

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'Hamed Bougara Boumerdes Algérie
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Analyse

Par : BOUZEHHAR Samia

Thème :

Approximation numérique des équations non linéaires de type Sobolev

Soutenu publiquement, le 25 Septembre 2022 devant le jury composé de :

Mme	K. Laoubi,	M.C.A	U.M.B.B	Président.
Mme	S. Mechrouk,	M.C.A	U.M.B.B	Examineur.
Mr	R. Guettaf,	M.A.A	U.M.B.B	Encadreur.

Dédicace

À mes parents qui m'ont soutenu et encouragé durant ces années d'études. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

À mes frères, mes grands-parents et ceux qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail. Ils m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

À ma famille, mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

À tous ceux que j'aime.

Remerciements

*Je tiens d'abord à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur **R. Guettaf** mon encadreur pour toutes les orientations et les conseils qu'il m'a prodigués tout le long de ce mémoire.*

*J'adresse mes plus vifs remerciements à Madame **K. Laoubi**, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.*

*Je suis très honoré que Madame **S. Mechrouk** pour l'importance qu'elle a accordée à mon travail en acceptant de faire partie du jury.*

Je ne saurais oublier à exprimer ma profonde gratitude à mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je souhaite enfin remercier ma famille et mes amis je leur adresse ici ma gratitude la plus profonde, pour tous les encouragements et leur soutien continu.

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude numérique des équations non linéaires de type Sobolev. Nous considérons quelques équations de type Sobolev plus précisément des équations semi-linéaires et d'autres quasi-linéaires, puis nous citerons des conditions suffisantes et nécessaires pour l'existence et l'unicité de la solution de quelque type d'entre elles.

Enfin, nous aborderons la résolution numérique de ce type d'équations par la méthode des éléments finis.

Notations

- Si Ω est un ensemble de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, on note par $\bar{\Omega}$ l'adhérence de Ω .

$C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω .

$C^1(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles continûment différentiables Ω .

$D(\Omega)$ espace des fonctions classe C^∞ à support compact dans Ω .

$D'(\Omega)$ dual de $D(\Omega)$, espace des distributions sur Ω .

$D(\bar{\Omega})$ espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$.

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u|^2 < \infty \right\}.$$

- Si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes :

$(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire de H .

$\| \cdot \|_H$ la norme de H .

H^* l'espace dual de H .

$\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés définis sur H dans H .

\mathbb{P}_p l'espace des polynômes de degré p .

p.p. presque partout.

\hookrightarrow l'injection de Sobolev.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Introduction des équations de type Sobolev	3
1.1 Rappel sur les équations aux dérivées partielles	3
1.1.1 Définitions et Notations	3
1.1.2 Classification des équations aux dérivées partielles	4
1.2 Préliminaire d'analyse fonctionnelle	5
1.2.1 Rappels sur les espaces de Lebsgue	5
1.2.2 Rappels sur les espaces de Sobolev	6
1.2.3 Formulation variationnelle générale	7
1.3 Rappels de la méthode des éléments finis	11
1.3.1 Approximation variationnelle	11
1.3.2 Etude de la convergence	13
2 Analyse des problèmes de type Sobolev	15
2.1 Les équations de type Sobolev	15
2.1.1 Les équations de Sobolev linéaires	16
2.1.2 Les équations de Sobolev semi-linéaires	16
2.1.3 Les équations de Sobolev quasi-linéaires	17
2.2 Existence et unicité de la solution	17
2.3 Problème de Sobolev semi-linéaire	18
2.3.1 Semi-discrétisation explicite en temps	19
2.3.2 Schéma totalement discrétisé	21
2.4 Problème de Sobolev quasi-linéaire	22
2.4.1 Semi-discrétisation explicite en temps	22
2.4.2 Schéma totalement discrétisé	23

3 Applications et illustrations numériques en utilisant freefem++	27
3.1 Introduction à FreeFem++	27
3.2 Applications pour les problèmes semi-linéaire de Sobolev	30
3.2.1 Résultats numériques	32
3.2.2 L'ordre de convergence en espace	33
3.2.3 L'ordre de convergence en temps	37
3.3 Applications pour les problèmes quasi-linéaire de Sobolev	39
3.3.1 L'ordre de convergence en espace	42
3.3.2 L'ordre de convergence en temps	45
Conclusion générale	49

Introduction générale

L'équation de type Sobolev apparaît dans une grande variété de problèmes physiques tels que l'écoulement du fluide à travers les roches fissurées, thermodynamique et propagation des ondes longues de petite amplitude. Ce type d'équation a été proposé pour la première fois en 1954 par Sobolev [20] d'où le nom.

Les premiers résultats sur les équations de type Sobolev ont été obtenus par les méthodes spatiales de Hilbert [16]. Par la suite, des résultats complets sont établis concernant l'existence, l'unicité et les propriétés de solutions de même type de problèmes soumis à des conditions classiques. Beaucoup de résultats ont suivis tel que l'établissement de l'existence de solutions pour des équations d'évolution semi-linéaires ou quasi linéaires de type Sobolev et l'étude des équations intégrodifférentielle de type Sobolev . Même si certaines de ces équations peuvent être résolues analytiquement et leurs solutions exactes sont connues, il existe un nombre important d'équations, dont la solution exacte est inconnue, c'est pourquoi on a recours à des méthodes d'approximation numérique (méthodes des éléments finis ou des différences finies).

Dans ce travail, on étudie quelques problèmes de type Sobolev et qui s'écrivent sous la forme suivante

$$A_1 u_t + A_2 u = f \tag{1}$$

où A_1 et A_2 sont des opérateurs différentiels pouvant dépendre de u et de t .

Notre but est de justifier rigoureusement l'existence et l'unicité dans un cadre abstrait des équations semi linéaires et quasi linéaire, puis effectuer l'analyse numérique de ces problèmes par la méthode des éléments finis conforme et le schéma d'Euler explicite et donc valider ces résultats par des tests numériques.

Ce mémoire est composée de trois chapitres. Dans le premier chapitre, on donne un rappel sur quelques définitions et notions de base et la classification des équations aux dérivées partielles. On présentera ensuite des notions portant sur l'analyse fonctionnelle. En particulier:

les espaces de Lebesgue, les espaces de Sobolev et quelques propriétés de ces espaces. Ensuite on donne un rappel de la méthode des éléments finis. Dans lequel on présente la notion de l'approximation variationnelle qui permet de résoudre un problème de Dirichlet, et on termine par l'étude de la convergence de cette méthode.

Dans le deuxième chapitre, on commence par une introduction détaillée des équations de type Sobolev. Ensuite on présente des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible. Enfin on termine par une analyse a priori des ces problèmes, en utilisant une semi-discrétisation explicite en temps puis un schéma totalement discrétisé.

Enfin, le dernier Chapitre est consacré à la mise en oeuvre des méthodes numériques proposées au chapitre 2 en utilisant le logiciel freefem++ [10]. On donnera une brève introduction du logiciel freefem++ [10]. Ensuite les résultats numériques et les illustrations pour les courbes des solutions approchées et les courbes des erreurs pour les problèmes non linéaire proposés dans ce travail.

Nous terminerons notre travail par une conclusion qui récapitule ce que nous avons présenté.

Chapitre 1

Introduction des équations de type Sobolev

Sommaire

1.1	Rappel sur les équations aux dérivées partielles	3
1.1.1	Définitions et Notations	3
1.1.2	Classification des équations aux dérivées partielles	4
1.2	Préliminaire d'analyse fonctionnelle	5
1.2.1	Rappels sur les espaces de Lebsgue	5
1.2.2	Rappels sur les espaces de Sobolev	6
1.2.3	Formulation variationnelle générale	7
1.3	Rappels de la méthode des éléments finis	11
1.3.1	Approximation variationnelle	11
1.3.2	Etude de la convergence	13

1.1 Rappel sur les équations aux dérivées partielles

1.1.1 Définitions et Notations

Une équation aux dérivées partielles (noté EDP) est une relation entre une fonction de plusieurs variables (réelles) u et ses dérivées partielles, et une fonction donnée f .

$$F \left(u, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} \right) = f \quad u \text{ dans } \Omega. \quad (1.1.1)$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , et F est une fonction de plusieurs variables réelles.

L'ordre de dérivation le plus élevé apparaissant dans (1.1.1) est appelé l'ordre de l'EDP et le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u est appelé dimension de l'équation.

Remarque 1.1. *Si la fonction f est nulle alors (1.1.1) est une équation homogène.*

1.1.2 Classification des équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles peuvent être classées selon différents points de vue,

1. Si le temps est l'une des variables indépendantes de la fonction cherchée, on parle d'une équation d'évolution.

Si l'équation contient seulement les variables spatiales nous parlons d'une équation stationnaire.

2. Les E.D.P sont classés aussi selon son ordre.
3. Si l'équation constitue uniquement d'une combinaison linéaire de u et de ses dérivées, nous parlons d'une équation linéaire. dans le cas contraire, on parle de des équations non linéaires.

Définition 1.1. *L'équation (1.1.1) est dite linéaire si l'on peut la mettre sous la forme:*

$$Lu = f, \quad (1.1.2)$$

où L est un opérateur linéaire différentielle,

f est une fonction de n variables indépendantes définies sur un domaine de \mathbb{R} .

Si $f = 0$, on dit que l'équation est linéaire homogène, sinon elle est non-homogène.

Exemple 1. *L'équation*

$$u + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1,$$

est linéaire non-homogène sur \mathbb{R}^2 car elle peut s'écrire sous la forme (1.1.2) où

$$Lu = u + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et $f(x, y) = 1$.

Équation aux dérivée partielle non-linéaire

- Une EDP est semi-linéaire si elle est non linéaire mais sa partie principale est linéaire par rapport à u .
- Une EDP est quasi-linéaire si elle est non linéaire mais elle est linéaire par rapport aux dérivées partielles.
- Une EDP est complètement non linéaire si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.

Dans ce mémoire on s'intéressera uniquement au deux premiers cas.

Exemple 2.

1. L'équation (1.1.3) est une EDP d'ordre 2 linéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0, \quad (1.1.3)$$

2. L'équation (1.1.4) est une EDP semi-linéaire d'ordre 2 .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xyz \frac{\partial u}{\partial y} - u^2 = c, \quad (1.1.4)$$

3. L'équation (1.1.5) est une EDP quasi-linéaire d'ordre 2

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \sqrt{u} = c. \quad (1.1.5)$$

1.2 Préliminaire d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Rappels sur les espaces de Lebsgue

Définition 1.2. (Ensemble des fonctions mesurables)

Soit (S, Ω, m) un espace mesuré. Pour $1 \leq p < +\infty$, on note L^p l'ensemble de toutes les fonctions mesurables sur (S, Ω) , à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1.3. (Espace L^p)

Soit (S, Ω, m) un espace mesuré. Si $1 \leq p < +\infty$, on note L^p l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions L^p pour la relation d'équivalence égalité m -presque partout.

$$u \sim v \iff \|u\| = \|v\| \text{ pp sur } \Omega$$

L^p est un espace vectoriel muni de la norme

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, p \in [1, +\infty[\\ \|u\|_{L^\infty} = \sup |u| \end{cases}$$

Si $p = 2$, on obtient alors l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ c'est à dire l'espace des fonction de carré sommable sur Ω . muni de produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \cdot v.$$

et de la norme associée:

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.2 Rappels sur les espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe, on va définir quelques espaces de Sobolev usuels que l'on notera par $H^m(\Omega)$, où $m \in \mathbb{N}^*$ ou Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$, ces espaces sont des espaces de Hilbert.

On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$$

Où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle d'ordre 1 de v par rapport à x_i au sens des distributions.

$H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire défini par:

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx,$$

la norme associée

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{H^1(\Omega)}}$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ désigne l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, c'est à dire

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

est dans ce cas, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $\{v_n\}_{n \geq 1} \subset D(\Omega)$ tel que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$.

Soit H un espace de Hilbert réel et soit V un sous espace de H avec injection continue et dense dans H ($V \hookrightarrow H$). On notera par V' l'espace dual de V , par $(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire de H et par $(\cdot, \cdot)_{V', V}$ le produit de dualité entre V' et V . Comme H' s'identifie à H , on obtient les injections continues et denses $V \hookrightarrow H \approx H' \hookrightarrow V'$.

On utilisera souvent la définition suivante

Définition 1.4. Soient E et F deux espaces de Hilbert. Une fonction $f : [0, T] \times E \rightarrow F$ est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément en t , s'il existe une constante positive $k > 0$ telle que:

$$\|f(t, v) - f(t, w)\|_F \leq k \|v - w\|_E, \quad \forall v, w \in E, \forall t \in [0, T].$$

1.2.3 Formulation variationnelle générale

Soit V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme $\|\cdot\|_V$. Soit l'application

$$\begin{aligned} a : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow a(u, v). \end{aligned}$$

a est dite bilinéarité si a est linéaire par rapport à u et v , et est dite continue s'il existe une constante $M_a > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leq M_a \|u\|_V \cdot \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

On considère le problème général suivant :

Problème: Etant donné $L \in V'$, trouver $u \in V$ solution de

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \tag{1.2.1}$$

Ce problème (1.2.1) est appelé problème variationnel dont l'existence et l'unicité de la solution est basée sur la coercivité de la forme bilinéaire a :

Où on dira que la forme bilinéaire a est coercive sur V si et seulement si il existe $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \forall v \in V.$$

On peut alors démontrer le résultat suivant connu sous le nom de Théorème de Lax-Milgram.

Théorème 1.1. De Lax-Milgram

Si la forme bilinéaire a est continue et coercive; alors le problème (1.2.1) a une solution unique $u \in V$. De plus, on a

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|u\|_{V'}.$$

Pour obtenir une formulation variationnel, on fait souvent appel à la formule de Green suivante

Théorème 1.2. De Riesz-Fréchet

Soit V un espace de Hilbert et V' son dual. Pour toute forme linéaire $\varphi \in V'$, il existe un unique élément $f \in V$ tel que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v), \forall v \in H.$$

Théorème 1.3. Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné et régulier. Alors,

$$\exists c = c(\Omega) > 0 \text{ tel que } \forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par suite:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

est une norme sur $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ équivalente à celle induite par $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.4. Formules de Green

1. Si u et v sont des fonctions de $C^1(\overline{\Omega})$ on a pour tout indice $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv \nu_i d\sigma.$$

2. Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $v \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_{\Omega} \Delta uv dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma, \quad \text{où } \frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i.$$

Voici un exemple de la formulation variationnel d'un problème de Dirichlet en dimension supérieure.

Exemple 1.2 (Le problème de Dirichlet en dimension supérieure)

Comme dans la section précédente, on peut généraliser si on prend un problème de Dirichlet en dimension supérieure :

Soit un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ de frontière $\partial\Omega$ C^1 - par morceaux. Etant donné $f \in L^2$:

et considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Pour trouver une formulation variationnel on suppose que la solution $u \in H^2(\Omega)$. Alors en multipliant l'équation par une "fonction test" $v \in H^1(\Omega)$. et en intégrant sur Ω on obtient

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

En utilisant la formule de Green, on aura pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

On peut prendre $v \in H_0^1(\Omega)$; et on obtient

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.2.3)$$

Comme on a la condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on voit qu'il faut prendre :

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

Alors on pose:

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

et (1.2.2) est équivalent au problème

$$a(u, v) = L(v),$$

La coercivité de la forme A sur $H_0^1(\Omega)$ est vérifiée d'après l'inégalité de Poincaré puisque

$$a(u, u) = |u|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Grâce au Lemme de Lax-Milgram le problème (1.2.3) a une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$, et comme $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, u vérifie

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } D'(\Omega) \supset H^{-1}(\Omega).$$

Comme l'équation n'est satisfaite qu'au sens des distributions, la solution u est dite solution faible de (1.2.2).

Une autre forme du théorème précédent s'obtient de la manière suivante

Par le théorème de Riesz, pour tout $u \in V$, Il existe un opérateur linéaire borné unique $A : V \longrightarrow V$ tel que

$$a(u, v) = (A(u), v)$$

alors le problème (1.2.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ A(u) = f \end{array} \right. \quad (1.2.4)$$

dans ce cas la continuité et la coercivité de la forme a sont équivalentes à

$$\left\{ \begin{array}{l} (h1) A \text{ est continue c'est-à-dire } \forall v \in V, \|Av\|_V \leq M_A \|v\|_V. \\ (h2) \text{ il existe une constante } \alpha > 0 \text{ tel que } |(A(v), v)| \geq \alpha \|v\|_V^2, \forall v \in V \end{array} \right.$$

Sous ses conditions l'opérateur A est inversible, son inverse est continu et on a

$$\forall v \in V, \|A^{-1}v\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|v\|_V.$$

et le problème (1.2.4) possède une solution unique.

1.3 Rappels de la méthode des éléments finis

En analyse numérique la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Celles-ci interviennent dans la description de très nombreux problèmes de physique, chimie ... (mécanique des fluides, thermodynamique, propagation des ondes, etc.). En mathématique, il s'agit d'approcher dans un sous-espace de Hilbert de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie, en général) dans un espace de dimension infinie.

1.3.1 Approximation variationnelle

Soient V un espace de Hilbert réel, une forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, continue et coercive, et une forme linéaire L continue sur V . La méthode d'approximation variationnelle (dite méthode de Galerkin) du problème (1.2.1) consiste à remplacer l'espace V par une famille de sous-espaces V_h de dimension finie, $h > 0$, et on résout le problème suivant : Trouver $u_h \in V_h$, solution de

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h. \quad (1.3.1)$$

Lemme 1.5. *Si la forme bilinéaire a est coercive sur V , alors le problème (1.3.1) a une solution unique $u_h \in V_h$.*

Preuve. Comme V_h est un espace fermé pour la norme de V , on a clairement que la forme bilinéaire a restreinte à V_h c'est-à-dire est continue et coercive sur V_h . De même, $L|_{V_h} \in V_h'$, (forme linéaire continue) puisque

$$|L(v)| \leq C \|v\|, \forall v \in V,$$

ce qui implique que

$$|L(v_h)| \leq C \|v_h\|, \forall v_h \in V_h.$$

D'où d'après le Lemme de Lax-Milgram, le problème (1.3.1) a une solution unique $u_h \in V_h$.

■

La solution u_h ainsi obtenue est appelée l'approximation de Galerkin de u .

Maintenant, on va montrer que la résolution de (1.3.1) est équivalente à la résolution d'un système linéaire (fini), qui peut être résolu numériquement. Pour $h > 0$ fixé, considérons

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ une base de V_h , (N étant la dimension de V_h). Ainsi $v_h \in V_h$ si et seulement si il existe $\{\beta_i\}_{i=1}^N$ tel que

$$v_h = \sum_{j=1}^N \beta_j \varphi_j,$$

En particulier $u_h \in V_h$, donc on peut écrire

$$v = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i.$$

Avec cette notation, le problème (1.3.1) est équivalent à

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^N a(\varphi_j, \varphi_k) \beta_k \alpha_j &= \sum_{k=1}^N L(\varphi_k) \beta_k = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N \\ \iff \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_k) \alpha_j &= L(\varphi_k), 1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

Ce dernier système linéaire peut s'écrire

$$A_h X_h = L_h,$$

où A_h , dite de rigidité, est une matrice carrée dite matrice de rigidité, vérifiant tel que

$$A_h = (a(\varphi_j, \varphi_k))_{1 \leq k, j \leq N},$$

le vecteur donné L_h est la matrice colonne :

$$L_h = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ \vdots \\ L(\varphi_N) \end{pmatrix}.$$

Finalement, X_h est le vecteur inconnu :

$$X_h = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}.$$

La matrice A_h est inversible (la forme bilinéaire est coercive), donc le système linéaire admet une solution unique. Ce qui est implique que le problème (1.3.1) admet $u_h \in V_h$ comme solution unique.

1.3.2 Etude de la convergence

Une fois l'existence de u_h établie, il nous faut comparer la solution exacte u et la solution approchée u_h . Le but étant de montrer la convergence de la méthode c'est à dire que $u_h \rightarrow u$, lorsque $h \rightarrow 0$. Pour cela on fait appel au théorème suivant établi par Céa [22].

Théorème 1.6. *Soient $u \in V$ la solution du problème (1.2.1) et $u_h \in V_h$ la solution du problème (1.3.1). Alors*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Voici une preuve de vos résultat.

Preuve. On a:

$$a(u, u_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

Retranchant cette identité à (1.3.1), on obtient :

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h.$$

Ainsi, on peut écrire que

$$a(u - u_h, u - u_h) = A(u - u_h, u - u_h), \forall v_h \in V_h,$$

On sait que a est coercive et continue donc

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h), \forall v_h \in V_h \\ &\leq M_a \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V, \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M_a}{\alpha} \|u - v_h\|_V, \forall v_h \in V_h \\ \iff \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \end{aligned}$$

■

On a un résultat qui montre la convergence de la solution approchée vers la solution exacte du problème (1.3.1).

Théorème 1.7. *Supposons qu'il existe un sous espace $V_0 \subset V$ dense dans V et une application r_h de V_0 dans V (appelée **opérateur d'interpolation**)*

tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - r_h(v)\|_V = 0, \forall v \in V_0.$$

Alors, la méthode d'approximation variationnelle converge, c'est à dire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0.$$

où $u \in V$ la solution du problème (1.2.1) et $u_h \in V_h$ la solution du problème (1.3.1).

Preuve. Soit $u \in V$ solution de problème (1.3.1).

Soit $\varepsilon > 0$, comme V_0 est dense dans V , il existe un élément $v \in V_0$ tel que

$$\|u - v\| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, il existe un $h_0 > 0$ (dépendant de ε) tel que, pour cet élément $v \in V_0$,

On a

$$\|v - r_h(v)\| \leq \varepsilon, \forall h \leq h_0.$$

En vertu du théorème de Céa on a

$$\|u - u_h\| \leq C \|u - r_h(v)\| \leq C (\|u - v\| + \|v - r_h(v)\|) \leq 2C\varepsilon.$$

d'où le résultat. ■

Remarque 1.2. *On dit que la convergence est d'ordre k si et seulement si il existe $M > 0$ (indépendant de h) tel que*

$$\|u - u_h\|_V \leq Mh^k.$$

Chapitre 2

Analyse des problèmes de type Sobolev

Sommaire

2.1	Les équations de type Sobolev	15
2.1.1	Les équations de Sobolev linéaires	16
2.1.2	Les équations de Sobolev semi-linéaires	16
2.1.3	Les équations de Sobolev quasi-linéaires	17
2.2	Existence et unicité de la solution	17
2.3	Problème de Sobolev semi-linéaire	18
2.3.1	Semi-discrétisation explicite en temps	19
2.3.2	Schéma totalement discrétisé	21
2.4	Problème de Sobolev quasi-linéaire	22
2.4.1	Semi-discrétisation explicite en temps	22
2.4.2	Schéma totalement discrétisé	23

2.1 Les équations de type Sobolev

Dans cette section on discutera les équations de type Sobolev. Les équations de Sobolev sont écrit sous la forme suivante

$$A_1(t, u(t)) u_t + A_2(t, u(t)) u = f(t, u(t)), \quad (2.1.1)$$

où A_1 et A_2 sont des opérateurs différentiels pouvant dépendre de u et de t .

Une équation de Sobolev est dite linéaire si les deux opérateurs A_1 et A_2 sont linéaires. Sinon elle est dite non-linéaire.

2.1.1 Les équations de Sobolev linéaires

Définition 2.1.

Une équation de sobolev est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnu u et à toutes ses dérivées partielles. On peut l'écrire sous la forme :

$$A_1(t, u(t)) u_t + A_2(t, u(t)) u = f(t, u(t)), \quad (2.1.2)$$

où A_1 et A_2 sont des opérateurs différentiels linéaires pouvant dépendre de u et de t .

Exemple 3.

L'équation (2.1.3) est une équation de Sobolev linéaire

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u = f(t, u), \quad (2.1.3)$$

sachant que $A_1(t, u) = (I - \Delta)$ et $A_2(t, u) = -\Delta$

2.1.2 Les équations de Sobolev semi-linéaires

Définition 2.2. Une équation aux dérivées partielles de sobolev est dite semi-linéaire par rapport à la fonction inconnu u et à toutes ses dérivées partielles. Si on peut écrire sous la forme

$$A_1 u_t + A_2 u = f(t, u(t)), \quad (2.1.4)$$

où A_1 et A_2 sont des opérateurs différentiels ne dépendre de u et de t .

Exemple 4.

L'équation (2.1.5) est une équation de Sobolev semi-linéaire

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u = \sqrt{1 + t + u^2}, \quad (2.1.5)$$

2.1.3 Les équations de Sobolev quasi-linéaires

Définition 2.3. Une équation aux dérivées partielles de sobolev quasi-linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé de la fonction u .

$$A_1(t, u) u_t + A_2(t, u) u = f,$$

Exemple 5.

L'équation (2.1.6) est une équation de Sobolev semi-linéaire

$$\Delta(\rho_1(x, u) \Delta u_t) + \Delta(\rho_2(x, u) \Delta u) = f(t, u), \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.6)$$

avec

$$\rho_1(x, u) = \frac{1}{2} + \frac{u^2}{1+u^2}, \rho_2(x, u) = \frac{u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad f(t, u) = \sqrt{1+t+u^2}.$$

2.2 Existence et unicité de la solution

Soit H un espace de Hilbert réel et soit V un autre espace de Hilbert avec injection continue et dense dans H (on note $V \hookrightarrow H$). On notera par V' l'espace dual de V , par $(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire de H et par $(\cdot, \cdot)_{V', V}$ le produit de dualité entre V' et V .

On s'intéresse aux équations de type Sobolev de la forme suivante

$$\begin{cases} A_1(t, u) u_t + A_2(t, u) u = f(t, u), & \text{dans } V', 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, & \text{dans } V, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où chacun des opérateurs $A_i(t, u) : V \rightarrow V', t \in [0, T], u \in V, i = 1, 2$, est associée à une forme bilinéaire $a_i(t; u; \cdot, \cdot)$ par la relation suivante

$$a_i(t; u; v, w) = \langle A_i(t, u) v, w \rangle_{V', V}, \forall v, w \in V. \quad (2.2.2)$$

Proposition 2.1. Sous l'hypothèses (h1) et (h2) du chapitre 1 le problème (2.2.1) est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} u_t = F(t, u), & \text{dans } V, 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0, & \text{dans } V, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Dans ce cas, il est clair que la solution exacte de ce problème si elle existe est donnée par

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(\tau, u(\tau)) d\tau. \quad (2.2.4)$$

Preuve. L'hypothèse (h1) entraîne l'existence de M_1 et M_2 tel que $\|A_1(t, u)\| \leq M_1$ et $\|A_2(t, u)\| \leq M_2$ pour tout $t \in [0, T]$ et $u \in V$.

L'hypothèse (h2) et le Théorème de Lax-Milgram assurent que l'opérateur $A_1(t, u)$, est un isomorphisme de V sur V' ($A_1(t, u)^{-1}$ existe) avec $\|A_1^{-1}(t, u)\| \leq \frac{1}{\alpha}$ pour tout $t \in [0, T]$ et $u \in V$, comme l'opérateur $A_1(t, u)$, $t \in [0, T]$, $u \in V$ est inversible.

En composant l'équation de (2.2.1) par $A_1(t, u)^{-1}$, on obtient le problème équivalent

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{A}(t, u) u = g(t, u), & \text{dans } V, 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, & \text{dans } V, \end{cases} \quad (2.2.5)$$

où $\mathbf{A}(t, u) = A_1(t, u)^{-1} A_2(t, u)$ est un opérateur borné, avec $\|\mathbf{A}(t, u)\|_{\mathcal{L}(V)} \leq \frac{M_2}{\alpha}$ pour tout $t \in [0, T]$ et $u \in V$) et par conséquent en posant $F(t, u) = g(t, u) - \mathbf{A}(t, u) u$, on obtient problème (2.2.3). ■

2.3 Problème de Sobolev semi-linéaire

On considère le problème semi-linéaire défini par:

$$\begin{cases} A_1 u_t + A_2 u = f(t, u), & \text{dans } V', 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0, & \text{dans } V, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Le problème (2.3.1) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{A} u = g(t, u), & \text{dans } V, 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0, & \text{dans } V, \end{cases} \quad (2.3.2)$$

où $\mathbf{A} = A_1^{-1} A_2$ est un opérateur borné de V dans V et $g(t, u) = A_1^{-1} f(t, u)$.

On a le résultat suivant d'existence de l'unicité pour le problème (2.3.2) (voir le Théorème 6.1.5 de [3]).

Théorème 2.2. *Sous les hypothèse (h1)-(h2). Supposons que $u_0 \in V$ et que f est continûment différentiable de $[0, T] \times V$ dans V' . Alors le problème (2.3.2) admet une unique solution $u \in C^1([0, T]; V)$.*

2.3.1 Semi-discrétisation explicite en temps

On considère une subdivision régulière $(t_i = ik)_{i=0}^N$ de l'intervalle $[0, T]$, pour un entier positif N , on définit le pas de temps par $k = \frac{T}{N}$, et pour une fonction continue $w(t)$, on note $w_n = w(t_n)$.

Soit $\phi : [0, T] \times V \times [0, k] \rightarrow V$ une fonction continue. On cherche à estimer la solution u de (2.2.3) aux points (t_n) , $n = 1, \dots, N - 1$, en partant de $u(t_0 = 0) = u_0$ et en estimant étape par étape les valeurs de $u(t_{n+1})$ en utilisant la formule de variation des constantes

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

Dans la suite, on utilisera une méthode d'approximation donnée par le schéma suivant :

$$\begin{cases} U_0 = u_0, \\ U_{n+1} = U_n + k\phi(t_n, U_n, k), n = 0, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Pour montrer la convergence de ce schéma numérique on définit l'erreur de consistance locale.

Définition 2.4. *L'erreur de consistance locale E_L relative à la solution exacte u de (2.2.3) est définie par*

$$E_l(t_{n+1}) = u(t_{n+1}) - u(t_n) - k\phi(t_n, u(t_n), k), \forall n = 0, \dots, N - 1. \quad (2.3.4)$$

Le théorème suivant est une généralisation d'un résultat très connu pour les équations différentielles ordinaires de la forme $u_t = F(t, u)$, où F est à valeurs dans \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}^$.*

Théorème 2.3. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2, soit u la solution exacte du problème (2.2.3) On suppose que ϕ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément en t , i.e., il existe une constante positive L telle que*

$$\|\phi(t, u, k) - \phi(t, v, k)\| \leq L \|u - v\|, \forall t \in [0, T], u, v \in V, \forall k, \quad (2.3.5)$$

et on suppose que l'erreur locale vérifie l'estimation suivante pour un certain $p \in \mathbb{N}$ et pour une certaine constante positive c

$$\|E_l(t_{n+1})\| \leq ck^{p+1}, \forall n = 0, \dots, N - 1.$$

Alors, l'erreur globale $e_n = u(t_n) - U_n$ satisfait

$$\|e_n\| \lesssim ck^p, n = 0, \dots, N.$$

Preuve. On a d'après (2.3.4)

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + k\phi(t_n, u(t_n), k) + E_l(t_{n+1}), n = 0, \dots, N - 1.$$

Alors par (2.3.3) et comme ϕ est lipschitzienne, on obtient

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}\| &\leq \|e_n\| + k\|\phi(t_n, u(t_n), k) - \phi(t_n, U_n, k)\| + \|E_l(t_{n+1})\| \\ &\leq (1 + Lk)\|e_n\| + C(k)^{p+1}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Par itération sur n avec $1 \leq n \leq N$ il vient

$$\|e_n\| \leq (1 + Lk)^n \|e_0\| + c(k)^{p+1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + Lk)^{n-k-1}.$$

Comme $e_0 = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \|e_n\| &\leq C(k)^{p+1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + Lk)^{n-k-1} \\ &\lesssim n(k)^{p+1} (1 + Lk)^N \\ &\lesssim (k)^p (1 + Lk)^N \\ &= (k)^p \left\{ (1 + Lk)^{\frac{1}{Lk}} \right\}^{TL} \\ &\lesssim (k)^p (2e)^{TL}. \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Schéma d'Euler explicite

Ce schéma correspond au choix $\phi(t, u, k) = F(t, u)$, et donc prend la forme

$$\begin{cases} U_0 = u_0, \\ U_{n+1} = U_n + F(t_n, U_n), n = 0, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Dans ce cas on a l'estimation d'erreur donnée par le théorème suivant

Théorème 2.4. Soient u la solution exacte du problème (2.3.1) et U_n la solution approchée donnée par le schéma d'Euler explicite (2.3.7) Alors l'erreur locale E_l définie par (2.3.4) vérifie l'estimation suivante

$$\|E(t_{n+1})\| \lesssim (k)^2, \forall n = 0, \dots, N-1. \quad (2.3.8)$$

et, l'erreur globale $e_n = u(t_n) - U_n$ satisfait

$$\|e_n\| \lesssim k, \forall n = 0, \dots, N. \quad (2.3.9)$$

2.3.2 Schéma totalement discrétisé

Pour un paramètre positif h (qui joue le rôle de la taille de maille), on suppose donné un sous-espace de dimension finie V_h de V et on cherche à construire une approximation totalement discrète du problème (2.2.1) c'est à dire en temps et en espace. Soit maintenant le problème discret (en espace) du problème (2.2.1)

$$\begin{cases} A_{1,h}u_{h,t} + A_{2,h}u_h = f_h(t, u_h), & \text{dans } V_h, 0 \leq t \leq T, \\ u_h(0) = P_h u_0, & \text{dans } V_h, \end{cases} \quad (2.3.10)$$

qui est équivalent le problème discret

$$\begin{cases} u_{h,t} + \mathbf{A}_h u_h = g_h(t, u_h), & \text{dans } V_h, 0 \leq t \leq T, \\ u_h(0) = P_h u_0, & \text{dans } V_h, \end{cases} \quad (2.3.11)$$

où $\mathbf{A}_h = A_{1,h}^{-1}A_{2,h}$ et $g_h(t, u_h) = A_{1,h}^{-1}f_h(t, u_h)$. Notons que l'opérateur est borné (uniformément par rapport à h) de V_h avec $\|\mathbf{A}_h\|_{\mathcal{L}(V_h)} \leq \frac{M_2}{\alpha}$,

et que le problème (2.3.11) peut être écrit de manière équivalente comme une EDO dans V_h de la forme:

$$\begin{cases} u_{h,t} = F_h(t, u_h), & \text{dans } V_h, 0 \leq t \leq T, \\ u_h(0) = P_h u_0, & \text{dans } V_h, \end{cases} \quad (2.3.12)$$

où $F_h(t_n, u_h) = g_h(t_n, u_h) - \mathbf{A}_h u_h$. Par un schéma d'Euler explicite, la solution approchée du problème (2.3.12) est donnée par les récurrences suivantes :

$$\begin{cases} U_{0,h} = P_h u_0 \\ U_{n+1,h} = U_{n,h} + kF_h(t_n, U_{n,h}), n = 0, \dots, N-1, \end{cases} \quad (2.3.13)$$

La convergence de ce schémas sous certaines conditions de régularité a été obtenue dans [] en montrons que la suite $(U_n)_{n=1}^N$ définie par (2.3.5) est bornée dans D_s , c'est-à-dire que

$\|U_n\|_{D_s} \lesssim 1$, $\forall n = 1, \dots, N$ et il existe $r > 0$ tel que l'erreur $e_{n,h} = U_n - U_{n,h}$ satisfait l'estimation suivante

$$\|e_{n,h}\| \lesssim h^{q(s)}.$$

2.4 Problème de Sobolev quasi-linéaire

Après avoir étudié à la section précédente des équations de Sobolev semi-linéaires, on s'intéressa dans cette section aux équations de Sobolev quasi-linéaires (2.2.1), et on considère le problème quasi-linéaire

$$\begin{cases} A_1(t, u) + A_2(t, u)u = f(t, u), & \text{dans } V', 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, & \text{dans } V. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Il est bien connu qu'il n'y a pas existence de solution classique globale de ce type de problèmes de Cauchy. T. Kato et A. Pazy ont montré un résultat d'existence locale de la solution (la solution existe pour un t suffisamment petit) sous certaines hypothèses sur la partie quasi-linéaire et la partie semi-linéaire de l'équation de Cauchy (voir [3, 21]). De manière analogue et en utilisant les arguments précédant, on montre l'existence locale de la solution de (2.2.1), c'est-à-dire. si B une boule ouverte de V tel que $u_0 \in W$ alors le problème (2.2.4) admet une unique solution $u \in C([0, T]; W)$.

2.4.1 Semi-discrétisation explicite en temps

On considère un entier $N > 0$ et on pose $k = \frac{T'}{N}$ le pas uniforme de discrétisation en temps, où T' est le temps d'existence de u , Pour tout $0 \leq n \leq N$, on note U_n l'approximation de $u(t_n)$, $t_n = nk$. Comme dans le cas d'un problème semi-linéaire, on utilisera ici un schéma d'Euler explicite qui consiste à : partant de $U_0 = u_0$, chercher U_{n+1} tel que

$$U_{n+1} = U_n + kF(t_n, U_n), n = 0, \dots, N, \quad (2.4.2)$$

Lemme 2.5. *On suppose que $u_0 \in W$. Sous les hypothèses (h1)-(h2) la fonction F est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément en t , i.e. pour tout $t \in [0, T]$*

$$\|F(t, u) - F(t, v)\| \lesssim \|u - v\|, \forall u \in W, \forall v \in V.$$

Preuve. Par définition de F il est facile de voir que

$$\|F(t, u) - F(t, v)\| \leq \|g(t, u) - g(t, v)\| + \|\mathbf{A}(t, v)v - \mathbf{A}(t, u)u\|.$$

Le résultat s'en suit grâce au Corollaire 2.3., 2., l'inégalité (2.4.7) et au fait que $u \in W$. ■

Comme la fonction F est seulement localement lipschitzienne, on a besoin d'une version légèrement modifiée du Théorème 2.3.

Théorème 2.6. *Sous les hypothèses du Théorème 2.8, soit u la solution exacte du problème (2.2.3). On suppose que φ est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément en t , i.e., il existe une constante positive L indépendante de t et k telle que*

$$\|\phi(t, u, k) - \phi(t, v, k)\| \leq L \|u - v\|, \forall t \in [0, T], u \in W, v \in V, \quad (2.4.3)$$

et on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que l'erreur locale vérifie

$$\|E_l(t_{n+1})\| \lesssim (k)^{p+1}, \forall n = 0, \dots, N-1.$$

Alors, l'erreur globale $e_n = u(t_n) - U_n$ satisfait

$$\|e_n\| \lesssim (k)^p, \forall n = 0, 1, \dots, N.$$

Notons que si de plus la solution exacte u du problème (2.2.1) a la régularité $C^2([0, T']; V)$ alors

$$\|e_n\| \lesssim k, \forall n = 0, 1, \dots, N.$$

2.4.2 Schéma totalement discrétisé

On suppose toujours qu'il existe un sous espace de dimension finie V_h de V , $h > 0$, et on considère l'approximation discrète $A_{i,h}(t, u_h)$ de $A_i(t, u_h)$, $i = 1, 2$, définie par

$$\langle A_{i,h}(t, u_h)v_h, w_h \rangle_{V_h', V_h} = a_i(t; u_h; v_h, w_h), \forall v_h, w_h \in V_h, \forall i = 1, 2, \quad (2.4.4)$$

où $a_i(t; u_h; \cdot, \cdot)$, $i = 1, 2$, est la forme bilinéaire définie par (2.2.2).

Pour tout $t \in [0, T]$ et $u \in V$, on définit l'opérateur de projection $P_h(t, u)$ associé à la forme bilinéaire $a_1(t; u_h; \cdot, \cdot)$, i.e., pour chaque $v \in V$, $P_h(t, u)v \in V_h$ est l'unique solution de

$$a_1(t; u_h; P_h(t, u)v, w_h) = a_1(t; u_h; v, w_h), \forall w_h \in V_h.$$

Si on note par

$$\|\cdot\|_{t,v} = \sqrt{a_1(t; u_h; \cdot, \cdot)},$$

la norme associée à la forme bilinéaire $a_1(t; u_h; \cdot, \cdot)$, on trouve grâce à la continuité et la coercivité uniformes de $a_1(t; u_h; \cdot, \cdot)$ (hypothèses (h1) et (h2)), que

$$\sqrt{\alpha} \|u\| \leq \|u\|_{t,v} \leq \sqrt{M_1} \|u\|, \quad \forall t \in [0, T], \forall u, v \in V. \quad (2.4.5)$$

On considère maintenant le problème semi-discret (en espace) du problème (2.4.6)

$$\begin{cases} A_{1,h}(t, u_h) u_{h,t} + A_{2,h}(t, u_h) u_h = f_h(t, u_h), & \text{dans } V_h, 0 < t \leq T, \\ u_h(0) = P_h(t_0, u_0) u_0, & \text{dans } V_h, \end{cases} \quad (2.4.6)$$

où $f_h(t, u_h) = I_h(f(t, u_h))$ et I_h est l'opérateur défini dans le cas sem-linéaire.

Comme dans le cas continu, l'opérateur $A_{1,h}(t, u_h)$, $t \in [0, T]$, $u_h \in V_h$ étant inversible, ce problème est donc équivalent à

$$\begin{cases} u_{h,t} + A_h(t, u_h) u_h = g_h(t, u_h), & \text{dans } V_h, 0 < t \leq T, \\ u_h(0) = P_h(t_0, u_0) u_0, & \text{dans } V_h, \end{cases} \quad (2.4.7)$$

où $\mathbf{A}_h(t, u_h) = A_{1,h}(t, u_h)^{-1} A_{2,h}(t, u_h)$ et $g_h(t, u_h) = A_{1,h}(t, u_h)^{-1} f_h(t, u_h)$. Le Lemme suivant montre que l'opérateur $\mathbf{A}_h(t, u_h)$ est borné (uniformément par rapport à h) de V_h dans lui même.

Lemme 2.7. *Sous les hypothèses (h1) et (h2) on a pour chaque $t \in [0, T]$ et $v_h \in V_h$*

$$\|\mathbf{A}_h(t, u_h)\|_{\mathcal{L}(V_h)} \leq \frac{M_2}{\alpha}. \quad (2.4.8)$$

Preuve. Soient $t \in [0, T]$ et $v_h \in V_h$. On a

$$\|\mathbf{A}_h(t, v_h)\|_{\mathcal{L}(V_h)} = \sup_{w_h \in V_h, w_h \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}_h(t, v_h) w_h\|}{\|w_h\|}.$$

Pour un $w_h \in V_h$, $w_h \neq 0$ fixé, on pose $v'_h = A_{1,h}(t, v_h)^{-1} A_{2,h}(t, v_h) w_h$. Alors on a par (2.4.4)

$$a_1(t; v_h; v'_h, \varphi_h) = a_2(t; v_h; w_h, \varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in V_h,$$

En posant $\varphi_h = v'_h$ dans cette égalité et en utilisant compte des hypothèses (h1) et (h2), on trouve

$$\alpha \left\| v'_h \right\|^2 \leq a_2 \left(t; v_h; w_h, v'_h \right) \leq M_2 \|w_h\| \left\| v'_h \right\|,$$

d'où (2.4.8). ■

Notons que le problème (2.4.7) peut être écrit de manière équivalente comme une EDO dans V_h :

$$\begin{cases} u_{h,t} = F_h(t, u_h), & \text{dans } V_h, 0 \leq t \leq T, \\ u_h(0) = P_h(t_0, u_0) u_0, & \text{dans } V_h, \end{cases} \quad (2.4.9)$$

où $F_h(t, u_h) = g_h(t, u_h) - \mathbf{A}_h(t, u_h) u_h$. Par conséquent, son approximation par un schéma d'Euler explicite prend la forme:

$$\begin{cases} U_{0,h} = P_h(t_0, u_0) u_0 \\ U_{n+1,h} = U_{n,h} + k F_h(t_n, U_{n,h}), n = 0, \dots, N-1, \end{cases} \quad (2.4.10)$$

Remarque 2.1. Pour chaque $u_h \in V_h$, il est facile de vérifier, sous les hypothèses (h1) et (h2) que

$$g_h(t, u_h) = P_h(t, u_h) g(t, u_h), \forall t \in [0, T]. \quad (2.4.11)$$

En effet comme $A_{1,h}(t, u_h) g_h(t, u_h) = I_h f(t, u_h)$ on obtient

$$a_1(t; u_h; g_h(t, u_h), v_h) = \langle f(t, u_h), v_h \rangle_{V', V}, \quad \forall v_h \in V_h.$$

D'une part la définition de $P_h(t, u_h)$ implique que

$$a_1(t; u_h; P_h(t, u_h) g(t, u_h), v_h) = a_1(t; u_h; g(t, u_h), v_h) = a_1(t; u_h; A_1^{-1}(t, u_h) f(t, u_h), v_h).$$

D'autre part par la définition de la forme bilinéaire $a_1(t; u_h; \cdot, \cdot)$ on trouve

$$a_1(t; u_h; g_h(t, u_h), v_h) = a_1(t; u_h; P_h(t, u_h) g(t, u_h), v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

d'où (2.4.11) par le lemme de Lax-Milgrem.

Lemme 2.8. Soit U_n (resp. $U_{n,h}$) la solution approchée donnée par (2.3.5). Alors l'erreur $e_{n,h} = U_n - U_{n,h}$ est majorée comme suit

$$\|e_{n,h}\| \lesssim h^{q(s)}. \quad (2.4.12)$$

Preuve. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \|e_{n+1,h}\| &\leq \|e_{n,h}\| + \frac{k}{2} \|F_h(t_n, U_{n,h}) - F(t_n, U_n)\| \\ &\quad + \frac{k}{2} \|F_h(t_{n+1}, U_{n,h} + kF_h(t_n, U_{n,h})) - F(t_{n+1}, U_n + kF(t_n, U_n))\|. \end{aligned}$$

La suite de la preuve est comme dans le cas semi-linéaire (Lemme 2.7). ■

Remarque 2.2. *Sous les mêmes hypothèses du Lemme 2.8, si le schéma d'Euler (3.2.4) est utilisé pour approcher la solution du problème (2.1.1), alors l'estimation d'erreur (3.2.7) reste valide.*

Chapitre 3

Applications et illustrations numériques en utilisant freefem++

Sommaire

3.1	Introduction à FreeFem++	27
3.2	Applications pour les problèmes semi-linéaire de Sobolev	30
3.2.1	Résultats numériques	32
3.2.2	L'ordre de convergence en espace	33
3.2.3	L'ordre de convergence en temps	37
3.3	Applications pour les problèmes quasi-linéaire de Sobolev	39
3.3.1	L'ordre de convergence en espace	42
3.3.2	L'ordre de convergence en temps	45

3.1 Introduction à FreeFem++

FreeFem++ est un logiciel (freeware) écrit en C++ développé au Laboratoire Jacques Louis Lions de L'Université Pierre et Marie Curie, Paris, porté sous Windows, Unix (Linux) et MacOS. FreeFem++ est un solveur permettant de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles (EDP) en 2d et 3d.

Parmi ses caractéristiques :

- Il s'exécute en ligne de commande.

- Il permet de créer des maillages.
- Résoudre des équations aux dérivées partielles par des méthodes de type éléments finis.

L'objectif de ce chapitre n'est pas de donner une liste exhaustive des diverses fonctionnalités du langage FreeFem++ (basé sur C ++). Mais plutôt de dire que grâce à FreeFem++ on peut résoudre notre problème. Pour résoudre numériquement n'importe quel problème (EDP) par la méthode des éléments finis en 2d ou 3d, on suit les étapes suivantes :

1. Déclaration des variables.
2. Définition du domaine.
3. Définition du maillage.
4. Définition de l'ensemble des éléments finis.
5. Définition du problème variationnel + conditions aux limites.
6. Résolution du problème variationnel.
7. Figuration (traçage) de la solution.
8. Enregistrement des résultats.

Exemple 6.

1. Pour la déclaration des variables on utilise les commandes **int** et **real**:

Les entiers: **int** $n = 40$;

Les réels: **real** $t = 0, T = 1, dt = 0.00625, dt2 = dt1/2$;

Pour les formules où s'agit de fonctions dépendantes de variables d'espace x et y , elles sont définies à partir des fonction élémentaires:

func $f = \sin(x + y)$;

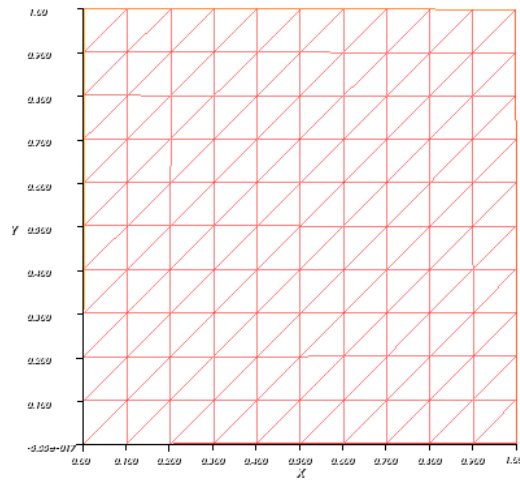
2. Pour un domaine rectangle $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Pour générer un maillage régulier, on utilise la commande **mesh**:

Exemple:

int $n = 10$;

mesh $Th = \text{square}(n, n)$;

plot (Th); (Cette commande permet d'afficher les maillages et les résultats tels que les champs de vecteurs).



3. Pour générer un maillage uniforme, on peut utiliser la commande **buildmesh**:

```
border a1(t = 1, 0){x = 0; y = t; label = 1; }
```

```
border a3(t = 0, 1){x = t; y = 0; label = 2; }
```

```
border ab(t = 0, 1){x = 1; y = t; label = 3; }
```

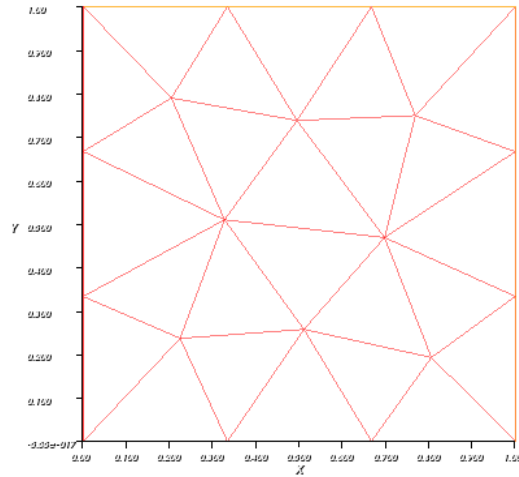
```
border a2(t = 1, 0){x = t; y = 1; label = 4; }
```

```
border a4(t = 0, -2 * pi){x = 0.5 + 0.1 * cos(t); y = 0.5 + 0.1 * sin(t); label = 1; }
```

```
int NN = 10;
```

```
mesh Th = buildmesh(a1(2 * NN) + a3(2 * NN) + ab(2 * NN) + a2(2 * NN));
```

```
plot (Th, wait = 1, ps = "mesh.eps");
```



4. Pour la définition de l'ensemble des éléments finis V_h . On utilise la commande **fespace** *fespace nom espace (nom de maillage, type d'éléments finis);*

Par exemple:

mesh $Th = \text{square}(10, 10);$

fespace $Vh(Th, P1);$

Vh $u, v;$ (déclaration des variables)

5. Définition du problème variationnel: De manière générale, on définit un problème variationnel de la façon suivante:

problem $Eulerexplicite(u, v) = a(u, v) - l(v) + (\text{conditions aux bords});$

Exemple:

problem $Eulerexplicite(u, v) = \text{int2d}(Th)((\mathbf{dx}(u) * \mathbf{dx}(v) + \mathbf{dy}(u) * \mathbf{dy}(v)) + u * v)$

$-\text{int2d}(Th)((dt * f + u) * v) + \text{on}(1, 2, 3, 4, uh = g);$

Enfin, pour résoudre le problème variationnel "Nom-du-problème", il suffit de taper la commande:

Nom-du-problème;

3.2 Applications pour les problèmes semi-linéaire de Sobolev

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$ à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Pour $i = 1, 2$, soit L_i l'opérateur elliptique d'ordre deux de la forme

$$L_i(x, D_x)u = - \sum_{k,l=1}^d \partial_k \left(a_{k,l}^{(i)}(x) \partial_l u \right) + \sum_{k=1}^d b_k^{(i)}(x) \partial_k u + c^{(i)}(x)u, \quad (3.2.1)$$

où $a_{k,l}^{(i)} = a_{l,k}^{(i)} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $b_k^{(i)}, c^{(i)} \in L^\infty(\Omega)$. On suppose de plus qu'il existe $\alpha_* > 0$ tel que

$$\sum_{k,l=1}^d a_{k,l}^{(1)}(x) \partial_{\xi_l} \partial_{\xi_k} \geq \alpha_* |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Dans ce cas, on introduit les formes bilinéaires continues a_i sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

$$a_i(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{k,l=1}^d a_{k,l}^{(i)}(x) \partial_l u \partial_k v + \sum_{k=1}^d b_k^{(i)}(x) \partial_k u v + c^{(i)}(x) u v \right) dx, \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi leurs opérateurs associées A_i

$$a_i(u, v) = \langle A_i u, v \rangle_{V', V}, \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

sont continus de $H_0^1(\Omega)$ dans son dual $H^{-1}(\Omega)$. Ces opérateurs satisfont les hypothèses (h1) et (h2) du Chapitre 1 avec $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$, si on suppose que a_1 est coercive sur $H_0^1(\Omega)$.

Par conséquent le problème

$$\begin{cases} L_1 u_t + L_2 u = f(t, u), & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0, & \text{dans } H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (3.2.2)$$

est bien posé pour une donnée initiale $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et f continûment différentiable de $[0, T] \times H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Ce système est une équation semi-linéaire de Sobolev sur Ω qui a été analysée dans [8, 25] dans certaines situations particulières avec des conditions aux limites de type Neumann.

Maintenant pour construire le schéma totalement discret, nous allons utiliser une méthode des éléments finis basée sur un maillage de Ω . Pour cela, on considère une famille de maillages $\{T_h\}_h$ de Ω avec $T_h = (K_l)_{l=1, \dots, N}$, où les éléments finis K_l sont des tétraèdres (ou des triangles). Pour simplifier l'analyse, on suppose que le bord de Ω est exactement triangulé et on considère la méthode des éléments finis de Lagrange comme illustrée dans [6]. Aussi, pour chaque élément K , on note par \mathcal{F}_K l'application affine qui envoie l'élément de référence \widehat{K} à K (voir FIGURE 3.1).

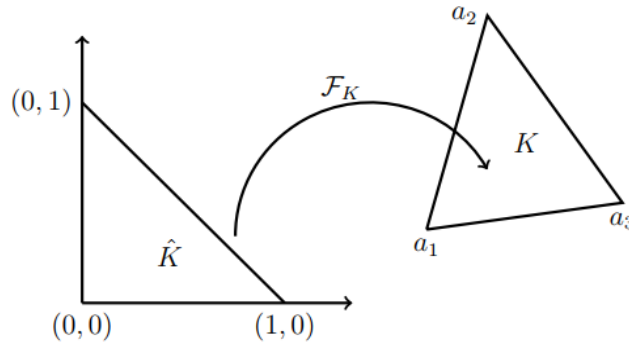


FIGURE 3.1– Triangle de référence-Transformation affine.

À partir de cette triangulation T_h , on définit l'espace d'approximation $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ par

$$V_h = \left\{ v_h \in H_0^1(\Omega) : |v_h| \circ \mathcal{F}_K^{-1} \in \mathbb{P}_p(\widehat{K}), \forall K \in T_h \right\}, \quad (3.2.3)$$

où $\mathbb{P}_p(\widehat{K})$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à p .

Enfin, les schémas totalement discrets du problème (3.2.2) peuvent être formulés comme suit :

Le schéma d'Euler explicite consiste à trouver $U_{n+1,h} \in V_h$ solution de

$$a_1(U_{n+1,h}, \chi_h) = a_1(U_{n,h}, \chi_h) - \Delta t a_2(U_{n,h}, \chi_h) + \Delta t (f(t_n, U_{n,h}), \chi_h). \quad (3.2.4)$$

3.2.1 Résultats numériques

On propose des exemples tests où chaque test proposé, on commence par choisir dans (3.2.2) les deux opérateurs L_1 et L_2 et le domaine Ω . Et ensuite on construit la courbe d'erreur en norme $H_0^1(\Omega)$ en espace et en temps.

Considérons maintenant le problème semi linéaire:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \Delta u = f(t, u), & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0, & \text{dans } H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (3.2.5)$$

sur le carré unité $\Omega = (0, 1)^2$ et une donnée au limite nulle avec

$$f(t, u) = \sqrt{1 + t + u^2}. \quad (3.2.6)$$

f est continûment différentiable de $[0, T] \times H_0^1(\Omega)$ dans \mathbb{R} . Dans ce cas la solution exacte est inconnue, donc on ne peut pas calculer l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte on peut utiliser les solutions numériques $U_{n,2h}$, $U_{n,h}$ et $U_{n,h/2}$ et estimer l'ordre de convergence en espace comme suit

$$\text{L'ordre de convergence en espace} = \log_2 \left(\frac{\|U_{n,h} - U_{n,2h}\|_\infty}{\|U_{n,h/2} - U_{n,h}\|_\infty} \right), \quad (3.2.7)$$

où $U_{n,2h}$ et $U_{n,h/2}$ sont les solutions totalement discrètes pour les pas de maillage $2h$ et $h/2$, respectivement et un Δt suffisamment petit. De la même façon, on calcule l'ordre de convergence en temps

$$\text{L'ordre de convergence en temps} = \log_2 \left(\frac{\|U_{n,h}^{\Delta t} - U_{n,h}^{2\Delta t}\|_\infty}{\|U_{n,h}^{\Delta t/2} - U_{n,h}^{\Delta t}\|_\infty} \right), \quad (3.2.8)$$

où $U_{n,h}^{2\Delta t}$ et $U_{n,h}^{\Delta t/2}$ sont les solutions totalement discrètes pour les pas de temps $2\Delta t$ et $\Delta t/2$, respectivement et avec un pas de maillage h suffisamment petit.

Dans ce test on présente les résultats numériques pour le cas d'une équation semi-linéaire dont la solution exacte est inconnue, on estimera les ordres de convergence en espace et en temps d'une manière différente par rapport aux premiers tests. Les calculs numériques qui suivront ont été réalisés avec freefem++ [10].

3.2.2 L'ordre de convergence en espace

Voici le programme qui permet d'afficher les résultats:

Programme:

```

int n = 10;
mesh Th = square(n, n);
mesh Th2 = square(2 * n, 2 * n);
fespace Vh(Th, P1);
fespace Vh2(Th2, P1);
Vh uh, vh, uhn = 0;
Vh2 uh2, vh2, uhn2 = 0;
real t = 0, T = 1, dt = 0.1, dt2 = dt;
func g = 0;
    
```



```

func f = sqrt(1 + t + uhn * uhn);
problem Eulerexplicite1(uh, vh, solver = LU) =
int2d(Th)((dx(uh) * dx(vh) + dy(uh) * dy(vh)) + uh * vh)
-int2d(Th)((dt * f + uhn) * vh)
-int2d(Th)((dt - 1) * (dx(uhn) * dx(vh) + dy(uhn) * dy(vh)))
+on(1, 2, 3, 4, uh = g);
problem Eulerexplicite2(uh2, vh2, solver = LU) =
int2d(Th2)((dx(uh2) * dx(vh2) + dy(uh2) * dy(vh2)) + uh2 * vh2)
-int2d(Th2)((dt * f + uhn2) * vh2)
-int2d(Th2)((dt - 1) * (dx(uhn2) * dx(vh2) + dy(uhn2) * dy(vh2)))
+on(1, 2, 3, 4, uh2 = g);
real test; t = dt;
for (t; t < T; t = t + dt){
    Eulerexplicite1; Eulerexplicite2;
    uhn2 = uh2; uhn = uh;
    test = max(test, sqrt(int2d(Th)(square(dx(uh) - dx(uh2)) + square(dy(uh) - dy(uh2))));
    plot (uh, fill = 1);
}
cout << "erreur = " << test << endl ;
    
```

Résultats numériques

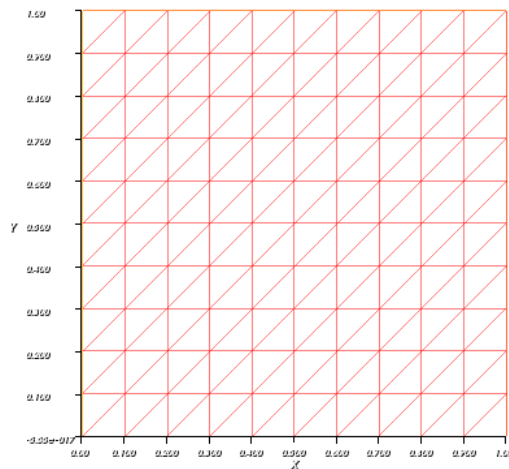


FIGURE 3.2— Traugulation régulière du carré $\Omega = (0, 1)^2$ pour $h = 0.1$, avec :
 nb sommets = 121 , nb triangles = 200 , nb arêtes frontières = 40.

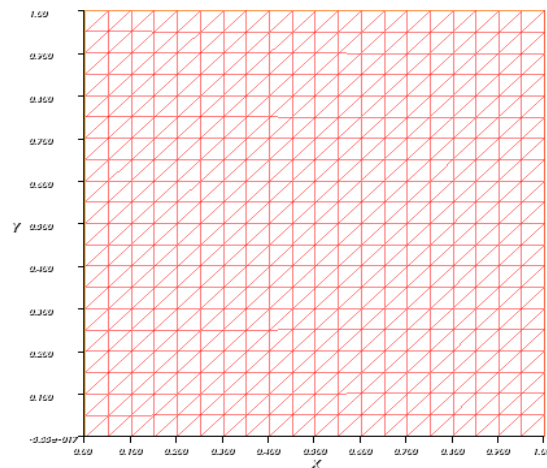


FIGURE 3.3– Traigulation régulière du carré $\Omega = (0, 1)^2$ pour $h = 0.05$, avec :
nb sommets = 441 , nb triangles = 800 , nb arêtes frontières 80.

La FIGURE 3.4 (resp. la FIGURE 3.5) montre la solution totalement discrète $U_{n,h}$ (resp. $U_{n,2h}$) obtenue par le schéma d’Euler (3.2.4) et les éléments \mathbb{P}_1 au temps final $T = 1$ avec $\Delta t = 0.1$ et $h = 0.025$, (resp. $\Delta t = 0.1$ et $h = 0.05$).

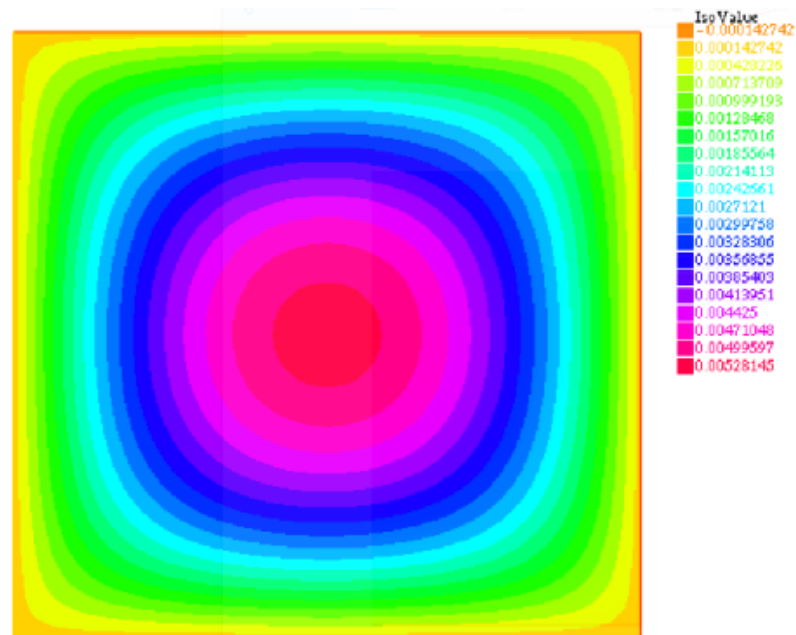


FIGURE 3.4– La solution numérique $U_{n,h}$ obtenue par le schéma d’Euler (3.2.4) avec $\Delta t = 0.1$ et $h = 0.025$.

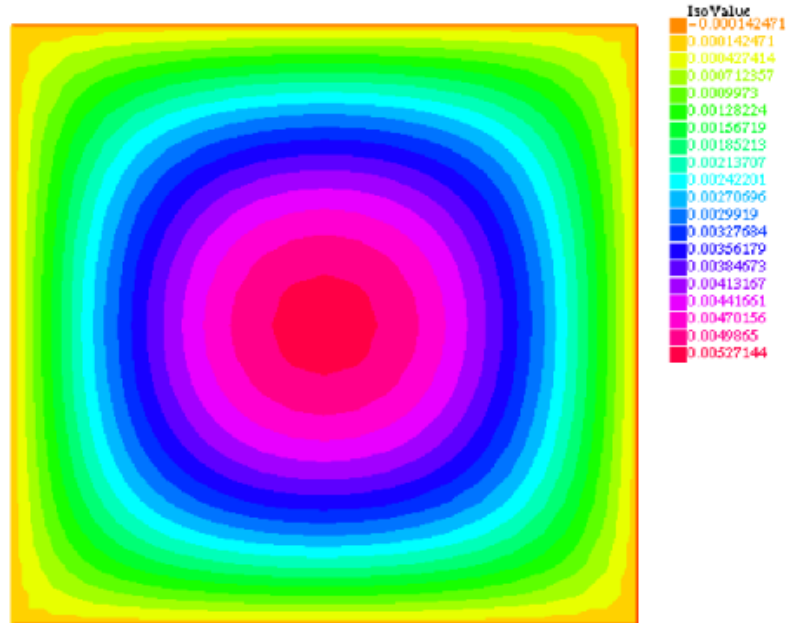


FIGURE 3.5– La solution numérique $U_{n,2h}$ obtenue par le schéma d’Euler (3.2.4) avec $\Delta t = 0.1$ et $2h = 0.05$.

Le Tableau 3.1 montre l’ordre de convergence pour différents h où on a choisi Δt suffisamment petit de sorte que l’erreur due à la discrétisation en temps soit négligeable

h	$\ U_{n,h} - U_{n,2h}\ _{\infty}$	L’ordre de convergence
0.2	0.00631	0.948
0.1	0.00327	0.98
0.05	0.00165	0.99
0.025	0.00083	1
0.0125	0.00041	1
0.00625	0.00020	1
0.003125	0.00010	

Tableau 3.1– L’ordre de convergence pour différents h avec $\Delta t = 0.1$.

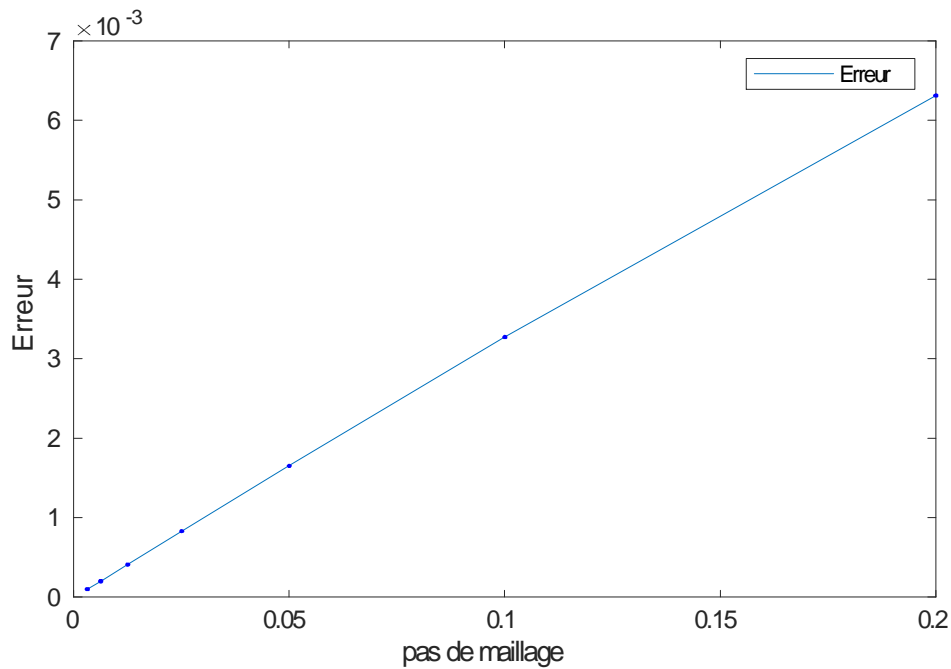


FIGURE 3.6— Courbe d'erreur en norme $H_0^1(\Omega)$ en espace.

Remarque 3.1. *D'après ces résultats, la valeur de l'erreur décroît si la valeur de pas maillage est très petit, ce qui prouve que les résultats numériques sont très performants.*

3.2.3 L'ordre de convergence en temps

Programme:

```

int n = 20;
mesh Th = square(n, n);
real t = 0, T = 1, dt1 = 0.01, dt2 = dt1/2;
fespace Vh(Th, P1);
Vh uh, vh, uhn = 0, uh1 = uhn, uh2 = uhn;
func g = 0; f = sqrt(1 + t + uhn * uhn);
problem Eulerexplicite(uh, vh, solver = LU) =
int2d(Th)((dx(uh) * dx(vh) + dy(uh) * dy(vh)) + uh * vh)
-int2d(Th)((dt * f + uhn) * vh)
-int2d(Th)((dt - 1) * (dx(uhn) * dx(vh) + dy(uhn) * dy(vh)))
+on(1, 2, 3, 4, uh = g);

```

Résultat numérique

La FIGURE 3.7 (resp. la FIGURE 3.8) montre la solution totalement discrète $U_{n,h}^{\Delta t}$ (resp. $U_{n,2h}^{2\Delta t}$) obtenue par le schéma d'Euler (3.2.4) et les éléments \mathbb{P}_1 au temps final $T = 1$ avec $\Delta t = 0.025$ et $h = 0.05$,(resp. $\Delta t = 0.05$ et $h = 0.05$).

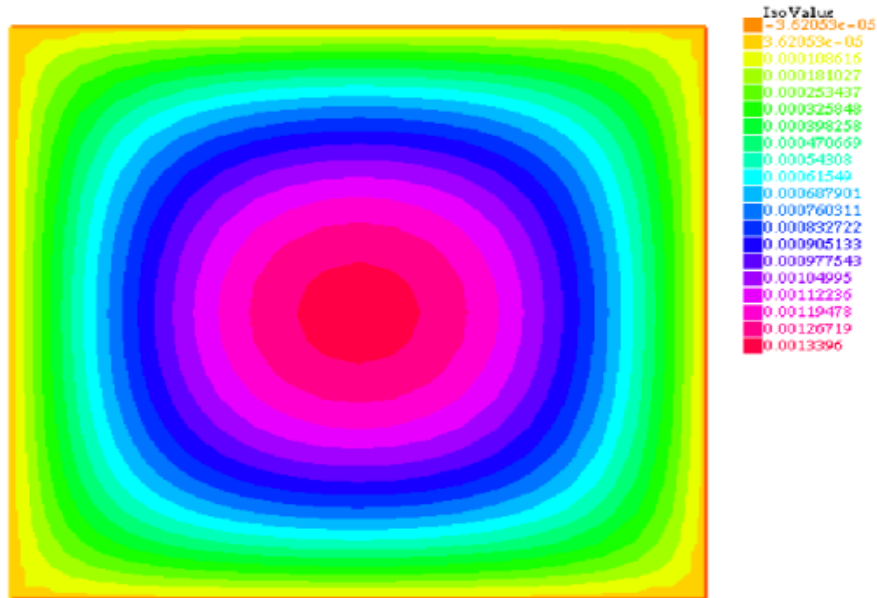


FIGURE 3.7– La solution numérique $U_{n,h}^{\Delta t}$ obtenue par le schéma d'Euler (3.2.4) avec $\Delta t = 0.025$ et $h = 0.05$.

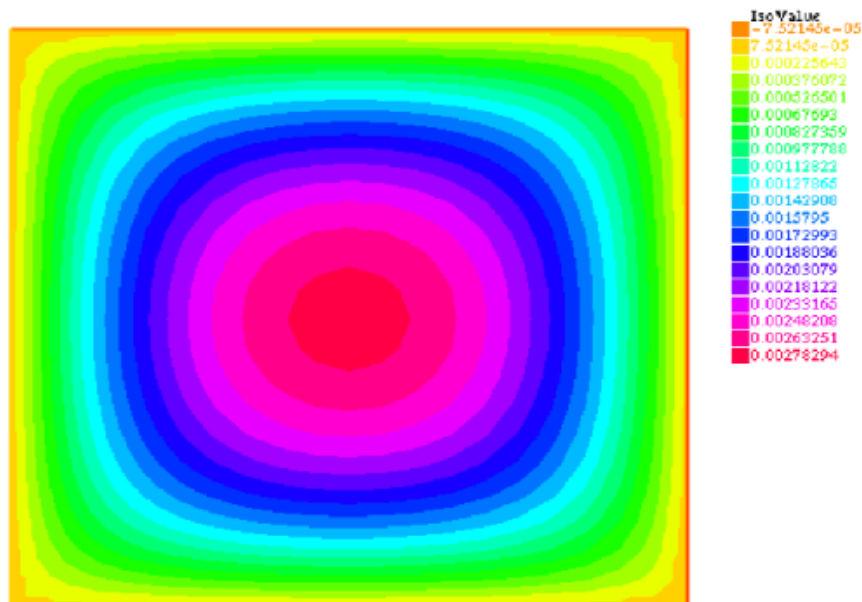


FIGURE 3.8– La solution numérique $U_{n,h}^{2\Delta t}$ obtenue par le schéma d'Euler (3.2.4) avec $2\Delta t = 0.05$ et $h = 0.05$.

Le Tableau 3.2 montre l'ordre de convergence pour différents Δt où on a choisi h suffisamment petit de sorte que l'erreur due à la discrétisation en espace soit négligeable

Δt	$\ U_{n,h}^{\Delta t} - U_{n,2h}^{2\Delta t}\ _{\infty}$	L'ordre de convergence
0.2	0.0385	1
0.1	0.0184	1
0.05	0.0090	1
0.025	0.0044	1
0.0125	0.0022	1
0.00625	0.0011	1
0.003125	0.00055	

Tableau 3.2– L'ordre de convergence pour différents Δt avec $h = 0.1$.

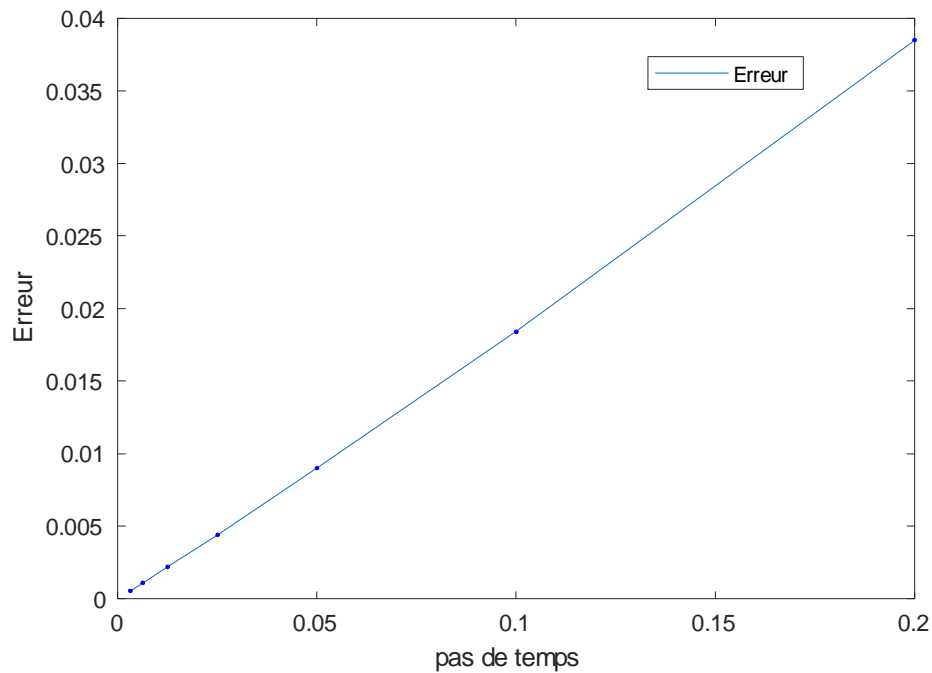


FIGURE 3.10– Courbe d'erreur en norme $H_0^1(\Omega)$ en temps.

Remarque 3.2. On remarque que la valeur de l'erreur décroît si la valeur de Δt est très petit ,ce-ci assure la stabilité et la convergence de la méthode.

3.3 Applications pour les problèmes quasi-linéaire de Sobolev

Sur le carré unité $\Omega = (0, 1)^2$ de \mathbb{R}^2 , on considère le problème quasi-linéaire suivant

$$\begin{cases} \Delta(\rho_1(x, u) \Delta u_t) + \Delta(\rho_2(x, u) \Delta u) = f(t, u), & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0, & \text{dans } H_0^2(\Omega), \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale extérieure de u sur $\partial\Omega$, ρ_1 et ρ_2 sont deux fonctions dans $C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

- il existe deux constantes positive β, M telles que

$$\beta \leq \rho_1(x, u) \leq M, \quad \text{et} \quad |\rho_2(x, u)| \leq M, \quad \forall (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \quad (3.3.2)$$

- la fonction $\rho_i, i = 1, 2$, est globalement lipschitzienne, i.e., il existe une constante $L_i > 0$ telle que

$$|\rho_i(x, u) - \rho_i(x, \tilde{u})| \leq L_i |u - \tilde{u}|, \quad \forall (x, u, \tilde{u}) \in (\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2). \quad (3.3.3)$$

avec des dérivées partielles secondes uniformément bornées en x et en u .

Pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$, et $i = 1$ ou 2 , on définit la forme bilinéaire $a_i(u; \cdot, \cdot)$ par

$$a_i(u; v, w) = \int_{\Omega} (\rho_i(x, u) \Delta v \Delta w) dx, \quad \forall v, w \in H_0^2(\Omega), \quad (3.3.4)$$

qui satisfait immédiatement les hypothèses (h1). Pour vérifier l'hypothèse (h2), on remarque tout d'abord par (3.3.2) que

$$a_1(u; v, v) \geq \beta \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Deuxièmement, comme l'opérateur de Laplace est un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \lesssim \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Ces deux estimations montrent que (h2) a lieu puisque $H_0^2(\Omega)$ est inclus dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Lemme 3.1. *Pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$, on a*

$$D(A_1) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \leftrightarrow D(A_2). \quad (3.3.5)$$

A l'aide de ce Lemme, on montre (voir:[6]) en posant $D_1 = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ et $D_0 = L^2(\Omega)$ que $D_1 \hookrightarrow H_0^2(\Omega)$, de plus $A_1(u) : D_1 \rightarrow D_0$ est un isomorphisme et $A_2(u) : D_1 \rightarrow D_0$ est borné avec

$$\|A_1(u)\| + \|A_2(u)\| \leq 1 \quad \text{pour tout } u \in H_0^2(\Omega).$$

Comme l'espace variationnel est inclus dans $H^2(\Omega)$, l'utilisation d'élément finis de continuité seulement C^0 n'est pas adéquate, car la dérivée seconde de telles fonctions n'est en général pas $L^2(\Omega)$, ce qui n'est pas utilisable dans un cadre standard. Nous allons alors utiliser la méthode des éléments finis C^1 "HCT" (Hsieh, Chough et Tocher) d'écrite dans [20] par exemple, c'est une méthode d'approximation conforme et les éléments HCT sont des macro-éléments (voir FIGURE 3.11).

$$\mathbb{P}_{HCT_h} = \{v \in C^1(\Omega) : \forall K \in T_h^\Delta \quad v|_K \in \mathbb{P}_3\}$$

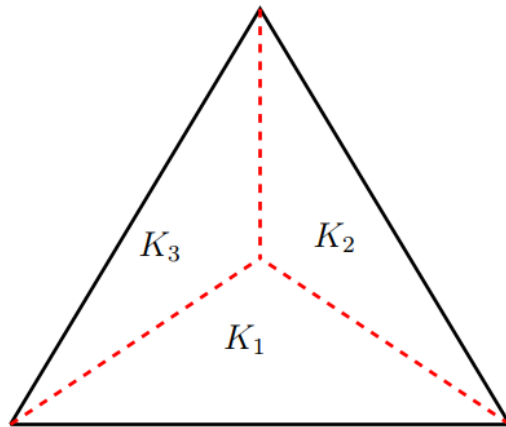


FIGURE 3.11– L'élément HCT.

Afin de trouver une solution faible de (3.3.1), on donne une formulation variationnelle de ce problème. Le problème (3.3.1) est équivalent au problème variationnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \{\rho_1(x, u) \Delta u_t \Delta v + \rho_2(x, u) \Delta u \Delta v\} dx = \int_{\Omega} f(t, u) v dx, \forall v \in V. \end{array} \right.$$

En effet, chaque triangle K est subdivisé en trois sous-triangles en ajoutant un point interne au triangle (par exemple le barycentre), et l'espace d'approximation V_h est un sous-espace de polynômes de degré 3 sur chaque sous-triangle K_i , convenablement assemblés pour que la fonction discrète sur le triangle $K = \cup_{i=1}^3 K_i$ appartienne à $C^1(K)$, i.e. ,

$$\mathbb{P}_K = \{v \in C^1(K) : v|_{K_i} \in \mathbb{P}_3(K_i), 1 \leq i \leq 3\},$$

et alors

$$V_h = \left\{ v \in C^1(\Omega) : v|_K \in \mathbb{P}_K, \forall K \in T_h, v = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \subset H_0^2(\Omega).$$

Le schéma explicite totalement discret d'Euler du problème (3.29) est alors donné par:

trouver $U_{n+1,h} \in V_h$ solution de

$$\int_{\Omega} \left\{ \rho_1(x, U_{n,h}) \Delta \left(\frac{U_{n+1,h} - U_{n,h}}{\Delta t} \right) \Delta v_h + \rho_2(x, U_{n,h}) \Delta U_{n,h} \Delta v_h \right\} dx = \int_{\Omega} f(t_n, U_{n,h}) v_h dx,$$

pour tout $v_h \in V_h$.

Nous illustrons finalement ce cas en choisissant $\rho_1(x, u) = \frac{1}{2} + \frac{u^2}{1+u^2}$, $\rho_2(x, u) = \frac{u^2}{1+u^2}$, le terme source $f(t, u)$ défini par (3.2.6) et une donnée initiale nulle $u(0) = 0$. La FIGURE 3.11 représente la solution totalement discrète $U_{n,h}$.

3.3.1 L'ordre de convergence en espace

On fait appel a:

qf11to25: ajouter plus de formules de quadrature en 1d, 2d et des outils pour construire sa propre quadrature.

Programme

```

int n = 10;
load "Element _HCT"
load "qf11to25"
real dt = 0.001, T = 0.1, t = 0;
func g = 0;
func f = sqrt(1 + t + uhn * uhn);
mesh Th = square(n, n);
mesh Th2 = square(2 * n, 2 * n);
fespace Vh(Th, HCT);
fespace Vh2(Th2, HCT);
macro bilaplacien (u, v)(dxx(u) * dxx(v) + dyy(u) * dyy(v) + 2 * dxy(u) * dxy(v))

```

```

Vh[uh1, uh1x, uh1y], [vh, vhx, vhy], [uh1n, uh1nx, uh1ny];
Vh2[uh2, uh2x, uh2y], [vh2, vh2x, vh2y], [uh2n, uh2nx, uh2ny];
QF2 qfHCT5 = tripleQF(qf5pT) ;
problem Eulerexplicite1([uh1, uh1x, uh1y], [vh, vhx, vhy], solver = LU) =
int2d(Th, qft = qfHCT5)((0.5 + (uh1n^2/(1 + uh1n^2))) * bilaplacien(uh1, vh))
-int2d(Th)(dt * f * vh)
-int2d(Th, qft = qfHCT5)((0.5 + (uh1n^2/(1 + uh1n^2))) * bilaplacien(uh1n, vh))
+int2d(Th, qft = qfHCT5)(dt * (uh1n^2/(1 + uh1n^2))*bilaplacien(uh1n, vh))
+on(1, 2, 3, 4, uh1 = 0, uh1x = 0, uh1y = 0);
problem Eulerexplicite2([uh2, uh2x, uh2y], [vh2, vh2x, vh2y], solver = LU) =
int2d(Th2, qft = qfHCT5)((0.5 + (uh2n^2/(1 + uh2n^2))) * bilaplacien(uh2, vh2))
-int2d(Th2)(dt * f * vh2)
-int2d(Th2, qft = qfHCT5)((0.5 + (uh2n^2/(1 + uh2n^2))) * bilaplacien(uh2n, vh2))
+int2d(Th2, qft = qfHCT5)(dt * (uh2n^2/(1 + uh2n^2))*bilaplacien(uh2n, vh2))
+on(1, 2, 3, 4, uh2 = 0, uh2x = 0, uh2y = 0);
[uh1n, uh1nx, uh1ny] = [0, 0, 0], [uh2n, uh2nx, uh2ny] = [0, 0, 0];
real test;
for(t; t < T; t = t + dt){
Eulerexplicite1; Eulerexplicite2;
[uh2n, uh2nx, uh2ny] = [uh2, uh2x, uh2y]; [uh1n, uh1nx, uh1ny] = [uh1, uh1x, uh1y];
test = max(test, sqrt(int2d(Th)(square(dxx(uh1) - dxx(uh2))
+square(dyy(uh1) - dyy(uh2)) + 2 * square(dxy(uh1) - dxy(uh2)))));
plot (uh1, cmm = "u", fill = 1, value = true);
cout << "erreur = " << test << endl ;
}

```

Résultats numériques

La FIGURE 3.12 (resp. La FIGURE 3.13) montre la solution totalement discrète $U_{n,h}$ (resp. $U_{n,2h}$) obtenue par le schéma d'Euler (3.2.4) et les éléments \mathbb{P}_1 au temps final $T = 1$ avec $\Delta t = 0.1$ et $h = 0.025$, (resp. $\Delta t = 0.1$ et $h = 0.05$).

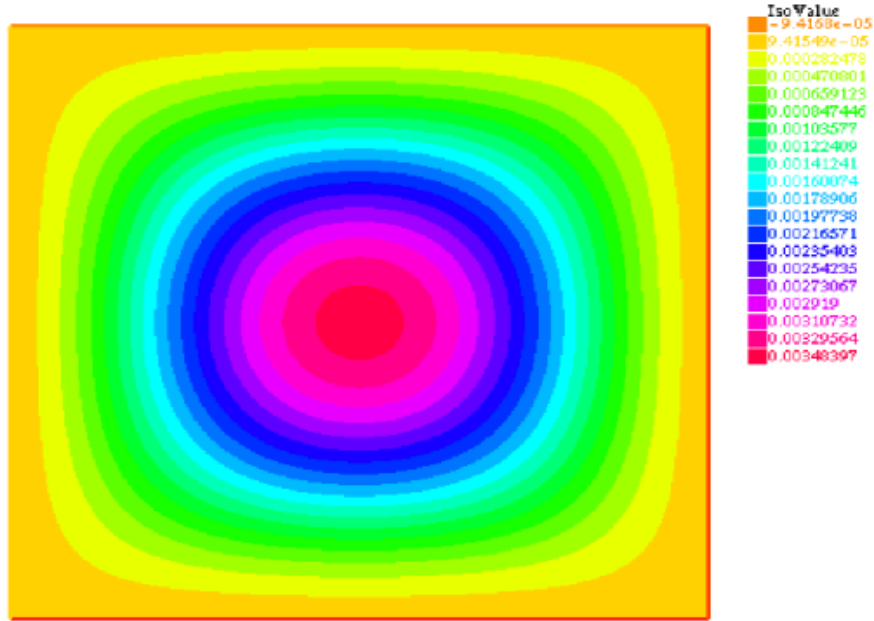


FIGURE 3.12– La solution numérique $U_{n,h}$ obtenue par le schéma d’Euler (3.2.4) avec $\Delta t = 0.1$ et $h = 0.025$.

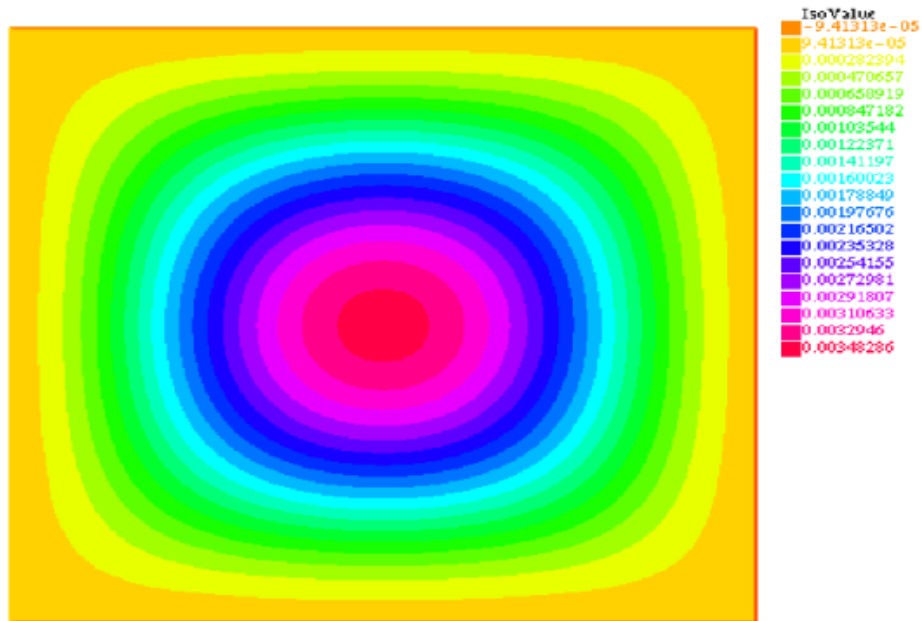
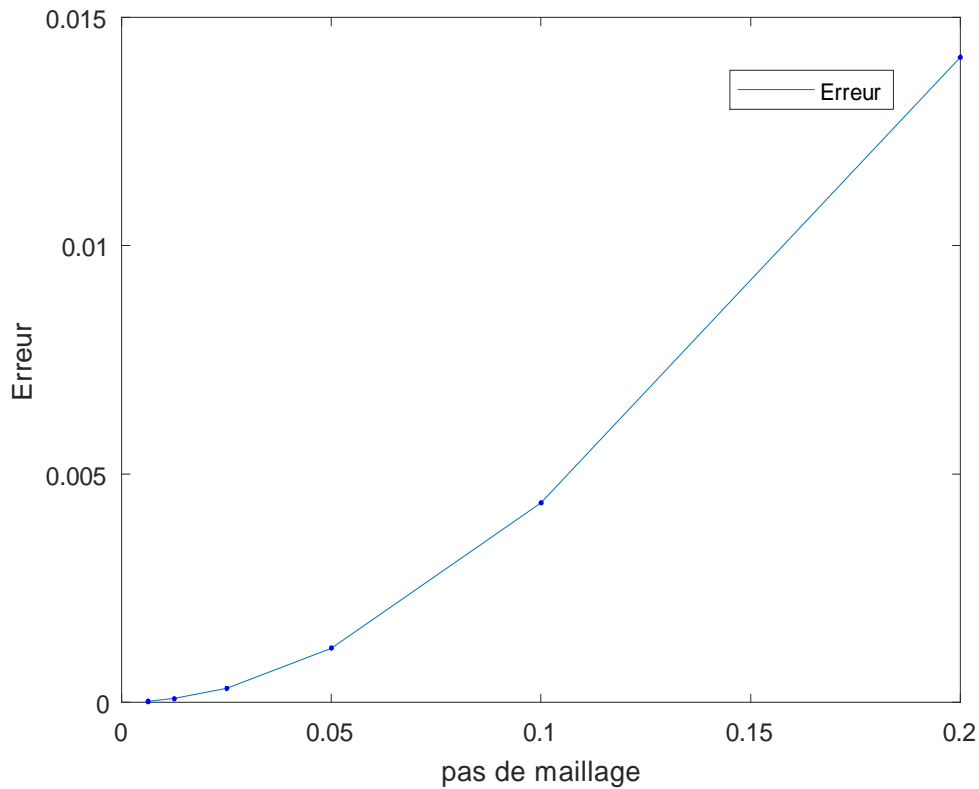


FIGURE 3.13– La solution numérique $U_{n,2h}$ obtenue par le schéma d’Euler (3.2.4) avec $\Delta t = 0.1$ et $2h = 0.05$.

Le Tableau 3.3 montre l’ordre de convergence pour différents h où on a choisi Δt suffisamment petit de sorte que l’erreur due à la discrétisation en temps soit négligeable

h	$\ U_{n,h} - U_{n,2h}\ _\infty$	L'ordre de convergence
0.2	0.01412	1.69
0.1	0.00437	1.87
0.05	0.00119	1.94
0.025	0.00031	1.97
0.0125	7.91e-05	1.99
0.00625	1.98e-05	

Tableau 3.3— L'ordre de convergence pour différents h avec $\Delta t = 0.1$.FIGURE 3.14— Courbe d'erreur en norme $H_0^1(\Omega)$ en espace.

Remarque 3.3. *On remarque que la valeur de l'erreur décroît si la valeur de pas maillage est très petit, ce qui assure la stabilité et la convergence de la méthode. De plus l'ordre de convergence est inférieure égale à 2.*

3.3.2 L'ordre de convergence en temps

Pour obtenir l'ordre de la convergence en temps, on exécute le programme suivant

Programme

```

int n = 10;
load "Element _HCT"
load "qf11to25"
real dt = 0.001, T = 0.1, t = 0;
func g = 0;
func f = sqrt(1 + t + uhn * uhn);
mesh Th = square(n, n);
fespace Vh(Th, P1);
macro bilaplacien (u, v)(dxx(u) * dxx(v) + dyy(u) * dyy(v) + 2 * dxy(u) * dxy(v))
Vh[uh1, uh1x, uh1y], [vh, vhx, vhy], [uh1n, uh1nx, uh1ny];
QF2 qfHCT5 = tripleQF(qf5pT) ;
problem Eulerexplicite([uh1, uh1x, uh1y], [vh, vhx, vhy], solver = LU) =
int2d(Th, qft = qfHCT5)((0.5 + (uh1n^2/(1 + uh1n^2))) * bilaplacien(uh1, vh))
-int2d(Th)(dt * f * vh)
-int2d(Th, qft = qfHCT5)((0.5 + (uh1n^2/(1 + uh1n^2))) * bilaplacien(uh1n, vh))
+int2d(Th, qft = qfHCT5)(dt * (uh1n^2/(1 + uh1n^2))*bilaplacien(uh1n, vh))
+on(1, 2, 3, 4, uh1 = 0, uh1x = 0, uh1y = 0);

```

Résultats numériques

La FIGURE 3.15 (resp. la FIGURE 3.16) montre la solution totalement discrète $U_{n,h}^{\Delta t}$ (resp. $U_{n,h}^{2\Delta t}$) obtenue par le schéma d'Euler (3.2.4) et les éléments \mathbb{P}_1 au temps final $T = 1$ avec $\Delta t = 0.025$ et $h = 0.05$, (resp. $\Delta t = 0.05$ et $h = 0.05$).

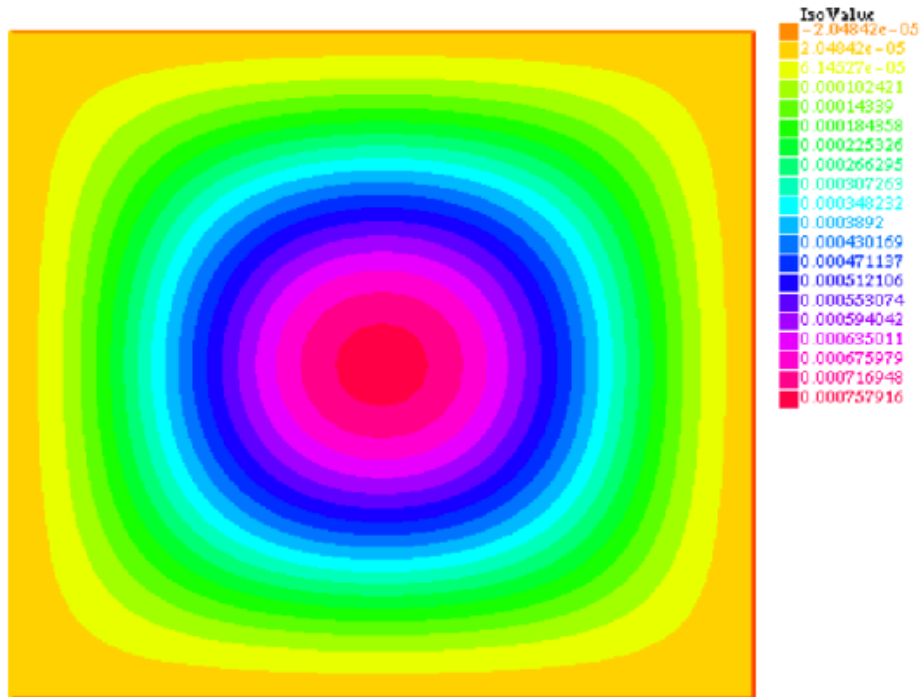


FIGURE 3.15– La solution numérique $U_{n,h}^{\Delta t}$ obtenue par le schéma d'Euler (3.2.4) avec $\Delta t = 0.025$ et $h = 0.05$.

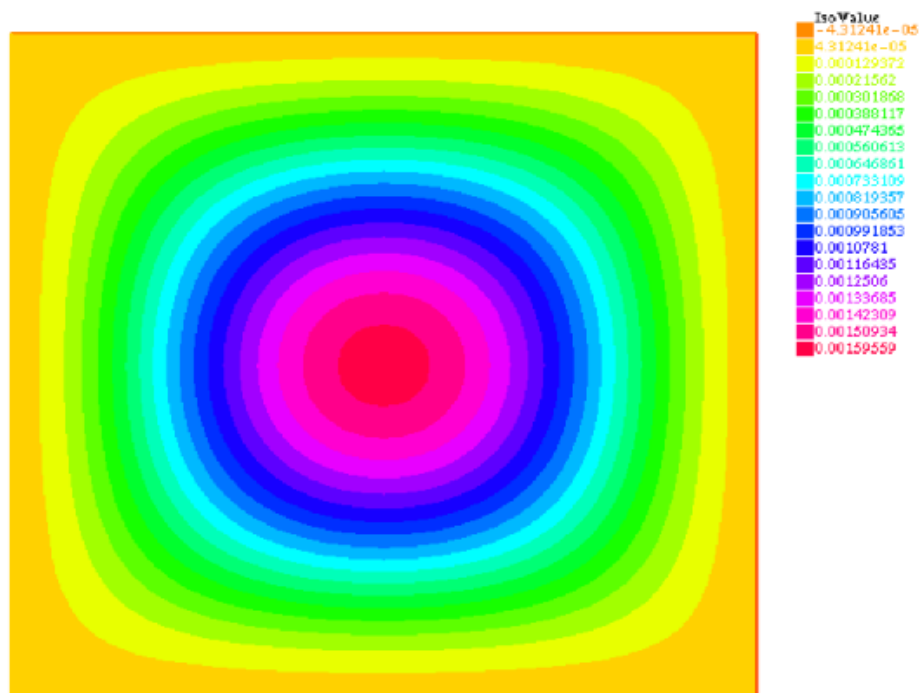


FIGURE 3.16– La solution numérique $U_{n,h}^{2\Delta t}$ obtenue par le schéma d'Euler (3.2.4) avec $2\Delta t = 0.05$ et $h = 0.05$.

Le Tableau 3.4 montre l'ordre de convergence pour différents Δt où on a choisi h suffisamment petit de sorte que l'erreur due à la discrétisation en espace soit négligeable

Δt	$\ U_{n,h}^{\Delta t} - U_{n,2h}^{2\Delta t}\ _{\infty}$	L'ordre de convergence
0.2	0.1206	1
0.1	0.0526	1
0.05	0.0241	1
0.025	0.0114	1
0.0125	0.0055	1
0.00625	0.0027	1
0.003125	0.0013	

Tableau 3.4— L'ordre de convergence pour différents Δt avec $h = 0.1$.

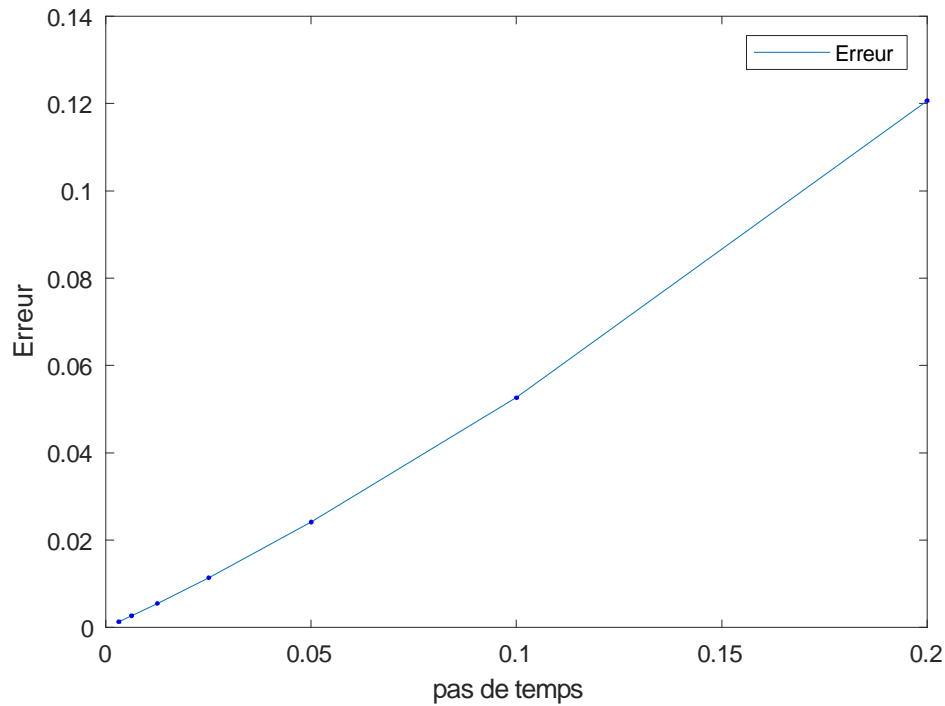


FIGURE 3.17— Courbe d'erreur en norme $H_0^1(\Omega)$ en temps.

Remarque 3.4. Ici encore il est remarquable que la méthode est stable et convergente avec un ordre de convergence est égale à 1.

Suite à toutes ces remarques, on peut confirmer la stabilité et la convergence des méthodes proposées, ce qui prouve que les résultats numériques sont performants.

Conclusion générale

Dans mémoire de fin d'études, on s'est intéressé à l'Approximation numérique des équations non linéaires du type Sobolev, par la méthode des éléments finis. Ensuite on donne des résultats de l'existence et l'unicité de la solution de la formule variationnelle par le théorème de Lax-Milgram. Après avoir donné une description de la méthode des éléments finis de degré un sur les problèmes de Sobolev non linéaires non homogène en dimension un, on a donné des simulations numériques dont laquelle on a approché la solution des problèmes proposés avec la méthode des éléments finis de degré un en dimension deux à l'aide du logiciel Freefem++.

On a montré à travers ces tests la convergence des algorithmes proposés dans le cas semi et quasi-linéaires. Ces méthodes peuvent être étendues au cas de non linéarité plus fortes.

Bibliographie

- [1] A. Bergam, C. Bernardi, and Z. Mghazli. A posteriori analysis of the finite element discretization of a nonlinear parabolic equations. *Math. Comp.*, 74(251) :1117-1138, 2005.
- [2] A. G. Sveshnikov, A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, and Yu. D. Pletner, *Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type* (Fizmatlit, Moscow, 2007) [in Russian].
- [3] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983
- [4] C. Bernardi and G. Raugel. Approximation numérique de certaines équations paraboliques non linéaire. *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, 18 : 237-285, 1984.
- [5] C. Bernardi and R. Verfürth. A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 38(3) :437-455, 2004.
- [6] C. Bernardi. Optimal finite-element interpolation on curved domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26(5) :1212-1240, 1989.
- [7] D. N. Arnold, J. Douglas, Jr., and V. Thomée. Superconvergence of a finite element approximation to the solution of a Sobolev equation in a single space variable. *Math. Comp.*, 36(153) :53-63, 1981.
- [8] Fatiha Bekkouche Étude théorique et numérique des equations non-linéaires de Sobolev 2018. Thèse de doctorat.
- [9] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. 2011.
- [10] <http://www.freefem.org..>
- [11] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems. I. A linear model problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(1) :43-77, 1991.

-
- [12] L. Schwartz. Mathematics for the physical sciences. Hermann, Paris ; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966.
- [13] M. Picasso. Adaptive finite elements for a linear parabolic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 167(3-4) :223-237, 1998.
- [14] PH. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 9(R2) : 77-84, 1975.
- [15] R. E. Ewing. The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 6 :283-294, 1975.
- [16] R. E. Showalter. Hilbert space methods for partial differential equations. Pitman, London, 1977. Monographs and Studies in Mathematics, Vol. 1.
- [17] R. E. Showalter. The Sobolev equation. I. *Applicable Anal.*, 5(1) :15-22, 1975.
- [18] R. E. Showalter. The Sobolev equation. II. *Applicable Anal.*, 5(2) :81-99, 1975.
- [19] R. Verfürth. Error estimates for some quasi-interpolation operators. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33 : 695 - 713, 1999.
- [20] S. L. Sobolev. On a new problem of mathematical physics. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 18 :3-50, 1954.
- [21] T. Kato. Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. In *Spectral theory and differential equations (Proc. Sympos., Dundee, 1974 ; dedicated to Konrad Jörgens)*, pages 25-70. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 448. Springer, Berlin, 1975.
- [22] T.Liu,Y.-p.Lin,M.Rao,and J.R.Cannon.Finite element methods for Sobolev equations.*J.Comput.Math.*2002.