

République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université M'hamed Bougara de BOUMERDES
Faculté des science
Département de mathématiques



Etude de la décroissance de
l'énergie de certains problèmes
d'évolution de type hyperbolique

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de

Master en Analyse Mathématique

par
Zerrouki Houria

Soutenu le 7 Juin 2022 devant le jury composé de

Mechrouk Salima	MCA	UMBB	Président
Adjabi Yacine	MCA	UMBB	Examineur
Naima Meskine	MAA	UMBB	Encadreur
Karima Laoubi	MCA	UMBB	Co-Encadreur

Année Universitaire 2021/2022

Table des matières

Remerciement	3
Remerciement	3
Résumé	4
Introduction	5
1 Rappels et Préliminaires	7
1.1 Analyse fonctionnelle	7
1.1.1 Espace de Hilbert	7
1.1.2 Analyse Hilbertienne	10
1.1.3 Orthogonalité	11
1.1.4 Projection orthogonale	12
1.1.5 Théorie Spéctrale des opérateurs compacts auto adjoints	13
1.2 Théorie des distributions	14
1.3 Espace de Sobolev	14
1.3.1 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$	14
1.3.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité de Poincaré	15
1.3.3 Inégalité de Poincaré	15
1.3.4 Théorème de trace dans $H^1(\Omega)$	16
1.4 Généralités sur les EDP	16
1.4.1 Conditions aux limites d'une EDP	17
1.5 Théorie des semi-groupes	20
1.5.1 Définition d'un C_0 semi-groupe	20

1.5.2	Générateur Infinitésimal	20
1.5.3	Théorème de Hille-Yosida	21
1.5.4	Théorème de Lumer-Philips	21
1.5.5	Démonstration du théorème de Lumer-Philips	21
1.6	Séries de Fourier	24
1.6.1	Coefficients de Fourier	25
1.7	Fonctions de Bessel	25
1.7.1	Equations et fonctions de Bessel	26
1.7.2	Quelques propriétés des fonctions de Bessel de 1 ^{re} espèce	27
1.7.3	Zéros de Bessel	29
1.7.4	Propriétés des zéros de Bessel	30
2	Etude de l'existence et l'unicité de la solution	31
2.1	Écriture du problème équivalent	32
2.2	Étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème équivalent	33
3	Stabilité exponentielle	40
4	Stabilisation polynômiale	62
	Conclusion générale	65
	Bibliographie	66

Remerciement

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nous avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Mme N. Meskine.
Mes remerciements s'adressent aussi à Mme K. Laoubi ma co-promotrice pour son aide et pour ses précieux conseils

Nous tenons également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'examiner notre travail.
Nous remercions également notre Chef de Département de Mathématiques Monsieur Y. Ferrani.

Je remercie mes très chers parents(R.Z), mes soeurs, mes frères et mon fiancé(Y) qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Je tiens à remercier également tous les enseignants qui nous avons apporté leur aide au bon acheminement de parcours éducatif et qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Résumé

Le but de ce travail est de donner des résultats liés à un problème de stabilité d'ondes (étudié par M.M. Cavalcanti et al [10]) en présence de deux contrôleurs interne et frontière.

Sous quelques hypothèses appropriées, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la théorie des semi groupes. Pour la stabilité, nous prouvons tout d'abord que la dissipation obtenue par les deux contrôleurs est forte et suffisante pour stabiliser le système à une dimension de façon exponentielle. Ce résultat est alors utilisée pour stabiliser le système tout entier.

Mots clés : Equation des Ondes, Contrôle interne et frontière, stabilité, Valeurs propres. Densité non négligeable.

Introduction

L'évolution au cours du temps de nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou mécaniques est modélisée par des équations aux dérivées partielles (EDP). Dans ce mémoire nous nous intéressons à la stabilisation de l'équation des ondes posée dans un ouvert bornée de \mathbb{R}^2 avec deux contrôleurs, le premier imposé à l'intérieur du domaine, l'autre agissant sur sa frontière. Ce système modélise les vibrations dynamiques d'un corps élastique.

Plus précisément : Nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x; t) - \Delta u(x; t) + a(x)g(u_t) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ y_{tt} + b(x)g_0(y_t) + \frac{\partial u}{\partial \nu} + u - \Delta_T y = 0 & \text{dans } \Gamma \times (0, T) \\ u(x; t) = y(x; t) & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ u(0; \cdot) = u_0(x); u_t(0; \cdot) = u_1(x) & \text{dans } \Omega \\ y(0; \cdot) = y_0(x); y_t(0; \cdot) = y_1(x) & \text{dans } \Gamma \end{cases} \quad (0.0.1)$$

où Ω est un Disque de centre 0 et de rayon 1 de frontière Γ telle que :

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1, x_2)\|_2 \leq 1\}$$

$$\Gamma = \partial\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|(x_1, x_2)\|_2 = 1\}$$

Δ_T : désigne le Laplacien tangentiel.

La condition sur Γ_1 est la condition aux limites dynamique caractérisée par la présence du terme u_{tt} sur la frontière. En l'absence de u_{tt} , cette condition est appelée condition aux limites statique de Wentzell. Cette condition est généralement caractérisée par la présence d'opérateurs différentiels tangentiels du même ordre que l'opérateur principal.

Plusieurs méthodes ont été développées pour étudier la décroissance de l'énergie de différents problèmes d'évolutions. Parmi celles ci on peut citer : la méthode d'estimation de l'énergie en utilisant la technique des multiplicateurs

[3] et la méthode des bases de Riez basée sur l'analyse de Fourier [4] .

L'objectif de ce travail est d'étudier deux types de décroissance d'énergie, exponentielle et polynômiale du problème considéré en utilisant la théorie spectrale, une méthode de calculs intégrales par multiplicateurs et les fonctions de Bessel.

Ce mémoire se divise en quatre chapitres :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre nous rappelons quelques notions de base utilisées le long de ce mémoire à savoir ; les Distributions, les EDP, les Espaces de Sobolev et les fonctions de Bessel.

Nous présentons également quelques théorèmes sur la théorie des semi groupes et l'analyse de Fourier qui seront utilisées aussi dans ce mémoire. Cette partie est largement inspirée de [1], [2], [5],[6],[7] et [9].

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, On montre que le problème étudié est bien posé, pour cela, nous prouvons un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème considéré en utilisant la théorie des semi groupes en particulier le théorème de Hille Yosida.

Chapitre 3 : Dans le troisième chapitre, nous étudierons la stabilité exponentielle du problème à une dimension en utilisant la théorie spectrale et la technique des multiplicateurs.

Chapitre 4 : Dans ce dernier chapitre on traite le problème de la stabilité polynômiale du problème de type hyperbolique pour l'équation des ondes posée dans un disque de frontière Γ .

1

Rappels et Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et théorèmes utiles le long de ce mémoire. (Voir [1],[2],[5],[6],[7],[8] et [9])

1.1 Analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel, on appelle produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application de $E \times E$ dans le corp $K = \mathbb{C}$ vérifiant :*

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, pour tout $u, v \in E$
2. $\langle \lambda u_1 + u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$, pour tout $u, v \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$
3. $\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Définition 1.1.2 *Un espace de Hilbert est un espace de Banach $((E; \|\cdot\|_E)$ espace normé complet) muni d'un produit scalaire pour la norme associée :*

$$\|u\|_E = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \text{ (i.e.) } \|u\|_E^2 = \langle u, u \rangle.$$

Définition 1.1.3 *(Système orthonormé)*

Soit E un espace de Hilbert, la suite $\{e_n\}_{n \geq 1} \subset E$ est appelée un système orthonormé si

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

1. Si $e_n \perp e_m$ on dit que le système $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est orthogonal.
2. Si le système $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est orthogonal alors le système $\left\{ \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}_{n \geq 1}$ est orthonormé.

Définition 1.1.4 *(Base Hilbertienne)*

Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ On appelle base Hilbertienne (dénombrable) de E une famille dénombrable $\{e_n\}_{n \geq 1}$ d'éléments de E orthonormée telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans E .

Définition 1.1.5 *(Espace séparable)*

Un espace vectoriel normé qui contient une partie dénombrable dense est dit espace séparable.

Exemple 1.1.1 Les espaces \mathbb{R} et \mathbb{C} sont séparables (par exemple, \mathbb{Q} est un sous-ensemble dénombrable dense dans \mathbb{R}).

Théorème 1.1.6 Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.

Proposition 1.1.7 Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base Hilbertienne de E , il existe une suite unique $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par $U_n = (U, e_n)$, telle que la somme partielle $\sum_{n=1}^p u_n e_n$ converge vers u quand p tends vers l'infinie. De plus on a

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \sum_{n \geq 1} |(u, e_n)|^2.$$

alors, on écrit

$$u = \sum_{n \geq 1} (u, e_n) e_n.$$

Théorème 1.1.8 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée dans l'espace de Hilbert E , alors on peut extraire une sous-suite qui converge.

Théorème 1.1.9 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite qui converge faiblement vers u et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une autre suite converge faiblement vers v ; alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, u_n \rangle = \langle v, u \rangle.$$

Proposition 1.1.10 Soit E et F deux espaces de Hilbert, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$ une suite qui converge faiblement vers $u \in E$, soit $A \in L(E; F)$. Alors la suite $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers Au dans F .

1.1.2 Analyse Hilbertienne

Espaces pré-hilbertiens

Définition 1.1.11 *Etant donné un espace vectoriel X sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et une application $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$, on dit que (\cdot, \cdot) est un produit scalaire sur X si*

$$(i) \quad \forall u, v, w \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},$$

$$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$$

(linéarité par rapport à la première composante)

$$(ii) \quad \forall u, v \in X,$$

$$(v, u) = \overline{(u, v)}$$

(hermitivité)

$$(iii) \quad \forall u \in X \quad 0,$$

$$(u, u) > 0$$

(positivité).

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace pré-hilbertien.

Lemme 1.1.12 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Soit X un espace pré-hilbertien, alors

$$|(u, v)| \leq \sqrt{(u, u)} \sqrt{(v, v)}, \forall u, v \in X.$$

Preuve 1.1.1 *Si u ou v est égal à 0 l'inégalité est immédiate. Sinon, on pose $w = u - \frac{(u, v)}{(v, v)}v$ et par positivité on doit avoir $(w, w) \geq 0$. En développant on*

obtient

$$0 \leq (w, w) = (u, u) + \frac{|(u, v)|^2}{(v, v)^2} (v, v) - 2 \frac{|(u, v)|^2}{(v, v)}$$

de sorte que $(u, u) \geq \frac{|(u, v)|^2}{(v, v)}$, ce qui entraîne la conclusion.

Espace de Hilbert

Définition 1.1.13 *Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet.*

1.1.3 Orthogonalité

Définition 1.1.14 *Soit H un espace préhilbertien sur \mathbb{K} . Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dit orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, et qu'on note $x \perp y$.*

Définition 1.1.15 *Soit H un préhilbertien et soit A un sous-ensemble de H . un vecteur $x \in H$ et l'ensemble A sont dit orthogonaux dans H si x est orthogonal à tout vecteur de A , qu'on note $x \perp A$. Le complémentaire orthogonal de A est l'ensemble*

$$A^\perp = \{x \in H : x \perp A\} (= \{x \in H : x \perp a, \forall a \in A\} = \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0, \forall a \in A\})$$

i.e. l'ensemble A^\perp formé des vecteurs de H qui sont orthogonaux à tout vecteur de A (Si $A = \emptyset$ alors $A^\perp = H$).

Soient M et N deux sous-ensembles de H . M et N sont orthogonaux si pour tout $x \in M, y \in N, x \perp y$, et qu'on note $M \perp N$.

Proposition 1.1.16 *Soit E est un préhilbertien et $x, y \in E$ alors :*

1. $x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (Le théorème de Pythagore)

$$2. x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ et } \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2; \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

Corollaire 1.1.17 (*Décomposition orthogonale*)

Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé. Alors, tout vecteur $x \in H$ peut être représenté de manière unique comme

$$x = y + z, y \in F, z \in F^\perp.$$

Cette décomposition orthogonale est notée $H = F \oplus F^\perp$ c'est une somme directe.

1.1.4 Projection orthogonale

Définition 1.1.18 Dans les hypothèses du (1.1.17), l'application

$$P_F : H \rightarrow H, P_F x = y$$

est appelée la projection orthogonale de H sur F .

Corollaire 1.1.19 Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H . Alors $F^{\perp\perp} = F$.

Preuve 1.1.2 On a $F \subset F^{\perp\perp}$, Maintenant on suppose que $x \in F^{\perp\perp}$, alors il existe un unique $y \in F$ et $z \in F^\perp$ tel que $x = y + z$. Comme $y \in F$ et $x \in F^{\perp\perp}$, $0 = \langle y, z \rangle = \langle x, z \rangle$. alors

$$0 = \langle x, z \rangle = \langle y + z, z \rangle = \langle y, z \rangle + \langle z, z \rangle = \|z\|^2.$$

d'où $z = 0$ et donc $x = y \in F$. Ainsi $F^{\perp\perp} \subset F$ ce qui termine la preuve.

1.1.5 Théorie Spectrale des opérateurs compacts auto adjoints

Le spectre d'un opérateur

Soit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et T un endomorphisme de E . On appelle

- Spectre de T , l'ensemble

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \text{ ne soit pas inversible}\}$$

- Spectre ponctuel de T , l'ensemble

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$$

Opérateur auto adjoint

Soit T est un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert, soit $T \in L(H)$, l'opérateur adjoint $T^* \in L(H)$ est définie par

$$\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \text{ pour } x, y \in H.$$

Un opérateur $T \in L(H)$ est dit auto-adjoint si $T^* = T$, i.e

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, x, y \in H$$

.

Diagonalisation des opérateurs auto adjoints compacts

Théorème 1.1.20 *Soit H un espace de Hilbert sur \mathbb{K} et $T \in K(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T .*

Preuve 1.1.3 voir([5])

1.2 Théorie des distributions

Définition 1.2.1 *On appelle distribution toute fonctionnelle linéaire et continue sur D . L'ensemble des distributions est noté D' .*

Remarque 1.2.1 *Une distribution est une fonctionnelle, et non une fonction.*

Propriété 1.2.2 *L'espace D' est un espace vectoriel avec les lois suivantes :*

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$$

1.3 Espace de Sobolev

1.3.1 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on note $H^1(\Omega)$ l'espace des distributions $L^2(\Omega)$ ayant toutes leurs dérivées partielles d'ordre 1 appartenant à $L^2(\Omega)$. Donc en notant les dérivées partielles (au sens des distribution) $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ nous posons :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \partial_\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha = 1 \dots n\}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (uv + \nabla v \nabla v) dx$$

On notera $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ la norme associée

1.3.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité de Poincaré

On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence des fonctions de $D(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$, ces fonctions vérifiant une inégalité fondamentale dite Inégalité de Poincaré.

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

1.3.3 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , alors il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

l'espace $H^m(\Omega)$ est défini par :

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^{\alpha} v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

ou

$$\partial^{\alpha} v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \text{ et } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

cet espace est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} v dx$$

et la norme associée est notée $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$

1.3.4 Théorème de trace dans $H^1(\Omega)$

Soit (Ω) un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^1 par morceaux, alors l'application de trace défini par :

$$\begin{aligned}\gamma_0 : D(\bar{\Omega}) &\rightarrow C^0(\Gamma) \\ v &\rightarrow \gamma_0(v) = v|_{\Gamma}\end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

Cela implique en particulier :

$$\exists c > 0, \forall v \in H^1(\Omega) : \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Pour plus de détails voir la référence [5]

1.4 Généralités sur les EDP

On distingue trois grandes catégories d'EDP :

- Les équations de type **elliptique** qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est à dire n'évoluant pas au cours du temps). Comme exemple **l'équation de Laplace**

$$-\Delta u = f$$

d'inconnue $u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et de donnée f .

- Les équations de type **parabolique**, qui modélisent souvent l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles associés à des processus de diffusion.

L'équation de la chaleur en est un prototype :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$$

d'inconnue $u(x, t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$ et de donnée f .

- Les équations de type **hyperbolique** qui modélisent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation d'ondes. On identifie deux prototypes pour cette classe d'EDP :

- **L'équation du transport**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

d'inconnue $u(x, t)$, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

- **L'équation des ondes**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

d'inconnue $u(x, t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t > 0$ et de donnée f .

1.4.1 Conditions aux limites d'une EDP

Se donner les conditions aux limites, c'est donner des renseignements sur la fonction u ou sur ses dérivées sur le bord du domaine. Ils peuvent être de différents types, voyons les principaux :

Condition de Dirichlet

En mathématiques, une condition aux limites de **Dirichlet** est imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières ou

limites du domaine.

Pour une équation différentielle ordinaire, par exemple

$$y'' + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle $[a, b]$ s'exprime par :

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

où α et β sont deux nombres donnés.

Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple

$$\Delta y + y = 0$$

où Δ est le Laplacien (opérateur différentiel), la condition aux limites de Dirichlet sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$y(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où f est une fonction connue définie sur la frontière $\partial\Omega$.

Condition de Neuman

En mathématiques, une condition aux limites de **Neumann** est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières ou limites du domaine.

Pour une équation différentielle, par exemple :

$$y'' + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle $[a, b]$ s'exprime par :

$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta$$

où α et β sont deux nombres donnés.

Pour une équation aux dérivées partielles, par exemple

$$\Delta y + y = 0$$

la condition aux limites de Dirichlet sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}} = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où f est une fonction connue définie sur la frontière $\partial\Omega$ et \vec{n} est le vecteur normal à la frontière $\partial\Omega$.

La dérivée normale dans le membre de gauche de l'équation, est définie par

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}}(x) = \overrightarrow{\text{grad}} y(x) \cdot \vec{n}(x)$$

Condition de Robin

En mathématique, une condition aux limites de **Robin** (ou de troisième type) est un type de condition aux limites. Elle est également appelée condition aux limites de Fourier. Imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles, il s'agit d'une relation linéaire entre les valeurs

de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine

.

1.5 Théorie des semi-groupes

1.5.1 Définition d'un C_0 semi-groupe

Définition 1.5.1 Soit E un espace de Banach, une famille à un paramètre $G(t)$, $0 \leq t < +\infty$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ est appelée semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur E si :

1. $G(0) = I$
2. $G(t + s) = G(t).G(s) \forall t, s \geq 0$

• Un tel semi groupe est dit uniformément continu si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|G(t) - I\| = 0$$

On dit dans ce cas que $G(t)$ est un C_0 semi groupe [4].

1.5.2 Générateur Infinitésimal

Définition 1.5.2 Le générateur infinitésimal A d'un C_0 -semi groupe $S(t)$ est définie par :

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [S(t)x - x]$$

De domaine :

$$D(A) = \left\{ x \in H, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [S(t)x - x] \text{ existe} \right\}$$

1.5.3 Théorème de Hille-Yosida

Soit A un opérateur linéaire (non nécessairement borné) dans un espace de Banach E . Alors A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction si et seulement si :

1. A est fermé à domaine dense.
2. L'ensemble résolvant $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A \text{ est inversible de } D(A) \rightarrow E\}$ contient \mathbb{R}_+^* , de plus $\forall \lambda > 0$, on a

$$\|R(\lambda, A)\| = \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

1.5.4 Théorème de Lumer-Philips

Soit A un opérateur linéaire à domaine dense dans un espace de Banach E , alors :

1. Si A est dissipatif et qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 - A) = E$ Alors A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction.
2. Si A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction Alors $Im(\lambda_0 - A) = E$, et $\lambda_0 > 0$ et A est dissipatif.

De plus : $\forall x \in D(A)$, $\forall x^* \in F(x)$:

$$Re \langle x^*, Ax \rangle \leq 0$$

1.5.5 Démonstration du théorème de Lumer-Philips

La preuve est inspirée de la référence ([8]).

Preuve 1.5.1 *i/-* A dissipatif $\implies \|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\|$, $\forall x \in D(A) \implies \lambda I - A$ injectif

En particulier pour λ_0 :

- $\lambda_0 I - A$ est bijectif et de plus : $\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$
donc $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ borné et continue et A est fermé.

En utilisant le théorème de Hille-Yosida, on en déduit que A est G.I d'un C_0 semi-groupe de contraction. (Car $\frac{1}{\lambda_0} < 1$)

- $\Lambda = \{\lambda > 0 : \text{Im}(\lambda I - A) = E\} \subset]0, +\infty[$.

$$\lambda \in \Lambda \implies \lambda \in \rho(A) \implies \exists \underbrace{V(\lambda)}_{\text{ouvert}} \subset \rho(A)$$

D'où $V(\lambda) \cap]0, +\infty[\subset \rho(A)$ est un voisinage de λ dans $]0, +\infty[$ et Λ est ouvert

- On démontre que Λ est fermé : Soit $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$
étant donné : $y \in E$, $\forall n, \exists x_n \in D(A) / \lambda x_n - Ax_n = y$ d'après la surjectivité On a $\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n} \cdot \|y\| \leq C$. de plus

$$\begin{aligned} A_m \|x_n - x_m\| &\leq \|\lambda_m(x_n - x_m)\| - \|A(x_n - x_m)\| \\ &= |\lambda_n - \lambda_m| \cdot \|x_m\| \\ &\leq C |\lambda_n - \lambda_m| \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} \lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m) &= \lambda_m x_n - Ax_n - \underbrace{\lambda_m x_m - Ax_m}_y \\ &= \lambda_m \cdot x_n - \lambda_n \cdot x_n - y \end{aligned}$$

λ_n étant une suite de Cauchy donc x_n est une suite de Cauchy, et
on a $x_n \xrightarrow{C.V} x$

$$\begin{cases} Ax_n = -y + \lambda x_n \longrightarrow -y + \lambda x \\ x_n \longrightarrow x \end{cases} \quad A \text{ fermé} \Rightarrow x \in D(A) \text{ et } Ax = -y + \lambda x$$

$$\implies \lambda \in \Lambda$$

C.S : $Im(\lambda I - A) = E, \quad \forall \lambda > 0.$

A dissipatif $\implies Im(\lambda I - A)$ injectif $\quad \forall \lambda > 0. \implies (\lambda I - A)^{-1}$ existe
et

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Le théorème m de H.Y $\implies A$ est G.I d'un $C_0 \frac{1}{2}$ -groupe de contraction.

- Reste à montrer : $Re \langle x^*, Ax \rangle \leq 0$

$$x \in D(A), \quad x^* \in F(x)$$

$$\begin{aligned} |\langle G(t)x, x^* \rangle| &\leq \|G(t)x\| \cdot \|x^*\| \\ &\leq \|x\| \cdot \|x^*\| = \|x\|^2 \\ \langle G(t)x - x, x^* \rangle &= \langle G(t)x, x^* \rangle - \underbrace{\langle x, x^* \rangle}_{\|x\|^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc $Re \langle G(t)x - x, x^* \rangle \leq 0.$ On dévise par $t > 0$ et on fait tendre
 $t \rightarrow \infty$, on obtient

$$Re \langle Ax, x^* \rangle < 0.$$

Corollaire 1.5.1 *Soit A fermé à domaine dense si A et A^* sont deux opérateurs continus dissipatifs, alors : A est G.I d'un \mathcal{C}_0 semi-groupe de contraction.*

Preuve 1.5.2 $\lambda = 1$, $Im(I - A) = E$, On suppose que $Im(I - A) \neq E$, on applique le théorème de Hahn Banach. comme $Im(I - A)$ est un sous espace vectoriel fermé de E :

$$\exists x^* \in E^*, x^* \neq 0 \quad \text{et} \quad x^*(Im(I - A)) = \{0\}$$

$$x^* \in D(A^*) \quad \text{et} \quad \langle x^* - Ax^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in D(A).$$

$D(A)$ dense alors $x^* - Ax^* = 0$

A^* dissipatif donc $I - A^*$ est injectif et $(I - A^*)x^* = 0$ implique que $x^* = 0$, on aboutit donc à une contradiction et $Im(I - A) = E$

1.6 Séries de Fourier

Définition 1.6.1 *Il est possible d'exprimer une grandeur périodique par une somme de sinus et de cosinus qui sont plus simples à manipuler physiquement et mathématiquement. Cette somme est appelée **série de Fourier**. La série de Fourier d'une fonction $f(x)$ périodique de période 2π est défini par :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \end{aligned}$$

ou sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp^{inx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

.

1.6.1 Coefficients de Fourier

Définition 1.6.2 • *Coefficients reels de f :*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, n > 0$$

• *Coefficients complexes de f :*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Remarque 1.6.1

$$f \text{ paire} \Rightarrow b_n = 0, \forall n > 0 \text{ et } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, n \geq 0$$

.

$$f \text{ impaire} \Rightarrow a_n = 0, \forall n > 0 \text{ et } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt, n \geq 0$$

.

1.7 Fonctions de Bessel

1.7.1 Equations et fonctions de Bessel

cette section est inspirée des références [1] et [2].

Les fonctions de Bessel découvertes par le mathématicien suisse Daniel Bernoulli, portent le nom de Friedrich Bessel et sont les solutions y de l'équation différentielle de Bessel :

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + (m^2 x^2 - k^2) y = 0$$

Cette équation est équivalente à :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(m^2 - \frac{k^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (1.7.1)$$

où k est un nombre réel ou complexe .

Il existe deux sortes de fonctions de Bessel [1] :

- Les fonctions de Bessel d'ordre k de 1^{re} espèce notées J_k qui sont définies en 0 :

$$J_k(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(k+p)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2p}, \quad (1.7.2)$$

- Les fonctions de Bessel du second espèce Y_k définies par :

$$Y_k(x) = \lim_{\nu \rightarrow k} \left(\frac{\cos \pi \nu J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi \nu)} \right) \quad (1.7.3)$$

Les solutions Y_k ne sont pas définies en 0 , et on a (cf. [?]) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_k(x) = -\infty \quad (1.7.4)$$

La forme générale des solutions de (1.7.1) s'écrit :

$$y(x) = AJ_k(mx) + BY_k(mx) \quad (1.7.5)$$

1.7.2 Quelques propriétés des fonctions de Bessel de 1^{re} espèce

Les fonctions de Bessel d'ordre négatif

Les fonctions de Bessel d'ordre négatif sont définies par :

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x), \quad k > 0$$

Dérivées des fonctions de Bessel $J_k(x)$

$$\frac{d}{dx}[x^k J_k(mx)] = mx^k J_{k-1}(mx) \quad (1.7.6)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-k} J_k(mx)] = -mx^{-k} J_{k+1}(mx) \quad (1.7.7)$$

$$\frac{d}{dx}[J_k(mx)] = -mJ_{k+1}(mx) + \frac{k}{x}J_k(mx) \quad (1.7.8)$$

Développement en séries de puissance des fonctions de Bessel

$$J_k(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1)} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}}{p!(k+1)\dots(k+P)} \right)$$

Approximation asymptotique des fonctions de Bessel($x \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} J_k(x) &\simeq \sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)} \left[\left(1 - \frac{(4k^2 - 1^2)(4k^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{(4k^2 - 1^2)}{1!8x} - \dots\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Des deux dernières séries , on conclut que :

- Pour x grand (au voisinage de ∞) , on peut approcher $J_k(x)$ (cf.[1]) par :

$$J_k(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \tag{1.7.9}$$

- Pour k fixé et x au voisinage de 0, $J_k(x)$ peut être approchée ([1]) par :

$$J_k(x) \simeq \frac{1}{2^k k!} x^k \tag{1.7.10}$$

Intégrale de Bessel

Les fonctions de Bessel peuvent être aussi exprimer en fonctions d'intégrale (cf.[2]) :

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\theta - x \sin\theta) d\theta \tag{1.7.11}$$

1.7.3 Zéros de Bessel

On note $j_{k,1}, j_{k,2}, \dots$ les zéros positifs de $J_k(x)$, fonctions de Bessel d'ordre k de 1^{re} espèce .

Proposition 1.7.1 : Si $j_{k,1}, j_{k,2}, \dots$ (respectivement $j_{k+1,1}, j_{k+1,2}, \dots$) sont les zéros positifs de $J_k(x)$ (resp $J_{k+1}(x)$). Alors pour $k > -1$ on a :

$$0 < j_{k,1} < j_{k+1,1} < j_{k,2} < j_{k+1,2} < j_{k,3} < \dots \quad (1.7.12)$$

Ce résultat est souvent exprimé par l'expression : " les zéros de $J_k(x)$ sont entrelacés avec ceux de $J_{k+1}(x)$ " (cf.[1]).

Preuve

Pour montrer le résultat (1.7.12) , on utilise les formules de dérivation (1.7.6) et (1.7.7) pour $m = 1$:

$$\frac{d}{dx}[x^{-k} J_k(x)] = -x^{-k} J_{k+1}(x) \quad (1.7.13)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{k+1} J_{k+1}(x)] = x^{k+1} J_k(x) \quad (1.7.14)$$

L'équation (1.7.13) montre qu' entre deux zéros consécutifs de $x^{-k} J_k(x)$, il existe au moins un zéro de $x^{-k} J_{k+1}(x)$, de même l'équation (1.7.14) montre que lorsqu'on se place entre deux zéros consécutifs de $x^{k+1} J_{k+1}(x)$, il y a au moins un zéro de $x^{k+1} J_k(x)$. Le résultat (1.7.12) devient donc évident .

Le théorème suivant donne une caractérisation des zéros de Bessel , valable pour toutes les solutions de (1.7.1) tel que k soit un réel et $k^2 > \frac{1}{4}$:

Théorème 1.7.2 Soient $j_{k,i}$ et $j_{k,i+1}$ deux zéros consécutifs de $J_k(x)$ solution de première espèce de (1.7.1). Alors :

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{k^2 - \frac{1}{4}}{j_{k,i+1}^2}}} < j_{k,i+1} - j_{k,i} < \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{k^2 - \frac{1}{4}}{j_{k,i}^2}}}, \quad k^2 > \frac{1}{4} \quad (1.7.15)$$

On voit que l'écart tend vers π quand $j_{k,i}$ tend vers ∞

La démonstration de ce théorème est donnée dans ([1]).

1.7.4 Propriétés des zéros de Bessel

- Formule asymptotique : De l'expression (1.7.10), on en déduit que : $x = 0$ est un zéro d'ordre k . Les zéros suivants ; $x = j_{k,1}, j_{k,2}, \dots, j_{k,i}, \dots$ sont simples distincts et pour i grand, on peut approcher le i^{me} zéro par la formule asymptotique :

$$j_{k,i} \sim \pi \left(i + \frac{k}{2} - \frac{1}{4} \right), \quad i \geq 1 \quad (1.7.16)$$

- En admettant que tous les zéros sont simples (Si $J_k(x) = 0$ alors $J'_k(x) \neq 0$) il ne peut y avoir de zéro commun à $J_k(x)$ et $J_{k+1}(x)$.

Par récurrence, il est clair que tous les zéros de toutes les fonctions de Bessel sont entrelacés.

- Si k est réel et $k > -1$, les zéros des fonctions de Bessel sont tous réels [2].

2

Etude de l'existence et l'unicité de la solution

Nous étudions la condition nécessaire et suffisante pour obtenir une solution unique pour un problème des ondes avec conditions aux limites dynamiques.

Soit Ω un Disque de centre 0 et de rayon 1 de frontière Γ telle que :

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1, x_2)\|_2 \leq 1\}$$

$$\Gamma = \partial\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|(x_1, x_2)\|_2 = 1\}$$

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x; t) - \Delta u(x; t) + a(x)g(u_t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ y_{tt} + b(x)g_0(y_t) + \frac{\partial u}{\partial \nu} + u - \Delta_T y = 0 \quad \text{dans } \Gamma \times (0, T) \\ u(x; t) = y(x; t) \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ u(0; \cdot) = u_0(x); \quad u_t(0; \cdot) = u_1(x) \quad \text{dans } \Omega \\ y(0; \cdot) = y_0(x); \quad y_t(0; \cdot) = y_1(x) \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.0.1)$$

où $\nu(x)$ désigne le vecteur unitaire normal vers l'extérieure au point $x \in \Gamma$

$u = u(x, y, t)$ tel que $(x, t) \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$.

Δ : opérateur de laplace $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$

Δ_T :opérateur tangentiel

Dans la suite de notre mémoire, on se limite au cas ou les deux fonctions $a(x)$ et $b(x)$ sont deux constantes positives et $g = g_0 = Id$ i.e $g(u_t) = g_0(u_t) = u_t$.

2.1 Écriture du problème équivalent

Nous introduisons le problème équivalent : on désigne par H l'espace de Hilbert, où

$$H = \{Y = (u_1, u_2, y_1, y_2) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma) : y_1 = u_1/\Gamma\}$$

muni du produit scalaire suivant :

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \\ h_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \\ h_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{\Omega} (\nabla f_1 \nabla f_2 + g_1 g_2) dx + \int_{\Gamma_1} (h_1 h_2 + \nabla_T h_1 \nabla_T h_2 + k_1 k_2) d\Gamma$$

le problème précédent s'écrit comme

$$\begin{cases} Y_t(t) = AY(t) \\ Y(0) = Y_0 = (u_0, u_1, y_0, y_1) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

ou $A : D(A) \subset H \rightarrow H \rightarrow$ est un opérateur différentiel défini par

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \Delta & -a(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\partial_\nu - I & 0 & \Delta_T & -b(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - a(x)v \\ w \\ \Delta_T y - \partial_\nu u - u - b(x)w \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

De domaine

$$D(A) = \{U \in H, (v, w) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma), w = v|_\Gamma, \Delta_T y - b(x)w - \partial_\nu u \in L^2(\Gamma)\}$$

avec $U = (u, v, y, w)^t$

2.2 Étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème équivalent

Sous les hypothèses associées à ce problème, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.2.1 *Pour toute donnée initiale $U_0 \in H$, il existe une solution unique $U \in C([0; +1]; H)$ du problème précédent.*

De plus, si $U_0 \in D(A)$, la solution de problème précédent satisfait

$$U \in C([0; +1]; D(A)) \cap C^1([0; +1]; H)$$

Preuve 2.2.1 *Pour montrer l'existence d'une solution du système il suffit de montrer que A est un générateur infinitesimal d'un C_0 -semi groupe de contraction, c'est-à-dire A est maximal dissipatif, pour cela il suffit de montrer que A est dissipatif et maximal. voir théorème de Hille Yosida (Rappel).*

1. *A dissipatif*

Pour montrer que A est dissipatif il suffit de prouver qu'il existe $c > 0$ telle que

$$\langle AY, Y \rangle_H \leq 0$$

$$\langle AY, Y \rangle_H = \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx + \int_{\Omega} -avv + \Delta u v dx + \int_{\Gamma} wy d\Gamma + \int_{\Gamma} -\partial_{\nu} w - u w d\Gamma + \int_{\Gamma} \Delta_T y w - b w w d\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla_T y \nabla_T w d\Gamma$$

utilisant Green, on obtient :

$$\langle AY, Y \rangle_H = \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx + \int_{\Omega} avv dx - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma + \int_{\Gamma} wy d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} w d\Gamma - \int_{\Gamma} u w d\Gamma - \int_{\Gamma} \nabla_T y \nabla_T w d\Gamma - \int_{\Gamma} b w w d\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla_T y \nabla_T w d\Gamma$$

comme : $u = y$ sur Γ alors $u_t = y_t \Rightarrow v = w$ d'où

$$\langle AY, Y \rangle = -\left(\int_{\Omega} av^2 dx + \int_{\Gamma} bw^2 d\Gamma \right)$$

et comme $a, b \geq 0$ on obtient

$$\langle AY, Y \rangle_H < 0$$

Donc l'opérateur A est dissipatif

2. A maximal

Pour montrer la maximalité de A , il suffit de montrer que $\lambda I - A$ est sur-jectif pour chaque $\lambda > 0$, nous supposons que $F = (f_1; f_2; f_3; f_4)^t \in H$ et on cherche $Y = (u; v; y; w)^t \in D(A)$ solution de $(\lambda I - A)Y = F$; ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit :

$$(\lambda I - A)Y = F$$

posons $\lambda = 1$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \Delta & -a(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\partial_\nu - I & 0 & \Delta_T & -b(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

alors la solution est :

$$\begin{cases} u - v = f_1 \dots \dots \dots (1) \\ -\Delta u + v + av = f_2 \dots \dots \dots (2) \\ y - w = f_3 \dots \dots \dots (3) \\ w + \frac{\partial u}{\partial \nu} + u - \Delta_T y + bw = f_4 \dots \dots \dots (4) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

En additionnant (1) et (2) on trouve :

$$-\Delta u + u + av = f_1 + f_2$$

$$-\Delta u + u = f_1 + f_2 - av$$

En appliquant Lax Milgram :

$$\int_{\Omega} -\Delta uz dx + \int_{\Omega} uz dx = \int_{\Omega} (f_1 + f_2 - av)z dx$$

Utilisons la méthode d'intégration par partie, on trouve :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla z dx + \int_{\Omega} uz dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} z d\Gamma = \int_{\Omega} (f_1 + f_2 - av)z dx$$

En utilisant ensuite l'équation (4) on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla z dx + \int_{\Omega} uz dx - \int_{\Gamma} \Delta_T u z + uz + vz + bvz - f_4 z d\Gamma = \int_{\Omega} (f_1 + f_2 - av)z dx$$

Par la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla z dx + \int_{\Omega} uz dx + \int_{\Gamma} \nabla_T u \nabla_T z d\Gamma + \int_{\Gamma} uz d\Gamma = \int_{\Omega} (f_1 + f_2 - av)z dx + \int_{\Gamma} (f_4 - bv)z d\Gamma$$

Posons :

$$\begin{cases} a(u, z) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla z dx + \int_{\Omega} uz dx + \int_{\Gamma} \nabla_T u \nabla_T z d\Gamma + \int_{\Gamma} uz d\Gamma \\ L(z) = \int_{\Omega} (f_1 + f_2 - av)z dx + \int_{\Gamma} (f_4 - bv)z d\Gamma \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Pour montrer que la formulation variationnelle $a(u, z) = L(z)$ admet une unique solution, nous appliquons le théorème de Lax Milgram.

1. $L(z)$ continue

$$\begin{aligned}
 |L(z)| &= \left| \int_{\Gamma} (f_4 - v)z d\Gamma + \int_{\Omega} (f_1 + f_2 - av)z dx \right| \\
 &\leq \int_{\Gamma} |f_4 - v||z| d\Gamma + \int_{\Omega} |f_1 + f_2 - av||z| dx \\
 &\leq C_1 \|z\|_V - \|v\|_V \|z\|_V + C_2 \|z\|_{L^2(\Omega)} - a \|v\|_{L^2(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \max(C_1, C_2) \|z\|_V \\
 &\leq C \|z\|_V \\
 &\leq C \|v\|_H
 \end{aligned}$$

donc $L(z)$ est continue.

2. $a(u, z)$ continue

$$\begin{aligned}
 |a(u, z)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla z dx + \int_{\Omega} uz dx + \int_{\Gamma} \nabla_T u \nabla_T z d\Gamma + \int_{\Gamma} uz d\Gamma \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla z| dx + \int_{\Omega} |u| |z| dx + \int_{\Gamma} |\nabla_T u| |\nabla_T z| d\Gamma + \int_{\Gamma} |u| |z| d\Gamma \\
 &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma)} \|\nabla_T z\|_{L^2(\Gamma)} + \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|z\|_{L^2(\Gamma)} \\
 &\leq C (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma)} + \|u\|_{L^2(\Gamma)}) (\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Gamma)}) \\
 &\leq C \|u\|_V \|z\|_V
 \end{aligned}$$

Donc $a(u; z)$ est continue.

3. Coercivité de $a(.,.)$:

$$\begin{aligned}
 |a(u, u)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx + \int_{\Omega} |u||u| dx + \int_{\Gamma} |\nabla_T u| |\nabla_T u| d\Gamma + \int_{\Gamma} |u||u| d\Gamma \right| \\
 &\geq \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx + \int_{\Omega} |u||u| dx + \int_{\Gamma} |\nabla_T u| |\nabla_T u| d\Gamma \right| \\
 &\geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
 |a(u, u)| &\geq 1 \|u\|_V^2
 \end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est coercive.

$a(u; z)$ bilinéaire, continue et coercive sur V et $L(z)$ est linéaire continue sur V , d'après le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique faible $u \in V$ telle que

$$a(u; z) = L(z); \forall z \in H$$

En utilisant (1) et (2) on obtient :

$$\Delta u = u + av - (f_1 + f_2) \in L^2(\Omega)$$

comme u, v, f_1 et $f_2 \in L^2(\Omega)$

alors :

$$\Delta u \in L^2(\Omega)$$

d'ou :

$$v = u - f_1 \in H$$

finalement il existe $Y = (u; v; y; w)^t \in D(A)$ qui vérifie $(\lambda I - A)Y = F$ pour $\lambda > 0$ et $F \in H$. C'est-à-dire $(\lambda I - A)$ est surjectif, donc A est maximal. Le théorème de Lax Milgram assure l'existence et l'unicité de solution du problème

(2.1.2) Ceci terminé la démonstration.

L'énergie de la solution du problème (2.1.2) est définie par :

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} (u^{(k)})^2 + (u_t^{(k)})^2 \right) r dr + \frac{1}{2} (y_t^{(k)})^2 + \frac{k^2}{2} (u^{(k)}(1))^2 + \frac{1}{2} (y^{(k)}(1))^2. \quad (2.2.3)$$

En intégrant par partie, on vérifie que pour $(u_0; u_1; y_0; y_1) \in D(A)$ on a :

$$E'(t) = - \left(\int_0^1 a (u_t^{(k)})^2 dr \right) + b (u_t^{(k)}(1))^2. \quad (2.2.4)$$

3

Stabilité exponentielle

Définition

On a la stabilité exponentielle de l'énergie $E(t)$ d'un problème d'évolution, lorsque

$$E(t) \leq Ce^{-\omega t} E(0), \quad \forall t > 0$$

avec C et ω deux(2) constantes positives.

On considère le développement de Fourier de u :

$$u(r, \theta, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^{(k)}(r; t) e^{ik\theta}$$

$u^{(k)}$ est le coefficient de Fourier de u .

Le Laplacien en coordonnées polaires est donné par :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

on a :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} |_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial r} |_{\Gamma} \text{ et } \Delta_T u = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \text{ sur } \Gamma$$

le coefficient de fourier $u^{(k)}$ de u satisfait le problème suivant dans le domaine entre 0 et 1

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}^{(k)} + au_t^{(k)} - \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u^{(k)} + \frac{(k)^2}{r^2} u^{(k)} = 0 \quad (0, 1), t \geq 0 \\ u^{(k)} = y^{(k)} \quad \forall t \geq 0 \\ y_{tt}^{(k)}(1) + by_t^{(k)}(1) + y^{(k)}(1) + \frac{\partial y^{(k)}(1)}{\partial r} + (k)^2 y^{(k)}(1) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ u^{(k)}(0) = u_0^{(k)}; u_t^{(k)}(0) = u_1^{(k)} \quad \forall t \geq 0 \\ Y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}; y_t^{(k)}(0) = y_1^{(k)} \end{array} \right. \quad (3.0.1)$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}^{(k)} + au_t^{(k)} - \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u^{(k)} + \frac{(k)^2}{r^2} u^{(k)} = 0 \quad (0, 1), t \geq 0 \\ u_{tt}^{(k)}(1) + bu_t^{(k)}(1) + u^{(k)}(1) + \frac{\partial u^{(k)}(1)}{\partial r} + (k)^2 u^{(k)}(1) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ u^{(k)}(0) = u_0^{(k)}; u_t^{(k)}(0) = u_1^{(k)} \quad (0, 1) \end{array} \right. \quad (3.0.2)$$

Soit l'expression de l'énergie :

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} (u^{(k)})^2 + (u_t^{(k)})^2 \right) r dr + \frac{1}{2} (y_t^{(k)})^2 + \frac{k^2}{2} (u^{(k)}(1))^2 + \frac{1}{2} (y^{(k)}(1))^2.$$

Lemme 3.0.1 Soit u^k une solution régulière du problème, alors :

$$E'_k(t) = - \left(\int_0^1 a (u_t^k)^2 dr + b (u_t^k(1))^2 \right)$$

Preuve 3.0.1 Soit u^k une solution régulière du problème, utilisant l'intégration par parties et les conditions aux limites on obtient :

On a :

$$E'_k(t) = \int_0^1 \left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial r \partial t} + \frac{k^2}{r^2} u^{(k)} u_t^{(k)} + u_t^{(k)} u_{tt}^{(k)} \right) r dr + k^2 u^{(k)}(1) u_t^{(k)}(1) + y_t^{(k)}(1) y_{tt}^{(k)}(1) + y^{(k)}(1) y_t^{(k)}(1)$$

Comme :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial r \partial t} \right) r dr &= \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial r \partial t} r \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right) dr \\ &= - \int_0^1 u_t^k \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right) dr + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} r \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right) dr \\ &= - \int_0^1 u_t^k \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right) dr + u_t^{(k)}(1) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}(1) \\ &= - \int_0^1 u_t^k \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) u^{(k)} r dr + u_t^{(k)}(1) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}(1) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 E'_k(t) &= \int_0^1 (u_t^{(k)}(-\frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 u^{(k)}) + \frac{k^2}{r^2} u^{(k)} u_t^{(k)} + u_t^{(k)} u_{tt}^{(k)}) r dr + u_t^{(k)}(1) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}(1) \\
 &+ k^2 u^{(k)}(1) u_t^{(k)}(1) + y_t^{(k)}(1) y_{tt}^{(k)}(1) + y^{(k)}(1) y_t^{(k)}(1) \\
 &= \int_0^1 u_t^{(k)} [u_{tt}^{(k)} - \frac{1}{r^2} (r \frac{\partial}{\partial r})^2 u^{(k)} \\
 &+ \frac{(k)^2}{r^2} u^{(k)}] r dr + u_t^{(k)}(1) [k^2 u^{(k)}(1) + u_{tt}^{(k)}(1) + u^{(k)}(1) + \frac{\partial}{\partial r} u^{(k)}(1)] \\
 &= -(\int_0^1 a(u_t^{(k)})^2 dr + b(u_t^{(k)}(1))^2) \leq 0.
 \end{aligned}$$

car a, b sont positives

Afin de montrer la stabilisation exponentielle du problème (3.0.2), on écrit $u^{(k)}$ sous la forme : $u^{(k)} = v + w$ où v et w sont respectivement solutions des deux problèmes :

$$\begin{cases} v_{tt} - \frac{1}{r^2} (r \frac{\partial}{\partial r})^2 v + \frac{(k)^2}{r^2} v = 0 & \text{dans } (0, 1) \times R^+ \\ \frac{\partial v}{\partial r}(1) = -(k)^2 v(1) - v(1) - v_{tt}(1) & \text{sur } IR^+ \\ v(\cdot, 0) = u_0^{(k)}, v_t(\cdot, 0) = u_1^{(k)} & \text{dans } (0, 1) \end{cases} \quad (3.0.3)$$

$$\begin{cases} w_{tt} + aw_t - \frac{1}{r^2} (r \frac{\partial}{\partial r})^2 w + \frac{(k)^2}{r^2} w = 0 & \text{dans } (0, 1) \times R^+ \\ \frac{\partial w}{\partial r}(1) = -(k)^2 w(1) - w(1) - bw_t(1) - w_{tt}(1) & \text{sur } IR^+ \\ w(\cdot, 0) = 0, w_t(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } (0, 1) \end{cases} \quad (3.0.4)$$

• On commence par étudier le problème (3.0.3) :

L'étude de ce problème est liée à celle de l'opérateur positif, autoadjoint à résolvante compacte A_k (cf.[11]) défini sur $L^2((0, 1))$ par :

$$A_k(z) = -\frac{1}{r^2} (r \frac{\partial}{\partial r})^2 z + \frac{(k)^2}{r^2} z$$

et de domaine :

$$D(A_k) = \{z \in H^2(0, 1) : z(0) = 0 \text{ et } z_r(1) = -(1 + k^2)z(1)\}$$

Proposition 3.0.2 A_k est un opérateur positif auto-adjoint de $L^2(0; 1)$ en lui-même. De plus la résolvante $R_\lambda(A_k)$ est compacte pour tous les $\lambda \in \rho(A_k)$.

Preuve 3.0.2 On note (\cdot) le produit scalaire de $L^2(0; 1)$

$$\forall z \in D(A_k); (A_k z, z) = \int_0^1 \left(-\frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 z + \frac{(k)^2}{r^2} z \right) z dr$$

utilisons l'intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} (A_k z, z) &= \int_0^1 (-z_{rr} z) dr + \int_0^1 \left(\frac{k^2}{r^2} z^2 \right) z dr \\ &= [-z_r z]_0^1 + \int_0^1 (z_r)^2 dr + \int_0^1 \frac{k^2}{r^2} z^2 dr \\ &= -z_r(1)z(1) + \int_0^1 (z_r)^2 dr + \int_0^1 \frac{k^2}{r^2} z^2 dr \\ &= (1 + k^2)z(1)^2 + \int_0^1 (z_r)^2 dr + \int_0^1 \frac{k^2}{r^2} z^2 dr \\ (A_k z, z) &\geq 0 \end{aligned}$$

on définit :

$$D(A_k^*) = \{z \in H^2(0; 1) : \exists c > 0; \forall u \in D(A_k); |(z, A_k u)| \leq c \|u\|_{L^2(0;1)}\}$$

et :

$$\forall z \in D(A_k^*) \forall u \in D(A_k), (A_k^* z, u) = (z, A_k^* u)$$

on commence d'abord par montrer que :

$$D(A_k) \subset D(A_k^*) \text{ et } A_k^*|_{D(A_k)} = A_k$$

soient $u, z \in D(A_k)$

$$\begin{aligned} (z, A_k u) &= \int_0^1 z(-u_{rr})dr + \int_0^1 \frac{k^2}{r^2} uz dr \\ &= \int_0^1 u_r z_r dr - u_r(1)z(1) + u_r(0)z(0) + \int_0^1 1 \frac{k^2}{r^2} uz dr \\ &= z_r(1)u(1) - z_r(0)u(0) - u_r(1)z(1) + u_r(0)z(0) + \int_0^1 \frac{k^2}{r^2} uz dr \\ &= \int_0^1 u(-z_{rr})dr + \int_0^1 u(\frac{k^2}{r^2} z)dr \end{aligned}$$

d'après les conditions du probleme (3.0.2), on a :

$$(z, A_k u) = (A_k z, u)$$

d'ou A_K est un opérateur auto-adjoint

• si $M = \max[0; 1]|\frac{k^2}{r^2}|$ et $\lambda = -1 - M$ alors :

$$\begin{aligned} ((\lambda I - A)u, u) &= -\|u\|^2 - M\|u\|^2 - \|\frac{\partial u}{\partial r}\|^2 + \frac{k^2}{r^2}\|u\|^2 - (1 + k^2)\|u(1)\|^2, u \in D(A_k) \\ &\leq -(\|u\|^2 + \|\frac{\partial u}{\partial r}\|^2 + (1 + k^2)\|u(1)\|^2), u \in D(A_k) \end{aligned}$$

On trouve aussi que :

$$\|(\lambda I - A)u\|^2 \geq \|u\|^2 + \|\frac{\partial u}{\partial r}\|^2 + k^2\|u(1)\|^2, u \in D(A_k)$$

Cela signifie que $\lambda \in \rho(A_k)$ et $R_\lambda(A_k) = (\lambda I - A_k)^{-1}$ est compact.

Proposition 3.0.3 : Les valeurs propres λ^2 de A_k sont simples, strictement supérieures à k^2 et vérifient l'équation caractéristique suivante :

$$J_k(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + k^2 + k + 1} J_{k+1}(\lambda), \quad (\lambda^2 + k^2 + k + 1) \neq 0 \quad (3.0.5)$$

où J_k est la fonction de Bessel de 1^{re} espèce d'ordre k donnée par (2.2.3).

Les fonctions propres associées sont données par :

$$\varphi_n(r) = \alpha_n J_k(\lambda_n(r)), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.0.6)$$

où $(\alpha_n)_n$ est une suite de nombres réels vérifiant :

$$\alpha_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.0.7)$$

et

$$\varphi_n(1) \geq \frac{C}{\sqrt{2}} \quad (3.0.8)$$

Où C est une constante positive .

Preuve 3.0.3 : La démonstration de la proposition(3.0.3) se fait en 5 étapes :

- Nous commençons d'abord par montrer que : $\lambda^2 > k^2$.

Par la formule de Green , on remarque que pour tout v dans $D(A_k)$ on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (A_k z) z r \, dr &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) z + \frac{(k)^2}{r^2} z \right) z r \, dr \\ &= - \int_0^1 z \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial z}{\partial r} \right) \, dr + \int_0^1 \frac{(k)^2}{r^2} z^2 r \, dr \\ &= - \left[r z \frac{\partial z}{\partial r} \right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 r \, dr + \int_0^1 \frac{(k)^2}{r^2} z^2 r \, dr \end{aligned}$$

$$= (1 + k^2)(z(1))^2 + \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 r dr + \int_0^1 \frac{(k)^2}{r^2} z^2 r dr$$

Ce qui implique que :

$$\int_0^1 (A_k z) z dr \geq \int_0^1 \frac{(k)^2}{r^2} z^2(r) r dr > (k)^2 \int_0^1 z^2(r) r dr$$

car $0 < r < 1$ d'où $\lambda^2 > k^2$

• Les Fonctions propres :

Pour $\lambda^2 > k^2$, on cherche φ solution du problème :

$$\begin{cases} -\frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \varphi(r) + \frac{k^2}{r^2} \varphi(r) = \lambda^2 \varphi(r) & \text{dans } (0, 1) \\ \varphi_r(1) = -(\lambda^2 + k^2 + 1)\varphi(1) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

où encore :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} + \frac{k^2}{r^2} \varphi(r) = \lambda^2 \varphi(r) & \text{dans } (0, 1) \\ \varphi_r(1) = -(\lambda^2 + k^2 + 1)\varphi(1) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

Qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} + \left(\lambda^2 - \frac{k^2}{r^2}\right) \varphi(r) = 0 & \text{dans } (0, 1) \\ \varphi_r(1) = -(\lambda^2 + k^2 + 1)\varphi(1) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \quad (3.0.9)$$

La 1^{re} équation du problème (3.0.9) est l'équation différentielle de Bessel (1.7.1)

, dont la forme générale des solutions est :

$$\varphi(r) = \alpha J_k(\lambda r) + \beta Y_k(\lambda r) \quad (3.0.10)$$

où J_k et Y_k sont les solutions de Bessel de 1^{re} et 2^e espèce respectivement données par (1.7.2) et (1.7.3).

Comme la fonction φ est continue dans $\overline{\Omega}$, elle est bornée au voisinage de zéro, d'où $\beta \equiv 0$. Ce qui prouve que les solutions régulières $u^{(k)}$ sont nulles en zéro et justifie la présence de la condition au bord " $u^{(k)}(0) = 0$ " dans le model 1-d. On obtient alors les fonctions propres :

$$\varphi_n(r) = \alpha_n J_k(\lambda_n(r)), \quad n \geq 0$$

• L'équation caractéristique :

La condition au limite :

$$\varphi_r(1) = -(\lambda^2 + k^2 + 1)\varphi(1)$$

combinée avec la relation (1.7.8), nous permettent d'écrire :

$$-\lambda J_{k+1}(\lambda) + k J_k(\lambda) = -(\lambda^2 + k^2 + 1) J_k(\lambda)$$

Soit encore en posant $K = k(k + 1)$:

$$\lambda J_{k+1}(\lambda) = (\lambda^2 + K + 1) J_k(\lambda)$$

Comme $\lambda \neq 0$ (sinon $\varphi = 0$ ce qui est impossible), on obtient :

$$\frac{J_{k+1}(\lambda)}{J_k(\lambda)} = \frac{\lambda^2 + K + 1}{\lambda} \approx^{v(0)} \lambda, \quad (\lambda^2 + K + 1) \neq 0$$

Notons que les racines de cette dernière équation forment les valeurs propres $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de l'opérateur A_k .

- Montrons que : $\alpha_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

En utilisant les formules (1.7.11), (3.0.6) et la relation de normalisation :

$$\int_0^1 \varphi_n^2(r) r dr = 1$$

on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \varphi_n^2(r) r dr \\ &= \alpha_n^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\theta - \lambda_n(r) \sin\theta) d\theta \right)^2 r dr \end{aligned}$$

La formule trigonométrique

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\theta - \lambda_n(r) \sin\theta) d\theta &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\theta) \cdot \cos(\lambda_n(r) \sin\theta) d\theta \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(k\theta) \cdot \sin(\lambda_n(r) \sin\theta) d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \cos^2(k\theta) d\theta + \int_0^\pi \cos^2(\lambda_n(r) \sin\theta) d\theta \right\} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \sin^2(k\theta) d\theta + \int_0^\pi \sin^2(\lambda_n(r) \sin\theta) d\theta \right\} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_n^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\theta - \lambda_n(r) \sin\theta) d\theta \right)^2 r dr \\ &\leq 4 \alpha_n^2 \int_0^1 r dr \\ &= 2 \alpha_n^2. \end{aligned}$$

Alors :

$$\alpha_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

• Reste à montrer l'estimation (3.0.8) :

Puisque :

$$|\varphi_n(1)| \geq \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| |J_k(\lambda_n)|$$

Et comme :

$J_k(\lambda_n) = 0$ si $\lambda_n = 0$ ce qui est impossible .

Alors , on peut trouver une constante $C > 0$ tel que :

$$|\varphi_n(1)| \geq \frac{C}{\sqrt{2}}$$

Proposition 3.0.4 Il existe une constante $c > 0$ tel que :

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.0.11)$$

Preuve 3.0.4 • On reprend l'équation caractéristique(3.0.5) et la formule asymptotique (1.7.9).

Pour λ grand, on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{J_{k+1}(\lambda)}{J_k(\lambda)} &\simeq \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos(\lambda - \frac{\pi}{2}(k+1+\frac{1}{2}))}{\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos(\lambda - \frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}))} \\ &= \frac{\cos(\lambda - \frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}) - \frac{\pi}{2})}{\cos(\lambda - \frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}))} \\ &= \frac{\sin(\lambda - \frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}))}{\cos(\lambda - \frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}))} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{J_{k+1}(\lambda)}{J_k(\lambda)} \simeq \tan(\lambda - \frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2})) \sim \lambda \tag{3.0.12}$$

Etudions l'équation :

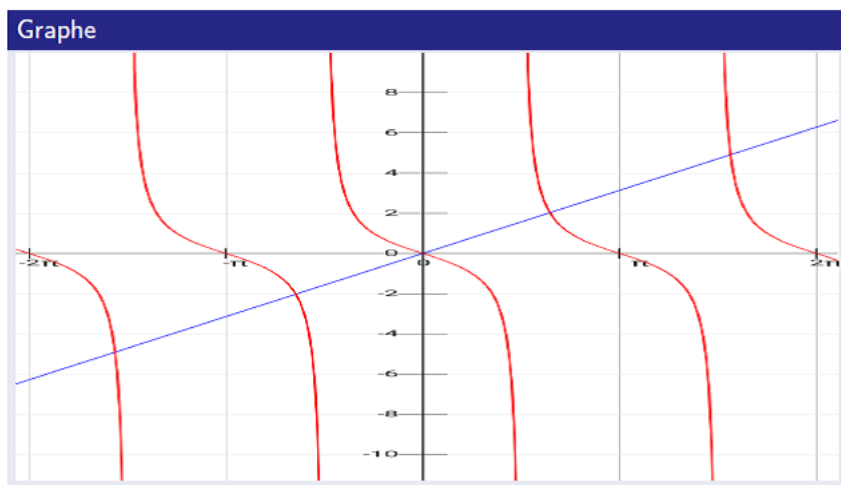
$$\tan(\lambda - \frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2})) = \lambda$$

ce qui est équivalent :

$$\frac{J_{k+1}(\lambda)}{J_k(\lambda)} = \lambda$$

La fonction $\tan(\lambda - \frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2}))$ a pour période $\frac{\pi}{2}$.

Observons le graphique suivant qui représente l'intersection des deux courbes $\tan(\lambda - \frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2}))$ et λ .



Les droites " $\lambda = k\frac{\pi}{2}$ " sont des asymptotes pour la fonction $\tan(\lambda - \frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2}))$

Etant donnée que $\tan(\lambda - \frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2})) \simeq \frac{J_{k+1}(\lambda)}{J_k(\lambda)}$, on en déduit que J_{k+1} s'annule au voisinage de $k\frac{\pi}{2}$ (les asymptotes) et J_k s'annule pour les mêmes valeurs de $\tan(\lambda - \frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2}))$.

Comme les valeurs λ_i sont les points d'intersection entre les deux courbes susmentionnées, on remarque aisément d'après le graphique que sur chaque période la racine λ_i se trouve entre $j_{k+1,i}$ et $j_{k,i+1}$ où $j_{k+1,i}$ (respectivement $j_{k,i+1}$) est la i^e racine de $J_{k+1}(x)$ (respectivement $(i+1)^e$ racine de $J_k(x)$).

Ce qui nous permettent d'écrire :

$$0\pi < \lambda_0 < (0 + \frac{1}{2})\pi$$

$$1\pi < \lambda_1 < (1 + \frac{1}{2})\pi$$

.

.

.

$$k\pi < \lambda_k < (k + \frac{1}{2})\pi$$

$$(k+1)\pi < \lambda_{k+1} < (k + \frac{3}{2})\pi$$

D'où :

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k > \frac{1}{2}\pi$$

Pour k grand, alors

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq c$$

tel que $c > 0$.

Proposition 3.0.5 :

Soit $E_v(t)$ l'énergie de v solution du problème (3.0.3)

$$E_v(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} (v)^2 + (v_t)^2 \right) r dr + \frac{1}{2} (v_t(1))^2 + \frac{k^2}{2} (v(1))^2 + \frac{1}{2} (v(1))^2.$$

vérifiant $E'_v(t) = 0$. Il existe une constante positive c_1 indépendante de k telle que :

$$E_v(0) \leq c_1 \int_0^T \left[\int_0^1 a v_t^2(r, t) dr + b v_t^2(1, t) \right] dt; \quad \forall T > 0 \quad (3.0.13)$$

Preuve 3.0.5 La théorie spectrale permet d'écrire la solution v de (3.0.3) sous la forme :

$$v(r, t) = \sum_{n \geq 0} \left(v_{0n} \cos(t\lambda_n) + v_{1n} \frac{\sin(t\lambda_n)}{\lambda_n} \right) \varphi_n(r)$$

Où v_{0n} (resp. v_{1n}) sont les coefficients de Fourier de $u_0^{(k)}$ (resp. $u_1^{(k)}$), i.e :

$$u_0^{(k)} = \sum_{n \geq 0} v_{0n} \varphi_n \quad \text{et} \quad u_1^{(k)} = \sum_{n \geq 0} v_{1n} \varphi_n$$

On a :

$$v_t(1, t) = \sum_{n \geq 0} \left(-v_{0n} \sin(t\lambda_n) + v_{1n} \frac{\cos(t\lambda_n)}{\lambda_n} \right) \lambda_n \varphi_n(1)$$

en utilisant l'inégalité d'Ingham donné et l'estimation (3.0.11) de la proposition(3.0.4), on en déduit qu'il existe une constante $C' > 0$ indépendante de k , telle que :

$$\frac{C'}{c} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n^2 |v_{0n}|^2 + |v_{1n}|^2) |\varphi_n(1)|^2 \leq \int_0^T c b (v_t(1, t))^2 dt,$$

et et comme

$$|\varphi_n(1)|^2 \geq \frac{C}{2}$$

Alors il existe $c_1 > 0$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n^2 |v_{0n}|^2 + |v_{1n}|^2) \leq c_1 \int_0^T b(v_t(1, t))^2 dt,$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n^2 |v_{0n}|^2 + |v_{1n}|^2) \leq c_1 \int_0^1 \int_0^T a(v_t(r, t))^2 dt dr,$$

On conclut par l'identité (cf. [11]) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n^2 |v_{0n}|^2 + |v_{1n}|^2) = \|u_0^{(k)}\|_{D(A_L^{1/2})}^2 + \|u_1^{(k)}\|^2$$

et la propriété :

$$\|z\|_{D(A_k^{1/2})}^2 = \|A_k^{1/2} z\|^2 = (A_k z, z) = \int_0^T \left(-\frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} z \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} z^2 \right) r dr + (v_t(1))^2 + k^2 (z(1))^2 + (z(1))^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de $L^2(0, 1)$.

Ce qui donne finalement :

$$E_v(0) \leq c_1 \int_0^T \left[\int_0^1 a(v_t(r, t))^2 dr + b(v_t(1, t))^2 \right] dt; \quad \forall T > 0$$

Proposition 3.0.6 :

Pour tout $T > 0$ la solution w du problème (3.0.15) vérifie l'estimation suivante :

$$\int_0^T \int_0^1 a w_t^2(r, t) r dr + b w_t^2(1, t) dt \leq C(T) \int_0^T \int_0^1 a u_t^2(r, t) r dr + b u_t^2(1, t) dt \tag{3.0.14}$$

où C désigne une constante positive.

Preuve 3.0.6 On reprend le problème en w :

$$\begin{cases} w_{tt} + aw_t - \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2w + \frac{(k)^2}{r^2}w = 0 & \text{dans } (0, 1) \times \mathcal{IR}^+ \\ \frac{\partial w}{\partial r}(1) = -((k)^2 + 1)w(1) - bw_t(1) - w_{tt}(1) & \text{sur } \mathcal{IR}^+ \\ w(0) = 0 & \text{sur } \mathcal{IR}^+ \\ w(0) = 0, w_t(0) = 0 \end{cases} \quad (3.0.15)$$

$u_t^{(k)}(1, t)$ est à support compact dans $0 < t < T$ On utilise la technique des multiplicateurs (cf.[11]). On multiplie la première équation du problème (3.0.15) par $r^3(r-1)(2T-t)w_r$ et on intègre le résultat dans $Q = (0, 1) \times (0, 2T)$ avec le fait que $w(0) = 0$ on obtient pour des solutions régulières :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q [w_{tt}(r^3(r-1)(2T-t)w_r)] dt dr + \int_Q [aw_t r^3(r-1)(2T-t)w_r] dt dr \\ &+ \int_Q [-(\frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2w)(r^3(r-1)(2T-t)w_r)] dt dr \\ &+ \int_Q [(\frac{(k)^2}{r^2}w)(r^3(r-1)(2T-t)w_r)] dt dr \end{aligned}$$

Posons :

$$I_1 = w_{tt}(r^3(r-1)(2T-t)w_r)$$

$$I_2 = -(\frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2w)(r^3(r-1)(2T-t)w_r)$$

$$I_3 = (\frac{(k)^2}{r^2}w)(r^3(r-1)(2T-t)w_r)$$

et

$$I_4 = aw_t r^3(r-1)(2T-t)w_r$$

On a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \partial_t(w_t(r^3(r-1)(2T-t)w_r)) \\ &\quad - w_t r^3(r-1)(2T-t)w_{tr} + r^3(r-1)w_r w_t \end{aligned}$$

Or :

$$w_t r^3(r-1)(2T-t)w_{tr} = \frac{1}{2} \partial_r((2T-t)r^3(r-1)w_t^2) - \frac{1}{2}(4r^3 - 3r^2)(2T-t)w_t^2$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_1 &= \partial_t(w_t r^3(r-1)(2T-t)w_r) - \frac{1}{2} \partial_r((2T-t)r^3(r-1)w_t^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(4r^3 - 3r^2)(2T-t)w_t^2 + r^3(r-1)w_r w_t \end{aligned}$$

Pour : $I_2 = -\frac{1}{r}(2T-t)[\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial w}{\partial r})r^3(r-1)(w_r)]$ on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial w}{\partial r})r^3(r-1)w_r &= \frac{\partial}{\partial r}[(rw_r)r^3(r-1)w_r] \\ &\quad - r^3(4r-3)w_r^2 - w_r r^4(r-1)\frac{\partial}{\partial r}(w_r) \end{aligned}$$

et

$$-w_r r^4(r-1)\frac{\partial}{\partial r}(w_r) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}[r^4(r-1)w_r^2] + \frac{1}{2}r^3(5r-4)w_r^2$$

Ce qui implique que :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rw_r)r^3(r-1)w_r = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}[r^4(r-1)w_r^2] - \frac{1}{2}r^3(3r-2)w_r^2$$

D'où :

$$I_2 = -\frac{1}{2}(2T-t)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}[r^4(r-1)w_r^2] - r^3(3r-2)w_r^2\right)$$

Calcul de I_3 :

$$I_3 = \frac{(k)^2}{r^2}(2T - t)wr^3(r - 1)\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) = (k)^2r(r - 1)(2T - t)ww_r$$

Comme :

$$r(r - 1)\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)w = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}[r(r - 1)w^2] - \frac{1}{2}(2r - 1)w^2$$

Alors :

$$I_3 = \frac{k^2}{2}(2T - t)\frac{\partial}{\partial r}(r(r - 1)w^2) - \frac{k^2}{2}(2T - t)(2r - 1)w^2$$

En tenant compte des calculs effectués sur I_1 , I_2 et I_3 on peut écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q (\partial_t(w_t r^3(r - 1)(2T - t)w_r)) dt dr - \frac{1}{2} \int_Q (\partial_r((2T - t)r^3(r - 1)w_t^2)) dt dr \\ &+ \frac{1}{2} \int_Q (r^2(4r - 3)(2T - t)w_t^2) dr dt + \int_Q (r^3(r - 1)w_r w_t)r dr dt \\ &- \frac{1}{2} \int_Q \left(\frac{1}{r}(2T - t)\frac{\partial}{\partial r}[r^4(r - 1)w_r^2]\right) dr dt + \frac{1}{2} \int_Q \left(\frac{1}{r}(2T - t)r^3(3r - 2)w_r^2\right) dr dt \\ &+ \frac{k^2}{2} \int_Q \left(\frac{\partial}{\partial r}(2T - t)r(r - 1)w^2\right) dr dt \\ &- \frac{k^2}{2} \int_Q ((2T - t)(2r - 1)w^2) dr dt + \int_Q (aw_t r^3(r - 1)(2T - t)w_r) dr dt \end{aligned}$$

Où encore :

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_Q (r^2(r-1)(2T-t)(w_t w_r)) dr dt + \frac{1}{2} \int_Q (r^2(4r-3)(2T-t)w_t^2) dr dt \\
 &+ \frac{1}{2} \int_Q (2T-t)r^2(r-1)w_r^2 dr dt \\
 &- \frac{k^2}{2} \int_Q ((2T-t)(2r-1)w^2) dr dt + \int_Q (ar^2(r-1)(2T-t)w_t w_r) dr dt
 \end{aligned}$$

comme $r^2 \leq 1$ et d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz , on trouve :

$$\begin{aligned}
 \int_Q (ar^2(r-1)(2T-t)w_t w_r) dr dt &\leq \int_Q (a(r-1)(2T-t)w_t w_r) dr dt \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_Q (a(r-1)(2T-t)[w_t^2 + w_r^2]r) dr dt
 \end{aligned}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_Q (a(2T-t)w_r^2 r) dr dt + \frac{1}{2} \int_0^{2T} (b(2T-t)w_t^2(1)) dt \\
 &\leq \frac{1}{2}(1+c_1+c_2)c(T) \int_Q ((w_t^2 + w_r^2))r) dt dr + \frac{b}{2} \int_0^{2T} ((2T-t)w_t^2(1,t)) dt
 \end{aligned}$$

on a :

$$E'_w(t) = \int_0^1 (-aw_t u_t r) dr - bw_t(1)u_t(1)$$

On intègre entre 0 et s :

$$\int_0^s E'_w(t) dt = E_w(s) - E_w(0)$$

comme $E_w(0) = 0$ alors :

$$E_w(s) = \int_0^s \int_0^1 -aw_t u_t r dr dt + \int_0^s -bw_t(1)u_t(1)dt$$

On intègre en suite entre 0 et $2T$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{2T} E_w(s)ds &= \int_0^{2T} \int_0^s \int_0^1 -aw_t u_t r dr dt ds + \int_0^{2T} \int_0^s -bw_t(1)u_t(1)dt ds \\ &= \int_0^{2T} \int_0^1 (2T-t)(-aw_t u_t) r dr dt + \int_0^{2T} -b(2T-t)w_t(1)u_t(1)dt \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} \int_0^{2T} E_w(s)ds &\leq \epsilon \int_0^1 \int_0^{2T} a(2T-t)w_t^2 r dr dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 \int_0^{2T} a(2T-t)u_t^2 r dr dt + \epsilon \int_0^{2T} b(2T-t)w_t^2(1)dt \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_0^{2T} b(2T-t)u_t^2(1)dt \end{aligned}$$

et

$$\int_Q (w_t^2 + w_r^2) r dr dt \leq c \int_0^{2T} E_w(s)ds$$

alors :

$$\begin{aligned} &\frac{a}{2} \int_Q (2T-t)w_t^2 r dr dt + \frac{b}{2} \int_0^{2T} (2T-t)w_t^2(1)dt \\ &\leq \frac{1}{2}(1+c_1+c_2)c(T)\epsilon_1 \int_Q a(2T-t)w_t^2 r dr dt \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{2}(1+c_1+c_2)c(T) \right) \int_0^{2T} a(2T-t)u_t^2 r dr dt \\ &\quad + (\epsilon_2 \frac{1}{2}(1+c_1+c_2)c(T) + \frac{1}{2}) \int_0^{2T} b(2T-t)w_t^2(1)dt \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{2}(1+c_1+c_2)c(T) \int_0^{2T} b(2T-t)u_t^2(1)dt + \frac{b}{2} \int_0^{2T} (2T-t)w_t^2(1)dt \end{aligned}$$

On choisit ϵ_1 tq : $\frac{1}{2}(1 + c_1 + c_2)c(T)\epsilon_1 = \frac{1}{4}$ et ϵ_2 tq : $\frac{1}{2}(1 + c_1 + c_2)c(T)\epsilon_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 pour $T \leq 2T - t \leq 2T$, on trouve :

$$\frac{aT}{4} \int_0^1 \int_0^T w_t^2 r dr dt + \frac{bT}{4} \int_0^T w_t^2(1) dt \leq M_1 T c(T) \int_0^1 \int_0^T a u_t^2 r dr dt + M_2 T c(T) \int_0^T b u_t^2(1) dt$$

On obtient finalement :

$$a \int_0^1 \int_0^T w_t^2 r dr dt + b \int_0^T w_t^2(1) dt \leq M c(T) \left(\int_0^1 \int_0^T a u_t^2 r dr dt + \int_0^T b u_t^2(1) dt \right)$$

Théorème 3.0.7 Il existe deux constantes positives C_1 et C_2 indépendantes de k telles que :

$$E_k(t) \leq C_1 e^{-\frac{c_2}{k} t} E_k(0)$$

Preuve 3.0.7 De $u^{(k)} = y + w$ on remarque que :

$$E_k(0) = E_y(0)$$

Et en utilisant la proposition 3.0.5, on obtient :

$$E_k(0) = E_y(0) \leq c_1 \int_0^T (a y_t^2 dr + b y_t^2(1)) dt$$

et comme :

$$y_t = u_t^{(k)} - w_t$$

Alors :

$$\begin{aligned} y_t^2(1, t) &= (u_t^{(k)}(1, t) - w_t(1, t))^2 \\ &= (u_t^{(k)})^2(1, t) - 2u_t^{(k)}(1, t)w_t(1, t) + w_t^2(1, t) \\ &\leq c_1 \{ (u_t^{(k)})^2(1, t) + w_t^2(1, t) \} \end{aligned}$$

et

$$y_t^2(r, t) \leq c_2 \{(u_t^{(k)})^2(1, t) + w_t^2(1, t)\}$$

Avec la proposition 3.0.6 , on obtient :

$$E_k(0) \leq MC(T) \int_0^T \left(\int_0^1 a u_t^{(k)}(r, t)^2 r dr + b u_t^{(k)}(1, t)^2 \right) dt$$

alors

$$E_k(0) \leq MC(T) \int_0^T (E_k(0) - E_k(T)) dt$$

Le résultat du lemme permet d'écrire :

$$E_k(T) \leq E_k(0) \leq MC(T)(E_k(0) - E_k(T))$$

Ce qui donne finalement :

$$E_k(T) \leq \gamma_k E_k(0)$$

tq

$$\gamma_k = \frac{Mc(T)}{1 + Mc(T)}$$

En utilisant les arguments données dans la preuve du théorème 3.3 de [12] , il vient alors :

$$E_k(t) \leq \frac{1}{\gamma_k} e^{-w_k t} E_k(0)$$

avec

$$w_k = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{\gamma_k} \approx \frac{c}{k}$$

Alors le théorème 3.0.7 est démontré.

4

Stabilisation polynômiale

Dans cette section, nous montrons la stabilité polynômiale du problème soumis à des conditions dynamiques interne et frontière posé dans un disque.

Définition

On dit que la stabilité de l'énergie $E(t)$ d'un problème est polynômiale si

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\alpha} E(0), \quad \forall t > 0$$

avec C et α des constantes positives. Dans ce cas il faut prendre des données initiales régulières (*appartenant à $\mathcal{D}(A)$*).

On rappelle le développement de u en série de Fourier :

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^{(k)} e^{i2k\theta}$$

L'énergie E_k de la solution $u^{(k)}$ du problème (3.0.2) est donnée par :

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} (u^{(k)})^2 + (u_t^{(k)})^2 \right) r dr + \frac{1}{2} (y_t^{(k)}(1))^2 + \frac{k^2}{2} (u^{(k)}(1))^2 + \frac{1}{2} (y^{(k)}(1))^2.$$

alors :

$$E(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k(t)$$

L'analyse de Fourier , le théorème et les techniques utilisées dans [4] nous permettent de déduire le résultat de la stabilité polynômiale du système (2.0.1) suivant :

Théorème 4.0.1 *Il existe une constante positive C telle que pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, la solution u de (2.0.1) satisfait :*

$$E(t) \leq \frac{C}{t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k(0), \quad \forall t > 0, \tag{4.0.1}$$

Preuve 4.0.1 *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $c_m > 0$ telle que*

$$x^m e^{-x} \leq c_m, \quad \forall x \geq 0.$$

Cette inégalité est vérifiée pour $m = 1$

En injectant cette estimation dans l'inégalité du théorème (3.0.7) on obtient :

$$E_k(t) \leq C_1 \frac{ck}{C_2 t} E_k(0) = \frac{C}{t} k E_k(0), \quad \forall t > 0,$$

L'analyse de Fourier nous permet d'écrire :

$$E(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k(t) \leq \frac{C}{t} k E_k(0), \quad \forall t > 0.$$

Conclusion générale

Dans ce travail, on a démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème soumis à des conditions dynamiques interne et frontière posé dans un disque.

On a réussi ensuite a démontrer la décroissance exponentielle d'un problème à une dimension en se basant sur la théorie spectrale.

Ce résultat est alors utilisée pour déduire une convergence de type polynômiale pour le problème posé dans un disque.

Bibliographie

- [1] Fonctions spéciales, cours de Mr Khelifati et Mme Machrouk, Master 1 Analyse Mathématique.
- [2] Watson, G.N. : A treatise on the Theory of Bessel Functions p. 1922. Cambridge University Press, Cambridge (1996)
- [3] F. Abdallah, S. Nicaise, J. Valein and A. Wehbe, Uniformly exponentially or polynomially stable approximations for second order evolution equations and some applications, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 19 (2013), no. 3, pp. 844–887.
- [4] F. Alabou, P. Cannarsa and V. Komornik, Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equation, J. Evol. Equ. 2, 127150 (2002).
- [5] Brezis, H. : Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, 1st edn., vol. 5. North Holland, Amsterdam (1973)
- [6] Marie-Thérèse Lacroix-Sonnier, Espace de Sobolev et Applications 1990.
- [7] Mémoire Master Académique, Équations différentielles à retard et semi-groupes associés.
- [8] Théorie des semi groupes, Cours de Mme K. Laoubi Master 2 analyse mathématique.

- [9] Opérateurs non Bornés et Théorie Spectrale-Master 1 Analyse Mathématiques, Cours de Mme K. Laoubi.
- [10] Marcelo M. Cavalcanti, Irena Lasiecka, Geometrically constrained stabilization of wave equations with Wentzell boundary conditions, *Applicable Analysis* :· Juillet 2015.
- [11] S. Nicaise and K. Laoubi, Polynomial stabilization of the wave equation with Ventcel's boundary conditions, *Math. Nachr.* 283, NO.10 ,1428-1438(2010)
- . [12] Nicaise. S, Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications. *Rend. Mat. Appl.* (7) 23, 83-116 (2003)