

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'hamed Bougara de Boumerdes



Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

COURS ET EXERCICES DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES

Destiné aux étudiants en Master
Ouvrages Métalliques et Chaudronniers

Réalisé par: Mr. Brahim CHEBBAB
Maître de Conférences B, UMBB

Année universitaire 2021/2022

Résumé :

La dynamique des structures est une discipline technique destinée à calculer et concevoir des structures métalliques et génie civil.

Ce polycopié a pour but de présenter un exposé sur les fondements des systèmes asservis dans le domaine linéaire. Il est destiné aux ingénieurs, en master qui travaillent aux bureaux d'études ainsi qu'aux étudiants dans ces disciplines.

Pour comprendre cet exposé, seules des connaissances de base en résistance des matériaux, en élasticité ainsi qu'en résolutions des équations différentielles et calcul par élément finis sont nécessaires.

Ce polycopié se divise en deux grandes parties. Dans la première partie nous calculerons la pulsation pour les systèmes des vibrations continues des poutres en mouvement longitudinal, transversaux et en torsion, en appliquant les méthodes analytiques, de Rayleigh, de Rayleigh- Ritz ainsi que la méthode des éléments finis pour résoudre les équations différentielles à coefficient constant avec les conditions limites initiales et d'espace puis le calcul de la pulsation pour les systèmes continus à plusieurs degrés de liberté, la méthode analytique pour la résolution des systèmes d'équation différentielle. Dans la deuxième partie, nous étudierons la terminologie sur le séisme et la sismologie et le calcul et conception parasismique des structures par la Méthode statique équivalente, Méthode d'analyse modale spectrale ainsi que la Méthode d'analyse dynamique par accélérogramme.

Chaque chapitre a été renforcé par des exercices avec leurs corrigés, pour approfondir la compréhension du cours.

Nous souhaitons que cet ouvrage soit profitable et servira comme référence, à toute personne, intéressée par l'étude de la dynamique des structures.

SOMMAIRE

| | | |
|----------------|---|-----------|
| I | Vibration des poutres continues | 01 |
| I.1 | Vibrations longitudinales des poutres | 01 |
| I.1.1 | Solution analytique | 01 |
| I.1.2 | Méthodes approchées | 06 |
| I.1.2.1 | Méthode de RAYLEIGH | 06 |
| I.1.2.2 | Méthode de RITZ | 08 |
| I.1.2.3 | Méthode des éléments finis | 11 |
| II.1 | Vibrations transversales des poutres | 13 |
| II.1.1 | Solution analytique | 13 |
| II.2 | Développement de la poutre de TIMOSHENKO | 17 |
| II.3 | Développement de l'effet de l'inertie de rotation | 18 |
| II.4 | Méthodes approchées | 19 |
| II.4.1 | Méthode de Rayleigh | 19 |
| II.4.2 | Méthode de RITZ | 24 |
| II.4.3 | Méthode des éléments finis | 28 |
| III | Vibration des poutres en torsion. | 42 |
| IV | Les systèmes a plusieurs degrés de liberté | 46 |
| IV.1 | Introduction | 46 |
| IV.2 | Solution classique des équations d'équilibre dynamique | 46 |
| V | CALCUL ET CONCEPTION PARASISMIQUE | 56 |
| V.1 | SISMOLOGIE ET TECTONIQUE | 56 |
| V.1.1 | Introduction à la sismologie | 56 |
| V.1.2 | Sismologie | 56 |
| V.1.3 | Sismométrie | 56 |
| V.1.4 | Séismes et failles | 56 |
| V.1.5 | Les différents types de séismes | 56 |
| V.1.5.1 | Séismes tectoniques | 56 |
| V.1.5.2 | Séismes volcaniques | 57 |

| | | |
|----------------|---|-----------|
| V.1.5.3 | Séismes d'effondrement | 57 |
| V.1.5.4 | Séismes artificiels | 57 |
| V.1.5.5 | Séismes induits | 57 |
| V.1.5.6 | Définitions des paramètres du séisme | 57 |
| V.1.6 | Méthodes d'étude des séismes | 58 |
| V.1.6.1 | Approche historique | 58 |
| V.1.6.2 | Approche instrumentale : sismométrie | 58 |
| V.1.7 | Comment se produisent les séismes ? | 60 |
| V.1.8 | Règles de calcul | 61 |
| V.1.8.1 | La méthode statique équivalente | 61 |
| V.1.8.2 | Méthode dynamique modale spectrale | 72 |

LA LISTE DES FIGURES

| | | |
|---------------------|---|-----------|
| Figure I.1 | Vibration longitudinale d'un bar | 01 |
| Figure II.1 | Vibration transversale d'un bar | 13 |
| Figure II.2 | Vibration flexionnelle d'une poutre | 28 |
| Figure III.1 | Vibration d'une poutre en torsion | 42 |
| Figure V.1 | Plan de faille | 57 |
| Figure V.2 : | Angle de foyer | 58 |
| Figure V.3 : | structure interne du globe | 59 |
| Figure V.4 : | Pourquoi se produisent les séismes ? | 60 |
| Figure V.5 : | La tectonique des plaques permet de décrire les différentes zones sismiques | 60 |
| Figure V.6 : | Facteur d'amplification dynamique moyen D ($\zeta=5\%$) | 63 |
| Figure V.7 : | Disposition des masses concentrées | 71 |

Vibrations des systèmes continus

C'est une extension des systèmes à N degré de liberté avec N tend vers l'infini. Dans le cas des structures de géométrie simple telle qu'une poutre homogène avec des conditions aux limites simples, on peut utiliser des solutions analytiques pour le calcul des fréquences et modes propres ou des réponses vibratoires à une excitation. Dans le cas contraire, on ne peut se passer des méthodes numériques (Rayleigh, Rayleigh- Ritz, modale, Eléments Finis...). Nous résumons dans ce qui suit les équations du mouvement vibratoire de poutres sollicitées en traction compression, torsion et en flexion, afin d'accéder aux fréquences et modes propres. L'amortissement et les sollicitations extérieurs ne sont pas pris en compte.

I - Vibration des poutres continues :

I.1-Vibrations longitudinales des poutres :

I.1.1- Solution analytique :

Considérons les systèmes continus suivant, et V élément dx de la barre Tel que :

S est l'aire de la section droite, L est la longueur de la poutre, E est le module de Young et ρ est la masse volumique du matériau.

Où $u(x,t)$: Le déplacement longitudinal de l'élément barre dx ,

$F(x)$: La force longitudinale agissant sur la section droite S de l'élément barre dx ,

$dF(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} dx$: L'accroissement de la force longitudinale

$du(x,t) = \frac{\partial U(x)}{\partial x} dx$: L'accroissement du déplacement

$\rho S(x)dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$: La force d'inertie de l'élément barre dx

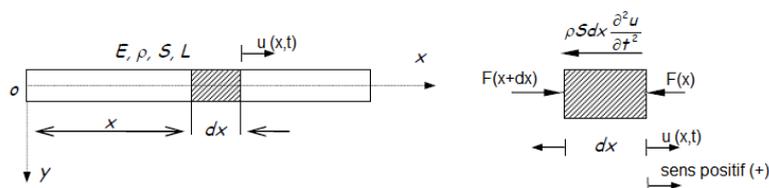


Figure I-1: Vibration longitudinale d'un bar

On applique la loi fondamentale de la dynamique sur l'élément de la poutre dx , on trouve :

$$\sum F_{ext} = m\bar{y}$$

$$F(x+dx) - F(x) = dm \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

D'après le développement de Taylor :

$$F(x+dx) = F(x) + \frac{\partial F(x)}{\partial x} dx$$

$$(1.1) \Rightarrow F(x) + \frac{\partial F(x)}{\partial x} dx - F(x) = dm \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} dx = dm \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

Alors une section S de la poutre, $dm = \rho S(x)dx$, puisque $F(x)$ est une force axiale :

$$F(x) = \sigma S(x)$$

et

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{la loi de Hook})$$

$$\sigma = E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ES(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = \rho S(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

Dans le cas d'une section constante $S(x) = S$

$$ES(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \rho S(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

$$ES(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{\rho S} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

Avec $C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ vitesse de propagation d'ondes.

C'est une équation différentielle aux dérivées partielles

$$u(x,t) = U(x)T(t)$$

Résolution de l'équation (1.5)

On utilise la méthode de séparation de variables

$$u(x,t) = U(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = T(t) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} = T(t)U''(x) \quad (1.5a)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = U(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = U(x)T''(t) \quad (1.5b)$$

Substitution de ces deux équations (1.5a) et (1.5b) dans l'équation (1.5).

$$T(t)U''(x) = \frac{1}{C^2}U(x)T''(t)$$

$$\frac{U''(x)}{U(x)} = \frac{1}{C^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \pm \lambda^2 = C^{ste}$$

Les vibrations sont harmoniques dans le temps.

$$U''(x) + \frac{\lambda^2}{C^2}U(x) = 0 \quad (1.7a)$$

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \quad (1.7b)$$

La solution de l'équation (1.7a) s'écrit sous la forme de :

$$U(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x \quad (1.8a)$$

$$\text{Avec } \beta^2 = \frac{\lambda^2}{C^2}$$

A et B se sont des constantes et sont calculées à partir des conditions limites.

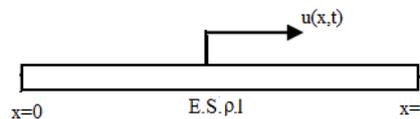
La solution de l'équation (1.7b) s'écrit sous la forme de :

$$T(t) = C \cos \lambda t + D \sin \lambda t \quad (1.8b)$$

C et D se sont des constantes et sont calculées à partir des conditions initiales.

A.1/ Quelques exemples de conditions aux limites :

- **Poutre libre – libre :**



$$x = 0 \rightarrow F(x,t) = 0 \quad (a)$$

$$x = l \rightarrow F(x,t) = 0 \quad (b)$$

$$F(x,t) = ES \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$(a) \Rightarrow \frac{\partial U(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} \cdot T(t) = 0 \rightarrow \frac{\partial U(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow -a_1 \cdot \beta \sin \beta x + a_2 \cdot \beta \cos \beta x \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

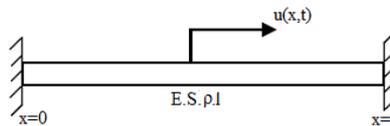
$$U(x) = a_1 \cos \beta x$$

$$(b) \Rightarrow \frac{\partial U(x)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow -a_1 \cdot \beta \sin \beta l = 0 \Rightarrow \sin \beta l = 0$$

$$\beta l = k\pi \Rightarrow \beta^2 = \left(\frac{K\pi}{l} \right)^2 = \lambda^2 \frac{\rho S}{ES}$$

$$\lambda_k = \frac{K\pi}{l} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}$$

- **Poutre encastrée – encastrée :**



$$x = 0 \rightarrow u(x, t) = 0 \quad (a)$$

$$x = l \rightarrow u(x, t) = 0 \quad (b)$$

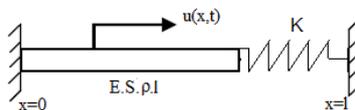
$$(a) \Rightarrow U(x) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow U(x) \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$U(x) = a_2 \sin \beta x$$

$$(b) \Rightarrow U(x) \Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow a_2 \sin \beta l = 0 \Rightarrow \sin \beta l = 0$$

$$\lambda_k = \frac{K\pi}{l} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}$$

- **Poutre encastrée dont l'autre extrémité est reliée à un ressort :**



$$x = 0 \rightarrow u(x, t) = 0 \quad (a)$$

$$x = l \rightarrow F(x, t) = -K \cdot u(x, t) \quad (b)$$

$$F = ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -K \cdot u(x, t) \Big|_{x=l}$$

$$T(t).ES \frac{\partial U(l)}{\partial x} = T(t).K.U(l) \Rightarrow ES.U'(l) = K.U(l)$$

$$(a) \Rightarrow U(x)|_{x=0} = 0 \Rightarrow U(x) = a_2 \sin \beta x$$

$$\Rightarrow ES.\beta \cos \beta l = -Kl \sin \beta l$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \beta l = -\frac{ES}{Kl} \beta l$$

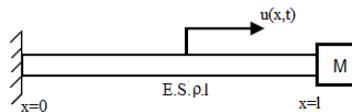
Deux cas se présentent :

$$\text{Si } K \rightarrow 0 \quad \lambda_i = (2i-1) \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}$$

$$\text{Si } K \rightarrow \infty \quad \lambda_i = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}$$



- **Poutre encastree dont l'autre extremité est reliee à une masse :**



$$x=0 \rightarrow u(x,t) = 0 \quad (a)$$

$$x=l \rightarrow F(x,t) = -M \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=l} \quad (b)$$

$$F(x,t) = ES \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -M \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Prenons l'ième mode : $u_i = X_i(A_i \cos \lambda_i t + B_i \sin \lambda_i t)$

$$(a) \Rightarrow X_i|_{x=0} = 0 \quad ; \quad (b) \Rightarrow ES.X_i'|_{x=l} = M \lambda_i^2 X_i|_{x=l}$$

$$X_i = C_i \cos \frac{\lambda_i x}{a} + D_i \sin \frac{\lambda_i x}{a} \quad , \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$(a) \Rightarrow C_i = 0$$

$$(b) \Rightarrow ES \frac{\lambda_i}{a} \cos \frac{\lambda_i l}{a} = M \lambda_i^2 \sin \frac{\lambda_i l}{a}$$

Si la masse de la barre est négligeable devant M :

$$\frac{\rho S}{M} = \left(\frac{\lambda_i l}{a}\right)^2 ; \quad \frac{\lambda_i l}{a} \approx \sqrt{\frac{\rho S l}{M}}$$

$$\Rightarrow \lambda_i \approx \frac{a}{l} \sqrt{\frac{\rho S l}{M}}$$

Dans l'autre cas : $\operatorname{tg} \frac{\lambda_i l}{a} = \infty$

$$\lambda_i = \frac{i\pi a}{2l} = \frac{i\pi}{2l} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}$$

I.1.2- Méthodes approchées :

I.1.2.1- Méthode de RAYLEIGH

La méthode de RAYLEIGH permet de calculer la première fréquence qu'on appelle fréquence fondamentale $Q(U)$.

$Q(U)$ est le rapport de RAYLEIGH.

$$E_T = E_p + E_c \quad \text{Energie totale stationnaire}$$

$$\Rightarrow E_p + E_c = \text{Cste}$$

$$E_p = U = \frac{1}{2} \int_0^l ES \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx, \quad E_c = \frac{1}{2} \int_0^l \rho S \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ES \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = \rho S \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad \Rightarrow u(x,t) = U(x) [A \sin(\omega t + \phi)]$$

$$\Rightarrow \int_0^l \frac{d}{dx} \left[ES \frac{dU(x)}{dx} \right] U(x) dx = -\omega^2 \int_0^l \rho S [U(x)]^2 dx$$

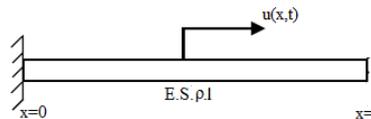
Après intégration par partie :

$$\omega^2 = \frac{N[U(x)]}{D[U(x)]} = \frac{\int_0^l \frac{d}{dx} \left[ES \frac{dU(x)}{dx} \right] U(x) dx - \left[ES \cdot U(x) \frac{dU(x)}{dx} \right]_0^l}{\int_0^l \rho S [U(x)]^2 dx} = Q(U)$$

$U(x)$ est la fonction admissible devant satisfaire aux limites.

Quelques exemples de conditions aux limites :

- **Poutre encastré- libre**



$$x = 0 \rightarrow u(x, t) = 0 \quad (a)$$

$$x = l \rightarrow \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (b)$$

$U(x) = x$ Fonction admissible qui vérifie les conditions aux limites.

$$\left[ES.U(x).U'(x) \right]_0^l = 0$$

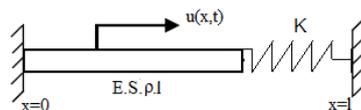
$$\int_0^l ES [U'(x)]^2 dx = \int_0^l ES(l) dx = ES l$$

$$\int_0^l \rho S [U(x)]^2 dx = \int_0^l \rho S x^2 dx = \frac{1}{3} \rho S l^3$$

$$\Rightarrow \omega^2 = Q(U) = \frac{ES l}{\frac{1}{3} \rho S l^3} = \frac{3E}{\rho l^2}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\sqrt{3}}{l} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}}$$

- **Poutre encastrée dont l'autre extrémité est reliée à un ressort**



$$x = 0 \rightarrow u(x, t) = 0 \quad (a)$$

$$x = l \rightarrow F(x, t) = -K.u(x, t) \quad (b)$$

$U(x) = \frac{x}{l}$ Fonction admissible qui satisfait les conditions aux limites.

$$\begin{aligned} [ES.U(x).U'(x)]_0^l &= -K[U(l)]^2 \\ \int_0^l ES[U'(x)]^2 dx &= \int_0^l ES(-KU(l))dx = \frac{ES}{l} \\ \int_0^l \rho S[U(x)]^2 dx &= \int_0^l \rho S \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{1}{3} \rho S l \\ \Rightarrow \omega^2 = Q(U) &= \frac{(ES/l) + K}{\rho S l / 3} = \left(\frac{3}{l^2}\right) \frac{ES}{\rho S} \left(1 + \frac{Kl}{ES}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{3} \left(\frac{ES + Kl}{l^2 \rho S} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

I.1.2.2 - Méthode de RITZ

La méthode de RITZ, basée sur le principe de d'optimisation, permet de calculer plusieurs fréquences.

$$\omega^2 = \frac{N[U(x)]}{D[U(x)]}$$

$U(x) = a_i \phi_i(x); \quad i = 1, 2, \dots, n$ Nombre de fréquence qu'on veut calculer.

$\phi_i(x)$: fonction admissible.

$$\omega^2 = \frac{N[a_i \phi_i(x)]}{D[a_i \phi_i(x)]}$$

On va optimiser ω^2 par rapport aux conditions a_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^2}{\partial a_i} &= \frac{\partial}{\partial a_i} \left[\frac{N[a_i \phi_i(x)]}{D[a_i \phi_i(x)]} \right] = 0 \\ \frac{D[a_i \phi_i(x)] \frac{\partial}{\partial a_i} [N[a_i \phi_i(x)]] - N[a_i \phi_i(x)] \frac{\partial}{\partial a_i} [D[a_i \phi_i(x)]]}{[D[a_i \phi_i(x)]]^2} &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial a_i} [N[a_i \phi_i(x)]] - \omega^2 \frac{\partial}{\partial a_i} [D[a_i \phi_i(x)]]} &= 0 \end{aligned}$$

$$N[a_i, \phi_i(x)] = \int_0^l ES \left[\frac{dU(x)}{dx} \right]^2 dx - \left[ES \frac{dU(x)}{dx} U(x) \right]_0^l$$

$$D[a_i, \phi_i(x)] = \int_0^l \rho S [U(x)]^2 dx$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial a_1} [N[a_i, \phi_i(x)]] \rightarrow 1^{\text{ère}} \text{ équation algébrique} \\ \frac{\partial}{\partial a_2} [N[a_i, \phi_i(x)]] \rightarrow 2^{\text{ème}} \text{ équation algébrique} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial a_n} [N[a_i, \phi_i(x)]] \rightarrow n^{\text{ième}} \text{ équation algébrique} \end{array} \right\} \text{donnent la matrice } [\overline{K}]$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial a_1} [D[a_i, \phi_i(x)]] \rightarrow 1^{\text{ère}} \text{ équation algébrique} \\ \frac{\partial}{\partial a_2} [D[a_i, \phi_i(x)]] \rightarrow 2^{\text{ème}} \text{ équation algébrique} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial a_n} [D[a_i, \phi_i(x)]] \rightarrow n^{\text{ième}} \text{ équation algébrique} \end{array} \right\} \text{donnent la matrice } [\overline{M}]$$

En regroupant les termes :

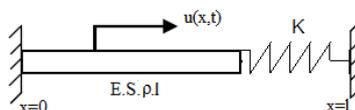
$$[\overline{K}] \{a_i\} - \omega^2 [\overline{M}] \{a_i\} = \{0\}$$

Equations aux valeurs propres :

$$\det([\overline{K}] - \omega^2 [\overline{M}]) = 0$$

- **Exemple d'une poutre encastree et fixée à un ressort**

On veut estimer les deux premières fréquences $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$



On a besoin de deux fonctions admissibles :

$$\phi_1(x) = \frac{x}{l} \quad , \quad \phi_2(x) = \frac{x^2}{l^2}$$

$$U(x) = a_1 \left(\frac{x}{l} \right) + a_2 \left(\frac{x^2}{l^2} \right) \rightarrow U'(x) = \frac{a_1}{l} + 2 \frac{a_2}{l^2} x$$

$$[U(l)]^2 = (a_1 + a_2)^2$$

$$\begin{aligned} N[a_1 \phi_1(x)] &= \int_0^l ES [U']^2 dx + k [U(l)]^2 \\ &= \int_0^l ES \left[\frac{a_1}{l} + 2 \frac{a_2}{l^2} x \right]^2 dx + k [a_1 + a_2]^2 \\ &= \left(\frac{ES}{l} + k \right) a_1^2 + \left(\frac{4ES}{3l} + k \right) a_2^2 + \left(\frac{2ES}{l} + 2k \right) a_1 a_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial a_1} = 2 \left(\frac{ES}{l} + k \right) a_1 + 2 \left(\frac{ES}{l} + k \right) a_2$$

$$\frac{\partial N}{\partial a_2} = 2 \left(\frac{4ES}{3l} + k \right) a_2 + 2 \left(\frac{ES}{l} + k \right) a_1$$

$$[K] = 2 \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} + k & \frac{ES}{l} + k \\ \frac{ES}{l} + k & \frac{4ES}{3l} + k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D &= \rho S \int_0^l \left(\frac{a_1}{l} x + \frac{a_2}{l^2} x^2 \right)^2 dx \\ &= \frac{\rho S l}{3} a_1^2 + \frac{\rho S l}{5} a_2^2 + \frac{\rho S l}{2} a_1 a_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_1} = \frac{2}{3} \rho S l a_1 + \frac{1}{2} \rho S l a_2$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_2} = \frac{1}{2} \rho S l a_1 + \frac{2}{5} \rho S l a_2$$

Donc

$$[M] = \rho S l \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\det \left(2 \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} + k & \frac{ES}{l} + k \\ \frac{ES}{l} + k & \frac{4ES}{3l} + k \end{bmatrix} - \omega^2 \rho S l \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \right) = 0$$

Tous calculs faits :

$$\omega_1 = - \frac{2 \left[3 \left(\frac{[124(ES)^2 + 33ES.kl + 9(kl)^2 - 13ES - 3kl]^{\frac{1}{2}}}{\rho S} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{3l}$$

$$\omega_2 = - \frac{2 \left[3 \left(\frac{[124(ES)^2 + 33ES.kl + 9(kl)^2 - 13ES - 3kl]^{\frac{1}{2}}}{\rho S} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{3l}$$

ω_1 et ω_2 sont les deux fréquences, calculées par la méthode de RITZ.

I.1.2.3 - Méthode des éléments finis

On veut étudier le cas d'une poutre encastree- libre en utilisant les deux méthodes, des masses concentrées et des masses cohérentes.

B.3.1/ Méthode des masses concentrées.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En appliquant les conditions limites.

$$K_{22}u_2 - \omega^2 M_{22}u_2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{K_{22}}{M_{22}} = \frac{\frac{ES}{l}}{\frac{\rho Sl}{2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2ES}{\rho Sl^2}}$$

B.3.2/ Méthode des masses cohérentes.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 = 0 \\ P_3 = 0 \end{Bmatrix} = \left[\frac{2ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho Sl}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Tous calculs faits

$$\det \left| \frac{2ES}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho Sl}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\text{On pose : } \lambda = \frac{\omega^2 \left(\frac{\rho Sl}{4} \right)}{\frac{2ES}{l}} = \omega^2 \frac{\rho l^2}{8E}$$

$$\lambda_1 = 0.293 \quad , \quad \lambda_2 = 1.707$$

Les deux fréquences se donnent de la manière suivante :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad , \quad \omega_2 = \frac{3\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

II - Vibration des poutres continues

II-1 Vibrations transversales des poutres :

II.1.1- Solution analytique :

On s'intéresse, dans un premier temps à développer la poutre de Bernouilli- Euler.

En isolons l'élément dx de la poutre : $M(x)$ et $M(x+dx)$ sont les moments aux sections.

$V(x)$ et $V(x+dx)$ sont les efforts tranchants.

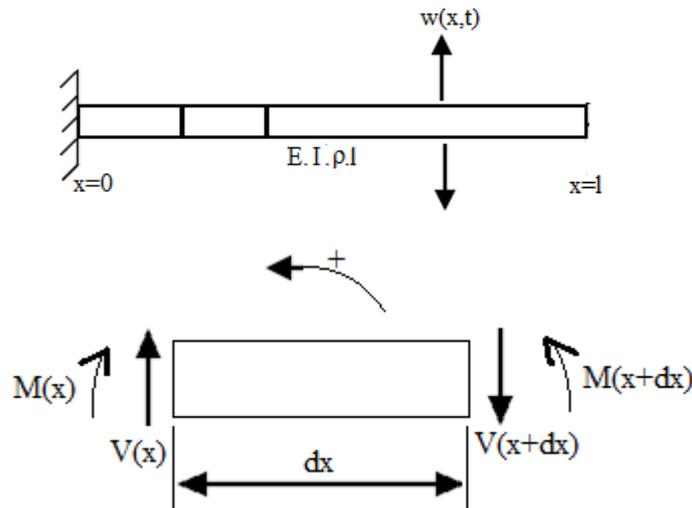


Figure II-1: Vibration transversale d'un bar

On écrit les équations de la dynamique : $(\sum \vec{F} = M \vec{\gamma})$

$$dM = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = V(x) - V(x+dx) \quad (2.1)$$

En prenant l'équilibre par rapport à un point de l'élément, la relation moment-effort tranchant peut être écrite sous la forme :

$$M(x+dx) - M(x) - V(x)dx = 0 \quad (2.2)$$

On a d'après la relation élémentaire de la RDM :

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

Les trois équations précédentes permettent d'écrire :

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (2.4)$$

EI : est la rigidité flexionnelle (supposée constante)

La résolution de l'équation (2.4) se fait par separation de variables, en posant :

$$w(x,t) = Y(x).T(t) \quad (2.5)$$

En suivant la même démarche des vibrations longitudinales, on obtient :

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{Y_{,xxxx}(x)}{Y(x)} = -\frac{T_{,tt}(t)}{T(t)} = \lambda^2 \quad (2.6)$$

Ce qui permet d'écrire deux équations différentielles totales :

$$Y_{,xxxx}(x) - \beta^4 Y(x) = 0 \quad (2.7)$$

$$T_{,tt}(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \quad (2.8)$$

(2.7) est une équation différentielle *espace* d'ordre 4, on aura besoin de quatre conditions aux limites. (2.8) est une équation différentielle *temps* d'ordre 2, on aura besoin de deux conditions initiales.

La solution de l'équation (2.7) s'écrit :

$$Y(x) = c_1 e^{\beta x} + c_2 e^{-\beta x} + c_3 e^{i\beta x} + c_4 e^{-i\beta x} \quad (2.9)$$

En utilisant les formules trigonométriques du type $e^{\pm\theta}$ et $e^{\pm i\theta}$:

$$Y(x) = c_1' \cos \beta x + c_2' \sin \beta x + c_3' \cosh \beta x + c_4' \sinh \beta x \quad (2.10)$$

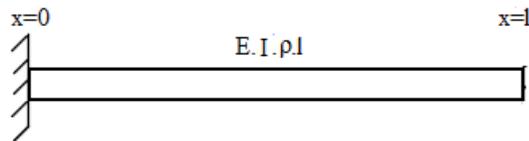
La solution de l'équation (2.8) s'écrit :

$$T(t) = c_5' \cos \lambda t + c_6' \sin \lambda t \quad (2.11)$$

Les constantes c_i ($i = 1, 6$) sont calculées à partir des conditions aux limites et les conditions initiales.

A- Types de conditions aux limites Vibrations :

- Cas d'une poutre encastree-libre :



$$i) \quad w(x,t) = 0$$

$$iii) \quad M(l,t) = 0$$

$$ii) \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$iv) \quad \frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$$

$$(i) \Rightarrow Y(x)_{x=0} \cdot T(t) = 0 \quad \Rightarrow Y(x) = 0$$

$$(ii) \Rightarrow \frac{\partial Y(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$Y(x) = K_1 \cosh \beta x + K_2 \sin h\beta x + K_3 \cos \beta x + K_4 \sin \beta x$$

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial x} = K_1 \beta \sinh \beta x + K_2 \beta \cos h\beta x - K_3 \beta \sin \beta x + K_4 \beta \cos \beta x$$

$$(i) \Rightarrow K_1 + K_3 = 0 \rightarrow K_1 = -K_3$$

$$(ii) \Rightarrow K_2 \beta + K_4 \beta = 0 \rightarrow K_2 = -K_4$$

$$(iii) \left\{ \begin{array}{l} K_1 \beta^2 \cosh \beta l + K_2 \beta^2 \sin h\beta l - K_3 \beta^2 \cos \beta l - K_4 \beta^2 \sin \beta l = 0 \\ (iv) \left\{ \begin{array}{l} K_1 \beta^3 \sinh \beta l + K_2 \beta^3 \cos h\beta l + K_3 \beta^3 \sin \beta l - K_4 \beta^3 \cos \beta l = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 (\cosh \beta l + \cos \beta l) + K_2 (\sin h\beta l + \sin \beta l) = 0 \\ K_1 (\sinh \beta l - \sin \beta l) + K_2 (\cosh \beta l + \cos \beta l) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} (\cosh \beta l + \cos \beta l) & (\sin h\beta l + \sin \beta l) \\ (\sinh \beta l - \sin \beta l) & (\cosh \beta l + \cos \beta l) \end{vmatrix} = 0$$

$$\cosh^2 \beta l + \cos^2 \beta l + 2 \cosh \beta l \cdot \cos \beta l - \sinh^2 \beta l + \sin^2 \beta l = 0$$

$$\Rightarrow \cosh \beta l \cdot \cos \beta l + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \beta l = -\frac{1}{\cosh \beta l}$$

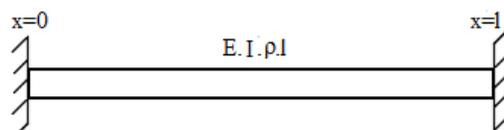
$$\Rightarrow \beta l = (2k+1) \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \beta^2 l^2 = (2k+1)^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2$$

Donc :

$$\lambda_k = \left(\frac{2k+1}{l} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

• Cas d'une poutre encadrée- encadrée :



$$i) w(0, t) = 0$$

$$ii) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0$$

$$iii) w(l, t) = 0$$

$$iv) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0$$

$$(i) \Rightarrow K_1 + K_3 = 0$$

$$(ii) \Rightarrow K_2\beta + K_4\beta = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (iii) \\ (iv) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K_1 \cosh \beta l + K_2 \sin h\beta l + K_3 \cos \beta l - K_4 \sin \beta l = 0 \\ K_1\beta \sinh \beta l + K_2\beta \cos h\beta l - K_3\beta \sin \beta l + K_4\beta \cos \beta l = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 (\cosh \beta l - \cos \beta l) + K_2 (\sin h\beta l - \sin \beta l) = 0 \\ K_1 (\sinh \beta l + \sin \beta l) + K_2 (\cosh \beta l - \cos \beta l) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} (\cosh \beta l - \cos \beta l) & (\sin h\beta l - \sin \beta l) \\ (\sinh \beta l + \sin \beta l) & (\cosh \beta l - \cos \beta l) \end{vmatrix} = 0$$

$$\cosh^2 \beta l + \cos^2 \beta l - 2 \cosh \beta l \cdot \cos \beta l - \sinh^2 \beta l + \sin^2 \beta l = 0$$

$$\Rightarrow \cosh \beta l \cdot \cos \beta l - 1 = 0$$

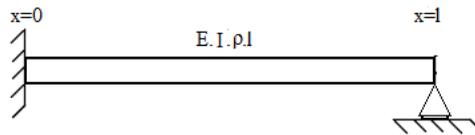
$$\Rightarrow \cos \beta l = \frac{1}{\cosh \beta l}$$

$$\Rightarrow \beta l = (2k+1) \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \beta^2 l^2 = (2k+1)^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2$$

$$\boxed{\lambda_k = \left(\frac{2k+1}{l} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}$$

• Cas d'une poutre encastree- appuyee :



$$i) \quad w(0,t) = 0$$

$$iii) \quad w(l,t) = 0$$

$$ii) \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$iv) \quad M(l,t) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (iii) \\ (iv) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K_1 \cosh \beta l + K_2 \sin h\beta l + K_3 \cos \beta l + K_4 \sin \beta l = 0 \\ K_1\beta^2 \sinh \beta l + K_2\beta^2 \sin h\beta l - K_3\beta^2 \cos \beta l - K_4\beta^2 \sin \beta l = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 (\cosh \beta l - \cos \beta l) + K_2 (\sin h \beta l - \sin \beta l) = 0 \\ K_1 (\cosh \beta l + \cos \beta l) + K_2 (\sinh \beta l + \sin \beta l) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} (\cosh \beta l - \cos \beta l) & (\sin h \beta l - \sin \beta l) \\ (\cosh \beta l + \cos \beta l) & (\sinh \beta l + \sin \beta l) \end{vmatrix} = 0$$

$$2 \cosh \beta l \cdot \sin \beta l - 2 \sinh \beta l \cdot \cos \beta l = 0$$

$$\Rightarrow \cosh \beta l \cdot \sin \beta l = \sinh \beta l \cdot \cos \beta l$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \beta l}{\cos \beta l} = \frac{\sinh \beta l}{\cosh \beta l} \Leftrightarrow \tan \beta l = \tanh \beta l$$

$$\beta l = \left(K + \frac{1}{4} \right) \pi$$

$$\beta^2 l^2 = \left(K + \frac{1}{4} \right)^2 \pi^2 \quad (K \in \mathbb{N})$$

$$\lambda_k = \frac{\left(K + \frac{1}{4} \right)^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

II.2- Développement de la poutre de TIMOSHENKO

Des corrections doivent être apportées à la théorie précédente en prenant en compte l'effet de cisaillement transversale.

Notons par ψ la déformation quand l'effort de cisaillement est négligé, et β l'angle dû l'effet de cisaillement.

$$\frac{dy}{dx} = \psi + \beta$$

$$M = EI \frac{d\psi}{dx} \quad \text{Moment fléchissant}$$

$$T = -k' \cdot \beta \cdot SG \quad \text{Effort tranchant}$$

k' : Facteur numérique dépendante la forme de la section,

S : Aire de la section,

G : Module élastique de cisaillement.

$$T = -k' \left(\frac{dy}{dx} - \psi \right) SG \quad (3.1)$$

Alors on a :

$$-Tdx + \frac{\partial M}{\partial x} dx - \rho l \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dx = 0 \quad (3.2)$$

L'équation différentielle de rotation d'un élément :

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) SG - \rho l \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dx = 0 \quad (3.3)$$

Pour le même élément l'équation différentielle de translation (direction verticale) est :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial T}{\partial x} dx - \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx &= 0 \\ k \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) G - \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

En éliminant ψ des équations (3,3) et (3,4) on obtient :

$$\boxed{EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho l \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 l}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0} \quad (3.5)$$

Pour calculer les fréquences propres, on reprend la poutre simplement appuyée, on divise

l'équation (3,5) par ρS et on pose : $r_g = \frac{1}{S}$ on obtient :

$$a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - r_g \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + r_g \frac{\rho}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (3.6)$$

Cette équation et les conditions initiales sont satisfaites en prenant :

$$y_k = \left(\sin \frac{K\pi}{l} x \right) (A_i \cos \lambda_k t + B_i \sin \lambda_k t) \quad (3.7)$$

En substituant (3,7) dans (3,6), on obtient l'équation suivante pour calculer les fréquences :

$$a^2 \frac{K^4 \pi^4}{l^4} - \lambda_k^2 - \lambda_k^2 \frac{K^2 \pi^2 r_g^2}{l^2} - \lambda_k \frac{K^2 \pi^2 r_g^2}{l^2} \frac{E}{k'G} + \frac{r_g^2 \rho}{k'G} \lambda_k^4 = 0 \quad (3.8)$$

En considérant que les deux premiers termes, on a :

$$\lambda_k = \frac{a\pi^2}{\left(\frac{l}{K}\right)^2} \left(1 - \frac{\pi^2 r_g^2}{2\left(\frac{l}{K}\right)^2} \right) \quad (3.9)$$

II.3- Développement de l'effet de l'inertie de rotation

Il est aisé de remarquer que pendant les vibrations d'un élément de poutre, il y a, en plus du mouvement de translation, un mouvement de rotation. L'angle de rotation est exprimé par

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \text{ et la vitesse angulaire de et l'accélération, respectivement par } \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \text{ et } \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} .$$

En conséquence, le moment d'inertie de l'élément par rapport à l'axe qui passe par son centre et perpendiculaire au plan (xy) est :

$$-\rho l \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} dx$$

Ce moment peut être pris en compte dans les équations d'équilibre dynamique pour un élément de poutre :

$$-T dx + \frac{\partial M}{\partial x} dx - \rho l \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} dx = 0 \quad (3,10)$$

En substituant l'effort de cisaillement T de cette expression, dans l'équation d'équilibre dynamique de l'élément :

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \rho l \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} \right) dx = \rho S \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3,11)$$

En utilisant la formule : $M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ en obtient :

$$\boxed{EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho S \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \rho l \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2}} \quad (3,12)$$

C'est l'équation différentielle des vibrations transversales des poutres avec l'effet de l'inertie De rotation.

II.4 - METHODES APPROCHEES

II.4.1- Méthode de Rayleigh

$$\omega^2 = Q(U) = \frac{N(U)}{D(U)} \quad \text{En vibrations longitudinales}$$

L'équation différentielle des vibrations transversales s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho S \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

la solution s'écrit sous la forme :

$$w(x,t) = ce^{j\omega t} v(x) \quad (4.2)$$

En substituant cette solution dans (4.1) on obtient :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 \rho S v(x) = 0 \quad (4.3)$$

En multiplie l'équation (4.3) par $v(x)$ et l'intégrale :

$$\int_0^l v(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] dx = \omega^2 \int_0^l v(x) \rho S v(x) dx \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\int_0^l v(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] dx}{\int_0^l v(x) \rho S v(x) dx}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\int_0^l v(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] dx}{\int_0^l \rho S [v(x)]^2 dx} \quad (4.5)$$

$$\omega^2 = \frac{N[v(x)]}{D[v(x)]}$$

$v(x)$ est une fonction admissible qui vérifie les conditions aux

limites

$$N[v(x)] = \int_0^l v(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] dx$$

$$N[v(x)] = \left\{ v(x) \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] \right\}_0^l - \int_0^l \frac{dv(x)}{dx} \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] dx$$

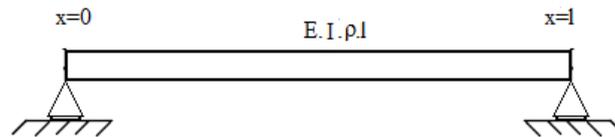
$$= \int_0^l EI \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \left\{ v(x) \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] \right\}_0^l - \left\{ \frac{dv(x)}{dx} \left[EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] \right\}_0^l$$

Donc :

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \left\{ v(x) \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] \right\}_0^l - \left[EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right]_0^l}{\int_0^l \rho S \cdot [v(x)]^2 dx} \quad (4.6)$$

Application :

- Poutre simplement appuyée



$$y(0) = 0$$

$$y(l) = 0$$

$$y''(0) = 0$$

$$y''(l) = 0$$

$$y(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

La fonction admissible satisfaisant les conditions aux limites

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(l) = 0$$

Donc :

$$\left\{ y(x) \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] \right\}_0^l = \left\{ EI y(x) \frac{d^3 y(x)}{dx^3} \right\}_0^l = 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{dy}{dx} \left(EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right) \right\}_0^l = 0$$

$$\int_0^l EI \left[\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right]^2 dx = \int_0^l EI \left(-\frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx$$

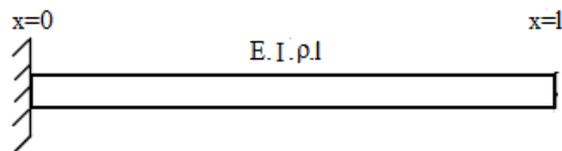
$$N[y(x)] = EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \int_0^l \sin^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx$$

$$D[y(x)] = \int_0^l \rho S \sin^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx = \rho S \int_0^l \sin^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{N[y(x)]}{D[y(x)]} = \frac{EI}{\rho S} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4$$

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

- **Poutre encastree libre**



$$Y = 0$$

$$M = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

$$V = 0$$

$$M = 0 \Rightarrow EI \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0$$

$$V = 0 \Rightarrow EI \frac{d^3 Y}{dx^3} = 0$$

Alors $N[y(x)]$ se r duit   :

$$N[y(x)] = \int_0^l EI \left[\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right]^2 dx$$

$$\left\{ y(x) \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] \right\}_0^l = \left\{ \frac{dY(x)}{dx} \left(EI \frac{d^3 y(x)}{dx^3} \right) \right\}_0^l = 0$$

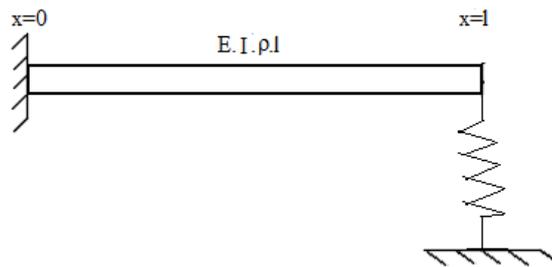
$y(x) = x^2$ La fonction admissible satisfaisant les conditions aux limites

$$N[y(x)] = \int_0^l EI [4] dx = 4EI l$$

$$D[y(x)] = \int_0^l \rho S x^4 dx = \frac{\rho S l^5}{5}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{4EI}{\rho S l^5 / 5} \Rightarrow \omega = \frac{2\sqrt{5}}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

- Poutre encastrée et fixée à un ressort



$$EI \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} = -kY(l)$$

$y(x) = x^2$ Fonction admissible

$$\left\{ y(x) \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] \right\}_0^l = Y(l) EI \frac{d^3 Y(x)}{dx^3} \Big|_{x=l} = -k[Y(l)]^2$$

$$\left[\frac{dY(x)}{dx} \left(EI \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} Y(x) \right) \right]_0^l = \frac{dY(x)}{dx} \left(EI \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} Y(x) \Big|_{x=l} \right) - \frac{dY(x)}{dx} \left(EI \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} Y(x) \Big|_{x=0} \right)$$

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l \left[EI \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right]^2 dx + k[Y(l)]^2}{\int_0^l \rho S [Y(x)]^2 dx}$$

$$\int_0^l EI \left[\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right]^2 dx = \int_0^l 4EI dx = 4EI l$$

$$\int_0^l [Y(x)]^2 dx = \int_0^l \rho S x^4 dx = \frac{\rho S l^5}{5}$$

$$\omega^2 = \frac{4EI l + kl^4}{\rho S l^5 / 5} = \frac{5(5EI + kl^3)}{\rho S l^4}$$

II.4.2 - Méthode de Ritz

$$\omega^2 = \frac{N[Y(x)]}{D[Y(x)]}$$

$Y(x) = a_i \phi_i(x)$ ϕ_i Fonctions admissibles linéairement indépendantes,

n Nombre de fréquences nouvelles qu'on veut déterminer.

On aboutit au système d'équation :

$$[\bar{K}] \{a_i\} - \omega^2 [\bar{M}] \{a_i\} = \{0\}$$

$$[\bar{K}_{ij}] = EI \int_0^l \phi_i'(x) \cdot \phi_j'(x) dx$$

$$[\bar{M}_{ij}] = \rho S \int_0^l \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) dx$$

On peut écrire ces expressions en posant :

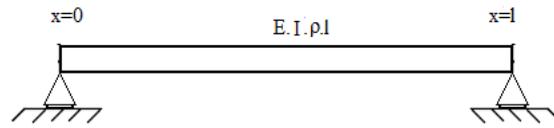
$$N[Y(x)] = \int_0^l EI \left(\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \left[Y(x) \frac{d}{dx} \left(EI \frac{dY(x)}{dx} \right) \right]_0^l - \left[EI \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right]_0^l$$

et $D[Y(x)] = \int_0^l \rho S Y^2(x) dx$

et en prenant compte les conditions aux limites.

Applications :

- **Poutre simplement appuyée**



$$y(0) = 0$$

$$y(l) = 0$$

$$Y''(0) = 0$$

$$Y''(l) = 0$$

Les fonctions admissibles :

$$\phi_1(x) = x(x-l)$$

$$\phi_2(x) = x^2(x-l)$$

$$Y(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$$

$$\phi_1'(x) = 2x-l, \quad \phi_2'(x) = 3x^2 - 2lx$$

$$K_{11} = EI \int_0^l (2x-l)^2 dx = EI (4x^2 - 4lx + l^4) dx = \frac{1}{3} EI l^3$$

$$K_{22} = EI \int_0^l (3x^2 - 2lx)^2 dx = EI l^3 \left(\frac{9}{5} - 3 + \frac{4}{3} \right) = \frac{2}{15} EI l^3$$

$$K_{22} = EI \int_0^l (2x-l)(3x^2 - 2lx) dx = EI \left[\frac{3}{2} x^4 - \frac{7}{2} lx^3 + \frac{2}{3} l^2 x^2 \right]_0^l = \frac{1}{6} EI l^4$$

$$M_{11} = \rho S \int_0^l x^2 (x-l)^2 dx = \rho S \left[\frac{x^5}{5} - \frac{lx^4}{2} + \frac{l^2 x^3}{3} \right]_0^l = \frac{1}{30} \rho S l^5$$

$$M_{22} = \rho S \int_0^l x^4 (x^2 - 2lx + l^2) dx = \rho S \left[\frac{x^7}{7} - \frac{1}{3} lx^6 + \frac{l^2 x^5}{5} \right]_0^l = \frac{1}{105} \rho S l^7$$

$$M_{12} = \rho S \int_0^l x(x-l) \cdot x^2(x-l) dx = \rho S \left[\frac{x^6}{6} - \frac{2}{5} lx^5 + \frac{l^2 x^4}{4} \right]_0^l = \frac{1}{60} \rho S l^6$$

On a donc :

$$[\bar{K}] = EI \begin{bmatrix} \frac{1}{3}l^3 & \frac{1}{6}l^4 \\ \frac{1}{6}l^4 & \frac{2}{15}l^5 \end{bmatrix}, [\bar{M}] = \rho S \begin{bmatrix} \frac{1}{30}l^5 & \frac{1}{60}l^6 \\ \frac{1}{60}l^6 & \frac{1}{105}l^7 \end{bmatrix}$$

On résout l'équation suivante pour obtenir les deux premières fréquences :

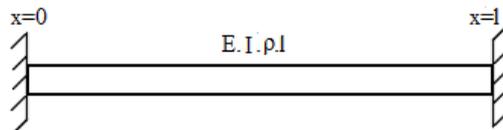
$$\det \left\{ EI \begin{bmatrix} \frac{1}{3}l^3 & \frac{1}{6}l^4 \\ \frac{1}{6}l^4 & \frac{2}{15}l^5 \end{bmatrix} - \omega^2 \rho S \begin{bmatrix} \frac{1}{30}l^5 & \frac{1}{60}l^6 \\ \frac{1}{60}l^6 & \frac{1}{105}l^7 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

Ce qui donne enfin :

$$\omega_1 = \frac{(166 - 16\sqrt{106})^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}{l}$$

$$\omega_2 = \frac{(166 + 16\sqrt{106})^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}{l}$$

- **Cas d'une poutre encastree- encastree :**



$$Y = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

$$Y = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

Les fonctions admissibles

$$\phi_1(x) = l^2 - x^2$$

$$\phi_2(x) = x^2(l^2 - x^2)$$

$$Y(x) = a_1(l^2 - x^2) + a_2x^2(l^2 - x^2)$$

On a donc :

$$N[Y(x)] = EI \int_0^l \left(\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right)^2 dx = EI \left(\frac{4}{3} a_1^2 l^3 + \frac{8}{15} a_1 a_2 l^5 + \frac{44}{105} a_2^2 l^7 \right)$$

$$D[Y(x)] = \rho S \int_0^l Y^2(x) dx = \rho S \left(\frac{8}{15} a_1^2 l^5 + \frac{16}{105} a_1 a_2 l^7 + \frac{8}{315} a_2^2 l^9 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} N[Y(x)] = EI \left(\frac{8l^3}{3} a_1 + \frac{8l^5}{15} a_2 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} N[Y(x)] = EI \left(\frac{8l^5}{3} a_1 + \frac{440l^7}{105} a_2 \right)$$

$$\Rightarrow [\bar{K}] = EI \begin{bmatrix} \frac{8l^3}{3} & \frac{8l^5}{15} \\ \frac{8l^5}{15} & \frac{88l^7}{21} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} D[Y(x)] = \rho S \left(\frac{16l^5}{15} a_1 + \frac{16l^7}{105} a_2 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} D[Y(x)] = \rho S \left(\frac{16l^7}{105} a_1 + \frac{16l^9}{315} a_2 \right)$$

$$\Rightarrow [\bar{M}] = \frac{16}{5} \rho S \begin{bmatrix} \frac{1}{3} l^5 & \frac{1}{21} l^7 \\ \frac{1}{21} l^7 & \frac{1}{63} l^9 \end{bmatrix}$$

La résolution de l'équation suivante donne les deux premières fréquences :

$$\det \left\{ EI \begin{bmatrix} \frac{8l^3}{3} & \frac{8l^5}{15} \\ \frac{8l^5}{15} & \frac{88l^7}{21} \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{16}{5} \rho S \begin{bmatrix} \frac{1}{3} l^5 & \frac{1}{21} l^7 \\ \frac{1}{21} l^7 & \frac{1}{63} l^9 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

Ce qui donne :

$$\omega_1 = \frac{\left(71,75 - \frac{\sqrt{76741}}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}{l},$$

$$\omega_2 = \frac{\left(71,75 + \frac{\sqrt{76741}}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}{l}$$

II.4.3 - Méthode des éléments finis

On prend en compte les translations et les rotations dans les nœuds. En plus des efforts de liaison, il y a les moments flechissants.

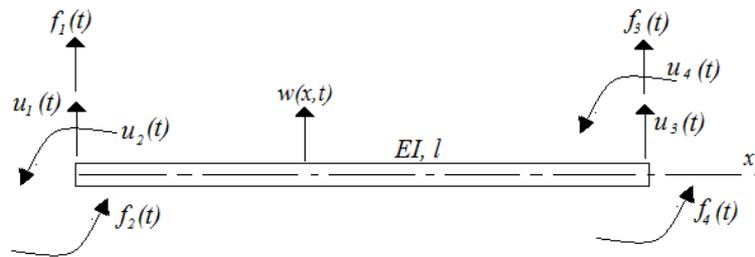


Figure II-2: Vibration flexionnelle d'une poutre

Le déplacement dans chaque nœud s'écrit sous la forme :

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^4 \phi_i(x) \cdot u_i(t) \quad (4.7a)$$

$$w(0,t) = u_1(t), \quad \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = u_2(t) \quad (4.7b)$$

$$w(l,t) = u_3(t), \quad \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} = u_4(t)$$

Les fonctions de formes $\phi_i(x)$ ($i=1,2,3,4$) doivent satisfaire les conditions aux limites.

$$\phi_1(0)=1, \quad \phi_1(l)=0, \quad \left. \frac{d\phi_1}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d\phi_1}{dx} \right|_{x=l} = 0 \quad (4.8a)$$

$$\phi_2(0)=0, \quad \phi_2(l)=0, \quad \left. \frac{d\phi_2}{dx} \right|_{x=0} = 1, \quad \left. \frac{d\phi_2}{dx} \right|_{x=l} = 0 \quad (4.8b)$$

$$\phi_3(0)=0, \quad \phi_3(l)=1, \quad \left. \frac{d\phi_3}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d\phi_3}{dx} \right|_{x=l} = 0 \quad (4.8c)$$

$$\phi_4(0)=0, \quad \phi_4(l)=0, \quad \left. \frac{d\phi_4}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d\phi_4}{dx} \right|_{x=l} = 1 \quad (4.8d)$$

L'équation différentielle gouvernant la flexion des poutres, en négligeant les déformations dues aux efforts de cisaillement.

$$\frac{d^4\phi_1(x)}{dx^4} = 0, \quad 0 < x < l \quad (4.9)$$

La solution générale est de la forme :

$$\phi_i(x) = \frac{1}{6}c_1x^2 + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_3x + c_4 \quad (4.10)$$

En utilisant les conditions aux limites, on obtient la fonction de forme :

$$\phi_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}$$

(IV.11)

De la même manière on peut vérifier que :

$$\phi_2(x) = 1 - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

$$\phi_3(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}$$

(IV.12)

$$\phi_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

En utilisant (IV.11) et (IV.12) dans l'équation (IV.7a), on obtient :

$$w(x,t) = \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right)u_1(t) + \left(1 - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)u_2(t) + \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right)u_3(t) + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)u_4(t) \quad (4.13)$$

L'énergie cinétique est :

$$\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l m \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^l m \left[\left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \right) u_1''(t) + \left(1 - 2 \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) u_2''(t) + \left(3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} \right) u_3''(t) + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) u_4''(t) \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{ml}{420} \left[156u_1''^2(t) + 4l^2u_2''^2(t) + 156u_3''^2(t) + 4l^2u_4''^2(t) + 2 \times 22u_1''(t)u_2''(t) + 2 \times 54u_1''(t)u_3''(t) \right. \\
&\quad \left. - 2 \times 13lu_1''(t)u_4''(t) + 2 \times 13lu_2''(t)u_3''(t) - 2 \times l^2u_2''(t)u_4''(t) - 2 \times 22u_3''(t)u_4''(t) \right] \quad (4.14)
\end{aligned}$$

L'énergie potentielle est :

$$\begin{aligned}
V(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[-\frac{6}{l^2} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) u_1(t) - \frac{2}{l} \left(2 - 3 \frac{x}{l} \right) u_2(t) + \frac{6}{l^2} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) u_3(t) - \frac{2}{l} \left(2 - 3 \frac{x}{l} \right) u_4(t) \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{EI}{l^3} \left[12u_1^2(t) + 4l^2u_2^2(t) + 12u_3^2(t) + 4l^2u_4^2(t) + 2 \times 6lu_1(t)u_2(t) - 2 \times 12u_1(t)u_4(t) \right. \\
&\quad \left. + 2 \times 6lu_1(t)u_4(t) - 2 \times 12u_2(t)u_3(t) + 2 \times 2l^2u_2(t)u_4(t) - 2 \times 6lu_3(t)u_4(t) \right] \quad (4.15)
\end{aligned}$$

En utilisant les équations de Lagrange, on obtient l'équation du mouvement sous la forme

$$[m]\{u''(t)\} + [k]\{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.16)$$

Avec :

$$[m] = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

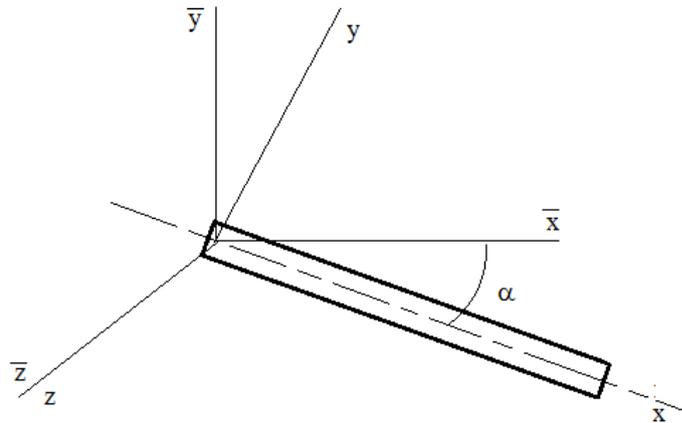
et

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

On note les coordonnées du référentiel général par $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ et les déplacements dans ces directions à l'extrémité a par $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$, et à l'extrémité b par $\bar{u}_4, \bar{u}_5, \bar{u}_6$.

On introduit une matrice de passage $[L] = \begin{bmatrix} [l] & [0] \\ [0] & [l] \end{bmatrix}$

$$\text{Avec : } [l] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [l] \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [l] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = [l] \begin{Bmatrix} \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{Bmatrix}$$

Donc les énergies cinétiques et potentielles s'écrivent sous la forme suivante :

$$T = \frac{1}{2} \{u''\}^T [m] \{u''\} \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} \quad (4.19)$$

Alors :

$$T = \frac{1}{2} \{\bar{u}''\}^T [L]^T [m] [L] \{\bar{u}''\} = \frac{1}{2} \{\bar{u}''\}^T [\bar{m}] \{\bar{u}''\} \quad (4.20)$$

(IV.19)

$$\text{Où : } [\bar{m}] = [L]^T [m] [L]$$

$$V = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [L]^T [k] [L] \{\bar{u}\} = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [\bar{k}] \{\bar{u}\}$$

(IV.20)

$$\text{Où : } [\bar{k}] = [L]^T [k] [L]$$

Pour une structure constituée de p éléments on introduit les annotations suivantes :

\bar{U}_j ($j=1,2,3,\dots,N$) déplacements des nœuds de la structure dans le système de coordonnées général, $\{\bar{U}\}$ est le vecteur colonne déplacement.

La relation entre les vecteurs $\{\bar{u}\}_s$ et $\{\bar{U}\}$ peut être écrite sous la forme matricielle :

$$\{\bar{u}\}_s = [A]_s \{\bar{U}\} \quad s=1,2,\dots,p$$

L'énergie cinétique pour la structure

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^p \{\bar{U}'\}^T [A]_s^T [\bar{m}]_s [A]_s \{\bar{U}'\} = \frac{1}{2} \{\bar{U}'\}^T [\bar{M}] \{\bar{U}'\} \quad (4.21)$$

et l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^p \{\bar{U}\}^T [A]_s^T [k]_s [A]_s \{\bar{U}\} = \frac{1}{2} \{\bar{U}\}^T [\bar{K}] \{\bar{U}\} \quad (4.22)$$

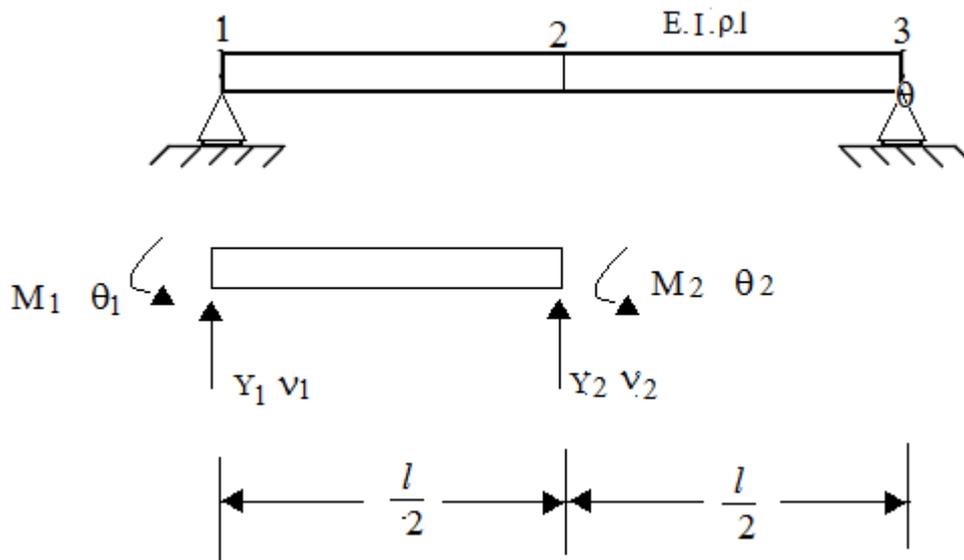
L'équation du mouvement de la structure peut être mise sous la forme matricielle

$$[\bar{M}] \{\bar{U}''\} + [\bar{K}] \{\bar{U}\} = \{\bar{F}\} \quad (4.23)$$

Dans le cas des vibrations libres avec la fréquence naturelle ω^2 l'équation (4.23), prend la forme suivante :

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{U\} = 0 \Rightarrow \det [[K] - \omega^2 [M]] = 0 \quad (4.24)$$

- Exemple 1 : Poutre simplement appuyée



Considérons les quatre premiers modes, pour les premiers et troisième modes, on a les mêmes conditions aux limites pour l'élément et la poutre :

$$v_1 = \theta_2 = 0$$

On a alors :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EI}{L} & \\ & -\omega^2 \frac{\rho SL}{420} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

On pose :

$$\lambda = \frac{\omega^2 (\rho SL^4)}{420EI}$$

Alors :

$$\det \begin{vmatrix} 4 - 4\lambda & -\frac{6 + 13\lambda}{L} \\ \frac{6 + 13\lambda}{L} & 12 - 156\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 455\lambda^2 - 828\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda = 0,01461 \text{ et } 1,8052$$

Pour le premier mode : $\omega_1 = \frac{2,477}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

Pour le second mode : $\omega_3 = \frac{27,5}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

Pour le deuxième et quatrième mode, les conditions limites sont semblables à celles de l'élément (1).

$$v_1 = v_2 = 0$$

On a alors :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left[\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 4L^2 & -3L^2 \\ -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

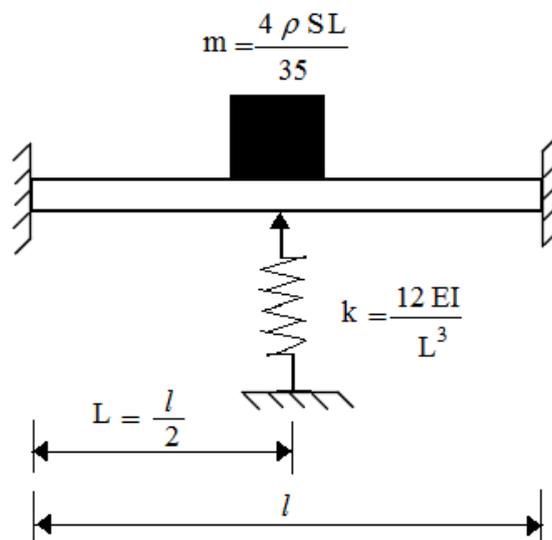
$$\det \begin{vmatrix} 4-4\lambda & 2+3\lambda \\ 2+3\lambda & 4-4\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7\lambda^2 - 44\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda = 0,2857 \quad \text{et} \quad 6$$

Pour le second mode :
$$\omega_2 = \frac{10,91}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

Pour le quatrième mode :
$$\omega_4 = \frac{50,2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

- **Exemple 2** : poutre encastree aux extremités avec un ressort et une masse attachee au centre.



On veut évaluer les deux premières fréquences naturelles en modélisant la poutre en deux éléments :

Les conditions aux limites permettent d'écrire :

$$v_1 = \theta_1 = v_3 = \theta_3 = 0$$

On a alors :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left[\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{36}{L^2} & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

En ajoutant les effets de la masse et du ressort on obtient :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left[\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{36}{L^2} & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 360 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = \omega^2 \frac{(\rho SL^4)}{420}$$

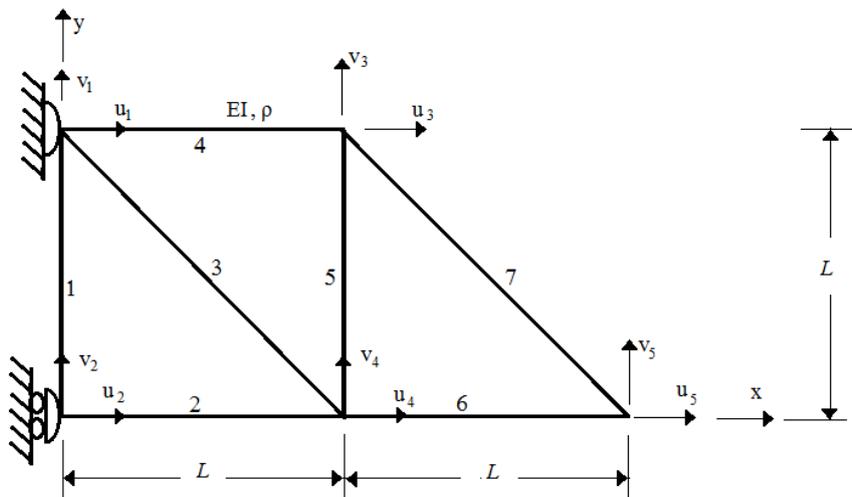
$$\det \begin{vmatrix} \frac{36}{L}(1-10\lambda) & 0 \\ 0 & 8L(1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 288(1-10\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda = 0,1 \text{ et } 1$$

Alors on a :

$$\omega_1 = \frac{6,48}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \omega_2 = \frac{20,5}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

Exemple 3 : cas d'un treillis



On considère le treillis schématisé sur la figure.

On détermine les matrices d'inertie et de rigidité pour les sept éléments dans le référentiel global (x,y) :

Les matrices de passage s'écrivent sous la forme :

$$[L]_1 = [L]_2 = [L]_4 = [L]_5 = [L]_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a)

$$[L]_3 = [L]_7 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a alors les matrices d'inertie dans le référentiel local :

$$[\bar{m}]_i = \frac{m_i L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6$$

(b)

$$[\bar{m}]_j = \frac{\sqrt{2} m_i L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad i = 3, 7$$

Et dans le repère global :

$$[\bar{m}]_i = [\bar{m}]_j, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6$$

(c)

$$[\bar{m}]_i = \frac{\sqrt{2}m_i L}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad i = 3, 7$$

De la même manière on écrit :

$$[\bar{k}]_i = \frac{(ES)_i}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 5$$

$$[\bar{k}]_i = \frac{(ES)_i}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 2, 4, 6 \quad (d)$$

$$[\bar{k}]_i = \frac{(ES)_i}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 3, 7$$

Et dans le repère global :

$$[k]_i = [\bar{k}]_i, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6$$

$$[k]_i = \frac{(ES)_i}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 3, 7 \quad (e)$$

On calcule à présent les matrices d'inertie et de rigidité globale de la structure :

On aura besoin des matrices $[A]_s = (s = 1, 2, \dots, 7)$. On pose :

$$\{\bar{u}\}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{u}\}_2 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{u}\}_3 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{u}\}_4 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{u}\}_5 = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{u}\}_6 = \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{u}\}_7 = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} [A]_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [A]_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ [A]_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [A]_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [A]_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [A]_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [A]_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (g)$$

On écrit alors la matrice globale d'inertie de la structure :

$$[M] = \sum_{s=1}^7 [A]_s^T [m]_s [A]_s$$

$$= \frac{mL}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4+4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4+4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 4+4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 4+4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+6\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+6\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{h})$$

Et la matrice globale de rigidité :

$$[K] = \sum_{s=1}^7 [A]_s^T [k]_s [A]_s$$

$$= \frac{ES}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1+2\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1+2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & 1 & -1 \\ -1 & 10 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1+4\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & -1 & 1+2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2\sqrt{2} & 0 & 1+2\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

On a : $u_1 = v_1 = u_2 = 0$, on écrit l'équation de mouvement sous la forme :

$$\begin{aligned}
&= \frac{mL}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4+4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4+4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+6\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+6\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} & -1 & 4+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} \\
&+ \frac{ES}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1+2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+4\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & -1 & 1+2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2\sqrt{2} & 0 & 1+2\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j)
\end{aligned}$$

L'équation (j) conduit à un problème de valeurs propres.

$$\frac{ES}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1+2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+4\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & -1 & 1+2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2\sqrt{2} & 0 & 1+2\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

$$-\omega^2 \frac{mL}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4+4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4+4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+6\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+6\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} & -1 & 4+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{k})$$

III - Vibration des poutres en torsion.

La torsion des poutres (arbre) est un phénomène très courant en machinerie. Les poutres sont souvent tournantes et par conséquent la connaissance des fréquences propres s'avère une première nécessité dans le dimensionnement, ainsi que dans l'utilisation (vitesse de rotation).

Soit donc la poutre schématisée sur la figure :

I : moment d'inertie polaire,

G : module de cisaillement,

GI : rigidité torsionnelle.

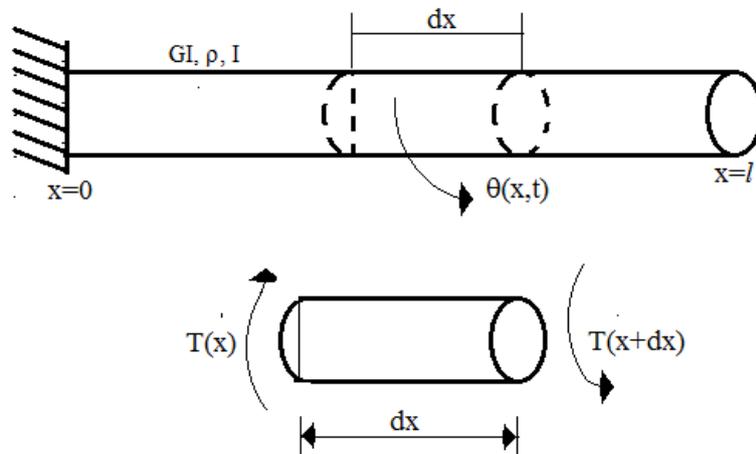


Figure III-1: Vibration d'une poutre en torsion

Selon le principe de la dynamique.

$$T(x+dx) - T(x) = \rho dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x} dx - T(x) = \rho dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} dx = \rho dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

D'après la relation élémentaire de torsion :

$$T = GI \frac{\partial \theta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} dx = GI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx \tag{3.2}$$

$$\text{On a alors : } GI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx = \rho l \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x,t) = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(x,t)} \quad (3.4)$$

Où : $b = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ vitesse de propagation en torsion

On veut résoudre cette équation en utilisant la méthode de séparation de variables :

$$\theta(x,t) = U(x) \cdot S(t)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = S(t) \frac{d^2 U(x)}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = U(x) \frac{d^2 S(t)}{dt^2}$$

En remplaçant dans (3.4)

$$S(t) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} = \frac{1}{b^2} U(x) \frac{d^2 S(t)}{dt^2}$$

$$\Rightarrow b^2 \frac{d^2 U(x)/dx^2}{U(x)} = \frac{d^2 S(t)/dt^2}{S(t)} = -\lambda^2 \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} b^2 \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \lambda^2 U(x) = 0 \\ \frac{d^2 S(t)}{dt^2} + \lambda^2 S(t) = 0 \end{cases} \quad (3.5a) \text{ et } (3.5b)$$

$$(3.5a) \Leftrightarrow \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{b^2} U(x) = 0$$

La solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$U(x) = a_1 \cos \beta x + a_2 \sin \beta x \quad (3.6)$$

On calcule les constantes et à partir des conditions aux limites. $\left(\beta = \frac{\lambda}{b} \right)$

$$(3.5b) \Leftrightarrow \frac{d^2 S(t)}{dt^2} + \lambda^2 S(t) = 0$$

$$S(t) = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t$$

Traitant le cas d'une poutre encastree-libre :



$$(a) \Rightarrow u(0,t) = 0 \Leftrightarrow U(0) \cdot S(t) = 0 \rightarrow U(0) = 0$$

$$(b) \Rightarrow T(l,t) = 0 \Leftrightarrow \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=l} = 0$$

$$(a) \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow U(x) = a_2 \sin \beta x$$

$$(b) \Rightarrow \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=l} = a_2 \beta \cos \beta x \rightarrow \cos \beta l = 0$$

$$\text{On a alors : } \beta l = (2K - 1) \frac{\pi}{2}, K = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda_k = (2K - 1) \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Determination de la solution $\theta(x,t)$:

$$S(t) = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t$$

$$t = 0 \quad \theta(x,t) = 0 \quad (a)$$

$$t = 0 \quad \frac{d\theta(x,t)}{dt} = f(x) \quad (b)$$

$$\theta(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin \beta x) (C_1 \cos \lambda_k t + C_2 \sin \lambda_k t)$$

$$\theta(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} [m_k \cos \lambda_k t + n_k \sin \lambda_k t] \sin \beta_k x$$

$$m_k = a_k C_1 \quad , \quad n_k = a_k C_2$$

$$(a) \Rightarrow S(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$S(t) = C_2 \sin \lambda t$$

$$\theta_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin \beta_k x) (C_k \sin \lambda_k t)$$

$$\theta_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (d_k \sin \beta_k x) (\sin \lambda_k t)$$

$$\frac{d\theta_k(x,t)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \lambda_k \sin \beta_k x \cos \lambda_k t$$

$$(c) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} d_k \lambda_k \sin \beta_k x = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \lambda_k \sin \beta_k x \quad , \quad d_k \lambda_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \beta_k x dx$$

$$d_k = \frac{2}{l \lambda_k} \int_0^l f(x) \sin \beta_k x dx$$

En remplaçant dans la formule de $\theta_k(x,t)$:

$$\theta_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l \lambda_k} \int_0^l f(x) \sin \beta_k x dx \right) \sin \beta_k x \sin \lambda_k t$$

IV - LES SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

IV.1 - Introduction

Il s'agit d'une brève présentation des principes de la dynamique structurelle appliqués à systèmes ayant plusieurs degrés de liberté pour une utilisation par les étudiants dans un tremblement de terre.

IV.2 - Solution classique des équations d'équilibre dynamique

Pour les vibrations libres, nous avons le système suivant de n équations différentielles simultanées d'équilibre:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (4.1)$$

$[\mathbf{M}]$ et $[\mathbf{K}]$ sont les matrices de masse et de rigidité, respectivement, les deux matrices étant définies positives- ce qui signifie que pour la position d'équilibre, l'énergie potentielle du système est nulle.

Nous pouvons proposer le type de solution suivant les équations différentielles simultanées

$$\{\mathbf{U}_i(\mathbf{t})\} = \{\phi^{(i)}\} \mathbf{f}_i(\mathbf{t}) \quad (4.2)$$

Ceci est une solution qui est séparable en un vecteur d'amplitude, $\{\phi^{(i)}\}$, et une fonction dépendante du temps, $\mathbf{f}_i(\mathbf{t})$. Dériver l'équation. (2) deux fois contre le temps nous obtenons ce qui suit l'équation d'accélération:

$$\{\ddot{\mathbf{U}}_i(\mathbf{t})\} = \{\phi^{(i)}\} \ddot{\mathbf{f}}_i(\mathbf{t}) \quad (4.3)$$

En substituant (5.2) et (5.3) dans (5.1) on obtient:

$$[\mathbf{M}]\{\phi^{(i)}\} \ddot{\mathbf{f}}_i(\mathbf{t}) + [\mathbf{K}]\{\phi^{(i)}\} \mathbf{f}_i(\mathbf{t}) = \{\mathbf{0}\} \quad (4.4)$$

Eq. (4) peut être vu comme n équations du type:

$$\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{m}_{ij} \phi_j^{(i)} \right) \ddot{\mathbf{f}}_i(\mathbf{t}) + \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{k}_{ij} \phi_j^{(i)} \right) \mathbf{f}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

Cela ouvre la porte, dans la i ème équation, en utilisant la solution d'équation à séparation variables:

$$-\frac{\ddot{\mathbf{f}}_i(t)}{\mathbf{f}_i(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{k}_{ij} \phi_j^{(i)}}{\sum_{j=1}^n \mathbf{m}_{ij} \phi_j^{(i)}} \quad (4.6)$$

Dans l'éq.(5.6) nous pouvons voir que le côté gauche dépend du temps tandis que le côté droit ne l'est pas. Ce signifie que les deux côtés sont égaux à une constante que nous appelons arbitrairement ω_i^2 . Par conséquent, l'équation peut être convertie en deux équations, l'une d'entre elles étant dépendant du temps et l'autre non; et les deux, à leur tour, égaux à la constante ω_i^2 :

$$\ddot{\mathbf{f}}_i(t) + \omega_i^2 \mathbf{f}_i(t) = 0 \quad (4.7)$$

Et

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{k}_{ij} - \omega_i^2 \mathbf{m}_{ij}) \phi_j^{(i)} = 0 \quad (4.8)$$

La solution de l'équation. (4.7) est de type:

$$\mathbf{f}_i(t) = \mathbf{A}_i \sin \omega_i t + \mathbf{B}_i \cos \omega_i t \quad (4.9)$$

Où A_i et B_i sont des constantes qui dépendent des conditions initiales et représentent la amplitude du mouvement harmonique, ω_i étant la fréquence naturelle en radians par seconde. Les valeurs que ω_i peut prendre sont obtenues à partir de l'équation. (8), celle présentée dans la forme matricielle est:

$$\left[[\mathbf{K}] - \omega_i^2 [\mathbf{M}] \right] \{ \phi^{(i)} \} = \{ \mathbf{0} \} \quad (4.10)$$

Eq. (V.10) correspond à un système d'équations simultanées homogène, dont la non trivialité la solution n'existe que si le déterminant de la matrice des coefficients est nulle:

$$\Delta = \left| [\mathbf{K}] - \omega_i^2 [\mathbf{M}] \right| = 0 \quad (4.11)$$

Δ est appelé le déterminant caractéristique du système d'équations simultanées. En développant le déterminant, nous pouvons trouver un polynôme de degré $2n$ qui a ω^2 comme variable. Ce polynôme est appelé équation caractéristique ou équation de fréquence. Les n racines de cette équation sont les fréquences naturelles du système, ou valeurs propres. Puisque $[\mathbf{M}]$ et $[\mathbf{K}]$ sont tous deux définis positivement, il est possible de prouver que les

racines de l'équation caractéristique sont toujours réelles et positives. Ces racines sont du plus petit au plus grand:

$$\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \leq \dots \leq \omega_n^2 \quad (4.12)$$

Leurs racines carrées sont appelées fréquences naturelles, en radians par seconde. La plus petite fréquence, ω_1 , est appelée fréquence fondamentale.

Jusqu'à présent, nous avons résolu la moitié du problème. Maintenant, nous devons rechercher les valeurs des amplitudes du mouvement harmonique $\{\phi(i)\}$, en remplaçant les valeurs de ω_i^2 dans l'équation (10) Cela nous conduit à n systèmes d'équation simultanée de type:

$$[[\mathbf{K}] - \omega_r^2 [\mathbf{M}]] \{\phi^{(r)}\} = \{0\} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.13)$$

Cela signifie que le rapport entre les différents termes du vecteur $\{\phi(r)\}$ est fixe et unique. Ensuite, pour chaque fréquence ω_r nous avons un vecteur $\{\phi(r)\}$ qui a une forme définie mais une amplitude arbitraire. Puisqu'il est possible que deux fréquences ou plus soient égales toute combinaison linéaire des modes correspondants est également un mode.

En attribuant une valeur définie, telle qu'une (= 1), à l'un des termes du vecteur $\{\phi(r)\}$ les n-1 termes restants sont définis d'une manière unique. Ce processus est appelé la normalisation et les vecteurs résultants sont appelés modes normaux. Le suivant la normalisation a été populaire:

$$\{\phi^{(r)}\}^T \{\phi^{(r)}\} = \mathbf{1} \quad (4.14)$$

Parfois, il est pratique de normaliser les modes par rapport à la matrice de masse $[\mathbf{M}]$:

$$\{\phi^{(r)}\}^T [\mathbf{M}] \{\phi^{(r)}\} = \mathbf{1} \quad (4.15)$$

Cette dernière normalisation est appelée orthonormée et est largement utilisée car elle simplifie une partie du travail numérique lors de la résolution de la réponse dynamique du système.

Les différents modes sont rassemblés dans une seule matrice, appelée matrice modale, $[\Phi]$, ayant dimensions de n par n, et dans laquelle chaque colonne correspond à un mode avec le premier mode situé dans la première colonne et le reste étant placé dans l'ordre croissant.

$$[\Phi] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \{\phi^{(1)}\} & \{\phi^{(2)}\} & \dots & \{\phi^{(n)}\} \end{array} \right] \quad (4.16)$$

La totale réponse, dans le cas de vibrations libres, est décrite en utilisant un ensemble de nouveaux degrés de liberté, η_i , de telle manière qu'elles se rapportent aux degrés de liberté d'origine employés pour établir l'équilibre par la relation suivante:

$$\{U(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \quad (4.17)$$

Pour la vibration libre, chacun des termes du vecteur $\{\eta(t)\}$ a la forme suivante:

$$\eta_i(t) = A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t) \quad (4.18)$$

Eq. (17) peut être transformé en:

$$\begin{aligned} \{U(t)\} &= [\Phi]\{\eta(t)\} \\ &= [\Phi]\{A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} A_i \sin(\omega_i t) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} B_i \cos(\omega_i t) \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dérivation contre le temps Eq. (19) on peut obtenir la réponse en vitesse de chacun des degrés de liberté d'origine:

$$\{\dot{U}(t)\} = \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} A_i \omega_i \cos(\omega_i t) \right) - \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} B_i \omega_i \sin(\omega_i t) \right) \quad (4.20)$$

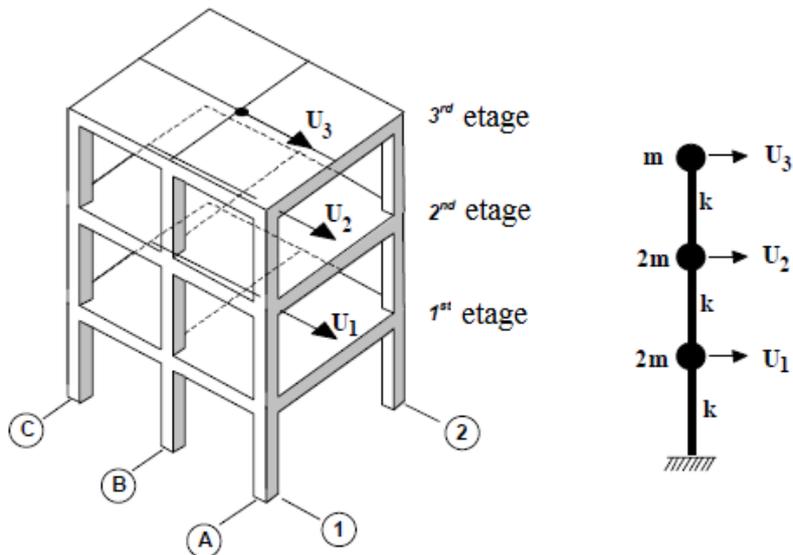
Si les conditions initiales sont définies comme $\{U_o\}$ et $\{\dot{U}_o\}$ pour le déplacement et la vitesse respectivement, nous pouvons calculer les constantes A_i et B_i suivantes:

$$\{U_o\} = \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} B_i \right) \quad \text{et} \quad \{\dot{U}_o\} = \sum_{i=1}^n \left(\{\phi^{(i)}\} A_i \omega_i \right) \quad (4.21)$$

Ainsi, il est possible de définir deux systèmes d'équations simultanées qui ont comme inconnue les valeurs de B_i et $A_i \omega_i$. Une fois les inconnues résolues, la solution pour la réponse dynamique de vibration libre du système est obtenue.

Exemple d'application:

Pour le bâtiment représenté sur la figure V.1, nous nous intéressons à la réponse dans le sens des axes de référence numériques. La rigidité latérale de chacune des histoires est la même et peut être défini comme **k**. La masse des deux étages inférieurs est le double de celle de toit. La masse du toit est définie comme **m**.



La matrice de masse de la structure est:

$$\begin{matrix}
 & & & \downarrow \text{dof} \\
 [\mathbf{M}] = & \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2m} \end{bmatrix} & \begin{matrix} U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

La matrice de rigidité, obtenue à partir de l'équilibre de chaque masse, est:

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \text{dof} \\
 [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & -\mathbf{k} & 0 \\ -\mathbf{k} & 2\mathbf{k} & -\mathbf{k} \\ 0 & -\mathbf{k} & 2\mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_1 \end{array}
 \end{array}$$

Les équations d'équilibre dynamique sont alors:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathbf{m} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_3 \\ \ddot{\mathbf{U}}_2 \\ \ddot{\mathbf{U}}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k} & -\mathbf{k} & 0 \\ -\mathbf{k} & 2\mathbf{k} & -\mathbf{k} \\ 0 & -\mathbf{k} & 2\mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nous allons maintenant trouver la solution de la réponse vibratoire libre du système pour conditions initiales différentes. De l'Eq. (11) nous avons:

$$\Delta = |[\mathbf{K}] - \omega_i^2 [\mathbf{M}]| = 0$$

Après avoir remplacé $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{M}]$, nous obtenons le déterminant suivant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m} & -\mathbf{k} & 0 \\ -\mathbf{k} & 2\mathbf{k} - \omega^2 2\mathbf{m} & -\mathbf{k} \\ 0 & -\mathbf{k} & 2\mathbf{k} - \omega^2 2\mathbf{m} \end{vmatrix} = 0$$

En développant ce déterminant, nous obtenons l'équation caractéristique suivante:

$$\Delta = 4\mathbf{m}^3 \omega^6 - 12\mathbf{k}\mathbf{m}^2 \omega^4 + 9\mathbf{k}^2 \mathbf{m} \omega^2 - \mathbf{k}^3 = 0$$

Après avoir divisé tous les termes de l'équation caractéristique par $4 \mathbf{m}^3$, nous obtenons:

$$\omega^6 - 3 \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \omega^4 + \frac{9}{4} \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{m}^2} \omega^2 - \frac{1}{4} \frac{\mathbf{k}^3}{\mathbf{m}^3} = 0$$

Une simple inspection de l'équation nous indique que $\omega^2 = k / m$ est une racine, et en utilisant division synthétique, nous transformons l'équation caractéristique en:

$$\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)(4m^3\omega^4 - 8km^2\omega^2 + k^2m) = 0$$

Résolution de l'équation du deuxième degré contenue dans le deuxième terme de la précédente équation, on obtient:

$$\omega^2 = \frac{8km^2 \pm \sqrt{64k^2m^4 - 16k^2m^4}}{8m^3} = \frac{k}{m} \left[1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \left\langle \begin{array}{l} 1.866 \frac{k}{m} \\ 0.134 \frac{k}{m} \end{array} \right\rangle$$

Ensuite, les fréquences naturelles du bâtiment - correctement ordonnées - sont:

$$\omega_1^2 = 0.134 \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_3^2 = 1.866 \frac{k}{m}$$

Maintenant, en utilisant Eq. (13) on peut obtenir les modes de vibration en revenant au déterminant caractéristique:

$$[[\mathbf{K}] - \omega_r^2 [\mathbf{M}]] \{ \phi^{(r)} \} = \{ 0 \} \quad r = 1, 2 \text{ and } 3$$

En remplaçant ici les matrices de masse et de rigidité, nous obtenons l'ensemble suivant d'équations simultanées homogènes:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} k - \omega_r^2 m & -k & 0 \\ \hline -k & 2k - \omega_r^2 2m & -k \\ \hline 0 & -k & 2k - \omega_r^2 2m \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \phi_3^{(r)} \\ \phi_2^{(r)} \\ \phi_1^{(r)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

En développant le produit, nous voyons le système dans l'équation simultanée classique format:

$$\begin{aligned} (k - \omega_r^2 m) \phi_3^{(r)} - k \phi_2^{(r)} &= 0 \\ -k \phi_3^{(r)} + (2k - \omega_r^2 2m) \phi_2^{(r)} - k \phi_1^{(r)} &= 0 \\ -k \phi_2^{(r)} + (2k - \omega_r^2 2m) \phi_1^{(r)} &= 0 \end{aligned}$$

De la troisième équation, nous pouvons voir que, dans ce cas, le rapport entre la deuxième inconnue et la première inconnue est:

$$\frac{\phi_2^{(r)}}{\phi_1^{(r)}} = \frac{2k - \omega_r^2 2m}{k}$$

Remplaçant maintenant la troisième équation par la seconde, nous obtenons le rapport suivant entre la troisième inconnue et la première inconnue:

$$\frac{\phi_3^{(r)}}{\phi_1^{(r)}} = \frac{(2k - \omega_r^2 2m)^2}{k^2} - 1$$

Ces deux ratios sont fixes pour toute valeur de ω_i^2 . Nous remplaçons maintenant les valeurs de ω_i^2 obtenu précédemment et les valeurs des inconnues sont trouvées pour chaque cas:

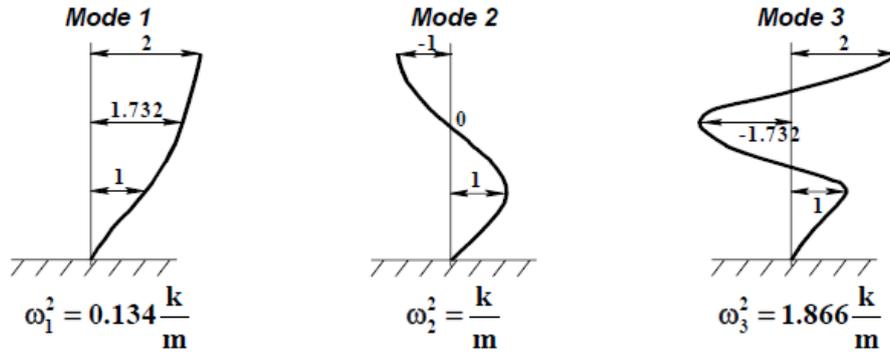
| | ω_1^2 | ω_2^2 | ω_3^2 |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|
| $\frac{\phi_2}{\phi_1}$ | 1.732 | 0 | -1.732 |
| $\frac{\phi_3}{\phi_1}$ | 2 | -1 | 2 |

On peut attribuer toute valeur arbitraire au terme ϕ_1 et donc à partir de la valeur obtenue les rapports calculent les deux autres valeurs des termes du mode.

Nous choisissons, arbitrairement à nouveau, une valeur de un pour ϕ_1 . Ce faisant, les modes sont définis comme:

$$\{\phi^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{\phi^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{\phi^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1.732 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Correspond graphiquement à:



Nous modifions maintenant la normalisation des modes de manière à ce qu'ils soient conformes avec Eq. (15) pour obtenir des modes orthonormaux:

$$\{\phi^{(r)}\}^T [M] \{\phi^{(r)}\} = \mathbf{1}$$

Mode 1 :

$$\{2 \mid \sqrt{3} \mid 1\} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = 12m \Rightarrow \{\phi^{(1)}\} = \frac{1}{\sqrt{12m}} \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5774/\sqrt{m} \\ 0.5000/\sqrt{m} \\ 0.2887/\sqrt{m} \end{bmatrix}$$

Mode 2 :

$$\{-1 \mid 0 \mid 1\} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3m \Rightarrow \{\phi^{(2)}\} = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5774/\sqrt{m} \\ 0 \\ 0.5774/\sqrt{m} \end{bmatrix}$$

Mode 3 :

$$\{2 \mid -\sqrt{3} \mid 1\} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = 12m \Rightarrow \{\phi^{(3)}\} = \frac{1}{\sqrt{12m}} \begin{bmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5774/\sqrt{m} \\ -0.5000/\sqrt{m} \\ 0.2887/\sqrt{m} \end{bmatrix}$$

La matrice modale est alors :

$$[\Phi] = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{m}}} \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.5774 & 0.5774 \\ 0.5000 & 0 & -0.5000 \\ 0.2887 & 0.5774 & 0.2887 \end{bmatrix}$$

V : CALCUL ET CONCEPTION PARASISMIQUE

V.1 - SISMOLOGIE ET TECTONIQUE

V.1.1 - INTRODUCTION À LA SISMOLOGIE

V.1.2 - SISMOLOGIE

Science des tremblements de terre qui se propose d'étudier :

- le phénomène séisme lui-même : causes, mécanismes, répartition, prévention et prévision
- les ondes émises : signaux dont la déformation au cours de la propagation nous renseigne sur la **structure interne** du globe

V.1.3 - SISMOMETRIE

Étude de l'instrumentation qui enregistre les mouvements du sol.

V.1.4 - SÉISMES ET FAILLES

Un **séisme** est un mouvement naturel du sol qui débute brusquement (rupture brutale) et dure peu (quelques secondes à quelques minutes)

Il existe différents types de séismes :

tectoniques, volcaniques, d'effondrement, artificiels, induits

V.1.5 - LES DIFFÉRENTS TYPES DE SÉISMES

V.1.5.1- SEISMES TECTONIQUES

Ces séismes sont liés au rejeu d'une faille préexistante ou à la création d'une nouvelle faille. Ils se produisent essentiellement aux frontières des plaques lithosphériques

On distingue 3 mouvements de faille principaux :

faille normale, faille inverse et faille de coulissage (ou décrochement)

Ce mouvement (ou jeu) de la faille est caractérisé par l'orientation du vecteur déplacement d

SEISMES TECTONIQUES

Le déplacement peut se décomposer en un déplacement vertical (rejet) et un déplacement horizontal (coulissage).

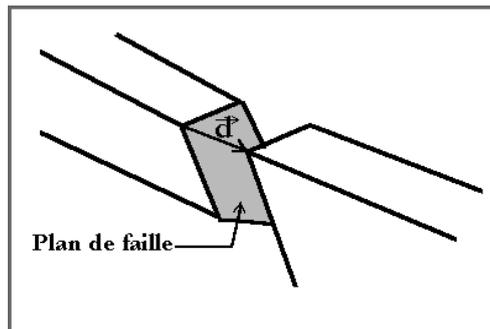


Figure V.1 : Plan de faille

Exemple :

Séisme de San-Francisco du 18 avril 1906 rejet de 1 m et coulissage horizontal de 7 m.

Les séismes tectoniques se produisent toujours dans la lithosphère : celle-ci subit des déformations lentes dues au déplacement des plaques.

V.1.5.2 - SEISMES VOLCANIQUES

Ces séismes sont liés aux mouvements magmatiques et à l'ouverture de fissures

V.1.5.3 - SEISMES D'EFFONDREMENT

Ces séismes sont liés à l'effondrement de cavités naturelles et minières (terrains karstiques, calcaires ou salifères).

V.1.5.4 - SEISMES ARTIFICIELS

Ces séismes sont liés à l'activité de l'homme. Il s'agit de toute explosion du bâton de dynamite à l'explosion nucléaire (M5-6)

V.1.5.5 - SEISMES INDUITS

Ces séismes sont aussi liés à l'activité de l'homme. Ils sont consécutifs à l'injection de fluides dans les forages ou au remplissage de barrages.

V.1.5.6 - DÉFINITIONS DES PARAMETRES DU SEISME

Foyer F (ou hypocentre) : endroit où s'initie la rupture

Epicentre E : point de la surface de la Terre le plus proche du foyer F

Profondeur h : Distance entre l'épicentre et le foyer

Distance épacentrale : si S est une station sismique, on appelle distance épacentrale, la valeur exprimée en degrés de l'angle $EOS = \Delta$

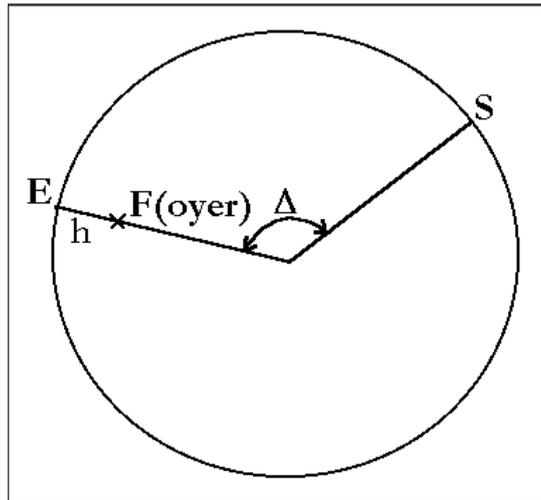


Figure V.2 : Angle de foyer

Un séisme est pratiquement toujours suivi d'une série de séismes moins forts que l'on appelle des **répliques**. Parfois, un gros séisme peut être précédé par des séismes moins importants quelques heures voire quelques jours avant. On parle alors de **précurseurs**.

V.1.6 - MÉTHODES D'ÉTUDE DES SÉISMES

V.1.6.1 - APPROCHE HISTORIQUE

Études **macrosismiques** : **description qualitative** faisant intervenir des lois de corrélation entre plusieurs paramètres : intensité, paramètres focaux, paramètres de mouvement du sol

V.1.6.2 - APPROCHE INSTRUMENTALE : SISMOMETRIE

Études des enregistrements instrumentaux : description quantitative

Sismographe (ou sismomètre) : appareil enregistrant les mouvements du sol associés au phénomène sismique. Il est constitué d'un capteur, d'un transducteur qui convertit le mouvement du sol en quelque chose de mesurable (courant électrique), un amplificateur, un enregistreur et une base temporelle.

Les mouvements du sol sont très variables en amplitude et en période selon le type de la source sismique, la distance épacentrale et la nature de l'onde sismique. Ces mouvements peuvent être décomposés en une somme de mouvements sinusoïdaux d'amplitudes et périodes différentes.

QUELQUES PÉRIODES CARACTÉRISTIQUES

| PERIODES CARACTERISTIQUES | PHENOMENE CORRESPONDANT |
|--|--|
| $T < 0,01 \text{ s}$ | vibrations industrielles (machines,...) |
| $0,01 \text{ s} < T < 0,1 \text{ s}$ | agitation industrielle et urbaine - explosions proches à moins de 200 km de distance |
| $0,1 \text{ s} < T < 1 \text{ s}$ | explosions lointaines, séismes proches |
| $1 \text{ s} < T < 10 \text{ s}$ | agitation microsismique (phénomènes météorologiques) ondes P et S des séismes |
| $10 \text{ s} < T < 100 \text{ s}$ | ondes de surface directes |
| $100 \text{ s} < T < 1\ 000 \text{ s}$ | retour des ondes de surface ondes du manteau |

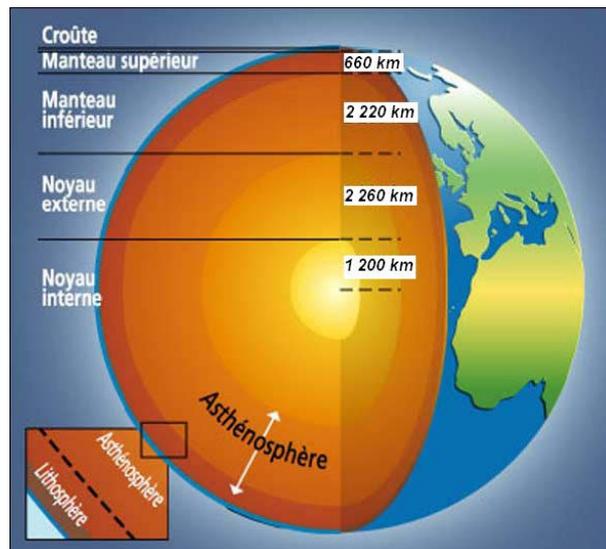


Figure V.3 : structure interne du globe

QU'EST CE QU'UN SÉISME ?

> Fracturation des roches

- en profondeur

➤ Le long d'une faille

> Libération soudaine d'énergie

- propagation d'ondes sismiques

- vibration du sol en surface

V.1.7 - COMMENT SE PRODUISENT LES SÉISMES ?

Mouvement des plaques tectoniques

- mouvement régulier (mais non continu)
- quelques mm à quelques cm/an

Mouvement des failles

- bloqué pendant des années
- accumulation de contraintes
- relaxation de ces contraintes
- rupture brutale

Quand ?

Contraintes au sein des roches > résistance au cisaillement

Phénomène

- rupture brutale
- émission d'ondes élastiques

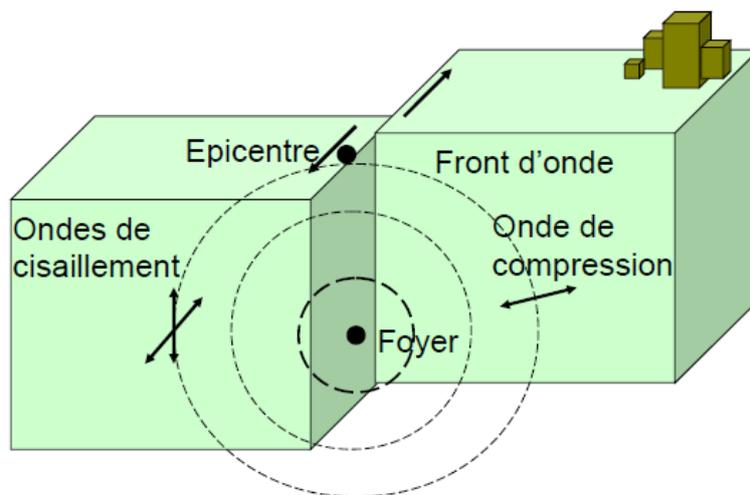


Figure V.4 : Pourquoi se produisent les séismes ?

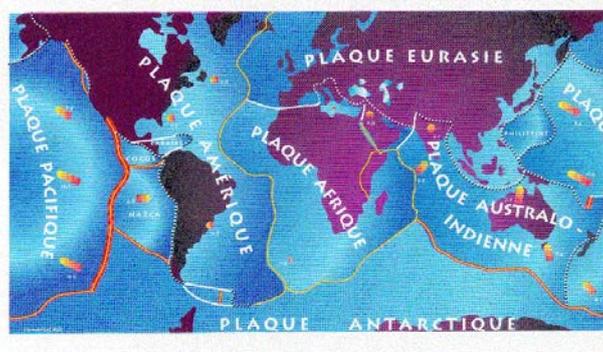


Figure V.5 : La tectonique des plaques permet de décrire les différentes zones sismiques

V.1.8 - RÈGLES DE CALCUL

Choix de la méthode de calcul

Le calcul des forces sismiques peut être mené suivant trois méthodes :

- Par la méthode statique équivalente (conditions d'utilisation)
- Par la méthode d'analyse modale spectrale

La méthode d'analyse modale spectrale peut être utilisée dans tous les cas, et en particulier, dans le cas où la méthode statique équivalente n'est pas permise.

- Par la méthode d'analyse dynamique par accélérogrammes

La méthode d'analyse dynamique par accélérogrammes peut être utilisée au cas par cas par un personnel qualifié, ayant justifié auparavant les choix des séismes de calcul et des lois de comportement utilisées ainsi que la méthode d'interprétation des résultats et les critères de sécurité à satisfaire.

V.1.8.1 - - La méthode statique équivalente

Le règlement parasismique algérien permet sous certaines conditions (ci-dessous) de calculer la structure par une méthode pseudo-dynamique qui consiste à considérer la structure comme soumise à un effort tranchant V à sa base, la valeur de cet effort tranchant étant fonction de cinq paramètres (on va les voir par la suite).

La méthode statique équivalente peut être utilisée dans les conditions suivantes :

a) Le bâtiment ou bloc étudié, satisfaisait aux conditions de régularité en plan et en élévation prescrites au chapitre III, paragraphe 3.5 avec une hauteur au plus égale à 65m en zones I et IIa et à 30m en zones IIb et III.

b) Le bâtiment ou bloc étudié présente une configuration irrégulière tout en respectant, outre les conditions de hauteur énoncées en a), les conditions complémentaires suivantes :

Zone I : tous groupes

Zone IIa : groupe d'usage 3

- groupe d'usage 2, si la hauteur est inférieure ou égale à 7 niveaux ou 23m.
- groupe d'usage 1B, si la hauteur est inférieure ou égale à 5 niveaux ou 17m.
- groupe d'usage 1A, si la hauteur est inférieure ou égale à 3 niveaux ou 10m.

Zone IIb et III :

- groupes d'usage 3 et 2, si hauteur est inférieure ou égale à 5 niveaux ou 17m.
- groupe d'usage 1B, si la hauteur est inférieure ou égale à 3 niveaux ou 10m.
- groupe d'usage 1A, si la hauteur est inférieure ou égale à 2 niveaux ou 08m.

Le principe de la Méthode Statique Equivalente

Les forces réelles dynamiques qui se développent dans la construction sont remplacées par un système de forces statiques fictives dont les effets sont considérés équivalents à ceux de l'action sismique.

Le mouvement du sol peut se faire dans une direction quelconque dans le plan horizontal. Les forces sismiques horizontales équivalentes seront considérées appliquées successivement suivant deux directions orthogonales caractéristiques choisies par le projeteur. Dans le cas général, ces deux directions sont les axes principaux du plan horizontal de la structure.

Calcul de la force sismique totale.

$$V = \frac{A \cdot D \cdot Q}{R} W$$

- A : coefficient d'accélération de zone

Représente l'accélération du sol et dépend de l'accélération maximale possible de la région, de la période de vie de la structure et du niveau de risque que l'on veut avoir.

Le coefficient d'accélération de zone A est donné par le tableau 4.1 suivant la zone sismique et le groupe d'usage du bâtiment.

Tableau 4.1. : Coefficient d'accélération de zone A.

| Groupe | Zone | | |
|--------|------|------|------|
| | I | II | III |
| 1A | 0,12 | 0,25 | 0,35 |
| 1B | 0,10 | 0,20 | 0,30 |
| 2 | 0,08 | 0,15 | 0,25 |
| 3 | 0,05 | 0,10 | 0,15 |

- D : facteur d'amplification dynamique moyen, fonction de la catégorie de site, du facteur de correction d'amortissement (η) et de la période fondamentale de la structure (T).

$$D = \begin{cases} 2.5\eta & 0 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(T_2/T)^{\frac{2}{3}} & T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5\eta(T_2/3.0)^{\frac{2}{3}}(3.0/T)^{\frac{5}{3}} & T \geq 3.0s \end{cases} \quad (4.2)$$

• T_2 période caractéristique, associée à la catégorie du site et donnée par le tableau 4.2

Tableau 4.2 : Valeurs de T_1 et T_2

| Site | S ₁ | S ₂ | S ₃ | S ₄ |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $T_{1(sec)}$ | 0,15 | 0,15 | 0,15 | 0,15 |
| $T_{2(sec)}$ | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,70 |

• η : facteur de correction d'amortissement donné par la formule :

$$\eta = \sqrt{7/(2 + \xi)} \geq 0.7 \quad (4.3)$$

• ξ (%) est le pourcentage d'amortissement critique fonction du matériau constitutif, du type de structure et de l'importance des remplissages.

Quant $\xi = 5\%$, on a $\eta = 1$.

Tableau 4.7: Valeurs de ξ (%)

| Remplissage | Portiques | | Voiles ou murs |
|-------------|------------|-------|-----------------------|
| | Béton armé | Acier | Béton armé/maçonnerie |
| Léger | 6 | 4 | 10 |
| Dense | 7 | 5 | |

Le facteur D est par ailleurs donné sous forme graphique à la figure 4.1 pour un amortissement $\xi = 5\%$.

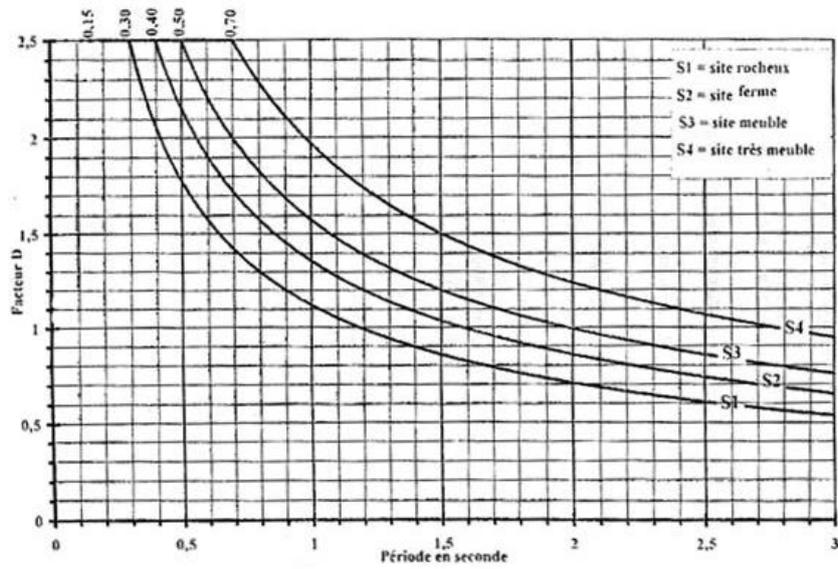


Figure V.6 : Facteur d'amplification dynamique moyen D ($\zeta=5\%$)

R : coefficient de comportement global de la structure.

Sa valeur unique est donnée par le tableau 4.3 en fonction du système de contreventement tel que défini en 3.4 (classification des systèmes de contreventement).

En cas d'utilisation de systèmes de contreventement différents dans les deux directions considérées il y a lieu d'adopter pour le coefficient R la valeur la plus petite.

Tableau 4.3 : valeurs du coefficient de comportement R

| Cat | Description du système de contreventement (voir chapitre III § 3.4) | Valeur de R |
|----------|--|-------------|
| A | <u>Béton armé</u> | |
| 1a | Portiques autostables sans remplissages en maçonnerie rigide | 5 |
| 1b | Portiques autostables avec remplissages en maçonnerie rigide | 3,5 |
| 2 | Voiles porteurs | 3,5 |
| 3 | Noyau | 3,5 |
| 4a | Mixte portiques/voiles avec interaction | 5 |
| 4b | Portiques contreventés par des voiles | 4 |
| 5 | Console verticale à masses réparties | 2 |
| 6 | Pendule inverse | 2 |
| B | <u>Acier</u> | |
| 7 | Portiques autostables ductiles | 6 |
| 8 | Portiques autostables ordinaires | 4 |
| 9a | Ossature contreventée par palées triangulées en X | 4 |
| 9b | Ossature contreventée par palées triangulées en V | 3 |
| 10a | Mixte portiques/palées triangulées en X | 5 |
| 10b | Mixte portiques/palées triangulées en V | 4 |
| 11 | Portiques en console verticale | 2 |
| C | <u>Maçonnerie</u> | |
| 12 | Maçonnerie porteuse chaînée | 2,5 |
| D | <u>Autres systèmes</u> | |
| 13 | Ossature métallique contreventée par diaphragme | 2 |
| 14 | Ossature métallique contreventée par noyau en béton armé | 3 |
| 15 | Ossature métallique contreventée par voiles en béton armé | 3,5 |
| 16 | Ossature métallique avec contreventement mixte comportant un noyau en béton armé et palées ou portiques métalliques en façades | 4 |
| 17 | Systèmes comportant des transparences (étages souples) | 2 |

- Q : facteur de qualité

Ce facteur exprime le niveau de confiance de la valeur de l'accélération de dommage A_D que l'on a prise dans le calcul, car pour une structure donnée la déformation Δ_D liée à A_D est aléatoire pour un événement sismique donné et ce facteur Q est essentiellement fonction des qualités de la structure.

Le facteur de qualité de la structure est fonction de :

- La redondance et de la géométrie des éléments qui la constituent
- La régularité en plan et en élévation
- La qualité du contrôle de la construction
- La qualité du contrôle des matériaux

La valeur de Q est déterminée par la formule :

$$Q = 1 + \sum_1^5 P_q \quad (4-4)$$

P_q est la pénalité à retenir selon que le critère de qualité q " est satisfait ou non".

Sa valeur est donnée au tableau 4.4

Tableau 4.4.: valeurs des pénalités P_q

| Critère q » | P _q | |
|---|----------------|-----------|
| | Observé | N/observé |
| 1. Conditions minimales sur les files de contreventement | 0 | 0,05 |
| 2. Redondance en plan | 0 | 0,05 |
| 3. Régularité en plan | 0 | 0,05 |
| 4. Régularité en élévation | 0 | 0,05 |
| 5. Contrôle de la qualité des matériaux | 0 | 0,05 |
| 6. Contrôle de la qualité de l'exécution | 0 | 0,10 |

Les critères de qualité "q" à vérifier sont :

1. Conditions minimales sur les files de contreventement

- **système de portiques** : chaque file de portique doit comporter à tous les niveaux, au moins trois (03) travées dont le rapport des portées n'excède pas 1,5. Les travées de portique peuvent être constituées de voiles de contreventement.
- **système de voiles** : chaque file de voiles doit comporter à tous les niveaux, au moins un (01) trumeau ayant un rapport "hauteur d'étage sur largeur" inférieur ou égal à 0,67 ou bien deux (02) trumeaux ayant un rapport "hauteur d'étage sur largeur" inférieur ou égal à 1,0. Ces trumeaux doivent s'élever sur toute la hauteur de l'étage et ne doivent avoir aucune ouverture ou perforation qui puisse réduire de manière significative leur résistance ou leur rigidité.

2. Redondance en plan

Chaque étage devra avoir, en plan, au moins quatre (04) files de portiques et/ou de voiles dans la direction des forces latérales appliquées.

Ces files de contreventement devront être disposées symétriquement autant que possible avec un rapport entre valeurs maximale et minimale d'espacement ne dépassant pas 1,5.

3. Régularité en plan

La structure est classée régulière en plan. (cf 3.5 1a : classification des ouvrages selon leur configuration en plan).

4. Régularité en élévation

La structure est classée régulière en élévation. (cf 3.5 1b : classification des ouvrages selon leur configuration en élévation).

5. Contrôle de la qualité des matériaux

Des essais systématiques sur les matériaux mis en œuvre doivent être réalisés par l'entreprise.

6. Contrôle de la qualité de l'exécution

Il est prévu contractuellement une mission de suivi des travaux sur chantier. Cette mission doit comprendre notamment une supervision des essais effectués sur les matériaux.

W : poids total de la structure

W est égal à la somme des poids W_i , calculés à chaque niveau (i)

$$W = \sum_{i=1}^n W_i$$

Avec

$$W_i = W_{Gi} + \beta W_{Qi} \quad (4-5)$$

® W_{Gi} : poids dû aux charges permanentes et à celles des équipements fixes éventuels, solidaires de la structure

® W_{Qi} : charges d'exploitation

® β : coefficient de pondération, fonction de la nature et de la durée de la charge d'exploitation et donné par le tableau 4.5.

Tableau 4.5 : valeurs du coefficient de pondération β

| Cas | Type d'ouvrage | β |
|-----|--|---------|
| 1 | Bâtiments d'habitation, bureaux ou assimilés | 0,20 |
| 2 | Bâtiments recevant du public temporairement : - Salles d'exposition, de sport, lieux de culte, salles de réunions avec places debout. | 0,30 |
| | - salles de classes, restaurants, dortoirs, salles de réunions avec places assises | 0,40 |
| 3 | Entrepôts, hangars | 0,50 |
| 4 | Archives, bibliothèques, réservoirs et ouvrages assimilés | 1,00 |
| 5 | Autres locaux non visés ci-dessus | 0,60 |

Estimation de la période fondamentale de la structure

1. La valeur de la période fondamentale (T) de la structure peut être estimée à partir de formules empiriques ou calculée par des méthodes analytiques ou numériques.

2. La formule empirique à utiliser selon les cas est la suivante :

$$T = C_T h_N^{3/4} \quad (4-6)$$

- ❑ h_N : hauteur mesurée en mètres à partir de la base de la structure jusqu'au dernier niveau (N).
- ❑ C_T : coefficient, fonction du système de contreventement, du type de remplissage et donné par le tableau 4.6.

Tableau 4.6 : valeurs du coefficient C_T

| Cas n° | Système de contreventement | C_T |
|--------|---|-------|
| 1 | Portiques autostables en béton armé sans remplissage en maçonnerie | 0,075 |
| 2 | Portiques autostables en acier sans remplissage en maçonnerie | 0,085 |
| 3 | Portiques autostables en béton armé ou en acier avec remplissage en maçonnerie | 0,050 |
| 4 | Contreventement assuré partiellement ou totalement par des voiles en béton armé, des palées triangulées et des murs en maçonnerie | 0,050 |

Dans les cas n° 3 et 4, on peut également utiliser aussi la formule

$$\mathbf{T} = 0.09 \mathbf{h}_N / \sqrt{\mathbf{D}} \quad (4.7)$$

D est la dimension du bâtiment mesurée à sa base dans la direction de calcul considérée.

Dans ce cas de figure il y a lieu de retenir dans chaque directions considérée la plus petite des deux valeurs données respectivement par (4.6) et (4.7)

2. La valeur de T peut être calculée avec la formule de Rayleigh ou une version simplifiée de cette formule :

a)

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\sum_i^n W_i \delta_i \right) / g \left(\sum_i^n f_i \delta_i \right)} \quad (4-8)$$

• f_i : système de forces horizontales, distribuées selon les formules de répartition de V suivant la verticale.

• δ_i : flèches horizontales dues aux forces f_i calculées à partir d'un modèle élastique linéaire de la structure qui prend en compte tous les éléments participant à sa rigidité.

b)

$$\mathbf{T} = 2 \sqrt{\delta_N} \quad (4-9)$$

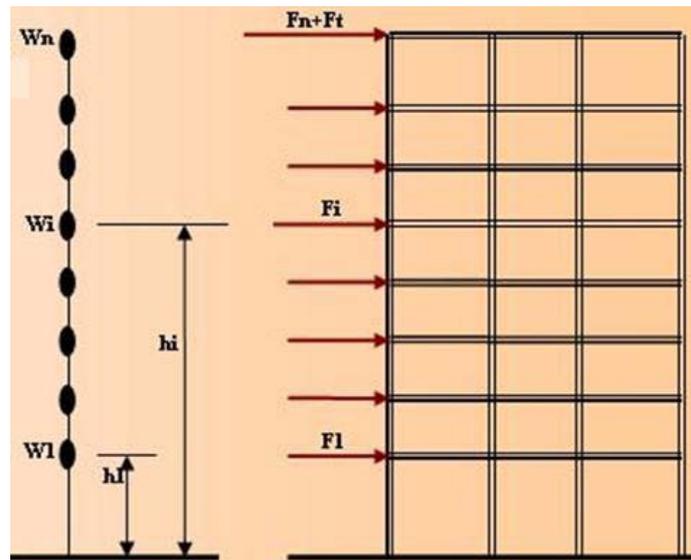
Version simplifiée de la formule de Rayleigh.

- δN : flèche horizontale au sommet du bâtiment, mesurée en mètres, due aux forces gravitaires appliquées horizontalement.

4. Les valeurs de T , calculées à partir des formules de Rayleigh ou de méthodes numériques ne doivent pas dépasser celles estimées à partir des formules empiriques appropriées de plus de 30%.

Distribution de la résultante des forces sismiques selon la hauteur

La résultante des forces sismiques à la base V doit être distribuée sur la hauteur de la structure selon les formules suivantes :



$$V = F_t + \sum_{i=1}^{n\text{-étage}} F_i \quad (4 - 10)$$

La force concentrée F_t au sommet de la structure permet de tenir compte de l'influence des modes supérieurs de vibration et déterminée par :

$$F_t = \begin{cases} 0,07 \cdot V & \text{si } T > 0,7 \text{ s} \\ 0 & \text{si } T \leq 0,7 \text{ s} \end{cases}$$

$$F_i = (V - F_t) \cdot \frac{W_i h_i}{\sum_{i=1}^{n-\text{étage}} W_i h_i} \quad (4-11)$$

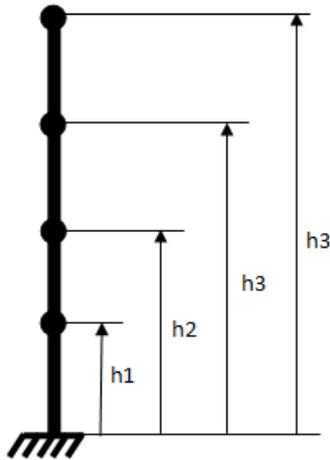


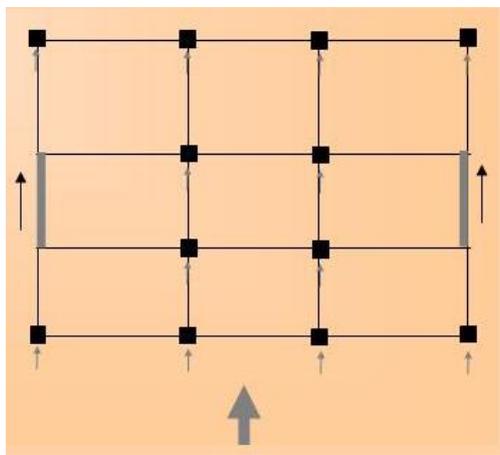
Figure V.7 : Disposition des masses concentrées

Distribution horizontale des forces sismiques

L'effort tranchant au niveau de l'étage k :

$$V_k = F_t + \sum_{i=k}^n F_i \quad (4-12)$$

Dans le cas de structures comportant des planchers rigides dans leur plan, elle est distribuée aux éléments verticaux de contreventement proportionnellement à leurs rigidités relatives.



$$V_i = V \cdot \frac{K_i}{\sum K_i} = V \cdot \frac{I_i}{\sum I_i}$$

V.1.8.2 - MÉTHODE DYNAMIQUE MODALE SPECTRALE

Principe :

Par cette méthode, il est recherché pour chaque mode de vibration, le maximum des effets engendrés dans la structure par les forces sismiques représentées par un spectre de réponse de calcul. Ces effets sont par la suite combinés pour obtenir la réponse de la structure.

Hypothèses à respecter

- 1) Les masses sont concentrées au niveau des nœuds principaux.
- 2) Seule les déplacements horizontaux sont prises en compte.
- 3) Les planchers et les fondations doivent être rigides dans leurs plans.
- 4) Les nombres des modes à prendre en compte est tel que la somme des coefficients de participation modale soit au moins égale à 90% ($\sum \alpha_i > \text{ou} = 90\%$).

Procédure de calcul

- a) Détermination des caractéristiques dynamiques de la structure ω est :

$$\{\phi^{(i)}\}$$

$$([k] - \omega_i^2 [M])\{\phi^{(i)}\} = \{0\}$$

- b) Détermination des coefficients de participation modale

$$\alpha_i = \frac{(\sum_{k=1}^n w_k \cdot \phi_k^{(i)})^2}{\sum_{k=1}^n w_k \cdot (\phi_k^{(i)})^2} \frac{1}{\sum_{k=1}^n w_k}$$

$\Phi_k(i)$: forme propre du ième mode au kème étage.

w_k : poids de l'étage k.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_i = 1$$

c) Détermination du facteur d'amplification dynamique :

Moyennant le spectre de réponse de la courbe (figure 4.1) RPA 99, on affecte à chaque période T_i une valeur du facteur d'amplification dynamique moyen D_i .

où

L'action sismique est représentée par le spectre de calcul suivant :

$$\frac{S_a}{g} = \begin{cases} 1.25A \left(1 + \frac{T}{T_1} \left(2.5\eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{Q}{R} \right) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{Q}{R} \right) \left(\frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left(\frac{3}{T} \right)^{5/3} \left(\frac{Q}{R} \right) & T > 3.0s \end{cases} \quad (4.13)$$

A : coefficient d'accélération de zone (tableau 4.1)

η : facteur de correction d'amortissement (quant l'amortissement est différent de 5%).

$$\eta = \sqrt{7/2 + \xi} \geq 0.7 \quad (4.3)$$

ξ : pourcentage d'amortissement critique (tableau 4.2)

R : coefficient de comportement de la structure (tableau 4.3)

T_1, T_2 : périodes caractéristiques associées à la catégorie de site (tableau 4.7)

Tableau 4.7 : Valeurs de T_1 et T_2

| Site | S ₁ | S ₂ | S ₃ | S ₄ |
|---------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| T₁(sec) | 0,15 | 0,15 | 0,15 | 0,15 |
| T₂(sec) | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,70 |

Q : facteur de qualité (tableau 4.4).

d) Calcul du coefficient de distribution pour chaque niveau :

$$\gamma_{ik} = \phi_k^{(i)} \frac{\sum_{k=1}^n w_k \cdot \phi_k^{(i)}}{\sum_{k=1}^n w_k \cdot (\phi_k^{(i)})^2}$$

$\Phi_k(i)$: forme propre du $i^{\text{ème}}$ mode au $k^{\text{ème}}$ étage.

w_k : poids de l'étage k .

e) Evaluation de la force sismique appliquée au niveau k :

$$F_{ik} = \frac{A \cdot Q}{R} D_i \cdot \gamma_{ik} \cdot W_k$$

f) Détermination de la résultante sismique au niveau k :

$$\bar{F}_k = \sqrt{\sum F_{ik}^2}$$

g) Evaluation de la valeur de l'effort sismique à la base pour le mode i :

$$V_i = \sum_{k=1}^n F_{ik}$$

Il faut vérifier la résultante des forces sismiques à la base obtenue par combinaison des valeurs modales est supérieure à 80 % de la résultante des forces sismiques déterminées par la MSE. Donc est ce que la vérification est satisfaite ou pas.

Nombre de modes à considérer

a) Pour les structures représentées par des modèles plans dans deux directions orthogonales, le nombre de modes de vibration à retenir dans chacune des deux directions d'excitation doit être tel que :

- la somme des masses modales effectives pour les modes retenus soit égale à 90 % au moins de la masse totale de la structure.
- ou que tous les modes ayant une masse modale effective supérieure à 5% de la masse totale de la structure soient retenus pour la détermination de la réponse totale de la structure.

Le minimum de modes à retenir est de trois (03) dans chaque direction considérée.

b) Dans le cas où les conditions décrites ci-dessus ne peuvent pas être satisfaites à cause de l'influence importante des modes de torsion, le nombre minimal de modes (K) à retenir doit être tel que :

$$K \geq 3 \sqrt{N} \quad \text{et} \quad T_K \leq 0.20 \text{ sec} \quad (4-14)$$

où : N est le nombre de niveaux au dessus du sol et T_K la période du mode K.

Combinaison des réponses modales

a) Les réponses de deux modes de vibration i et j de périodes T_i , T_j et d'amortissement ξ_i , ξ_j sont considérées comme indépendantes si le rapport $r = T_i / T_j$ ($T_i / < ou = T_j$) .vérifie :

$$r \leq 10 / (10 + \sqrt{\xi_i \xi_j}) \quad (4-15)$$

b) Dans le cas où toutes les réponses modales retenues sont indépendantes les unes des autres, la réponse totale est donnée par :

$$E = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^k E_i^2} \quad (4-16)$$

E : effet de l'action sismique considéré

E_i : valeur modale de E selon le mode « i »

K : nombre de modes retenus

c) Dans le cas où deux réponses modales ne sont pas indépendantes ; E₁ et E₂ par exemple, la réponse totale est donnée par :

$$\sqrt{(|E_1| + |E_2|)^2 + \sum_{i=3}^K E_i^2} \quad (4-17)$$

Références bibliographiques

- [20]. Jimin He and Zhi-Fang Fu : *Modal Analysis*, Butterworth-Heinemann Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP 225 Wildwood Avenue, Woburn, MA 01801-2041.
- [20]. RayW. Clough and Joseph Penzien : *DYNAMICS OF STRUCTURES*, 1995 University Ave. Berkeley, CA 94704 USA.
- [20]. Alain CAPRA and Victor DAVIDOVICI : *calcul dynamique des structures en zone sismique*, 61, boulevard Saint Germain, 75005 Paris, 1982 Edition EYROLLES.
- [20]. Douglas Thorby, *Structural Dynamics and Vibration in Practice*, Butterworth-Heinemann is an imprint of Elsevier Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP, UK 30 Corporate Drive, Suite 400, Burlington, MA 01803, USA
- [18]. Jean Pierre Poirier, *Les profondeurs de la Terre*, Masson, 1991. Ouvrage général sur l'intérieur de la Terre décrivant les modèles de Terre sismologique, minéralogique, thermique et dynamique. Il s'adresse à un public de lecteurs non spécialistes ayant une culture scientifique.
- [18].Anny Cazenave et Kurt Feigl, *Formes et mouvements de la Terre*, Belin, CNRS Editions, 1994. Cet ouvrage d'intérêt général comporte deux sections sur la sismologie de surface (déformation, mouvement, contrainte).
- [18]. Davenport, A. G., 1982 : "The interaction of wind and structures" in *Engineering Meteorology* (E. Plate editor), chap.12, ELSEVIER SCIENTIFIC PUBLISHING COMPAGNY, 557-572.
- [19]. Normes concernant les charges, la mise en service et la surveillance des constructions, Société Suisse des ingénieurs et des architectes (SIA 160, édition 1970).
- [31]. Singh L., N. P. Jones, R.H. Scanlan, O. Lorendeaux, 1996 : Identification of lateral flutter derivatives of bridge decks. *JWEIA* ,10, pp. 81-89.
- [20]. Minimum design loads for buildings and others structures, American National Standard (ANSI A58.1-1982), (revision of ANSI A58.1-1972).