

*République Algérienne Démocratique et populaire*  
*Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche*  
*Scientifique*

Faculté des sciences - Département de Mathématiques  
Université de Boumerdès



## Comportement à long terme de l'équation des ondes avec conditions aux limites cinétiques

**Mémoire pour l'obtention du diplôme de Master en  
Analyse Mathématiques**

présenté par

**BARRY Kalifa Lassana**

Soutenu le 28 juin 2022 devant le jury composé de

|              |            |      |            |
|--------------|------------|------|------------|
| D. Seba      | Professeur | UMBB | Présidente |
| S. Benakmoum | MC/B       | UMBB | Examineur  |
| K. Laoubi    | MC/A       | UMBB | Encadreur  |

**Année Universitaire 2021/2022**

# Table des matières

|   |          |
|---|----------|
| Remerciements   | 4        |
| Résumé  | 5        |
| Introduction  | 6        |
| <b>1 Rappel et Préliminaires</b>                                  | <b>8</b> |
| 1.1 Analyse fonctionnelle . . . . .                               | 8        |
| 1.1.1 Espace préhilbertien . . . . .                              | 8        |
| 1.1.2 Espace hilbertien . . . . .                                 | 9        |
| 1.1.3 Orthogonalité . . . . .                                     | 11       |
| 1.1.4 Projection hilbertienne et conséquences . . . . .           | 13       |
| 1.1.5 Le théorème de représentation de Riesz . . . . .            | 15       |
| 1.1.6 Théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés . . . . . | 16       |
| 1.2 Distribution . . . . .  | 21       |
| 1.2.1 Fonction Tests . . . . .                                    | 22       |
| 1.2.2 Distributions . . . . .                                     | 22       |
| 1.2.3 Exemple de distributions . . . . .                          | 22       |
| 1.2.4 Les fonctions $L^1_{loc}$ . . . . .                         | 22       |
| 1.2.5 La masse de DIRAC . . . . .                                 | 23       |
| 1.2.6 Dérivation au sens des distributions . . . . .              | 23       |
| 1.2.7 Quelques propriétés, définitions . . . . .                  | 24       |
| 1.2.8 Dérivation d'une fonction discontinue . . . . .             | 24       |
| 1.3 Espaces de Sobolev . . . . .                                  | 25       |
| 1.3.1 Rappel sur les espaces de Lebesgue . . . . .                | 25       |
| 1.3.2 Définition . . . . .  | 25       |
| 1.3.3 Quelques propriétés . . . . .                               | 25       |
| 1.4 Les EDP linéaires du 2 <sup>nd</sup> ordre . . . . .          | 34       |
| 1.4.1 Condition aux limites d'une EDP . . . . .                   | 35       |
| 1.5 Théorie des semi-groupes . . . . .                            | 36       |
| 1.5.1 Définition d'un $C_0$ semi-groupe . . . . .                 | 36       |
| 1.5.2 Générateur Infinitésimal . . . . .                          | 37       |
| 1.5.3 Théorème de Hille-Yosida . . . . .                          | 37       |
| 1.5.4 Théorème de Lumer-Philips . . . . .                         | 37       |
| 1.5.5 Démonstration du théorème de Lumer-Philips . . . . .        | 38       |
| 1.6 Séries de Fourier . . . . .                                   | 39       |
| 1.6.1 Quelques Notions . . . . .                                  | 39       |
| 1.6.2 Définitions et calcul formel . . . . .                      | 40       |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 1.6.3    | Les périodes quelconques, les fonctions paires et impaires            | 41        |
| 1.7      | Fonctions de Bessel . . . . .   | 45        |
| 1.7.1    | Equations et fonctions de Bessel . . . . .                            | 45        |
| 1.7.2    | Quelques propriétés des fonctions de Bessel de 1 <sup>re</sup> espèce | 46        |
| 1.7.3    | Zéros de Bessel . . . . .   | 47        |
| 1.7.4    | Propriétés des zéros de Bessel . . . . .                              | 47        |
| <b>2</b> | <b>Équation des ondes avec conditions aux limites mixtes</b>          | <b>49</b> |
| 2.1      | Problème à étudier . . . . .  | 49        |
| 2.2      | Domaine d'étude du problème . . . . .                                 | 49        |
| 2.3      | Reformulation du problème . . . . .                                   | 50        |
| 2.4      | Existence et unicité de la solution . . . . .                         | 51        |
| <b>3</b> | <b>Stabilisation exponentielle</b>                                    | <b>54</b> |
| 3.1      | Formulation du problème (1)-(2) en un problème unidimensionnel        | 54        |
| 3.2      | Stabilisation exponentielle du modèle 1-d avec un paramètre . . .     | 55        |
| <b>4</b> | <b>Stabilisation polynômiale</b>                                      | <b>70</b> |

## Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu, notre créateur de m'avoir donné la force, le courage et le temps nécessaire afin d'accomplir ce travail.

Je dédie ce mémoire à mon cher père **BARRY Lansina** (*repose en paix*), à ma chère mère **Gouély Sédé Diomandé** (*repose en paix*), à mes frères et sœurs et à ma tante. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Je voudrais adresser toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Dr Laoubi Karima, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je tiens à remercier également les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'examiner notre travail.

L'enseignement de qualité dispensé par le master **Analyse Mathématiques** a également su nourrir mes réflexions et a représenté une profonde satisfaction intellectuelle, merci donc aux enseignants-chercheurs.

Pour terminer, un grand merci à mes amis et collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

## Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la stabilisation de l'équation des ondes avec contrôleur dynamique interne et de densité non négligeable.

Nous montrons tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution par la méthode des sémi-groupes. Ensuite Par une analyse spectrale et la méthode de calculs intégrales par multiplicateurs, nous prouvons que l'énergie du problème considéré décroît d'une manière exponentielle sur une partie du domaine et polynômiale sur le domaine tout entier.

## Introduction

On considère une équation d'onde amortie dans un domaine délimité avec des conditions aux limites mixtes. Sur une partie de la frontière du domaine, on a la condition cinétique :

$$\partial_\nu u + m(x)u_{tt} - \Delta_T u = 0$$

où

$$\begin{cases} m(\cdot) & \text{est la fonction densité} \\ \Delta_T & \text{l'opérateur Laplace tangentiel.} \end{cases}$$

et sur le reste de la frontière, on a la condition de type Neumann homogène

$$\partial_\nu u = 0.$$

La condition cinétique est caractérisée par la présence de la dérivée seconde temporelle  $u_{tt}$  sur la frontière du domaine.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine délimité par la frontière  $\Gamma$ . Et soient  $\Gamma_0, \Gamma_1$  deux(2) sous-ensembles ouverts non vides de  $\Gamma$  tels que  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  et  $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$ .

Supposons que  $m(\cdot) \in L^\infty(\Gamma_0)$  est une fonction non-négative telle que :

$$m(x) \geq m_0 > 0, \forall x \in \Gamma_1.$$

Considérons le problème étudié par Xiaoyu Fu et al [10] suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + d(x)u_t = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \partial_\nu u + m(x)u_{tt} - \Delta_T u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_1, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0, \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ u_t(0, x) = w_0(x) & \text{dans } \Gamma_1. \end{cases}$$

avec  $d(x) = d\chi_\omega > 0$  une constante,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  est le vecteur normal dirigé vers l'extérieur sur  $\Gamma$  et  $\Delta_T$  représente l'opérateur Laplace tangentiel sur  $\Gamma_1$ .

On suppose que :

$$\begin{cases} u_0 \in H^1(\Omega) \\ u_1 \in L^2(\Omega) \\ w_0 \in L^2(\Gamma_1). \end{cases}$$

Dans le cas où  $m(x) = 0$ , le système possède une condition aux limites de type Steklov ou Ventcel [18] sur  $\Gamma_1$  ; sinon la condition aux limites est appelée **condition aux limites cinétiques (ou dynamiques)**.

à noter que la présence de deux(2) dérivées par rapport à  $t$  sur la frontière  $\Gamma_1$  indique la présence de l'énergie cinétique tout au long de  $\Gamma_1$ .

Ce travail est réparti en quatre(4) chapitres, à savoir :

### Chapitre 1.

Il renferme quelques rappels susceptibles de nous aider à atteindre le but ultime de ce travail.

Il est composé de sept(7) sections :

#### Section 1.

Elle concerne quelques résultats sur l'**analyse fonctionnelle** (*Espaces préhilbertiens, espaces hilbertiens, orthogonalité, ...*)

#### Section 2.

Elle rappelle quelques notions des **distributions** telles que *la dérivation au sens des distributions, la valeur principale, dérivation d'une fonction discontinue, ...*

#### Section 3.

Elle donne certains rappels sur les **espaces de Sobolev** tels que *Inégalité de Hölder, théorème de densité (séparabilité), Inégalité de Poincaré, ...*

#### Section 4.

Elle concerne surtout les conditions aux limites des **EDP**.

Elle contient quelques définitions, la classification des EDP d'ordre 2 et trois(3) principaux types des conditions posées aux limites.

#### Section 5.

Cette partie fournit des notions de la théorie des sémi-groupes. Elle commence par des définitions, des exemples, et se termine par des théorèmes sur les opérateurs m-dissipatifs.

#### Section 6.

Cette section donne quelques définitions et formules (les notions de bases) sur les **séries de Fourier**.

#### Section 7.

Quant à cette dernière, on retrouve quelques notions des **Fonctions de Bessel**.

Ces notions sont entre autres des *définitions, les zéros de Bessel, la formule de dérivation, ...*

### Chapitre 2.

Dans ce second chapitre, on montrera l'existence et l'unicité de la solution de l'équation d'ondes sur une couronne sous l'influence d'un contrôleur dynamique interne avec conditions aux limites mixtes en se focalisant sur le théorème de Hille-Yosida.

### Chapitre 3.

Ce chapitre concerne surtout la stabilisation exponentielle de l'équation des ondes sous l'action d'un contrôleur dynamique interne avec des conditions aux limites mixtes reformulé en problème à une dimension.

### Chapitre 4.

Ce dernier chapitre concerne, la stabilité polynomiale de notre problème reformulé en un problème à une dimension.

# Chapitre 1

## Rappel et Préliminaires

Pour atteindre le but ultime de ce mémoire, on aura besoin de certaines notions, dont la plupart a été étudié dans les classes antérieures. Parmi lesquelles figurera : des définitions, des théorèmes, des propriétés, ...

### 1.1 Analyse fonctionnelle

#### 1.1.1 Espace préhilbertien

$E$  un espace vectoriel ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )

Si  $z$  un nombre complexe,  $\bar{z}$  conjugué de  $z$

##### 1.1.1.1 Définition

On appelle **produit scalaire**, toute application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que :  $\forall u, v, w \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$  :

1.  $\varphi(\lambda u + \mu v, w) = \lambda\varphi(u, w) + \mu\varphi(v, w)$
2.  $\varphi(u, \lambda v + \mu w) = \bar{\lambda}\varphi(u, v) + \bar{\mu}\varphi(u, w)$
3.  $\varphi(u, v) = \overline{\varphi(v, u)}$
4.  $\varphi(u, u) \geq 0$
5.  $\varphi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion, le produit scalaire est souvent noté par :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

##### 1.1.1.2 Définition

On appelle **espace préhilbertien**, tout espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

##### Notation

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espace préhilbertien.

##### Exemple

L'espace  $\mathbb{R}^n$  est un espace préhilbertien réel, où le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$  est défini par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

### 1.1.1.3 Norme

Soit  $H$  un espace vectoriel (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , alors  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  définit une norme.

## 1.1.2 Espace hilbertien

### 1.1.2.1 Définition

On appelle espace de Hilbert ou encore espace hilbertien, tout espace préhilbertien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  complet pour la norme définie par le produit scalaire.

#### Exemple

L'espace  $L^p([a, b])$  est un espace de Hilbert, conséquence du théorème de Riesz.

### 1.1.2.2 Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace hilbertien. On a alors :

$$\forall u, v \in E : |\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle.$$

#### Preuve

Pour  $v = 0$  : l'inégalité est vraie.

Pour  $v \neq 0$  :

Supposons que  $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$ .

Posons

$$\forall t \in \mathbb{R} : P(t) = \|u + tv\|^2$$

Sachant que, par définition,

$$\|u + tv\| = \sqrt{\langle u + tv, u + tv \rangle}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \implies P(t) &= \langle u + tv, u + tv \rangle \\ &= \langle u, u + tv \rangle + t \langle v, u + tv \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + t \langle u, v \rangle + t \langle v, u \rangle + t^2 \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2t \langle u, v \rangle + t^2 \|v\|^2 \end{aligned} \right.$$

Comme  $P(t) \geq 0$  alors le discriminant  $\Delta \leq 0$ , avec

$$\Delta = 4|\langle u, v \rangle|^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2$$

Ce qui implique,

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

Dans le cas complexe, on peut se ramener au cas réel en multipliant le vecteur  $u$  ou  $v$  par un nombre complexe convenable de module égal à 1

$$\frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{|\langle u, v \rangle|}$$

Ceci étant  $\langle u, v \rangle$  devient un réel sans changer de module;  $\|u\|$  et  $\|v\|$  ne varient pas non plus.

$$\langle u, v \rangle \left( \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{|\langle u, v \rangle|} \right) = \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{|\langle u, v \rangle|} = |\langle u, v \rangle| \in \mathbb{R}$$

### 1.1.2.3 Proposition

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$  - espace vectoriel on a la formule du **parallélogramme**

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

**Preuve**

$\forall u, v \in E :$

$$(S1) : \begin{cases} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u + v \rangle + \langle v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2\Re(\langle u, v \rangle) + \|v\|^2 \end{cases}$$

$$(S2) : \begin{cases} \|u - v\|^2 &= \langle u - v, u - v \rangle \\ &= \langle u, u - v \rangle - \langle v, u - v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 - \langle u, v \rangle - \overline{\langle u, v \rangle} + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\Re(\langle u, v \rangle) + \|v\|^2 \end{cases}$$

En faisant la somme des deux(2) résultats, on obtient :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

### 1.1.2.4 Théorème (Von Neumann)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé.  $E$  est un espace préhilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.

**Exemple**

Soit  $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}\}$  l'espace vectoriel complexe de dimension  $n$ , muni de la norme

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|.$$

Montrer que cette norme, n'est pas issue d'un produit scalaire.

**Solution**

Si  $\|\cdot\|_1$  est issue d'un produit scalaire, alors l'identité du parallélogramme, doit être vérifiée, pour tout  $u, v \in \mathbb{C}^n$ . Soit  $u$  tel que  $u_1 = 1$  et les autres coordonnées sont nulles. Soit  $v$  tel que  $v_2 = 1$  et les autres coordonnées sont nulles. Alors

$$\|u\|_1 = \|v\|_1 = 1$$

, et

$$\|u + v\|_1 = \|u - v\|_1 = 2.$$

Comme  $8 \neq 4$  l'identité du parallélogramme n'est pas satisfaite.

### 1.1.3 Orthogonalité

D'après l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** pour des espaces réels,  $\forall u, v \in \mathbb{R}^*$  :

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1,$$

et donc l'angle  $\theta$  entre  $u$  et  $v$  peut être défini

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right)$$

Pour les espaces complexes, le problème est plus difficile, comme le produit scalaire  $\langle u, v \rangle$  est à valeurs complexes il n'est pas clair ce que "angle" signifie dans ce cas. Néanmoins, un cas particulier, très important, peut être considéré, à savoir le cas

$$\langle u, v \rangle = 0$$

#### 1.1.3.1 Définition

Soit  $H$  un espace préhilbertien sur un corps  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Deux(2) vecteurs  $u, v \in H$  sont dit **orthogonaux** si

$$\langle u, v \rangle = 0,$$

et on note  $u \perp v$ . On va généraliser cette notion, à des ensembles.

#### 1.1.3.2 Définition

Soit  $H$  un espace préhilbertien et soit  $A$  un sous-ensemble de  $H$ . Un vecteur  $u \in H$  et l'ensemble  $A$  sont dit **orthogonaux** dans  $H$  si  $u$  est orthogonal à tout vecteur de  $A$ .

Et on note  $u \perp A$ . Le complémentaire orthogonal de  $A$  est l'ensemble

$$A^\perp = \{u \in H : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in A\},$$

*i.e.* l'ensemble  $A^\perp$  formé des vecteurs de  $H$  qui sont orthogonaux à tout vecteur de  $A$  (Si  $A = \emptyset$  alors  $A^\perp = H$ ).

Soient  $M$  et  $N$  deux(2) sous-ensembles de  $H$ .  $M$  et  $N$  sont **orthogonaux** si pour tout  $u \in M, v \in N, u \perp v$  et qu'on note  $M \perp N$ .

#### Exemple

Si  $E = \mathbb{R}^3$  et  $A = \{(a_1, a_2, 0) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$  alors

$$A^\perp = \{(0, 0, u_3) : u_3 \in \mathbb{R}\}.$$

#### 1.1.3.3 Proposition

Soit  $E$  un espace préhilbertien et soit  $A$  un sous-ensemble de  $E$  alors :

1. Pour tout  $u, v \in E$ 
  - (a)  $u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$  ; si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (**Le théorème de Pythagore**)
  - (b)  $u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u + iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
2.  $0 \in A^\perp$ .
3.  $0 \in A \Rightarrow A \cap A^\perp = \{0\}$  ou  $A \cap A^\perp = \emptyset$
4.  $\{0\}^\perp = E, E^\perp = \{0\}$ .

5. Si  $A$  contient une boule ouverte  $B(a, r)$  pour un certain  $a \in E$  et  $r > 0$ , alors  $A^\perp = \{0\}$ ; en particulier, si  $A$  est ouvert non vide alors  $A^\perp = \{0\}$ .

**Preuve**

1. Comme,

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2,$$

et que  $u \perp v$  ( $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = 0$ ) alors

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

2. Comme  $\langle 0, v \rangle = 0$ , pour tout  $v \in A$ , on a donc  $0 \in A^\perp$ .
3. D'après 2),  $\{0\} \subset A \cap A^\perp$ .  
On suppose que  $u \in A \cap A^\perp$ . Alors  $\langle u, u \rangle = 0$  et donc  $u = 0$  (D'après la définition du produit scalaire).
4. Si  $A = \{0\}$ ,  $u \in E$  on a  $\langle u, v \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0, \forall v \in A$ , d'où  $u \in A^\perp$  et par suite  $A^\perp = E$ .  
Si  $A = E$  et  $u \in A^\perp$  alors  $\langle u, v \rangle = 0, \forall v \in A$ . En particulier, en posant  $u = v$  donne  $\langle u, u \rangle = 0$ , qui entraîne que  $u = 0$ , donc  $A^\perp \subset \{0\}$  et  $A^\perp = \{0\}$ .
5. Soit  $u \in A^\perp$ .  
Si  $u = 0$  Il n'y a rien à faire.

Si  $u \neq 0$

on note que  $B(a, r) \subset A$ , alors  $a \in A$  qui donne  $\langle u, a \rangle = 0$ .  
Mais on a aussi  $a + \frac{ru}{2\|u\|} \in B(a, r) \subset A$ , on doit donc avoir

$$0 = \left\langle u, a + \frac{ru}{2\|u\|} \right\rangle = \underbrace{\langle u, a \rangle}_{=0} + \frac{r}{2\|u\|} \underbrace{\langle u, u \rangle}_{\neq 0},$$

qui entraîne que  $r = 0$ , qui est contradictoire ( $r > 0$ ). Ainsi  $A^\perp = \{0\}$ .

**1.1.3.4 Proposition**

1.  $A$  dense dans  $E$  ( $\overline{A} = E$ )  $\Rightarrow A^\perp = \{0\}$ .
2.  $B \subset A \Rightarrow A^\perp \subset B^\perp$ .
3.  $A^\perp$  est un sous-espace fermé de  $E$ .
4.  $A \subset (A^\perp)^\perp$ .

**Preuve**

1. Supposons que  $x \in A^\perp$ . Comme  $\overline{A} = E$ , il s'ensuit qu'il existe une suite  $\{x_n\}$  de  $A$  telle que  $x_n \rightarrow x$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Notons que  $\langle x, x_n \rangle = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d'où, par continuité du produit scalaire

$$\langle x, x \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, x_n \rangle = 0,$$

et alors,  $x = 0$ .

2. Soient  $x \in A^\perp$  et  $a \in B$ . Alors  $a \in A$  car ( $B \subset A$ ), d'où  $\langle x, a \rangle = 0$  pour tout  $a \in B$ , on aura  $x \in B^\perp$ , donc  $A^\perp \subset B^\perp$ .

3. Soient  $x, y \in A^\perp, a \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Alors

$$\langle \alpha x + \beta y, a \rangle = \alpha \langle x, a \rangle + \beta \langle y, a \rangle = 0,$$

et  $\alpha x + \beta y \in A^\perp$ , et donc  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Soit  $\{x_n\}$  une suite de  $A^\perp$  telle que  $\{x_n\}$  converge vers  $x \in E$ .

La continuité nous donne  $\{x_n\}$

$$\langle x, a \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, a \rangle = 0.$$

pour tout  $a \in A$ . Ainsi  $x \in A^\perp$  et  $A^\perp$  est fermé.

4 Soit  $a \in A$ . Pour tout  $x \in A^\perp, \langle a, x \rangle = \overline{\langle x, a \rangle} = 0$ , d'où  $a \in (A^\perp)^\perp$  c'est-à-dire  $A \subset (A^\perp)^\perp$ .

### 1.1.3.5 Proposition

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un préhilbertien  $E$ . Alors  $u \in F^\perp$  si et seulement si

$$\forall v \in F \quad \|u - v\| \geq \|u\|$$

**Preuve**

( $\Rightarrow$ ) Soit  $u \in F^\perp$ , pour tout  $v \in F$ , on a  $u \perp v$  et  $u \perp -v$  ( $\langle u, -v \rangle = -\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u \perp -v$ ).

En appliquant l'identité du parallélogramme aux vecteur  $u$  et  $-v$ , on a

$$\|u + (-v)\|^2 = \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|(-v)\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \geq \|u\|^2,$$

d'où

$$\text{si } u \in F^\perp \implies \forall v \in F, \|u - v\|^2 \geq \|u\|^2.$$

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $\|u - v\|^2 \geq \|u\|^2$  pour tout  $v \in F$ .

Soit  $v \in F$ .

**Si  $v = 0$  :**

alors  $\langle u, v \rangle = 0$ , d'où  $u \in F^\perp$ .

**Si  $v \neq 0$  :**

alors  $\alpha v \in F, \forall v \in \mathbb{K}$  car  $F$  est un sous-espace vectoriel.

Ainsi

$$\begin{cases} \|u\|^2 & \leq \|u - \alpha v\|^2 \\ & = \langle u - \alpha v, u - \alpha v \rangle \\ & = \|u\|^2 + |\alpha|^2 \|v\|^2 - \alpha \overline{\langle u, v \rangle} - \bar{\alpha} \langle u, v \rangle. \end{cases}$$

En posant  $\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$  dans l'inégalité trouvée, on aura

$$\frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^4} \|v\|^2 - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} \geq 0,$$

qui donne  $\langle u, v \rangle = 0$  pour tout  $v \in F \setminus \{0\}$ ,  $\implies$  pour tout  $v \in F$ .

D'où  $u \in F^\perp$ .

## 1.1.4 Projection hilbertienne et conséquences

### 1.1.4.1 Définition

Un sous-ensemble  $C$  d'un espace vectoriel  $E$  est dit [convexe](#) si :

$$\forall u, v \in C, \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda u + (1 - \lambda)v \in C$$

#### 1.1.4.2 Théorème (projection sur un convexe fermé)

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $C$  un convexe fermé non vide de  $H$ . Alors pour tout  $u \in H, \exists! v \in C$  notée  $P_C(u)$ , tel que :

$$\|u - v\| = d(u, C) = \inf_{a \in C} \|u - a\|.$$

De plus,  $P_C(u)$  est caractérisé par les propriétés

$$\begin{cases} P_C(u) \in C \\ \Re \langle u - P_C(u), v - P_C(u) \rangle \leq 0 \quad \forall v \in C \end{cases}$$

Cette inégalité traduit le fait que l'angle entre les vecteurs  $u - P_C(u)$  et  $v - P_C(u)$  est [obtus](#).

##### Preuve

Soit  $\gamma = \inf\{\|u - a\| : a \in C\}$ . Par définition de  $\gamma$ , il existe une suite  $\{v_n\}$  de  $C$  telle que

$$\gamma_n = \|u - v_n\| \rightarrow \gamma \quad (n \rightarrow \infty).$$

Comme  $C$  est convexe, il s'en suit que

$$\frac{v_n + v_m}{2} \in C, \text{ pour tout } n, m \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$\left\| u - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq \gamma \text{ pour tout } n, m \in \mathbb{N}.$$

L'identité du parallélogramme appliquée à  $u - v_n$  et  $u - v_m$ , nous donne

$$\begin{cases} \|v_n - v_m\|^2 &= \|(v_n - u) + (u - v_m)\|^2 \\ &= 2\|v_n - u\|^2 + 2\|u - v_m\|^2 - \|(v_n - v_m) - 2u\|^2 \\ &= 2\|v_n - u\|^2 + 2\|u - v_m\|^2 - 4\left\| u - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 \\ &\leq 2\gamma_n^2 + 2\gamma_m^2 - 4\gamma^2. \end{cases}$$

Ainsi  $\{v_n\} \subset C$  est une suite de Cauchy, et donc converge vers un point  $v \in C$  car  $C$  est un fermé de  $H$ , donc est lui même complet. Par suite  $\|u - v\| \geq \gamma$ .

D'après la [continuité de la norme](#), on aura  $\|u - v\| = \gamma$ . Ce qui donne l'existence de  $v$ . Pour l'unicité on suppose qu'un  $w \in C$  vérifie  $\|u - w\| = \gamma$ . Alors  $\frac{v+w}{2} \in C$  car  $C$  est convexe, et donc  $\left\| u - \frac{v+w}{2} \right\| \geq \gamma$ . L'identité du parallélogramme appliquée à  $u - w$  et  $u - v$  donne

$$0 \leq \|v - w\| \leq 4\gamma^2 - 4\gamma^2 = 0$$

Alors  $w = v$ , d'où l'unicité.

Enfin, étant donné  $q \in C$ , pour tout  $\lambda \in ]0, 1]$  le vecteur  $(1 - \lambda)P_C(u) + \lambda q - u$  de sorte que

$$\begin{cases} 0 &\leq \|(1 - \lambda)P_C(u) + \lambda q - u\|^2 - \|P_C(u) - u\|^2 \\ &= \|(P_C(u) - u) + \lambda(q - P_C(u))\|^2 - \|P_C(u) - u\|^2 \\ &= -2\Re \langle u - P_C(u), q - P_C(u) \rangle + \lambda^2 \|q - P_C(u)\|^2 \end{cases}$$

d'où  $\Re \langle u - P_C(u), q - P_C(u) \rangle \leq \frac{\lambda}{2} \|q - P_C(u)\|^2$ . En faisant tendre  $\lambda$  vers  $0^+$ , on en déduit que  $\Re \langle u - P_C(u), q - P_C(u) \rangle \leq 0$ .

Inversement, si  $\Re \langle u - P_C(u), q - P_C(u) \rangle \leq 0, \forall q \in C$ , pour un certain  $w \in C$ , alors

on obtient  $\|(1 - \lambda)w + \lambda q - u\|^2 - \|w - u\|^2 \geq 0$  et en faisant tendre  $\lambda$  vers  $1^-$ , on obtient  $\|q - u\|^2 - \|w - u\|^2 \geq 0, \forall q \in C$ , c'est-à-dire que  $w = P_C(u)$ .

En particulier pour  $x = 0$  on a :

### 1.1.4.3 Corollaire

Tout ensemble convexe fermé d'un espace de Hilbert  $H$  a un unique élément de norme minimale.

Si  $F$  est sous-espace vectoriel de  $H$ , alors  $F$  est convexe, d'où

### 1.1.4.4 Corollaire (Théorème de la projection orthogonale hilbertienne)

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert  $H$  et soit  $u \in H$ . Alors, il existe un unique  $q \in F$ , notée  $P_F u$ , tel que

$$\|u - q\| = d(u, F) = \inf_{a \in F} \|u - a\|.$$

De plus,  $P_F u$  est caractérisé par les propriétés

$$\begin{cases} P_F u \in F \\ \langle u - P_F u, v \rangle = 0, \forall v \in F \end{cases}$$

#### Preuve

L'existence de  $P_F$  est assuré par le théorème précédent. Il reste à établir la caractérisation. Soit  $u \in H$  et  $q = P_F u$ .

Pour tout  $v \in F, v + q \in F$  en appliquant la caractérisation du théorème précédent, on a

$$\Re \langle u - q, v \rangle = \Re \langle u - q, (v + q) - q \rangle \leq 0$$

En remplaçant  $v$  par  $-v, iv$  et  $-iv$  on obtient  $\Re \langle u - q, v \rangle = 0$  pour tout  $v \in F$ .

Inversement, si  $\Re \langle u - w, v \rangle = 0, \forall v \in F$ , pour un certain  $w \in F$ ,

$$\implies \begin{cases} \Re \langle u - w, v - w \rangle = 0 \\ \text{et} \\ \|(1 - \lambda)w + \lambda v - u\|^2 - \|w - u\|^2 \geq 0 \end{cases}$$

En faisant tendre  $\lambda$  vers  $1^-$ , on obtient

$$\|v - u\|^2 - \|w - u\|^2 \geq 0, \forall v \in F,$$

c'est-à-dire que  $w = P_F u$ .

*La même démonstration est valable si on suppose seulement que  $H$  est un espace préhilbertien par contre  $F$  doit être un sous-espace complet.*

## 1.1.5 Le théorème de représentation de Riesz

*Les espaces de Hilbert possèdent des propriétés de dualités remarquables.*

### 1.1.5.1 Définition

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. On note par  $E^*$  son dual topologique, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires continues  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ . Cet espace est muni de la norme

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}.$$

Soit  $H$  un espace de Hilbert.

Pour  $v \in H$  on associe la forme linéaire sur  $H$ ,  $\phi_v : H \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\phi_v(u) = \langle u, v \rangle.$$

D'après l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** on a

$$|\phi_v(u)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|v\| \|u\|$$

d'où la forme linéaire  $\phi_v$  est continue, donc un élément de  $H^*$ .

On définit alors une application  $\Phi : H \rightarrow H^*$ , qui à  $v \in H$  associe  $\Phi(v) = \phi_v$ .

### 1.1.5.2 Théorème (Le théorème de représentation de Riesz)

Soit  $H$  un espace de Hilbert.

Alors

1. L'application  $\Phi$  est une isométrie **i.e.**

$$\forall v \in H, \|\Phi(v)\| = \|v\|.$$

2. Soit  $f$  une forme linéaire continue **i.e.**  $f \in H^*$ , alors il existe un unique  $v \in H$  tel que

$$f = \phi_v \text{ et } \|f\| = \|v\|.$$

**Preuve**

1. Il suffit de supposer que  $v \neq 0$ , alors de l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** on a

$$\|\phi_v\| = \|v\| \text{ car } (\|u\| \leq 1),$$

d'autre part  $\phi_v(v) = \|v\|^2$ , entraîne  $\|\phi_v\| \geq \|v\|$ ,  
d'où  $\|\phi_v\| = \|v\|$ .

2. Soit  $f \in H^*$ , si  $f = 0$ , alors  $f = \phi_0$ .

Maintenant, si  $f \neq 0$ . On pose  $F = \ker f$ , comme  $f$  est continue,  $\ker f$  est sous espace vectoriel fermé de  $H$ , d'après

le théorème **??**,  $F^\perp \neq \{0\}$ . Il en résulte l'existence de  $v_0 \in F^\perp \setminus \{0\}$ , alors  $f(v_0) \neq 0$ . On peut supposer quitte à diviser par le scalaire  $f(v_0)$ , que  $f(v_0) = 1$ .

Soit  $u \in H$ , on vérifie directement que  $u - f(u)v_0 \in F$  d'où  $\langle u - f(u)v_0, v_0 \rangle = 0$  et ainsi  $\langle u, v_0 \rangle = f(u) \|v_0\|^2$ ,

finalement

$$f(u) = \langle u, \frac{v_0}{\|v_0\|^2} \rangle = \langle u, v \rangle$$

avec  $v = \frac{v_0}{\|v_0\|^2}$ .

### 1.1.5.3 Corollaire

Soit  $H$  un espace de Hilbert.

L'application  $\Phi : H \rightarrow H^*$ ,  $v \mapsto \Phi(v)$  définie par

$$\forall u \in H, \Phi(v)(u) = \langle u, v \rangle$$

est une isométrie bijective et antilinéaire de  $H$  sur  $H^*$ . Si  $H$  est réel, c'est un isomorphisme isométrique de  $H$  sur  $H^*$ .

### 1.1.6 Théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés

### 1.1.6.1 Opérateurs linéaires bornés

#### Définition

Soient  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  deux  $\mathbb{K}$  e.v.n. Un opérateur linéaire est une application linéaire de  $E \rightarrow F$  qui vérifie :

$$\exists M \geq 0 \forall u \in E \quad \|T(u)\|_F \leq M \|u\|_E$$

#### Exemples

1. L'opérateur identité

$$\begin{aligned} Id_E &: E \rightarrow E \\ u &\mapsto Id_E(u) = u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall u \in E, \|Id_E(u)\|_E &= \|u\|_E \leq \|u\|_E \\ \implies \exists M = 1 \geq 0 \forall u \in E &: \|Id_E(u)\|_E \leq M \|u\|_E \end{aligned}$$

2. L'opérateur nul  $\forall u \in E, \|\theta_E(u)\|_E = \|0u\|_E = \|0\|_E = 0 \|u\|_E = 0 \leq 0 * \|u\|_E$
3. L'opérateur de décalage (Schift)

$$\begin{aligned} S &: l^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{R}) \\ u = (u_n)_n &\mapsto S(u) = (0, u_1, u_2, \dots, \dots) \end{aligned}$$

$$\forall u \in l^2(\mathbb{R}) : \|S(u)\|_{l^2(\mathbb{R})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{l^2(\mathbb{R})}$$

#### Notation

$$L(E, F) = \{T : E \rightarrow F, \text{linéaire borné}\}$$

$$L(E, E) = L(E)$$

On vérifie facilement que  $L(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.

#### Théorème

Soit  $T : E \rightarrow F$  un opérateur linéaire alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $T$  est borné
2.  $T$  est continu sur tout  $E$
3.  $T$  est continu en 0

### 1.1.6.2 Norme d'un opérateur

Soit  $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  linéaire borné.

On pose

$$\alpha = \sup_{\|u\|_E \leq 1} \|T(u)\|_F, \beta = \sup_{\|u\|_E = 1} \|T(u)\|_F \text{ et } \gamma = \sup_{\|u\|_E \neq 0} \frac{\|T(u)\|_F}{\|u\|_E}$$

#### Propriétés

1. Les quantités  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont toutes finies et positives
2.  $\alpha = \beta = \gamma$

**Définition**

Soit  $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  linéaire borné.

Le nombre  $\alpha = \beta = \gamma$  est appelé **norme de l'opérateur  $T$**  noté  $\|T\|_L(E, F)$  **Exemples**

- 1)  $\|Id_E\|_{L(E)} = 1$
- 2)  $\|\theta\|_{L(E, F)} = 0$
- 3)  $\|S\|_{l^2(\mathbb{R})} = 1$ .

**Proposition**

On a les propriétés suivantes :

1.  $\forall T \in L(E, F) \quad \|T(u)\|_F \leq \|T\|_{L(E, F)} \|u\|_E$
2.  $\|T\|_{L(E, F)}$  définit une norme dans  $L(E, F)$

**Théorème**

Si  $F$  est un espace de Banach alors  $L(E, F)$  est aussi un espace de Banach.

En particulier si  $F = \mathbb{K}$  on a :

$$L(E, F) = L(E, \mathbb{K}) = E^* \text{ (espace dual de } E \text{)}$$

**Définition**

Soient  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  deux(2) espaces vectoriels normés.

On dit que  $T \in L(E, F)$  est **inversible** si :

- a)  $T$  est bijective
- b)  $T^{-1}$  est borné ( $T^{-1} \in L(F, E)$ )

L'ensemble des opérateurs  $T \in L(E, F)$  inversibles est noté **Iso(E, F)**.

**Théorème**

Soient  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  deux(2) espaces de Banach et  $T \in L(E, F)$ . Si  $T$  est bijectif alors  $T$  est inversible ( $T \in Iso(E, F)$ )

**Théorème (Théorème de l'application contractante)**

Soient  $E$  un espace de Banach,  $T \in L(E)$  tel que  $\|T\| < 1$  alors  $(Id_E - T)$  est inversible et la série  $\sum_{k \geq 0} T^k$  est convergente vers  $(Id_E - T)^{-1}$ .

De plus  $\|(Id_E - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|_{L(E)}}$

**Preuve**

Comme  $\|T\| < 1$  et

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k, \forall k \in \mathbb{N}$$

la série  $\sum_{k \geq 0} T^k$  est normalement convergente (car  $\sum_{k \geq 0} \|T\|^k$  est une suite géométrique de raison  $\|T\| < 1$ ) donc convergente de somme  $S$ .

$$S * T = T * S = \sum_{k \geq 0} T^{k+1} = T^1 + T^2 + \dots + T^k + \dots = S - Id_E$$

$$\Rightarrow S(T - Id_E) = -Id_E$$

$$\Rightarrow S(Id_E - T) = Id_E \text{ et } T * S = S - Id_E \Rightarrow (Id_E - T)S = Id_E$$

donc  $(Id_E - T)$  est inversible

$$\text{et } S = (Id_E - T)^{-1} \text{ et } \|(Id_E - T)^{-1}\| = \|S\| \leq \sum_{k \geq 0} \|T\|^k = (1 - \|T\|)^{-1}.$$

**1.1.6.3 Adjoint d'un opérateur**

**Définition**

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux(2) espaces de Hilbert.

On appelle **adjoint de l'opérateur  $T \in L(H_1, H_2)$**  l'opérateur  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  tel que :

$$\forall u \in H_1, \forall v \in H_2 \quad \langle T(u), v \rangle_{H_2} = \langle u, T^*(v) \rangle_{H_1}$$

**Proposition**

Soient  $H$  et  $K$  deux(2) espaces de Hilbert et  $A \in L(H, K)$  **i.e.** une application linéaire

continue.

Il existe une unique application linéaire continue  $A^* \in L(H, K)$  telle que pour tout  $u \in H$  et  $v \in K$  on a :

$$\langle Au, v \rangle_K = \langle u, A^*v \rangle_H$$

De plus

$$\|A^*\| = \|A\|$$

et  $A^{**} = A$ .

L'application  $A^*$  est appelée l'application **adjointe** de  $A$  (ou l'opérateur adjoint de l'opérateur  $A$ ).

**Exemples**

Soit  $H = l^2(\mathbb{R})$  et l'opérateur  $S \in L(l^2(\mathbb{R}))$  définit par

$$\begin{aligned} S : l^2(\mathbb{R}) &\rightarrow l^2(\mathbb{R}) \\ u = (u_n)_n &\mapsto S(u) = (0, u_1, u_2, \dots, \dots) \end{aligned}$$

L'opérateur adjoint de  $S$  est

$$\begin{aligned} S^* : l^2(\mathbb{R}) &\rightarrow l^2(\mathbb{R}) \\ v = (v_n)_n &\mapsto S^*(v) = (v_2, v_3, \dots, v_n, \dots) \end{aligned}$$

**Proposition**

Soient  $(H_1, H_2)$  deux(2) espaces de Hilbert, on a  $\forall T \in L(H_1, H_2)$

1.

$$(T^*)^* = T, \quad \|T^*\|_{L(H_2, H_1)} = \|T\|_{L(H_1, H_2)} \text{ et } \|T^* \circ T\| = \|T\|^2$$

2. Si  $H_3$  est un espace de Hilbert,  $S \in L(H_1, H_2)$ ,  $T \in L(H_2, H_3)$  on a

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$$

3.  $\text{Ker} T^* = (T(E))^\perp$  ( $T \in L(H_1, H_2)$ )

**Définition (Opérateur unitaire, normal, autoadjoint et positif)**

Soient  $(H_1, H_2)$  deux(2) espaces de Hilbert.

1. Un opérateur  $T \in L(H_1, H_2)$  est dit **unitaire** si

$$T^* \circ T = Id_{H_1} \text{ et } T \circ T^* = Id_{H_2}.$$

2. Un opérateur  $T \in L(H_1)$  est dit **normal** si

$$T^* \circ T = T \circ T^*.$$

3. Un opérateur  $T \in L(H_1)$  est dit **autoadjoint** si

$$T = T^*.$$

4. Unopérateur  $T \in L(H_1)$  est dit **positif** s'il est **autoadjoint** et

$$\langle u, T(u) \rangle_{H_1} \geq 0, \quad \forall u \in H_1.$$

**Proposition**

Soient  $(H_1, H_2)$  deux(2) espaces de Hilbert et  $T \in L(H_1, H_2)$

a) L'opérateur  $T^* \circ T$  de  $L(H_1)$  est *positif*.

1. L'opérateur  $T$  est *normal* si et seulement si

$$\text{pour tout } u \in H_1 : \|T^*(u)\| = \|T(u)\|.$$

### 1.1.6.4 Théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach

#### Définition

Soit  $E$  un espace de Banach et  $T \in L(E)$ .

\*) On appelle **spectre de  $T$**  et on note par  $\sigma(T)$  l'ensemble des valeurs  $\lambda \in \mathbb{C}$  telles que  $T - \lambda Id_E$  ne soit pas **inversible**.

\*\*\*) On appelle **résolvante de  $T$** , l'application qui à  $\lambda \in (\mathbb{C} - \sigma(T))$  associe  $(T - \lambda Id_E)^{-1}$  ou  $(\lambda Id_E - T)^{-1}$ .

On la note  $R_T(\lambda)$ ,  $\lambda \in (\mathbb{C} - \sigma(T))$ .

#### Cas d'espace de dimension finie

Soit  $E$  un *e.v.n* de dimension finie le nombre complexe  $\lambda \in \mathbb{C}$  est appelé **valeur propre** de l'opérateur  $T \in L(E)$  si l'équation spectrale  $T(u) = \lambda u \Leftrightarrow (T - \lambda Id_E)(u) = 0_E$  admet une solution non nulle ( $u \neq 0$ ).

Le nombre  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une **valeur propre** de  $T$  si et seulement si l'opérateur  $T_\lambda = (T - \lambda Id_E)$  n'est pas injectif équivalent à dire qu'il n'est pas bijectif ou encore n'est pas inversible.

L'opérateur  $T$  peut être représenté par une matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , ce qui fait que la définition généralise cette notion de *valeurs propres* et *vecteurs propres*.

L'ensemble des **valeurs propres** de  $T$  est appelé **spectre ponctuel** de  $T$  ( $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ ).

L'ensemble des **vecteurs propres** de  $T$  est le **sous-espace propre** associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Si  $(T - \lambda Id_E)(u) = 0_E$  n'admet pas de solution non nulle c'est-à-dire  $(T - \lambda Id_E)$  est injectif donc bijectif alors  $\lambda$  est une **valeur régulière** de  $T$  (l'ensemble résolvant  $\rho(T) = (\mathbb{C} - \sigma(T))$ ).

#### Théorème

Soit  $H$  un espace de Hilbert.

1. Soit  $T \in L(H)$ , la résolvante  $R_T$  est une application holomorphe de l'ensemble  $\rho(T)$  dans  $L(H)$  et vérifie l'équation de la résolvante

$$R_T(\lambda) - R_T(\mu) = (\lambda - \mu)R_T(\lambda)R_T(\mu), \forall \lambda, \mu \in \rho(T).$$

2.  $R_T(\lambda)R_T(\mu) = R_T(\mu)R_T(\lambda)$ ,  $\forall \lambda, \mu \in \rho(T)$ .

#### Proposition

Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe, alors le spectre de tout opérateur linéaire borné dans  $H$  est non vide.

### 1.1.6.5 Spectre d'un opérateur autoadjoint borné

#### Proposition

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $T \in L(H)$  **autoadjoint**, la norme de  $T$  est donné par

$$\|T\|_{L(H)} = \sup_{\|u\|=1} |\langle Tu, u \rangle|.$$

#### Proposition

1. Les valeurs propres d'un opérateur borné autoadjoint sont **réelles**.
2. Deux(2) vecteurs propres associés à deux(2) valeurs propres distinctes d'un opérateur autoadjoint sont orthogonaux (et donc *linéairement indépendants*).

### 1.1.6.6 Théorie spectrale d'un opérateur compact

#### Définition

Soient  $E, F$  deux(2) espaces de Banach.

L'opérateur linéaire  $T : E \rightarrow F$  est **compact** s'il transforme toute partie  $M$  borné en un ensemble relativement compact ( $\overline{T(M)}$  est compacte.)

#### Exemple

1.  $F$  est de dimension finie ( $\dim F < +\infty$ ), tout opérateur  $T \in L(E, F)$  est compact (car si  $M$  est borné dans  $E$  alors  $T(M)$  est un *s.e.v* de  $F$  de dimension finie donc fermé et borné ( $T$  est borné) donc compact)  
c'est un opérateur de rang fini.
2.  $E = C([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ .  
 $Id_E : E \rightarrow E$  n'est pas compacte (la boule  $B(0, 1)$  fermé n'est pas compacte car  $\dim E = +\infty$ ).

#### Remarque

1. Un opérateur  $T : E \rightarrow F$  compact est toujours **borné**.  
On note  $K(E, F) \subset L(E, F)$  l'ensemble des **applications linéaires compactes de  $E$  dans  $F$** .
2.  $T \in L(E, F)$  est **compact** si et seulement si l'image  $T(B_F)$  est relativement compacte ( $B_F$  étant la boule unité).

#### Proposition

1.  $K(E, F)$  est un *s.e.v* fermé de  $L(E, F)$ .
2. Soient  $E, F$  et  $G$  trois(3) espaces de Banach,  $S \in L(E, F)$  et  $L(F, G)$ .  
Si  $S$  ou  $T$  est **compacte** alors  $T \circ S$  est **compacte**.  
(Dans le cas où  $E$  et  $F$  sont deux(2) espaces de Hilbert, il y a équivalence).

#### Corollaire

Si  $T \in L(E, F)$  est la limite en norme d'une suite d'opérateur de rang fini alors  $T$  est compacte.

#### Propriété spectrale d'un opérateur compact

#### Théorème

Soit  $E$  un espace de Banach,  $T \in K(E, F)$  alors :

1.  $\text{Ker}(Id_E - T)$  est de dimension finie.
2. Si  $(Id_E - T)$  est injectif, alors  $(Id_E - T)$  est inversible.

#### Théorème

Soit  $E$  un espace de Banach de dimension infinie et  $T \in K(E, F)$  alors :

1.  $0 \in \sigma(T)$
2. Toute valeur spectrale  $\lambda$  est une valeur propre ( $\sigma(T) = 0 \cup \sigma_p(T)$ ) et le sous-espace  $E_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda Id_E)$  est de dimension finie
3.  $\sigma(T)$  est dénombrable et s'il est infini, on peut indexer les éléments de  $\sigma(T)$ , en une suite  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  qui tend vers 0.

## 1.2 Distribution

### 1.2.1 Fonction Tests

**Définition (Espace des fonctions tests)**

Soit  $\Omega$  un espace topologique.

L'espace des fonctions tests  $\mathcal{D}(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $C^{+\infty}$  sur  $\Omega$  à support compact inclus dans  $\Omega$ .

### 1.2.2 Distributions

On utilisera la notation  $T$  pour les distributions et  $\langle T, \varphi \rangle$  qui signifie que l'on applique  $T$  à  $\varphi$  (équivalent à  $T(\varphi)$ ).

**Définition**

Une distribution est une **forme linéaire continue** sur  $\mathcal{D}(\Omega)$ . L'ensemble des distributions est donc le dual topologique de  $\mathcal{D}(\Omega)$ , on le note donc  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Le terme de *forme linéaire* n'est pas particulier. Par contre, la notion de **continuité** est particulière :

$$\forall K \text{ compact } \subset \Omega, \exists C_k > 0, \exists m_k > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_k \sup_{|\alpha| \leq m_k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

**Remarque**

On utilise  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$  et  $\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ .

### 1.2.3 Exemple de distributions

#### 1.2.4 Les fonctions $L^1_{loc}$

**Définition (Fonction localement intégrables)**

Une fonction  $f$  de  $L^1_{loc}(\Omega)$  est une fonction intégrable sur un compact inclu dans  $\Omega$ .

**Propriété (Les fonctions  $L^1_{loc}$ )**

Soit  $f$  une fonction de  $L^1_{loc}(\Omega)$ , alors l'application :

$$T_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \end{array}$$

est une **distribution**.

**Preuve**

**La démonstration de la linéarité est immédiate.**

Reste à montrer que la continuité.

Soit  $K$  un compact inclu dans  $\Omega$ , et  $\varphi$  une fonction  $C^{+\infty}$  à support dans  $K$ . On a

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = \int_K f(x)\varphi(x)dx$$

On a alors :

$$\langle T_f, \varphi \rangle \leq \int_K |f(x)\varphi(x)|dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|dx$$

Ainsi, avec  $C_k = \int_K |f(x)|dx$  et  $m_k = 0$ , on vérifie la continuité de  $\langle T_f, \varphi \rangle$ .

**Remarque**

Pour  $(f, g) \in (L^1_{loc}(\Omega))^2$  telles que

$$f = g \text{ presque partout}$$

alors

$$T_f = T_g$$

**Remarque :**  $T_f = T_g \Rightarrow f = g$  presque partout

### 1.2.5 La masse de DIRAC

**Définition (La masse de DIRAC)**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ , alors la masse de DIRAC est définie par :

$$\delta_a : \begin{array}{l} a \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi(a) \end{array}$$

**Preuve**

**La preuve de la continuité est assez aisée :**  $|\delta_a| = |\varphi(a)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$

### 1.2.6 Dérivation au sens des distributions

**Propriété (Dérivation)**

Soit  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . L'application :

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} : \begin{array}{l} \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \end{array}$$

est une **distribution**.

**Preuve**

**La preuve de la linéarité ne pose pas de problème.**

Démontrons que c'est une application continue.

Soit  $K$  un compact et  $\varphi$  une fonction  $C^{+\infty}$  telle que  $\text{supp}(\Omega) \subset K$ . On a :

$$T \text{ distribution} \Rightarrow \exists C_k, \exists m_k, |\langle T, \varphi \rangle| \leq \sup_{|\alpha| \leq m_k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Puisque  $\varphi$  est  $C^{+\infty}$  alors on a :

$$\left| \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \right| \leq C_k \sup_{|\alpha| \leq m_k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

**Propriété (Liens dérivation usuelle et dérivation au sens des distributions)**

Soit  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ , on a :

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

**Preuve**

**On se restreint ici à la dimension 1.**

Soit  $f \in C^1(\mathbb{R})$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

On a, par définition :

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$$

**i.e.**

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx$$

Par une intégration par partie, on a :

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) dx$$

Or puisque  $\varphi$  est à support compact, on a :

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) dx = \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

## 1.2.7 Quelques propriétés, définitions

### 1.2.7.1 Propriété

Soit  $f$  une fonction  $C^{+\infty}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0.$$

Alors pour  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  :

$$fT = 0 \Leftrightarrow T = 0.$$

### 1.2.7.2 Propriété

(Division dans l'ensemble des distributions)

1. Les distributions  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  solutions de l'équation :

$$(x - a)T = 0$$

sont de la forme  $T = k\delta_a$  où  $k$  est une constante réelle.

2. Les distributions  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  solutions de l'équation :

$$(x - a)^2 T = 0$$

sont de la forme  $T = k_1\delta_a + k_2\delta'_a$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont deux(2) constantes réelles.

### 1.2.7.3 Définition (Valeur principale)

On définit la *valeur principale* de  $x$  comme étant la dérivée au sens des distributions de  $x \mapsto \log|x|$ .

On la note  $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ . On a, par définition :

$$\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

### 1.2.7.4 Distributions à dérivée nulle

Les distributions  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telles que  $T' = 0$  sont les distributions associées aux *fonctions constantes*.

## 1.2.8 Dérivation d'une fonction discontinue

On considère une fonction  $f \in C^1(] - \infty; a])$  et  $C^1([a; +\infty[)$ .  
On a  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , et on l'identifie à la distribution  $T_f$ . Alors :

$$(T_f)' = (f(a^+) - f(a^-))\delta_a + T_{\{f'\}}$$

où  $a^+ = \lim_{x \rightarrow a, x > a}$ ,  $a^- = \lim_{x \rightarrow a, x < a}$  et  $\{f'\}(x) = f'(x)$  pour  $x \neq a$ .

**Preuve**

**La preuve se fait par simples calculs :**

$$\begin{aligned}
 \langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle \\
 &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
 &= -\int_{-\infty}^a f(x)\varphi'(x)dx - \int_a^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
 &= -[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^a + \int_{-\infty}^a f'(x)\varphi(x)dx - [f(x)\varphi(x)]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\
 &= (f(a^+) - f(a^-))\varphi(a) + \int_{-\infty}^{+\infty} \{f'\}(x)dx
 \end{aligned}$$

### 1.3 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces vectoriels normés qui sont bien adaptés à la résolution de nombreux problèmes d'équations différentielles aux dérivés partielles. Pour des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  "assez réguliers" on montre la densité d'espaces de fonctions  $C^\infty$  dans certains espaces de Sobolev. Par ailleurs les problèmes concrets rencontrés en physique, mécanique, ... comportent en général des conditions au bord du domaine, ce qui nécessite l'introduction des espaces dit de "traces" des espaces de Sobolev.

Dans ce chapitre  $\Omega$  désigne un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

#### 1.3.1 Rappel sur les espaces de Lebesgue

#### 1.3.2 Définition

— Soit  $p$  un élément de  $[1, +\infty]$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ; on appelle **espace de Lebesgue**, et on note  $L^p(\Omega)$ , l'espace vectoriel des (classes de) fonctions numériques  $u$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ , Lebesgue mesurables, vérifiant :

1. Si  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty$
2. Si  $p = +\infty$ ,  $\sup_{x \in \Omega} |u(x)| < +\infty$ , où :  
 $\sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf\{M \mid |u(x)| \leq M \text{ p.p.}\}$

#### 1.3.3 Quelques propriétés

##### i L'application de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$ :

$$u \mapsto \begin{cases} \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx\right)^{1/p} \\ \|u\|_p = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad p = \infty \end{cases}$$

définit une norme sur  $L^p(\Omega)$ , norme pour laquelle  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach.

##### ii Inégalité de Hölder

Soit  $(p, q)$  un couple de  $[1, +\infty]^2$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  
L'application suivante :

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\mapsto \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \end{aligned}$$

est bilinéaire continue à valeurs dans  $L^1(\Omega)$ .  
De plus,

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

### iii Dual

Pour tout réel  $p$  dans  $[1, +\infty[$ , le dual de  $L^p(\Omega)$  est isomorphe algébriquement et topologiquement à  $L^q(\Omega)$ , avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , l'application de dualité est définie par :

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\mapsto \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \end{aligned}$$

Pour tout réel  $p$  dans  $]1, +\infty[$ , le bidual de  $L^p(\Omega)$ , ou encore le dual de son dual  $L^q(\Omega)$ , s'identifie algébriquement et topologiquement à  $L^p(\Omega)$ .  
On dit que l'espace  $L^p(\Omega)$  est **réflexif**.

### iv Théorème de densité (Séparabilité)

Pour  $p$  dans  $[1, \infty[$ , on démontré à la proposition I.4.1, que  $D(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$ . De plus,  $L^p(\Omega)$  est séparable. Pour  $(p, q, r)$  dans  $[1, +\infty]^3$ , vérifiant  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$ , la convolution est une application bilinéaire et continue de  $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^r(\mathbb{R}^n)$ .

#### 1.3.3.1 Espaces de Sobolev d'ordre 1

Les dérivés des fonctions envisagés sont prises au sens des distributions, si  $u$  appartient à  $L^p(\Omega)$ , on notera  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  au lieu de  $\frac{\partial}{\partial x_i}[u]$ , dérivé de la distribution régulière associé à la fonction  $u$ .

#### 1.3.3.2 Définition et premières propriétés

##### i Définition

Pour tout  $p$  un élément de  $[1, +\infty]$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle **espace de Sobolev** d'ordre 1, et on note  $W^{1,p}(\Omega)$  (**resp.**  $H^1(\Omega)$  si  $p = 2$ ), l'ensemble :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall i, 1 \leq i \leq n, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

##### ii Théorème

Pour tout  $p$  dans  $[1, +\infty]$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on a les propriétés suivantes :

1. L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour la norme :

$$u \mapsto \|u\| = \begin{cases} \left( \|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=0}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \in [1, \infty[, \\ \max \left( \|u\|_{L^\infty}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty} \mid 1 \leq i \leq n \right) & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

2. Pour  $p = 2$ ,  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v) \mapsto (u | v) = \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx.$$

3. Pour  $1 < p < +\infty$ , l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est réflexif.

4. Pour  $1 \leq p < +\infty$ , l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est séparable. \*

**Preuve**

1. On montre facilement que l'application  $\|\cdot\|$  est une norme. L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est complet pour cette norme.

En effet,

Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , une suite de Cauchy de  $W^{1,p}(\Omega)$ . Alors les suites  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $(\frac{\partial u_k}{\partial x_i})_{k \in \mathbb{N}}$ , sont de Cauchy dans  $L^p(\Omega)$ . Par suite, il existe  $(u, v_1, \dots, v_n)$  dans  $(L^p(\Omega))^{n+1}$ , vérifiant :

$u = L^p(\Omega) - \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$  et  $v_i = L^p(\Omega) - \lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{\partial u_k}{\partial x_i})$   $1 \leq i \leq n$ , ce qui entraîne :

$$u = \mathcal{D}'(\Omega) - \lim_{k \rightarrow \infty} u_k, v_i = \mathcal{D}'(\Omega) - \lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{\partial u_k}{\partial x_i}) \quad 1 \leq i \leq n.$$

Comme dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  la dérivé de la limite d'une suite qui converge est la limite de la suite des dérivés, on en déduit pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ . D'où  $u$  appartient à  $W^{1,p}(\Omega)$ , de plus  $u = W^{1,p}(\Omega) - \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k)$ .

(2) est évident.

(3) et (4) On considère l'application  $T$  définie par :

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow (L^p(\Omega))^{n+1},$$

$$u \longmapsto T(u) = \left( u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

. Alors  $W^{1,p}(\Omega)$  s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de  $(L^p(\Omega))^{n+1}$ .

Comme  $(L^p(\Omega))^{n+1}$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$ , on en déduit les propriétés souhaités.

### 1.3.3.3 Une caractérisation des éléments de $W^{1,p}(\Omega)$ et quelques propriétés

**Notation** On note  $\nabla$  l'opérateur gradient, soit  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ .

**i Théorème**

Soit  $p$  un réel,  $1 \leq p < +\infty$ .

Pour tout  $u$  de  $W^{1,p}(\Omega)$ , il existe une suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $D(\mathbb{R}^n)$ , vérifiant :

1.  $u = W^{1,p}(\Omega) - \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k \chi_{\Omega})$ ,

2. Pour tout  $\omega$ , ouvert d'adhérence compacte dans  $\Omega$  ( $\omega \subset\subset \Omega$ ), on a :

$$\nabla u \chi_{\omega} = (L^p(\omega))^n - \lim_{k \rightarrow \infty} (\nabla u_k) \chi_{\omega}.$$

**Preuve**

1. a. Soit  $\tilde{u}$  le prolongement nul à  $\mathbb{R}^n - \Omega$  de  $u$ , et  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une suite régularisante. Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$   $v_k = \rho_k * \tilde{u}$  appartient à  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , et  $\tilde{u} = L^p(\mathbb{R}^n - \lim_{k \rightarrow \infty} v_k)$ .
- b. Soit  $\omega \subset\subset \Omega$ , et  $\alpha$  un élément de  $D(\Omega)$  vérifiant  $\alpha \equiv 1$  dans un voisinage de  $\omega$  inclus dans  $\Omega$ , et  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

$$\exists K \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq K, \rho_k * (\widetilde{\alpha u}) = \rho_k * \tilde{u} \text{ sur } \omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\widetilde{\alpha u}) = L^p(\mathbb{R}^n) - \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k * \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha \tilde{u}) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = L^p(\omega) - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_k * \tilde{u}).$$

Pour approcher par des éléments de  $D(\mathbb{R}^n)$ , on effectue une "troncature" régulière. On considère une fonction  $\theta$  de  $D(\mathbb{R}^n)$  vérifiant les propriétés :

$$\begin{cases} 0 \leq \theta(x) \leq 1 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \\ \theta(x) \equiv 1 & \text{pour tout } x \in B(0, 1), \\ \theta(x) \equiv 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n - B(0, 2). \end{cases}$$

Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $\theta_k$  l'application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C} : x \mapsto \theta_k(x) = \theta(\frac{x}{k})$ . Alors  $(u_k = \theta_k v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite qui appartient à  $D(\mathbb{R}^n)$ , et qui vérifie les propriétés du théorème 1.3.3.3 - i.

#### Remarque

On obtiendra un autre théorème de densité avec des hypothèses supplémentaires sur  $\Omega$ , toujours vérifiées pour un intervalle de  $\mathbb{R}$  (**Th. 1.3.3.4 - ii**).

Du théorème 1.3.3.3 - i, on déduit la caractérisation suivante des éléments de  $L^p \Omega$  appartenant à  $W^{1,p}(\Omega)$  :

#### ii Proposition

Soit  $p$  un réel appartenant à  $]1, +\infty]$ . Pour tout  $u$  de  $L^p(\Omega)$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'application  $u$  appartient à  $W^{1,p}(\Omega)$ .
2. Soit  $q$  le réel vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

alors, on a

$$\exists C > 0, \forall \varphi \in D(\Omega), \forall 1 \leq i \leq n, \quad \left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq C \|\varphi\|_q.$$

3. On a la propriété :

$$\exists C > 0, \forall \omega \subset\subset \Omega, \forall h \in \mathbb{R}^n, |h| < \text{dist}(\omega, \mathbb{R}^n - \Omega) \implies \|\tau_h u - u\|_{(L^p(\Omega))^n}.$$

De plus dans (2) et (3) on peut choisir  $C = \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}$ .

#### Preuve

1  $\implies$  2. Pour tout  $\varphi$  de  $D(\Omega)$  :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \left| \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \right| = \left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q},$$

d'où on déduit (2).

2  $\implies$  1. Pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ , soit  $L_i$  l'application linéaire :

$$D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto L_i(\varphi) = \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

celle-ci est continue sur  $D(\Omega)$  muni de la topologie de  $L^q(\Omega)$ . De la densité de  $D(\Omega)$  dans  $L^q(\Omega)$ , on déduit que  $L_i$  admet un unique prolongement linéaire continu à  $L^q(\Omega)$ , d'où

$$\exists g_i \in L^p(\Omega), L_i(\varphi) = \int_{\Omega} g_i \varphi dx = \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \implies \frac{\partial u}{\partial x_i} = -g_i \in L^p(\Omega).$$

**1  $\implies$  3.** Soit  $u$  dans  $D(\mathbb{R}^n)$ ,  $h$  dans  $\mathbb{R}^n$ , l'application :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto v(t) = u(x - th)$ , vérifie l'égalité :  $u(x - h) - u(x) = \int_0^1 -h \nabla u(x - th) dt$ , ce qui entraîne :

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x - th)|^p dt.$$

Comme pour tout sous-ensemble ouvert  $\omega$ , d'adhérence compacte dans  $\Omega$ , pour tout  $h$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $|h| < \text{dist}(\omega, \mathbb{R}^n - \Omega)$ , il existe un ouvert  $\omega_1$ , d'adhérence compacte dans  $\Omega$ , tel que pour tout  $t$  de  $[0, 1]$  on ait :  $\omega - th \subset \omega_1$ , on peut en déduire :

$$\int_{\omega} |\tau_h u(x) - u(x)|^p dx \leq |h|^p \int_{\omega_1} |\nabla u(y)|^p dy \implies \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq |h| \|\nabla u\|_{L^p(\omega_1)}.$$

Pour tout réel  $p$ ,  $1 < p < \infty$ , on obtient le résultat pour tout  $u$  de  $W^{1,p}(\Omega)$ , en utilisant le théorème **1.3.3.3 - i**.

Pour  $p = +\infty$ , on applique le résultat précédent pour  $r < \infty$  et on fait tendre  $r$  vers  $+\infty$ .

**3  $\implies$  1.** On applique le résultat du fait que l'opérateur de dérivation est la limite d'un opérateur qui utilise un opérateur de translation, plus précisément :

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \text{supp}(\varphi) \subset \omega, \omega \subset \subset \Omega, \forall h \in \mathbb{R}^n, |h| \leq \text{dist}(\omega, \mathbb{R}^n - \Omega),$$

$$\forall u \in L^p(\Omega) \text{ on a } \int_{\Omega} u(x)(\varphi(x+h) - \varphi(x))\varphi(x)dx,$$

on déduit de **(3)** l'inégalité :

$$\left| \int_{\Omega} u(x) \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{|h|} dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}.$$

On établit quelques propriétés que l'on utilisera par la suite :

### iii Proposition (Dérivée d'un produit de composition)

Soit  $G$  un élément de  $C^1(\mathbb{R})$  vérifiant  $G(0) = 0$ , de dérivée bornée,  $p$  un réel,  $1 \leq p \leq \infty$ , alors on a :

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall i, 1 \leq i \leq n, \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

#### Preuve

Comme  $G'$  est bornée il existe  $M$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}, |G'(t)| \leq M$ .

1. On en déduit  $|G \circ u| \leq M |u| \implies G \circ u \in L^p(\Omega)$ .

2. Le résultat se déduit du théorème de convergence dominée de Lebesgue. En effet soit  $p$  un réel,  $1 \leq p < \infty$ , et  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $D(\mathbb{R}^n)$ , vérifiant les hypothèses du théorème **1.3.3.3 - i**.

Pour  $u_k$  on a quel que soit  $\varphi$  de  $D(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$  :

$$\int_{\Omega} G \circ u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} G' \circ u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \varphi dx,$$

d'où on déduit grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue le résultat :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (G \circ u) = G' \circ u \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

3. Si  $p = \infty$ , la restriction de  $u$  à tout compact  $\Omega$  appartient à un espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  avec  $1 \leq q < \infty$ , et on utilise (2) pour avoir la dérivation.

#### iv Proposition (Changement de variable)

Soit  $\Omega$  et  $O$ , deux(2) ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , et  $H$  une bijection de  $O$  sur  $\Omega$ , vérifiant :

$$H \in C^1(O), H^{-1} \in C^1(\Omega), \quad Jac(H) \in (L^\infty(O))^{n \times n}, Jac(H^{-1}) \in (L^\infty(\Omega))^{n \times n}.$$

Pour tout  $p$  vérifiant  $1 \leq p \leq \infty$ , l'application qui à  $u$  application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  associe  $u \circ H$  définit un isomorphisme algébrique et topologique de  $W^{1,p}(\Omega)$  sur  $W^{1,p}(O)$

**Preuve**

On note  $H = (H_j)_{1 \leq j \leq n}$ .

On raisonne comme pour démontrer la proposition 1.3.3.3 - iii pour établir l'égalité :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \frac{\partial}{\partial y_i} ((u \circ H)(y)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} (H(y)) \frac{\partial H_j}{\partial y_i} (y),$$

d'où on déduit :

$$\exists C > 0, \|u \circ H\|_{W^{1,p}(O)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (1)$$

Comme l'application qui à  $u$  associe  $u \circ H$  est linéaire, on déduit de l'inégalité (1), la continuité de cette application de  $W^{1,p}(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(O)$ . On obtient l'isomorphisme en montrant la même propriété au moyen de la composition par  $H^{-1}$  (Il suffit que  $H$  soit **lipschitzienne** pour avoir le résultat de la proposition).

#### 1.3.3.4 Théorème de prolongement et de densité

On veut établir un théorème de densité qui nécessite d'imposer des hypothèses de "régularité" sur  $\Omega$  et son bord.

##### i Définition (1-prolongement)

Soit un réel  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . On dit que l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  vérifie la propriété de **1-prolongement**, s'il existe une application  $P$  linéaire et continue de  $W^{1,p}(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , vérifiant :

1. Si  $\chi_\Omega$  désigne la fonction caractéristique de  $\Omega$ ,

$$P(u)\chi_\Omega = u, \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

2. Il existe  $C > 0, \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$ .
3. Il existe  $C > 0, \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ .

**Exemples**

1. Tout segment de  $\mathbb{R}$  vérifie la propriété de 1-prolongement.
2. Un demi-espace possède la propriété de 1-prolongement, plus précisément si on note  $\mathbb{R}^{n+}$  l'ensemble :

$$\mathbb{R}^{n+} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0 \right\},$$

l'application définie sur  $W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+})$  par :

$$u \mapsto P(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto P(u)(x) = \begin{cases} u(x', x_n), & x_n > 0 \\ u(x', -x_n), & x_n < 0 \end{cases}$$

vérifie les hypothèses de la définition 1.3.3.4 - i.

3. Pour un ouvert de  $\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}^{n+}$ , on peut se servir d'une partition de l'unité et de la proposition 1.3.3.3 - iv, pour ramener localement le bord de  $\Omega$  sur l'hyperplan  $x_n = 0$ , ce qui impose des hypothèses sur le bord.
4. Une boule euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ , un pavé de  $\mathbb{R}^n$ , possèdent la propriété de 1-prolongement.
5. Dans  $\mathbb{R}^2$ , un disque moins un rayon n'a pas la propriété de 1-prolongement.

**ii Théorème (Densité)**

Soit un réel  $p, 1 \leq p < \infty, \Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  possédant la propriété de 1-prolongement ; alors  $D(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $W^{1,p}(\Omega)$ . Plus précisément :

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \exists (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D(\mathbb{R}^n), \quad u = W^{1,p}(\Omega) - \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k \chi_\Omega)$$

**Preuve**

1. Soit  $P$  l'opérateur de 1-prolongement de  $W^{1,p}(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .
2. Soit  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}^*}, (\theta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ , une suite régularisante, tronquante (Th.1.3.3.3 - i), alors :

$$u_k = \theta_k(\rho_k * P(u)) \in D(\mathbb{R}^n),$$

vérifie

$$u = W^{1,p}(\Omega) - \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k).$$

**Exemples**

1. Pour tout réel  $p, 1 \leq p < \infty, D(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .
2. Pour un intervalle  $I$  borné de  $\mathbb{R}, D(I)$  n'est pas dense dans  $W^{1,p}(I)$ .

**1.3.3.5 Espace de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega)$**

Soit  $p$  un réel,  $1 \leq p < \infty$ .

Quelque soit  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n, D(\Omega)$  est un sous-ensemble de  $W^{1,p}(\Omega)$ . On peut facilement montrer que pour  $I = ]a, b[ (-\infty < a < b < +\infty)$ , intervalle de  $\mathbb{R}, D(I)$  n'est pas dense dans  $W^{1,p}(I)$ . Pour de nombreux ouverts  $D(\Omega)$  n'est pas dense dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , aussi introduit-on de nouveaux espaces de Sobolev.

**i Définition**

Quel que soit le réel  $p, 1 \leq p < \infty$ , on appelle **espace de Sobolev**, et on note :  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , l'adhérence de  $D(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$  (resp.  $H_0^1(\Omega)$  si  $p = 2$ ).

**ii Propriétés**

Comme  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est fermé dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , muni de la topologie induite c'est un espace de Banach séparable il est de plus réflexif pour tout réel  $p$  vérifiant  $1 < p < \infty$ .

**iii Proposition**

Soit  $p$  un réel,  $1 \leq p < \infty, I$  un intervalle de  $\mathbb{R}, u$  un élément de  $W^{1,p}(I)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'application  $u$  appartient à  $W_0^{1,p}(I)$ .
2. L'application  $u$  vérifie  $u = 0$  au bord de  $I$ .

Avant de démontrer la proposition, on prouve le lemme suivant :

**iv Lemme**

Soit  $I$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ . Alors pour tout  $u$  de  $W^{1,p}(I)$ , il existe  $v$  vérifiant :

1. L'application  $v$  appartient à  $C(\bar{I})$ ,
2. L'application vérifie

$$v = u \quad p.p \text{ sur } I,$$

3. Pour tout  $(x, y)$  de  $\bar{I}^2$ ,

$$v(x) - v(y) = \int_x^y u'(t) dt$$

**Preuve**

Soit  $x_0$  un élément de  $I$ , et  $w$  l'application :

$$\begin{aligned} \bar{I} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto w(x) = \int_{x_0}^x u'(t) dt. \end{aligned}$$

Alors dans  $D'(I)$ ,

$$u' = w',$$

d'où comme  $I$  est un intervalle,

$$\exists C \in \mathbb{C} \implies w = u + C \quad p.p. \text{ sur } I \implies v = w - C$$

vérifie  $v = u$  p.p.

et

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad v(x) - v(y) = \int_y^x u'(t) dt.$$

De plus  $v$  appartient à  $C(\bar{I})$ , alors on identifie  $u$  à son représentant continu.

**Remarque**

Si  $I = ]a, b[$ , un intérêt de ce lemme est de montrer que tout élément de  $W^{1,p}(I)$  admet un représentant continu sur  $\bar{I}$ , et de pouvoir parler de  $u(a)$ , et de  $u(b)$ .

**Démonstration de la proposition 1.3.3.5 - iii :**

**1  $\implies$  2.** Pour tout  $u$  de  $W_0^{1,p}(I)$ , il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $D(I)$  telle que :  $u = L^\infty(I) - \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$  (Ex. III.7). Or  $u, u_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , appartiennent à

$C(\bar{I})$ . Si  $I = ]a, b[$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ , ceci entraîne  $u(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(a) = 0 = u(b)$ . Si  $a$  ou  $b$  ne sont pas finis, on a vu à l'exercice III.8, que l'on a :  $\lim_{\infty}(u) = 0$ .

2  $\implies$  1. Soit  $G$  une fonction de  $C^1(\mathbb{R})$  vérifiant  $|G(t)| \leq |t| \forall t \in \mathbb{R}$  et :

$$G(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leq 1 \\ t, & |t| \geq 2. \end{cases}$$

Soit  $u$  de  $W^{1,p}(I)$ ,  $u = 0$  au bord de  $I$ .  
On note pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \frac{1}{n}G(nu).$$

Alors  $u_n$  appartient à  $W^{1,p}(I)$ , et

$$\text{supp}(u_n) \subset \left\{ x \in I \mid |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

est un compact de  $I$ .  
De plus comme,

$$(G \circ u)' = (G' \circ u)u',$$

et que  $G'$  est bornée on montre que :  $u = W^{1,p}(I) - \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ , puis par un procédé de régularisation que  $u_n$  est limite d'éléments de  $D(I)$ .

Une propriété analogue n'est pas vraie pour tout ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Le résultat suivant fournit des applications intéressantes :

#### Notation

Soit  $h$  de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant  $|h| = 1$ ,  $a$  et  $b$  réels vérifiant  $-\infty < a < b < +\infty$ . On appelle **bande** de  $\mathbb{R}^n$  d'épaisseur  $b - a$ , dans la direction  $h$ , et on note :

$$Bd(h) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < \langle x, h \rangle < b\}.$$

#### v Inégalité de Poincaré

Soit  $p$  un réel,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  inclus dans la bande  $Bd(h)$  ; alors on a :

$$\exists C > 0, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \implies C \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}.$$

Il en découle de façon triviale le corollaire suivant :

#### vi Corollaire

Soit  $p$  un réel,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  inclus dans une bande ; alors l'application de :

$$W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+, u \mapsto \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n},$$

définit sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  une norme équivalente à celle de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

#### Preuve (proposition 1.3.3.5 - v)

1. Pour tout  $v$  de  $D(\Omega)$ ,  $v(x + th) = \int_a^t \langle \nabla v(x + \tau h), h \rangle d\tau$ . De l'inégalité de Swarz on déduit pour  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  :

$$|v(x + th)|^p \leq (t - a)^{\frac{p}{q}} \int_a^t |\nabla v(x + \tau h)|^p d\tau,$$

(resp.  $|v(x + th)| \leq \int_a^b |\nabla u(x + \tau h)| d\tau$  si  $p = 1$ ). Soit  $P$  l'hyperplan orthogonal à  $h$ ; alors pour toute fonction  $f$  de support dans  $\Omega$ , prolongée par 0 hors de  $\Omega$ , on a :  $\int_{\Omega} |f(y)|^p dy = \int_a^b \int_P |f(x + \tau h)|^p dx d\tau$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(\Omega)} &\leq \frac{(b-a)^{\frac{p}{q}+1}}{1+\frac{p}{q}} \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}, 1 < p < \infty, \\ \|v\|_{L^1(\Omega)} &\leq (b-a) \|\nabla u\|_{(L^1(\Omega))^n}, p = 1 \end{aligned}$$

## 1.4 Les EDP linéaires du 2<sup>nd</sup> ordre

Ce sont les EDP de la forme

$$F(x, t, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad \left\| \begin{array}{l} u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

où  $F$  est une **relation** entre les variables  $x, t, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ .

— Une équation **quasi-linéaire** du ordre 2 est de la forme

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (2)$$

C'est une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction inconnue  $u = u(x, y)$ .

— Une équation **linéaire** d'ordre 2 est de la forme

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F.u = g(x, y) \quad (3)$$

C'est une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre 1 et 2 et à la fonction inconnue  $u$

où  $A, B, C, D, E, F$  et  $g$  sont des fonctions de variables  $x$  et  $y$  de classe  $C^2$  dans un domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

Si dans (3), la fonction  $g$  est nulle, on dit alors que l'équation est **linéaire homogène**.

### 1.4.0.1 Classification des EDP linéaires du 2<sup>nd</sup> ordre

On appelle discriminant  $\Delta$  associé à l'équation (2) (ou (3)), l'expression

$$\Delta = B^2 - AC.$$

Le type de l'EDP linéaire ou quasi-linéaire du 2<sup>nd</sup> ordre dépend du signe du discriminant  $\Delta$  :

— **Type élliptique** ( $\Delta < 0$ )

Les équations de type **élliptique** interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est-à-dire n'évoluant pas au cours du temps).

**Exemple**

L'équation de **Laplace**

$$-\Delta u = f \quad \left\| \begin{array}{l} u(x) \text{ fonction inconnue} \\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ f \text{ une fonction donnée.} \end{array} \right.$$

— **Type parabolique** ( $\Delta = 0$ )

Les équations de type **parabolique**, qui modélisent souvent l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles associés à des processus de diffusion.

**Exemple**

L'équation de la **chaleur**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \left\| \begin{array}{l} u(x, t) \text{ fonction inconnue} \\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ t \geq 0 \text{ le temps} \\ f \text{ une fonction donnée.} \end{array} \right.$$

— **Type hyperbolique** ( $\Delta > 0$ )

Les équations de type **hyperbolique** qui modélisent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation d'ondes.

**Exemples**

— **Équation du transport**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \left\| \begin{array}{l} u(x, t) \text{ fonction inconnue} \\ x \in \mathbb{R} \\ t \geq 0 \text{ le temps} \\ c \text{ une constante.} \end{array} \right.$$

— **Équation des ondes**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \left\| \begin{array}{l} u(x, t) \text{ fonction inconnue} \\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ t \geq 0 \text{ le temps} \\ f \text{ une fonction donnée.} \end{array} \right.$$

### 1.4.1 Condition aux limites d'une EDP

Se donner les conditions aux limites, c'est donner des renseignements sur la fonction  $u$  ou ses dérivées sur le bord du domaine. Ils peuvent être de différents types, voyons les principaux :

#### 1.4.1.1 Condition de Dirichlet

En mathématique, une condition aux limites de **Dirichlet** est imposée à une équation différentielle ordinaire (EDO) ou à une EDP lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine.

Pour une équation différentielle ordinaire, par exemple

$$y' - y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle  $[a, b]$  s'exprime par

$$y(a) = \alpha \quad y(b) = \beta$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux valeurs données.

Pour une EDP, par exemple

$$\Delta u + u = 0$$

où  $\Delta$  est le **Laplacien**, la condition aux limites de Dirichlet sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  s'exprime par

$$u(x) = f(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où  $f$  est une fonction connue, définie sur la frontière  $\partial\Omega$ .

### 1.4.1.2 Condition de Neumann

En mathématique, une condition aux limites de **Neumann** est imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une EDP lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine. Pour une équation différentielle ordinaire, par exemple

$$y'' - y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle  $[a, b]$  s'exprime par

$$y'(a) = \alpha \quad y'(b) = \beta$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux valeurs données.

Pour une EDP, par exemple

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \Delta u = 0$$

où  $\Delta$  est le **Laplacien**, la condition aux limites de Neumann sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  s'exprime par

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = f(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où  $f$  est une fonction connue, définie sur la frontière  $\partial\Omega$

$\vec{n}$  est le vecteur normal à la frontière  $\partial\Omega$

La dérivée normale dans le membre de gauche de l'équation, est définie par

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{\text{grad}} u(x) \cdot \vec{n}(x)$$

### 1.4.1.3 Condition de Robin

En mathématique, une condition aux limites de **Robin** (ou de **3<sup>ème</sup> type** ou encore de **Fourier**) est imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une EDP lorsque l'on donne une relation linéaire entre les valeurs de la fonction inconnue et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine.

**Autrement dit**, la condition aux limites de **Robin** est une combinaison pondérée d'une condition aux limites de **Neumann** et de **Dirichlet**.

Si  $\Omega$  est un domaine dans lequel une équation doit être résolue, et si  $\partial\Omega$  désigne le bord du domaine, la condition aux limites de **Robin** est de la forme

$$au + b \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où  $a$ ,  $b$  et  $g$  sont des fonctions définies sur  $\partial\Omega$

$u$  est la solution définie dans  $\Omega$  que l'on cherche à déterminer

$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$  désigne la dérivée par rapport à la normale extérieure sur le bord.

En dimension 1, si, par exemple,  $\Omega = [0, 1]$ , la condition aux limites de **Robin** s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} au(0) - bu'(0) &= g(0), \\ au(1) + bu'(1) &= g(1). \end{aligned}$$

## 1.5 Théorie des semi-groupes

### 1.5.1 Définition d'un $C_0$ semi-groupe

**Définition 1.5.1.** Soit  $E$  un espace de Banach, une famille à un paramètre  $G(t)$ ,  $0 \leq t < +\infty$  d'éléments de  $\mathcal{L}(E)$  est appelée semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur  $E$  si :

1.  $G(0) = I$
2.  $G(t + s) = G(t).G(s) \forall t, s \geq 0$

- Un tel semi groupe est dit uniformément continu si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|G(t) - I\| = 0$$

On dit dans ce cas que  $G(t)$  est un  $C_0$  semi groupe [1].

### 1.5.2 Générateur Infinitésimal

**Définition 1.5.2.** Le générateur infinitésimal  $A$  d'un  $C_0$ -semi groupe  $S(t)$  est définie par :

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [S(t)x - x]$$

De domaine :

$$D(A) = \left\{ x \in H, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [S(t)x - x] \text{ existe} \right\}$$

### 1.5.3 Théorème de Hille-Yosida

Soit  $A$  un opérateur linéaire (non nécessairement borné) dans un espace de Banach  $E$ . Alors  $A$  est générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi-groupe de contraction si et seulement si :

1.  $A$  est fermé à domaine dense.
2. L'ensemble résolvant  $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A \text{ est inversible de } D(A) \rightarrow E\}$  contient  $\mathbb{R}_+$ , de plus  $\forall \lambda > 0$ , on a

$$\|R(\lambda, A)\| = \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

### 1.5.4 Théorème de Lumer-Philips

Soit  $A$  un opérateur linéaire à domaine dense dans un espace de Banach  $E$ , alors :

1. Si  $A$  est dissipatif et qu'il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que  $Im(\lambda_0 I - A) = E$  Alors  $A$  est générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi-groupe de contraction.
2. Si  $A$  est générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi-groupe de contraction Alors  $Im(\lambda_0 I - A) = E$ , et  $\lambda_0 > 0$  et  $A$  est dissipatif.

De plus :  $\forall x \in D(A)$ ,  $\forall x^* \in F(x)$  :

$$Re \langle x^*, Ax \rangle \leq 0$$

### 1.5.5 Démonstration du théorème de Lumer-Philips

**Preuve 1.** ([1],[9])

*i/-*  $A$  dissipatif  $\implies \|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \cdot \|x\|$ ,  $\forall x \in D(A) \implies \lambda I - A$  injectif  
En particulier pour  $\lambda_0$  :

- $\lambda_0 I - A$  est bijectif et de plus :  $\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$   
donc  $(\lambda_0 I - A)^{-1}$  borné et continue et  $A$  est fermé.

En utilisant le théorème de Hille-Yosida, on en déduit que  $A$  est G.I d'un  $\mathcal{C}_0$  semi-groupe de contraction. (Car  $\frac{1}{\lambda_0} < 1$ )

- $\Lambda = \{\lambda > 0 : \text{Im}(\lambda I - A) = E\} \subset ]0, +\infty[$ .

$$\lambda \in \Lambda \implies \lambda \in \rho(A) \implies \exists \underbrace{V(\lambda)}_{\text{ouvert}} \subset \rho(A)$$

D'où  $V(\lambda) \cap ]0, +\infty[ \subset \rho(A)$  est un voisinage de  $\lambda$  dans  $]0, +\infty[$  et  $\Lambda$  est ouvert

- On démontre que  $\Lambda$  est fermé : Soit  $\lambda_n \in \Lambda$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$   
étant donné :  $y \in E$ ,  $\forall n, \exists x_n \in D(A) / \lambda x_n - Ax_n = y$  d'après la surjectivité On a  $\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n} \cdot \|y\| \leq C$ . de plus

$$\begin{aligned} A_m \|x_n - x_m\| &\leq \|\lambda_m(x_n - x_m)\| - \|A(x_n - x_m)\| \\ &= |\lambda_n - \lambda_m| \cdot \|x_m\| \\ &\leq C |\lambda_n - \lambda_m| \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} \lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m) &= \lambda_m x_n - Ax_n - \underbrace{\lambda_m x_m - Ax_m}_y \\ &= \lambda_m \cdot x_n - \lambda_n \cdot x_n - y \end{aligned}$$

$\lambda_n$  étant une suite de Cauchy donc  $x_n$  est une suite de Cauchy, et on a  $x_n \xrightarrow{C.V} x$

$$\begin{cases} Ax_n = -y + \lambda x_n \longrightarrow -y + \lambda x \\ x_n \longrightarrow x \end{cases} \quad A \text{ fermé} \implies x \in D(A) \text{ et } Ax = -y + \lambda x$$

$$\implies \lambda \in \Lambda$$

C.S :  $\text{Im}(\lambda I - A) = E$ ,  $\forall \lambda > 0$ .

$A$  dissipatif  $\implies \text{Im}(\lambda I - A)$  injectif  $\forall \lambda > 0 \implies (\lambda I - A)^{-1}$  existe et

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Le théorème m de H.Y  $\implies A$  est G.I d'un  $\mathcal{C}_0$   $\frac{1}{2}$ -groupe de contraction.

- Reste à montrer :  $\text{Re} \langle x^*, Ax \rangle \leq 0$

$$x \in D(A), \quad x^* \in F(x)$$

$$\begin{aligned} |\langle G(t)x, x^* \rangle| &\leq \|G(t)x\| \cdot \|x^*\| \\ &\leq \|x\| \cdot \|x^*\| = \|x\|^2 \\ \langle G(t)x - x, x^* \rangle &= \langle G(t)x, x^* \rangle - \underbrace{\langle x, x^* \rangle}_{\|x\|^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc  $\operatorname{Re} \langle G(t)x - x, x^* \rangle \leq 0$ . On dérive par  $t > 0$  et on fait tendre  $t \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle < 0.$$

**Corollaire 2.** Soit  $A$  fermé à domaine dense si  $A$  et  $A^*$  sont deux opérateurs continus dissipatifs, alors :  $A$  est G.I d'un  $C_0$  semi-groupe de contraction.

**Preuve 3.**  $\lambda = 1$ ,  $\operatorname{Im}(I - A) = E$ , On suppose que  $\operatorname{Im}(I - A) \neq E$ , on applique le théorème de Hahn Banach. comme  $\operatorname{Im}(I - A)$  est un sous espace vectoriel fermé de  $E$  :

$$\begin{aligned} \exists x^* \in E^*, x^* \neq 0 \quad \text{et} \quad x^*(\operatorname{Im}(I - A)) = \{0\} \\ x^* \in D(A^*) \quad \text{et} \quad \langle x^* - Ax^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

$D(A)$  dense alors  $x^* - Ax^* = 0$

$A^*$  dissipatif donc  $I - A^*$  est injectif et  $(I - A^*)x^* = 0$  implique que  $x^* = 0$ , on aboutit donc à une contradiction et  $\operatorname{Im}(I - A) = E$

## 1.6 Séries de Fourier

### 1.6.1 Quelques Notions

#### 1.6.1.1 Définition

On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est **périodique** de période  $T > 0$  si

$$f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

#### 1.6.1.2 Lemme

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction périodique de période  $T$ . Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx$$

**Preuve**

Désignons par  $k$  l'entier pour lequel,  $a \in [kT, (k+1)T]$ . Puisque  $f$  est périodique, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) dx &= \int_0^T f(x + kT) dx = \int_{kT}^{(k+1)T} f(y) dy \\ &= \int_{kT}^a f(y) dy + \int_a^{(k+1)T} f(y) dy \\ &= \int_{kT}^a f(y + T) dy + \int_a^{(k+1)T} f(y) dy \\ &= \int_{(k+1)T}^{a+T} f(z) dz + \int_a^{(k+1)T} f(y) dy = \int_a^{a+T} f(t) dt \end{aligned}$$

**conséquence**

- Si  $f$  est paire ( $f(-x) = f(x)$ , pour tout  $x$ ), alors on a

$$\int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

- Si  $f$  est impaire ( $f(-x) = -f(x)$ , pour tout  $x$ ), alors on a

$$\int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = 0$$

### 1.6.2 Définitions et calcul formel

Observons que d'abord si  $g(x)$  est périodique de période  $T$ , alors la fonction  $f(x) = g(\frac{T}{2\pi}x)$  est périodique de période  $2\pi$ . Nous pouvons donc nous limiter au cas  $T = 2\pi$ .

#### 1.6.2.1 Définition

Étant donnée une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  périodique de période  $2\pi$  et bornée, on appelle **coefficients de Fourier complexes** de  $f$  les nombres complexes définis par

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx. \quad (1.6.1)$$

On appelle **série de Fourier** de  $f$ , la série formelle

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_k e^{ikx}. \quad (1.6.2)$$

#### Remarque

Ici il est important d'expliciter la notation.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n z_k.$$

Donc, pour une série de Fourier, les sommes partielles qui nous intéressent sont de la forme

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \tilde{f}_k e^{ikx}. \quad (1.6.3)$$

Une fonction périodique de ce type sera appelée **polynôme trigonométrique** d'ordre  $n$ . L'ensemble de ces polynômes est noté  $\mathcal{T}_n$ .

#### Remarque

- a) Si  $\bar{f}$  désigne le conjugué complexe de  $f$ , alors on a

$$\overline{\tilde{f}_k} = \tilde{\bar{f}}_{-k}. \quad (1.6.4)$$

- b) Si  $f$  est une fonction à valeurs réelles, on peut décomposer le calcul de  $\tilde{f}_k$  comme suit

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx - i\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$

Posons

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx. \end{cases} \quad (1.6.5)$$

Les coefficients  $a_k, b_k$  sont appelés **coefficients de Fourier réels de  $f$**  et, en vertu de 1.6.4, on a les relations

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 &= \frac{1}{2}a_0 \\ \tilde{f}_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ a_k &= \tilde{f}_k + \tilde{f}_{-k}, \\ b_k &= i(\tilde{f}_k - \tilde{f}_{-k}), \\ a_{-k} &= a_k, \\ b_{-k} &= -b_k. \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

c) Si  $f$  est à valeurs réelles, on peut écrire les sommes partielles de la série complexe (1.6.2) sous la forme

$$\begin{aligned} S_n &= \tilde{f}_0 + \sum_{k=1}^n (\tilde{f}_{-k}e^{-ikx} + \tilde{f}_k e^{ikx}) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx). \end{aligned}$$

Donc, dans le cas réel, on peut remplacer la série de Fourier par la série trigonométrique,

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx). \tag{1.6.7}$$

### 1.6.3 Les périodes quelconques, les fonctions paires et impaires

#### 1.6.3.1 Les fonctions paires

Soit  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction paire. Alors  $f(x)\sin(kx)$  est impaire et par la conséquence du lemme 1.6.1.2, on obtient que

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = 0,$$

De même, comme  $f(x)\cos(kx)$  serait paire dans ce cas, alors

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx.$$

Il en découle que

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2}a_k = \frac{1}{2}a_{-k} = \tilde{f}_{-k},$$

et que les coefficients de Fourier complexes sont réels et symétriques en  $k$ .

#### 1.6.3.2 Les fonctions impaires

Soit  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction impaire. Alors  $f(x)\cos(kx)$  est impaire et par la conséquence du lemme 1.6.1.2, on obtient que

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = 0.$$

Comme  $f(x)\sin(kx)$  serait paire dans ce cas, alors

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\cos(kx)dx.$$

Il en découle que

$$\tilde{f}_k = -\frac{ib_k}{2} = i\frac{b_{-k}}{2} = -\tilde{f}_{-k},$$

et que les coefficients de Fourier complexes sont imaginaires et anti-symétriques en  $k$ .

### 1.6.3.3 Les périodes quelconques

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est périodique de période  $T$ , les coefficients de Fourier sont définis comme étant les coefficients de Fourier de  $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$ . Ceci conduit aux formules suivantes,

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\frac{T}{2\pi}x)e^{-ikx} dx.$$

Posons  $y = \frac{T}{2\pi}x$ , on a  $dx = \frac{2\pi}{T}dy$ , donc

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(y)e^{-ik\frac{2\pi}{T}y} dy.$$

De même

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(y)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}y\right) dy, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(y)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}y\right) dy.$$

**Définition (Noyau de Dirichlet)**

On appelle **noyau de Dirichlet** le polynôme trigonométrique réel d'ordre  $n$ , notée  $D_n$  dont tous les coefficients sont égaux à  $\frac{1}{2\pi}$ , c'est-à-dire

$$D_k(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-k}^k e^{-ijz}. \tag{1.6.8}$$

En posant  $w = e^{-iz}$ , on peut calculer la somme (série géométrique)

$$\begin{aligned} D_k(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-k}^k w^j = \frac{1}{2\pi} \frac{w^{k+1} - w^{-k}}{w - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{w^{k+\frac{1}{2}} - w^{-(k+\frac{1}{2})}}{w^{\frac{1}{2}} - w^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((k+\frac{1}{2})z)}{\sin(\frac{z}{2})}. \end{aligned}$$

Au final,

$$D_k(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((k+\frac{1}{2})z)}{\sin(\frac{z}{2})}.$$

Par ailleurs,

$$\int_{-pi}^{pi} D_k(z)dz = \frac{1}{2\pi} \left( 2\pi + \sum_{j=-k}^{-1} \frac{i}{j}((-1)^j - 1) + \sum_{j=1}^k \frac{i}{j}((-1)^j - 1) \right) = 1$$

**Lemme (Riemann-Lebesgue)**

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est intégrable, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{itx} dx = 0.$$

**Preuve**

On procède par trois(3) étapes :

a) Supposons que  $f \equiv f_0$  constante.

$$\int_a^b f(x) e^{itx} dx = f_0 \left( \frac{i}{t} \right) (e^{itb} - e^{ita}).$$

Donc

$$\left| \int_a^b f(x) e^{itx} dx \right| \leq 2 \frac{f_0}{t} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

b) Supposons que  $f$  est une fonction en escalier. Plus précisément, étant donnée une partition de  $[a, b]$ ,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

on suppose que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k (H_{x_k}(t) - H_{x_{k+1}}(t)),$$

avec  $f_j$  constantes. En prenant le raisonnement précédent, nous obtenons cette fois,

$$\int_a^b f(x) e^{itx} dx = \left( \frac{i}{t} \right) \sum_{k=0}^{n-1} f_k (e^{itx_{k+1}} - e^{itx_k}),$$

d'où

$$\left| \int_a^b f(x) e^{itx} dx \right| \leq \frac{2}{t} \sum_{k=0}^n |f_k| \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

c) Supposons maintenant que  $f$  est intégrable et à valeurs réelles. Pour  $\epsilon$  donné, on peut trouver une partition

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

pour laquelle, si  $\underline{S}$  désigne la somme inférieure, c'est-à-dire

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) \right) (x_{k+1} - x_k),$$

On a

$$\underline{S} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underline{S} + \epsilon. \tag{1.6.9}$$

Mais,  $\underline{S}$  est l'intégrale de la fonction en escalier,

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) \right) (x_{k+1} - x_k) (H_{x_k}(x) - H_{x_{k+1}}(x)),$$

et on peut réécrire (1.6.9) sous la forme

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx \leq \epsilon. \tag{1.6.10}$$

Puisque  $\psi$  est une fonction en escalier, il existe  $T > 0$  pour lequel,

$$\left| \int_a^b \psi(x)e^{itx} dx \right| < \epsilon, \quad \forall t > T, \quad (1.6.11)$$

Ainsi,

$$\left| \int_a^b f(x)e^{itx} dx \right| < \left| \int_a^b \psi(x)e^{itx} dx \right| + \left| \int_a^b (f(x) - \psi(x))e^{itx} dx \right|,$$

En combinant l'inégalité triangulaire, (1.6.10) et (1.6.11), on obtient

$$\forall t > T, \quad \left| \int_a^b f(x)e^{itx} dx \right| < 2\epsilon.$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

d) Si  $f$  est à valeurs complexe, il suffit d'appliquer le résultat précédent aux parties réelle et imaginaire de  $f$ .

**Théorème (Convergence ponctuelle de Dirichlet)**

Si  $f$  et  $f'$  sont périodiques et continues par morceaux sur  $[0, 2\pi]$ , alors la série de Fourier de  $f$  est convergente et

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_k e^{ikx} = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)). \quad \left\| \begin{array}{l} f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \\ f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x-h) \end{array} \right.$$

**Preuve**

Nous avons que

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n \tilde{f}_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{ik(x-y)} dy,$$

ou encore

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} \right) dy.$$

Faisons le changement de variable,  $y = z + x$  et utilisons la périodicité pour obtenir,

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz.$$

Puisque  $D_n$  est une fonction paire,  $S_n$  peut aussi s'écrire comme suit

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z)D_n(z)dz.$$

En faisant la moyenne, on obtient

$$S_n(x) = \frac{1}{2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z)D_n(z)dz + \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz \right)$$

Pour chaque  $x$  fixé,  $(f(x-z) + f(x+z))D_n(z)$  est une fonction paire et on pouvons donc écrire

$$S_n(x) = \left( \int_0^{\pi} f(x-z)D_n(z)dz + \int_0^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz \right) = I_n + J_n.$$

Examinons le comportement de  $I_n$ , l'étude de celui de  $J_n$  est en tout point identique.

$$I_n = \int_0^\pi f(x-z)D_n(z)dz = \int_0^\pi (f(x-z) - f(x^-))D_n(z)dz + \frac{1}{2}f(x^-).$$

Soit  $\delta > 0$  donné, la fonction  $\frac{f(x-z)-f(x^-)}{\sin(\frac{z}{2})}$  est intégrable sur  $[\delta, \pi]$  donc, d'après du lemme de **Riemann-Lebesgue**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\delta f(x-z)D_n(z)dz = \int_0^\pi (f(x-z) - f(x^-))D_n(z)dz + \frac{1}{2}f(x^-).$$

Soit  $\epsilon > 0$  donné, comme  $f'(x^-)$  existe, il existe  $\delta > 0$  qui dépend de  $x$  et  $\epsilon$  tel que,

$$z \in [0, \delta] \implies \left| \frac{1}{z}(f(x-z) - f(x^-)) - f'(x^-) \right| < \epsilon.$$

Ceci implique que, pour  $\delta$  assez petit, la fonction  $\frac{1}{z}(f(x-z) - f(x^-))$  est intégrable sur  $[0, \delta]$ , tout comme la fonction  $h(z) = \frac{\frac{z}{2}}{\sin(\frac{z}{2})}$ . D'après le lemme de **Riemann-Lebesgue** on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\delta (f(x-z) - f(x^-))D_n(z)dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \frac{1}{z}(f(x-z) - f(x^-))h(z)\sin((n + \frac{1}{2})z)dz = 0,$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2}f(x^-).$$

De la même façon,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{1}{2}f(x^+).$$

## 1.7 Fonctions de Bessel

### 1.7.1 Equations et fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel découvertes par le mathématicien suisse Daniel Bernouilli, portent le nom de Friedrich Bessel et sont les solutions  $y$  de l'équation différentielle de Bessel :

$$x \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + (m^2 x^2 - k^2)y = 0$$

Cette équation est équivalente à :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left( m^2 - \frac{k^2}{x^2} \right) y = 0 \tag{1.7.1}$$

où  $k$  est un nombre réel ou complexe .

Il existe deux sortes de fonctions de Bessel [23] :

- Les fonctions de Bessel d'ordre  $k$  de 1<sup>re</sup> espèce notées  $J_k$  qui sont définies en 0 :

$$J_k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}, \tag{1.7.2}$$

- Les fonctions de Bessel du second espèce  $Y_k$  définies par :

$$Y_k(x) = \lim_{\nu \rightarrow k} \left( \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)} \right) \tag{1.7.3}$$

Les solutions  $Y_k$  ne sont pas définies en 0 , et on a (cf.[23]) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_k(x) = -\infty \quad (1.7.4)$$

La forme générale des solutions de (1.7.1) s'écrit :

$$y(x) = AJ_k(mx) + BY_k(mx) \quad (1.7.5)$$

## 1.7.2 Quelques propriétés des fonctions de Bessel de 1<sup>re</sup> espèce

### 1.7.2.1 Les fonctions de Bessel d'ordre négatif

Les fonctions de Bessel d'ordre négatif sont définies par :

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x), \quad k > 0$$

### 1.7.2.2 Dérivées des fonctions de Bessel $J_k(x)$

$$\frac{d}{dx}[x^k J_k(mx)] = mx^k J_{k-1}(mx) \quad (1.7.6)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-k} J_k(mx)] = -mx^{-k} J_{k+1}(mx) \quad (1.7.7)$$

$$\frac{d}{dx}[J_k(mx)] = -mJ_{k+1}(mx) + \frac{k}{x} J_k(mx) \quad (1.7.8)$$

### 1.7.2.3 Développement en séries de puissance des fonctions de Bessel

$$J_k(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1)} \left( 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}}{p!(k+1)\dots(k+p)} \right)$$

### 1.7.2.4 Approximation asymptotique des fonctions de Bessel( $x \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} J_k(x) & \simeq \sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)} \left[ \left( 1 - \frac{(4k^2 - 1^2)(4k^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2}\right) \right. \\ & \left. - \left( \frac{(4k^2 - 1^2)}{18x} - \dots \right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Des deux dernières séries , on conclut que :

- Pour  $x$  grand (au voisinage de  $\infty$ ) , on peut approcher  $J_k(x)$  d'après [11] par :

$$J_k(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (1.7.9)$$

- Pour  $k$  fixé et  $x$  au voisinage de 0,  $J_k(x)$  peut être approchée [23] par :

$$J_k(x) \simeq \frac{1}{2^k k!} x^k \quad (1.7.10)$$

### 1.7.2.5 Intégrale de Bessel

Les fonctions de Bessel peuvent être aussi exprimées en fonctions d'intégrale (cf. [23]) :

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\theta - x \sin\theta) d\theta \quad (1.7.11)$$

### 1.7.3 Zéros de Bessel

On note  $j_{k,1}, j_{k,2}, \dots$  les zéros positifs de  $J_k(x)$ , fonctions de Bessel d'ordre  $k$  de 1<sup>re</sup> espèce.

**Proposition 1.7.1.** : Si  $j_{k,1}, j_{k,2}, \dots$  (respectivement  $j_{k+1,1}, j_{k+1,2}, \dots$ ) sont les zéros positifs de  $J_k(x)$  (resp  $J_{k+1}(x)$ ). Alors pour  $k > -1$  on a :

$$0 < j_{k,1} < j_{k+1,1} < j_{k,2} < j_{k+1,2} < j_{k,3} < \dots \quad (1.7.12)$$

Ce résultat est souvent exprimé par l'expression : " les zéros de  $J_k(x)$  sont entrelacés avec ceux de  $J_{k+1}(x)$ " (cf. [23]).

#### Preuve

Pour montrer le résultat (1.7.12), on utilise les formules de dérivation (1.7.6) et (1.7.7) pour  $m = 1$  :

$$\frac{d}{dx} [x^{-k} J_k(x)] = -x^{-k} J_{k+1}(x) \quad (1.7.13)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{k+1} J_{k+1}(x)] = x^{k+1} J_k(x) \quad (1.7.14)$$

L'équation (1.7.13) montre qu'entre deux zéros consécutifs de  $x^{-k} J_k(x)$ , il existe au moins un zéro de  $x^{-k} J_{k+1}(x)$ , de même l'équation (1.7.14) montre que lorsqu'on se place entre deux zéros consécutifs de  $x^{k+1} J_{k+1}(x)$ , il y a au moins un zéro de  $x^{k+1} J_k(x)$ . Le résultat (1.7.12) devient donc évident.

Le théorème suivant donne une caractérisation des zéros de Bessel, valable pour toutes les solutions de (1.7.1) tel que  $k$  soit un réel et  $k^2 > \frac{1}{4}$  :

**Theorem 4.** Soient  $j_{k,i}$  et  $j_{k,i+1}$  deux zéros consécutifs de  $J_k(x)$  solution de première espèce de (1.7.1). Alors :

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{k^2 - \frac{1}{4}}{j_{k,i+1}^2}}} < j_{k,i+1} - j_{k,i} < \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{k^2 - \frac{1}{4}}{j_{k,i}^2}}}, \quad k^2 > \frac{1}{4} \quad (1.7.15)$$

On voit que l'écart tend vers  $\pi$  quand  $j_{k,i}$  tend vers  $\infty$ . La démonstration de ce théorème est donnée dans [11].

### 1.7.4 Propriétés des zéros de Bessel

- Formule asymptotique : De l'expression (1.7.10), on en déduit que :  $x = 0$  est un zéro d'ordre  $k$ . Les zéros suivants ;  $x = j_{k,1}, j_{k,2}, \dots, j_{k,i}, \dots$  sont simples distincts et pour  $i$  grand, on peut approcher le  $i^{me}$  zéro par la formule asymptotique :

$$j_{k,i} \sim \pi \left( i + \frac{k}{2} - \frac{1}{4} \right), \quad i \geq 1 \quad (1.7.16)$$

- En admettant que tous les zéros sont simples (Si  $J_k(x) = 0$  alors  $J'_k(x) \neq 0$ ) il ne peut y avoir de zéro commun à  $J_k(x)$  et  $J_{k+1}(x)$ .

Par récurrence , il est clair que tous les zéros de toutes les fonctions de Bessl sont entrelacés .

- Si  $k$  est réel et  $k > -1$  , les zéros des fonctions de Bessel sont tous réels (cf. [23]) .

## Chapitre 2

# Équation des ondes avec conditions aux limites mixtes

### 2.1 Problème à étudier

Dans cette partie, on s'intéresse spécifiquement à la stabilisation de l'équation d'onde avec un amorçage interne linéaire dans un domaine délimité à deux(2) dimensions et la densité  $m$  est **non-négligeable**.

Plus précisément, on considère l'équation d'onde dissipative suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, & (e_1) \\ \partial_\nu u + m(x)u_{tt} - \Delta_T u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_1, & (e_2) \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0, & (e_3) \\ u(0, x, y) = u_0(x, y), u_t(0, x, y) = u_1(x, y) & \text{dans } \Omega, \\ u_t(0, x, 1) = w_0(x, 1) & \text{dans } \Gamma_1. \end{cases}$$

où  $\Omega = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < r_0 < |u| < 1\}$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  délimité par  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ .

$$\Gamma_0 = \{u \in \mathbb{R}^2 : |u| = r_0\}$$

$$\Gamma_1 = \{u \in \mathbb{R}^2 : |u| = 1\}$$

$\nu$  est le vecteur normal dirigé vers l'extérieur sur la frontière;  
 $\Delta$  (.resp  $\Delta_T$ ) est l'opérateur de Laplace (.resp Laplace tangentiel) sur  $\Omega$  (.resp  $\Gamma_1$ );  
 $m : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction non-négative telle que :

$$m(x) \geq m_0 > 0, \forall x \in \Gamma_1.$$

#### Important

On notera (1) - (2) ce problème pour la suite des travaux.

### 2.2 Domaine d'étude du problème

Le domaine définition du problème H est :

$$H = V \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1).$$

avec

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma} \in H_0^1(\Gamma)\}$$

muni de la norme :

$$\|v\|_V^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\Gamma$$

Alors  $H$  est un espace de Hilbert, dont la norme est donnée par :

$$\|(f, g, h)\|_H^2 = \|f\|_V^2 + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|mh\|_{L^2(\Gamma_1)}^2, \quad \forall (f, g, h) \in H. \quad (2.2.1)$$

## 2.3 Reformulation du problème

Essayons d'obtenir un problème de Cauchy équivalent à notre problème. Pour cela, on pose

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

avec  $u = u, v = u_t$  et  $w = v|_{\Gamma_1}$ .

on a :

$$\begin{aligned} Y_t &= \begin{pmatrix} u_t \\ v_t = (u_t)_t = u_{tt} \\ w_t = v_t|_{\Gamma_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - v \\ \frac{1}{m}(\Delta_T u - \partial_\nu u) \end{pmatrix} \\ \implies Y_t &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & Id & 0 \\ \Delta & -Id & 0 \\ \frac{1}{m}(\Delta_T - \partial_\nu)|_{\Gamma_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{l'opérateur } A} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}}_Y \end{aligned}$$

Le problème est donc équivalent au problème de Cauchy :

$$Y_t(t) = AY(t) \quad (2.3.1)$$

$$Y(0) = Y_0 \quad (2.3.2)$$

avec  $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in H$ ,  $Y_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ w_0 \end{pmatrix}$  et

$A$  est l'opérateur définie sur

$$D(A) = \{U = (u, v, w)^t \in H : AU \in H; w = v|_{\Gamma_1}, (\partial_\nu u + m(x)u_{tt} - \Delta_T u)|_{\Gamma_1} = 0, \partial_\nu u|_{\Gamma_0} = 0\}$$

par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & Id & 0 \\ \Delta & -Id & 0 \\ \frac{1}{m}(\Delta_T - \partial_\nu)|_{\Gamma_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.4 Existence et unicité de la solution

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.3.1)- (2.3.2), il suffit de montrer que l'opérateur  $A$  est m-dissipatif *i.e.*  $A$  est maximal et

$$\Re\langle AU, U \rangle \leq 0, \forall U \in D(A).$$

a) A est dissipatif?

Soit  $Y = (u, v, w)^t \in D(A)$  avec  $w = v/\Gamma_1$ .

En utilisant le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  qui engendre (2.2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle AY, Y \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - v \\ \frac{1}{m}(\Delta_T u - \partial_\nu u) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle \\ \implies \langle AY, Y \rangle &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + (\Delta u - v)v dx dy + \int_{\Gamma_1} (\Delta_T u - \partial_\nu u)w d\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla_T u \nabla_T v d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega} v^2 dx dy + \int_{\Gamma_1} v \partial_\nu u d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\Delta_T u - \partial_\nu u)v d\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla_T u \nabla_T v d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega} v^2 dx dy \end{aligned}$$

Ce qui implique,

$$\Re\langle AY, Y \rangle \leq 0, \forall Y \in D(A).$$

D'où  $A$  est dissipatif.

b) A est maximal?

Comme  $A$  est dissipatif d'après a), il nous suffit de montrer que  $\lambda I - A$  est surjectif pour chaque  $\lambda > 0$ .

$$\text{Et soit } F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in H$$

$$\exists ? Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in D(A) : (\lambda I - A)Y = F$$

$(\lambda I - A)Y = F$ , s'écrit en termes de composante, comme suit :

Choisissons  $\lambda = 1 > 0$ .

$$\begin{pmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Id & 0 \\ \Delta & -Id & 0 \\ \frac{1}{m}(\Delta_T - \partial_\nu)/\Gamma_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne le système suivant :

$$u - v = f \tag{2.4.1}$$

$$2v - \Delta u = g \tag{2.4.2}$$

$$w - \frac{1}{m}(\Delta_T u - \partial_\nu u) = h \tag{2.4.3}$$

En additionnant  $2 \times$  2.4.1 et 2.4.2, on obtient :

$$2u - \Delta u = 2f + g \tag{2.4.4}$$

**Formulation variationnelle :**

Soit  $z \in H^1(\Omega)$  vérifiant les mêmes conditions posées sur  $u$ .

En multipliant (2.4.4) par  $z$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} (2u - \Delta u)z \, dz = \int_{\Omega} (2f + g)z \, dz$$

Appliquons ensuite la formule de Green, on obtient :

$$2 \int_{\Omega} uz \, dz + \int_{\Omega} \nabla u \nabla z \, dz - \int_{\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1} z \partial_{\nu} u \, d\Gamma = \int_{\Omega} (2f + g)z \, dz$$

De 2.4.3,

$$\partial_{\nu} u = m(h - w) + \Delta_T u$$

et en sachant que  $\partial_{\nu} u = 0$  sur  $\mathbb{R}_+ \times \Gamma_0$  On obtient,

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\Omega} uz \, dz + \int_{\Omega} \nabla u \nabla z \, dz - \int_{\Gamma_1} z [m(h - w) + \Delta_T u] \, d\Gamma = \int_{\Omega} (2f + g)z \, dz \\ \Rightarrow & 2 \int_{\Omega} uz \, dz + \int_{\Omega} \nabla u \nabla z \, dz - \int_{\Gamma_1} z \Delta_T u \, d\Gamma = \int_{\Omega} (2f + g)z \, dz + \int_{\Gamma_1} mz(h - w) \, d\Gamma \end{aligned}$$

On applique à nouveau la formule de Green, on obtient :

$$2 \int_{\Omega} uz \, dz + \int_{\Omega} \nabla u \nabla z \, dz + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \nabla_T z \, d\Gamma = \int_{\Omega} (2f + g)z \, dz + \int_{\Gamma_1} mz(h - w) \, d\Gamma$$

On pose :

$$\begin{cases} a(u, z) &= 2 \int_{\Omega} uz \, dz + \int_{\Omega} \nabla u \nabla z \, dz + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \nabla_T z \, d\Gamma \\ L(z) &= \int_{\Omega} (2f + g)z \, dz + \int_{\Gamma_1} mhz \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} z^2 \, d\Gamma \end{cases}$$

On utilise donc le théorème de Lax-Milgram pour prouver que la formulation variationnelle  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = \mathbf{L}(\mathbf{z})$  de (2.4.4) possède une unique solution.

 i) **Continuité de  $L(\cdot)$** 

$$\begin{aligned} |L(z)| &= \left| \int_{\Omega} (2f + g)z \, dz + \int_{\Gamma_1} mhz \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} z^2 \, d\Gamma \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |2f + g||z| \, dz + \int_{\Gamma_1} |mh||z| \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} |z|^2 \, d\Gamma \\ &\leq \|2f + g\|_{L^2(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{x \in \Gamma_1} |m(x)| \|h\|_{L^2(\Gamma_1)} \|z\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|z\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \end{aligned}$$

Étant donnée que  $m \in L^\infty(\Gamma_1)$  et  $f, g, h \in L^2(\Omega)$ , alors

$$\begin{cases} \|2f + g\|_{L^2(\Omega)} = C_0 < \infty \text{ (fini)} \\ \sup_{x \in \Gamma_1} |m(x)| = C_1 < \infty \text{ (fini)} \\ \|h\|_{L^2(\Omega)} = C_2 < \infty \text{ (fini)} \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} |L(z)| &\leq C_0 \|z\|_{L^2(\Omega)} + C_1 \|z\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|z\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\ &\leq \max(C_0 + C_1, 1) \|z\|_V \end{aligned}$$

Alors  $L(\cdot)$  est **continue**.

ii) **Continuité**  $a(.,.)$

$$\begin{aligned}
 |a(u, z)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla z \, dudz + 2 \int_{\Omega} uz \, dudz - \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \nabla_T z \, d\Gamma \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla z| \, dudz + 2 \int_{\Omega} |uz| \, dudz + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u| |\nabla_T z| \, d\Gamma \\
 &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\nabla_T z\|_{L^2(\Gamma_1)} \\
 &\leq 2C(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) (\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_T z\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|z\|_{L^2(\Omega)}) \\
 &\leq M \|u\|_V \|z\|_V
 \end{aligned}$$

Donc,  $a(.,.)$  est **continue**.

iii) **Coercivité** de  $a(.,.)$

$$\begin{aligned}
 |a(u, u)| &= \left| \int_{\Omega} (\nabla u)^2 \, dudz + 2 \int_{\Omega} u^2 \, dudz + \int_{\Gamma_1} (\nabla_T u)^2 \, d\Gamma \right| \\
 &\geq \int_{\Omega} \nabla u^2 \, dudz + \int_{\Omega} u^2 \, dudz + \int_{\Gamma_1} (\nabla_T u)^2 \, d\Gamma \\
 &\geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\
 &\geq 1. \|u\|_V^2
 \end{aligned}$$

Donc,  $a(.,.)$  est **coercive**.

$a(.,.)$  bilinéaire, continue et coercive sur  $V$  et  $L(\cdot)$  est linéaire continue sur  $V$ , d'après le théorème de **Lax-Milgram** on conclut qu'il existe une solution unique faible  $u \in V$  telle que

$$a(u, z) = L(z), \quad \forall z \in V$$

En utilisant (2.4.4) (obtenue par 2.4.1 et 2.4.2), on obtient :

$$\Delta u = 2u - (2f + g) \in L^2(\Omega)$$

Comme  $u, f$  et  $g \in L^2(\Omega)$

alors :

$$\Delta u \in L^2(\Omega)$$

d'où

$$v = u - f \in V$$

finalement il existe  $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in D(A)$  qui vérifie  $(\lambda I - A)Y = F$  pour  $\lambda > 0$  et  $F \in H$ .

C'est-à-dire  $(\lambda I - A)$  est surjectif, donc  $A$  est **maximal**.

Le théorème de **Lax-Milgram** assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (1) -(2), ce qui achève la démonstration.

## Chapitre 3

# Stabilisation exponentielle

### Définition (Stabilité forte)

On dit que l'énergie  $E(t)$  d'un problème est stable fortement si

$$E(t) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty$$

### Définition

On a la stabilité exponentielle de l'énergie  $E(t)$  d'un problème d'évolution, lorsque

$$E(t) \leq C e^{-\omega t} E(0), \quad \forall t > 0$$

avec  $C$  et  $\omega$  deux(2) constantes positives.

Soit  $r_0 \in \mathbb{R}$ ,  $0 < r_0 < 1$ .

Et soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < r_0 < |x| < 1\}$$

délimité par  $\Gamma$ .

On suppose que  $\Gamma$  est séparée en deux(2) parties  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  ( $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ) définies par

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = r_0\} \\ \Gamma_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} \end{aligned}$$

## 3.1 Formulation du problème (1)-(2) en un problème unidimensionnel

Considérons maintenant l'expression suivante de  $u$

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^{(k)}(r, t) e^{ik\theta}$$

avec  $(u^{(k)})$  est le coefficient de Fourier de  $u$ .

Le laplacien  $\Delta$  en coordonnées pôlaires est donnée par

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

On a aussi

$$\partial_\nu u /_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial r} /_\Gamma \quad \text{et} \quad \Delta_T u /_\Gamma = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} /_\Gamma$$

Les équations  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  s'écrivent donc

$$\begin{cases} (e_1) : u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 \\ (e_2) : \partial_\nu u + m(x)u_{tt} - \Delta_T u = 0 /_{\Gamma_1} \\ (e_3) : \partial_\tau u = 0 /_{\Gamma_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (e'_1) : u_{tt}^{(k)} - \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u^{(k)} + \frac{k^2}{r^2} u^{(k)} + u_t^{(k)} = 0 \\ (e'_2) : u_r^{(k)}(1) + k^2 u^{(k)}(1) + m(1)u_{tt}^{(k)}(1) = 0 \\ (e'_3) : u^{(k)}(r_0) = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous permet de deduire le problème unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}^{(k)} - \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u^{(k)} + \frac{k^2}{r^2} u^{(k)} + u_t^{(k)} = 0 & \text{dans } (r_0, 1) \times \mathbb{R}_+, & (e'_1) \\ u_r^{(k)}(1) + k^2 u^{(k)}(1) + m(1)u_{tt}^{(k)}(1) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+, & (e'_2) \\ u^{(k)}(r_0) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+, & (e'_3) \\ u^{(k)}(0, x) = u_0^{(k)}(x), \quad u_t^{(k)}(0, x) = u_1^{(k)}(x) & \text{dans } (r_0, 1), \\ u_t^{(k)}(0, 1) = w_0^{(k)}(1) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

## 3.2 Stabilisation exponentielle du modèle 1-d avec un paramètre

L'énergie de la solution du problème (3.1.1) est donnée par

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \int_{r_0}^1 \left( \left( \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} (u^{(k)})^2 + (u_t^{(k)})^2 \right) r dr + \frac{k^2}{2} (u^{(k)}(1))^2 + \frac{m(1)}{2} (u_t^{(k)}(1))^2 \quad (3.2.1)$$

**Lemma 3.2.1.** *Pour toute solution régulière  $u^{(k)}$  de du problème (3.1.1), on a*

$$E'_k(t) = - \int_{r_0}^1 r (u_t^{(k)})^2 dr$$

**Preuve**

En utilisant la méthode d'intégration par parties et les conditions aux limites, on obtient

$$E'_k(t) = \int_{r_0}^1 \left( u_r^{(k)} u_{rt}^{(k)} + \frac{k^2}{r^2} u_t^{(k)} u_{tt}^{(k)} \right) r dr + k^2 u_t^{(k)}(1) u^{(1)}(1) + m(1) u_t^{(k)}(1) u_{tt}^{(k)}(1)$$

On a

$$\begin{aligned}
 \int_{r_0}^1 \left( u_r^{(k)} u_{rt}^{(k)} \right) r dr &= \int_{r_0}^1 \left( u_{rt}^{(k)} r u_r^{(k)} \right) dr \\
 &= - \int_{r_0}^1 u_t^{(k)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right) dr + \int_{r_0}^1 \frac{\partial}{\partial r} \left( u_t^{(k)} r u_r^{(k)} \right) dr \\
 &= - \int_{r_0}^1 u_t^{(k)} \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) u^{(k)} r dr + \left[ r u_t^{(k)} u_r^{(k)} \right]_{r_0}^1 \\
 &= - \int_{r_0}^1 u_t^{(k)} \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) u^{(k)} r dr + u_t^{(k)}(1) u_r^k(1) - \underbrace{r_0 u_t^{(k)}(r_0) u_r^k(r_0)}_{=0} \\
 &= - \int_{r_0}^1 u_t^{(k)} \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) u^{(k)} r dr + u_t^{(k)}(1) u_r^k(1)
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 E'_k(t) &= \int_{r_0}^1 u_t^{(k)} \left[ u_{tt}^{(k)} - \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u^{(k)} + \frac{k^2}{r^2} u^{(k)} \right] r dr + u_t^{(k)}(1) u_r^k(1) + k^2 u_t^{(k)}(1) u^{(k)}(1) + m(1) u_t^{(k)}(1) u_{tt}^{(k)}(1) \\
 &= \int_{r_0}^1 u_t^{(k)} \left[ u_{tt}^{(k)} - \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u^{(k)} + \frac{k^2}{r^2} u^{(k)} \right] r dr + u_t^{(k)}(1) \left( u_r^k(1) + k^2 u^{(k)}(1) + m(1) u_{tt}^{(k)}(1) \right)
 \end{aligned}$$

De  $(e'_1)$ ,  $(e'_2)$  on a

$$\begin{aligned}
 u_t^{(k)} &= - \left( u_{tt}^{(k)} - \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u^{(k)} + \frac{k^2}{r^2} u^{(k)} \right) \\
 u_r^{(k)}(1) &= -k^2 u^{(k)}(1) - m(1) u_{tt}^{(k)}
 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$E'_k(t) = - \int_{r_0}^1 r \left( u_t^{(k)} \right)^2 dr + \underbrace{u_t^{(k)}(1) \left( -k^2 u^{(k)}(1) - m(1) u_{tt}^{(k)} + k^2 u^{(k)}(1) + m(1) u_{tt}^{(k)}(1) \right)}_{=0}$$

D'où

$$E'_k(t) = - \int_{r_0}^1 r \left( u_t^{(k)} \right)^2 dr \leq 0$$

Pour montrer la stabilisation exponentielle du problème (3.1.1), on exprime la solution  $u^k$  sous la forme

$$u^{(k)} = y + w \begin{cases} y & \text{solution du même problème que } u^{(k)} \text{ mais sans amortissement} \\ w & \text{solution du problème restant} \end{cases}$$

**N.B** Pour être plus bref, on écrira pas la dépendance de  $y$  et  $w$  à  $k$

Ce qui signifie que  $y$  et  $w$  sont solutions respectives de

$$\begin{cases} y_{tt} - \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 y + \frac{k^2}{r^2} y = 0 & \text{dans } (r_0, 1) \\ y_r(1) + k^2 y(1) + m(1) y_{tt}(1) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \\ y(r_0) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \\ y(0) = u_0^{(k)}, \quad y_t(0) = u_1^{(k)} & \text{dans } (r_0, 1) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

$$\begin{cases} w_{tt} - \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w + \frac{k^2}{r^2} w + w_t = 0 & \text{dans } (r_0, 1) \\ w_r(1) + k^2 w(1) + m(1) w_{tt}(1) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \\ w(r_0) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \\ w(0) = 0, \quad w_t(0) = 0 & \text{dans } (r_0, 1) \end{cases} \quad (3.2.3)$$

On commence par étudier le problème (3.2.2).

On introduit l'opérateur  $A_k$  défini sur  $L^2((r_0, 1))$  par

$$A_k(v) = -\frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 v + \frac{k^2}{r^2} v$$

de domaine

$$D(A_k) = \{v \in H^2(r_0, 1); v(r_0) = 0 \text{ et } v_r(1) = -k^2 v(1) - m(1) v_{tt}(1)\}$$

**Theorem 5.** *Les valeurs propres  $\lambda^2$  de l'opérateur  $A_k$  sont strictement supérieures à  $k^2$  et sont les racines de l'équation*

$$\frac{k + (1 - r_0)(k^2 - m(1)\lambda^2)}{\lambda(1 - r_0)} = \frac{J_{k+1}(\lambda(1 - r_0))}{J_k(\lambda(1 - r_0))}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.2.4)$$

avec  $J_k$  la fonction de **Bessel** de première espèce et des vecteurs propres normalisés associés

$$\varphi_n(r) = A_n J_k(\lambda_n(r - r_0)), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.2.5)$$

avec

$$A_n \geq \frac{\sqrt{2}}{(1 - r_0)} \quad (3.2.6)$$

et

$$|\varphi_n(r')| \geq \frac{C\sqrt{2}}{1 - r_0}, \quad C \text{ constante positive} \quad (3.2.7)$$

### Preuve

La preuve sera donnée en plusieurs étapes

— Premièrement par la formule de **Green**, on remarque que pour tout  $v \in D(A_k)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^1 (A_k v) v r dr &= \int_{r_0}^1 \left( -\frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) v + \frac{k^2}{r^2} v \right) v r dr \\ &= - \int_{r_0}^1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) v^2 r dr + \int_{r_0}^1 \frac{k^2}{r^2} v^2 r dr \\ &= - [r v v_r]_{r_0}^1 + \int_{r_0}^1 r v_r^2 dr + \int_{r_0}^1 \frac{k^2}{r^2} v^2 r dr \\ &= \underbrace{r_0 v(r_0) v_r(r_0)}_{=0 \text{ (car } v(r_0)=0)} - v(1) v_r(1) + \int_{r_0}^1 r v_r^2 dr + \int_{r_0}^1 \frac{k^2}{r^2} v^2 r dr \\ &= -v(1) \underbrace{(-k^2 v(1) - m(1) v_{tt}(1))}_{=v_r(1)} + \int_{r_0}^1 r v_r^2 dr + \int_{r_0}^1 \frac{k^2}{r^2} v^2 r dr \\ &= k^2 (v(1))^2 + m(1) v(1) v_{tt}(1) + \int_{r_0}^1 r v_r^2 dr + \int_{r_0}^1 \frac{k^2}{r^2} v^2 r dr \\ &\geq k^2 \int_{r_0}^1 v^2(r) r dr = k^2 \langle v, v \rangle_H \end{aligned}$$

Ce qui prouve que les valeurs propres de  $A_k$  sont  $\geq k^2$ .

- Pour  $\lambda^2 \geq k^2$ ,  
on pose

$$y = e^{i\lambda t} \varphi(r)$$

On a donc

$$\begin{cases} y_t = i\lambda e^{i\lambda t} \varphi(r) \\ y_{tt} = -\lambda^2 e^{i\lambda t} \varphi(r) \\ y_r = e^{i\lambda t} \varphi_r(r) \end{cases}$$

Le problème (3.2.2) serait donc équivalente à

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left( \lambda^2 - \frac{k^2}{r^2} \right) \varphi = 0 & \text{dans } (r_0, 1) \\ \varphi_r(1) + (k^2 - m(1)\lambda^2) \varphi(1) = 0 \\ \varphi(r_0) = 0 \end{cases} \quad (3.2.8)$$

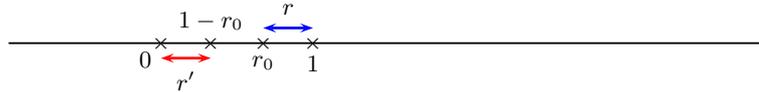
La première équation du problème (3.2.8) est l'équation différentielle de Bessel, qui a pour solution générale

$$\varphi(r) = AJ_k(\lambda r) + BY_k(\lambda r) \quad (3.2.9)$$

avec  $J_k$  et  $Y_k$  sont les **fonctions de Bessel** de 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> espèces respectivement.

- Par une translation sur le rayon  $r$ , on se ramène à l'origine du repère

$$r' = r - r_0$$



L'équation (3.2.9) s'écrit sur  $(0, 1 - r_0)$  par

$$\varphi(r') = AJ_k(\lambda r') + BY_k(\lambda r')$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \varphi_r(1-r_0) = -(k^2 - m(1)\lambda^2)\varphi(1-r_0) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

On a

$$\varphi(0) = AJ_k(0) + B \lim_{r' \rightarrow 0} Y_k(\lambda r') = 0$$

Comme,

$$J_k(0) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} Y_k(x) \neq 0$$

Alors

$$B \equiv 0$$

Donc les fonctions propres sont

$$\varphi_n(r') = A_n J_k(\lambda_n r'), \quad n \geq 0$$

De suite,

$$\varphi_n(r') = A_n J_k(\lambda_n(r-r_0)), \quad n \geq 0$$

— La seconde condition aux limites

$$\varphi_r(1-r_0) = -(k^2 - m(1)\lambda^2)\varphi(1-r_0)$$

combinée avec la relation

$$\frac{d}{dx}[J_k(x)] = -J_{k+1}(x) + \frac{k}{x}J_k(x)$$

La dérivée de  $\varphi$  par rapport à  $r$  sera donc

$$\begin{aligned} \varphi_r(1-r_0) &= \frac{d}{dr}[J_k(\lambda(1-r_0))] \\ &= -\lambda J_{k+1}(\lambda(1-r_0)) + \frac{k}{1-r_0} J_k(\lambda(1-r_0)) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} -\lambda J_{k+1}(\lambda(1-r_0)) + \frac{k}{1-r_0} J_k(\lambda(1-r_0)) &= -(k^2 - m(1)\lambda^2) J_k(\lambda(1-r_0)) \\ \implies \lambda J_{k+1}(\lambda(1-r_0)) &= \left( \frac{k}{1-r_0} + (k^2 - m(1)\lambda^2) \right) J_k(\lambda(1-r_0)) \\ \implies \frac{\frac{k}{1-r_0} + (k^2 - m(1)\lambda^2)}{\lambda} &= \frac{J_{k+1}(\lambda(1-r_0))}{J_k(\lambda(1-r_0))} \\ \implies \frac{k + (1-r_0)(k^2 - m(1)\lambda^2)}{\lambda(1-r_0)} &= \frac{J_{k+1}(\lambda(1-r_0))}{J_k(\lambda(1-r_0))} \end{aligned}$$

À noter que les racines de cette dernière équation forment les valeurs propres de l'opérateur  $A_k$ .

— En utilisant les formules

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (3.2.10)$$

$$\varphi_n(r') = A_n J_k(\lambda_n r'), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.2.11)$$

et l'hypothèse de normalisation

$$\int_0^{1-r_0} \varphi_n^2(r') r' dr' = 1$$

On obtient

$$1 = \int_0^{1-r_0} \varphi_n^2(r') r' dr' = A_n^2 \int_0^{1-r_0} \left( \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\theta - \lambda_n(r') \sin \theta) d\theta \right)^2 r' dr'$$

En utilisant les relations

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ ab &\leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\theta - \lambda_n(r') \sin \theta) d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi \cos^2(k\theta) d\theta + \int_0^\pi \cos^2(\lambda_n r' \sin \theta) d\theta \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\pi \sin^2(k\theta) d\theta + \int_0^\pi \sin^2(\lambda_n r' \sin \theta) d\theta \right] \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

De suite,

$$\begin{aligned} 1 &= A_n^2 \int_0^{1-r_0} \left( \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\theta - \lambda_n(r') \sin \theta) d\theta \right)^2 r' dr' \\ &\leq A_n^2 \int_0^{1-r_0} r' dr' = \frac{A_n^2}{2} (1-r_0)^2 \end{aligned}$$

Alors,

$$A_n \geq \frac{\sqrt{2}}{1-r_0}$$

— De suite,

$$|\varphi(r')| \geq \frac{\sqrt{2}}{1-r_0} |J_k(\lambda_n(r-r_0))|$$

Et comme,

$$J_k(\lambda_n(r-r_0)) \neq 0, \quad \text{car } \lambda_n(r-r_0) \neq 0$$

Il existe donc une constante  $C > 0$  telle que

$$|\varphi_n(r')| \geq \frac{C\sqrt{2}}{1-r_0} \tag{3.2.12}$$

**Lemma 3.2.2.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq c, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.2.13}$$

**Preuve**

En utilisant l'équation caractéristique (3.2.4) et la formule asymptotique suivant

$$J_k(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$$

On obtient

$$\frac{J_{k+1}(x)}{J_k(x)} \simeq \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(k + 1 + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)}$$

Ce qui donne pour  $x = \lambda(1 - r_0)$

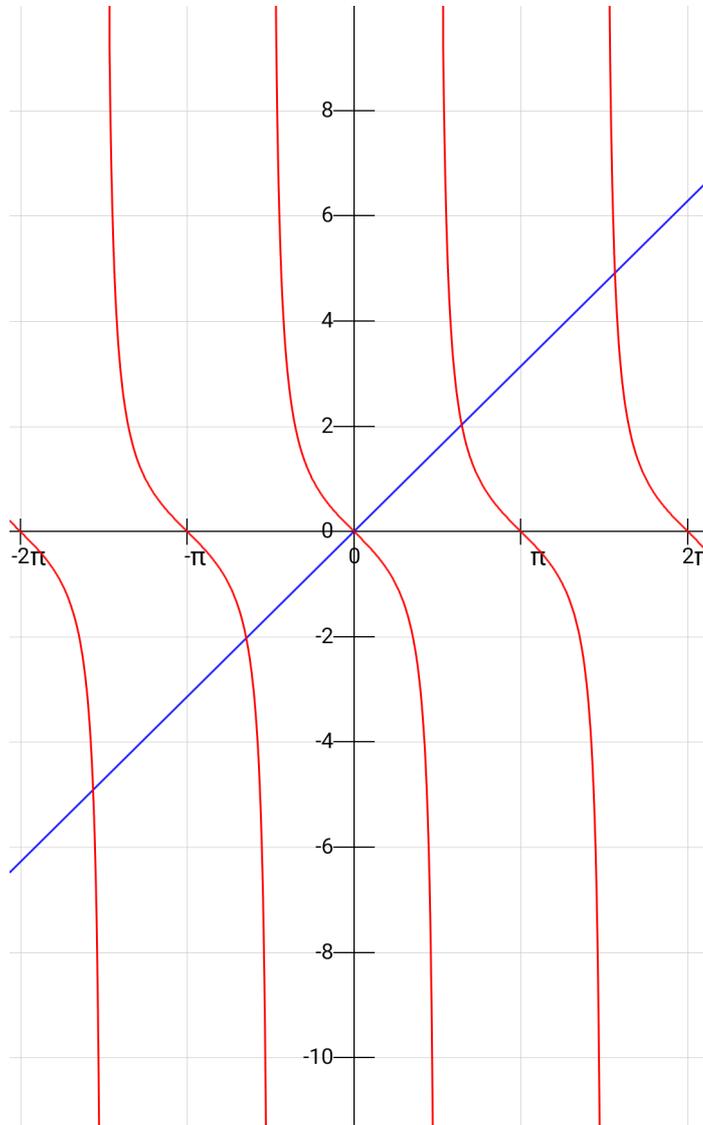
$$\frac{J_{k+1}(x)}{J_k(x)} \simeq \tan\left(\lambda(1 - r_0) - \frac{\pi}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \sim \frac{k + (1 - r_0)(k^2 - m(1)\lambda^2)}{\lambda(1 - r_0)} \quad (3.2.14)$$

Pour  $\lambda$  au voisinage de  $+\infty$

$$\begin{aligned} \frac{J_{k+1}(x)}{J_k(x)} &\simeq \tan\left(\lambda(1 - r_0) - \frac{\pi}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \sim -\frac{m(1)}{1 - r_0}\lambda \\ \implies -\tan\left(\lambda(1 - r_0) - \frac{\pi}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right) - \lambda(1 - r_0)\right) \sim \frac{m(1)}{1 - r_0}\lambda \end{aligned}$$

Au final, on obtient

$$\tan(\psi) \sim C\lambda \quad \left\| \begin{array}{l} \psi = \frac{\pi}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right) - \lambda(1 - r_0) \\ C = \frac{m(1)}{1 - r_0} > 0 \end{array} \right. \quad (3.2.15)$$



Les droites  $x = \lambda(1 - r_0) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{2k-1}{2} \right)$  sont les droites asymptotes à la fonction  $\tan\left(\frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2}) - x\right)$ .

Étant donnée  $\tan\left(\frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2}) - x\right) \simeq \frac{J_{k+1}(x)}{J_k(x)}$ , on en déduit que  $J_{k+1}(x)$  et  $J_k(x)$  disparaît au voisinage de  $\frac{\pi}{2} \left( \frac{2k-1}{2} \right)$ .

Donc les valeurs propres  $\lambda_i$  sont les points d'intersections entre les deux(2) courbes des fonctions mentionnées ci-dessus, on peut facilement voir cela à chaque période la racine  $\lambda_i$  est entre  $J_{k+1,i}$  et  $J_{k,i+1}$  avec  $J_{k+1,i}$  (respectivement  $J_{k,i+1}$ ) est la  $i$ -ème racine de  $J_{k+1}(x)$  (respectivement  $i + 1$ -ième racine de  $J_k(x)$ ).

Ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} J_{k+1,0} = 0 &< \lambda_0 < J_{k,1} \\ J_{k+1,1} &< \lambda_1 < J_{k,2} \\ &\vdots \\ J_{k+1,n} &< \lambda_n < J_{k,n+1} \\ J_{k+1,n+1} &< \lambda_{n+1} < J_{k,n+2} \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > J_{k+1,n+1} - J_{k,n+1} \quad (3.2.16)$$

En utilisant la formule asymptotique suivante

$$J_{k,i} \sim \pi \left( i + \frac{k}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

on obtient,

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \pi \left( n + 1 + \frac{k+1}{2} - \frac{1}{4} \right) - \pi \left( n + 1 + \frac{k}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

### Remarque

Pour les valeurs intermédiaires de  $x$  **i.e** les valeurs de  $x$  comme  $1 \leq x < \infty$ , il est facile de montrer grâce aux inégalités, que  $J_{k+1,n+1} - J_{k,n+1}$  est strictement positive. Et puisque  $J_{k+1,n+1}, J_{k,n+1}$  sont des racines simples et distinctes dans  $\mathbb{R}$  (selon les propriétés des zéros de Bessel), on a

$$J_{k+1,n+1} - J_{k,n+1} > \frac{J_{k+1,n+1} - J_{k,n+1}}{2}$$

De ce fait, on peut dire qu'il existe une constante  $c = \inf \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{J_{k+1,n+1} - J_{k,n+1}}{2} \right\} > 0$  telle que

$$J_{k+1,n+1} - J_{k,n+1} > c$$

Dans (3.2.16), on obtient

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > c, \quad c = \inf \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{J_{k+1,n+1} - J_{k,n+1}}{2} \right\} > 0 \quad (3.2.17)$$

À présent, on est prêt pour à estimer l'énergie de  $y$ .

**Lemma 3.2.3.** Soient  $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de nombres réels et un réel positif  $\gamma$  tels que

$$b_{n+1} - b_n \geq \gamma, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

Alors, il existe deux(2) constantes positives  $c_1$  et  $c_2$ , indépendantes de  $\gamma$  telles que pour toute fonction  $f$  de la forme

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{ib_n t},$$

avec  $a_n \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\frac{c_1}{\gamma} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_0^{\frac{4\pi}{\gamma}} |f(t)|^2 dt \leq \frac{c_2}{\gamma} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

**Preuve**

Posons  $\alpha = \frac{2}{\gamma}$  et  $\tilde{b}_n = \alpha b_n$ , on remarque que

$$\tilde{b}_{n+1} - \tilde{b}_n \geq 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, l'**inégalité d'Ingham standard** [19] montre qu'il existe deux(2) constantes positives  $c_1, c_2$  telles que pour toute fonction  $g$  de la forme :

$$g(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\tilde{b}_n s},$$

on a

$$c_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_0^{2\pi} |g(s)|^2 ds \leq c_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

et le résultat du lemme 3.2.3 est alors prouvé en utilisant le changement de variable  $t = \alpha s$ .

**Remarque**

Afin d'établir le résultat de la stabilité exponentielle du problème 1-d, on aura besoin de deux(2) théorèmes : le premier donne une estimation sur l'énergie  $E_y(t)$  de la solution  $y$  du problème (3.2.2) et le second donne une majoration sur  $w$  solution du problème (3.2.3)

**Theorem 6.** Soit  $E_y(t)$  l'énergie de la solution du problème (3.2.2) définie par :

$$E_y(t) = \frac{1}{2} \int_{r_0}^1 \left( \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} (y)^2 + (y_t)^2 \right) r dr + \frac{k^2}{2} (y(1))^2 + \frac{m(1)}{2} (y_t(1))^2$$

Il existe donc deux(2) constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  indépendantes de  $k$  telles que pour tout  $T > \frac{4\pi}{c}$ ,  $c = \inf \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{J_{k+1, n+1} - J_{k, n+1}}{2} \right\} > 0$ , on a

$$E_y(0) \leq c_2 c \int_0^T \int_{r_0}^1 |y_t(r, t)|^2 dr dt. \quad (3.2.18)$$

**N.B :** L'énergie  $E_y$  est constante :  $E_y'(t) = 0$ , pour toute solution régulière.

**Preuve**

Les résultats donnés dans la preuve de ce théorème sont standards (voir Lions et Magenes [4] ou Komornik pages 7-10.)

La théorie spectrale permet d'écrire la solution  $y$  du problème (3.2.2) sous la forme :

$$y(r, t) = \sum_{k \geq 0} \left( y_{0n} \cos(t\lambda_n) + y_{1n} \frac{\sin(t\lambda_n)}{\lambda_n} \right) \varphi_n(r)$$

avec  $y_{0n}$  ( resp.  $y_{1n}$  ) sont les coefficients de Fourier de  $u_0^{(k)}$  ( resp.  $u_1^{(k)}$  ), i.e. :

$$u_0^{(k)} = \sum_{n \geq 0} y_{0n} \varphi_n$$

et

$$u_1^{(k)} = \sum_{n \geq 0} y_{1n} \varphi_n$$

On a :

$$y_t(r, t) = \sum_{n \geq 0} \left( -y_{0n} \sin(t\lambda_n) + y_{1n} \frac{\cos(t\lambda_n)}{\lambda_n} \right) \lambda_n \varphi_n(r)$$

De (3.2.17) et le lemme 3.2.3, on obtient :

$$c_3 \sum_{n \geq 0} (\lambda_n^2 |y_{0n}|^2 + |y_{1n}|^2) |\varphi(r)|^2 \leq c \int_0^{\frac{4\pi}{c}} |y_t(r, t)|^2 dt.$$

où  $c_3$  est une constante positive indépendante de  $k$ .

En utilisant ensuite l'estimation (3.2.12), on en déduit que

$$\sum_{n \geq 0} (\lambda_n^2 |y_{0n}|^2 + |y_{1n}|^2) \leq c_4 c \int_0^{\frac{4\pi}{c}} |y_t(r, t)|^2 dt.$$

avec  $c_4 = \frac{(1-r_0)^2}{2c_3 C^2}$ . On conclut finalement par l'identité

$$\sum_{n \geq 0} (\lambda_n^2 |y_{0n}|^2 + |y_{1n}|^2) = \|u_0^{(k)}\|_{D(A_k^{\frac{1}{2}})}^2 + \|u_1^{(k)}\|^2 \leq c_4 c \int_{r_0}^1 \int_0^{\frac{4\pi}{c}} |y_t(r, t)|^2 dt dr,$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme de  $L^2(r_0, 1)$ , et la propriété :

$$\|v\|_{D(A_k^{\frac{1}{2}})}^2 = \|A_k^{\frac{1}{2}} v\|^2 = \langle A_k v, v \rangle = \int_{r_0}^1 \left( \left( \frac{\partial y(r, 0)}{\partial r} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} (y(r, 0))^2 \right) r dr + k^2 (y(1, 0))^2 + m(1) (y_t(1, 0))^2$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire de  $L^2(r_0, 1)$  et  $v = u_0^{(k)}$ .

Comme  $u_0^{(k)} = y_0(\cdot, 0)$ ,  $u_1^{(k)} = y_t(\cdot, 0)$  alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (\lambda_n^2 |y_{0n}|^2 + |y_{1n}|^2) &= \int_{r_0}^1 \left( \left( \frac{\partial y(r, 0)}{\partial r} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} (y(r, 0))^2 + (y_t(r, 0))^2 \right) r dr \\ &\quad + k^2 (y(1, 0))^2 + m(1) (y_t(1, 0))^2 = 2E_y(0), \end{aligned}$$

d'où l'existence d'une constante  $c_2 > 0$ , indépendante de  $k$ , telle que :

$$E_y(0) \leq c_2 c \int_0^{\frac{4\pi}{c}} \int_{r_0}^1 |y_t(r, t)|^2 dr dt.$$

Pour tout  $T > \frac{4\pi}{c}$  on a :

$$E_y(0) \leq c_2 c \int_0^T \int_{r_0}^1 |y_t(r, t)|^2 dr dt.$$

Ce qui termine la preuve du théorème 6. Le théorème suivant donne une majoration sur  $w$  solution du problème (3.2.3).

**Theorem 7.** *Il existe une constante  $C$  indépendante de  $k$  et  $T > 0$  tels que la solution  $w$  du problème (3.2.3) satisfait :*

$$\int_Q w_t^2(r, t) r dr dt \leq C_T \int_Q (u_t(r, t))^2 r dr dt. \quad \forall T > 0 \quad (3.2.19)$$

Avec  $C_T = 32\alpha^2(1+T)^2$

**Preuve**

Nous utilisons maintenant la technique des multiplicateurs. On multiplie la première équation du problème (3.2.3) par  $r(r-1)(2T-t)w_r$  et on intègre le résultat dans  $Q = (r_0, 1) \times (0, 2T)$ , on obtient

$$0 = \int_Q \left( w_{tt} - \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w + \frac{k^2}{r^2} w + w_t \right) r(r-1)(2T-t)w_r dr dt$$

posons

$$I_1 = \int_Q r(r-1)(2T-t)w_{tt}w_r dr dt$$

$$I_2 = \int_Q -(r-1)(2T-t) \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) w z_r dr dt \quad \left( \text{avec } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \right)$$

$$I_3 = \int_Q r(r-1)(2T-t) \frac{k^2}{r^2} w z_r dr dt$$

$$I_4 = \int_Q r(r-1)(2T-t)w_t w_r dr dt$$

**Pour  $I_1$** 

Comme,

$$\begin{cases} r(r-1)(2T-t)w_{tt}w_r = \frac{\partial}{\partial t} [r(r-1)(2T-t)w_t w_r] - r(r-1)(2T-t)w_{tr}w_t + r(r-1)w_r w_t \\ r(r-1)(2T-t)w_{tr}w_t = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} [r(r-1)(2T-t)w_t^2] - (r-\frac{1}{2})(2T-t)w_t^2 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} r(r-1)(2T-t)w_{tt}w_r &= \frac{\partial}{\partial t} [r(r-1)(2T-t)w_t w_r] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} [r(r-1)(2T-t)w_t^2] \\ &\quad + (r-\frac{1}{2})(2T-t)w_t^2 + r(r-1)w_r w_t \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} I_1 &= \underbrace{\int_Q \frac{\partial}{\partial t} [r(r-1)(2T-t)w_t w_r] dt dr}_{=0} - \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial}{\partial r} [r(r-1)(2T-t)w_t^2] dr dt \\ &\quad + \int_Q r(r-1)w_r w_t dr dt + \int_Q \left( r - \frac{1}{2} \right) (2T-t)w_t^2 dr dt \end{aligned}$$

Au final,

$$I_1 = \int_Q (r-1)w_r w_t r dr dt + \int_Q \left( r - \frac{1}{2} \right) (2T-t)w_t^2 dr dt \quad (3.2.20)$$

**Pour  $I_2$** 

Comme,

$$\begin{cases} -(r-1)(2T-t) \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) w w_r = -\frac{\partial}{\partial r} [r(r-1)(2T-t)w_r^2] + r(2T-t)w_r^2 + r(r-1)(2T-t)w_r w_{rr} \\ r(r-1)(2T-t)w_r w_{rr} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} [r(r-1)(2T-t)w_r^2] - (r-\frac{1}{2})(2T-t)w_r^2 \end{cases}$$

Alors

$$-(r-1)(2T-t) \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) w = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} [r(r-1)(2T-t)w_r^2] + r(2T-t)w_r^2 - (r-\frac{1}{2})(2T-t)w_r^2$$

Ce qui implique,

$$I_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{2T} [r(r-1)(2T-t)w_r^2]_{r_0}^1 dt + \int_Q (2T-t)w_r^2 r dr dt - \int_Q (r-\frac{1}{2})(2T-t)w_r^2 dr dt$$

Au final,

$$I_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{2T} r_0(1-r_0)(2T-t)w_r^2(1,t) dt + \frac{1}{2} \int_Q (2T-t)w_r^2 dr dt \quad (3.2.21)$$

**Pour  $I_3$**

Comme,

$$\begin{cases} r(r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}ww_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[ r(r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 \right] - w \frac{\partial}{\partial r} \left[ r(r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w \right] \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[ r(r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w \right] = (r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w + r(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w \\ \quad + \frac{r(r-1)(2T-t)}{r^2}k^2w_r - \frac{2r(r-1)(2T-t)}{r^3}k^2w \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} r(r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}ww_r &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r(r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2}(r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 - \frac{1}{2}r(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 \\ &\quad + (r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 \end{aligned}$$

Ce qui signifie

$$\begin{aligned} r(r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}ww_r &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r(r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2}(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial}{\partial r} \left[ r(r-1)(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 \right] dr dt - \frac{1}{2}(2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 \\ \implies I_3 &= -\frac{1}{2} \int_Q (2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 dr dt \end{aligned}$$

Au final

$$I_3 = -\frac{1}{2} \int_Q (2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 dr dt \quad (3.2.22)$$

On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\ 0 &= \int_Q (r-1)w_r w_t r dr dt + \int_Q (r-\frac{1}{2})(2T-t)w_t^2 dr dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{2T} r_0(1-r_0)(2T-t)w_r^2(1,t) dt + \frac{1}{2} \int_Q (2T-t)w_r^2 dr dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_Q (2T-t)\frac{k^2}{r^2}w^2 dr dt + \int_Q r(r-1)(2T-t)w_t w_r dr dt \end{aligned}$$

Comme,

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Alors

$$\int_Q r(r-1)w_t w_r dr dt \leq \int_Q \left( \frac{w_t^2}{2} + \frac{w_r^2}{2} \right) r dr dt$$

Et comme,

$$r < 1$$

On obtient que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \int_Q (w_r^2 + w_t^2) r dr dt + \int_Q \left(r - \frac{1}{2}\right) (2T - t) w_t^2 dr dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_Q (2T - t) w_r^2 dr dt + \frac{1}{2} \int_Q (2T - t) (w_t^2 + w_r^2) r dr dt \\ &\quad \downarrow \\ \frac{1}{2} \int_Q (2T - t) w_t^2 dr dt &\leq \frac{1}{2} \int_Q (w_r^2 + w_t^2) r dr dt + \int_Q (2T - t) w_t^2 r dr dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_Q (2T - t) w_r^2 dr dt + \frac{1}{2} \int_Q (2T - t) (w_t^2 + w_r^2) r dr dt \\ &\quad \text{Puisque } 0 < t < 2T \implies 0 < 2T - t < 2T \\ &\quad \text{De plus } 0 < r_0 < r < 1 \implies 1 < \frac{1}{r} < \frac{1}{r_0} \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} \int_Q (2T - t) w_t^2 dr dt &\leq \int_Q (w_r^2 + w_t^2) r dr dt + 4T \int_Q w_t^2 r dr dt \\ &\quad + \frac{2T}{r_0} \int_Q w_r^2 r dr dt + 2T \int_Q (w_t^2 + w_r^2) r dr dt \\ &\quad \downarrow \\ \int_Q (2T - t) w_t^2 r dr dt &\leq \int_Q \frac{1}{r} (2T - t) w_t^2 r dr dt \leq \left[ 1 + \left( \frac{2}{r_0} + 2 \right) T \right] \int_Q w_r^2 r dr dt + (1 + 6T) \int_Q w_t^2 r dr dt \\ &\quad \downarrow \\ \int_Q (2T - t) w_t^2 r dr dt &\leq \left[ 1 + \left( \frac{2}{r_0} + 2 \right) T \right] \int_Q w_r^2 r dr dt + (1 + 6T) \int_Q w_t^2 r dr dt \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

avec

$$\alpha = \max \left( \frac{2}{r_0} + 2; 6 \right) \quad \text{constante} > 0$$

De plus  $\alpha > 1$  (car c'est le maximum entre deux valeurs  $> 1$ )

$$\int_Q (2T - t) w_t^2 r dr dt \leq \alpha(1 + T) \int_Q (w_r^2 + w_t^2) r dr dt \tag{3.2.24}$$

L'énergie du problème (3.2.3) est donnée par

$$E_w(t) = \frac{1}{2} \int_{r_0}^1 \left( (w_r^{(k)})^2 + \frac{k^2}{r^2} (w^{(k)})^2 + (w_t^{(k)})^2 \right) r dr + \frac{k^2}{2} (w^{(k)}(1))^2 + \frac{m(1)}{2} (w_t^{(k)}(1))^2$$

Et par intégration par parties, on obtient

$$E'_w(t) = - \int_{r_0}^1 w_t(r, t) u_t(r, t) r dr \quad (3.2.25)$$

Sachant que  $E_w(0) = 0$ , on intégrant (3.2.25) entre 0 et  $s$

$$E_w(s) = - \int_0^s \int_{r_0}^1 w_t(r, t) u_t(r, t) r dr dt$$

En intégrant cette dernière entre 0 et  $2T$  et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_0^{2T} E_w(s) ds = - \int_0^{2T} \int_0^s \int_{r_0}^1 w_t(r, t) u_t(r, t) r dr dt ds = - \int_0^{2T} \int_{r_0}^1 (2T - t) w_t(r, t) u_t(r, t) r dr dt$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient finalement

$$\int_0^{2T} E_w(s) ds \leq \epsilon \int_Q (2T - t) (w_t(r, t))^2 r dr dt + \frac{4}{\epsilon} \int_Q (2T - t) (u_t(r, t))^2 r dr dt, \quad \forall \epsilon > 0$$

De plus

$$\int_Q (w_r^2 + w_t^2) r dr dt \leq 2 \int_0^{2T} E_w(s) ds$$

Dans (3.2.24), on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_Q (2T - t) w_t^2 r dr dt &\leq \alpha(1 + T) \left[ \epsilon \int_Q (2T - t) (w_t(r, t))^2 r dr dt + \frac{4}{\epsilon} \int_Q (2T - t) (u_t(r, t))^2 r dr dt \right] \\ &\leq \alpha \epsilon (1 + T) \int_Q (2T - t) (w_t(r, t))^2 r dr dt + \frac{4\alpha(1 + T)}{\epsilon} \int_Q (2T - t) (u_t(r, t))^2 r dr dt \end{aligned}$$

En prenant  $\epsilon = \frac{1}{2\alpha(1+T)} > 0$ , et sachant que  $t \leq T \implies 2T - t \geq T$  on obtient

$$\frac{T}{2} \int_Q w_t^2 r dr dt \leq 16\alpha^2 (1 + T)^2 T \int_Q (u_t(r, t))^2 r dr dt$$

Au final

$$\int_Q w_t^2(r, t) r dr dt \leq C_T \int_Q (u_t(r, t))^2 r dr dt$$

Avec  $C_T = 32\alpha^2(1 + T)^2$ .

Ce qui achève la preuve

**Theorem 8.** *Considérons les deux(2) inégalités (3.2.18) et (3.2.19). Il existe  $M_1$  et  $M_2$  telle que l'énergie  $E_k(t)$  du problème (3.1.1) soit*

$$E_k(t) \leq M_1 e^{-M_2 t} E_k(0), \quad t \geq 0 \quad (3.2.26)$$

**Preuve**

Comme  $u^{(k)} = y + w \implies E_k(0) = E_y(0) + E_w(0) = E_y(0)$  (car  $E_w(0) = 0$ )

De (3.2.18), on a

$$E_k(0) = E_y(0) \leq cc_2 \int_0^T \int_{r_0}^1 (y_t(r, t))^2 dr dt$$

d'après le lemme 3.2.1, on a

$$\begin{aligned} E_k'(t) &= - \int_{r_0}^1 (u_t^{(k)}(r, t))^2 r dr \\ \implies \int_0^T \frac{dE_k(t)}{dt} dt &= - \int_0^T \int_{r_0}^1 (u_t^{(k)}(r, t))^2 r dr dt \end{aligned}$$

On a donc

$$E_k(0) - E_k(T) = \int_0^T \int_{r_0}^1 (u_t^{(k)}(r, t))^2 r dr dt \quad (3.2.27)$$

Vu que l'énergie  $E_k(t)$  est décroissante pour tout  $t \in [0, T]$  (prouvé par le lemme 3.2.1), alors

$$E_k(T) \leq E_k(0) \quad (3.2.28)$$

De plus  $(y_t)^2 = (u_t^{(k)} - w_t)^2 = (u_t^{(k)})^2 - 2u_t^{(k)}w_t + (w_t)^2 \leq \beta \left[ (u_t^{(k)})^2 + (w_t)^2 \right]$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} E_k(0) &\leq \beta \int_0^T \int_{r_0}^1 (u_t^{(k)}(r, t))^2 r dr dt + \beta \int_0^T \int_{r_0}^1 (w_t(r, t))^2 r dr dt \\ &\leq \beta(1 + C_T) \int_0^T \int_{r_0}^1 (u_t^{(k)}(r, t))^2 r dr dt \end{aligned}$$

De (3.2.28) et (3.2.27), on obtient

$$\begin{aligned} E_k(T) &\leq \beta(1 + C_T)(E_k(0) - E_k(T)) \\ \implies E_k(T) &\leq \gamma E_k(0) \end{aligned}$$

avec  $\gamma = \frac{\beta(1+C_T)}{1+\beta(1+C_T)} < 1$ .

Appliquons cet argument sur  $[(m-1)T, mT]$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , on obtient

$$E_k(mT) \leq \gamma E_k((m-1)T) \leq \dots \gamma^m E_k(0), \quad m \in \mathbb{N}^*$$

↓

$$E_k(mT) \leq e^{-\omega m T} E_k(0)$$

avec  $\omega = \frac{1}{T} \ln \left( \frac{1}{\gamma} \right) > 0$ .

Pour  $t > 0$  tel que

$$(m-1)T < t \leq mT$$

En utilisant la décroissance de  $E_k$ , on obtient

$$\begin{aligned} E_k(t) &\leq E_k((m-1)T) \leq e^{-\omega(m-1)T} E_k(0) = e^{-\omega m T} e^{\omega T} E_k(0) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} e^{-\omega t} E_k(0) \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.

## Chapitre 4

# Stabilisation polynômiale

Le but de ce chapitre est d'établir la décroissance de l'énergie du problème (3.1.1) avec un contrôleur interne dans un domaine délimité à deux(2) dimensions et avec une densité non négligeable. Pour montrer cela, on aura besoin de définir l'énergie  $E(t)$  du problème principal comme suit

$$E(t) = \sum_{k \geq 1} E_k(t)$$

où

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \int_{r_0}^1 \left( \left( \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} (u^{(k)})^2 + (u_t^{(k)})^2 \right) r dr + \frac{k^2}{2} (u^{(k)}(1))^2 + \frac{m(1)}{2} (u_t^{(k)}(1))^2$$

est l'énergie du problème (3.1.1).

Le résultat de la stabilité exponentielle du problème (3.1.1), l'analyse de Fourier et les techniques utilisées dans [12] et [18] nous permettent de déduire le résultat de la stabilité polynômiale du problème (1)-(2).

### Définition

On dit que la stabilité de l'énergie  $E(t)$  d'un problème est polynômiale si

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\alpha} E(0), \quad \forall t > 0$$

avec  $C$  et  $\alpha$  des constantes positives. Dans ce cas il faut prendre des données initiales régulières (appartenant à  $\mathcal{D}(A)$ ).

### Théorème

Considérons les données du théorème 8.

Alors pour tout  $V_0 = (u_0, u_1, u/\Gamma) \in D(A)$ , il existe une constante  $M > 0$  telle que l'énergie  $E(t)$  des solutions particulières  $u$  du problème (1)-(2) décroît de la manière suivante

$$E(t) \leq \frac{M}{t} \sum_{k \geq 1} E_k(0), \quad \forall t > 0. \quad (4.0.1)$$

### Preuve

On considère la fonction  $x \mapsto xe^{-x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Sachant que  $xe^{-x} \leq \max_{x \geq 0} xe^{-x} < +\infty$ , alors

$$\exists c > 0, : xe^{-x} \leq c, \quad \forall x \geq 0.$$

En injectant ceci dans (3.2.26), on obtient

$$E_k(t) \leq \frac{M_1 c}{t} E_k(0) = \frac{M}{t} E_k(0), \quad \forall t > 0.$$

En utilisant l'analyse de **Fourier**, on obtient au final

$$E(t) = \sum_{k \geq 1} E_k(0) \leq \frac{M}{t} \sum_{k \geq 1} E_k(0), \quad \forall t > 0.$$

Ce qui achève la preuve.

## Conclusion générale

Dans ce travail, on a démontré l'existence et l'unicité de la solution d'un problème d'évolution sous l'action d'un contrôleur dynamique interne.

Après une reformulation du problème de départ en un problème unidimensionnel qu'on a séparé en deux(2) problèmes :

- un premier problème sans le contrôleur dynamique interne,
- un deuxième problème qui constitue le reste.

et une estimation de l'énergie du premier problème (*resp.* du deuxième problème) par son énergie initiale (*resp.* par l'énergie du problème de départ reformulé), on a obtenu enfin la stabilité forte sur le segment

$$r_0 < r < 1,$$

$r_0 > 0$  étant donnée.

Ce qui nous a permis avec l'aide de l'analyse de Fourier, la stabilité faible sur toute la couronne  $\Omega = \{u \in \mathbb{R}^2 : 0 < r_0 < |u| < 1, r_0 \text{ donnée}\}$ .

La dissipation de l'énergie est un phénomène fréquemment observé au niveau de la centrale thermique à vapeur de **Cap-Djinet**, surtout au niveau de la phase **transformation** de l'énergie mécanique en énergie électrique. Elle est nécessaire dans le cas où l'énergie fournie à un auxiliaire en service est élevée.

# Bibliographie

- [1] Cours sémi-groupe, master 2 analyse mathématiques, Mme Laoubi Karima
- [2] Opérateurs non bornés et Théorie Spectrale Master Analyse Mathématiques, Mme Laoubi Karima.
- [3] K. LAOUBI. Contrôle et stabilisation dynamique d'un problème hyperbolique. Thèse de Doctorat.
- [4] J. Lions et E. Magenes Problèmes aux limites non homogènes et applications,I-III, Dunod, Paris, 1968-1970. Masson, Paris 1994.
- [5] Cours Espace de Sobolev, Master Analyse Mathématiques, Mme Djamila Seba.
- [6] F. Abdallah, S. Nicaise, J. Valein and A. Wehbe, Uniformly exponentially or polynomially stable approximations for second order evolution equations and some applications, ESAIM Control Optim. Calc. Var, 19 (2013), no. 3, pp. 844-887.
- [7] Cours Analyse Hilbertienne, Université de Renne 1
- [8] Cours Théorie de Distribution, Master Analyse Mathématiques, Mme Meskhine.
- [9] Xiayu Fu, Stabilization of hyperbolic equations with mixed boundary conditions, Mathematical Control and Related Fields, 2015, 5 (4) : 761 - 780. doi.10.3934/mcrf.2015.5.761
- [10] Fu, X., Kong, L. Longtime Behavior of wave Equation with Kinetic Boundary Condition. Appl Math Optim 84, 2803-2817 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00245-020-09730-y>
- [11] M.Abramowitz and I. A .Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas , Graphs , and Mathematical Tables* , New York :Dover,pp.358-364,1972.
- [12] F. Alabau , P. Cannarsa and V. Komornik,*Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations* , J.Evol. Equ. 2 , 127-150 (2002)
- [13] A.Batkai ,K.J Engel ,*Polynomial stability of operator semigroups* , Math.Nachr.279,N0.13-14,1425-1440 (2006)
- [14]
- [15] A.Heminna. *Stabilisation frontière de problèmes de Ventcel*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., 5 :591–622 (electronic), 2000.
- [16] A.Heminna, *Stabilisation de problèmes de Ventcel* C.R. Acad.Sci.Paris , 328, série I (1999) 1171-1174
- [17] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization, the multiplier method*, volume 36 of RMA. Masson, Paris, 1994.
- [18] S. Nicaise and K. Laoubi, *Polynomial stabilization of the wave equation with Ventcel's boundary conditions*, Math. Nachr.283, NO.10 ,1428-1438(2010) .
- [19] S.Nicaise. *Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications*. Rendiconti di Matematica Serie VII 23 :83–116, 2003.

- [20] A.D. Ventcel. *On boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes.* Theor. Probability Appl. 4 :164–177, 1959.
- [21] J.E.M.Rivera and R.Racke ,*Polynomial stability in two - dimensional magneto -elasticity* , IMA J .Appl. Math .66 (2001) 269-283
- [22] X. Zhang and E.Zuazua ,*Polynomial decay and control of a 1-d hyperbolic coupled system* ,
- [23] GN .Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions* ,Cambridge , University Press ,1922(1996).
- [24] X.Zhang and E.Zuazua. *Polynomial decay and control of a 1-d hyperbolic-parabolic coupled system.* J. Differential Equations 204 :380–438, 2004.