je désire exprimer ma gratitude à mes collègues qui ont enseigné le cours « Fonctions d'une variable complexe » avec moi et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à cet ouvrage et, en particulier, tous les étudiants qui ont permis par leurs remarques et leurs questions de multiples améliorations de notre style d'enseignement.

CHAPITRE

1 Système d'équations linéaires d'ordre 1

Contents

1.1 Généralités

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue n'est plus un nombre, mais une fonction. Par exemple, résoudre l'équation différentielle

$$X' = X(t), \tag{1.1}$$

consiste à rechercher toutes les fonctions égales à leur déerivée.

La théorie des équations différentielles ordinaires repose beaucoup sur le calcul différentiel (en particulier la notion de différentielle ; mais on utilisera aussi l'inégalite des accroissements finis, et le théoreme d'inversion locale). Les notions de topologie sont fondamentales (espaces métriques compacts, complets, espaces fonctionnels). L'études des équations différentielles lineaires repose sur l'algebre linéaire. Il n'est pas toujours évident de déterminer la solution générale d'une équation différentielle. On peut alors être amené à représenter graphiquement (à l'aide d'un ordinateur) ces solutions par des approximations successives.

On appelle système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 tout système de la forme

$$\left\{\begin{array}{c} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \\ ..... \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n \end{array}\right. \tag{1.2}$$

dans lequel les a_{ij} et les b_i sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une solution de ce système sur un intervalle J inclus dans I est un $n-$ uplet $(x_1, ..., x_n)$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans $\mathbb{K}$, vérifiant, pour tout t dans J,

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)\,x_1(t) + a_{12}(t)\,x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)\,x_1(t) + a_{22}(t)\,x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n(t) + b_2(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)\,x_1(t) + a_{n2}(t)\,x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \tag{1.3}$$

Il est plus simple de présenter un tel système sous forme matricielle, pour tout t dans I, le système $(S1)$ s'écrit

$$X' = A(t)\,X + B(t) \tag{1.4}$$

où $A(t)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les nombres $a_{ij}(t)$, et $B(t)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les $b_i(t)$.

Sous cette forme, une solution du système est une fonction X, $t \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ de J dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices colonnes, de classe C^1 sur J, et vérifiant $X' = A(t)\,X + B(t)$

Test 1.1. On considère le système

$$X' = A(t)\,X, \tag{Ξ_0}$$

défini par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 4/t & -4/t^2 \\ 1 & 1/t \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ pour } t \text{ de } I = \mathbb{R}_+^*$$

Trouver une solution $X_1 : t \longmapsto (x_1(t), x_2(t))$ de (Ξ_0) telle que $x_2(t)$ soit de la forme t^p, où $p \in \mathbb{N}^*$; puis une solution X_2 pour laquelle la deuxième composante soit de la forme $t^q \ln t$, où $q \in \mathbb{N}^*$.

Solution.

Le système (Ξ_0) s'écrit

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{4}{t}x_1(t) - \frac{4}{t^2}x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + \frac{1}{t}x_2(t) \end{cases}$$

Soit p dans $\mathbb{N}^*$. En remplaçant $x_2(t)$ par t^p, la deuxième équation donne

$$x_1(t) = (p-1)\,t^{p-1}.$$

En remplaçant $x_1(t)$ par cette expression dans la première équation, on obitent

$$(p-1)^2\,t^{p-2} = 4(p-1)\,t^{p-2} - 4t^{p-2},$$

d'où

$$(p-1)^2 = 4(p-1) - 4$$

et donc $p = 3$. Réciproquement, on vérifie que

$$X_1 : t \longmapsto \left(2t^2, t^3\right)$$

est bien solution de (Ξ_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ Des calculs analogues montrent que

$$X_2 : t \longmapsto \left(2\ln t + 1/t^2, t^3 \ln t\right)$$

est aussi solution de (Ξ_0) .

1.2 Problème de Cauchy

Problème de Cauchy pour le système $(S1)$ tout problème de la forme

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

où t_0 est un réel quelconque de I, et X_0 un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Une solution du problème (1.5) sur un intervalle J inclus dans I et contenant t_0 est alors une solution X du système $S(1)$, vérifiant de plus la condition $X(t_0) = X_0$. Cette dernière conditions sera en général appelée condition de Cauchy, ou condition initiale.

Théorème 1.1. *Soit* X *une fonction continue d'un intervalle* J *et contenant* t_0, *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$. *Alors* X *est solution sur* J *du problème de Cauchy* (P) *si et seulemnt si elle vérifie*

$$\forall t \in J,\ X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A(u) X(u)\, du + \int_{t_0}^{t} B(u)\, du.$$

1.3 Le théorème de Cauchy- Lipschitz

On va maintenant établir le résultat fondamental sur les systèmes du premier ordre.

Théorème 1.2. *(de Cauchy- Lipschitz, cas linéaire) Soit* A *et* B *deux fonctions continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$, *à valeurs respectivement dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathbb{K}^n$. *Alors, pour tout choix de* t_0 *dans* I *et de* X_0 *dans* $\mathbb{K}^n$, *le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} X' = A(t) X + B(t) \\ X(t_0) = X_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

admet une et une seule solution X *sur l'intervalle* I *; de plus, toute solution sur* J *contenant* t_0 *et inclus dans* I *est en fait la restriction à* J *de cette solution* X.

1.4 Système homogène

On dit qu'un système différentiel est homogène s'il est de la forme (1.5), où A est toujours supposée continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1.3. *Soit* A *une fonction continue d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors l'ensemble* S_0 *des solutions sur* I *du système homogène* $(S0)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$.

Solution. En effet, la fonction nulle est clairement solution de $(S0)$. De plus, si X_1 et X_2 sont deux solutions de $(S0)$ sur I, et si λ et μ sont dans $\mathbb{K}$, alors

$$[\lambda X_1 + \mu X_2]' = \lambda X_1' + \mu X_2' = \lambda A X_1 + \mu A X_2 = A\,[\lambda X_1 + \mu X_2]\,,$$

donc $\lambda X_1 + \mu X_2$ appartient aussi à S_0.

Test 1.2. On considère le système

$$X' = A\,(t)\,X, \qquad (\Xi_0)$$

défini par :

$$A\,(t) = \begin{pmatrix} 4/t & -4/t^2 \\ 1 & 1/t \end{pmatrix} \text{ et } X\,(t) = \begin{pmatrix} x_1\,(t) \\ x_2\,(t) \end{pmatrix} \text{ pour } t \text{ de } I = \mathbb{R}_+^*$$

1. En utilisant le théorème de Cauchy- Lipschitz, montrer que toutes les solutions de (Ξ_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme $\lambda X_1 + \mu X_2$ pour tout couple (λ, μ) de réels.

2. Vérifier à l'aide du wornskien que, dans la première question $(1.)$, le couple (X_1, X_2) de solutions trouvé est un système fondamental pour (Ξ_0) .

Solution.

1. Soit X une solution de (Ξ_0) ; on pose $X\,(1) = (a, b)$. Soit d'autre part (λ, μ) un couple de réels, on a alors

$$(\lambda X_1 + \mu X_2)\,(1) = (a, b)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = a, \\ \lambda = b. \end{cases} \iff \lambda = b \text{ et } \mu = a - 2b.$$

avec ces valeurs les fonctions X et $\lambda X_1 + \mu X_2$ sont donc deux solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = A(t) X \\ X(1) = (a, b), \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a bien $X = \lambda X_1 + \mu X_2$.

2. En notant W wronskien de (X_1, X_2), on a

$$W(1) = -1 \neq 0$$

ce qui suffit à garantir le résultat. Par ailleurs, on vérifie que W, qui est ici la fonction $t \longmapsto -t^5$, ne s'annule effectivement pas sur, $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 1.1. *Une famille* $(X_1, ..., X_n)$ *de solutions du système homogène* $(S0)$ *formant une base de l'espace de ses solutions est appelée un système fondamental de solutions pour* $(S0)$.

Test 1.3. Soit

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 8x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

En étudiant les fonctions $x_1(t) + 2x_2(t)$ et $x_1(t) = -2x_2(t)$, déterminer un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ pour $(S0)$.

Définition 1.2. *Soit* $(X_1, ..., X_n)$ *un* n*-uplet quelconque de solutions de* $(S0)$. *La fonction* $W : t \longmapsto \det(X_1(t), ..., X_n(t))$ *est appelée le wronskien de la famille* $(X_1, ..., X_n)$.

Théorème 1.4. *Soit* $(X_1, ..., X_n)$ *un* n*-uplet quelconque de solutions de* $(S0)$ *. Alors,*

soit $W(t) = 0$ *pour tout* t *de* I*, auquel cas la famille* $(X_1, ..., X_n)$ *est liée.*

soit $W(t) \neq 0$ *pour tout* t *de* I*, auquel cas la famille* $(X_1, ..., X_n)$ *est libre, donc est un système fondamontal de solutions pour* $(S0)$ *.*

1.5 Système complet

Théorème 1.5. *(Principe de superposition)Soit* A *une fonction d'un intervalle* I *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* B_1 *et* B_2 *deux fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}^n$*. Si* X_1 *est une solution sur* I *du système* $(S2)$ *:*$X' = A(t)X + B_1(t)$ *et* X_2 *est une solution sur* I *du système* $(S3)$ *:*$X' = A(t)X + B_2(t)$*, et si* λ *et* μ *sont dans* $\mathbb{K}$ *, alors* $\lambda X_1 + \mu X_2$ *est solution sur* I *du système*

$$X' = A(t)X(t) + \lambda B_1(t) + \mu B_2(t).$$

Solution. En effet, on a

$$Y' = \lambda X_1' + \mu X_2' = \lambda(AX_1 + B_1) + \mu(AX_2 + B_2) = Y + (\lambda B_1 + \mu B_2)$$

en posant $Y = \lambda X_1 + \mu X_2$.

1.5.1 Méthode : Variation des constantes pour unsystème d'ordre 1

Si $(S0)$ $X' = A(t)X + B(t)$ est un système différentiel à n inconnues sur un intervalle I, et si l'on connaît un système fondamental des solutions $(X_1, ..., X_n)$ pour le système homogène associé, on cherche alors les solutions de $(S1)$ sous la forme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$, où les μ_k sont des fonctions numériques de classe C^1 sur I.

En remplaçant dans le système, on obtient alors un système de n équations linéaires en les fonctions λ'_k, qui a nécessairement une et une seule solution. On primitive ensuite les fonctions obtenues pour obtenir les solutions cherchées.

Test 1.4. On considère le système $(S1)$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 8x_2 + 6t + 12 \\ x'_2 = 2x_1 + x_2 - 3t + 4 \end{cases} \tag{1.7}$$

On a vu dans le test () que $X_1,\ t \longmapsto \left(2e^{5t}, e^{5t}\right)$ et $X_2,\ t \longmapsto \left(2e^{-3t}, -e^{-3t}\right)$ forment un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ pour $(S0)$, le système homogène associé. Achever la résolution du système à l'aide de la méthode de variation des constantes.

1.6 Equations scalaires

1.6.1 Lien avec les systèmes d'ordre 1

On applle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \ldots + a_1x' + a_0x + b \tag{1.8}$$

dans laquel les a_i et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit x une solution de (??) sur un intervalle J inclus dans I. Pour tout k de $[1, n]$, on pose

$x_k = x^{(k-1)}$; on a particulier $x_1 = x$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = a_{n-1}x_n + a_{n-2}x_{n-1} + \dots + a_1x_2 + a_0x_1 + b \end{cases}$$

Autrement dit, la fonction X, de J dans I dans l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, dont les composantes sont les fonctions x_i, est solution du système $(S1) : X' = A(t)X + B(t)$, dans lequel les matrices

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ \vdots & & . & . & 0 \\ 0 & .. & . & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

(1.9)

Test 1.5. On considère le système

$$\begin{cases} x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_2' + c_1 \\ x_2'' = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_2' + c_2 \end{cases} \tag{1.10}$$

d'inconnues les fonctions x_1 et x_2, les fonctions a_i,b_j et c_k étant définies et continues sur un intervall I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Déterminer un système du premier ordre à trois inconnues dont la résolution soit équivalente à celle de $(S4)$.

1.7 Réduction de l'ordre d'une équation différentielle à 1

Une équation différentielle d'ordre n

$$F\left(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}\right) = 0$$

peut se lire aussi comme une équation du premier ordre de fonction inconnue

$$v(t) = (x_0(t), x_1(t), \cdots, x_{n-1}(t)).$$

L'équation se réécrit en effet, en notant $x_0 = x$:

$$x_1 = x_0', x_2 = x_1', \cdots, x_{n-1} = x_{n-2}', F\left(t, x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_{n-1}'\right) = 0$$

ou encore, en définissant G par

$$G(t, v_0, \cdots, v_{n-1}, w_0, \cdots, w_{n-1}) = (w_0 - v_1, \cdots, w_{n-2} - v_{n-1}, F(t, v_0, \cdots, v_{n-1}, w_{n-1}))$$

on obtient

$$G(t, v, v') = 0.$$

Si l'équation d'ordre n était sous forme normale ou résolue

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}\right)$$

l'équation équivalente d'ordre 1 le sera aussi :

$$v' = g(t, v)$$

avec $g(t, v_0, \ldots, v_{n-1}) = (v_1, \ldots, v_{n-2}, f(t, v_0, \cdots, v_{n-1}))$.

De plus, dans les deux cas (forme implicite ou forme résolue), si l'équation d'ordre n était autonome, celle d'ordre 1 le sera aussi et si l'équation était linéaire, elle le reste.

Exemple 1.1. L'équation différentielle linéaire d'ordre 2, normale et autonome $x'' = x$ se transforme en équation du premier ordre à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. La fonction inconnue de la nouvelle équation différentielle est une fonction $t \mapsto v(t) = (x(t), z(t))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et l'équation s'écrit sous forme $v' = g(v)$ avec $g(x, z) = (z, x)$. L'équation peut aussi s'écrire matriciellement comme $v' = Av$ avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Remarque 1.1. *Constatons que lorsque nous abaissons l'ordre d'une équation différentielle, nous augmentons la dimension de l'espace d'arrivée de* F *et passons nécessairement à la résolution d'un système d'équations différentielles d'ordre* 1.

Théorème 1.6. *(Principe de superposition)Soit A une fonction d'un intervalle I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B_1 et B_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}^n$. Si X_1 est une solution sur I du système $(S2)$:$X' = A(t)X + B_1(t)$ et X_2 est une solution sur I du système $(S3)$:$X' = A(t)X + B_2(t)$, et si λ et μ sont dans $\mathbb{K}$, alors $\lambda X_1 + \mu X_2$ est solution sur I du système*

$$X' = A(t)X(t) + \lambda B_1(t) + \mu B_2(t).$$

Solution. En effet, on a

$$Y' = \lambda X_1' + \mu X_2' = \lambda(AX_1 + B_1) + \mu(AX_2 + B_2) = Y + (\lambda B_1 + \mu B_2)$$

en posant $Y = \lambda X_1 + \mu X_2$.

1.8 Série d'exercices

Exercice 1.1. *Soit le système*

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2, \\ x_2' = cx_1 + dx_2. \end{cases}$$

Montrer à l'aide de l'écriture matricielle que x_1 et x_2 sont solutions d'une même équation du second ordre à coefficients constants

$$z'' + \alpha z' + \beta z = 0$$

dont l'équation caractéristique est la même que celle de la matrice du système.

Exercice 1.2. *Transformer en systèmes d'équations du premier ordre (forme $\mathrm{normale}$) le système :*

$$\begin{cases} x^{(p)} = F\left(x,\ x',...,\ x^{(p-1)},\ x,\ x',...,\ x^{(q-1)}\ ,\ t\right), \\ x^{(q)} = G\left(x,\ x',...,\ x^{(p-1)},\ x,\ x'\ ,...,\ x^{(q-1)}\ ,\ t\right). \end{cases}$$

Exercice 1.3. *Intégrer de deux façons différentes le système différentiel*

$$\begin{cases} x_1'' - x_2' + x_1 = 0, \\ \\ x_2'' + x_1' - x_2 = 0. \end{cases}$$

1. *En formant le système du premier ordre équivalent que l'intégrera ;*

2. *En combinant les deux équations avec les coefficients* 1 *et* i *et en prenant pour nouvelle fonction inconnue* $z = x + ix$.

Exercice 1.4. *Soit à résoudre l'équation différentielle*

$$(ED\ )\quad \begin{cases} x_1' = -\dfrac{t}{1+t^2}x_1 + \dfrac{1}{1+t^2}x_2, \\ x_2' = \dfrac{1}{1+t^2}x_1 + \dfrac{t}{1+t^2}x_2. \end{cases}$$

et le problème de Cauchy associé

$$(C\ )\quad \begin{cases} ED \\ \\ (x_1(t_0),\ x_2(t_0)) = (x_{10},\ x_{20}) \end{cases} \qquad \text{ou}\ \ t_0 \in \mathbb{R} \text{ et } (x_{10},\ x_{20}) \in \mathbb{R}^2.$$

1. *De quel type est l'équation différentielle* (ED) ?

2. *Déterminer les solutions* $t \longmapsto X(t) = (x_1(t),\ x_2(t))$ *de* (ED) *qui sont (des fonctions affines).*

3. *Résoudre* $(C\ )$ *lorsque* $t_0 = 1$ *et* $(x_{10},\ x_{20}) = (1,\ 1)$.

4. *On cherche à déterminer les solutions de* (ED) *de la forme*

$$t \longmapsto X(t) = (u(t),\ t.u(t) + v(t));$$

où u *et* v *sont des fonctions de la variable réelle* t.

5. *Montrer que cela conduit à une équation différentielle en* $(u,\ v)$, *notée* $(ED)_1$, *que l'on explicitera*

6. *Résoudre* $(ED)_1$ *et en déduire l'expression générale des solutions de* (ED).

Exercice 1.5. *On considére le système différentiel*

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases} \tag{1.11}$$

1. *Montrer que* x_1 *et* x_2 *satisfont la même équation différentielle du second ordre, et donner sa solution générale en fonction de* 2 *constantes arbitraires.*

2. *Les conditions initiales du système différentiel sont* $x_1(0) = x_{10}$ *et* $x_2(0) = x_{20}$. *Avec quelles conditions initiales doivent être résolues les équations différentielles du second ordre en* x_1 *et en* x_2 *?*

3. *Montrer que la solution du système différentiel peut s'écrire sous la forme*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \mathcal{R}(t) \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{R}(t)$ *est une matrice que l'on précisera.*

Exercice 1.6. *On considére le système différentiel*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Montrer que x_1 *(ou* x_2*) satisfait l'équation différentielle du* 2^{ieme} *ordre :*$P(D)x_1 = 0$*, où* P *représente le pôlynome caractéristique et* D *l'opérateur* d/dt *.*

En déduire que x_1 *peut être obtenu par résolution du sytème auxiliaire*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}' = B \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \text{ où } B = \begin{pmatrix} \mu_2 & 1 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

où μ_1 *et* μ_2 *sont les valeurs propres de* A*, et* x_3 *une variable auxiliaire.*

Résoudre le système précédent et en déduire les expressions de x_1 *(ou* x_2*) en fonction de* μ_1 *et* μ_2*.*

Exercice 1.7. *Pour les systèmes différentiels* S *suivants, déterminer les couples* (x_1, y) *de fonctions de classe* C^1 *solutions sur* R *de* S*, et déterminer celles qui vérifient les conditions initiales éventuellement données :*

$$S : \begin{cases} x_1' = -2x_1 + 4x_2 \\ x_2' = -3x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

et $x_1(0) = -x_2(0) = 1$

$$S : \begin{cases} x_1' = -2x_1 + 4x_2 + 2 \\ x_2' = -3x_1 + 5x_2 + e^t \end{cases}$$

Exercice 1.8. *Vérifier que les arcs* $x_{2\alpha}$ *de paramétrage* $(x_1(t), x_2(t))$, $t \in R$*, où* (x_1, x_2) *est solution du système différentiel*

$$S : \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad \text{avec } x_1(a = 1), \text{ et } x_2(a) = 2$$

ont tous le même support, à déterminer, qui est contenu dans une parabole.

Exercice 1.9. *Résoudre le problème différentiel suivant :*

$$S : \begin{cases} x_1' = 5x_1 + y - x_3 \\ y' = 2x_1 + 4y - 2x_3 \\ x_3' = 4x_1 - 4y + 4x_3 \end{cases} \quad \textit{avec } (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-1, 2, 0).$$

Exercice 1.10. *Montrer sans résoudre le système que les trajectoires du système différentiel :*

$$S : \begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\ x_3' = 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

sont planes

Exercice 1.11. *résoudre le système différentiel :*

$$S : \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - x_3 + t \\ x_2' = -x_1 + x_2 + -x_3 + t \\ x_3' = -x_1 - x_2 + x_3 + t \end{cases}$$

Exercice 1.12. *On considère l'équation différentielle (E) :* $(x_1 + 2x_2)x_2' = -\sqrt{1 - x_2^2}$

1°)Montrer que les trajectoires du système différentiel autonome :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dx_2} = x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_1}{dx_2} = -\sqrt{1 - x_2^2} \end{cases}$$

sont courbes intégrales de cette équation différentielle.

2°) Résoudre ce système et exprimer $x_1 enfonctiondex_2 pourcessolutions.$

CHAPITRE

2 Généralités sur les équations différentielles ordinaires

Contents

Nous introduisons quelques définitions essentielles pour la suite de ce cours.

2.1 Notion d'équation différentielle

2.1.1 Différents types d'équations différentielles

Définition 2.1. *On appelle équation différentielle ordinaire une relation entre une variable réelle indépendante* t*, une fonction inconnue* $t \mapsto x(t)$ *et ses dérivées* $x', x'', \cdots, x^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*$*. L'ordre d'une EDO est défini comme étant l'ordre de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation. Ainsi, une équation différentielle d'ordre* n *se présente sous la forme*

$$F\left(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}\right) = 0. \tag{2.1}$$

❒ La fonction F est une fonction de $n + 2$ variables.

❒ La fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ de la variable réelle t est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^k, k = 2, 3, \cdots$.

❒ On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).

Exemple 2.1. ❶ $x' + tx = e^t$ est une équation différentielle du premier ordre.

❷ $x'' + 4tx = 0$ est une équation différentielle du second ordre.

❸ $x^{(9)} - tx'' = t^2$ est une équation différentielle d'ordre 9.

Définition 2.2. *Si l'équation* $F\left(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}\right) = 0$ *est résoluble par rapport à* $x^{(n)}$*, alors l'EDO prend sa forme normale ou résolue*

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}\right).$$

Exemple 2.2. La forme normale d'une équation différentielle du premier ordre $(n = 1)$, $F(t, x, x') = 0$ s'écrit $x' = f(t, x)$. Par exemple, $x' = tx^2 + e^t$.

Remarque 2.1. *Dans le cas où une équation différentielle n'est pas résoluble par rapport à $x^{(n)}$, elle est dite implicite.*

Exemple 2.3. L'équation différentielle $x' + e^{x'} = x + t$ ne peut pas se mettre sous forme résolue.

Définition 2.3. *Une équation différentielle autonome est un cas particulier important des équations différentielles où la variable t n'apparaît pas dans l'équation. C'est une équation de la forme*

$$F\left(x, x', x'', \cdots, x^{(n)}\right) = 0.$$

Il s'agit du cas où la fonction F ne dépend pas explicitement de t.

Exemple 2.4. L'équation $x' = f(x) = x^2 + e^x$ est une équation différentielle autonome du premier ordre.

2.1.2 Équations différentielles linéaires

Donnons maintenant une classification par linéarité.

Définition 2.4. *On appelle équation différentielle linéaire toute équation de la forme :*

$$a_n(t)\,x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)\,x'' + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = h(t),$$

où les fonctions $t \mapsto a_j(t)\,, 0 \leqslant j \leqslant n$, *sont appelées coefficients de l'équation.*

La fonction $t \mapsto h(t)$ *est appelée le second membre. Si* h *est nulle, alors l'équation est dite homogène ou sans second membre.*

L'équation différentielle

$$a_n(t)\,x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_2(t)\,x'' + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = 0,$$

est appelée équation différentielle homogène associée.

Si $a_j(t)\,, 0 \leqslant j \leqslant n$, *sont des constantes, on parle d'équation différentielle linéaire à coefficients constants.*

Exemple 2.5. L'équation différentielle $\left(t^2+1\right)x'' = e^t x + \operatorname{Arctg} t$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et son équation différentielle homogène associée est $\left(t^2+1\right)x'' = e^t x$.

Exemple 2.6. Les équations différentielles suivantes ne sont pas linéaires.

① $x' + x^2 - t = 0$ ② $x'' - e^x x' = 2x$ ③ $x''' + txx' - 2x = \sin t$

④ $(2-x)\,x' + x = \ln t$ ⑤ $x'' + \sin x = 1$ ⑥ $x^{(6)} + x^2 x' = t.$

2.2 Notions de solutions

2.2.1 Solution d'une équation différentielle

Définition 2.5. *On appelle solution (ou intégrale) de l'équation différentielle* $F\left(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}\right) = 0$ *un couple* (I, x)*, où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* x *une fonction* n *fois dérivable définie sur* I *telle que pour tout* t *de* I*, on ait*

$$F\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \cdots, x^{(n)}(t)\right) = 0.$$

2.2.2 Résolution d'une équation différentielle

Résoudre ou intégrer une équation différentielle consiste à rechercher :

❒ Un intervalle I de $\mathbb{R}$, ❒ une fonction x suffisamment dérivable et vérifiant l'équation différentielle sur I.

Exemple 2.7. L'équation $x' - x = 0$ admet $(I, x) = ([0, 1], \exp)$ comme solution, mais aussi $(I, x) = (\mathbb{R}, \exp)$. La première est la restriction de la seconde.

2.2.3 Conditions initiales

Définition 2.6 (Conditions initiales). *On peut aussi rechercher des solutions qui vérifient certaines conditions en un point* t_0 *:* $x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

On appelle ce type de condition des conditions initiales.

Exemple 2.8. La fonction $t \mapsto x(t) = \operatorname{tg} t$ est solution de l'équation différentielle $x' - x^2 = 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifie la condition initiale $x(0) = 0$.

Exemple 2.9. La fonction $t \mapsto x(t) = \operatorname{Ch} t$ est solution de l'équation différentielle $(x')^2 - x^2 = -1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie la condition initiale $x(0) = 1$.

2.2.4 Solutions générale, particulière et singulière

Résoudre ou intégrer une équation différentielle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle d'ordre n, $F\left(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}\right) = 0$ dépend en général de n constantes arbitraires $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$

Définition 2.7 (Solutions générale et particulière).

- *La famille de solutions (x_μ) d'indice $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ est appelée solution (ou intégrale) générale.*
- *Une solution particulière est obtenue en imposant une condition (initiale) sur x_μ.*

Définition 2.8 (Solutions singulières). *Il arrive parfois qu'en plus de la solution générale on ait des solutions particulières $x = \varphi_0(t), x = \varphi_1(t), \cdots$, qui ne s'obtiennent pour aucune valeur de μ : on dit que ce sont des solutions singulières.*

Exemple 2.10. On peut vérifier que $x^2 + (xx')^2 = 1$ admet pour solutions $x_\mu = \pm\sqrt{1-(t-\mu)^2}, \mu \in \mathbb{R}$ et deux fonctions $x_1 = -1, x_2 = 1$. Les solutions x_1 et x_2 qui n'appartiennent pas à la famille x_μ sont des solutions singulières.

2.2.5 Solutions maximales

Définition 2.9 (Prolongement). *Soient $x : I \to \mathbb{R}^k$ et $x : I \to \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}^*$ deux solutions de $F\left(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}\right) = 0$, on dit que x est un prolongement de x si $I \supset I$ et $x|_I = x$.*

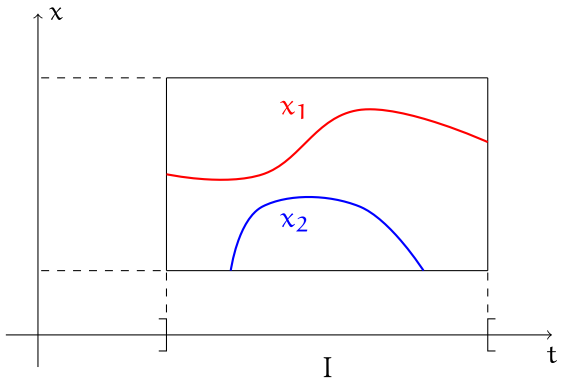
Définition 2.10 (Solution maximale). *On dit qu'une solution $x : I \to \mathbb{R}^k$ est maximale si x n'admet pas de prolongement $x : I \to \mathbb{R}^k$ avec $I \supsetneq I$.*

Exemple 2.11. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ définie sur $]0, +\infty[$ est une solution maximale de l'équation $x' + x^2 = 0$.

Théorème 2.1. *Toute solution x se prolonge en une solution maximale x (pas nécessairement unique).*

2.2.6 Solutions globales

Définition 2.11 (Solution globale). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une solution (I, x) est dite globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.*



Remarque 2.2. *Toute solution globale est maximale, mais une solution maximale peut tout à fait ne pas être globale.*

Sur la figure ci-dessus par exemple, x_1 est globale tandis que x_2 est maximale mais non globale.

Test 2.1. On considère l'équation $x' = x^2$. Cherchons les solutions de cette équation.

On a d'une part $x(t) \equiv 0$ est une solution.

Si x ne s'annule pas, $x' = x^2$ s'écrit sous forme $\frac{x'}{x^2} = 1$, d'où par intégration

$$-\frac{1}{x(t)} = t + \mu \text{ ou } x(t) = -\frac{1}{t+\mu}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -\mu[$ et sur $]-\mu, +\infty[$; ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $x(t) \equiv 0$ est la seule solution globale de $x' = x^2$.

2.2.7 Courbes intégrales d'une équation différentielle

Définition 2.12 (Courbes intégrales). *Les courbes représentatives des solutions maximales d'une équation différentielle sont appelées courbes intégrales.*

Exemple 2.12. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $tx' - x = 0$ est donné par l'ensemble des fonctions de la forme $x = \mu t$, avec $\mu \in \mathbb{R}$. Donc, les courbes intégrales de cette équation sont des droites qui passent par l'origine, sauf l'axe des x.

Exemple 2.13. L'équation différentielle $x'' = 0$ admet pour courbes intégrales les droites d'équation $x = \lambda t + \mu$, c'est-à-dire l'ensemble des droites du plan non parallèles à l'axe Ox.

Plus généralement la résolution d'une équation différentielle consiste à déterminer ses courbes intégrales, soit par une équation $x = f(t)$, soit par $\varphi(t, x) = 0$, soit même géométriquement.

2.3 Série d'exercices

Exercice 2.1. *Trouver les équations différentielles qui ont pour solution générale les fonctions* $x = f(t)$ *données ci-dessous,* α, β *et* γ *étant des constantes.*

① $x = \alpha t$ ② $x = \alpha e^t$ ③ $x = \sin(t + \alpha)$

④ $x = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta$ ⑤ $x = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ ⑥ $t^2x^3 + t^3x^5 = \alpha.$

Exercice 2.2. *Montrer que si dans l'équation d'ordre* n

$$F\left(x, x', x'', \cdots, x^{(n)}\right) = 0,$$

la variable t *n'entre pas explicitement, alors son ordre peut être rabaissé d'une unité à l'aide du changement de variable et de fonction* $x' = v(x)$ *où* v *est la nouvelle fonction inconnue.*

Exercice 2.3. *Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires, ou non linéaires, et donner* *leur ordre*

① $x' + x - t = 0$ ② $x'' - x' = 2x$ ③ $x''' + tx - 2x = \sin t$

④ $(2 - x)\, x' + x = \ln t$ ⑤ $x'' + \sin x = 1$ ⑥$^{(5)} + x^2 = t.$

Exercice 2.4. *À l'aide du changement de variables ou de dérivation, ramener les équations suivantes sous forme linéaire*

① $t = \left(x^2 - 2x + 1\right) x'$ ② $(t + 1)\,(xx' - 1) = x^2$

③ $(t) = \int_0^t x\,(s)\, ds + t + 1$ ④ $\int_0^t (t - s)\, x\,(s)\, ds = 2t + \int_0^t x\,(s)\, ds.$

Exercice 2.5. *Montrer que* $x = 2t + \mu e^t$ *est solution de l'équation différentielle* $x' - x = 2\,(1 - t)$ *et trouver la solution particulière dont la courbe intégrale passe par le point* $t = 0, x = 3.$

Exercice 2.6. *À l'aide du changement de fonctions* $z = x, w = x'$*, transformer l'équation différentielle*

$$x'' + a\,(t)\, x' + b\,(t)\, x = c\,(t)$$

à un système d'équations du premier ordre.

CHAPITRE

3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Contents

3.1 Introduction

..

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Elle est de la forme

$$a(t)\, x' + b(t)\, x = c(t)\,, \tag{3.1}$$

où a, b et c sont des fonctions données de t, continues dans le domaine où il s'agit d'intégrer l'équation (3.1). La fonction c est appelée second membre de l'équation différentielle, a et b sont appelées les coefficients.

Si $c(t) \equiv 0$ on dit que l'équation (3.1) est linéaire homogène ou sans second membre

$$a(t)x' + b(t)x = 0. \tag{3.2}$$

La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{x'}{x} = -\frac{b(t)}{a(t)}$ ou $\frac{dx}{x} = -\frac{b(t)}{a(t)}dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient

$$\operatorname{Log}|x(t)| = -\int h(t)\,dt + K, \text{ avec } h(t) = \frac{b(t)}{a(t)},\ K \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque valeur de K, cela donne deux solutions, l'une toujours positive $x = e^K e^{-\int h(t)dt}$, l'autre toujours négative $x = -e^K e^{-\int h(t)dt}$.

On retrouve toutes ces solutions, x compris la solution nulle, en disant que la solution générale de l'équation homogène $a(t)x' + b(t)x = 0$ est

$$x_h = C\,e^{-\int h(t)dt},\ \ h(t) = \frac{b(t)}{a(t)}, C \in \mathbb{R}.$$

Si la valeur de la solution en $t = 0$ est donnée, on écrit souvent $x(t) = x(0)\,e^{-\int_0^t h(s)ds}$.

Remarque 3.1. *La fonction* $(t, x) \mapsto \mu(t, x) = e^{\int h(t)dt},\ h(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$ *est un facteur intégrant pour l'équation différentielle* $x' + h(t)x = 0$.

Si nous supposons que $t \mapsto x_p(t)$ est une solution particulière de (3.1), on pose $x = x_p + u$ dans (3.1). Il vient

$$a(t)x_p' + b(t)x_p + a(t)u' + b(t)u = c(t)\,.$$

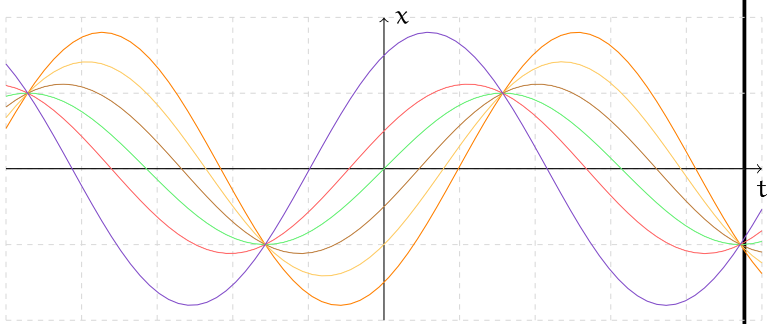
Or $a(t)x_p' + b(t)x_p = c(t)$, donc $a(t)u' + b(t)u = 0$, soit u une solution de l'équation homogène (3.2). Ainsi la solution générale de l'équation (3.1) avec second membre est la somme d'une solution particulière de cette même équation (3.1), et de la solution générale de l'équation homogène associée (3.2).

$$x(t) = \underbrace{x_p(t)}_{\text{Solution particulière de (3.1)}} + \underbrace{x_h(t)}_{\text{Solution de l'équation homogène (3.2)}} = x_p(t) + C\,e^{-\int h(t)dt}, \quad h(t) = \frac{b(t)}{a(t)}.$$

Test 3.1. L'équation $x' \cos t + x \sin t = 1$ admet comme solution particulière $x_p = \sin t$. La solution de l'équation homogène associée $x' \cos t + x \sin t = 0$ est $x_h = \mu \cos t, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors la solution générale de $x' \cos t + x \sin t = 1$ est

$$x = \sin t + \mu \cos t, \ \mu \in \mathbb{R}.$$



3.2 Méthode de la variation de la constante

Si aucune solution évidente de $a(t)x' + b(t)x = c(t)$ n'apparaît, on peut utiliser la méthode dite de *variation de la constante*, c'est-à-dire que l'on cherche la solution générale sous la forme $x = C(t)\ e^{-\int d(t)dt}, \ h(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$, où $t \mapsto C(t)$ est une nouvelle fonction inconnue de t. Il vient

$$a(t)\left(C'(t)\ e^{-\int h(t)dt} - C(t)\frac{b(t)}{a(t)}\, e^{-\int h(t)dt}\right) + b(t)\,C(t)\ e^{-\int h(t)dt} = c(t),$$

et donc

$$C'(t) = \frac{c(t)}{a(t)} e^{\int g(t)dt}, \quad h(t) = \frac{b(t)}{a(t)},$$

ce qui permet, en intégrant de trouver $C(t)$.

Test 3.2. Soit l'équation $(t^2+1)x' + 3tx = t^2$.

L'équation sans second membre (homogène) associée est $(t^2+1)x' + 3tx = 0$. C'est une équation à variables séparables. Sa solution générale est $x = C \cdot (t^2+1)^{-\frac{3}{2}}$.

Cherchons la solution générale de l'équation non homogène sous la forme $x = C(t)(t^2+1)^{-\frac{3}{2}}$, où $t \mapsto C(t)$ est une fonction inconnue de t. En portant dans l'équation non homogène, on trouve

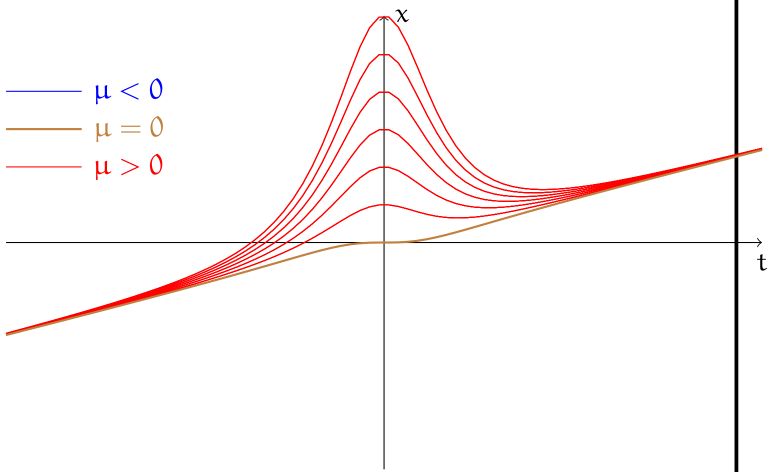
$$(t^2+1)\left(C'(t)(t^2+1)^{-\frac{3}{2}} + C(t)(-3t)(t^2+1)^{-\frac{5}{2}}\right) + 3tC(t)(t^2+1)^{-\frac{3}{2}} = t^2.$$

Après simplification on obtient

$$C'(t) = t^2\sqrt{t^2+1}.$$

Si on pose $t = \operatorname{Sh} u$, on trouve

$$C(t) = \frac{t}{8}(2t^2+1)\sqrt{t^2+1} - \frac{1}{8}\operatorname{Argsh} t + \mu, \mu \in \mathbb{R}.$$



La solution générale est donc

$$x = \mu(t^2+1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{t}{8}\frac{2t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{8}(t^2+1)^{-\frac{3}{2}}\operatorname{Argsh} t, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant est une équation de la forme

$$x'(t) + ax(t) = b(t), \tag{3.3}$$

c'est le coefficient de x qui est constant.

Dans ce cas la solution générale de l'équation homogène associée $x'(t) + ax(t) = 0$ est

$$x_h = C\, e^{-at},\ C \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière peut être déduite à partir de la méthode de variation de la constante exposée précédemment

$$x_p = e^{-at} \int e^{at} b(t)\, dt.$$

Alors la solution générale de l'équation non homogène (3.3) est

$$x = x_h + x_p = C\, e^{-at} + e^{-at} \int e^{at} b(t)\, dt,\ C \in \mathbb{R}.$$

3.3.0.1 Recherche d'une solution particulière pour des seconds membres $b(t)$ spécifiques

La méthode de variation des constantes marche toujours ; cependant, dans bien des cas, il existe une solution particulière x_p qui "ressemble" à $b(t)$. Le type de la fonction $b(t)$ nous indique sous quelle forme la chercher, et il ne reste plus qu'à ajuster les coefficients. Cela conduit en général à des calculs plus simple que la méthode de variation de la constante. Les exemples ci-dessous montrent comment s'x prendre pour trouver une telle solution particulière.

- Si $b(t)$ est un polynôme de degré n :

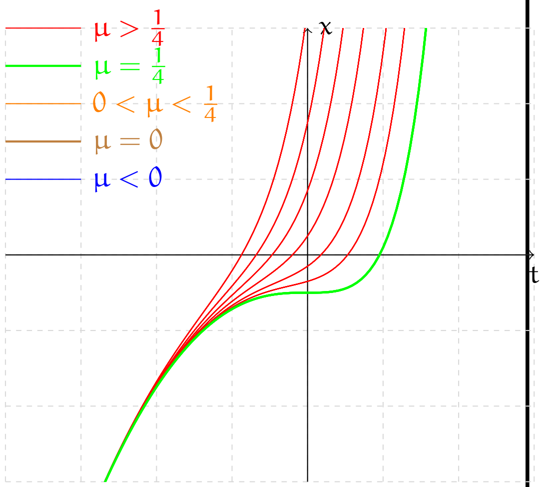
  Chercher une solution qui soit un polynôme de degré n.

Test 3.3. Cherchons une solution de l'équation

$$x' - 2x = t^2 + 1.$$

Posons $x_p = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ et remplaçons dans l'équation : $2\alpha t + \beta - 2\left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right) = t^2 + 1$.

En identifiant, on trouve alors $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{3}{4}$. Une solution particulière est donc $x_p = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$. D'où la solution générale est $x = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + \mu e^{2t}, \mu \in \mathbb{R}$.



- Si $b(t)$ est de la forme ce^{rt}, avec r différent de $-a$:

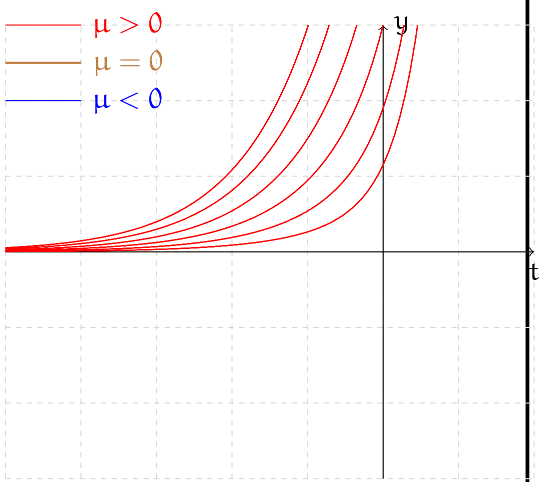
  Chercher une solution de la forme αe^{rt}.

Test 3.4. Cherchons une solution de l'équation

$$x' - x = e^{3t}.$$

Posons $x_p = \alpha e^{3t}$ et remplaçons dans l'équation : $3\alpha e^{3t} - \alpha e^{3t} = e^{3t}$, et donc $\alpha = \frac{1}{2}$. Une solution particulière est alors $x_p = \frac{1}{2}e^{3t}$. D'où la solution générale est

$$x = \frac{1}{2}e^{3t} + \mu e^{t}, \mu \in \mathbb{R}.$$

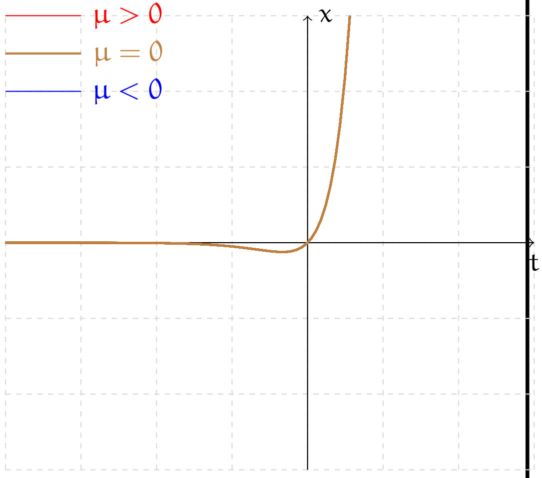


- Si $b(t)$ est de la forme ce^{-at} :

  Chercher une solution de la forme αte^{-at}.

Test 3.5. Cherchons une solution de l'équation

$$x' - 3x = e^{3t}.$$



Posons $x_p = \alpha t e^{3t}$ et remplaçons dans l'équation : $3\alpha t e^{3t} + \alpha e^{3t} - 3\alpha t e^{3t} = e^{3t}$, donc $\alpha = 1$. Une solution particulière est donc $x_p = te^{3t}$. D'où la solution générale

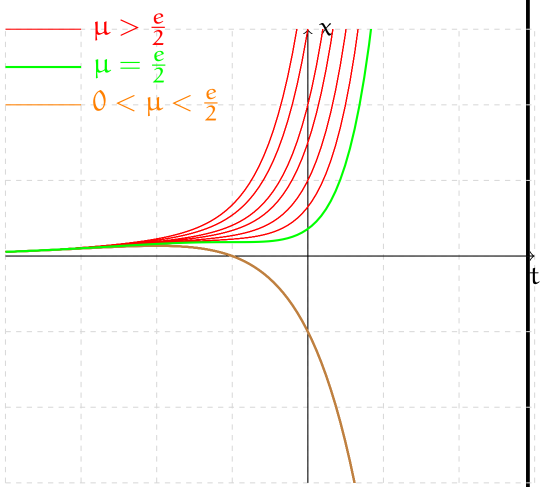
$$x = (t + \mu)\, e^{3t}, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $b(t)$ est de la forme $p(t)\, e^{rt}$, où p est un polynôme de degré n :

  Chercher une solution de la forme $q(t)\, e^{rt}$, où q est un polynôme de degré n si $r \neq -a$, et de degré $n + 1$ si $r = -a$.

Test 3.6. Cherchons une solution de l'équation $x' - 2x = te^t$. Posons $x_p = (\alpha t + \beta)\, e^t$ et remplaçons dans l'équation

$$(\alpha t + \beta)\, e^t + \alpha e^t - 2(\alpha t + \beta)\, e^t = te^t.$$

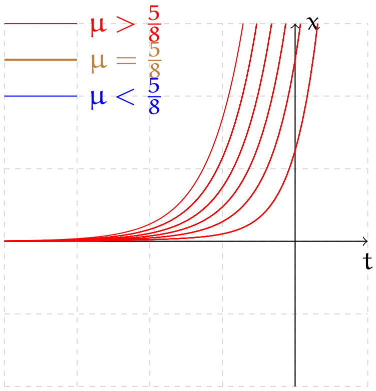


En identifiant, on trouve $\alpha = \beta = -1$. Une solution particulière est donc $x_p = -(t + 1)\, e^t$. D'où la solution générale est

$$x = -(t + 1)\, e^t + \mu e^{2t}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Test 3.7. Cherchons une solution de l'équation $x' - 2x = (t+1)\,e^{2t}$.
Posons $x_p = \left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right) e^{2t}$ et remplaçons dans l'équation :

$$2\left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right) e^{2t} + (2\alpha t + \beta)\, e^{2t} - 2\left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right) e^{2t} = (t+1)\, e^{2t}.$$



En identifiant, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ et γ est quelconque. Une solution particulière est donc $x_p = \left(\frac{1}{2}t^2 + t + \gamma\right) e^{2t}$. D'où la solution générale est $x = \left(\frac{1}{2}t^2 + t + \mu\right) e^{2t}, \mu \in \mathbb{R}$.

- Si $b(t)$ est de la forme $c\cos(rt) + d\sin(rt)$:

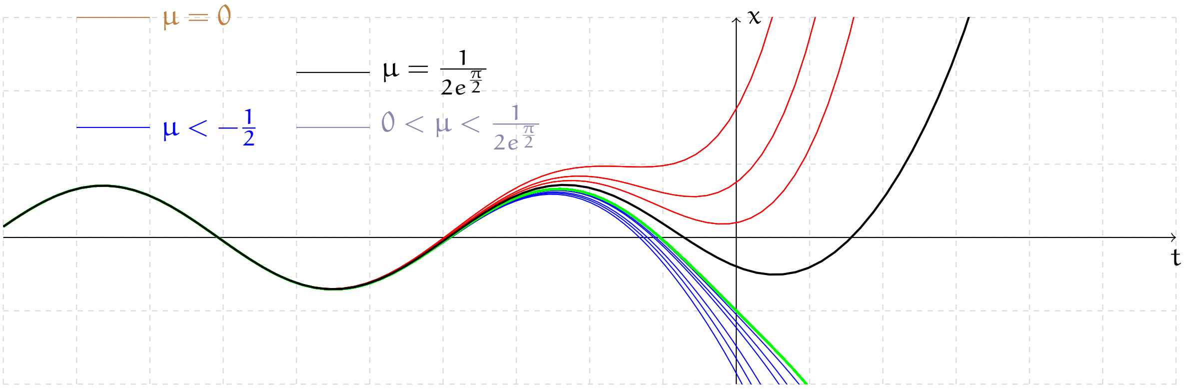
  Chercher une solution de la forme $\alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$.

Test 3.8. Cherchons une solution de l'équation $x' - x = \sin t$.

Posons $x_p = \alpha \cos t + \beta \sin t$ et remplaçons dans l'équation :

$$-\alpha \sin t + \beta \cos t - (\alpha \cos t + \beta \sin t) = \sin t.$$

En identifiant, on trouve $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Une solution particulière est donc $x_p = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$. D'où la solution générale est $x = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \mu e^t, \mu \in \mathbb{R}$.



- Si $b(t)$ est la somme de plusieurs fonctions $b_1(t), \cdots, b_k(t)$ qui sont chacune d'un des types ci-dessus :

  Chercher pour i de 1 à k une solution particulière $s_i(t)$ de chacune des équations $x' + ax = b_i(t)$. La fonction $s_1(t) + \cdots + s_k(t)$ sera solution particulière de $x' + ax = b(t)$.

Test 3.9. Cherchons une solution de l'équation

$$x' - x = 2t + \sin t.$$

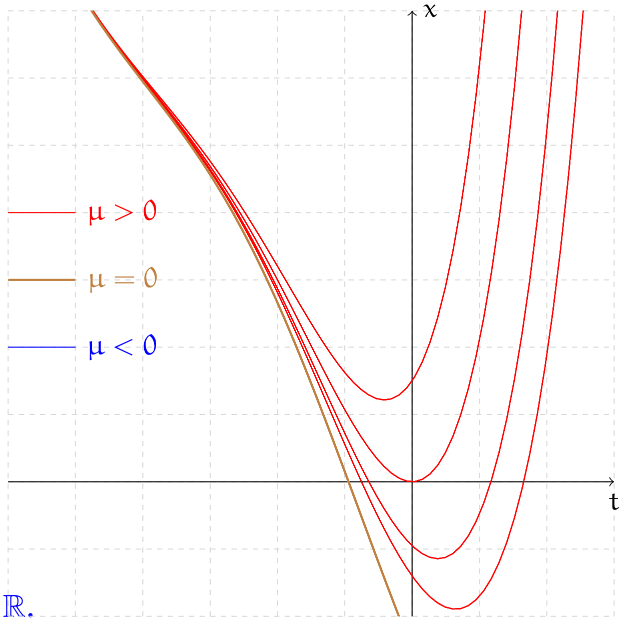
Une solution particulière de $x' - x = 2t$ est $x_{p_1} = -2t - 2$.

Une solution particulière de $x' - x = \sin t$ est $x_{p_2} = -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$.

Donc $x_p = -2(t+1) - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ est solution particulière de $x' - x = 2t + \sin t$.

Sa solution générale est donc

$$x = -2(t+1) - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \mu e^t, \mu \in \mathbb{R}.$$



Résumons les cas ci-dessus dans le tableau suivant.

Second membre $b(t)$	**Solution particulière** $x_p(t)$
$b(t)$ est un polynôme de degré n	$x_p(t)$ est un polynôme de degré n
$b(t) = ce^{rt}$, avec $r \neq -a$	$x_p(t) = \alpha e^{rt}$
$b(t) = ce^{-at}$	$x_p(t) = \alpha t e^{-at}$.
$b(t) = p(t)e^{rt}, r \neq -a$, p polynôme de degré n	$x_p(t) = q(t)e^{rt}$, q polynôme de degré n
$b(t) = p(t)e^{rt}, r = -a$, p polynôme de degré n	$x_p(t) = q(t)e^{rt}$, q polynôme de degré $n+1$
$b(t) = c\cos(rt) + d\sin(rt)$	$x_p(t) = \alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$

3.4 Série d'exercices

Exercice 3.1. *Trouver la solution des problèmes de Cauchy suivants :*

① $tx' + x = 1$ *et* $x(1) = 1$, *sur* $]0, +\infty[$.

Exercice 3.2. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

① $3tx' - 4x = t$ ② $x' + x = \sin t$ ③ $x' + x = t^2$

Exercice 3.3. *Résoudre les équations différentielles :*

① $x'(t)e^t - x(t)e^t = 2t$ ② $tx'(t) + 2x(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$

Exercice 3.4. *Résoudre les équations différentielles :*

① $x'(t) + x(t) = \cos t + \sin t$② $tx'(t) - 2x(t) = t^3$

Exercice 3.5. *Résoudre les équations différentielles :*

① $x' + x = 0$ *avec* $x(0) = 1$.

② $2x' - x = 0$ *avec* $x(0) = 1$.

③ $x' = tx$ *avec* $x(0) = 1$.

Exercice 3.6. ① *les solutions rélles de l'équation différentielle suivante :*

$$(1 + t^2)x' - x = 0.$$

Quelle est la solution passant par le point $M = (1, 2)$ *?*

② *Vérifier que* $t \mapsto f(t) = t^2 - 2t + 2$ *est solution de* $x' + x = t^2$.

③ *Déterminer l'ensemble des solutions de* $x' + x = e^{-t}(\cos t + t^2)$.

En déduire les solutions de $x' + x = e^{-t}(\cos t + t^2) + t^2$.

④ *Déterminer les solutions de l'équation différentielle* $(t-1)x' + (t-2)x = t(t-1)^2$ *vérifiant la condition* $x(0) = 0$.

Vérifier que la fonction trouvée sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ *est prolongeable en une fonction continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$.

⑤ *Soit l'équation différentielle* (E) : $tx' - x = \ln(t)$.

1. *Déterminer les solutions définies sur* $\mathbb{R}^*$.

2. *Existe-t-il une solution continue sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 3.7. ***Soit*** a *un réel strictement positif. Soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$, *telle que la fonction* $g = f' + af$ *soit bornée sur* $\mathbb{R}_+$. *Montrer que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}_+$.

CHAPITRE

4 Équations différentielles linéaires du second ordre

Contents

4.1 Introduction

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)\,. \tag{4.1}$$

Définition 4.1 (Solutions indépendantes). *Deux solutions x_1 et x_2 de l'équation (4.1) sont indépendantes sur un intervalle I s'il n'existe pas de réel k tel que pour tout $t \in I : x_2(t) = kx_1(t)$.*

Remarque 4.1. *Les fonctions x_1 et x_2 sont indépendantes cela signifie linéairement indépendantes au sens des espaces vectoriels.*

Définition 4.2 (Wronskien). *Soient deux fonctions dérivables $t \mapsto x_1(t)$ et $t \mapsto x_2(t)$ sur un intervalle I.*

Le wronskien de ces deux fonctions est défini à l'aide d'un déterminant

$$W(x_1(t), x_2(t)) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)\,x_2'(t) - x_1'(t)\,x_2(t)\,.$$

Les deux fonctions dérivables $t \mapsto x_1(t)$ et $t \mapsto x_2(t)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si leur wronskien $W(x_1, x_2)$ n'est pas identiquement nul.

Exemple 4.1. Les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto e^t$ sont indépendantes.

Les fonctions $f : t \mapsto 3e^{-t} \sin t$ et $g : t \mapsto 5e^{-t} \sin t$ ne le sont pas puisque $g = \frac{5}{3}f$.

4.2 Équations linéaires homogènes du second ordre

Si $c(t) \equiv 0$ on dit que l'équation (4.1) est linéaire homogène ou sans second membre

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0. \tag{4.2}$$

4.2.1 Cas où l'on connaît deux solutions particulières indépendantes :

Si x_1 et x_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation différentielle $x''+a(t)x'+b(t)x = 0$, alors la solution générale de cette équation différentielle est $x = \lambda x_1 + \mu x_2, \lambda$ et μ étant des constantes arbitraires.

Test 4.1. Pour l'équation différentielle homogène $t^2x'' - 2x = 0$, en cherchant des solutions sous la forme $x(t) = t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, on trouve que $x_1(t) = t^2$ et $x_2(t) = \frac{1}{t}$ sont des solutions particulières. D'après la propriété ci-dessus, on peut en déduire que la solution générale de l'équation différentielle est de la forme $x(t) = \lambda t^2 + \dfrac{\mu}{t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

4.2.2 Cas où l'on connaît une solution particulière :

Considérons l'équation différentielle homogène $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ pour laquelle on connaît une solution particulière x_1.

La méthode pour trouver la solution générale consiste à effectuer un changement de fonction en posant $x(t) = x_1(t)\,v(t)$, où v étant la nouvelle fonction inconnue. Il vient

$$x_1''v + 2x_1'v' + v''x_1 + a(t)\left(x_1'v + x_1v'\right) + b(t)\,x_1v = 0.$$

Comme x_1 est solution de notre équation différentielle, alors on obtient

$$x_1v'' + \left(2x_1' + a(t)\,x_1\right)v' = 0.$$

La fonction $w = v'$ est donc solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, qui se peut se réécrire

$$\frac{w'}{w} = \frac{v''}{v'} = -2\frac{x_1'(t)}{x_1(t)} - a(t)\,.$$

La solution générale est donnée par $w(t) = \lambda\left(x_1(t)\right)^{-2} e^{-\int a(t)dt}, \lambda \in \mathbb{R}$.

D'où $v(t) = \int w(t)\,dt + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. La solution générale de $x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$ est donc

$$x(t) = x_1(t)\int w(t)\,dt + \lambda x_1(t)\,, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Test 4.2. Considérons l'équation $(t+1)\,x'' - (2t-1)\,x' + (t-2)\,x = 0$.

On peut vérifier que $x_1(t) = e^t$ est une solution particulière.

Cherchons la solution générale sous la forme $x(t) = e^t v(t)$, alors

$$(t+1)\left(e^t v + 2e^t v' + v'' e^t\right) - (2t-1)\left(e^t v + e^t v'\right) + (t-2)\,e^t v = 0.$$

Apres simplification, on trouve $(t+1)\,v'' = -3v'$. En posant $w = v'$, on a $(t+1)\,w' = -3w$ équation différentielle du premier ordre ayant pour solution $w(t) = \frac{\lambda}{(t+1)^3}$. D'où

$$v(t) = \int w(t)\,dt + \lambda = \frac{\lambda}{(t+1)^2} + \mu \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de notre équation différentielle est donc

$$x(t) = \left(\frac{\lambda}{(t+1)^2} + \mu\right) e^t, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4.2.3 Équations linéaires non homogènes du second ordre

Si $c(t) \neq 0$ on dit que l'équation $x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$ est linéaire non homogène ou avec second membre. L'équation $x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$ est l'équation homogène associée. Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, la solution générale de l'équation non homogène $x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$ est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

4.2.4 Variations des constantes :

Supposons qu'on connaisse la solution générale $x = \lambda x_1 + \mu x_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de l'équation homogène $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$. On peut alors chercher la solution générale par la méthode de variation des constantes.

Le principe de cette méthode est de considérer λ et μ comme fonctions de la variable t. Cherchons la solutions sous la forme $x(t) = \mu(t)x_1(t)+\lambda(t)x_2(t)$. En reportant cette fonction dans l'équation non homogène, on a après simplification

$$2\lambda' x_1' + 2\lambda' x_2' + \lambda'' x_1 + \lambda'' x_2 + a(t)(\mu' x_1 + \mu' x_2) = c(t).$$

En imposant la condition supplémentaire $\mu' x_1 + \mu' x_2 = 0$, on voit que $\mu'' x_1 + \mu'' x_2 = -(\mu' x_1' + \mu' x_2')$ et donc les dérivées λ' et μ' doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \lambda' x_1 + \mu' x_2 = 0, \\ \lambda' x_1' + \mu' x_2' = c(t). \end{cases}$$

En résolvant ce système on obtient

$$\lambda' = \frac{-c(t)x_2}{x_1 x_2' - x_1' x_2}, \quad \mu' = \frac{c(t)x_1}{x_1 x_2' - x_1' x_2}.$$

D'où la solution générale de l'équation non homogène $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ est

$$x = x_1 \int \frac{-c(t)x_2}{x_1 x_2' - x_1' x_2} dt + x_2 \int \frac{c(t)x_1}{x_1 x_2' - x_1' x_2} dt + \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Test 4.3. Considérons l'équation $x'' - \frac{2}{t^2}x = te^t$. En cherchant des solutions pour l'équation homogène $x'' - \frac{2}{t^2}x == 0$ sous la forme $x(t) = t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, on trouve que $x_1(t) = t^2$ et $x_2(t) = \frac{1}{t}$ sont deux solutions particulières indépendantes. D'où la solution générale de l'équation homogène est de la forme $x(t) = \lambda t^2 + \frac{\mu}{t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On va donc chercher la solution générale de l'équation non homogène sous la forme $x(t) = t^2\lambda(t) + \frac{\mu(t)}{t}$. Les dérivées λ' et μ' doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \lambda' x_1 + \mu' x_2 = 0, \\ \lambda' x_1' + \mu' x_2' = c(t), \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t^2\lambda' + \dfrac{\mu'}{t} = 0, \\ 2t\lambda' - \dfrac{\mu'}{t^2} = te^t. \end{cases}$$

On en déduit que $\lambda' = \frac{1}{3}e^t, \mu' = \frac{-1}{3}t^3e^t$ et donc

$$\lambda(t) = \frac{1}{3}e^t + \alpha, \quad \mu(t) = \frac{1}{3}e^t\left(-t^3 + 3t^2 - 6t + 6\right) + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

D'où la solution générale de l'équation non homogène est

$$x(t) = e^t\left(t - 2 + \frac{2}{t}\right) + \lambda t^2 + \frac{\mu}{t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4.2.5 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants, est une équation du type

$$x'' + ax' + bx = c(t),$$

où les coefficients a et b sont des constantes réelles, $t \mapsto c(t)$ est une fonction donnée continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Comme dans le cas à coefficients non constants, on commence par résoudre l'équation homogène associée ou sans second membre

$$x'' + ax' + bx = 0.$$

On cherche des solutions sous la forme $x = e^{rt}, r \in \mathbb{R}$. En substituant dans notre équation homogène, on obtient

$$\left(r^2 + ar + b\right) e^{rt} = 0.$$

Comme la fonction exponentielle n'est jamais nulle, pour avoir une solution il faut que

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Cette équation se nomme l'équation *caractéristique* (ou auxiliaire) associée à notre équation homogène. Les valeurs de r se trouvent aisément à l'aide de la formule quadratique

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Trois cas peuvent alors se produire :

- Si $a^2 - 4b > 0$, on trouve deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, ce qui montre que les fonctions $x_1 = e^{r_1 t}$ et $x_2 = e^{r_2 t}$ sont deux solutions particulières indépendantes. La solution générale de l'équation homogène $x'' + ax' + bx = 0$ sera alors

$$x_h = \mu e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \;\; \mu, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $a^2 - 4b = 0$, on trouve une racine réelle double r_0. Dans ce cas, l'obtention d'une solution réelle r_0 montre que la fonction $x_1 = e^{r_0 t}$ est une solution particulière, d'autre part on peut montrer que $x_2 = te^{r_0 t}$ est aussi solution. On en déduit alors que la solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$x_h = (\mu t + \mu)\, e^{r_0 t}, \quad \mu, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $a^2 - 4b < 0$ on trouve deux racines complexes distinctes et conjuguées de forme générale $r_1 = \alpha - i\beta$ et $r_2 = \alpha + i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $x_1 = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ et $x_2 = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ sont deux solutions particulières indépendantes de l'équation homogène. D'où la solution homogène générale est

$$x_h = e^{\alpha t} \left(\mu \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t) \right), \quad \mu, \mu \in \mathbb{R},$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme

$$x_h = \mu e^{\alpha t} \cos(\beta t + \mu) \quad \text{ou } x_h = \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t + \mu), \quad \mu, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.2. ① $x'' + 4x' + 3x = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 3 = 0$, on a $r_1 = -3, r_2 = -1$. Alors la solution générale est $x = \mu e^{-3t} + \mu e^{-t}, \quad \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

② $x'' + 4x' + 9x = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 9 = 0$, on a $r_1 = -2 - i\sqrt{5}, r_2 = -2 + i\sqrt{5}$. Alors la solution générale est $x = e^{-2t} \left(\mu \cos\left(\sqrt{5}t\right) + \mu \sin\left(\sqrt{5}t\right) \right), \quad \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

③ $x'' + 6x' + 9x = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 6r + 9 = 0$, on a $r_1 = -3$ une racine double. Alors la solution générale est $x = (\mu t + \mu)\, e^{-3t}, \quad \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

Ensuite, il faut trouver une solution particulière x_p de l'équation avec le second membre

$$x'' + ax' + bx = c(t).$$

La solution générale sera $x = x_p + x_h$.

4.2.6 Recherche d'une solution particulière pour des seconds membres spécifiques

Dans la pratique, c'est la forme de la fonction $c(t)$ qui nous indiquera sous quelle forme chercher la solution particulière.

- Si $c(t) = p(t)$ est un polynôme de degré n :

  Chercher une solution $q(t)$ qui soit un polynôme de degré n si $b \neq 0$, de degré $n+1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$, et de degré $n+2$ si $a = 0$ et $b = 0$.

Test 4.4. Cherchons une solution de l'équation $x'' - x' - 2x = 2t^2$.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ admet les racines -1 et 2. La solution générale de l'équation homogène associée est donc $x_h = \mu e^{-t} + \mu e^{2t},\ \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière sous forme d'un polynôme du second degré $x_p = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. On a $x_p' = 2\alpha t + \beta, x_p'' = 2\alpha$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve : $-2\alpha t^2 - 2(\alpha + \beta)t + 2\alpha - \beta - 2\gamma = 2t^2$. D'où $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -\frac{3}{2}$. Une solution particulière est donc $x_p = -t^2 + t - \frac{3}{2}$. D'où la solution générale est $x = -t^2 + t - \frac{3}{2} + \mu e^{-t} + \mu e^{2t}, \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

- Si $c(t)$ est de la forme Ke^{rt}, avec $r^2 + ar + b \neq 0$:

  Chercher une solution de la forme αe^{rt}.

Test 4.5. Cherchons une solution de l'équation $x'' - x' - 2x = e^{3t}$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $x_h = \mu e^{-t} + \mu e^{2t}$, $\mu, \mu \in \mathbb{R}$.

Comme 3 n'est pas racine du polynôme caractéristique $r^2 - r - 2$, cherchons une solution particulière sous la forme $x_p = \alpha e^{3t}$. On a $x'_p = 3\alpha e^{3t}, x''_p = 9\alpha e^{3t}$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve $(9\alpha - 3\alpha - 2\alpha)\, e^{3t} = e^{3t}$, d'où $\alpha = \frac{1}{4}$. Une solution particulière est alors $x_p = \frac{1}{4}e^{3t}$. D'où la solution générale est $x = \frac{1}{4}e^{3t} + \mu e^{-t} + \mu e^{2t}$, $\mu, \mu \in \mathbb{R}$.

- Si $c\,(t)$ est de la forme Ke^{rt}, avec $r^2 + ar + b = 0$:

  Chercher une solution de la forme $\alpha t e^{rt}$ (ou $\alpha t^2 e^{rt}$ si r est racine double).

Test 4.6. Cherchons une solution de l'équation $x'' - x' - 2x = e^{2t}$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $x_h = \mu e^{-t} + \mu e^{2t}$, $\mu, \mu \in \mathbb{R}$.

Comme 2 est racine simple du polynôme caractéristique $r^2 - r - 2$, cherchons une solution particulière sous la forme $x_p = \alpha t e^{2t}$.

On a $x'_p = (2\alpha t + \alpha)\, e^{2t}, x''_p = (4\alpha t + 4\alpha)\, e^{2t}$. En remplaçant dans l'équation, on trouve $\alpha = \frac{1}{3}$. D'où la solution générale est $x = \mu e^{-t} + \left(\frac{1}{3}t + \mu\right) e^{2t}$, $\mu, \mu \in \mathbb{R}$.

- Si $c\,(t)$ est de la forme $p\,(t)\, e^{rt}$, où p est un polynôme de degré n :

  Chercher une solution de la forme $q\,(t)\, e^{rt}$, où q est un polynôme de degré n si $r^2 + ar + b \neq 0$,

  et de degré $n + 1$ si $r^2 + ar + b = 0$ (ou même de degré $n + 2$ si r est racine double).

Test 4.7. Cherchons une solution de l'équation $x'' - x' - 2x = te^t$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $x_h = \mu e^{-t} + \mu e^{2t}, \ \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

Comme 1 n'est pas racine du polynôme caractéristique $r^2 - r - 2$, cherchons une solution particulière sous la forme $x_p = (\alpha t + \beta) e^t$.

On a $x_p' = (\alpha t + \alpha + \beta) e^t, x_p'' = (\alpha t + 2\alpha + \beta) e^t$. En remplaçant dans l'équation, on trouve $\alpha = \frac{-1}{2}, \beta = \frac{-1}{4}$. D'où la solution générale est $x = \frac{-1}{4}(2t+1) e^t + \mu e^{-t} + \mu e^{2t}, \ \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

- Si $c(t)$ est de la forme $d\cos(rt) + e\sin(rt)$:

  Chercher une solution de la forme $\alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$ (ou $t(\alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt))$ si $\cos(rt)$ est solution de l'équation homogène).

Test 4.8. Cherchons une solution de l'équation $x'' - x' - 2x = \sin(2t)$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $x_h = \mu e^{-t} + \mu e^{2t}, \ \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution sous la forme $x_p = \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)$.

On a $x_p' = -2\alpha\sin(2t) + 2\beta\cos(2t), x_p'' = -4\alpha\cos(2t) - 4\beta\sin(2t)$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve $-2(3\alpha + \beta)\cos(2t) + (2\alpha - 6\beta)\sin(2t) = \sin(2t)$, donc $3\alpha + \beta = 0$ et $2\alpha - 6\beta = 1$, d'où $\alpha = \frac{1}{20}, \beta = \frac{-3}{20}$.

Alors la solution générale est $x = \frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{3}{20}\sin(2t) + \mu e^{-t} + \mu e^{2t}, \ \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

- Si $c(t)$ est la somme de plusieurs fonctions $c_1(t), \cdots, c_k(t)$ qui sont chacune d'un des types ci-dessus :

  Chercher pour i de 1 à k une solution particulière $s_i(t)$ de chacune des équations

$$x'' + ax' + bx = c_i(t).$$

La fonction $s_1(t) + \cdots + s_k(t)$ sera solution particulière de $x'' + ax' + bx = c(t)$.

Test 4.9. Cherchons une solution de l'équation $x'' - x' - 2x = 2t^2 + e^{2t}$.

Une solution particulière de $x'' - x' - 2x = 2t^2$ est $x_{p_1} = -t^2 + t - \frac{3}{2}$.

Une solution particulière de $x'' - x' - 2x = e^{2t}$ est $x_{p_2} = \frac{1}{3}te^{2t}$.

Donc $x_p = -t^2 + t - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}te^{2t}$ est solution particulière de $x'' - x' - 2x = 2t^2 + e^{2t}$.

Résumons les cas ci-dessus dans le tableau suivant.

Second membre $c(t)$	Solution particulière $x_p(t)$
$c(t) = p(t)$ est un polynôme de degré n	$x_p(t)$ polynôme de degré n si $b \neq 0$ de degré $n+1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$ de degré $n+2$ si $a = b = 0$
$c(t) = Ke^{rt}$, avec $r^2 + ar + b \neq 0$	$x_p(t) = \alpha e^{rt}$
$c(t) = Ke^{rt}$, avec $r^2 + ar + b = 0$	$x_p(t) = \alpha te^{rt}$ si r racine simple. $x_p(t) = \alpha t^2 e^{rt}$ si r racine double.
$c(t) = p(t)e^{rt}, r^2 + ar + b \neq 0, \deg p = n$	$x_p(t) = q(t)e^{rt}$, q polynôme de degré n
$c(t) = p(t)e^{rt}, r^2 + ar + b = 0, \deg p = n$	$x_p(t) = q(t)e^{rt}$, q polxnôme de degré $n+1$
$c(t) = p(t)e^{rt}, r = \frac{-a}{2}, \deg p = n$	$x_p(t) = q(t)e^{rt}$, q polynôme de degré $n+2$
$c(t) = d\cos(rt) + e\sin(rt)$	$x_p(t) = \alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$

4.2.7 Solution particulière par la méthode de variation des constantes

Comme nous l'avons vu dans le cas général des équations linéaires du second ordre, une solution particulière de l'équation $x'' + ax' + bx = c(t)$ peut être obtenue par la méthode de variation des constantes (voir page 48).

$$x = x_1 \int \frac{-c(t)x_2}{x_1x_2' - x_1'x_2}dt + x_2 \int \frac{c(t)x_1}{x_1x_2' - x_1'x_2}dt + \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

où x_1 et x_2 sont 2 solutions particulières indépendantes de l'équation homogène $x'' + ax' + bx = 0$. Si r_1 et r_2 sont deux racines distinctes du polynôme caractéristique $r^2 + ar + b$, alors $x_1 = e^{r_1 t}$, $x_2 = e^{r_2 t}$. Dans ce cas, par intégration par parties, on peut écrire la solution générale de l'équation avec second membre en une seule formule

$$x = e^{r_1 t} \int \left(e^{(r_2 - r_1)t} \left(\int e^{-r_2 t} c(t)\, dt \right) \right) dt.$$

Exemple 4.3. Cherchons une solution de l'équation $x'' - x' - 2x = e^{-t}$.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ admet les racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. La solution générale est donc

$$\begin{aligned} x &= e^{-t} \int \left(e^{3t} \left(\int e^{-2t} e^{-t} dt \right) \right) dt = e^{-t} \int \left(e^{3t} \left(-\tfrac{1}{3} e^{-3t} + \mu \right) \right) dt \\ &= e^{-t} \left(\tfrac{1}{3} \mu e^{3t} - \tfrac{1}{3} t + \mu \right) = \tfrac{1}{3} \mu e^{2t} + \left(\mu - \tfrac{1}{3} t \right) e^{-t}, \mu, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.2.8 Principe de superposition

Soit (E) l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \ ax'' + bx' + cx = f_1(x) + f_2(x)$$

On considere :

$$(E_1) \ : \ ax'' + bx' + cx = 0$$

$$(E_2) \ : \ ax'' + bx' + cx = f_1(x)$$

$$(E_3) \ : \ ax'' + bx' + cx = f_2(x)$$

Soit x_1, x_2 solutions respective de (E_2) et (E_3). La solution particuliere de (E) est $x_1 + x_2$.

4.3 Équations linéaires homogènes à coefficients analytiques

Soit donnée une équation différentielle du second ordre homogène

$$x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0. \tag{4.3}$$

Supposons que les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ puissent être représentés sous forme de séries suivant les puissances entières positives de t, c'est-à-dire $a(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ et $b(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$. Cherchons la solution de (4.3) sous la forme d'une série entière $x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$.

En introduisant cette expression de x et de ses dérivées dans (4.3), on obtient

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\,c_k t^{k-2} + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^{k-1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k\right) = 0. \tag{4.4}$$

En multipliant les séries entières, en groupant les termes semblables et en annulant les coefficients de toutes les puissances de t au premier membre de (4.4), on obtient une série d'équations

$$\begin{aligned}
t^0 &: \quad 2\cdot 1c_2 + a_0c_1 + b_0c_0 = 0,\\
t^1 &: \quad 3\cdot 2c_3 + 2a_0c_2 + a_1c_1 + b_0c_1 + b_1c_0 = 0,\\
t^2 &: \quad 4\cdot 3c_4 + 3a_0c_3 + 2a_1c_2 + a_2c_1 + b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 0,\\
. &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Chacune des équations suivantes (4.5) comporte un coefficient de plus que l'équation précédente. Les coefficients c_0 et c_1 restent arbitraires et jouent le rôle de constantes d'intégration. La première des équation (4.5) donne c_2, la deuxième c_3, la troisième c_4 et ainsi de suite. En pratique il est commode de procéder comme suit : d'après le schéma décrit plus haut on cherche deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$, en choisissant pour x_1, $c_0 = 1$ et $c_1 = 0$ et pour x_2, $c_0 = 0$ et $c_1 = 1$. Toute solution de (4.3) sera une combinaison linéaire de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

On peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Si les séries* $a(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ *et* $b(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$ *convergent pour* $|x| < R$, *alors la série* $x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ *construite par le procédé indiqué plus haut sera aussi convergente pour* $|x| < R$ *et constituera une solution de (4.3).*

En particulier si $a(t)$ et $b(t)$ sont des polynômes en t, la série $x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ sera convergente pour toute valeur de t.

Test 4.10. Trouver la solution de l'équation

$$x'' - tx' - 2x = 0 \tag{4.6}$$

sous forme d'une série entière.

Cherchons $x_1(t)$ sous forme de la série $x_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$, alors

$$x_1'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^{k-1}, x_1''(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k t^{k-2}.$$

En introduisant $x_1(t), x_1'(t)$ et $x_1''(t)$ dans (4.6), on obtient

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} - t \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^{k-1} - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k = 0. \tag{4.7}$$

En groupant dans (4.7) les termes semblables et en annulant les coefficients de toutes les puissances de t, on obtient des relations permettant de déterminer $c_0, c_1, \cdots$.

Posons $x_1(0) = 1$ et $x_1'(0) = 0$. Alors on trouve $c_0 = 1, c_1 = 0$. Ainsi, on a

$$\begin{array}{ll} t^0: & 2c_2 - 2c_0 = 0, \text{ d'où } c_2 = c_0 = 1, \\ t^1: & 6c_3 - c_1 - 2c_1 = 0, \text{ d'où } c_3 = \frac{1}{2}c_1 = 0, \\ t^2: & 12c_4 - 2c_2 - 2c_2 = 0, \text{ d'où } c_4 = \frac{1}{3}c_2 = \frac{1}{3}, \\ t^3: & 20c_5 - 3c_3 - 2c_3 = 0, \text{ d'où } c_5 = \frac{1}{4}c_3 = 0, \\ . & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots . \end{array}$$

Par conséquent $x_1(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{3}t^4 + \cdots$. De façon analogue, en prenant $x_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k$ et les conditions initiales $x_2(0) = 0$ et $x_2'(0) = 1$, on obtient $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$.

En portant $x_2(t)$ dans (4.6), on trouve

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha_k t^{k-2} - \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)\alpha_k t^k = 0.$$

Par un changement d'indice dans la première somme on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)\Big((k+1)\alpha_{k+2} - \alpha_k\Big) t^k = 0.$$

Alors $\alpha_{k+2} = \frac{1}{k+1}\alpha_k, k = 2, 3, \cdots$. On en déduit que $\alpha_{2k} = 0$ et $\alpha_{2k+1} = \frac{1}{k!2^k}$, et donc

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!2^k} t^{2k+1} = t\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = te^{\frac{t^2}{2}}.$$

La solution générale de l'équation (4.6) sera sous la forme $x(t) = \mu x_1(x) + \mu x_2(t), \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

4.3.1 Solution des équations différentièlle par Séries entières

Test 4.11. En utilisant les séries entières résoudre les équations différentièlles suivantes :

1. $(t^2+1)x''-2x=0,$

   (a) $x(0)=1,\ x'(0)=0$

   (b) $x(0)=0,\ x'(0)=1$

2. $t^2x''-2tx'+(2-t^2)x=0,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-1$

3. $t((1+t^2)x''-2(1+t^2)x=t^3,\quad x''(0)=0.$

Solution Posons $x(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n;$ on a

$$x'=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1} \text{ et } x''=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}.$$

On remplace x, x', x'' dans l'equation différentièlles on aura :

$$(t^2+1)\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}-2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n=0,$$

par suite,

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^n+\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}-2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n=0 \tag{1}$$

posons $n-2=m\Rightarrow n=m+2$,donc,

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}=\sum_{m+2=2}^{+\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}\,t^m=\sum_{m=0}^{+\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}\,t^m$$

ce qui donne,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, t^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0 \quad (2)$$

remarqons $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n \quad (3).$

On remplace (3) dans (2) on obtient,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\, t^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}[(n(n-1)-2)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}]t^n = 0 \quad (4)$$

on peut donner la formule recurente définie par (4) $a_{n+2} = \frac{-n^2+n+2}{(n+2)(n+1)}a_n = -\frac{(n-2)}{(n+2)}a_n, \ \ \forall n \geqslant 0.$

(a) $x(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ et $x'(0) = 1 \Rightarrow a_1 = 1.$

Ce qui donne,

$$\begin{cases} \text{Si } n = 0, \quad \text{alors } a_2 = a_0 = 1, \\ \text{Si } n = 1, \quad \text{alors } a_3 = \frac{1}{3}a_1 = 0, \\ \text{Si } n = 2, \quad \text{alors } a_4 = \frac{0}{4}a_2 = 0, \\ \text{Si } n = 3, \quad \text{alors } a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = 0, \end{cases}$$

donc, $a_2 = a_0 = 1,$, et $a_1 = a_3 = a_{2n+1} = a_{2n} = 0, \ \forall n \geqslant 2;$

D'où la solution d'équation différentièlle est $x(t) = 1 + t^2.$

(b) $x(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$ et $x'(0) = 1 \Rightarrow a_1 = 0.$

par la formule recurente $a_{n+2} = \frac{-n^2+n+2}{(n+2)(n+1)}a_n = -\frac{(n-2)}{(n+2)}a_n, \ \ \forall n \geqslant 0.$

On trouve $a_0 = a_2 = a_{2n} = 0, \ \forall n \geqslant 2.$

De plus,

1) Si $n = 1$ alors, $a_3 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}.$

2)Si $n = 3$ alors, $a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = -\frac{1}{5}\frac{1}{3}.$

3)Si n=5 alors, $a_7 = -\frac{3}{7}a_5 = \frac{1}{5\times7}$.

Ce qui donne

$$a_{2n+1} = (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\ \forall n \geqslant 1.$$

donc la solution de l'équation différentièlles est

$$x(t) = t + \sum_{n\geqslant1}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}t^{2n+1}.$$

comme $arctg(t) = \sum_{n\geqslant1}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)}t^{2n+1}$ alors,

$$x(t) = \frac{3t}{2} + \frac{1}{2}(1+t^2)arctg(t).$$

2)$t^2x'' - 2tx' + (2-t^2)t = 0,\ \ x(0) = 0,\ x'(0) = -1.$

Posons

$$x(t) = \sum_{n\geqslant0} a_n t^n, x' = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n-1} \text{ et } x'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}.$$

On remplace x, x', x'' dans l'equation différentièlles on aura :

$$t^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - 2t\sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n-1} + (2-t^2)\sum_{n\geqslant0} a_n t^n = 0$$

ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}[n(n-1)-2n+2]a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+2} = 0$$

par suite

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-3n+2)a_n t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}t^n = 0$$

on en déduit que la formule recurente est

$$a_n = \frac{1}{((n-1)(n-2)} a_{n-2}, \quad \forall n \geqslant 3$$

ce qui donne,

$$a_0 = x(0) = 0, a_1 = x\prime(0) = 1$$

1) Si $n = 3$ alors, $a_3 = \frac{1}{1\times 2} a_1 = \frac{1}{1\times 2}$.

2)Si $n = 4$ alors, $a_4 = -\frac{1}{2\times 3} a_2, \;$ a_2 arbitraire

3)Si $n = 6$ alors, $a_6 = \frac{1}{5!} a_2$

ce qui implique

$$x(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n)!} + a_2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n-1)!} = -t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + a_2 t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

finalement la solution d'équation différentièlle est

$$x(t) = -t ch(t) + a_2 t sh(t)$$

3)$t((1+t^2)x'' - 2(1+t^2)x = t^3, \quad x''(0) = 0$. Posons

$$x(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n, x' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } x'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

On remplace x, x', x'' dans l'equation différentièlles on aura :

$$(t+t^3)x' + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - 2(1+t^2) \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n = t^3$$

par suite,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^{n+2} - 2\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n - 2\sum_{n\geqslant 0} a_n t^{n+2} = t^3.$$

on développe le premier terme

$$-2a_0+(a_1-2a_1)t+2(2a_2-2a_0)t^2+(3a_3+a_1-2a_3-2a_1)t^3+\sum_{n\geqslant 4}(na_n+(n-2)a_{n-2}-2a_n-2a_{n-2})t^n = t^3;$$

Donc,

$$a_0 = 0; a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1 \text{ et } a_n = -\frac{n-4}{n-2}a_{n-2},\quad \forall n.$$

de plus,

$$a_4 = 0, a_6 = 0, a_{2n} = 0,\quad \forall n \geqslant 4.$$

$$a_5 = -\frac{1}{3}a_3 = -\frac{1}{3}, a_7 = -\frac{3}{5}a_5 = \frac{1}{5};\ a_9 = -\frac{5}{7}a_5 = -\frac{1}{7}$$

et

$$a_{2n+1} = (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}; \forall n \geqslant 2.$$

ce qui donne

$$x(t) = a_1 t + a_3 t^3 + \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n+1} = t^3 + \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n+1} = t^2\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n-1} = t^2\mathrm{Arctg}(t).$$

4.3.2 Coefficients analytiques, points réguliers

Définition 4.3 (Points régulier et singulier). *On dit qu'un point t_0 est un point régulier ou ordinaire de l'équation différentielle*

$$x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0, \tag{4.8}$$

si les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ sont analytiques en ce point ; dans le cas contraire, le point t_0 s'appelle point singulier de l'équation différentielle (4.8).

Dans les exemples suivants, $t_0 = 0$.

4.3.2.1 L'équation différentielle d'Airy

C'est l'équation

$$x'' - tx = 0.$$

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$(k+2)(k+1)\,c_{k+2} = c_{k-1} \text{ pour } k \geqslant 1,\ c_2 = 0.$$

D'où $c_{3k} = \dfrac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (3k-1)(3k)}$, $c_{3k+1} = \dfrac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3k)(3k+1)}$, $c_{3k+2} = 0$, et donc

$$x(t) = c_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{3k} t^{3k}\right) + c_1 \left(t + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{3k+1} t^{3k+1}\right).$$

4.3.2.2 L'équation différentielle d'Hermite

C'est l'équation

$$x'' - 2tx' + ax = 0, a \in \mathbb{R}.$$

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kt^k$ est

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}=-(a-2k)c_k \text{ pour } k\geqslant 0.$$

D'où

$$c_{2k}=\tfrac{(-1)^k}{(2k)!}a(a-4)(a-8)\cdots(a-4(k-1))c_0,$$

$$c_{2k+1}=\tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}(a-2)(a-6)\cdots(a-2-4(k-1))c_1,$$

et

$$x(t)=c_0x_0(t)+c_1x_1(t) \text{ où } x_0(t)=1+\sum_{k=1}^{+\infty}c_{2k}t^{2k} \text{ et } x_1(t)=t+\sum_{k=1}^{+\infty}c_{2k+1}t^{2k+1}.$$

Lorsque $a=2n$ est un entier pair, $c_{n+2}=0$ et la solution paire $x_0(t)$ est un polynôme si n est pair, la solution impaire $x_1(t)$ est un polynôme si n est impair. Le n-ième polynôme d'Hermite est normalisé par la condition que le coefficient de t^n vaut 2^n. Son expression est

$$H_n(t)=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{n!2^{n-2k}}{k!(n-2k)!}t^{n-2k}.$$

4.3.2.3 L'équation différentielle de Tchebychev

C'est l'équation

$$\left(1-t^2\right)x''-tx'+a^2x=0, a\in\mathbb{R}.$$

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kt^k$ est

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}=-\left(a^2-k^2\right)c_k \text{ pour } k\geqslant 0.$$

D'où

$$c_{2k} = \tfrac{(-1)^k}{(2k)!} a^2 \left(a^2-4\right)\left(a^2-16\right)\cdots\left(a^2-(2k-2)^2\right)c_0,$$

$$c_{2k+1} = \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(a^2-1\right)\left(a^2-9\right)\cdots\left(a^2-(2k-1)^2\right)c_1,$$

et

$$x(t) = c_0 x_0(t) + c_1 x_1(t) \text{ où } x_0(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k} t^{2k} \text{ et } x_1(t) = t + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k+1} t^{2k+1}.$$

Lorsque $a = n$ est un entier, $c_{n+2} = 0$ et la solution paire $x_0(t)$ est un polynôme si n est pair, la solution impaire $x_1(t)$ est un polynôme si n est impair. Le n-ième polynôme de Tchebychev est normalisé par la condition que le coefficient de t^n vaut 2^{n-1}. Son expression est

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j}\binom{j}{k} t^{n-2k} \text{ avec } \binom{j}{k} = \frac{j!}{k!\,(j-k)!}.$$

Le polynôme de Tchebychev possède la propriété remarquable de pouvoir s'écrire sous la forme $T_n(t) = \cos(n \operatorname{Arcsin} t)$. En effet, posant $t = \cos\theta$, l'équation $\left(1-t^2\right)\dfrac{d^2x}{dt^2} - t\dfrac{dx}{dt} + n^2 x = 0$ devient $\dfrac{d^2x}{d\theta^2} + n^2x = 0$ et $x = \cos(n\theta)$ est la solution qui coïncide avec $T_n(\cos\theta)$.

4.3.2.4 L'équation différentielle de Legendre

C'est l'équation

$$\left(1-t^2\right)x'' - 2tx' + a(a+1)x = 0, a \in \mathbb{R}.$$

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = -\left(a(a+1) - k(k+1)\right)c_k \text{ pour } k \geqslant 0.$$

D'où

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a\,(a-2)\cdots(a-2k+2)\,(a+1)\,(a+3)\cdots(a+2k-1)\,c_0,$$

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,(a-1)\,(a-3)\cdots(a-2k+1)\,(a+2)\,(a+4)\cdots(a+2k)\,c_1,$$

et

$$x\,(t) = c_0 x_0\,(t) + c_1 x_1\,(t) \text{ où } x_0\,(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k} t^{2k} \text{ et } x_1\,(t) = t + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k+1} t^{2k+1}.$$

Lorsque $a = n$ est un entier, $c_{n+2} = 0$ et la solution paire $x_0\,(t)$ est un polynôme si n est pair, la solution impaire $x_1\,(t)$ est un polynôme si n est impair. Le n-ième polynôme de Legendre $P_n\,(t)$ est normalisé par la condition que $P_n\,(1) = 1$. Son expression est

$$P_n\,(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} t^{n-2k}.$$

4.3.3 Coefficients analytiques, points singuliers

Nous supposons que t_0 est un point singulier régulier de l'équation différentielle

$$x'' + a\,(t)\,x' + b\,(t)\,x = 0,$$

c'est-à-dire que les limites $\lim\limits_{t\to t_0} (t-t_0)\,a\,(t)$ et $\lim\limits_{t\to t_0} (t-t_0)^2\,b\,(t)$ existent. Pour simplifier, prenons $t_0 = 0$. On peut alors réécrire l'équation précédente sous la forme

$$t^2 x'' + tp\,(t)\,x' + q\,(t)\,x = 0, \tag{4.9}$$

où $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k t^k$ et $q(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q_k t^k$ sont analytiques dans $|t| < \rho$.

Pour résoudre cette équation, on cherche, suivant Frobenius, une solution de la forme

$$x(t) = t^r \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k,\ c_0 \neq 0. \tag{4.10}$$

Pour déterminer l'exposant r et les coefficients c_k il faut introduire la série (4.10) dans l'équation (4.9), simplifier par t^r et annuler les coefficients de toutes les puissances de t. Dans ce cas, le nombre r se détermine à partir de l'équation dite déterminante

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0. \tag{4.11}$$

Soient r_1 et r_2 les racines de l'équation déterminante (4.11). Trois cas différents peuvent se présenter.

1. Si $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, alors on peut construire deux solutions de la forme (4.10)

$$x_1(t) = t^{r_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{1,k} t^k,\ c_{1,0} \neq 0, \quad x_2(t) = t^{r_2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2,k} t^k,\ c_{2,0} \neq 0.$$

2. Si $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$, alors $x_1(t) = t^{r_1} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_{1,k} t^k,\ c_{1,0} \neq 0$ et x_2 est une deuxième solution linéairement indépendante analytique dans $0 < t < \rho$:

$$x_2(t) = a x_1(t) \operatorname{Log} t + t^{r_2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2,k} t^k,$$

avec a une constante dépendante de r_2.

3. Si $r_1 = r_2$, alors x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes analytiques dans $0 < t < \rho$:

$$x_1(t) = t^{r_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{1,k} t^k,\ x_2(t) = x_1(t) \operatorname{Log} t + t^{r_2} \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2,k} t^k.$$

Test 4.12. Résoudre l'équation

$$2t^2x'' + t(3-2t)x' - (t+1)x = 0. \tag{4.12}$$

Solution. Écrivons (4.12) sous la forme

$$x'' + \frac{3-2t}{2t}x' - \frac{t+1}{2t^2}x = 0.$$

Cherchons la solution x sous la forme $x(t) = t^r \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$, $c_0 \neq 0$. Pour déterminer r écrivons l'équation déterminante $r(r-1)+p_0r+q_0 = 0$, où $p_0 = \lim_{t\to 0} \frac{3-2t}{2} = \frac{3}{2}$ et $q_0 = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{t+1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = 0$, ou $r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$, d'où $r_1 = \frac{1}{2}$ et $r_2 = -1$.

En vertu de la règle énoncée plus haut, prenons

$$x_1(t) = \sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k, (t>0), \quad x_2(t) = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k.$$

Pour trouver les a_k il faut introduire x_1 et ses dérivées x_1' et x_1'' dans (4.12)

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k+\frac{1}{2}},\ x_1'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)a_k t^{k-\frac{1}{2}},\ x_1''(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(k^2-\tfrac{1}{4}\right)a_k t^{k-\frac{3}{2}}.$$

L'introduction de x_1, x_1' et x_1'' dans (4.12) donne

$$2t^2\sum_{k=0}^{+\infty}\left(k^2-\tfrac{1}{4}\right)a_k t^{k-\frac{3}{2}} + t(3-2t)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)a_k t^{k-\frac{1}{2}} - (t+1)\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k+\frac{1}{2}} = 0.$$

Après les transformations, on obtient

$$\sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty} k(2k+3)a_k t^k - \sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1)a_k t^{k+1} = 0.$$

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution x_1 est donc

$$k\left(2k+3\right)a_k = 2ka_{k-1} \text{ pour } k \geqslant 1.$$

En prenant $a_0 = 1$, il vient $a_k = \frac{2^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots\cdot(2k+3)}$, $k \geqslant 1$, et donc

$$x_1\left(t\right) = \sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots\cdot(2k+3)}t^k, \left(t>0\right).$$

D'une manière analogue, en prenant $b_0 = 1$, on obtient $b_k = \frac{1}{k!}$, si bien que $x_2\left(t\right) = \frac{1}{t}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}t^k$ ou $x_2\left(t\right) = \frac{e^t}{t}$. La solution générale de l'équation (4.12) est

$$x\left(t\right) = \mu x_1\left(t\right) + \mu x_2\left(t\right) = \mu\sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots\cdot(2k+3)}t^k + \mu\frac{e^t}{t},\ \ \mu,\mu\in\mathbb{R}.$$

4.3.3.1 L'équation différentielle d'Euler

C'est l'équation

$$t^2x'' + tp_0x' + q_0x = 0,\ p_0,,q_0\in\mathbb{R} \tag{4.13}$$

On cherche des solutions particulières sous la forme $x = t^r$. On a

$$x' = rt^{r-1} \text{ et } x'' = r\left(r-1\right)t^{r-2},$$

en reportant, on obtient l'équation $r\left(r-1\right) + p_0r + q_0 = 0$ du second degré en r.

Si cette équation a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, $r_1 \neq r_2$ alors $x_1 = t^{r_1}$ et $x_2 = t^{r_2}$ sont deux solutions particulières indépendantes donc $x = \mu t^{r_1} + \mu t^{r_2},\ \mu,\mu\in\mathbb{R}$.

Sinon on utilise la méthode plus générale : on effectue un changement de variable en posant $t = e^s$, on note $x\left(t\right) = x\left(e^s\right) = z\left(s\right)$ et on exprime $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ en fonction de $\dfrac{dz}{ds}$ et $\dfrac{d^2z}{ds^2}$.

On a

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(e^s)}{dt} = \frac{dx(e^s)}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dz(s)}{ds}\cdot\frac{1}{t} \quad \text{donc } t\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{ds},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz(s)}{ds}\cdot\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\right) \quad \text{donc } t^2\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}.$$

On obtient alors l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\frac{d^2z}{ds^2} + (p_0 - 1)\frac{dz}{ds} + q_0 z = 0.$$

On aura alors suivant la nature des racines du polxnôme caractéristique $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0$:

- $x = \mu t^{r_1} + \mu t^{r_2}$ dans le cas de deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, $r_1 \neq r_2$.
- $x = t^a(\mu\cos(b\operatorname{Log} t) + \mu\sin(b\operatorname{Log} t))$ dans le cas de deux racines complexes conjuguées $a \pm ib = \frac{1-p_0}{2} \pm i\frac{\sqrt{4q_0-(1-p_0)^2}}{2}$.
- $x = (\mu + \mu\operatorname{Log} t)\,t^{r_0}$ dans le cas d'une racine réelle double $r_0 = \frac{1-p_0}{2}$.

Test 4.13. Soit l'équation $t^2x'' - tx' - 3x = 0$.

On cherche des solutions particulières sous la forme $x = t^r$, on obtient une équation du second degré $r(r-1) - r - 3 = 0$ soit $r^2 - 2r - 3 = 0$, on trouve $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$.

Alors la solution générale est $x = \mu t^3 + \frac{\mu}{t}$, $\mu, \mu \in \mathbb{R}$.

Test 4.14. Soit l'équation $t^2x'' + 3tx' + x = 0$.

On cherche des solutions particulières sous la forme $x = t^r$, on obtient une équation du second degré $r(r-1) + 3r + 1 = 0$ soit $(r+1)^2 = 0$, on trouve $r = -1$ comme racine double. On utilise alors la méthode plus générale : on pose $t = e^s$ et on note $x(t) = x(e^s) = z(s)$. Alors $\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dz}{ds}$ car $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}$ et $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\right)$. L'équation $t^2x'' + 3tx' + x = 0$ se transforme alors en $\frac{d^2z}{ds^2} + 2\frac{dz}{ds} + z = 0$. On résout l'équation caractéristique $r^2+2r+1 = 0$: on trouve $r = -1$ comme racine double donc $z(s) = e^{-s}(\mu + \mu s)$. Alors la solution générale est $x = \frac{1}{t}(\mu + \mu \operatorname{Log} t)$, $\mu, \mu \in \mathbb{R}$.

4.3.3.2 L'équation différentielle de Laguerre

C'est l'équation $tx'' + (1-t)x' + ax = 0, \ a \in \mathbb{R}$.

On a ici $p(t) = 1-t$ et $q(t) = at$ et $t = 0$ est un point singulier régulier. L'équation déterminante est $r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$, où $p_0 = p(0) = 1$ et $q_0 = q(0) = 0$, c'est-à-dire $r(r-1) + r = 0$, ou $r^2 = 0$, d'où $r_1 = r_2 = 0$.

La relation de récurrence pour les coefficients c_k de la solution $x_1(t) = t^{r_1}\sum_{k=0}^{+\infty} c_kt^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_kt^k$ est

$$k^2c_k = -(a+1-k)\,c_{k-1} \text{ pour } k \geqslant 1.$$

En prenant $c_0 = 1$, il vient $c_k = (-1)^k \frac{a(a-1)\cdots(a-(k-1))}{1^2.2^2.\dots.k^2}$, $k \geqslant 1$, et donc

$$x_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a(a-1)\cdots(a-(k-1))}{(k!)^2} t^k,$$

et

$$x_2(t) = x_1(t)\operatorname{Log} t + t^{r_2}\sum_{k=1}^{+\infty} b_kt^k = x_1(t)\operatorname{Log} t + \sum_{k=1}^{+\infty} b_kt^k.$$

Lorsque $a = n$ est un entier, x_1 est un polynôme. Le n-ième polynôme de Laguerre $L_n(t)$ est normalisé par $L_n(0) = 1$. Son expression est

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!}, \text{ où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

4.3.3.3 L'équation différentielle hypergéométrique

C'est l'équation $t(1-t)x'' + (\gamma - (1+\alpha+\beta)t)x' - \alpha\beta x = 0,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Ici $p(t) = \frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)t}{1-t}$ et $q(t) = \frac{-\alpha\beta t}{1-t}$ et $t = 0$ est un point singulier régulier. On a $p_0 = p(0) = \gamma$ et $q_0 = q(0) = 0$, donc l'équation déterminante en $t = 0$ est $r(r-1) + \gamma r = 0$, d'où $r_1 = 0$ et $r_2 = 1 - \gamma$. Le point $t = 1$ est aussi un point singulier régulier.

On considère le point $t = 0$ en supposant que $1-\gamma \notin \mathbb{N}^*$. Sur l'intervalle $]0, 1[$, on aura une solution $x_1(t) = t^{r_1} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ avec la récurrence $(k+1)(k+\gamma)c_{k+1} = (k+\alpha)(k+\beta)c_k$ pour $k \geqslant 0$, ce qui conduit, en prenant $c_0 = 1$, à

$$x_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(k!)^2} t^k. \tag{4.14}$$

On aura une seconde solution linéairement indépendante $x_2(t) = t^{1-\gamma}\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k t^k\right)$ avec cette fois la récurrence

$$(k+1)(k+1+1-\gamma)c_{k+1} = (k+1-\gamma+\alpha)(k+1-\gamma+\beta)c_k \text{ pour } k \geqslant 0.$$

D'où

$$x_2(t) = t^{1-\gamma}\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma)\cdots(\alpha+k-\gamma)(\beta+1-\gamma)\cdots(\beta+k-\gamma)}{(k!)(2-\gamma)\cdots(k+1-\gamma)} t^k\right).$$

Quant au point $t = 1$, le changement de variables $s = 1 - t, z(s) = x(1-t)$ on ramène l'étude à celle de l'équation

$$s(1-s)z'' + (1 + \alpha + \beta - \gamma - (1 + \alpha + \beta)s)z' - \alpha\beta z = 0$$

au point $s = 0$.

La fonction hypergéométrique est

$${}_pF_q(a_1, a_2, \cdots, a_p, b_1, b_2, \cdots, b_q)(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_p)_k k!} t^k,$$

où $(c)_k = c(c+1)(c+2)\cdots(c+k-1)$, $k \geqslant 1$.

4.3.3.4 L'équation différentielle de Bessel

C'est l'équation $t^2x'' + tx' + (t^2 - \alpha^2)x = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Ici $p(t) = 1$ et $q(t) = t^2 - \alpha^2$ et $t = 0$ est un point singulier régulier. On a $p_0 = p(0) = 1$ et $q_0 = q(0) = -\alpha^2$, donc l'équation déterminante en $t = 0$ est $r(r-1) + r - \alpha^2 = 0$, d'où $r_1 = -\alpha$ et $r_2 = \alpha$.

Cherchons une première solution particulière x_1 sous la forme $x_1(t) = t^\alpha \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$, $c_0 \neq 0$.

Introduisons x_1, x_1' et x_1'' dans l'équation différentielle de Bessel, il vient

$$t^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1)c_k t^{k+\alpha-2} + t\sum_{k=0}^{+\infty}(k+\alpha)c_k t^{k+\alpha-1} + (t^2 - \alpha^2)\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{k+\alpha} = 0,$$

ou encore, après des transformations simples et la simplification par t^α,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left((k+\alpha)^2 - \alpha^2\right) c_k t^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{k+2} = 0.$$

Ce qui donne la récurrence $\left((k+\alpha)^2-\alpha^2\right)c_k=-c_{k-2}$ pour $k\geqslant 2$, ce qui conduit à

$$c_{2k+1}=0,\ k\geqslant 0,\ \text{et}\ c_{2k}=(-1)^k\frac{c_0}{2^{2k}(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)\,k!},\ k\geqslant 1.$$

Pour simplifier les calculs ultérieures, prenons $c_0=\frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$, où Γ est la fonction gamma d'Euler, qui est déterminée pour toutes les valeurs positives (ainsi que pour toutes les valeurs complexes à partie réelle positive) par la relation

$$\Gamma(\nu)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\nu-1}dx.$$

La fonction gamma possède les propriétés importantes suivantes :

1) $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu)$,

2) $\Gamma(k)=k!,\ \ k\in\mathbb{N}^*$,

3) $\Gamma(\nu+k+1)=(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)\Gamma(\nu+1),\ \ k\in\mathbb{N}^*$.

En utilisant les propriétés de la fonction gamma, écrivons le coefficient c_{2k} sous la forme

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)\Gamma(\alpha+1)\,k!}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+\alpha}\Gamma(\alpha+k+1)\,k!}.$$

Maintenant, la première solution particulière de l'équation de Bessel, que nous désignerons par J_α prend la forme

$$x_1(t)=J_\alpha(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha}. \tag{4.15}$$

Cette fonction s'appelle fonction de Bessel de première espèce d'ordre α.

Une deuxième solution particulière x_2 de l'équation de Bessel sera cherchée sous la forme

$x_2(t)=\ t^{-\alpha}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_kt^k,\ c_0\neq 0$. Il est clair que cette solution peut être obtenue à partir de (4.15) en remplaçant α par $-\alpha$

$$x_2(t) = J_{-\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-\alpha)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\alpha}.$$

Cette fonction s'appelle fonction de Bessel de première espèce d'ordre $-\alpha$.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, les solutions J_α et $J_{-\alpha}$ sont linéairement indépendantes, donc la solution générale de l'équation de Bessel peut être représentée sous la forme

$$x(t) = \mu J_\alpha(t) + \mu J_{-\alpha}(t), \; \mu, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, J_α et $J_{-\alpha}$ sont linéairement dépendantes puisque $J_n(t) = (-1)^n J_{-n}(t)$. Ainsi, pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, au lieu de $J_{-\alpha}$ il faut chercher une autre solution qui soit linéairement indépendante de J_α. À cet effet, introduisons une nouvelle fonction

$$Y_\alpha(t) = \frac{J_\alpha(t)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(t)}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{4.16}$$

en considérant d'abord que $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Il est évident que la fonction Y_α ainsi définie est solution de l'équation de Bessel, parce qu'elle représente une combinaison linéaire de solutions particulières J_α et $J_{-\alpha}$.

En passant dans (4.16) à la limite lorsque α tend vers un entier, on obtient un solution particulière Y_α linéairement indépendante de J_α.

La fonction Y_α introduite ci-dessus s'appelle fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre α.

La solution générale de l'équation de Bessel si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ peut être représentée sous la forme

$$x(t) = \mu J_\alpha(t) + \mu Y_\alpha(t), \; \mu, \mu \in \mathbb{R}.$$

On considère les équations différentielles linéaires du 2nd ordre à coefficients constants de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u''(t) + au'(t) + bu(t) = 0, \tag{4.17}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Le but est de déterminer toutes les fonctions qui sont solutions de cette équation différentielle.

La première partie traite de la résolution de cette équation différentielle et la seconde du problème de Cauchy constitué de cette équation et de conditions initiales de la forme $u(t_0) = \alpha$ et $u'(t_0) = \beta$.

4.4 Résolution de l'équation différentielle

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (4.17) est un espace vectoriel : il suffit de vérifier que si u et v sont 2 fonctions solutions de (4.17), alors pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, $\mu u + \nu v$ est également solution de cette équation différentielle. On admettra que cet espace vectoriel est de dimension 2. Pour le déterminer, il suffit donc de trouver 2 fonctions solutions de l'équation différentielles (4.17) qui sont linéairement indépendantes.

On commence par chercher les fonctions de la forme $u(t) = \exp(\mu t)$ qui vérifient l'équation (4.17). On obtient alors une équation du second degré en μ, appelée équation caractéristique associée à l'équation différentielle (4.17) :

$$\mu^2 + a\mu + b = 0. \tag{4.18}$$

On a la propriété : μ est une solution de l'équation (4.18) si et seulement si la fonction $t \mapsto \exp(\mu t)$ est solution de l'équation différentielle (4.17).

Selon la valeur du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$, on obtient les résultats suivants :

- Si $\Delta > 0$, l'équation (4.18) admet 2 racines réelles distinctes μ_1 et μ_2. Les fonctions qui vérifient l'équation différentielle (4.17) sont telles que

$$u(t) = A\exp(\mu_1 t) + B\exp(\mu_2 t) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (4.17) forme un espace vectoriel de dimension 2 engendré par les 2 fonctions f_1 et f_2 telles que :

$$f_1(t) = \exp(\mu_1 t) \text{ et } f_2(t) = \exp(\mu_2 t).$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation (4.18) admet 1 unique racine réelle μ_0. La fonction $x \mapsto \exp(\mu_0 t)$ est donc solution de l'équation différentielle (4.17). On montre alors que la fonction $x \mapsto t\exp(\mu_0 t)$ est également solution de (4.17). Ces 2 fonctions sont linéairement indépendantes. On en déduit que les fonctions qui vérifient l'équation différentielle (4.17) sont telles que

$$u(t) = (A + Bt)\exp(\mu_0 t) \text{ avec } A, B \in R.$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (4.17) forme un espace vectoriel de dimension 2 engendré par les 2 fonctions f_1 et f_2 telles que :

$$f_1(t) = \exp(\mu_0 t) \text{ et } f_2(t) = t\exp(\mu_0 t).$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation (4.18) admet 2 racines complexes conjuguées $\mu = \mu + i\nu$ et μ. Les fonctions qui vérifient l'équation différentielle (4.17) sont telles que

$$u(t) = A\exp(\mu t) + B\exp(\mu t) \text{ avec } A, B \in \mathbb{C}.$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. On note que si l'on veut des solutions réelles (ce qui est en général le cas dans une équation modélisant un problème physique), on doit avoir $B = A$. On peut alors écrire $\exp(\mu t) = \exp(\mu t) \times \exp(i\nu t)$. En utilisant les formules d'Euler, on obtient la forme réelle des fonctions solutions de l'équation différentielle (4.17) :

$$u(t) = \exp(\mu t) \times (A \cos \nu t + B \sin \nu t),$$

où A et B sont des constantes réelles. Plus précisément, on a :

$$A = \frac{A + A}{2} = \mathrm{Re}(A) \text{ et } B = \frac{A - A}{2i} = \mathrm{Im}(A).$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (4.17) forme un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2 engendré par les 2 fonctions f_1 et f_2 telles que :

$$f_1(t) = \exp(\mu t) \cos \nu t \text{ et } f_2(t) = \exp(\mu t) \sin \nu t.$$

4.5 Problème de Cauchy

En général, l'équation différentielle (4.17) est couplée avec des **conditions initiales** de sorte que le problème à résoudre soit :

$$\begin{cases} x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0 \\ x(t_0) = \alpha \text{ et } x'(t_0) = \beta \end{cases}, \tag{4.19}$$

avec α, β données et $t_0 \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, on commence par résoudre l'équation différentielle (4.17) : se reporter au paragraphe précédent. Résoudre le problème (4.19) revient alors à chercher parmi les solutions de (4.17) celles qui vérifient de plus la condition

$$\begin{cases} u(t_0) = \alpha \\ u'(t_0) = \beta \end{cases}.$$

Dans tous les cas, le problème admet une unique solution obtenue en résolvant le système linéaire ci-dessus.

4.6 Série d'exercices

Exercice 4.1. *On considère une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants.*

$$A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + cx(t) = 0 \tag{(E)}$$

Les fonctions A *et* B *sont définies dans un intervalle* J *et la fonction* A *est à valeurs strictement positives,* c *est un réel fixé. On considère une fonction* $f \in C^2(J)$ *dont la dérivée première est à valeurs strictement positives.*

a) La fonction f *est-elle bijective ?*

b) Soit $z = u \circ f$*. Former une equation différentielle* (1) *telle que :*

$$u \textit{ solution de } (1) \iff z \textit{ solution de } (E)$$

Sous quelles conditions cette équation est-elle à coefficients constants ?

c) Appliquer l'idée de la question précédente pour résoudre l'équation

$$(1-t^2)x''(t) - tx'(t) + 9x(t) = 0 \tag{(E)}$$

dans l'intervalle $J =]-1,1[$.

Exercice 4.2. *On considère une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants.*

$$A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + cx(t) = 0 \tag{(E)}$$

Les fonctions A *et* B *sont définies dans un intervalle* J *et la fonction* A *est à valeurs strictement positives,* c *est un réel fixé. On considère une fonction* $f \in C^2(J)$ *dont la dérivée première est à valeurs strictement positives.*

a) La fonction f *est-elle bijective ?*

b) Soit $z = u \circ f$. *Former une equation différentielle* (1) *telle que :*

$$u \text{ solution de } (1) \iff z \text{ solution de } (E)$$

Sous quelles conditions cette équation est-elle à coefficients constants ?

c) Appliquer l'idée de la question précédente pour résoudre l'équation

$$(1-t^2)x''(t) - tx'(t) + 9x(t) = 0 \tag{(E)}$$

dans l'intervalle $J =]-1,1[$.

d) Soit l'équation différentielle du second ordre

$$2t\,(1-t)\,x'' + (3-5t)\,x' - x = 0 \tag{4.20}$$

d.1. Mettre l'équation () *sous la forme*

$$\frac{d}{dt}\left[g\left(t\right)x' + h\left(t\right)x\right] = 0$$

d.2. Déterminer les solutions de l'équation ()

Exercice 4.3. *Soient* $I = [a, b]$ *un intervalle fermé où* a *et* b *désignent deux nombres réels (*$a < b$*),* E *l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de la variable réelle* t, *deux fois dérivables sur* I *et* F *l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de la variable réelle* t *continues sur* I.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$x''(t) + g(t)x(t) = 0. \tag{4.21}$$

où $x\left(.\right)$ *est une fonction réelle inconnue. On supposera que* g *est dans* F.

1. *L'ensemble des solutions de la seule équation* (10.1) *constitue un sous-espace vectoriel* G *de dimension* 2 *de l'espace vectoriel* E.

Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux solutions x_1 *et* x_2 *de l'équation* (10.1) *soient linéairement indépendantes est que le déterminant*

$$\Delta\left(x_1, x_2\right)\left(t\right) = \begin{vmatrix} x_1\left(t\right) & x_2\left(t\right) \\ x_1'\left(t\right) & x_2'\left(t\right) \end{vmatrix},$$

soit constant et non nul sur tout l'intervalle I.

2. *On suppose connue une solution particulière* h *de* (10.1) *qui ne s'annule pas.*

On pose $x\left(t\right) = h\left(t\right)z\left(t\right)$.

Ecrire l'équation différentielle (E) *vérifiée par la nouvelle fonction inconnue* z *et montrer qu'à* *toute solution de* (E) *on peut associer un réel* k *tel que*

$$z' = \frac{k}{h^2}.$$

3. *Soit* g *une fonction continue et négative sur* $[0,1]$. *Montrer que, si* u *est une solution de* (10.1) *telle que* $u(0) = u(1) = 0$, *alors*

$$\int_0^1 \left[u'^2(t) - g(t)\,u^2(t)\right] dt = 0.$$

Que peut-on en déduire pour la solution u *?*

4. *Soit* g *une fonction continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *non nulle et négative, Soit* v *une solution de l'équation* (10.1), *montrer que* v^2 *est convexe.*

beginexercise Résoudre l'équation différentielle suivante : :

$$x"(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t + e^{2t}$$

Exercice 4.4. *Soit l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$(2\alpha - \beta)x"(t) - 2\alpha x'(t) + \beta x(t) = te^t + \cos t$$

et son équation homogène associée

$$(2\alpha - \beta)x"(t) - 2\alpha x'(t) + \beta x(t) = 0$$

où α et β sont deux réels qui vérifient la condition $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

a/ Donner la solution générale de l'équation homogène.

b/ Dans le cas où $\alpha = \beta = 1$ donner la solution générale de l'équation (L)

Exercice 4.5. *Trouver l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes a)* $x'' + x' + x = 0, \quad 9x'' + 24x' + 16x = 0, x'' - 3x' - x = 0, \quad x'' + 12x' = 0.$

Exercice 4.6. *Trouver la solution des problèmes de Cauchy suivants :*

1. $x'' + x' + x = 0$ *et* $x(0) = x'(0) = 1.$
2. $9x'' + 24x' + 16x = 0$ *et* $x'(2) = -3.$
3. $x'' - 3x' - x = 0$ *et* $x'(-1) = 2.$
4. $x'' - 4x' + 3x = 0$ *et* $x(0) = x'(0) = 1.$
5. $x'' - 6x' + 9x = 0$ *et* $x'(0) = 2.$
6. $\theta'' + 9\theta = 0$ *et* $\theta(\pi/2) = \theta'(\pi/2) = 0.$

Exercice 4.7.

1. *Montrer que l'équation différentielle* $x'' + 3x' - 4x = 0$ *possé de une unique solution telle que* $x(0) = 0, x(1) = 1.$
2. *Montrer que l'équation différentielle* $x'' + 4x' + 5x = 0$ *n'admet* aucune *solution telle que* $x(0) = 0, x(\pi) = 1$ *; par contre, elle admet une infinité de solutions telles que* $x(0) = x(2\pi) = 0.$ *Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème du cours ?*

Exercice 4.8. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $x'' + 2x' + 3x = \cos(t)$, *en cherchant une solution particulière de la forme* $\alpha \cos(t) + \beta \sin(t).$
2. $x'' - x' - x = -e^{3t}$, *en cherchant une solution particulière de la forme* $\alpha e^{3t}.$

3. $x'' - x' - x = e^t \sin(2t)$, *en cherchant une solution particulière de la forme :*

   $\alpha e^t \sin(2t) + \beta e^t \cos(2t)$.

Exercice 4.9. 1. *Montrer que l'équation différentielle* $x'' + x = \cos(t) + \sin(t)$ *ne peut avoir aucune solution du type :* $\alpha \cos t + \beta \sin t$.

2. *La résoudre en cherchant une solution particulière du type* $\alpha t \cos t + \beta t \sin t$.

Exercice 4.10. *Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :*

1. $x'' + 2x' - 3x = 5e^{2t}$.

2. $x'' - 2x' + x = e^t - t - 1$.

Exercice 4.11. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $x'' + x' = t + 2$, ***b)*** $tx'' = x' + t^2$, ***c)*** $x^2 x'' + x' = 0$, ***d)*** $xx'' = x' + (x')^2$, ***e)*** $x'' = e^{2x}$.

Exercice 4.12. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $2xx'' - 3(x')^2 = 4tx^2$, ***b)*** $xx'' - (x')^2 + xx' + tx^2 = 0$.

Exercice 4.13. *Montrer que l'équation différentielle :*

$$\left(1 - t^2\right) x'' - 2tx' + 2x = 0$$

possède pour solution particulière un polynôme.

En déduire les solutions de cette équation différentielle.

Exercice 4.14. *Déterminer une solution particulière de chacune des équations différentielles suivantes :*

a) $x'' - 5x' + 6x = 2e^{4t}$, ***b)*** $x'' - x' + x = 5$, ***c)*** $x'' + 2x' + 5x = \cos t$,

d) $x'' + x' - 2x = t + \cos t$, ***e)*** $x'' - 3x' + 2x = e^t \sin(3t)$, ***f)*** $x'' + 3x' + 2x = \left(t^2 + 1\right) e^{-t}$.

En déduire les solutions de ces équations différentielles.

Exercice 4.15. *Résoudre en utilisant la méthode de variation des constantes les équations différentielles suivantes :*

$$\textbf{\textit{a)}}\ x'' + x = \frac{1}{\cos t}, \qquad \textbf{\textit{b)}}\ x'' - x = \frac{1}{(1 + e^{-t})^2}.$$

Exercice 4.16. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $t^2x'' + 4tx' + 2x = 0$, ***b)*** $t^2x'' + 4tx' + 2x = 2t \operatorname{Log} t$, ***c)*** $t^2x'' + tx' + x = 6 - \operatorname{Log} t$.

Exercice 4.17. *En posant* $s = \operatorname{Arctg} t$*, résoudre l'équation différentielle* $\left(t^2 + 1\right)^2 x'' + 2t\left(t^2 + 1\right) x' + \alpha x = 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.18. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $x'' + xx' = 0$, ***b)*** $\left(x + 3(x')^2\right) x'' - 2(x')^2 = 0$, ***c)*** $x^2 + 2(x')^2 - xx'' = 0$,

d) $x'' + x' - 2x = 4t$, ***e)*** $x'' - 2x' - 3x = e^{-t}(8t + 6)$, ***f)*** $x'' + x' - 6x = \operatorname{th} t$,

g) $x'' - 2x' + 5x = \dfrac{e^t}{\cos t}$, ***h)*** $\left(t^2 - t\right) x'' + (2 - t) x' - 3x = t^2$, ***i)*** $x'' - 2x' + 2x = e^t \operatorname{tg} t$,

j) $2t^2x'' + tx' - x = 0$, ***k)*** $x'' + 4x' + \alpha x = e^{-2t}, \alpha \in \mathbb{R}$, ***l)*** $t^2x'' + tx' + x = \operatorname{Log}(xe)$,

m) $x'' + 2tx' = -t$, ***n)*** $x'' = x^{-2}x'$, ***o)*** $\left(1 - t^2\right) x'' - tx' + x = 0$.

CHAPITRE

5 Équations différentielles linéaires d'ordre n

Contents

Soit une équation différentielle linéaire à coefficients réels constants :

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_nx = 0\,(a_0, a_1 \ldots a_n = \textit{ const, } a_0 > 0) \tag{5.1}$$

La solution nulle $x \equiv 0$ *de l'équation (5.1) est asymptotiquement ateble si toutes les racines de l'équation caractéristique*

$$f(\mu) = a_0 2^n + a_1\mu^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{5.2}$$

ont leur partle réelle négative.

5.1 Critère de Routh et Hurwitz

Pour que toules les racines de léguation (5.2) aient leurs parties réelles négatives, il faut et il suffit que tous les mineurs diagonaux principaus de la matrice de Hurwits soient peritifgs

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

La matrice de Hurwitz est formée comme suit. Suivant la diagonale principale on écrit les coefficients du polynôme (5.2) en commenfant par a_1 *et en finissant par* a_n*. Les colonnes sont constituées alternativement de coefficients affectés de seuls indices impairs ou de seuls indices pair, le coefficient* a_0 *étant compris au nombre de ceux derniers. Tous les autres éléments de la matrice correspondant anx coefficients d'indices supérieurs a* n *ou inférieurs a* 0 *sont suppposés nuls. Les mineurs diagonaux principaux de la matrice de Hurwitz sont de la forme*

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1, & a_0 \\ a_3, & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$et\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_3 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Ainsi, la condition de Hurwitz s'énonce : pour que la solution $x = 0$ de l'equation (5.1) soit stable il faut et il suffit que solent verifilies les relations

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Puisque $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, la condition $\Delta_n > 0$ peut être remplacke par celle de $a_n > 0$.

Exemple 5.1. Etudier la stabilité de la solution nulle de l'équation

$$x^{IV} + 5x''' + 13x'' + 19x' + 10x = 0. \tag{5.4}$$

Solution. *Etablissons 1'équation caractéristique*

$$f(\mu) = \mu^4 + 5\mu^3 + 13\mu^2 + 19\mu + 10 = 0.$$

Ici, $a_0 = 1, a_1 = 5, a_1 = 13, a_3 = 19, a_4 = 10$. *Eerivons les mineurs diagonaux de la matrice de Hurwits*

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0, \Delta_1 = 5 > 0,$$

c'eat-à-dire $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$. *On voit donc, que la solution triviale* $x = 0$ *de l'équation (5.4) ast asymptotiquement stable.*

Le calcul peut se faire, par exemnple,comme suit. On forme d'abord le mineur d'indice le plus élevé Δ_n *de la matrice de Hurwitz.A partir de lui,on écrit sans peine tous les mineurs d'ordre inférieur* $\Delta_{n-1}, ..., \Delta_1$. *Puis, on commence à calculer successivement* Δ_1, Δ_2, *etc. Si l'on rencontre un mineur négatif, c'est le signe que la solution est instable de sorte que le calcul ultérieur devient inutile.*

5.2 Critère géométrique de stabilité (critère de Mikhaïlov)

Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients réels constants

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x = 0. \tag{5.5}$$

Son équation caractéristique est

$$f(\mu) = a_0 \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + ... + a_n = 0. \tag{5.6}$$

Le critère de Mikhaïlov permet de résoudre la question relative à la disposition des racines de l'équation caractéristique (5.6) sur le plan complexe et donc d'établir si la solution nulle de l'équation(5.5) est stable ou ne l'est pas. En posant $\mu = i\omega$, *on obtient*

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega),$$

ou

$$\begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - ..., \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + ... \end{aligned}$$

La quantité $f(i\omega)$ *peut être représentée pour une valeur donnée du paramètre* ω *sous la forme d'un vecteur sur le plan complexe* u, v *ayant son origine à l'origine des coordonnées.*

Lorsque le paramètre o varie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ *l'extrémité de ce vecteur décrit une certaine courbe appelée courbe de Mikhailov. La fonction* $u(\omega)$ *étant paire, la courbe de Mikhaïlov est symétrique par rapport à l'axe Ou si bien qu'il suffit de construire seulement une partie de la courbe correspondant à la variation du paramètre* ω *dans les limites de* 0 *à* $+\infty$.

Si le polynôme $f(\mu)$ *de degré* n *possède* m *racines ayant leur partie réelle positive et* $n - m$ *racines ayant leur partie réelle négative, l'angle de rotation* φ *du vecteur* $f(i\omega)$, *sera* $\varphi = (n - 2m)\frac{\pi}{2}$ *lorsque* ω *varie de* 0 *à* $+\infty$.

Il est clair que pour la stabilité de la solution de l'équation (5.5) il faut et il suffit que $m = 0$.

Pour que la solution nulllle $x = 0$ *de l'équation (5.5) soit stable il faut et il suffit :*

1) *que le vecteur* $f(i\omega)$ *tourne d'un angle* $\varphi = n\frac{\pi}{2}$*,,c'est-à-dire fasse* $\frac{n}{4}$ *tours en sens antihoraire lorsque* ω *varie de* 0 *à* $+\infty$ *;*

2) *que l'hodographe de* $f(i\omega)$ *ne passe pas par l'origine* $(0, 0)$ *lorsque* ω *varie de* 0 *à* $+\infty$.

Il en résulte que pour la stabilité de la solution de l'équation (5.5) il faut que toutes les racines des *équations* $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$ *soient réelles et alternées, c'est-à-dire qu'entre deux racines, quelles qu'elles soient, d'une équation doit se trouver une racine de l'autre équation.*

Test 5.1. Etudier la stabilité de la solution nulle $x = 0$ de l'équation

$$x^{IV} + x''' + 4x'' + x' + x = 0.$$

Solution. *Solution. Formons le polynome caractéristique*

$$f(\mu) = \mu^4 + \mu^3 + 4\mu^2 + \mu + 1.$$

Puis,

$$f(i\omega) = \omega^4 - i\omega^3 - 4\omega^2 + i\omega + 1, \quad u(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 1$$

$$v(\omega) = -\omega^3 + \omega = \omega(1-\omega)(1+\omega).$$

Construisons la courbe

$$\begin{cases} u = u(\omega), & 0 \leqslant \omega < +\infty \\ v = v(\omega), \end{cases}$$

ω	*0*	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	*1*	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$
u	*1*	*0*	-2	*0*
v	*0*	$+$	*0*	$-$

L'angle de rotation du rayon-vecteur est $\varphi = 4\frac{\pi}{2} = (n-2m)\frac{\pi}{2}$. *On en tire* $n - 2m = 4$ *et puisque* $n = 4$ *on a* $m = 0$, *c'eat-à-dire que toutes les racines de l'équation caractérigtique se situent dans le demi-plan à gauche. La solution triviale* $x = 0$ *est donc asymptotiquement stable.*

5.3 Notions fondamentales et définitions

Un systéme d'équations différentielles ordinaires

$$F_k\left(x, x_1, x_1^{'}, ..., x_1^{(k_1)}, x_2, x_2^{'}, ..., x_2^{(k_2)}, ..., x_n, x_n^{'}, ..., x^{(k_n)}\right) = 0 \tag{5.7}$$

$$k = 1,\ 2,\ ...,\ n,$$

résolu par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé $x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, ..., x^{(kn)}$ *s'appele systéme canonique. Il est de la forme*

$$\begin{cases} x_1^{(k_1)} = f_1\left(x, x_1, x_1^{'}, ..., x_1^{(k_1-1)}, x_2, x_2^{'}, ..., x_2^{(k_2-1)}, ..., x_n, x_n^{'}, ..., x^{(k_n-1)}\right), \\ x_2^{(k_2)} = f_2\left(x, x_1, x_1^{'}, ..., x_1^{(k_1-1)}, x_2, x_2^{'}, ..., x_2^{(k_2-1)}, ..., x_n, x_n^{'}, ..., x^{(k_n-1)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n^{(k_n)} = f_n\left(x, x_1, x_1^{'}, ..., x_1^{(k_1-1)}, x_2, x_2^{'}, ..., x_2^{(k_2-1)}, ..., x_n, x_n^{'}, ..., x^{(k_n-1)}\right). \end{cases} \tag{5.8}$$

On appelle ordre de systéme (5.7) le nombre p *égale à*

$$p = k_1 + k_1 + ... + k_n.$$

Test 5.2. Ramener à la forme canonique le systéme d'équations

$$\begin{cases} x_2 x_1^{'} - \ln(x_1^{''} - x_1) = 0, \\ e^{x_2^{'}} - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Solution *le sxsléme considéré est du troisiéme ordre car* $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ *et donc* $p = 3$. *En résolvant la premiére équation par rapport à* x_1'' *et la deuxiéme par rapport à* x_2', *on obtient le systéme canonique*

$$x_1'' = x_1 + e^{x_2 x_1'},\ x_2' = \ln(x_1 + x_2).$$

Un sxstéme d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right),\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n, \tag{5.9}$$

ou t *est une variable indépendante et* $x_1, x_2, ..., x_n$ *sont des fonctions inconnues de* t, *s'appelle systéme normal.*

Le nombre n *s'appelle ordre du susténe ormal (5.9). On dit que deux systémes d'équations différentielles sont équations s'ils possédent. mémes solutions.*

Tout systéme canonique (5.8) peut étre ramené au systéme normal (5.9) équivalent et l'ordre de ces systémes sera le méme.

Exemple 5.2. Ramener au systéme normal le systéme d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - x = 0, \\ t^3 \frac{dx}{dt} - 2x = 0. \end{cases}$$

Solution Posons $x = x_1$, $\frac{dx}{dt} = x_2$, $x = x_3$. Alors on aura $\frac{dx_1}{dt} = x_2$, $\frac{dx}{dt} = \frac{dx_3}{dt}$ et le systéme donné sera ramené au systéme normal du troisiéme ordre suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{2x_1}{t^3}. \end{cases}$$

Test 5.3. Ramener l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0,$$

au systéme normal.

Solution *Posons $x = x_1$, $\frac{dx}{dt} = x_2$, alors $\frac{dx_1}{dt} = x_2$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}$. En portant ces expressions dans l'équation donnée, on obtient*

$$\frac{dx_2}{dt} + p(t)x_2 + q(t)x_1 = 0.$$

Le systéme normal sera de la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -p(t)x_2 - q(t)x_1.$$

On appelle solution du systéme (??) dans l'intervalle (a, b) *l'ensemble de* n *fonctions quelconques*

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t),\ ...,\ x_n = \varphi_n(t)$$

définies et continument dérivables dans l'intervalles (a, b) *si elles transforment les équations du systéme (5.9) en identités valables pour toutes les valeurs de* $t \in (a, b)$.

Test 5.4. Montrer que le systéme de fonctions $x_1 = -1/t^2$. $x_2 = -t \ln t$ définies dans l'intervalle $0 < t < +\infty$ est solution du systéme d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2tx_1^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{t} - 1. \end{cases}$$

Solution On a $\frac{dx_1}{dt} = \frac{2}{t^2}, \frac{dx_2}{dt} = -1 - \ln t$. En introduisant dans l'équation du système donné au lieu de $x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}$ et $\frac{dx_2}{dt}$ leurs expressions par t, on obtient les identités

$$\frac{2}{t^3} = \frac{2t}{t^4} = \frac{2}{t^3}, \quad -\ln t - 1 = -\ln t - 1, \quad 0 < t < +\infty.$$

5.4 Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy pour le système (5.9) consiste à trouver des solutions

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n - x_n(t)$$

de ce système qui satisfont aux conditions initiales

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0, \tag{5.10}$$

où $t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ *sont des nombres donnés.*

5.5 Systèmes à coefficients constants

5.6 Série d'exercices

Exercice 5.1. *En se servant du critère de Mikhaïlov, étudier la stabilité de la solution nulle des équations suivantes :*

1) $2x''' + 7x'' + 7x' + 2x = 0.$

2) $x''' + 2x'' + 2x' + x = 0.$

3) $2x^{IV} + 13x''' + 28x'' + 23x' + 6x = 0.$

4) $3x^{IV} + 13x''' + 19x'' + 11x' + 2x = 0.$

5) $2x^{IV} + 6x''' + 9x'' + 6x' + 2x = 0.$

6) $x^{IV} + 4x''' + 16x'' + 24x' + 20x = 0.$

7) $x' + 13x^{IV} + 43x''' + 51x'' + 40x' + 12x = 0.$

8) $x" + x = 0.$

9) $x^{V} + 3x^{IV} + 2x''' + x'' + 3x' + 2x = 0.$

10) $2x^{IV} + 11x''' + 21x'' + 16x' + 4x = 0.$

11) $x^{VI} + x^{V} + x^{IV} + x'' + x' + x = 0.$

12) $x^{Iv} + 9x''' + 32x'' + 54x' + 20x = 0.$

13) $6x^{iv} + 29x''' + 45x'' + 24x' + 4x = 0.$

14) $x^{v} + x^{IV} + 2x'' + 2x'' + 2x' + 2x = 0.$

15) $x^{v} + x^{v} + 3x^{Iv} + 2x^{'''} + 4x^{''} + 2x' + 2x = 0.$

16) $x^{v} + 2x^{Iv} + x^{'''} + 2x'' + x' + 2x = 0.$

Exercice 5.2. *Etudier la stabilité de la solution nulle des équations suivantes :*

1) $x^{'''} - 3x^{'} + 2x = 0.$

2) $x^{IV} + 4x^{'''} + 7x^{''} + 6x^{'} + 2x = 0.$

3) $x^{'''} + 5x^{''} + 9x^{'} + 5x = 0.$

4) $x^{IV} - 2x^{'''} + x^{''} + 2x^{'} + 2x = 0.$

5) $x^{IV} + 7x^{'''} + 17x^{''} + 17x^{'} + 6x = 0.$

6) $x^{'''} - 3x^{''} + 12x^{'} - 10x = 0.$

7) $x^{IV} + 5x^{'''} + 18x^{''} + 34x^{'} + 20x = 0.$

8) $x^{IV} + 7x^{'''} + 19x^{''} + 23x^{'} + 10x = 0.$

9) $x^{IV} + 11x^{'''} + 41x^{''} + 61x^{'} + 30x = 0.$

10) $x^{V} + 3x^{IV} - 5x^{'''} - 15x^{''} + 4x^{'} + 12x = 0.$

11) $x^{V} + 7x^{IV} + 33x^{'''} + 88x^{''} + 122x^{'} + 60x = 0.$

Pour quelle valeur de α la solution nulle des équations suivante t-elle stable ?

12) $x^{'''} + 2x^{''} + \alpha x^{'} + 3x = 0.$

13) $x^{IV} + \alpha x^{'''} + 2x^{''} + x^{'} + 3x = 0.$

14) $x^{IV} + 2x^{'''} + \alpha x^{''} + x^{'} + x = 0.$

Pour quelles valeurs de α, β la solution nulle des équations suivantes sera-t-elle stable ?

15) $x^{'''} + \alpha x^{''} + \beta x^{'} + x = 0.$

16) $x^{IV} + 3x^{'''} + \alpha x^{''} + 2x^{'} + \beta x = 0.$

Exercice 5.3. *Vérifier si les systèmes de fonctions donnés sont solutions des syatèmes d'équations différentielles donnés :*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2tx_1^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1+t}{t}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{t^2}, \\ x_2 = t\ln t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = x, \\ \frac{dx}{dt} = \frac{x^t}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^{2t}, \\ x = e^t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{z-1}{z}, \\ \frac{dz}{dt} = z - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = t + e^t, \\ z = e^{-t}. \end{cases}$$

Exercice 5.4. *Soit le système*

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2, \\ x_2' = cx_1 + dx_2. \end{cases}$$

Montrer à l'aide de l'écriture matricielle que x_1 *et* x_2 *sont solutions d'une même équation du second ordre à coefficients constants*

$$z'' + \alpha z' + \beta z = 0$$

dont l'équation caractéristique est la même que celle de la matrice du système.

Exercice 5.5. *1. Soit* $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ *de classe* C^1, *on suppose que* $(\forall t)\ \Phi(t)$ *et* $\Phi'(t)$ *commutent.*

Montrer que $t \longmapsto \exp \Phi(t)$ *est dérivable et que*

$$\frac{d}{dt} \exp \Phi(t) = \Phi'(t) \exp \Phi(t).$$

2. *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ *continue, périodique de période* ω, *on suppose qu'elle admet une primitive* $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$, *avec* $\Phi(0) = 0$, *telle que* $(\forall t)\ \Phi(t)$ *et* $\varphi(t)$ *commutent.*

2.1 *Montrer qu'il existe* $A \in M_n(\mathbb{C})$, *telle que* $(\forall t)\ \exp \Phi(t + \omega) = \exp \Phi(t) \times A$.

(on pourra poser $Y = \exp \Phi(t) \times Z(t)$ *).*

2.2 *Expliciter* $\exp \Phi(t)$ *et* A *pour* $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 1 \\ 1 & \cos t \end{bmatrix}$.

2.3 *Déterminer les solutions du système différentiel* $\begin{bmatrix} x' \\ x' \end{bmatrix} = \varphi(t) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, *telles que*

$$x(t+2\pi) = \mu x(t), \ \ x(t+2\pi) = \mu x(t).$$

2.4 *Déterminer les valeurs* μ *correspondantes.*

Exercice 5.6. *Soit le système*

$$\begin{cases} x' = -x + x^2 - 2xx, \\ x' = -2x - 5xx + x^2, \end{cases}$$

utiliser la fonction de Liapounov $v(x,\ x) = x^2 + x^2$ *pour étudier la stabilité de* $(0,\ 0)$.

CHAPITRE

6 Système d'équations non linéaires d'ordre 1

Contents

6.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz, cas non linéaire

On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

où $f : U \to \mathbb{R}^n$ *avec* U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *et* $(t_0, x_0) \in U$. *{colback=green !5 !white,colframe=blue*

Définition 6.1. *On dit que* f *est localement lipschitzienne en* X *si pour tout* $(t_1, x_1) \in U$*, il existe un voisinage* V *de* x_1*, un voisinage* W *de* t_1 *et* $k > 0$ *tels que pour tous* $x, x \in V$ *et tout* $t \in W$*,* $\|f(t,x) - f(t,x)\| \leqslant k\|x - x\|$.

Théorème 6.1. *Si* f *est continue sur* U *et localement lipschitzienne en* X*, alors* (6.1) *admet une unique solution maximale.*

Définition 6.2. f *est continue sur* U *donc* (6.1) *est équivalent à*

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, X(u))u. \tag{6.2}$$

Soit $V \in \mathcal{V}(x_0), W \in \mathcal{V}(t_0)$ *et* $k > 0$ *comme dans la définition du caractère localement lipschitzien de* f*, on peut supposer* $W \times V$ *borné. On note* $M := \sup_{W \times V} f$.

On se place sur un cylindre de sécurité : soit $r > 0$ *tel que* $\overline{B}(x_0, r) \subset V$ *et soit* $T > 0$ *tel que* $[t_0 - T, t_0 + T] \subset W$*. On note* $\mathcal{F}$ *l'espace des fonctions continues de* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *dans* $\overline{B}(x_0, r)$ *muni de la norme infinie, il s'agit alors d'un espace de Banach.*

On définit l'opérateur Φ *sur* $\mathcal{F}$ *par*

$$\Phi(Y)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, Y(u))u.$$

Il faut d'abord que $\mathcal{F}$ *soit stable par* Φ.

$$|\Phi(Y)(t) - x_0| \leqslant |t - t_0|M \leqslant TM$$

donc en choisissant $T \leqslant \frac{r}{M}$*,* $\Phi(Y)$ *est bien à valeurs dans* $\overline{B}(x_0, r)$ *et donc* Φ *définit bien un opérateur sur* $\mathcal{F}$ *(ce choix garantit aussi que le cylindre considéré est bien un cylindre de sécurité).*

Le but est maintenant de montrer que Φ *admet un point fixe en utilisant le théorème de Picard. En effet, l'équation* (6.2) *implique qu'une fonction* X *de classe* $\mathcal{C}^1$ *est solution de* (6.1) *si et seulement si* *elle est point fixe de* Φ*.*

On va montrer que Φ *admet une itérée contractante. Soit* $Y, Z \in \mathcal{F}$*, montrons par récurrence sur* $p \in$ *que*

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \quad \|\Phi^p(Y)(t) - \Phi^p(Z)(t)\| \leqslant \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|Y - Z\|_\infty.$$

Cette inégalité est vraie pour $p = 0$ *et*

$$\begin{aligned}
\|\Phi^{p+1}(Y)(t) - \Phi^{p+1}(Z)(t)\| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(u, \Phi^p(Y)(u)) - f(u, \Phi^p(Z)(u))\| u \right| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} k \|\Phi^p(Y)(u) - \Phi^p(Z)(u)\| u \right| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} k \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|Y - Z\|_\infty u \right| \\
&= \frac{k^{p+1} |t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|Y - Z\|_\infty,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. On a donc, pour tout $p \in$ *et tous* $Y, Z \in \mathcal{F}$*,*

$$\|\Phi(Y) - \Phi(Z)\|_\infty \leqslant \frac{k^p T^p}{p!} \|Y - Z\|_\infty.$$

Or $\frac{k^p T^p}{p!} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ *donc il existe* $p \in$ *tel que* $\frac{k^p T^p}{p!} < 1$*. D'après le théorème de point fixe de Picard,* Φ *admet un unique point fixe* X *sur* $\mathcal{F}$*, qui est donc l'unique solution de* (6.1) *sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$*.*

Cette solution se prolonge en une solution maximale. Supposons qu'il existe deux tels prolongements X_1 *et* X_2 *sur deux intervalles* I_1 *et* I_2*. L'intervalle* $I_1 \cap I_2$ *est non vide car il contient* $[t_0 - T, t_0 + T]$*. Soit* J *le plus grand intervalle inclus dans* $I_1 \cap I_2$ *et contenant* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *tel que* $X_1 = X_2$ *sur* J*. Alors* J *est fermé dans* $I_1 \cap I_2$ *car* $X_1 - X_2$ *est continue. Si* $J \neq I_1 \cap I_2$*, alors on peut appliquer l'unicité locale précédemment démontrée en l'une des bornes de* J *et contredire la maximalité de* J*. Donc* $J = I_1 \cap I_2$*, d'où on déduit* $X_1 = X_2$ *sur* $I_1 \cap I_2$ *et, par définition de solution maximale,* $I_1 = I_2$*. Finalement,* X *se prolonge en une unique solution maximale. {colback=green !5 !white,colframe=blue*

Théorème 6.2. *Théorème d'existence ef et d'unicité de la solution du problème de Cauchy. Soit donne le systéme normal d'equations difjerentielles (5.9). et soient des fonctions* $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, n$, *définies dans un certain domaine* D *de dimensons* $n+1$ *dans lequel varient les varriables* $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, *S'il existe un voisinage* Ω *du point* $M_0\left(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_0^n\right)$ *dans levuel les fanctions* f_i

a) sont continues,

b) possédent des dérivées partielles bornées par rapport aux variables $x_1, x_1, \ldots\ldots x_n$, *alors il existe un intervalle* $t_0 - h < t < t_0 + h$ *de variation de* t *dans lequel le systeme normal (5.9) a une solution et une seule qui satisfait aux conditions initiales (5.10).*

Le système de n *fonctions dérivables*

$$x_i = x_i(t, C_1, C_1, \ldots, C_n), \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{6.3}$$

de la variable indépendante t *et de* n *constantes arbitraires* C_1, $C_2, \ldots, C_n$ *s'appelle solution générale du système normal (5.9) si :*

1) pour toutes valeurs admissibles des $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *le système de fonctions (6.3) transforme les équations (5.9) en identités ;*

2) dans le domaine où sont satisfaites les conditions du théoreme de Cauchy, la fonction (6.3) résout tout problème de Cauchy.

Exemple 6.1. Montrer que le système de fonctions

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ x_2(t) = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases} \tag{6.4}$$

est la solution générale du système d'équations

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = x_1 - x_2 \\ \frac{dz_1}{dt} = x_2 - 4x_1. \end{cases} \tag{6.5}$$

Solution. *Dans l'exemple considéré le domaine* D *est.*

$$-\infty < t < +\infty, -\infty < x_1, x_2 < +\infty. \tag{6.6}$$

En introduisant les fonctions $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$ *définies par (6.4) dans le système dééquations (6.5) on obtient des ideatités en t qui sont valables pour toutes les valeurs des constantes* C_1 *of* C_2*. Ainsi, la condition 1) qui définit la solution générale est satisfaite.*

Vérifions la réalisation de la condition 2). Remarquons que pour le système d'équationa (6.5) les conditions du théoràme d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy sont satisfaites dans tout le domaine D *défini par les relations (6.6). Aussi pour les conditions initiales peut-en prendre tout triplet de nombres* t_0, x_1^0, x_2^0*. Alors les relations (6.4) donnent, pour déterminer* C_1 *et* C_2*, le système*

$$\begin{cases} x_1^0 = C_1 e^{-t_0} + C_2 e^{3t_0} \\ x_2^0 = 2C_1 e^{-t_0} - 2C_2 e^{3t_0} \end{cases}$$

Le déterminant de ce système $\Delta = -4e^{2t_0} \neq 0$ *; par consóquent, ce système est univoquement résoluble par rapport a* C_1 *et* C_2 *quels que soient* x_1^0, x_2^0 *et* t_0*. Cela équivaut à dire que tout problèene de Cauchy* *est résoluble. Ainsi le sygtebme de fonctions (6.4) est la solution générale du syatème d'équations (6.5).*

Les solutions obtenues à partir de la solution générale peur des valeurs concrètes des constantes $C_1, C_2 \ldots . C_n$ *s'appelent solutions particulieres.*

Exemple 6.2. Connaissant la solution génêrale (6.4) du système (6.5). trouver une solution particulière de ce système quí satisfait aux conditions initiales $x_1(0) = 0, x_2(0) = -4$,

Solution. Le problème se ramène à la recherche des valeura des constantes C_1 et C_2 qui vérifient les relations

$$0 = C_1 + C_2; -4 = 2C_1 - 2C_2$$

Rn réaolvant ce système, on trouve $C_1 = -1, C_2 = 1$. La solution particulière cherchée est

$$x_1(t) = -e^{-t} + e^{3t}, x_2(f) = -2e^{-1} - 2e^{3t}$$

Remarques. *1. Il* y *a des systèmes d'équations différentielles qu'on ne peut pas réduire à une seule équation. Par exemple, le système*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2. \end{cases}$$

se répartit en deux équations indépendantes. La solution générale s'obtient dans ce cas par l'intégration de chaque équation séparé ment :

$$x_1 = C_1 e^{-t}, x_4 = C_2 e^t.$$

2. Si le nombre d'équations du système est égal à n *et le nombre de fonctions inconnues est* N*, tel que* $N > n$*, un tel système est indelterminê. Dans ce cas on peut choisir arbitrairement* $N - n$ *fonctions cherchées (pourvu qu'elles solent dérivables un nombre de fois nécessaire) et définir les autres* n *fonctions a partir d'elles.*

3. Si le système comporte n équations et le nombre de fonctions cherchées est N*, tel que* $N < n$*, ce* *système peut s'avérer incompsatible, c'est-à-dire* n′ *admottant aucune solution.*

On appelle integgrale du système normal (5.9) une fonction $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *définie et continue avec ses dérivées partielles du premier ordre* $\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, k = 1, 2, \ldots, n$ *dans le domaine* D *si, lorsqu'on y porte une solution arbitraine* $x_1(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)$ *du système (5.9), cette fonction prend une valeur constante, e'est-àdire une fonction* $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *qui dépend uniquement du choix de la solution* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ *et non de la variable* t.

On appelle intégrale première du systeme normal (5.9) l'égalité

$$\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C,$$

où $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est l'intégrale du système (5.9) et* C *une constante arbitraire* *).

Exemple 6.3. Montrer que la fonction

$$\psi(t, x_1, x_2) = \frac{x_1}{t} - x_1, \tag{6.7}$$

définie dans le domaine $D : t \neq 0, -\infty < x_1, x_2 < +\infty$ est intégrale du système d'équations

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{x_1}{t}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + \frac{x_1}{t}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

si la solution générale de ce système est

$$x_1 = C_1 t, x_2 = C_1 t^2 + C_2 t. \tag{6.9}$$

Solution. *Ea introduisant (6.9) dans (6.7), on obtient*

$$\psi(t, x_1, x_2) = \psi\left(t, C_1 t, C_1 t^2 + C_2 t\right) = \frac{C_1 t^2 + C_2 t}{t} - C_1 t = C_2$$

dans le domaine D. *Par suite, la fonction (6.7) est dans le domaine* D *l'intégrale du système d'équation (6.8) et, par conséquent, une intigrale première de ce système sera* $\frac{x_2}{t} - x_1 = C$, *où* C *est une constanto arbitraire.*

Théorème 6.3. *Pour qu'une fonction* $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *soit intégrale du systeme (5.9) il faut et il suffit que les conditions*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0$$

soient satisfaites dans le domaine D.

6.2 Méthode des éliminations successives (réduction d'un système d'équations différentielles à une seule équation)

Un cas particulier d'un système canonique d'équations différentielles est une seule équation d'ordre n *résolue par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé*

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right)$$

Par introduction de nouvelles fonctions

$$x_1 = x'(t), x_2 = x^{n}(t), \ldots, x_{n-1} = x^{(n-1)}(t)$$

cette équation se remplace par un système normal de n *équations*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_{n-1}, \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = f\left(t, x_, x_1, x_2, \dots x_{n-1}\right). \end{cases}$$

On peut également affirmer la réciproque, à savoir que dans le cas général le système normal de n *équations du premier ordre*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1\left(t, x_1, x_2, \dots, x_n\right) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2\left(t, x_1, x_2, \dots, x_n\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n\left(t, x_1, x_2, \dots, x_n\right) \end{cases}$$

est équivalent à une seule équation d'ordre n*. C'est la base de l'une des méthodes d'intégration des systèmes d'équations différentielles appelée méthode des éliminations successives.*

Illustrons cette méthode sut l'exemple de système de deux équations

$$\frac{dx}{dt} = ax + bx + f(t), \quad \frac{dx}{dt} = cx + dx + g(t), \tag{6.10}$$

Ici a, b, c, d *sont des coefficients constants ef* $f(t)$ *ef* $g(t)$ *sont des fonctions données ;* $x(t)$ *et* $x(t)$ *sont des fonctions cherchées.*

De la première équation du système (6.10) on trouve

$$x = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right) \tag{6.11}$$

En introduisant dans la deutième équation du système le second membre de (8.7) au lieu de x *et la dérivée du second membre de (8.7) au lieu de* $\frac{dx}{dt}$*, on obtient une équation du second ordre par rapport à* $x(t)$ *:*

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx + P(t) = 0$$

où A, B, C *sont des constantes, On en déduit que* $x = x\,(t, C_1, C_2)$*.*

En introduisant les expressions obtenues pour x *et* $\frac{dx}{dt}$ *dans (8.7), on trouve* y*.*

Test 6.1. Intégrer le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 1 \end{cases} \tag{6.12}$$

Solution. *De la première équation du systême (8.8) on trouve* $x = = \frac{dx}{dt} - 1$*, alors*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

En introduisant (8.9) dans la deuxième équation du systsme (8.8), oa obtient une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x - 1 = 0, \tag{6.13}$$

La solution générale de l'équation (8.10) est

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1, \tag{6.14}$$

En calculant la dérivée de (8.11) par rapport à t*, on trouve*

$$x = \frac{dx}{dt} - 1 = C_2e^t + C_2e^{-t} - 1$$

La solution générale du système (8.8) est

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1, \quad x = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1.$$

Test 6.2. Résoudre le problème de Cauchy pour le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 8x \\ \frac{dx}{dt} = -x - 3x \end{cases} \tag{6.15}$$

$$x(0) = 6, x(0) = -2. \tag{6.16}$$

Solution. *De la deuxième équation du système (6.15) on trouve*

$$x = -3y - \frac{dxy}{dt}, \tag{6.17}$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = -3\frac{dxy}{dt} - \frac{d^2xy}{dt^2}. \tag{6.18}$$

En introduisant (??) et (6.18) dans la première équation du système (8.12), on obtient l'équation $\frac{d^2xy}{dt^2} - xy = 0$ *dont la solution générale*

$$xy = C_1e^t + C_2e^{-t}. \tag{6.19}$$

En portant (6.19) dans (6.17), on trouve

$$x = -4C_1e^t - 2C_2e^{-t} \tag{6.20}$$

La solution générale du système (6.15) est

$$x = -4C_1e^t - 2C_2e^{-t}; \quad xy = C_1e^t + C_2e^{-t}. \tag{6.21}$$

Pour les conditions initiales (6.16) et (6.21), on obtient le système d'équations permettant de déterminer C_1 *et* C_2 :

$$\begin{cases} 6 = -4C_1 - 2C_2 \\ -2 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

dont la résolution donne $C_1 = -1, C_2 = -1$. *En portant ces valeurs de* C_1 *et* C_2 *dans (6.21), on obtient la solution du problème de Cauchy posé*

$$x = 4e^t + 2e^{-t}, \quad xy = -e^t - e^{-t}.$$

Test 6.3. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} t\frac{dx}{dt} = -x + xyt \\ t^2\frac{dxy}{dt} = -2x + xyt \end{cases}$$

Solution. *De la première équation du système, on tire*

$$xy = \frac{x}{t} + \frac{dx}{dt}$$

si bien que

$$\frac{dxy}{dt} = -\frac{x}{t^2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}$$

En introduisant ces expressions de xy *et* $\frac{dxy}{dt}$ *dans la deuxième équation, on obtient*

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} - x = -2x + x + t\frac{dx}{dt}, \quad \textit{ou} \quad t^2\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

En posant $t \neq 0$*, on tire de la dernière équation* $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ *et après l'intégration on obtient* $x = C_1 + C_2t$.

On trouve maintenant sans peine que

$$xy = \frac{x}{t} + \frac{dx}{dt} = \frac{C_1 + C_2t}{t} + C_2 = 2C_2 + \frac{C_1}{t}$$

La solution générale du système donné est

$$x = C_1 + C_2t, \quad xy = \frac{C_1}{t} + 2C_2, \quad t \neq 0$$

Exercice 6.1. *En appliquant la méthode des éliminations successives, résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -9y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t \\ \frac{dy}{dt} = x - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0, x(0) = 1, y(0) = 4. \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y, x(0) = -2, y(0) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{df^2} = x^2 + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt} + x, \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

6.3 Série d'exercices

Exercice 6.2. *On considère le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} x' = tx^2, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{E}$$

1. Rappeler pourquoi, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, *il existe une et une seule solution maximale* $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *de* (E)

2.a. On suppose $x_0 = 0$. *Quelle est alors la solution maximale de* (E)

2.b. On suppose $x_0 \neq 0$. *Montrer que la solution maximale* x *de* (E) *vérifie* $x(t) > 0$ *pour tout* $t \in I$ *ou bien* $x(t) < 0$ *pour tout* $t \in I$ *En déduire que dans ce cas,* (E) *équivaut à*

$$\begin{cases} \frac{x'}{x^2} = t, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{E}$$

3. On suppose $x_0 \neq 0$. *Résoudre* (E) *en précisant, suivant* (t_0, x_0) *:*

3.a. l'intervalle maximal I *sur lequel est définie la solution maximale* x *de* (E).

3.b. l'expression de la solution maximale x *de* (E).

4. En s'appuyant sur le théorème d'existence de la solution d'une équation différentielle, indiquer l'intervalle $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *dans lequel l'existence de la solution de l'équation*

$$\begin{cases} x' = 2tx^2, \\ x(1) = 2 \end{cases} \tag{E}$$

sur l'ensemble

$$D = \{|t - 1| \leqslant 1 = a, \ |x - 2| \leqslant 1 = b\}$$

sera garantie.

Exercice 6.3. *On considère une équation*

$$t'(t) = A(t)\,t(t) + B(t),$$

où A *et* B *sont* T*-périodique continues. Il s'agit de montrer que cette équation admet une solution* T*-périodique si et seulement si elle admet une solution bornée. On rappelle qu'en dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact* K *(c'est -à-dire l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'éléments* K*, ou encore l'intersection des convexes contenant* K*) est compacte.*

Exercice 6.4. *Considérons l'équation différentielle*

$$x' = x^{1/3}, \tag{6.22}$$

avec pour condition initiale $x(0) = 0$*. La fonction* $x \to x^{1/3}$ *est continue. En revanche sa dérivée n'est pas définie en* 0*. Les conditions du théorème ne sont donc pas remplies et on vérifiera que* $x = 0$ *et* $x = \pm\sqrt{8/27}t^{3/2}$ *sont solutions de l'équation différentielle.*

Exercice 6.5.

1. *En s'appuyant sur le théorème d'existence de la solution d'une équation différentielle, indiquer l'intervalle* $[t_0 - h,\ t_0 + h]$ *dans lequel l'existence de la solution de l'équation*

$$x' = f(t,\ x),$$

sera garantie si :

$t_0 = 0,\ x_0 = x(0) = 1,\ f(t,\ x) = 2tx^2$ *sur l'ensemble*

$$D = \left\{ (t, x) : |t| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4} = a,\ |x - 1| \leqslant 1 = b \right\}.$$

Trouver les trois premières approximations :

$$x' = 2x - 2t^2 - 3 \qquad x(0) = 2$$

Exercice 6.6.

1. *En utilisant le* C*-discriminant, trouver des solutions singulières de l'équation différentielle*

$$3tx'^2 - 6xx' + t + 2x = 0, \;\; t^2 + C(t - 3x) + C^2 = 0.$$

2. *Trouver des solutions singulières si elles existent*

$$2x'^2 + 3tx - 2t^2x'$$

$$4x'^3 - 6x'^2 + 9(x - t) = 0$$

3. *Soit l'équation différentielle*

$$x' = \sqrt[3]{x^2} + a$$

Pour quelle valeur du paramètre a *cette équation a-t-elle une solution singulière ?*

CHAPITRE

7

Équations différentielles non linéaires du premier ordre

Contents

Dans ce chapitre, nous examinerons un certain nombre de types classiques d'équations différentielles du premier ordre. Nous nous concentrons ici sur les techniques de résolution explicites qui peut amener le calcul des solutions aux calculs des primitives. L'étude théorique telle que l'existence et l'unicité de solutions sera traité plus tard dans un autre chapitre.
Il n'existe pas de méthode générale de la résolution explicite d'une équation différentielle. La première démarche à faire pour résoudre une équation différentielle, est de déterminer l'ordre et le type d'équation auquel on a affaire et ensuite, si c'est l'un des types usuels, on applique la méthode standard, sinon on peut essayer des changements de fonctions ou changements de variables.

La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est

$$F(t, x, x') = 0.$$

Sa forme normale ou résolue s'écrit

$$x' = f(t, x).$$

Nous resterons dans le cas scalaire, parce qu'il est plus facile à manipuler et à comprendre. Le cas où F *sera à valeurs dans* $\mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}^*$ *et* $\geqslant 2$ *sera traité plus tard.*

7.0.1 Incomplète en x ou absence de x ; équation du type $F(t, x') = 0$

: Trois cas usuels :

i) *Équation résoluble sous la forme* $x' = f(t)$, *il suffit d'intégrer on obtient*

$$x = \int f(t)\, dt = h(t) + C,$$

où C *est la constante d'intégration, les courbes intégrales se déduisent de l'une d'elles par des translations parallèles à l'axe des* x.

ii) *Équation résoluble sous la forme* $t = f(x')$, *on pose* $x' = s$ *d'où* $t = f(s)$, $dt = f'(s)ds$, $dx = sdt$ *donne* $dx = sf'(s)ds$, *et une intégration par parties donne*

$$x = sf(s) - \int f(s)ds = g(s) + C.$$

On trouve les courbes paramétrées $(t, x) = (f(s), h(s) + C)$.

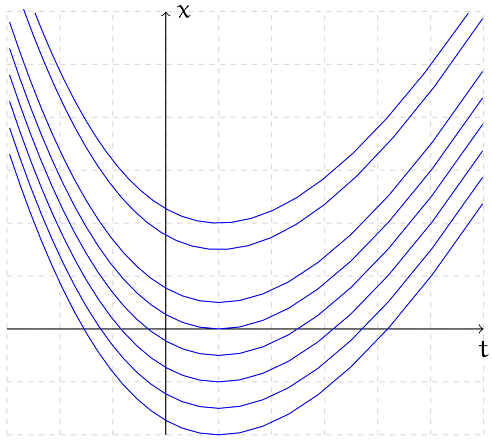
iii) *Équation susceptible d'un paramétrage* $t = f(s)$, $x' = g(s)$, *on tire* $dx = g(s)f'(s)\,ds$ *donc* $x = \varphi(s) + C$, *d'où encore des courbes paramétrées.*

Exemple 7.1.
Soit l'équation $x' + e^{x'} = t$.

On pose $x' = s$ ou $\frac{dx}{dt} = s$, d'où $t = s + e^s$ et $\frac{dt}{ds} = 1 + e^s$ donc $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = s + se^s$. Par intégration par parties on trouve $x = \frac{1}{2}s^2 + (s-1)e^s + C$.

Les courbes intégrales sont données sous forme paramétriques par

$$(t, x) = \left(s + e^s, \frac{1}{2}s^2 + (s-1)e^s + C\right), C \in \mathbb{R}.$$



7.0.2 Incomplète en t ou absence de t ; équation du type $F(x, x') = 0$

Plusieurs cas sont possibles :

i) *Si on a* $x' = f(x)$ *alors* $dt = \dfrac{dx}{f(x)}$ *et donc* $t = g(x) + C$. *Les courbes intégrales déduites de l'une d'entre elles par translations parallèles à l'axe des* t.

ii) *Si* $x = f(x')$, *on pose* $x' = s$ *d'où* $x = f(s)$ *et donc* $s\,dt = dx = f'(s)ds$. *Alors* $dt = \dfrac{f'(s)}{s}ds$ *et*

$$t = \int \frac{f'(s)}{s} ds = \varphi(s) + C.$$

iii) *Paramétrage de* $F(x, x') = 0$ *sous la forme* $x = f(s)$ *et* $x' = g(s)$.

On a $dx = f'(s)\,ds = g(s)ds$ *d'où la solution donne* $t = \varphi(s) + C$ *si* $g(s) \neq 0$.

Test 7.1.
Considérons l'équation $x' = \sin x$.

On a $dx = (\sin x)\,dt$ ou $dt = \frac{dx}{\sin x}$

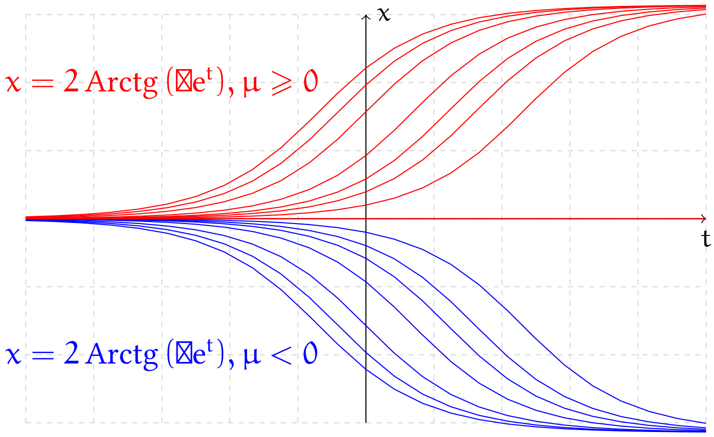
alors $t = \int \frac{1}{\sin x} dx$.

Posons $s = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, on obtient

$$t = \mathrm{Log}\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C$$

ce qui donne

$$x = 2\,\mathrm{Arctg}\left(\mu e^t\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Exemple 7.2. Soit l'équation $x^2 + (x')^2 - 1 = 0$.

Posons $x = \sin s$, $x' = \cos s$ (sans oublier que $x' = \frac{dx}{dt}$).

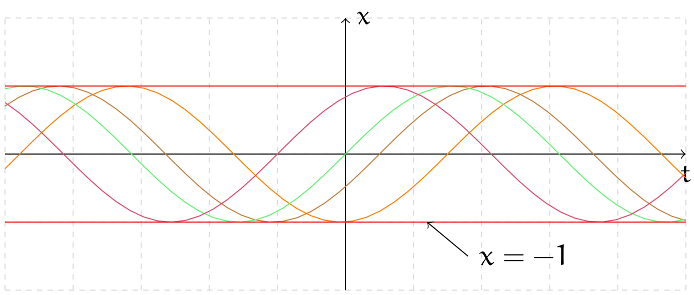
On a donc $dx = (\cos s)\,ds$ et $dx = x'dt = (\cos s)\,dt$, alors $(\cos s)\,ds = (\cos s)\,dt$.
❐ Si $\cos s \neq 0$, $ds = dt$ ce qui donne

$s = t + \mu$ donc

$$x = \sin(t + \mu)\,, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

❐ Si $\cos s = 0$, $s = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donc

$$x = 1 \text{ ou } x = -1.$$



7.1 Équations à variables séparées

On appelle équation à variables séparées une équation différentielle du premier ordre $F(t, x, x') = 0$ *qui peut se mettre sous la forme*

$$f(x)x' = h(t).$$

Ou encore, avec $x' = \dfrac{dx}{dt}$ *elle s'écrit*

$$f(x)dx = h(t)dt,$$

En d'autres termes, les équations à variables séparées sont les équations dans lesquelles on peut regrouper t, dt *d'une part et* x, dx *d'autre part. Elles s'intègrent en*

$$\int f(x)dx = \int h(t)dt, \text{ soit } F(x) = G(t) + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7.3.
L'équation $t^2x' = e^x$ donne

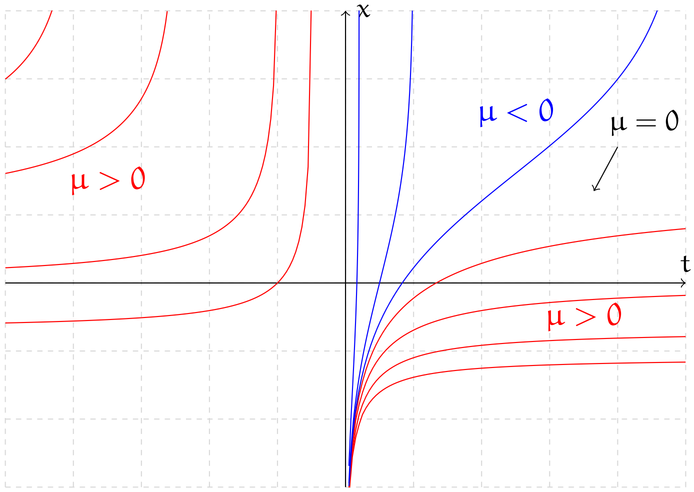
$$e^{-x}x' = \frac{1}{t^2} \text{ ou bien } e^{-x}dx = \frac{dt}{t^2},$$

ce qui donne par intégration

$$e^{-x} = \frac{1}{t} + \mu, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

On obtient finalement

$$x = \mathrm{Log}\left(\frac{t}{1+\mu t}\right), \ \mu \in \mathbb{R}.$$

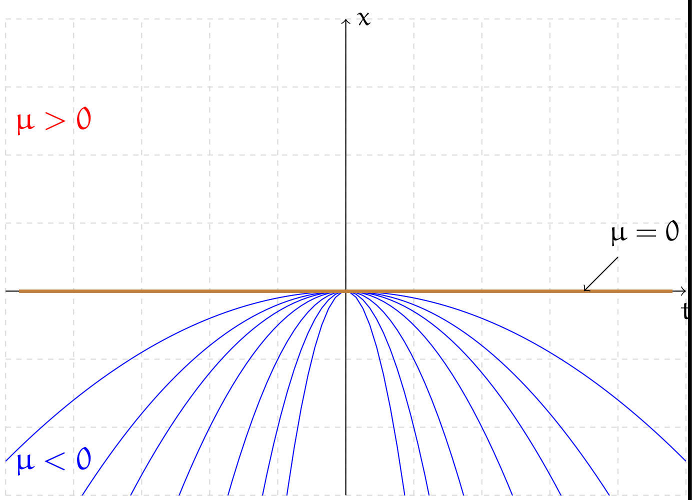


Test 7.2.
L'équation $tx' = 2x$ l'on peut écrire $\frac{dx}{x} = 2\frac{dt}{t}$. On intègre alors $\int \frac{dx}{x} = \int 2\frac{dt}{t}$ ce qui donne $\text{Log}\,|x| = 2\,\text{Log}\,|t| + C$ ou beaucoup mieux

$$\text{Log}\left|\frac{x}{\mu}\right| = \text{Log}\,|t|^2 \quad \text{où} \quad C = \text{Log}\,|\mu|\,.$$

Finalement, on trouve

$$x = \mu t^2,\ \mu \in \mathbb{R}.$$



Remarque 7.1. *On remarque que les équations incomplètes* $x' = f(t)$ *et* $x' = g(x)$ *sont des cas particuliers des équations à variables séparées.*

7.2 Équations différentielles type-homogènes

Définition 7.1 ((Équations différentielles *type-homogènes*)). *On appelle équation différentielle type-homogène toute équation différentielle de la forme*

$$F\left(x', \frac{x}{t}\right) = 0. \tag{7.1}$$

Elle se reconnaît au fait qu'elle est invariante par le changement de (t, x) *en* $(\mu t, \mu x)$*, c'est-à-dire par une homothétie de centre* O*. Plusieurs cas se présentent suivant la forme pratique de (7.1).*

a) *Si on peut résoudre (7.1) sous la forme* $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$*, on pose* $s = \frac{x}{t}$*,* $x = st$*,* $x' = \frac{dx}{dt} = s + t\frac{ds}{dt} = f(s)$*, c'est une équation à variables séparées. On peut aussi utiliser les coordonnées polaires, c'est-à-dire posons* $t = \rho\cos\theta$*,* $x = \rho\sin\theta$ *et chercher* $\rho(\theta)$ *.*

b) *Si on peut résoudre (7.1) sous la forme* $x = tf(x')$, *on pose* $x' = u$, *les variables se séparent et on arrive à un paramétrage des courbes intégrales.*

Exemple 7.4.

$^2 - 2xx' + t = 0$, ou bien $x = \frac{t}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)$. En posant $x' = u$ il vient $x = \frac{t}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$ et donc

$dx = \frac{dt}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{t}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)du = udt$ d'où $\left(u^2 - 1\right)dt = t\left(u^2 - 1\right)\frac{du}{u}$.

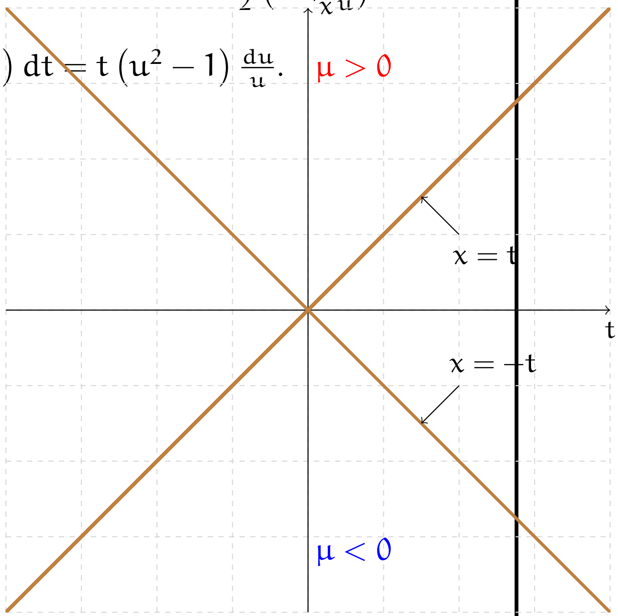
-1$\neq$ 0 alors $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$, soit à une homothétie près

$u = \mu t$, qui donne

$$x_\mu = \frac{1}{2}\left(\mu t^2 + \frac{1}{\mu}\right), \ \mu \neq 0.$$

Si $u^2 - 1 = 0$ alors $u = \pm 1$ qui donne

Si u^2 $x_1 = t$, et $x_2 = -t$.



7.3 Équations aux différentielles totales, facteur intégrant

7.3.1 Équations aux différentielles totales

Une équation différentielle de la forme $P(t,x) + Q(t,x)x' = 0$ *qui s'écrit encore*

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0, \tag{7.2}$$

s'appelle équations aux différentielle totales (ou une différentielle exacte) si

$$\omega(t,x) = P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx$$

représente une différentielle totale (ou exacte) d'une certaine fonction $u(t,x)$, *c'est-à-dire si*

$$Pdt + Qdx = du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx.$$

Théorème 7.1. *Pour que l'équation (7.2) soit une équation au différentielle totale, il faut et il suffit que dans un certain domaine* D *de variations des variables* t *et* x *soit satisfaite la condition*

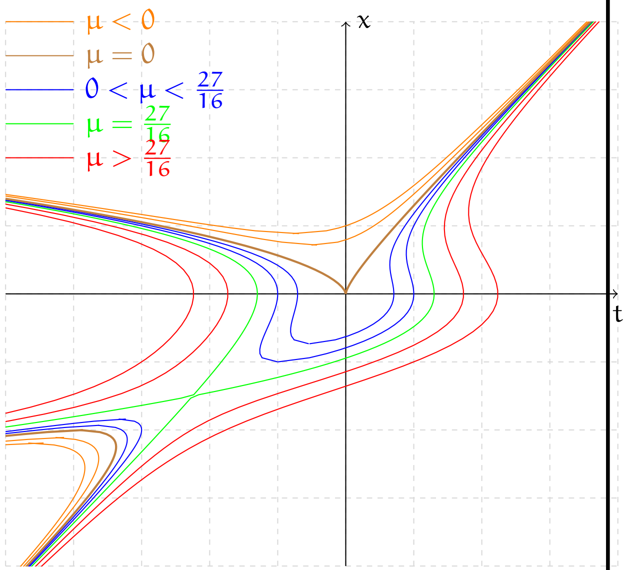
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

La solution ou l'intégrale générale de (7.2) est de la forme $u(t,x) = C$.

Exemple 7.3 L'équation $(2tx - 3x^2)x' + x^2 + t = 0$ s'écrit aussi $(x^2 + t)\,dt + (2tx - 3x^2)\,dx = 0$.

On a $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 2x$, donc on a affaire à une différentielle totale. En écrivant $\frac{\partial u}{\partial t} = x^2 + t$ et $\frac{\partial u}{\partial x} = 2tx - 3x^2$, on trouve facilement que $u(t,x) = \frac{1}{2}t^2 + tx^2 - x^3 + c$. Notre équation originale est équivalente à $du(t,x) = 0$, donc $u(t,x) = \frac{1}{2}t^2 + tx^2 - x^3 + c = d$.

Finalement les courbes intégrales ont pour équation $t^2 + 2tx^2 - 2x^3 = \mu,\ \mu \in \mathbb{R}$.



7.3.2 Facteur intégrant

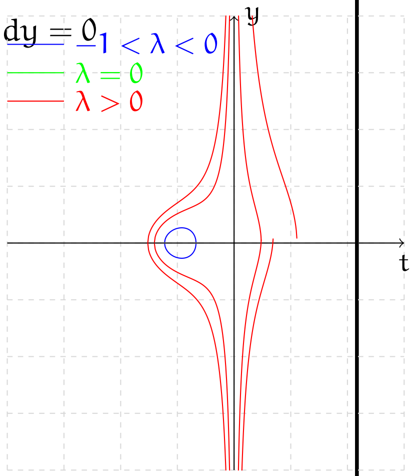
Dans certains cas où l'équation $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ *n'est pas aux différentielles totales, on arrive parfois à trouver une fonction* $\mu(t,x)$ *telle que* $\mu(Pdt + Qdx)$ *représente une différentielle totale d'une certaine fonction* $u(t,x)$, *c'est-à-dire* $\mu Pdt + \mu Qdx = du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx$.

Une telle fonction μ *s'appelle facteur intégrant. Elle vérifie* $\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$.

Exemple 7.6.

L'équation différentielle

$$tyy' + y^2 + t^2 + t = 0 \text{ ou } \left(y^2 + t^2 + t\right) dt + ty\, dy = 0$$



se résout beaucoup plus rapidement avec le facteur intégrant $\mu(t, y) = t$. On a $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ et $\frac{\partial Q}{\partial t} = y$. Comme $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial t}$ donc le procédé dans le dernier exemple ne peut pas être appliqué. Considérons le facteur intégrant $\mu(t, y) = t$. En multipliant notre équation par t on obtient $\left(ty^2 + t^3 + t^2\right) dt + t^2 y\, dy = 0$. Cette fois on a bien $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 2ty$ donc on a affaire à une différentielle totale et en écrivant $\frac{\partial u}{\partial t} = ty^2 + t^3 + t^2$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = t^2 y$, on trouve $u(t, y) = \frac{1}{2}t^2y^2 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + c$ donc les courbes intégrales ont pour équation $3t^4 + 4t^3 + 6t^2y^2 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

7.4 Autres types d'équations différentielles

7.4.1 Équation de Bernoulli

Une équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$x' = a(t)\, x + b(t)\, x^m, \tag{7.3}$$

où m *est différent de* 0 *et* 1 *et où* a *et* b *sont des applications définies sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs réelles. En général,* m *est un entier naturel, mais on peut prendre* m *réel à condition de chercher* x *à valeurs strictement positives. En général,* a *et* b *sont des fonctions continues.*

Exemple 7.7. $tx' + x - x^2 \operatorname{Log} t = 0$ et $t^2x' + x = t\sqrt{x}$ sont des équations différentielles de Bernoulli.

7.4.1.1 Méthode de résolution

Les cas particuliers $m = 0$ *et* $m = 1$ *donnent des équations linéaires, qui ont déjà été traités ci-dessus.*

Le principe de la méthode, si $m \neq 1$ *et* $m \neq 0$*, est de diviser les deux membres de (7.3) par* x^m*. On obtient alors*

$$\frac{x'}{x^m} - a(t)\frac{1}{x^{m-1}} = b(t).$$

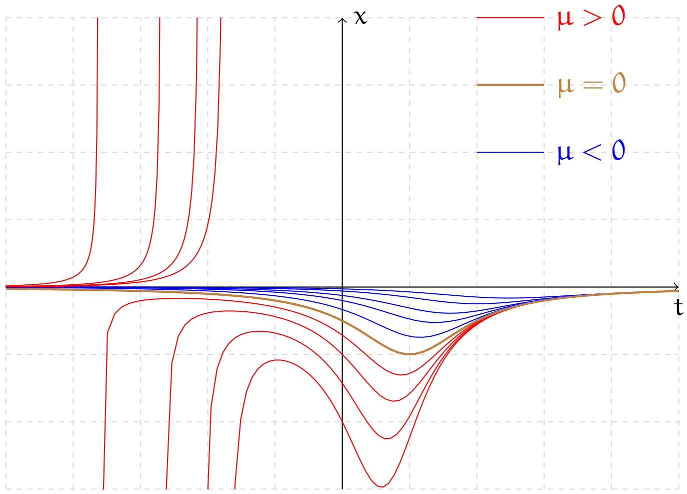
On effectue un changement de fonction en posant $z = \frac{1}{x^{m-1}}$*, il vient donc* $\frac{1}{1-m}z' - a(t)z = b(t)$*, alors z est la solution d'une équation linéaire du premier ordre. On la résout et on en déduit une expression de* x*.*

Exemple 7.8. $(m = 2)$: $x' = x + t^2y^2$ on divise par x^2, et cela donne $\frac{x'}{x^2} - \frac{1}{x} = t^2$. En posant $z = \frac{1}{x}$ on obtient $z' + z = -t^2$ équation linéaire.
La solution de l'équation homogène associée est $z_h = \mu e^{-t}, \mu \in \mathbb{R}$. Avec la méthode de la variation de la constante on trouve

$$z(t) = \mu e^{-t} - t^2 + 2t - 2,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$x(t) = \frac{1}{\mu e^{-t} - t^2 + 2t - 2},\ \mu \in \mathbb{R}.$$



7.4.2 Équation de Riccati

Une équation différentielle de Riccati est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \tag{7.4}$$

où a, b et c sont trois fonctions, souvent choisies continues sur un intervalle commun I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

L'intégration d'une équation différentielle de Riccati nécessite la connaissance d'une solution particulière de cette équation.

7.4.2.1 Méthode de résolution

On suppose comme solution particulière x_1 et on pose $x = z + x_1$. En remplaçant x par sa valeur dans (7.4) on trouve $z' = a(t)z^2 + (2a(t)x_1 + b(t))z$, a,b et c sont des fonctions continues sur l'ouvert I. Donc z est solution d'une équation de Bernoulli, qui a déjà été traité ci-dessus.

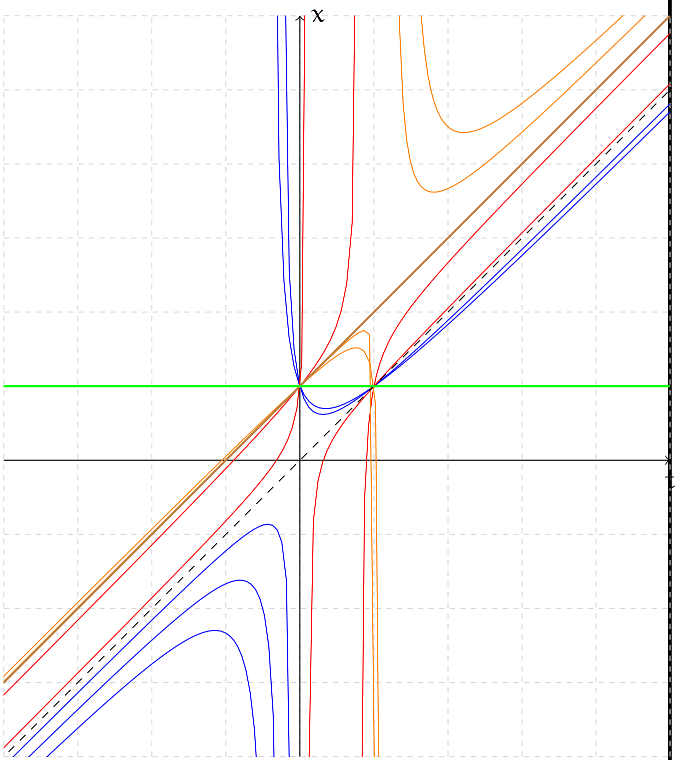
Exemple 7.9.

L'équation différentielle

$$t(t-1)x' + x^2 - (2t+1)x = -2t,$$

est une équation de Riccati avec

$a(t) = \frac{-1}{t(t-1)}$, $b(t) = \frac{2t+1}{t(t-1)}$ et $c(t) = \frac{2}{1-t}$.



Notons que $x_1 = t$ est solution particulière. En posant $x = t+z$ il vient $t(t-1)z' - z + z^2 = 0$. En divisant par $t(t-1)$ on obtient une équation de Bernoulli avec $m = 2$,

$$z' = \frac{1}{t(t-1)}z - \frac{1}{t(t-1)}z^2,$$

d'où $z(t) = \dfrac{t-1}{\mu t - 1}$, donc

$$x(t) = t + \frac{t-1}{\mu t - 1}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

7.4.3 Équations différentielles de Lagrange et Clairaut

Les équations de Lagrange sont les équations qui peuvent se mettre sous la forme

$$x = a(x') \cdot t + b(x'),$$

où a *et* b *sont des fonctions dérivables sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$.

L'équation de Clairaut est un cas particulier de l'équation de Lagrange ($a(x') = x'$*) :*

$$x = tx' + b(x').$$

Pour résoudre ce type d'équation on pose $x' = s$ *ou* $\dfrac{dx}{dt} = s$ *et on cherche une expression pour* $\dfrac{dx}{dt}$*. On a* $x = a(x') \cdot t + b(x') = a(s)t + b(s)$ *donc* $\frac{dx}{dt} = a(s) + t\frac{d}{dt}a(s) + \frac{d}{dt}b(s)$ *d'où*

$$\frac{dx}{dt} = a(s) + t\frac{d}{ds}a(s)\frac{ds}{dt} + \frac{d}{ds}b(s)\frac{ds}{dt} = a(s) + ta'(s)\frac{ds}{dt} + b'(s)\frac{ds}{dt}.$$

Comme $\dfrac{dx}{dt} = s$*, alors*

$$a(s) + ta'(s)\frac{ds}{dt} + b'(s)\frac{ds}{dt} = s$$

qui est une équation différentielle pour l'inconnue $t(s)$.

Une fois $t(s)$ *obtenu, on trouve* $x(s) = a(s)t(s) + b(s)$*. On a donc un paramétrage des courbes intégrales.*

Exemple 7.10. Soit l'équation $x = tx' + (x')^2 + 1$.

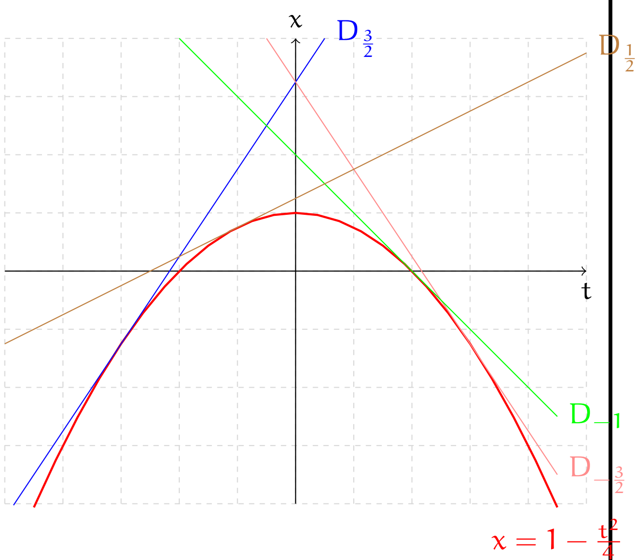
On pose $x' = s$ ou $\frac{dx}{dt} = s$, alors $x = ts + s^2 + 1$ et $\frac{dx}{dt} = s + t\frac{ds}{dt} + 2s\frac{ds}{dt}$.

Comme $\frac{dx}{dt} = s$, alors $s + t\frac{ds}{dt} + 2s\frac{ds}{dt} = s$, d'où $(t + 2s)\,\frac{ds}{dt} = 0$.
On a donc soit $t + 2s = 0$ soit $\frac{ds}{dt} = 0$.

Si $t + 2s = 0$ alors $(t, x) = \left(-2s, -s^2 + 1\right)$, d'où $x = -\frac{t^2}{4} + 1$ parabole (solution singulière en rouge).

Si $\frac{ds}{dt} = 0$, alors $s =$ constante $= \mu$ et donc $x = \mu t + \mu^2 + 1$ famille de droites (D_μ).

On peut montrer que l'ensemble des droites (D_μ) est l'ensemble des tangentes à la parabole. La parabole est l'enveloppe des droites (D_μ).



7.5 Problème de Cauchy

Définition 7.2 ((Problème de Cauchy)). *On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle résolue d'ordre n,*

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}\right)$$

et de n conditions initiales

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Il arrive qu'on ne recherche pas toutes les solutions d'une EDO mais seulement celles qui vérifient certaines conditions, dites conditions initiales de Cauchy ou tout simplement conditions de Cauchy.

On considère le problème de Cauchy, ou problème à valeur initiale

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{7.5}$$

avec $t, t_0 \in I$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $x(t), x_0 \in \mathbb{R}^n$ *et* $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continue.*

Définition 7.3. *On dit que la fonction* $x : I \to \mathbb{R}^n$ *est solution de (7.5) si* $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, $x(t_0) = x_0$ *et* $\forall t \in I, x'(t) = f(t, x(t))$.

Définition 7.4. *La fonction* $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est lipschitzienne en* x *s'il existe une constante* L*, appelée la constante de Lipschitz de* f*, telle que :*

$$\forall t \in I, \forall\, x,\ z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, x) - f(t,\ z)\| \leqslant L\,\|x - z\|\,.$$

Le théorème fondamental de ce chapitre est le suivant.

Théorème 7.2 (Cauchy - Lispchitz - f lipschitzienne)**.** *Soit la fonction* f*, à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*, continue sur* $[t_0,\ t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ *et lipschitzienne par rapport à* x*. Alors, pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *il existe une unique fonction* $x \in \mathcal{C}^1\left([t_0,\ t_0 + a], \mathbb{R}^n\right)$ *qui vérifie*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \forall t \in [t_0, t_0 + a] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{7.6}$$

On verra plus tard que dans un cadre assez fréquent, les problèmes de Cauchy admettent en général une unique solution définie sur un intervalle I *de* $\mathbb{R}$*. Considérons l'équation différentielle*

$$x' = x^{1/3}, \tag{7.7}$$

avec pour condition initiale $x(0) = 0$*. La fonction* $x \to x^{1/3}$ *est continue. En revanche sa dérivée n'est pas définie en* 0*. Les conditions du théorème ne sont donc pas remplies et on vérifiera que* $x = 0$ *et* $x =$

$\pm\sqrt{8/27}t^{3/2}$ *sont solutions de l'équation différentielle.*

Exemple 7.11. On a une équation sous la forme :

$$x + ax = x \tag{7.8}$$

avec a et x constants.

Solution de l'équation *La solution générale de l'équation est :*

$$x(t) = Ae^{-at} + \frac{x}{a} \tag{7.9}$$

où [1] A *est une constante qui se détermine à partir d'une condition initiale.*

Condition initiale *Admettons que l'on connaisse la valeur de* x *Ã un temps* t_0*, c'est Ã dire qu'on a* x_0 *tel que* $x(t_0) = x_0$*. On en dÃ©duit la valeur de la constante* A *:*

$$A = \left(x_0 - \frac{x}{a}\right) e^{at_0}. \tag{7.10}$$

Alors

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{x}{a}\right) e^{-a(t-t_0)} + \frac{x}{a} \text{ quand } t > t_0. \tag{7.11}$$

7.5.1 Solution maximale

Exemple 7.12. Soit $x_0 > 0$. Calculer la solution maximale de l'équation différentièlle

$$x' = -\frac{1}{x} \qquad (1),$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$.

Soient $x_0 > 0$ et l'équation différentièlle (1). Alors,

$$xx' = -1 \Rightarrow x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = -x + c$$

d'où

$$x = +\sqrt{-2x + c_1}, \text{ où } c_1 = 2c.$$

Le signe $[+]$ car soit positif soit négatif or $x_0 > 0$ donc $x(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Détermination de c_1 :

$$x(0) = x_0 = +\sqrt{c_1} \Rightarrow c_1 = x_0^2.$$

On prend

$$x(x) = \sqrt{-2x + x_0^2}.$$

Donc cette fonction définit quand

$$-2x + x_0^2 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{2}x_0^2$$

L'intervalle maximale est $]-\infty, \frac{1}{2}x_0^2[$. Ce qui donne la solution $(\sqrt{-2x + x_0^2},]-\infty, \frac{1}{2}x_0^2[)$ est solution de (1) maximal dans $\mathbb{R}$.

7.6 Série d'exercices

Exercice 7.1. 1. *Former les équations différentielle des familles de courbes suivantes :*

$$a)\ x = c\exp x,\ \ b)\ x^2 + x^2 = c^2,\ \ c)\ x = c_1 \exp 2x + c_2 \exp(-x)\,.$$

2. *Trouver des solutions coïncidentes de deux équations différentielles*

$$a)\ x' = x^2 + 2x - x^4,\ \ b)\ x' = -x^2 - x + 2x + x^2 + x^4.$$

3. *Montrer que pour l'équation*

$$x' = |x|^{\frac{1}{2}}$$

la solution n'est unique en aucun point de l'axe OX.

Exercice 7.2. 1. *En s'appuyant sur le théorème d'existence de la solution d'une équation différentielle, indiquer l'intervalle* $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ *dans lequel l'existence de la solution de l'équation*

$$x' = f(x,\ t)\,,$$

sera garantie si :

a) $x_0 = 1,\ x_0 = x(1) = 2,\ f(x,\ t) = 2xx^2$ *sur l'ensemble*

$$D = \{(x,t) : |x - x_0| \leqslant 1 = a,\ |x - x_0| \leqslant 1 = b\}$$

b) $x_0 = 0,\ x_0 = x(0) = 1,\ f(x,\ t) = 2tx^2$ *sur l'ensemble*

$$D = \left\{(x,t) : |x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4} = a,\ |x - 1| \leqslant 1 = b\right\}.$$

Exercice 7.3. *Intégrer les équations suivantes*

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (1+\exp t)\, t x' = \exp t & x(0) = 1 \\ \text{b) } x' \sin x = x \ln x & x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e \\ \text{c) } x x' = x(\ln x - \ln x) & x(0) = 1 \\ \text{d) } x^2 + x x' = x & x(1) = 0. \end{array}$$

Exercice 7.4. *Intégrer les équations suivantes*

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2x'^2 - 2tx' - 2x + t^2 = 0 & \\ \text{b) } x = tx' + \dfrac{a}{2x'} & a = \text{const.} \\ \text{c) } tx' - x^2 + (2x-1)\,x = t^2 + 2t & x_1 = t. \end{array}$$

Exercice 7.5. *Trouver toutes les solutions maximales des équations différentielles suivantes :*

1. *Equations à variables séparées :*

$$\text{a) } (1+x)\,x' = t - 1, \ \text{b) } x' \exp(x) = \exp(t)\,,$$

Indication. a) $\left(\mathbb{R},\ x \longmapsto -1 + \sqrt{x^2 - 2x + c + 1}\right)$ *et* $\left(\mathbb{R},\ x \longmapsto -1 - \sqrt{x^2 - 2x + c + 1}\right)$

avec $c > 0$;

$(\mathbb{R},\ x \longmapsto x - 2)$ *et* $(\mathbb{R},\ x \longmapsto -x)$;

$\left(]-\infty,\ 1 - \sqrt{-c}\,[\,, x \longmapsto -1 + \sqrt{x^2 - 2x + c + 1}\right)$; $\left(]-\infty,\ 1 - \sqrt{-c}\,[\,, x \longmapsto -1 - \sqrt{x^2 - 2x + c +}\right.$

$\left(]1 + \sqrt{-c}, +\infty[\,, x \longmapsto -1 - \sqrt{x^2 - 2x + c + 1}\right)$; $\left(]1 + \sqrt{-c}, +\infty[\,, x \longmapsto -1 + \sqrt{x^2 - 2x + c +}\right.$

avec $c > 0$.

b) $(\mathbb{R},\ x \longmapsto \ln(c + \exp x))$ *avec* $c \geqslant 0$ *et* $(]\ln(-c)\,,\ +\infty[\,, x \longmapsto \ln(c + \exp x))$ *avec* $c <$

0

Exercice 7.6. 2. *Equations homogènes :*

$$\text{a) } x' = \frac{x}{x} - 1, \text{ b) } 2x' = \frac{x}{x} + \frac{x^2}{x^2}$$

Ind. a) $\left(\mathbb{R}_+^*,\ x \longmapsto cx - x\ln x\right)$ *et* $\left(\mathbb{R}_-^*,\ x \longmapsto cx - x\ln x\right)$ *avec* $c \in \mathbb{R}$.

b) $\left(\mathbb{R}_+^*,\ x \longmapsto x\right), \left(\mathbb{R}_-^*,\ x \longmapsto x\right), \left(\mathbb{R}_+^*,\ x \longmapsto 0\right)$ *et* $\left(\mathbb{R}_-^*,\ x \longmapsto 0\right)$.

et $\left(\left]0, \frac{1}{c^2}\right[, x \longmapsto \frac{x}{1-c\sqrt{x}}\right), \left(\left]\frac{1}{c^2}, +\infty\right[, x \longmapsto \frac{x}{1-c\sqrt{x}}\right) \left(\left]-\infty, -\frac{1}{c^2}\right[, x \longmapsto \frac{x}{1-c\sqrt{-x}}\right)$
$\left(\left]-\frac{1}{c^2}, +\infty\right[, x \longmapsto \frac{x}{1-c\sqrt{-x}}\right)$ *avec* $c \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 7.7. 3. *Equations linéaires :*

$$\text{a) } x' + \frac{1}{x^2}x = \exp\left(\frac{1}{x}\right), \text{ b) } x' - 2xx = -(2x-1)\exp(x), \text{ c) } x' - \frac{2x-1}{x^2}x = 1$$

Ind. a) $\left(\mathbb{R}_+^*,\ x \longmapsto (c+x)\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right), \left(\mathbb{R}_-^*,\ x \longmapsto (c+x)\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ *avec* $c \in \mathbb{R}$.

b) $\left(\mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x + c\exp\left(x^2\right)\right)$ *avec* $c \in \mathbb{R}$.

c) $\left(\mathbb{R}_+^*,\ x \longmapsto x^2\left(c\exp\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)\right), \left(\mathbb{R}_-^*,\ x \longmapsto x^2\left(c\exp\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)\right)$ *avec* $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.8.

4. *Equations de Bernoulli :*

$$\text{a) } xx' + x - xx^2\ln(x) = 0, \text{ b) } 2xx^2 - x + xx' = 0$$

5. *Equation de Riccati :*

$$\text{a) } x' = -xx^2 + \frac{1}{x}x - \frac{2}{x^3} \qquad x \longmapsto \frac{1}{x^2}$$

$$\text{b) } x' = 2xx^2 - 2(2+x)x + \frac{2x^2+2x-1}{x^2} \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Exercice 7.9.

1. *Trouver toutes les solutions maximales des équations différentielles suivantes : (Equations linéaires du second ordre à coefficients constants)*

$$\begin{aligned}
&a)\ x'' - x' - 6x = (16x - 8)\exp(-x)\\
&b)\ x'' - x = 2(\cos x - x\sin x)\\
&c)\ x'' + x = (3\cos x - \sin x)\exp(x)\\
&d)\ x'' + x = \tfrac{1}{\cos x}
\end{aligned}$$

2. *Pour chacune des équations différentielles suivantes, trouver la solution maximales* $(I,\ \varphi)$ *qui vérifie les conditions indiquées :*

$$\begin{array}{ll}
a)\ \left(1+x^2\right)x'' - 2xx' = 0 & 0 \in I,\ \varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi'(0) = 3.\\
(1+\ln x)\,x'' + \dfrac{x'}{x} = 2 + \ln x & 1 \in I,\ \varphi(1) = \dfrac{1}{2} \text{ et } \varphi'(1) = 1.\\
xx'' + x'^2 = 0 & 0 \in I,\ \varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi'(0) = \dfrac{1}{2}.
\end{array}$$

Exercice 7.10. *Nous allons résoudre l'équation suivante :*

$$x' + x^2 - 4x + 4 = 0 : \tag{E}$$

1. *Comment appelle-t-on ce type d'équation ?*

2. *Mettre cette équation sous la forme* $x' = f(t,\ x)$ *en précisant la fonction* f *et son ensemble de définition.*

3. *Justifier que cette équation vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.*

4. *Que dire d'une solution qui prend la valeur 2 ?*

Dans la suite, on considère une solution x *de l'équation sur un intervalle maximal* I.

5. *Déterminer une primitive de* $-\dfrac{1}{(z-2)^2}$.

6. *Résoudre* (E).

Exercice 7.11. *Résoudre*

$$\left(x^2-4\right)x'^2-2xxx'-x^2=0,$$

et rechercher les solutions singulières.

2. *Trouver toutes les solutions maximales de l'équation*

$$t^3x'+x=1.$$

3. *Même question avec l'équation*

$$-t^3x'+x=1.$$

Exercice 7.12. *Soit l'équation différentielle*

$$x'=\sqrt[3]{x^2}+a.$$

Pour quelle valeur du paramètre a cette équation a-t-elle une solution singulière ?

2. *Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle*

$$x'^2-4xx'+4x=0.$$

Mettre en évidence les solutions singulières (s'il y en a) et représenter graphiquement les résultats obtenus.

3. *des solutions singulières si elles existen*

$$4x'^3-6x'^2+9\left(x-x\right)=0.$$

Exercice 7.13. *Résoudre les équations différentielles suivantes (i.e. trouver toutes les solutions maxi-*

males) :

$$x' = x + \sin(t)$$

2. *Trouver toutes les solutions maximales de l'équation*

$$t^3 x' + x = 1.$$

3. *Même question avec l'équation*

$$-t^3 x' + x = 1.$$

4. *Résoudre*

$$\left(x^2 - 4\right) p^2 - 2xxp - x^2 = 0,$$

et rechercher les solutions singulières.

Exercice 7.14. *Trouver toutes les solutions maximales de l'équation*

$$tx' + x = \frac{1}{1-t}.$$

2. *Même question avec l'équation*

$$tx' + x = 3t^2.$$

Exercice 7.15. *Trouver le discriminant dans chacun des cas suivant*

$$\textbf{a.} \qquad x'^3 + tx' - x = 0.$$

$$\textbf{b.} \qquad x = C\,(t - C)^2\,.$$

2. *Trouver toutes les solutions de l'équation ci-dessous. Mettre en évidence les solutions* *singulières et représenter graphiquement les résultats obtenus.*

$$x = 2tx' - xx'^2.$$

Exercice 7.16. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $x' = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, ***b)*** $x' = (1-x)\,x$, ***c)*** $x' = \operatorname{tg}(t)\,x,\ x(0) = 1$,

d) $x' = \frac{\pi}{4}\cos(t)\left(1+x^2\right)$, ***e)*** $x' = t\sqrt{1-x^2}$, ***f)*** $t^3x'\sin x = 2,\ \lim\limits_{t\to+} x(t) = \frac{\pi}{2}$,

g) $x'\sqrt{1-t^2} + tx = 0$, ***h)*** $\left(1-x^2\right)x' = x$, ***I)*** $tx' + x\operatorname{Log} x = 0,\ x(1) = 1$.

Exercice 7.17. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $4xx' + t = 0$, ***b)*** $(t-x)\,x' + 2t + 3x = 0$, ***c)*** $t^2x' = x^2$,

d) $tx' = x - t$, ***e)*** $tx' = x + \sqrt{x^2-t^2}$, ***f)*** $tx' = x + t\cos^2\frac{x}{t}$.

Exercice 7.18. *Intégrer les équations différentielles suivantes :*

a) $\left(t^2x + x^3\right)x' + t^3 + tx^2 = 0$, ***b)*** $x\left(t^2+2x^2\right)x' + t\left(2t^2+x^2\right) = 0$,

c) $2txx' = t + x^2,\ \mu(t,x) = \varphi(t)$ ***d)*** $\left(t + 4tx + 5x^2\right)x' + 3t + 2x + x^2,\ \mu(t,x) = \varphi\left(t+x^2\right)$.

Exercice 7.19. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $x' + x = \cos t$, ***b)*** $x' + 2tx = 4t$, ***c)*** $x' - x = e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{R}$,

d) $x' - 2tx = 2te^{t^2}$, ***e)*** $(t-2)\,x' = x + 2\,(t-2)^2$, ***f)*** $\left(1+t^2\right)x' = 2tx + 5\left(1+t^2\right)$,

g) $x' + x = e^{-t},\ x(0) = 0$, ***h)*** $2tx' + x = 1,\ x(1) = 2$, ***I)*** $x'\cos t - x\sin t = 2t,\ x(0) = 0$.

Exercice 7.20. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $x' = x - \sqrt{x}$, ***c)*** $x' = x^2 + tx + 1$, ***e)*** $x = tx' - (x')^3$,

b) $\left(t^3 + 1\right) x' = 3t^2 x - tx^3$, ***d)*** $\left(t^3 - 1\right) x' = x^2 + t^2 x - 2t$, ***f)*** $x = t\,(1 + x') - (x')^2$.

Exercice 7.21. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $x' - \left(2t - \dfrac{1}{t}\right) x = 1$, ***c)*** $x' - x = t^k e^t, k \in \mathbb{N}$, ***c)*** $t\left(1 + \mathrm{Log}^2 t\right) x' + 2\,(\mathrm{Log}\, t)\, x = 1$,

d) $tx' + x - tx^3 = 0$, ***e)*** $t^2\left(x^2 + x'\right) = tx - 1$, ***f)*** $t^2 x' = t^2 x^2 + tx + 1$,

g) $x = \frac{3}{2} tx' + e^{x'}$, ***h)*** $x = (x' - 1)\, e^{x'}$, ***i)*** $tx' = t^2 + x$,

j) $\left(t^3 + e^x\right) x' = 3t^2$, ***k)*** $tx' = x - t$, ***l)*** $x' \sin t = x\, \mathrm{Log}\, x$.

Exercice 7.22. *Trouver des solutions singulières si elles existent :*

a) $xy' + y'^2 - y = 0$

b) $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0, \;\; x > 0$

c) $2y\,(y' + 2) - xy'^2 = 0$

d) $y'^2 - y^2 = 0$.

e) $y'^2\,(2 - 3y)^2 = 4\,(1 - y)$

Exercice 7.23. *Déterminer, sans résoudre l'équation, le lieu des extrema des solutions de* $x' = tx - 1$. *Dans quelle région du plan sont-elles croissantes, décroissantes ?*

Exercice 7.24. *On considère la famille de courbes* (C_μ) *d'équation générale* $t^2 + 3x^2 - 3 = \mu x$, $\mu \in \mathbb{R}$.

a) *Préciser la nature des courbes* (C_μ).

b) *Déterminer l'équation différentielle pour cette famille.*

c) *En déduire l'équation différentielle de la famille de courbes orthogonales* *puis l'équation générale de ces courbes.*

Exercice 7.25. *Montrer que la substitution* $x = \frac{s}{t}$ *réduit l'équation différentielle* $(1 - tx)\,x = t\,(1 + tx)\,x'$ *à une équation à variables séparables. Résoudre cette équation.*

Exercice 7.26. *On s'intéresse à l'évolution d'une population. Soient* $x\,(t)$ *le nombre d'individus de cette population et* $k\,(t) = \frac{x'\,(t)}{x\,(t)}$ *le taux de croissance de cette population au temps* t. *Étudier l'évolution de cette population au cours du temps dans les cas suivants :*

a) k *est constant.*

b) $k = x$. *Montrer alors que la solution explose en temps fini.*

c) $k = a - bx$. *Montrer que* x *converge.*

CHAPITRE

8 Équations différentielles non linéaires du deuxième ordre

8.1 Équations différentielles du second ordre incomplètes

Ces équations se ramènent à des équations du premier ordre.

8.1.1 Équations du type $x'' = f(t, x')$

Si on considère la nouvelle fonction inconnue $v = x'$, l'équation $x'' = f(t, x')$ se ramène à l'équation du premier ordre $v' = f(t, v)$. La solution générale de cette dernière sera de la forme $v_\mu(t)$, $\mu \in \mathbb{R}$, et on obtient donc $x(t) = \int v_\mu(t)\,dt + \mu,\ \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 8.1. Cherchons les solutions de l'équation $x'' = \frac{1}{t}x' + 3t$.

Posons $v = x'$ et remplaçons dans notre équation, on obtient $v' = \frac{1}{t}v + 3t$. En utilisant la méthode de variation de la constante on trouve $v(t) = 3t^2 + \mu t,\ \mu \in \mathbb{R}$. Il vient $x(t) = t^3 + \mu t^2 + \mu,\ \mu, \mu \in \mathbb{R}$.

8.1.2 Équations du type $y'' = f(x, x')$

La méthode consiste à prendre x comme nouvelle variable et $v = x'$ comme variable fonction inconnue en la variable x, c'est-à-dire $v : x \mapsto v(x) = x'$.

Il peut y avoir des solutions constantes $x(t) = x_0$, auquel cas x ne peut être choisi comme variable. On a donc des solutions singulières $x(t) = x_j$ avec $f(x_j, 0) = 0$.

Dans le cas général, on a $x'' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$.

L'équation $x'' = f(x, x')$ se ramène alors à l'équation du premier ordre $v\frac{dv}{dx} = f(x, v)$. La résolution de cette dernière donne une solution générale $v_\mu(x)$, $\mu \in \mathbb{R}$. On doit ensuite résoudre $x' = v_\mu(x)$ ou $\frac{dx}{v_\mu(x)} = dt$. D'où la solution générale

$$\int \frac{dx}{v_\mu(x)} = t + \mu,\ \ \mu, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 8.2. Cherchons les solutions de l'équation $x'' = 2xx'$.

Par le changement de fonction $v(x) = x'$, on a $x'' = v\frac{dv}{dx} = 2xv$ qui est une équation à variables séparées de fonction inconnue $v(x)$ ayant pour solution $v = x^2 + \mu, \mu \in \mathbb{R}$. Ensuite, en résolvant l'équation $x' = x^2 + \mu$, qui est une équation de Riccati, on trouve $x(t) = \mu \operatorname{tg}(\mu t + \mu)$ et $x(t) = -\mu \coth(\mu t + \mu)$ $\mu, \mu \in \mathbb{R}$. De plus $x = \mu$ sont des solutions singulières.

8.1.3 Équations du type $x'' = f(x)$

C'est un cas particulier du cas précédent, mais on peut ici préciser davantage la méthode de résolution. On a en effet $x'x'' = x'f(x)$, et en intégrant il vient $\frac{1}{2}(x')^2 = \varphi(x) + \mu,\ \mu \in \mathbb{R}$, où φ est une primitive de f. On obtient donc

$$x' = \pm\sqrt{2(\varphi(x) + \mu)} \ \text{ ou } \ \frac{dx}{\pm\sqrt{2(\varphi(x) + \mu)}} = dt,$$

d'où la solution générale est sous forme

$$\pm\int \frac{dx}{\sqrt{2\left(\varphi\left(x\right)+\mu\right)}} = t+\mu,\ \mu\in\mathbb{R}.$$

Exemple 8.3. On considère l'équation $x'' = 2e^{x}$.

En multipliant par x' on a $x'x'' = 2x'e^{x}$, et donc en intégrant il vient $\frac{1}{2}\left(x'\right)^{2} = 2e^{x}+\mu,\ \mu\in\mathbb{R}$.

Alors

$$x' = \pm\sqrt{4e^{x}+2\mu},\ \text{ ou }\ \frac{dx}{\pm\sqrt{4e^{x}+2\mu}} = dt, \mu\in\mathbb{R}.$$

En intégrant et après simplification on obtient

$$x\left(t\right) = 2\,\mathrm{Log}\left(\frac{\mu}{\cos\left(\mu t+\mu\right)}\right),\ \ \mu,\mu\in\mathbb{R}.$$

8.2 Équations différentielles type-homogènes du second ordre

Ce sont les équations différentielles qui peuvent se mettre sous la forme

$$F\left(t,\frac{x'}{x},\frac{x''}{x}\right) = 0. \tag{8.1}$$

La résolution de ces équations se fait en effectuant un changement de fonction inconnue en posant $u\left(t\right) = \dfrac{x'\left(t\right)}{x\left(t\right)}$, et donc $\dfrac{x''}{x} = u'+u^{2}$. On est alors ramené à une équation différentielle du premier ordre $F\left(t,u,u'+u^{2}\right) = 0$.

Exemple 8.4. Soit l'équation $xx'' - (x')^2 + 6tx^2 = 0$.

On peut écrire cette équation sous la forme $\frac{x''}{x} - \left(\frac{x'}{x}\right)^2 + 6t = 0$ soit $F\left(t, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}\right) = 0$ avec $F(t, z, w) = w - z^2 + 6t$.

On effectue un changement de fonction inconnue en posant $u = \dfrac{x'}{x}$. D'où $\dfrac{x''}{x} = u' + u^2$ et donc l'équation $\frac{x''}{x} - \left(\frac{x'}{x}\right)^2 + 6t = 0$ devient $u' + 6t = 0$. D'où $u = -3t^2 + \mu, \mu \in \mathbb{R}$ et donc $\dfrac{x'}{x} = -3t^2 + \mu$ qui est une équation différentielle du premier ordre axant pour solution générale $x = \mu e^{-t^3+\mu t}$, $\mu, \mu \in \mathbb{R}$.

8.2.1 Résoudre le système d'équations

Exemple 8.5. Montrer que la fonction

$$\psi(t, x_1, x_2) = \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} - t, \tag{8.2}$$

est l'intégrale du système d'équations

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1^2}{x_2}, \frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2^2}{x_1}. \tag{8.3}$$

Solution. Dans ce cas

$$f_1(t, x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}, f_2(t, x_1, x_2) = -\frac{x_2^2}{x_1}. \tag{8.4}$$

Cherchons les dérivées partielles de la fonction $\psi(t, x_1, x_2)$. On a

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -1, \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \tag{8.5}$$

En introduisant (8.4) et (8.5) dans le premier membre de (??), on obtient

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + f_1(t, x_1, x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + f_2(t, x_1, x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_2} =$$
$$= -1 + \frac{x_1^2}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = -1 + 1 = 0$$

dans le domaine $D : -\infty < t < +\infty, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0.$

Ainsi, la fonction (8.2) est l'intégrale du système d'équations (8.3), et, par suite, l'intégrale première du système (8.3) sera

$$\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} - t = C,$$

où C est une constante arbitraire.

Le système normal (5.9) a une infinité de systèmes d'intégrales premières.

Les intégrales $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ du système (5.9) s'appellent intégrales indépendantes par rapport aux fonctions cherchées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ ne sont reliées par une relation de la forme $F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0$ pour aucun choix de la fonction F qui ne dépend pas explicitement de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Théorème 8.1. *Pour que les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ possédant des dérivées partielles $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ soient indépendantes par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans un certain domaine D, il faut et il suffit que le jacobien de ces fonctions soit différent de zéro dans le domaine D,*

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots; \psi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

On appelle intégrale générale du système normal (5.9) l'ensemble de n intégrales premières indépendantes de ce système.

Si l'on connaît k intégrales premières indépendantes du système (5.9), $k < n$, l'ordre de ce système peut être abaissé de k unités.

8.3 Recherche de combinaisons intégrables. Forme symétrique d'un système d'équations différentielles

Recherche de combinaisons intégrables. Cette méthode d'intégration d'un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.6}$$

peut se résumer de la façon suivante : à l'aide des opérations arithmétiques convenables (addition, soustraction, multiplication, addition) on forme a partir des équations du système (8.6) des combinaisons dites intégrables, c'est-à-dire des équations assez faciles à résoudre de la forme

$$F\left(t, u, \frac{du}{dt}\right) = 0,$$

où u est une certaine fonction des fonctions cherchées $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Chaque combinaison intégrable fournit une seule intégrale première. Si on a trouvé n intégrales premières du système (8.6), son intégration est achevée ; dans le cas où on n'a obtenu que m intégrales premières indépendantes, $m < n$, le système (8.6) se ramène à un systeme comportant un plus petit nombre de fonctions inconnues.

Exemple 8.6. Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2\left(x_1^2 + x_2^2\right) t, \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1x_2t. \end{cases} \tag{8.7}$$

Solution En additionnant membre à membre les deux équations ou obtient

$$\frac{d\left(x_1 + x_2\right)}{dt} = \left(x_1 + x_2\right)^2 2t,$$

d'ou

$$-\frac{1}{x_1 + x_2} = t^2 - C_1 \text{ ou } \frac{1}{x_1 + x_2} + t^2 = C_1$$

En soustrayant membre à membre la deuxième équation de la premiére, on trouve

$$\frac{d\left(x_1 - x_1\right)}{dt} = 2t\left(x_1 - x_2\right)^2,$$

d'où

$$\frac{1}{x_1 - x_2} + t^2 = C_1.$$

Ainsi, on a obtenu deux intégrales premières du systèmé donné

$$\psi_1\left(t, x_1, x_2\right) = t^2 + \frac{1}{x_1 + x_2} = C_1,$$
$$\psi_2\left(t, x_1, x_2\right) = t^2 + \frac{1}{x_1 - x_2} = C_2,$$

qui sont indépendantes parce que le jacobien est différent de zéro :

$$\frac{D\left(\psi_1, \psi_2\right)}{D\left(x_1, x_2\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{(x_1+x_2)^2} - \frac{1}{(x_1+x_2)^2} \\ -\frac{1}{(x_1-x_2)^2} - \frac{1}{(x_1-x_2)^2} \end{vmatrix} =$$
$$= -\frac{2}{(x_1^2 - x_2^2)^2} \neq 0.$$

Exemple 8.7. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t} \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 1 \end{cases} \tag{8.9}$$

Solution. En soustrayant membre à membre la deuxième équation de la première, on obtient $\frac{d(x_1 - x_2)}{dt}$, d'où l'on tire une intégrale première du système (8.9)

$$x_1 - x_2 = C_1. \tag{8.10}$$

En reportant (8.10) dans les deuxième et troisième équations du systéme (8.9), on obtient un système à deux fonctions inconnues

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{x_3 - t}, \\ \frac{dx_3}{dt} = C_1 + 1. \end{cases} \tag{8.11}$$

De la deuxième équation du système (8.11) on déduit

$$x_3 = (C_1 + 1)\, t + C_2. \tag{8.12}$$

Introduisant (8.12) dans la première équation du système (8.11), on obtient

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2}, \quad x_2 = \ln |C_1 t + C_2| + C_3$$

ainsi,

$$x_1 - x_2 = C_1, \quad x_2 = \ln |C_1 t + C_2| + C_3$$

$$x_3 = (C_1 + 1)\, t + C_2.$$

On en tire la solution générale du système (8.9) :

$$x_1 = \ln|C_1 t + C_2| + C_1 + C_3, x_2 = \ln|C_1 t + C_2| + C_3$$

$$x_3 = (C_1 + 1)\, t + C_2$$

Exemple 8.8. Trouver une solution particulière du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{x}, \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{x-t}, \end{cases}$$

qui satisfait aux conditions initiales $x|_{t=0} = 1$, $x|_{t=0} = 1$.

Solution. Ecrivons ce systeme sous la forme

$$\begin{cases} x(\frac{dx}{dt} - 1) = -1, \\ (x-t)\frac{dx}{dt} = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x\frac{d(x-t)}{dt} = -1 \\ (x-t)\frac{dx}{dt} = 1. \end{cases}$$

Additionnons membre à membre les dernières équations, il vient

$$x\frac{d(x-t)}{dt} + (x-t)\frac{dx}{dt} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}[(x-t)x] = 0.$$

Ou en trouve l'intégrale première $(x-t)x = C_1$. Puisque $x-t = \Leftrightarrow C_1/x$, la deuxième équation du système prend la forme $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{C_1}$, d'où $x = C_2 e^{t/C_1}$. Ainsi,

$$(x-t)x = C_1, \quad x = C_2 e^{t/C_1}$$

On en déduit la solution générale

$$x = t + \frac{C_1}{C_2}e^{-t/c_1}, \quad x = C_2 e^{t/C_1}$$

En posant $t = 0$ dans ces égalités, on trouve $1 = C_1/C_2$, $1 = C_2$, c'est-à-dire $C_1 = C_2 = 1$, si bien que la solution particulière cherchée sera

$$x = t + e^{-t}, x = e^t.$$

8.4 Série d'exercices

Exercice 8.1. *Vérifier si les fonctions données* ψ *sont des intégrales premières des systèmes donnés d'équations différentielles :*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1^2}{x_2}, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - x_1; \end{cases} \quad \psi = x_1 x_2 e^{-t}.$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{e^{-x}}{t}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{t}e^{-y}; \end{cases} \quad \psi = (1+x)e^{-x} - e^{-y}.$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y+t}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x-t}{x+y} \end{cases} \quad \textit{a)}\ \psi_1 = x + y - t_2 \ \textit{b)}\ \psi_2 = x + y + t.$$

Exercice 8.2. *Pour les systèmes d'équations différentielles qui suivent, vérifie les couples de fonctions donnés forment les systèmes d'intégraleg premières indépendantes :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t-y}{y-x}, \quad x + y + t = C_1, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x-t}{y-x}; x^2 + y^2 + t^2 = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t+y}{x-y}, \quad \frac{x-y}{t-x} = C_1 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{t+x}{x+y} : \quad \frac{t-x}{t-y} = C_2 \end{cases}$$

CHAPITRE

9 Sur l'étude qualitatives

Contents

9.1 Équations différentielles et familles de courbes

9.1.1 Équation différentielle associée à une famille de courbes

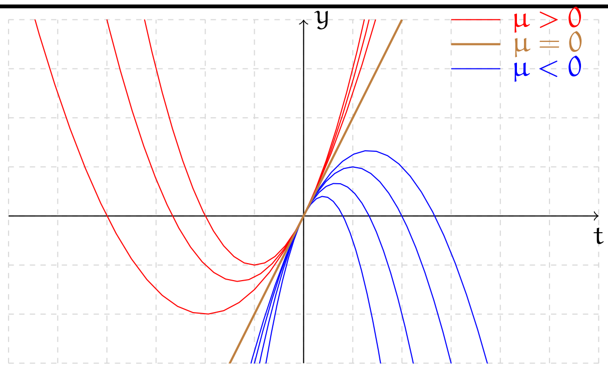
On considère l'équation $\phi(t,x,\mu)=0,\quad \mu\in\mathbb{R}$, d'une famille de courbes Γ_μ. En dérivant cette équation par rapport à t, on obtient

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x,\mu)+x'\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,x,\mu)=0.$$

On essaie d'éliminer μ entre les deux équations précédentes pour obtenir une équation ne faisant plus intervenir que t, x, x' : $F(t, x, x') = 0$ qui est l'équation différentielle de la famille de courbes Γ_μ.

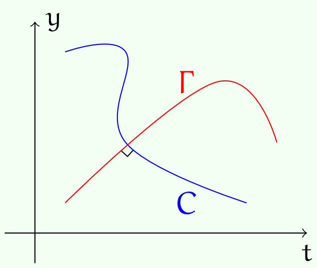
Exemple 9.1. Cherchons l'équation différentielle de la famille de paraboles $x = \mu t^2 + 2t,\ \mu \in \mathbb{R}$. On a $x' = 2\mu t + 2$. En éliminant μ entre les deux équations $\mu = \frac{x-2t}{t^2} = \frac{x'-2}{2t}$, on obtient

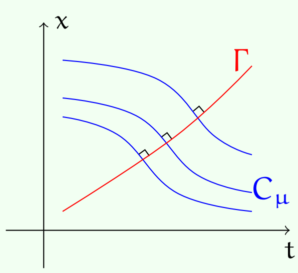
$$tx' = 2x - 2t.$$



9.1.2 Trajectoires orthogonales à une famille de courbes

Définition 9.1 (Courbes orthogonales). *Deux courbes sont orthogonales si elles se coupent et que leurs tangentes aux points d'intersection sont perpendiculaires. Notons que le produit des pentes de ces tangentes vaut alors* -1.





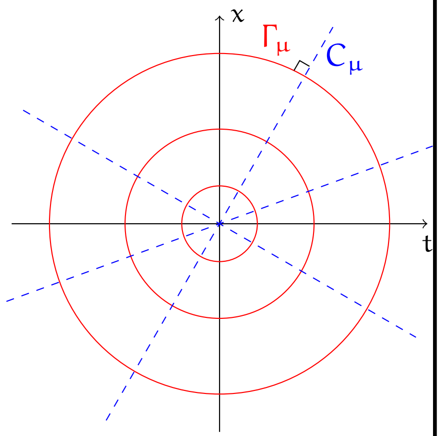
Définition 9.2 (Trajectoire orthogonale). *On appelle trajectoire orthogonale de la famille de courbes* (C_μ) *une courbe* Γ *telle qu'en chacun de ses points il passe une courbe* C_μ *orthogonale à* Γ.

Notons que, si $F(t,x,x') = 0$ est l'équation différentielle de la famille (C_μ), alors celle des trajectoires orthogonales est de la forme $F\left(t,x,\frac{-1}{x'}\right) = 0$.

Exemple 9.2. Cherchons les trajectoires orthogonales des droites passant par l'origine. Cherchons tout d'abord l'équation différentielle de la famille de droites $C_\mu : x = \mu t,\ \mu \in \mathbb{R}$.

On a $x' = \mu$, donc $x = x't$. Alors l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est $x = \left(\frac{-1}{x'}\right) t$ ou bien $xx' = -t$, qui s'intègre en $t^2 + x^2 = K$.

On obtient des courbes lorsque $K = \mu^2$ c'est-à-dire Γ_μ : $t^2 + x^2 = \mu^2,\ \mu \in \mathbb{R}_+^*$, qui sont des cercles centrés à l'origine.



9.2 Méthode des fonctions de Liapounov

La méthode des fonctions de Liapounov consiste à étudier directement la stabilité de la position d'équilibre du système

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), i = 1, 2, ..., n$$

à l'aide d'une fonction convenablement choisie $V(t, x_1, ..., x_n)$ que l'on appelle fonction deLiapounov et ceci sans rechercher au préalable les solutions du système.

Bornons-nous à examiner des systèmes autonomes

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), i = 1, 2, ..., n. \tag{9.1}$$

pour lesquels $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$ est un point de repos.

On dit qu'une fonction $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ définie dans un certain voisinage de l'origine des coordonnées est de signe défini (définie positive ou définie négative), si dans un domaine

$$| x_i | \leqslant h, i = 1, 2, ..., n, \tag{9.2}$$

où h est un nombre positif suffisamment petit, elle ne peut prendre que des valeurs de signe défini et ne s'annule que pour $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. C'est ainsi que dans le cas de $n = 3$ les fonctions

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{et} \quad V = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

seront des fonctions définies positives et la valeur de $h > 0$ peut être prise ici aussi grande que l'on veut.

On dit qu'une fonction $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ est de signe constant (positive ou négative) si, dans le domaine (9.2) elle ne peut prendre que des valeurs d'un seul signe déterminé, mais peut s'annuler aussi pour $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \neq 0$. Par exemple, la fonction

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$$

est une fonction de signe constant (positif). En effet, la fonction $V(x_1, X_2, x_3)$ peut se mettre sous la forme : $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$ qui montre qu'elle s'annule aussi pour $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$, à savavoir pour $x_3 = 0$ et pour des x_1 et x_2 tels que $x_1 = -x_2$.

Soit $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ une fonction dérivable de ses arguments et soient $x_1, x_2, .., X_n$ certaines fonctions du temps qui satisfont au système d'équations différentielles (9.1). Alors, la dérivée totale de la fonction V par rapport au temps aura pour expression

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} . \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{9.3}$$

La grandeur $\frac{dV}{dt}$ définie par la formule (9.3) s'appelle dérivée totale la fonction V par rapport au temps composée en raison du système d'équations (9.1).

Théorème 9.1. *(théorème de Liapounov de la stabilité).Si pour le système d'équations différentielles (9.1) il existe une fonction* $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ *de signe défini (fonction de Liapounov) dont la dérivée totale par rapport au temps* $\frac{dV}{dt}$ *composée en vertu du système (9.1) est une fonction de signe constant, inverse de* V *ou est identiquement nulle, alors le point de repos* $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, *du système (9.1) est stable.*

Théorème 9.2. *(théorème de Liapounov de la stabilité asymptotique). Si pour le système d'équations différentielles (9.1) il existe une fonction de signe défini* $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ *dont la dérivée totale par rapport au temps, composée en vertu du système (9.1), est aussi une fonction de signe défini inverse de* V*, alors le point de repos* $x_i = 0$ *du système (9.1) est asymptotiquement stable.*

Exemple 9.3. Etudier à l'aide d'une fonction de Liapounov la stabilité de la solution nulle $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ du système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_2 + x_1^2 x_2^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - \frac{x_2}{2} - \frac{x_1^3 x_2}{2}. \end{cases}$$

Solution. Cherchons la fonction de Liapounov sous la forme $V = ax_1^2 + bx_2^2$,où $a > 0$, $b > 0$ sont des paramètres arbitraires.

On a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x}.\frac{dx}{dt} = -(2ax^2 + bx^2)(2xx - x^3x^2)(b - 2a).$$

En posant $b = 2a$, on obtient $\frac{dV}{dt} = -2a(x2+x2) \leqslant 0$. Ainsi, pour tout $a > 0$ et $b = 2a$ 1a fonction $V = ax^2 + 2ax^2$ sera une fonction définie positive et sa dérivée $\frac{dV}{dt}$ formée en vertu du système donné sera une fonction définie négative. Du théorème de Liapounov il résulte que la solution nulle $x = 0, x = 0$ du système donné est asymptotiquement stable.

Si l'on ne parvient pas à trouver la fonction $V(x, x)$ sous la forme indiquée plus haut, il convient de la chercher sous la forme $V = ax^4 + bx^4$ ou $V = ax^4 + bx^2$, etc.

Théorème 9.3. *(théorème de Liapounov de l'instabilité). Supposons que pour le système d'équations différentielles (9.1) il existe une fonction* $V(x_1, x_2, \cdot.., x_n)$ *dérivable au voisinage de l'origine des coordonnées et telle que* $V(0, 0, ..., 0) = 0$. *Si sa dérivée totale* $\frac{dV}{dt}$ *formée en vertu du système (9.1) est une fonction définie positive et s'il existe aussi près que l'on veut de l'origine des coordonnées des points en les-quels la fonction* $V(x_1, X_2, ..., x_n)$ *prend des valeurs positives,alors le point de repos* $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, *est instable.*

Théorème 9.4. *(théorème de Tchétaev de l'instabilité). Supposons que pour le système d'équations différentielles (9.1) il existe une fonction* $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ *continûment dérivable dans un certain voisinage du point de repos* $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, *et satisfaisant, dans un certain voisinage fermé du point de repos, aux conditions suivantes :*

1) dans le voisinage Ω *aussi petit que l'on veut du point* $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, *il existe un domaine* Ω_1 *dans lequel* $v(x_1, x_2, ..., x_n) > O$ *et* $v = 0$ *en des points frontières de* Ω_1 *qui sont intérieurs pour* Ω *;*

2) le point de repos $O(0, 0, ..., 0)$ *est un point frontiere un domaine* Ω_1 *;*

3) dans le domaine Ω_1 *la dérivée* $\frac{dv}{dt}$ *formée en vertu didu système (9.1) est une fonction définie positive.*

Alors, le point de repos $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, *du système (9.1) est instable.*

Exemple 9.4. Etudier la stabilité du point de repos $x_1 = 0, x = 0$ du système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x \\ \frac{dx}{dt} = -x_1 \end{cases}$$

Solution. Prenons la fonction $v(x_1, x) = x_1^2 - x^2$. Alors

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 2x_1^2 + 2x^2$$

est une fonction définie positive. Puisqu'il existe des points situés aussi près que l'on veut de l'origine des coordonnées en lesquels $v > 0$ (par exemple $v = x^2 > 0$ le long de la droite $x = 0$), toutes les conditions du théorème sont réalisées et done le point de repos $0(0, 0)$ est instable (col).

Exemple 9.5. Etudier la stabilité du point de repos $x_1 = 0, x = 0$ du système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x^3 + x_1^5 \\ \frac{dx}{dt} = x_1^3 + x^5 \end{cases}$$

Solution. La fonction $v = x_1^4 - x^4$ satisfait aux conditions du theorème de Tchétaev :

1) $v > 0$ pour $|x| > |x|$;

2) $\frac{d}{dt} = 4\left(x^{*} - x^3\right)$ est une fonetion définie positive dans le domaine $|x| > |x|$.

Par suite, le point de repos $x = 0, x = 0$ est instable.

9.3 Stabilité en première approximation

Soit un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x^n), i = 1, 2, ..., n, \tag{9.4}$$

et soit $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, est un point de repos du système (9.4), c'est-à-dire $f_i(0, 0, ..., 0) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Nous supposerons que les fonctions $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont un nombre de fois suffisant dérivables à l'origine des coordonnées.

Développons la fonction f_i en série de Taylor suivant x dans le voisinage de l'origine des coordonnées

$$f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j+R_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$$

ici, $a_{ij}=\frac{\partial f_i(0,0,\ldots,0)}{\partial x_j}$ et R_i sont des termes du deuxièmo ordro de petitesse par rapport a $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Alors, le système initial (9.4) prend la forme

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j+R_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \quad i=1,2, \ldots, n \tag{9.5}$$

Considérons au lieu du système (9.5) le système

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i=1,2, \ldots, n), \quad \left(a_{ij}=\text{ const }\right), \tag{9.6}$$

uppelé système d'équations en première approximation du syatème (9.4).

On peut énoncer les propositions suivantes.

1. Si toutes les racines de l'équation caractéristique

$$\left|\begin{array}{cccc}
a_{14}-\mu & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{28}-\mu & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\mu
\end{array}\right|=0 \tag{9.7}$$

possedent des parties réelles négatives, la solution nulle $x_i=0$, $i=1,2, \ldots, n$, du système (9.6) et celle du système (9.5) sont asymptotiguement stables.

2. Si au moins une racine de l'équation caractéristique (9.7) posaide une partie réelle positive, la solution nulle du système (9.6) of celle da système (9.5) sont instables.

On dit que dans les cas 1 et 2 il est possible d'étudier la stabilité tn première approximation.

Dans des cas critiques, où les parties réelles de toutes les racines da l'équation caractéristique

(9.7) sont non positives et la partie réelle d'au moins une racine est nulle, l'étude de la stabilité en première Approximation est en général impossible (l'influence due aux termes toon linéaires R_i devient considérable).

Exemple 9.6. Etudier la stabilité en première approximation du point de repos $x_1 = 0, x = 0$ du système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x - 5x^2, \\ \frac{dx}{dt} = 3x_1 + x + \frac{x_1^3}{2} \end{cases} \qquad \left(x = \frac{dx}{dt}, (9.8)\right.$$

Solution. Le système en première approximation est

$$\begin{cases} x = 2x + x \\ x = 3x + x \end{cases} \tag{9.9}$$

et les termes non linéaires satisfont aux conditions énonóéts : leur ordre est supérieur ou égal à deux. Ecrivons l'équation caractéristique du système (9.9) :

$$\begin{vmatrix} 2-\mu & 1 \\ 3 & 1-\mu \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \mu^2 - 3\mu - 1 = 0. \tag{9.10}$$

Les racines de l'équation caractéristique (9.10) $\mu_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{3}, \mu_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ sont réelles et $\mu_1 > 0$. Par suite, la solution nulle $x_1 = 0, x = 0$ du système (9.8) est instable.

Exemple 9.7. Considérons le système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x - x_1^3, \\ \frac{dx}{dt} = -x_1 - x^3 \end{cases} \tag{9.11}$$

Solution. Le point de repos $x_1 = 0, x = 0$ du système (9.11) est asymptotiquement stable car pour ce systeme la fonction $v = x^2 + x^2$ satisfait a toutes les conditions du théorème de Liapounov sur la stabilité asymptotique. En particulier,

$$\frac{dv}{dt} - 2x\left(x - x^2\right) + 2x\left(-x - x^2\right) = -2\left(x^4 + x^4\right) \leqslant 0.$$

En méme temps, le point de repos $x = 0, x = 0$ du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^3, \\ \frac{dx}{dt} = -x + x^3 \end{cases} \tag{9.12}$$

est instable en vertu du théorème de Tehétaev : en prenant $v == x^2 + x^2$, on aura $\frac{dv}{dt} = 2\left(x^4 + x^4\right) \geqslant 0$.

Les systèmes (9.11) et (9.12) ont le même système en première approximation

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dx}{dt} = -x, \end{cases} \tag{9.13}$$

L'équstion caractéristique du système (9.13)

$$\begin{vmatrix} -\mu & 1 \\ -1 & -\mu \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \mu^2 + 1 = 0$$

possède des racines imaginaires pures de sorte que les parties réelles de ses racines sont nulles.

Pour le système en première approximation (9.13) l'origine de coordonnfes sert de centre. Les systemes (9.11) et (9.12) sont obtenus par suite de petites perturbations des seconds membres du système (9.13) au voisinage de l'origine des coordonnées. Pourtant ces petites perturbations ont pour résultat la transformation des trajectoires fermées en des spirales. Dans le cas ((9.11)), ces spirales s' approchent de l'origine des coordonnées et forment un foyer stable au point $O(0, 0)$, alors que dans le cas (9.12) elles s'éloignent de l'origine des coordonnées et forment au point $O(0, 0)$ un foyer instable. Alnsi, dans un cas critique, les termes non linéaires peuvent influer sur la stabilité du poiut de repos.

9.4 Série d'exercices

Exercice 9.1. *Etudier la stabilité des solutions nulles des systèmes suivants :*

$$\begin{cases} x_1' = -3x - 2x_1^3, \\ x_2' = 2x_1 - 3x^3, \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 x^4, \\ \frac{dx}{dt} = x_1^4 x. \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_1 x^2, \\ \frac{dx}{dt} = -2x + 4x_1^2 x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = -x - \frac{x_1}{2} - \frac{x_1^3}{4}, \\ x_2' = x_1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}x^3, \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x + x_1^3, \\ \frac{dx}{dt} = -x_1 + x^3, \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1, \\ \frac{dx}{dt} = -x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' x + x_1^2 x^2 - \frac{1}{4}x_1^5, \\ \frac{dx}{dt} = -2x_1 - x^3 x - \frac{1}{2}x_1^3. \end{cases} ; \begin{cases} x_2' = x + x_1^3, \\ \frac{dx}{dt} = x_1 x^6 - 2x^3 - x, x - x^3. \\ \frac{dx}{dt} = 2x_1^2 x^3 - x^7 + 2x_1, \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 3x, \\ \frac{dx}{dt} = x_1 - x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x x_1 - x^3 + x, \\ \frac{dx}{dt} = x_1^4 - x^2 x_1 - x^3. \end{cases} ; \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x - x(x_1 - x)^2, \\ \frac{dx}{dt} = 3x_1 - \frac{3}{2}x(x - x)^2, \end{cases} \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x^5 + x_1^3, \\ \frac{dx}{dt} = x_1^3 - x^5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^3 + 2x x^2, \\ \frac{dx}{dt} = x^2 x. \end{cases}$$

Exercice 9.2. *Soit* $v = v\,(x_1, x_8, \ldots, x_n)$ *une fonction définie positive deux fois continûment dérivable et telle que*

$$v(0) = \frac{\Delta(0)}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial v(0)}{\partial x_n} = 0.$$

Etudier la stabilité de la solution nulle $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ *du système d'équations différentielles*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial v}{dx_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dx_n}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_n} \end{cases}$$

Exercice 9.3. *Etudier la stabilité en première approximation de la solution uulle* $x = 0, x = 0$ *des systemes suivants :*

$$\begin{cases} x_1' = x + 2x - \sin x^4, \\ x_2' = -x - 3x + x\left(e^{\frac{x^4}{2}} - 1\right). \end{cases} ; \begin{cases} x_1' = -x + 3x + x^2 \sin x, \\ x_2' = -x - 4x + 1 - \cos x^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = -2x + 8\sin^2 x \\ x = x - 3x + 4x^3 \end{cases} ; \begin{cases} x = 3x - 22\sin x + x^2 - x^3, \\ x - \sin x - 5x + e^x - 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = -10x + 4e^x - 4\cos x^2, \\ x_2' = 2e^x - 2 - x + x^4, \end{cases} ; \begin{cases} x = 7x + 2\sin x - x^4, \\ x_2' = e^2 - 3x - 1 + \frac{5}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2x - x^3 x, \\ x_2' = -x - 2x + x^4 - x^3. \end{cases} ; \begin{cases} x_1' = \frac{1}{4}\left(e^x - 1\right) - 9x + x^4, \\ x_2' = \frac{1}{5}z - \sin x + x^{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = 5x + x\cos x - \frac{x^3}{3} \\ x = 3x + 2x + \frac{x^4}{12} - x^3 e x \end{cases} ; \begin{cases} x = 4x - x^2, \\ x = -3x - x^3, \end{cases} ; \begin{cases} x_1' = -2x - x^5, \\ x_2' = 2x - x^5, \end{cases}$$

CHAPITRE

10 Exercices de révision avec solutions

10.1 Exercices de révision

Exercice 10.1. *Soit le système*

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2, \\ x_2' = cx_1 + dx_2. \end{cases}$$

Montrer à l'aide de l'écriture matricielle que x_1 et x_2 sont solutions d'une même équation du second ordre à coefficients constants

$$z'' + \alpha z' + \beta z = 0$$

dont l'équation caractéristique est la même que celle de la matrice du système.

Exercice 10.2. *Soit $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ de classe C^1, on suppose que $(\forall t)\ \Phi(t)$ et $\Phi'(t)$ commutent.*

Montrer que $t \longmapsto \exp \Phi(t)$ est dérivable et que

$$\frac{d}{dt} \exp \Phi(t) = \Phi'(t) \exp \Phi(t).$$

2. *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ *continue, périodique de période* ω, *on suppose qu'elle admet une primitive* $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$, *avec* $\Phi(0) = 0$, *telle que* $(\forall t)\ \Phi(t)$ *et* $\varphi(t)$ *commutent.*

2.1 *Montrer qu'il existe* $A \in M_n(\mathbb{C})$, *telle que* $(\forall t)\ \exp\Phi(t+\omega) = \exp\Phi(t) \times A.$

(on pourra poser $Y = \exp\Phi(t) \times Z(t)$ *).*

2.2 *Expliciter* $\exp\Phi(t)$ *et* A *pour* $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 1 \\ 1 & \cos t \end{bmatrix}.$

2.3 *Déterminer les solutions du système différentiel* $\begin{bmatrix} x' \\ x' \end{bmatrix} = \varphi(t) \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$, *telles que*

$$x(t+2\pi) = \mu x(t),\ \ x(t+2\pi) = \mu x(t).$$

2.4 *Déterminer les valeurs* μ *correspondantes.*

Exercice 10.3. *Transformer en systèmes d'équations du premier ordre (forme* $\mathrm{normale}$ *) le système :*

$$\begin{cases} x^{(p)} = F\left(x,\ x', ...,\ x^{(p-1)},\ x,\ x', ...,\ x^{(q-1)}\ ,\ t\right), \\ x^{(q)} = G\left(x,\ x', ...,\ x^{(p-1)},\ x,\ x'\ , ...,\ x^{(q-1)}\ ,\ t\right). \end{cases}$$

Exercice 10.4. *Soient* $I = [a, b]$ *un intervalle fermé où* a *et* b *désignent deux nombres réels (*$a < b$*),* E *l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de la variable réelle* x, *deux fois dérivables sur* I *et* F *l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de la variable réelle* x *continues sur* I.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$y''(x) + g(x)y(x) = 0. \tag{10.1}$$

où $y(.)$ *est une fonction réelle inconnue. On supposera que* g *est dans* F.

1. *L'ensemble des solutions de la seule équation* (10.1) *constitue un sous-espace vectoriel* G *de dimension* 2 *de l'espace vectoriel* E.

Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux solutions y_1 *et* y_2 *de l'équation* (10.1) *soient linéairement indépendantes est que le déterminant*

$$\Delta(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

soit constant et non nul sur tout l'intervalle I.

2. *On suppose connue une solution particulière* h *de* (10.1) *qui ne s'annule pas.*

On pose $y(x) = h(x) z(x)$.

Ecrire l'équation différentielle (E) *vérifiée par la nouvelle fonction inconnue* z *et montrer qu'à toute solution de* (E) *on peut associer un réel* k *tel que*

$$z' = \frac{k}{h^2}.$$

3. *Soit* g *une fonction continue et négative sur* $[0, 1]$. *Montrer que, si* u *est une solution de* (10.1) *telle que* $u(0) = u(1) = 0$, *alors*

$$\int_0^1 \left[u'^2(x) - g(x) u^2(x)\right] dx = 0.$$

Que peut-on en déduire pour la solution u *?*

4. *Soit* g *une fonction continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *non nulle et négative, Soit* v *une solution de l'équation* (10.1), *montrer que* v^2 *est convexe.*

Exercice 10.5. *On considère le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} y' = xy^2, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{10.2}$$

où $y(.)$ *est une finction de la variable réel* x.

1. *Rappeler pourquoi, pour tout* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, *il existe une et une seule solution maximale* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *du problème* (10.4)

2.1. *On suppose* $y_0 = 0$. *Quelle est alors la solution maximale de* (10.4).

2.2. *On suppose* $y_0 \neq 0$. *Montrer que la solution maximale* y *de* (10.4) *vérifie* $y(x) > 0$ *pour tout* $x \in I$ *ou bien* $y(x) < 0$ *pour tout* $x \in I$

En déduire que dans ce cas, (10.4) *équivaut à*

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{y^2} = x, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{10.3}$$

3. *On suppose* $y_0 \neq 0$. *Résoudre* (10.4) *en précisant, suivant* (x_0, y_0) *:*

- *l'intervalle maximal* I *sur lequel est définie la solution maximale* y *de* (10.5).
- *l'expression de la solution maximale* y *de* (10.5).

4. *En s'appuyant sur le théorème d'existence de la solution d'une équation différentielle, indiquer l'intervalle* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *dans lequel l'existence de la solution de l'équation* (10.5) *avec* $(x_0, y_0) = (1, 2)$ *sur l'ensemble*

$$D = \{|x - 1| \leqslant 1 = a, \ |y - 2| \leqslant 1 = b\},$$

sera garantie.

Exercice 10.6. *On considère une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants.*

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + cy(x) = 0. \tag{10.4}$$

Les fonctions a et b sont définies dans un intervalle J et la fonction a est à valeurs strictement positives, c est un réel fixé.

1. *Soient $x \longmapsto a(x)$ et $x \longmapsto b(x)$ deux fonctions définies sur un intervalle telles que a soit dérivable et b soit continue.*

On suppose qu'il existe $y_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ solution de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{10.5}$$

telle que $y_2(x) = xy_1(x)$ soit aussi une solution de l'équation.

Quelle relation existe-t-il entre $a(x)$ et $b(x)$?

2. *Soit la fonction $f \in C^2(J)$ dont la dérivée première est à valeurs strictement positives.*

2.1. *Soit $z = u \circ f$. Former une équation différentielle (E) telle que*

$$u\ \mathrm{solutionde}(E) \Longleftrightarrow z \mathrm{solutionde}\,(10.4)\,.$$

Sous quelles conditions cette équation est-elle à coefficients constants ?

2.2. *Appliquer l'idée de la question précédente pour résoudre l'équation*

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + 9y(x) = 0, \tag{10.6}$$

dans l'intervalle $J =]-1, 1[$.

3. *Soit l'équation différentielle du second ordre*

$$2x\,(1-x)\,y'' + (3-5x)\,y' - y = 0. \tag{10.7}$$

3.1. *Mettre l'équation* (10.7) *sous la forme*

$$\frac{d}{dx}\left[g\,(x)\,y' + h\,(x)\,y\right] = 0.$$

3.2. *Déterminer les solutions de l'équation* (10.7) .

Exercice 10.7. *Soit le système*

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2^2 - 2x_1x_2, \\ x_2' = -2x_1 - 5x_1x_2 + x_1^2, \end{cases} \tag{s}$$

utiliser la fonction de Liapounov $v\,(x_1,\ x_2) = x_1^2 + x_2^2$ *pour étudier la stabilité de* $(0,\ 0)$.

Exercice 10.8. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer une matrice régulière* P *vérifiant* $P^{-1}AP = B$.

2. *Résoudre le système* $Y' = BY$.

2. *Déterminer la solution du système* $X' = AX$ *vérifiant* $X\,(0) = (1, 4)$.

Exercice 10.9. *Soit* f *une application continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose connue une solution* y *non nulle de l'équation*

$$y'' + f\,(t)\,y = 0,$$

s'annulant en deux points a *et* b *vérifiant* $a < b$. *Soit enfin* φ *l'application définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (b-x)\int_a^x (t-a)\, f(t)\, y(t)\, dt \\ &\quad + (x-a)\int_x^b (b-t)\, f(t)\, y(t)\, dt.\end{aligned}$$

1. *En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que* $\varphi = (b-a)\, y$.

2. *En déduire un minorant de* $\int_a^b |f(t)|\, dt$.

3. *Que peut-on dire de* $b-a$ *si* $|f(t)| \leqslant 1$ *pour tout réel* t ?

Exercice 10.10. *Montrer que l'intégration du système*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dx} = a(x)\, x + b(x)\, z, \\ \dfrac{dz}{dx} = c(x)\, x + d(x)\, z, \end{cases}$$

se ramène, en posant

$$x = u.z,$$

à l'intégration de l'équation de Riccati

$$\frac{du}{dx} = b + (a-d)\, u - cu^2,$$

et au calcul de

$$\int (a-d)\, dx.$$

Exercice 10.11. *En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov, étudier la stabilité de* *système d'équations suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dx} = -x - 9z, \\ \dfrac{dz}{dx} = x - z, \\ x(0) = z(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 10.12. *Pour quelles valeurs de* α, β *la solution nulle de l'équation suivante sera-t-elle stable ?*

$$x'''' + 3x''' + \alpha x'' + 2x' + \beta x = 0.$$

Exercice 10.13. *Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy*

$$y' = y^2 - x$$
$$y(0) = 0$$

est définie au moins sur $\mathbb{R}_+$.

Indication : s'intéresser à la parabole $y^2 = x$.

Exercice 10.14. *Montrer que la solution maximale de*

$$y'' = 1 - 3y^2$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 0$$

est définie sur $\mathbb{R}$ *et périodique.*

10.2 Solutions des exercices

Corrigé de l'Exercice *(10.1).* ∘ Soit

$$z(t) = \binom{x}{x},\ z'(t) = \binom{x'}{x'},\ z''(t) = \binom{x''}{x''}$$

et

$$z''(t) = Az'(t) = A^2 z(t) \text{ d'où } \binom{x''}{x''} + \alpha\binom{x'}{x'} + \beta\binom{x}{x} = \left(A^2 + \alpha A + \beta I\right)\binom{x}{x}$$

D'une part, l'équation caractéristique de la matrice s'écrit

$$\begin{vmatrix} a-r & b \\ c & d-r \end{vmatrix} = r^2 - (a+b)\,r + (ad - bc) = 0.$$

D'autre part, l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle s'écrit

$$z(t) = \exp(\mu t) \Longrightarrow \left(\mu^2 + \alpha\mu + \beta\right)\exp(\mu t) = \left(A^2 + \alpha A + \beta I\right)\exp(\mu t)$$

En prenant

$$\alpha = -(a+b),\ \text{et } \beta = (ad - bc)$$

On aura

$$\left(\mu^2 + \alpha\mu + \beta\right) \equiv A^2 + \alpha A + \beta I = 0.$$

x et y vérifient donc l'équation

$$z'' - (a+b)\,z' + (ad - bc)\,z = 0.$$

□

***Corrigé de l'Exercice** (10.2).* ○ la commutativité de $\Phi(t)$ et $\Phi'(t)$ assure que

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t)]^n = n\,\Phi'(t)\ [\Phi(t)]^{n-1}.$$

La converge normale sur tout intervalle (les fonctions continues x sont bornées) de la série

$$\sum_1^\infty n\,\Phi'(t)\ \frac{[\Phi(t)]^{n-1}}{n!}$$

assure la dérivabilité de la série exponentielle, et

$$\frac{d}{dt}\exp\Phi(t) = \Phi'(t)\exp\Phi(t).$$

○ si φ est donnée, et si sa primitive Φ, telle que $\Phi(0) = 0$, commute avec φ, alors $\exp\Phi(t)$ apparaît comme solution de

$$Y' = \varphi(t)\,Y \tag{ED}$$

En remplacant t par $t+\omega$ et en utilisant $\varphi(t+\omega) = \varphi(t)$,on voit que $\exp\Phi(t+\omega)$ est une autre solution de

$$Y' = \varphi(t)\,Y$$

On sait que $t \longmapsto \exp\Phi(t)$ est la solution de (ED), par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\exp\Phi(t+\omega) &= \Phi'(t+\omega)\exp\Phi(t+\omega)\\ &= \Phi'(t)\exp\Phi(t+\omega).\end{aligned}$$

car $\Phi'(t+\omega) = \Phi'(t)$.

- Si l'on cherche une autre solution sous la forme $Y = \exp \Phi(t) \times Z(t)$, on trouve

$$(\forall t) \;\; \Phi'(t) \exp \Phi(t) \times Z(t) + \exp \Phi(t) \times Z'(t) = \varphi(t) \exp \Phi(t) \times Z(t)$$

d'où

$$\exp \Phi(t) \times Z'(t) = 0 \Longrightarrow Z'(t) = 0$$

$Z(t)$ est une matrice constante, il existe donc $A \in M_n(\mathbb{C})$, telle que

$$(\forall t) \;\; \exp \Phi(t + \omega) = \exp \Phi(t) \times A.$$

- Pour

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 1 \\ 1 & \cos t \end{bmatrix}, \; \Phi(t) = \begin{bmatrix} \sin t & t \\ t & \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix},$$

$$\exp \Phi(t) = \exp(\sin t) \times I \cdot \exp(tJ)$$

On calcule $\exp(tJ)$ où $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, en remarquant que

$$J^2 = I \Rightarrow J^{2p} = I, \;\; J^{2p+1} = J$$

d'où

$$\exp(tJ) = \sum_0^{\infty} \frac{(tJ)^p}{p!} = \begin{bmatrix} \sum_0^{\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} & \sum_0^{\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ \sum_0^{\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} & \sum_0^{\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch} t & \mathrm{sh} t \\ \mathrm{sh} t & \mathrm{ch} t \end{bmatrix}$$

φ et Φ commutant, les solutions de $Y' = \varphi(t)\,Y$ sont de la forme

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \\ x(t) \end{bmatrix} = \exp\Phi(t)\begin{bmatrix} x_0 \\ \\ x_0 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\begin{bmatrix} x(t+2\pi) \\ \\ x(t+2\pi) \end{bmatrix} = \exp\Phi(t)\,A\begin{bmatrix} x_0 \\ \\ x_0 \end{bmatrix} = \mu\exp\Phi(t)\begin{bmatrix} x_0 \\ \\ x_0 \end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix} x(t) \\ \\ x(t) \end{bmatrix}.$$

- Pour $t = 0$ et $\omega = 2\pi$, μ apparaît comme valeur propre de

$$A = \exp\Phi(2\pi) = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}2\pi & \mathrm{sh}2\pi \\ \\ \\ \mathrm{sh}2\pi & \mathrm{ch}2\pi \end{bmatrix}$$

soit

$$\mu_1 = \exp(2\pi) \ \text{ et } \ \mu_2 = -\exp(2\pi),$$

$(x_0,\ x_0)$ étant vecteur propre correspondant ; on obitent, pour $\mu_1, x_0 = x_0$, pour $\mu_2, x_0 = -x_0$. □

Corrigé de l'Exercice *(10.3).* On pose

$$\begin{aligned} x_i &= x^{(i)} \qquad i = 1,\ 2, \ldots.,\ p-1 \\ x_j &= x^{(j)} \qquad j = 1,\ 2, \ldots.,\ q-1 \end{aligned}$$

Alors on aura

$$\begin{cases} x' = x_1, \\ x'_{i-1} = x_i, & i = 2, ..., p-1 \\ x'_{p-1} = F\left(x,\ x_1,\ ...,\ x_{p-1},\ x,\ ....,\ x_{q-1}\ ,\ t\right), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x' = x_1, \\ x'_{j-1} = x_j, & j = 2, ..., q-1 \\ x'_{q-1} = G\left(x,\ x_1,\ ...,\ x_{p-1},\ x,\ ....,\ x_{q-1}\ ,\ t\right). \end{cases}$$

et le système donné sera ramené au système normal suivant

$$\begin{cases} x'_{i-1} = x_i, \\ x'_{p-1} = F\left(x,\ x_1,\ ...,\ x_{p-1},\ x,\ ....,\ x_{q-1}\ ,\ t\right), \\ x'_{j-1} = x_j, \\ x'_{q-1} = G\left(x,\ x_1,\ ...,\ x_{p-1},\ x,\ ....,\ x_{q-1}\ ,\ t\right). \end{cases} \quad i = 2, ..., p-1,\ j = 2, ..., q-1$$

l'ordre reste $p + q$.

□

Corrigé de l'Exercice *(10.4).*

1. On a

$$\Delta\left(y_1, y_2\right)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\, y'_2(x) - y'_1(x)\, y_2(x),$$

est évidemment dérivable, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Delta(y_1,y_2)(x) &= (y_1(x)\,y_2'(x)-y_1'(x)\,y_2(x))' = y_1(x)\,y_2''(x)-y_1''(x)\,y_2(x)\\ &= y_1(x)(-gy_2)-(-gy_1)\,y_2(x)=0.\end{aligned}$$

Donc $\Delta(y_1,y_2)(x)$ est constante.

Soit $x\in I$ fixé. On sait que l'application de G dans $\mathbb{R}^2$.

$$y\longmapsto(y(x),y'(x)),$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels (théorème de Cauchy- Lipschitz).

Une famulle $(y_1,\ y_2)$ est donc libre dans G si et seulement si les deux éléments de $\mathbb{R}^2$

$$(y_1(x),y_1'(x))\ \textbf{et}\ (y_2(x),y_2'(x)),$$

forment une famille libre, c'est-à-dire, si et seulement si, le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\neq 0.$$

2. On a

$$\begin{aligned}y' &= h'z+hz'\\ y'' &= h''z+2h'z'+hz''\end{aligned}$$

donc

$$y''+gy=z(h''+gh)+2h'z'+hz''=2h'z'+hz''$$

Donc y est solution de (10.1) si et seulement si

$$2h'z' + hz'' = 0$$

soit encore

$$h\left(2h'z' + hz''\right) = \left(h^2z'\right)' = 0,$$

alors h^2z' est constante et

$$z' = \frac{k}{h^2},\ k \in \mathbb{R}.$$

3. Si u est une solution du problème

$$\begin{cases} u''(x) + g(x)u(x) = 0. \\ \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases}$$

$\forall x \in [0, 1]$,

$$u\left(x\right)u''(x) + g(x)u^2(x) = 0 \Longrightarrow \int_0^1 \left[u\left(x\right)u''(x) + g(x)u^2(x)\right] dx = 0.$$

On intègre par parties

$$\int_0^1 u\left(x\right)u''(x)dx = \left[u\left(x\right)u'(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'^2\left(x\right) dx.$$

Comme $u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0$, alors

$$\int_0^1 u\left(x\right)u''(x)dx = -\int_0^1 u'^2\left(x\right) dx.$$

donc

$$\int_0^1 \left[-u'^2(x) + g(x)\,u^2(x)\right] dx = 0.$$

La fonction $u'^2 - gu^2$ est continue, positive sur $[0,1]$, la fonction g est négative sur $[0,1]$, donc :

$$\forall x \in [0,1],\ u'^2(x) - g(x)\,u^2(x) = 0,$$

donc

$$\forall x \in [0,1],\ u'^2(x) = 0.$$

On en déduit que la fonction u est constante sur $[0,1]$, comme $u(0) = 0$, alors u est la fonction nulle sur $[0,1]$.

4. La fonction v est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction v^2 est convexe sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\left(v^2\right)''$ est positive sur $\mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned}\left(v^2\right)' &= 2vv',\\ \left(v^2\right)'' &= 2\left(v''v + v'^2\right),\end{aligned}$$

comme $v'' = -g(x)\,v$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left(v^2\right)''(x) = 2\left(-g(x)\,v^2(x) + v'^2(x)\right).$$

La fonction g est négative sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $\left(v^2\right)''$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction v^2 est convexe sur $\mathbb{R}$. $\square$

Corrigé de l'Exercice *(10.5).* **1.** L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy^2 \end{aligned}$$

est continue, localement lipschitzienne en y. Alors pou tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une et une seule solution maximale $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation $y' = xy^2$, définie sur un intervalle ouvert "maximal", telle que $y(x_0) = y_0$ (d'après le théorème d'existence et d'unicité de solution maximale de Cauchy -Lipschitz).

2.1. $y \equiv 0$ sur $I = \mathbb{R}$ est la solution maximale de (10.4) correspondant à $y_0 = 0$.

2.2. S'il existait $x_1 \in I$ tel que $y(x_1) = 0$, il n'y aurait pas unicité pour le problème de Cauchy relatif au point $M(x_1, 0)$: par ce point passerait en effet deux solutions (y et la solution nulle).

On a donc : $y(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Comme y est continue, il y aainsi deux possibilités :

$y(x) > 0$ pour tout $x \in I$, ou bien $y(x) < 0$ pour tout $x \in I$.

Donc, pour $y(x) \neq 0$ (10.4) équivaut à

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{y^2} = x, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

3. L'équation $\dfrac{y'}{y^2} = x$, s'intègre facilement :

$$-\frac{1}{y(x)} = \frac{x^2}{2} + c,$$

soit

$$y(x) = -\frac{1}{x^2/2 + c},$$

sur l'intervalle de définition de y.

· Forme des intervalles maximaux I :

$I = \mathbb{R}$ si $c > 0$;

$I = \mathbb{R}^+$ ou $I = \mathbb{R}^-$ si $c = 0$;

$I = \left]-\infty, -\sqrt{-c}\right[$ ou $\left]-\sqrt{-c}, \sqrt{-c}\right[$ ou $\left]\sqrt{-c}, +\infty\right[$ si $c < 0$.

· Détermination de c :

grâce à la condition initiale $y(x_0) = y_0$ i.e.,

$$-\frac{1}{y_0} = \frac{x_0^2}{2} + c,$$

donc

$$y(x) = \frac{1}{2/y_0 + x_0^2 - x^2}.$$

· Discution suivant (x_0, y_0) :

– Si $\dfrac{1}{y_0} + \dfrac{x_0^2}{2} < 0$, on a $c > 0$, d'où $I = \mathbb{R}$

– Si $\dfrac{1}{y_0} + \dfrac{x_0^2}{2} > 0$, on a $c < 0$, d'où

$I = \left]-\infty, -\sqrt{-c}\right[$ si $x_0 < 0$ et $y_0 < 0$.

$I = \left]\sqrt{-c}, +\infty\right[$ si $x_0 > 0$ et $y_0 < 0$.

$I = \left]-\sqrt{-c}, \sqrt{-c}\right[$ si $y_0 > 0$.

Le cas $x_0 = 0$ et $y_0 < 0$ est impossible.

– Si $\dfrac{1}{y_0} + \dfrac{x_0^2}{2} = 0$, donc $x_0 \neq 0$, on a $c = 0$ et

$I =]-\infty, 0[$ si $x_0 < 0$.

$I =]0, +\infty[$ si $x_0 > 0$.

4. $\delta < \frac{1}{18}$. En vertu du théorème d'existence de la solution

$$\delta < \min\left(a, 1/N, b/M\right),$$

où

$$f\left(x, y\right) = xy^2,\ N = \sup_D \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|,\ M = \max_D \left|f\left(x, y\right)\right|.$$

Dans notre cas,

$$M = 18, N = 12.$$

La solution du problème donné est de la forme

$$y\left(x\right) = \frac{1}{2 - x^2}.$$

Ainsi, pour $x \longrightarrow \sqrt{2}$, la solution est $y\left(x\right) \longrightarrow \infty$. Cela signifie que pratiquement la solution existe dans l'intervalle $\left]0, \sqrt{2}\right[$ qui est plus grand que l'intervalle $]1 - \delta, 1 + \delta[$, $\left(\delta < \frac{1}{18}\right)$.

Il est remarquer que dans tout l'intervalle $]1 - a, 1 + a[$, le problème donné (avec les conditions initiales indiquées) n'admet pas solution. □

Corrigé de l'Exercice (10.6).

1. Remarquons que y_2 est solution de (10.5) si et seulement si $x \in J$

$$xy_1''\left(x\right) + 2y_1'\left(x\right) + a\left(x\right)\left(y_1\left(x\right) + xy_1'\left(x\right) + b\left(x\right)y_1\left(x\right)\right) = 0$$

ce qui est équivalent à

$$2y_1'\left(x\right) + a\left(x\right)y_1\left(x\right) = 0$$

En dérivant la relation pécédente nous obtenons

$$2y_1''(x) + a'(x)\,y_1(x) + a(x)\,y_1'(x) = 0$$

Alors

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -\frac{a(x)}{2} y_1(x), \\ y_1''(x) &= \frac{1}{4}\left(a^2(x) - 2a'(x)\right) y_1(x) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que y_1 est solution de (10.5) nous obtenons

$$2a'(x) + a^2(x) = 4b(x) \tag{10.8}$$

Inversement, supposons (10.8) vérifiée. Soit A une primitive de a. Nous définissons alors

$$y_1(x) = e^{-\frac{A(x)}{2}}, \text{ et } y_2(x) = xy_1(x)$$

et nous vérifions directement que y_1 et y_2 sont des solutions de (10.5).

2.1. Calculons les dérivées de

$$\begin{aligned} z &= u \circ f \\ z' &= f'u' \circ f \\ z'' &= f''u' \circ f + f'^2 u'' \circ f \end{aligned}$$

On en déduit que z est solution de (10.4) si et seulement si

$$Lu'' \circ f + Mu' \circ f + cu \circ f = 0 \tag{E}$$

avec

$$L = af'^2, \ M = af'' + bf'$$

L'équation (E) est à coefficients constants si et seulement si L et M sont des constantes. L doit être positive donc (à une constante multiplicative près)

$$f' = \frac{1}{\sqrt{a}} \Longrightarrow f'' = -\frac{1}{2}\frac{a'}{a^{\frac{3}{2}}}$$

En remplaçant dans l'expression de M, on trouve que M est constante si et seulement si

$$-a' + 2b = 0$$

La fonction f etant alors donnée comme primitive de $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

2.2. Dans cet exemple

$$a(x) = 1 - x^2, \ b(x) = -x = \frac{1}{2}a'(x)$$

donc la condition de la question précédente est vérifiée.

Pour $f = \arcsin$, l'équation (E) s'écrit alors

$$u'' + 9u = 0$$

dont les solutions sont les fonctions définies dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$t \longmapsto \mu_1 \cos 3t + \mu_2 \sin 3t$$

Les solutions de (10.6) sont alors les fonctions définies dans $]-1, 1[$

$$x \longmapsto \mu_1 \cos(3 \arcsin x) + \mu_2 \sin(3 \arcsin x)$$

En utilisant

$$\begin{aligned} \cos 3t &= \cos t\,(1-4\cos t) \\ \sin 3t &= 3\sin t - 4\sin^3 t \end{aligned}$$

on peut les écrire aussi sous la forme

$$x \longmapsto \mu_1\sqrt{1-x^2}\,(1-4x) + \mu_2\left(3x-4x^3\right).$$

3. Soit l'équation différentielle du second ordre

$$2x\,(1-x)\,y'' + (3-5x)\,y' - y = 0.$$

3.1. Nécessairement, si l'équation (10.7) se met sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left[g\,(x)\,y' + h\,(x)\,y\right] = 0.$$

on a

$$g\,(x) = 2x\,(1-x)\,,\; h'\,(x) = -1,\;\; g'\,(x) + h\,(x) = 3-5x$$

c'est-à-dire

$$g\,(x) = 2x\,(1-x) \;\text{ et } h\,(x) = 1-x.$$

On vérifie inversement que l'équation

$$\frac{d}{dx}\left[2x\,(1-x)\,y' + (1-x)\,y\right] = 0 \tag{10.9}$$

est identique à (10.7).

3.2. y est solution de (10.7) si et seulement si, il existe μ réel tel que

$$2x(1-x)y' + (1-x)y = \mu.$$

Cette équation linéaire, admet des solutions sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[,]0, 1[,]1, +\infty[$ et l'on a

$$2xy' + y = \frac{\mu}{1-x} \tag{10.10}$$

l'équation homogène associée à (10.10) est

$$2xz' + z = 0 \tag{10.11}$$

De

$$\frac{z'}{z} = -\frac{1}{2x} \iff \frac{d}{dz}(\ln|z|) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\ln|x|)$$

on déduit que les solutions de (10.11) ont la forme

$$z = \frac{k}{\sqrt{|x|}} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Soit u une fonction dérivable. La fonction

$$x \longmapsto \frac{u(x)}{\sqrt{|x|}}$$

est solution de (10.10) si et seulement si u vérifie

$$u'(x) = \frac{\mu\sqrt{|x|}}{2x(1-x)}.$$

Cas 1. $x \in]0, 1[$ ou $x \in]1, +\infty[$

u est une primitive de la fonction

$$x \longmapsto \frac{\mu}{2\sqrt{x}\,(1-x)}$$

Le changement de variable $t = \sqrt{x}$ entraîne

$$\int \frac{\mu dx}{2\sqrt{x}\,(1-x)} = \frac{\mu}{2}\int \frac{2dt}{1-t^2} = \frac{\mu}{2}\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \frac{\mu}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \mu$$

On en déduit

$$u\,(x) = \frac{\mu}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + \mu,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Cas 2. $x < 0$.

u est une primitive de la fonction

$$x \longmapsto -\frac{\mu}{2\sqrt{-x}\,(1-x)}$$

On pose $x = -t^2$ avec $t > 0$,

$$\int \frac{-\mu dx}{2\sqrt{-x}\,(1-x)} = \mu\int \frac{dt}{1+t^2} = \mu \arctan t + \mu,$$

d'où

$$u\,(x) = \mu \arctan \sqrt{-x} + \mu,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Il en résulte que l'équation (10.7) a sur chacun des intervalles $]0,1[$, $]1,+\infty[$ des solutions de la forme

$$y = \frac{c}{2\sqrt{x}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + \frac{c_1}{\sqrt{x}},\ \text{avec } c, c_1 \in \mathbb{R}$$

et sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ des solutions de la forme

$$u(x) = \frac{c}{\sqrt{-x}} \arctan \sqrt{-x} + \frac{c_2}{\sqrt{-x}}, \text{ avec } c, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Corrigé de l'Exercice (1.1). 1°) On considére M= $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on alors $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et le système différentiel S est alors équivalent à l'équation différentielle vectorielle $X' = MX$.
On a $X_M(\lambda) = \lambda^2 - tr(M)A + det(M) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ La matrice a deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisabla On a $M - I_2$= $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$,d'ou $E(1) : -3x + 4y = 0$,ou $E_{(1)} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a $M - 2.I_2$ = $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. d'où $E(2) : -x + y = 0$, ou $E(2) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec P= $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1}MP$= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ =D

. On pose $Y = P^{-1}X$ = $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, on a $X = PY$ et $X' = P'Y'$. Alors $X' = MX$ est équivalent à $PY' = MPY$, c'est-à-dire $Y' = P^{-1}MPY = DY$, ce qui donne

$$\begin{cases} u' = u \\ v' = 2v \end{cases}$$

Il existe donc un couple (A, B) tel que pour tout t de R, on ait $\begin{cases} u(t) = Ae^t \\ v(t) = Be^{2t} \end{cases}$

Alors, avec $X = PY$, on obtient : le couple (x, y) est solution de S sur R si, et seulement si, il existe un couple (A, B) de R^2 tel que pour tout t de R on ait : $\begin{cases} x(t) = 4Ae^t + Be^{2t} \\ y(t) = 3Ae^t + Be^{2t} \end{cases}$

La condition $x(0) = -y(0) = 1$ est équivalente à $\begin{cases} 4A + B = 1 \\ 3A + B = -1 \end{cases}$

, c'est-à-dire $A = 2$ et $B = -7$, d'où l'unique solution : $x(t) = 8.e^t - 7.e^{2t}$, $y(t) = 6e^t - 7.e^{2t}$

2°) La matrice M du système est la même que celle de la question 1). On pose C= $\begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix}$ On a :

$X' = MX + C \iff Y' = DY + P^{-1}C.$

Avec P^{-1}= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1}C$= $\begin{pmatrix} 2 - e^t \\ -6 + 4e^t \end{pmatrix}$

D'où le système : $\begin{cases} u' = u + 2 - e^t \\ v' = 2v - 6 + 4e^t \end{cases}$

L'équation homogène $u' = u$ a pour solution $u(t) = A.e^t$, pour $A \in R$, et on cherche

une solution particulière de l'équation complète par le principe de superposition : $u' = u + 2$ admet pour solution particulière $t \to -2$ et $u' = u - e^t$ admet pour solution particulière $t \to t.e^t$. Il existe donc $A \in R$ tel que $u(t) = Ae^t - 2 - te^y$.

De la même façon, on trouve qu'il existe B réel tel que : $v(t) = B.e^{2t} - 3 - 4e^t$. En revenant aux fonctions initiales : le couple (x, y) est solution de S sur R si, et seulement si, il existe un couple (A, B) de R^2 tel que pour tout t de R on ait :

$$\begin{cases} x(t) = 4Ae^t + Be^{2t} - 5 - 4(t+1)e^t \\ y(t) = 3Ae^t + Be^{2t} - 3 - 3(t+4)e^t \end{cases}$$

□

Corrigé de l'Exercice (1.1). Les trajectoires de S sont les arcs paramétrés de paramétrage $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in R$ où (x, y, z) est solution du système S.

Soit $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le triplet (x, y, z) est solution de S sur R si et seulement si $X'(t) = AX(t)$ pour tout t de R.

Or $\det(A) = 0$. et plus précisément $rg(A) = 2$, En effet A a même rang que $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ qui a même rang que $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -0 & 0 \end{pmatrix}$.c'est-à-dire 2.

Il existe donc une relation de dépendance entre les lignes L_1, L_2, L_3 de A. En remontant les manipulations ayant permis d'obtenir la réduite triangulaire de A, on voit que cette relation est :$2L_1 - 2L_2 + L_3 = 0$

Ainsi, en revenant au système différentiel initial, toute solution (x, y, z) vérifie :

pour tout t de R, $2x'(t) - 2y'(t) + z'(t) = 0$

Donc il existe un réel k tel que pour tout t de R, on ait $2x(t) - 2y(t) + z(t) = k$: les trajectoires sont de support plan, et tous les plans obtenus (qui dépendent des conditions initiales) sont parallèles, de direction $2x - 2y + z = 0$. $\square$

Corrigé de l'Exercice (1.1). Si (x, y) est solution de S, il existe A de R tel que $x(t) = Ae^t$ pour tout t de R. Alors y est solution de (E) :

$$y - 2y = 3Ae^t.$$

Le coefficient de la variable t dans l'exponentielle du second membre est 1 et ce nombre n'est pas solution de l'équation caractéristique associée à (E) qui est $r - 2 = 0$. On cherche donc un α de R tel que y définie par $y(t) = \alpha.e^t$ soit solution de E, on obtient $-\alpha e^t = 3Ae^t$, c'est-à-dire $\alpha = -3A$. Donc il existe un B de R tel que

$$y(t) = Be^{2t} - 3Ae^{t}$$

Il existe donc (A, B) de R^2 tel que l'on ait

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{t} \\ \\ y(t) = -3Ae^{t} + Be^{t} \end{cases}$$

pour tout t de R Alors $(x(\alpha), y(\alpha)) = (1, 2) \iff (A = e^{-\alpha}, B = 5e^{-2\alpha})$, et l'on a donc :

$$y_\alpha : \begin{cases} x(t) = Ae^{t-\alpha} \\ \\ y(t) = -3.e^{t-\alpha} + 5.e^{t-\alpha} \end{cases} \quad t \in R$$

En posant $u = t - a$, on obtient $y_\alpha : \begin{cases} x(u) = e^{u} \\ \\ y(u) = -3.e^{u} + 5.e^{u} \end{cases}$ $u \in R$ On constate que ce paramétrage est indépendant de α, ce qui montre que tous les arc y_α ont le même support.

En posant $v = e^{u}$, on obtient $v > 0$ et $y_\alpha : \begin{cases} x(v) = v \\ \\ y(v) = -3.v + 5v^2 \end{cases}$ et le support de y_α est donc le morceau de parabole $\begin{cases} y = -3x + 5x^2 \\ \\ x > 0 \end{cases}$ □

Corrigé de l'Exercice (1.1). Remarque : S'il y a une fonction $v\,(x,\ x)$ telle que dans un voisinage de l'origine des coordonnées définie négative (or définie positive) alors l'orignie est a.s.

Le point $(0, 0)$ est une solution nulle car les seconds membres des équations (s) sont nuls càd :$-x + x^2 - 2xx = 0,\ -2x - 5xx + x^2 = 0.$

La fonction $v\,(x,\ x) = x^2 + x^2 > 0\ \forall\,(x, x) \neq 0$, $v\,(0, 0) = 0$, v est définie npositive, on a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = -x^2\,(2 - 2x + 4x) - x^2\,(4 + 10x - 2x)$$

Pour que cette fonction soit $\leqslant 0$ au voisinage de l'origine des coordonnées, il faut que les termes

$(2-2x+4x)>0, (4+10x-2x)>0$ (voir TD)

x	0	1	x	0	$-2/5$
$x=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$x=5x+2$	2	0

itbpF5.1794in3.5855in0inFigure

Dans le domaine $\left\{(x,x):-2/5<x<1 \text{ et } -\frac{1}{2}<x<2\right\}$, qui contient le disque

$$D=\left\{(x,x):x^2+x^2<r^2\right\}$$

où

$$r=\min\{OA,OB,OC,OD\}=2/5$$

la fonction v est une fonction de Liapounov en $O(0,0)$ pour le système (s) , par conséquent le point fixe $O(0,0)$ est asymptotiquement stable. $\square$

beginproof[**Corrigé de l'Exercice** (1.1)]

Réduction d'un système d'équations différentielles à une seule équation :

Résoudre les systèmes ci-dessous en les réduisant à une seule équation différentielle :

a) $(3\ \mathrm{pts})$ Soit le système

$$\begin{cases} x''-4x'+4x-x=0, \\ x''+4x'+4x-a^2x=0. \\ x=x\ (t)\,,\ x=x\ (t)\,,\ a>0. \end{cases}$$

On réduit le système à une seule équation diférentielle par rapport à l'une des fonctions, par exemple, par rapport à $x\ (t)$. En différentiant la première équation deux fois et en portant les valeurs de $x,\ x',\ x''$ dans la seconde équation , on obtient

$$x^{(4)} - 8x'' + \left(16 - a^2\right) x = 0.$$

Pour l'équation donnée, l'équation caractéristique est de la forme

$$r^4 - 8r^2 + 16 - a^2 = 0.$$

En résolvant cette équation, on trouve

$$r_{1,\ 2} = \pm\sqrt{4+a}\ , \quad \text{et} \quad r_{3,\ 4} = \pm\sqrt{4-a}.$$

Nous pouvons maintenant discuter :

∘ Si $0 < a < 4$, toutes les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes et la solution générale s'écrira

$$x\,(t) = C_1 e^{-\sqrt{4+a}t} + C_2 e^{\sqrt{4+a}t} + C_3 e^{-\sqrt{4-a}t} + C_4 e^{-\sqrt{4-a}t}.$$

∘ Si $a = 4$, alors $r_{1,\ 2} = \pm\sqrt{8}\ , \qquad r_{3,\ 4} = 0$ et

$$x\,(t) = C_1 e^{-\sqrt{8}t} + C_2 e^{\sqrt{8}t} + C_3 + C_4 t.$$

○ Pour $a > 4$, les racines $r_{3,\ 4} = \pm\sqrt{4-a}$ sont complexes :

$$r_3 = i\sqrt{a-4}\,, \quad r_4 = -i\sqrt{a-4}\,.$$

Dans ce cas,

$$x\left(t\right) = C_1 e^{-\sqrt{4+a}t} + C_2 e^{\sqrt{4+a}t} + C_3 \cos\left(t\sqrt{a-4}\right) + C_4 \sin\left(t\sqrt{a-4}\right).$$

La fonction $x\left(t\right)$ est trouvée en partant de la première équation du système ;

$$x\left(t\right) = x'' - 4x' + 4x.$$

b) (3 pts)Soit le système

$$\begin{cases} tx' = -x + xt, \\ t^2x' = -2x + xt. \end{cases}$$

De la première équation du système, on tire

$$x = \frac{x}{t} + x'$$

si bien que

$$x'' = -\frac{x}{t^2} + \frac{1}{t}x' + x''.$$

En introduisant ces expressions de x et x' dans la deuxième équation, on obtient

$$t^2x'' + tx' - x = -2x + x + tx',$$

ou

$$t^2x'' = 0.$$

En posant $t \neq 0$, on tire de la dernière équation $x'' = 0$ et après l'intégration on obtient

$$x = C_1 + C_2t.$$

On trouve maintenant

$$y = \frac{x}{t} + x' = \frac{C_1 + C_2t}{t} + C_2 = 2C_2 + \frac{C_1}{t}.$$

La solution générale du système donné est

$$x = C_1 + C_2 t\ ,\ \ x = 2C_2 + \frac{C_1}{t},\ \ t \neq 0.$$

Résoudre les systèmes ci-dessous sans les réduire à une seule équation

différentielle :

1) Intégration des systèmes à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' = x - x + 1, \\ x' = x - 4x + t. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y' = AY + B$$

Formons l'équation caractéristique

$$\det(A - \mu I) \equiv \begin{vmatrix} 1-\mu & -1 \\ -4 & 1-\mu \end{vmatrix} = \mu^2 - 2\mu - 3 = 0$$

dont les racines sont : $\mu_1 = -1,\ \mu_2 = 3.$

on peut écrire directement la forme sous laquelle se présentera la solution générale du système homogène associé

$$\begin{cases} x_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ x_h = a e^{-t} + b e^{3t}. \end{cases}$$

En portant ces fonctions dans le système donné, on trouve a et b exprimés par C_1 et C_2

On obtient alors $a = 2C_1$ et $b = -2C_2$.

La solution générale est de la forme

$$\begin{cases} x_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ x_h = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}. \end{cases}$$

En considérant $C_1(t)$, $C_2(t)$ comme des fonctions de t, il faut les choisir de façon que les fonctions

$$\begin{cases} x_p = C_1(t)\, e^{-t} + C_2(t)\, e^{3t}, \\ x_p = 2C_1(t)\, e^{-t} - 2C_2(t)\, e^{3t}. \end{cases}$$

représentent les solutions d'un système à second membre (c'est la méthode de variation des constantes de Lagrange).

En dérivant ces fonctions et en les portant dans le système, on obtient

$$\begin{cases} C_1(t)'\ e^{-t} + C_2(t)' e^{3t} = 1, \\ 2C_1(t)' e^{-t} - 2C_2(t)' e^{3t} = t. \end{cases}$$

Il vient

$$C_1(t)' = \frac{2+t}{4} e^{t},\ \ C_2(t)' = \frac{2-t}{4} e^{-3t}$$

Par intégration, on trouve

$$C_1(t) = \frac{1+t}{4} e^{t},\ \ C_2(t) = \frac{-5+3t}{36} e^{-3t};$$

d'où

$$\begin{cases} x_p = \dfrac{1+t}{4} + \dfrac{-5+3t}{36} = \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}, \\ x_p = 2\dfrac{1+t}{4} - 2\dfrac{-5+3t}{36} = \frac{1}{3}t + \frac{7}{9}. \end{cases}$$

La solution générale du système initial est de la forme

$$\begin{cases} x_G = x_h + x_p = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}, \\ x_G = x_h + x_p = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{7}{9}. \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

2) Intégration des systèmes à coefficients non constants :

a)

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2t}x + \dfrac{1}{2t^2}x, \\ x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2t}x. \end{cases}$$

Sachant qu'il a la solution $x_1 = 1, \ x_1 = t.$

Pour chaque $t > 0$,la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \ \det(M) = 1 \neq 0$$

est inversible.

On fait le changement de variable

$$\begin{cases} x = x_1 z_1 = z_1 \\ x = x_1 z_1 + z_2 = t.z_1 + z_2 \end{cases}$$

le système associé au système initial devient alors

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2t}z_1 + \dfrac{1}{2t^2}(t.z_1 + z_2) = z_1', \\ x' = \dfrac{1}{2}z_1 + \dfrac{1}{2t}(t.z_1 + z_2) = z_1 + t.z_1' + z_2'. \end{cases}$$

d'où on déduit le système

$$\begin{cases} z_1' = \dfrac{1}{2t^2}\left(z_2\right) \\ z_2' = -t.z_1' + \dfrac{1}{2t}\left(z_2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = \dfrac{1}{2t^2}\left(z_2\right) \\ z_2' = 0 \end{cases}$$

De la dexième équation on déduit que $z_2 = C_1$ et de la première que $z_1 = \dfrac{-C_1}{2t} + C_2$

La solution générale du système initial est de la forme

$$\begin{cases} x = \dfrac{-C_1}{2t} + C_2, \\ x = \frac{1}{2}C_1 + C_2 t. \end{cases} \quad avec \quad (C_1,\ C_2) \in \mathbb{R}^2$$

b) Soit le système

$$\begin{cases} x' = x.sht + x.cht, \\ x' = x.cht + x.sht. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} sht & cht \\ cht & sht \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y' = A\left(t\right)Y$$

Ce système peut être résolu de la même façon que celui donné en cours.

On note par

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},\ A\left(t\right) = \begin{pmatrix} sht & cht \\ cht & sht \end{pmatrix}$$

Si u et v sont des nombres réels, on a

$$\begin{aligned}
A(u).A(v) &= \begin{pmatrix} \sinh u & \cosh u \\ \cosh u & \sinh u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sinh v & \cosh v \\ \cosh v & \sinh v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh u\cosh v + \sinh u \sinh v & \cosh u \sinh v + \cosh v \sinh u \\ \cosh u \sinh v + \cosh v \sinh u & \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh(u+v) & \sinh(u+v) \\ \sinh(u+v) & \cosh(u+v) \end{pmatrix} \\
&= A(v).A(u)
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer la théorie exposée dans le cours : soit $B(t)$ la primitive de $A(t)$ telle que

$$B(x(t_0) = x_0) = 0 \Leftrightarrow B(t_0) = 0.$$

Or

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{pmatrix} \Rightarrow B(t) = \begin{pmatrix} \cosh t + c_1 & \sinh t + c_2 \\ \sinh t + c_3 & \cosh t + c_4 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$B(t_0) = \begin{pmatrix} \cosh t_0 + c_1 & \sinh t_0 + c_2 \\ \sinh t_0 + c_3 & \cosh t_0 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} c_1 = -\cosh t_0 & c_2 = -\sinh t_0 \\ c_3 = -\sinh t_0 & c_4 = -\cosh t_0 \end{pmatrix},$$

il vient

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cosh t - \cosh t_0 & \sinh t - \sinh t_0 \\ \sinh t - \sinh t_0 & \cosh t - \cosh t_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cosh t_0 & \sinh t_0 \\ \sinh t_0 & \cosh t_0 \end{pmatrix} = C(t) - H(t_0)$$

d'où

$$e^{B(t)} = e^{C(t)-H(t_0)} = e^{C(t)}.e^{-H(t_0)}$$

Montrons (par récurrence) pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$C(t)^n = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cosh nt & \sinh nt \\ \sinh nt & \cosh nt \end{pmatrix}.$$

De plus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh nt + i \sinh nt}{n!} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) e^{e^t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) e^{e^{-t}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{e^t} + e^{e^{-t}}\right) + \frac{1}{2}i\left(e^{e^t} - e^{e^{-t}}\right)$$

On en déduit

$$e^{C(t)} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh nt}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh nt}{n!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh nt}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh nt}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{e^t} + \frac{1}{2}e^{e^{-t}} & \frac{1}{2}e^{e^t} - \frac{1}{2}e^{e^{-t}} \\ \frac{1}{2}e^{e^t} - \frac{1}{2}e^{e^{-t}} & \frac{1}{2}e^{e^t} + \frac{1}{2}e^{e^{-t}} \end{pmatrix}.$$

De même

$$e^{H(t_0)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cosh nt_0}{n!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sinh nt_0}{n!} \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sinh nt_0}{n!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cosh nt_0}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{e^{-t_0}} + \frac{1}{2}e^{e^{t_0}} & \frac{1}{2}e^{e^{t_0}} - \frac{1}{2}e^{e^{-t_0}} \\ \frac{1}{2}e^{e^{t_0}} - \frac{1}{2}e^{e^{-t_0}} & \frac{1}{2}e^{e^{-x_0}} + \frac{1}{2}e^{e^{t_0}} \end{pmatrix}.$$

Calculons l'inverse de la matrice $e^{H(t_0)}$:

$$e^{-H(t_0)} = \left(e^{H(t_0)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2e^{e^{-t_0}}e^{e^{t_0}}}\left(e^{e^{-t_0}} + e^{e^{t_0}}\right) & \frac{1}{2e^{e^{-t_0}}e^{e^{t_0}}}\left(e^{e^{-t_0}} - e^{e^{t_0}}\right) \\ \frac{1}{2e^{e^{-t_0}}e^{e^{t_0}}}\left(e^{e^{-t_0}} - e^{e^{t_0}}\right) & \frac{1}{2e^{e^{-t_0}}e^{e^{t_0}}}\left(e^{e^{-t_0}} + e^{e^{t_0}}\right) \end{pmatrix}$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned} e^{C(t)}.e^{-I(t)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{e^{t}} + \frac{1}{2}e^{e^{-t}} & \frac{1}{2}e^{e^{t}} - \frac{1}{2}e^{e^{-t}} \\ \frac{1}{2}e^{e^{t}} - \frac{1}{2}e^{e^{-t}} & \frac{1}{2}e^{e^{t}} + \frac{1}{2}e^{e^{-t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2e^{e^{-t_0}}e^{e^{t_0}}}\left(e^{e^{-t_0}} + e^{e^{t_0}}\right) & \frac{1}{2e^{e^{-t_0}}e^{e^{t_0}}}\left(e^{e^{-t_0}} - e^{e^{t_0}}\right) \\ \frac{1}{2e^{e^{-t_0}}e^{e^{t_0}}}\left(e^{e^{-t_0}} - e^{e^{t_0}}\right) & \frac{1}{2e^{e^{-t_0}}e^{e^{t_0}}}\left(e^{e^{-t_0}} + e^{e^{t_0}}\right) \end{pmatrix} \\ e^{B(t)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} + e^{e^{-t}}\right) & \frac{1}{2e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} - e^{e^{-t}}\right) \\ \frac{1}{2e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} - e^{e^{-t}}\right) & \frac{1}{2e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} + e^{e^{-t}}\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et par conséquent, La solution générale du système initial est de la forme

$$\begin{aligned} Y &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{B(t)} \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} + e^{e^{-t}}\right) & \frac{1}{2e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} - e^{e^{-t}}\right) \\ \frac{1}{2e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} - e^{e^{-t}}\right) & \frac{1}{2e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} + e^{e^{-t}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\mu}{e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} - e^{e^{-t}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\mu}{e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} + e^{e^{-t}}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\mu}{e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} + e^{e^{-t}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\mu}{e^{e^{x_0}}}\left(e^{e^{t}} - e^{e^{-t}}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'Exercice (1.1). En multipliant l'équation par y' et en intégrant grâce aux conditions initiales on obtient

$$\frac{1}{2}y'^2 = y - y^3 = y(1-y^2)$$

Par conséquent toute solution du problème de Cauchy vérifie, en tout point de son intervalle de définition :

$$y(1-y^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant -1 \text{ ou } 0 \leqslant y \leqslant 1$$

La solution maximale est définie sur R.

On note y la solution maximale. En $x = 0$, on a :

- $y(0) = 0$ donc y atteint un minimum ($0 \leqslant y \leqslant 1$), d'où [1] $y'(0) = 0$
- $y''(0) = 1 - 3 \times 0^2 = 1 > 0$

Sur un voisinage a droite de 0 on a donc $y' \geqslant 0$. L'intégrale première s'écrit alors sur ce voisinage :

$$y' = \sqrt{2y(1-y^2)}$$

qui s'intègre en

$$\int_0^y \frac{du}{\sqrt{2u(1-u)(1+u)}} = x$$

positives, est dans $L^1(]0,1[)$ puisque

$$\frac{1}{\sqrt{2u(1-u)(1+u)}} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2u}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2u(1-u)(1+u)}} \underset{u\to 1}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{1-u}}$$

et que $y \leqslant 1$, on a

$$x \leqslant \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{2u(1-u)(1+u)}} < +\infty$$

on ne peut donc pas avoir $y' \geqslant 0$ sur tout R_+.

Remarquons maintenant que y est paire. En effet la fonction $x \mapsto y(-x)$ est solution du problème de Cauchy, par unicité de la solution maximale $y(x) = y(-x)$.

Au point $-x_0$, on a donc les conditions :

- $y(-x_0) = y(x_0) = 1$
- $y'(-x_0) = -y'(x_0) = 0$

$\square$

Corrigé de l'Exercice (1.1). On pose $g = f' + af$. On peut alors considérer cette relation comme une équation différentielle d'inconnue f, on obtient

$$f(t) = Ce^{-at} + e^{-at} \int_0^t e^{au} g(u)\, du \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

où C est un réel quelconque (en fait $f(0)$).

Le terme Ce^{-at} est évidemment borné sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, si le réel k vérifie $|g(t)| \leqslant k$ pour tout t de $\mathbb{R}_+$, on a alors, pour tout t

$$\left| e^{-at} \int_0^t e^{au} g(u)\, du \right| \leqslant e^{-at} \int_0^t |e^{au} g(u)|\, du \leqslant ke^{-at} \int_0^t e^{au} du = k\frac{1 - e^{-at}}{a} \leqslant \frac{k}{a}.$$

Donc le deuxième terme est lui aussi borné sur $\mathbb{R}_+$, et donc f l'est aussi. $\square$

Corrigé de l'Exercice (1.1). **1.** Trouver P revient à déterminer une base (V_1, V_2) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $AV_1 = -V_1$ et $AV_2 = V_1 - V_2$.

En posant $V_1 = (a, b)$

$$AV_1 = -V_1 \iff 2a - b = 0,$$

on choisit donc $V_1 = (1, 2)$.

En posant $V_2 = (c, d)$

$$AV_2 = V_1 - V_2 \iff -2c + d = 1,$$

on choisit donc $V_2 = (0, 1)$.

Il est clair que (V_1, V_2) est libre, donc est une base. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, qui est la matrice de passage de la base canonique à la base (V_1, V_2), vérifie donc bien

$$P^{-1}AP = B,$$

d'après les formules de changement de base.

2. Le système $Y' = BY$ s'écrit alors

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_2. \end{cases}$$

La deuxième équation fournit $y_2(t) = C_1 e^{-t}$ pour une $y_1(t) = (C_1 t + C_2) e^{-t}$ pour une certaine constante C_2.

Les solutions du système sont donc les fonctions de la forme $Y : t \longmapsto e^{-t}(C_1 t + C_2, C_1)$, où $C_1,\ C_2$ sont des scalaires quelconques.

3. Les fonctions de la forme $X = PY : t \longmapsto e^{-t}(C_1 t + C_2, 2C_1 t + 2C_2 + C_1)$, où $C_1,\ C_2$ sont des scalaires quelconques, sont alors les solutions de $X' = AX$.

La condition $X(0) = (1, 4)$ fournit $C_2 = 1$ et $C_1 = 2$; la solution cherchée est donc $t \longmapsto e^{-t}$ $(2t + 1, 4t + 4)$. □

Corrigé de l'Exercice (1.1). Dans l'expression de φ, on peut remplacer $f(t)\, y(t)$ dans les deux intégrales par $-y''(t)$. Une intégration par parties donne alors

$$\int_a^x (t-a)\, y''(t)\, dt = [(t-a)\, y'(t)]_a^x - \int_a^x y'(t)\, dt = (x-a)\, y'(x) - y(x);$$

un calcul analogue sur la deuxième intégrale donne bien, après simplification

$$\varphi(x) = (b-a)\, y(x)\,.$$

La fonction y est en particulier continue sur le segment $[a, b]$, donc y est bornée et atteint son bornée. Soit M la borne supérieure de $|y(x)|$ sur$[a, b]$, et x_0 un point de $[a, b]$ vérifiant $|y(x_0)| = M$. On déduit alors de ce qui précéde

$$\begin{aligned}
(b-a)\,|y(x_0)| &\leqslant (b-x_0)\int_a^{x_0}(t-a)\,|f(t)|\,|y(t)|\,dt + (x_0-a)\int_{x_0}^{b}(b-t)\,|f(t)|\,|y(t)|\,dt \\
&\leqslant M(b-x_0)(x_0-a)\left(\int_a^{x_0}|f(t)|\,dt + \int_{x_0}^{b}|f(t)|\,dt\right) \\
&\leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}\int_a^b |f(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

puisque $(b-x)(x-a)$ atteint son maximum sur $[a, b]$ en $(a+b)/2$. Si $M = 0$, alors y est nulle sur $[a, b]$, donc en particulier $y(a) = y'(a) = 0$. Ainsi, d'après Cauchy- Lipschitz, y est la solution nulle, ce qui est interdit par l'énoncé. On peut donc simplifier par

$$M(b-a) = (b-a)\,|y(x_0)|$$

pour obtenir

$$\int_a^b |f(t)|\,dt \geqslant \frac{4}{b-a}$$

Si $|f(t)| \leqslant 1$ pour tout t, ou en déduit

$$\frac{4}{b-a} \leqslant b-a$$

soit

$$b-a \geqslant 2.$$

□