

UNIVERSITÉ DE BOUMERDÈS

FACULTÉ DES HYDROCARBURES ET DE LA CHIMIE

Département Automatisation des Procédés Industriels et Électrification

Laboratoire : Automatique appliquée. **Axe** : Process control.

Mémoire de Magister

Spécialité : Génie électrique. **Option** : Automatique appliquée et traitement du signal.

Présenté par :

Ahmed MAIDI

THÈME

ANALYSE DES INTERACTIONS DANS LES SYSTÈMES À GRANDE ÉCHELLE :
APPLICATION À LA COMMANDE MULTIBOUCLE DES SYSTÈMES
FORTEMENT COUPLÉS

Soutenu publiquement le : 28 / 02 / 2001.

Devant le jury composé de :

| | | | |
|---------------------|-----------------------------|-------------------|--------------------------------|
| Président : | Kamel HARICHE | Professeur | Université de Boumerdès |
| Rapporteur : | Abdelmadjid KHELASSI | C.C | Université de Boumerdès |
| Examineurs : | Ali BELMEHDI | M.C | Université de Béjaia |
| | Ferhat LAAOUAD | M.C | Université de Boumerdès |
| | Abdelhay BENCHALLA | C.C | Université de Boumerdès |

Boumerdès 2001

DEDICACES

*Je dédie ce mémoire à la mémoire de ma grand-mère,
à mes chers parents, à tous les membres
de ma famille en particulier **IDIR, LOUNES Et ANIS.***

Ce mémoire est dédié à tous mes amis (ies).

Pour tous ceux qui se sacrifient pour le bien de l'humanité

Et pour tous ceux qui luttent pour les causes justes,

Je dédie ce modeste travail.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire d'Automatique Appliquée (axe de recherche : *Process Control*) de la Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie de l'université de Boumerdès sous la direction de Monsieur **A. KHELASSI** chef de département automatisation et électrification des procédés industriels et chargé de cours à l'université de Boumerdès.

Je tiens à lui exprimer ma gratitude et mes remerciements pour l'aide qu'il m'a apportée par ses conseils éclairés tout au long de ce travail qu'il soit assuré de ma sincère reconnaissance. Je tiens aussi à lui exprimer ma gratitude pour m'avoir orienter dans cet axe de recherche en me proposant ce pertinent sujet.

Je tiens à remercier Monsieur **K. HARICHE**, Professeur à l'université de Boumerdès, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Que Monsieur **A. BELMEHDI**, Maître de Conférences à l'université de Béjaia, et à Monsieur **F. LAAOUAD**, Maître de Conférences à l'université de Boumerdès, ainsi que Monsieur **A. BENHALLA**, Chargé de Cours à l'université de Boumerdès, veuillent trouver ici l'assurance de ma sincère reconnaissance pour avoir accepté de faire partie du jury.

J'exprime ma reconnaissance à : **M. DAHMAS, I. RABAH, et A. AZZRAR**, enseignants au niveau du département of electrical & electronic engineering de l'université de Boumerdès.

J'exprime également ma reconnaissance à mes collègues de la post-graduation : **C. BOUYAHIAOUI, H. HABBI, A. KOUADRI, A. KHELDOUN, D. KHOUDJA, N. KABACHE, R. BRADAI, T. LECHANI, R. ZAMOUM et F. HADDADOU** sans oublier mon cher collègue **N. DJERFFOUR** pour l'aide et le soutien qu'ils m'ont apportés.

J'exprime ma reconnaissance à **A. GACEMI et S. TASSINE** je les remercie infiniment pour les efforts déplorés pour la réussite de la soutenance.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé et soutenu au long de mes études.



SOMMAIRE

*“La représentation, produit de l'activité du sujet,
se constitue sur la base des informations
qu'il reçoit et qu'il élabore
à partir de sa perception du monde,
d'autrui et de lui-même.”*

RENÉ KAËS

Introduction générale

| | | |
|---|----------------------------|---|
| 1 | Préliminaires | 1 |
| 2 | Position du problème | 3 |
| 3 | Présentation des chapitres | 5 |

1 Généralités sur les systèmes multivariables

| | | |
|------|---------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Introduction | 7 |
| 1.2 | Définition d'un système multivariable | 7 |
| 1.3 | Représentation des systèmes multivariables | 8 |
| 1.4 | Notions de matrice de transfert et de représentation d'état | 9 |
| 1.5 | Passage d'une matrice de transfert à la représentation d'état | 12 |
| 1.6 | Passage de la représentation d'état à la matrice de transfert | 18 |
| 1.7 | Graphe de fluence | 19 |
| 1.8 | Représentation fréquentielle des fonctions de transfert | 23 |
| 1.9 | Commande multiboucle d'un système multivariable | 24 |
| 1.10 | Conclusion | 27 |

2 Analyse des interactions dans les systèmes à grande échelle

| | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Introduction | 28 |
| 2.2 | Définition de l'interaction dans un système à grande échelle | 28 |
| 2.3 | Explication du phénomène d'interaction | 29 |
| 2.4 | Analyse des interactions dans les systèmes à grande échelle | 30 |
| 2.4.1 | Méthodes d'analyse directe | 31 |
| 2.4.1.1 | Méthode utilisant la matrice de transfert du système | 31 |
| 2.4.1.1.1 | Méthode de Quotient d'Interaction (IQ) | 31 |
| 2.4.1.1.2 | Matrice des Gains Relatifs (RGA) | 33 |
| 2.4.1.1.3 | Matrice des Gains Relatifs Dynamique (RDGA) | 36 |
| 2.4.1.1.4 | Matrice des Gains Dynamiques Moyens (ADGA) | 37 |

| | | |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.4.1.1.5 | Matrice Dynamique Relative (RDA) | 38 |
| 2.4.1.1.6 | Méthodes basées sur le lieu de Nyquist (DNA, INA) | 39 |
| 2.4.1.1.7 | Méthode IMC | 41 |
| 2.4.1.1.8 | Matrice des Potentiels d'Interaction (IPM) | 47 |
| 2.4.1.2 | Méthode utilisant la représentation d'état | 49 |
| 2.4.1.2.1 | Matrice des Gains Directs d'Interactions Statique (DGM(0)) | 51 |
| 2.4.1.2.2 | Matrice des Gains Directs d'Interactions Dynamique (DGM(ω)) | 53 |
| 2.4.1.2.3 | Matrice d'Interactions Dynamique Directe (DDM) | 54 |
| 2.4.1.2.4 | Matrice d'Effets Directs (SIA) | 55 |
| 2.4.1.2.5 | Matrice des Gains Dynamiques Relatifs (DRGA) | 57 |
| 2.4.2 | Méthode d'analyse indirecte | 59 |
| 2.4.2.1 | Matrice des Amplitudes Relatives Dynamiques (DRMA) | 59 |
| 2.4.2.2 | Matrice des Gains Dynamiques Relatifs Généralisés (GDRG) | 61 |
| 2.5 | Système à grande échelle à matrice de transfert triangulaire | 63 |
| 2.6 | Conclusion | 64 |

3 Analyse des interactions dans un système par décomposition en sous-systèmes

| | | |
|---------|-----------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 | Introduction | 67 |
| 3.2 | Méthode d'analyse des interactions par décomposition du système | 68 |
| 3.2.1 | Principe d'analyse des interactions par décomposition | 68 |
| 3.2.2 | Méthode de décomposition en sous-systèmes à dominance diagonale | 69 |
| 3.2.2.1 | Décomposition en sous-systèmes à dominance diagonale | 69 |
| 3.2.2.2 | Analyse des interactions entre les sous-systèmes | 70 |
| 3.2.2.3 | Calcul de la matrice $\eta_i(\omega)$ | 70 |
| 3.2.2.4 | Interprétation de la matrice $\eta_i(\omega)$ | 73 |

| | | |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2.2.4.1 | Détermination des sous-systèmes affectant un sous-système $G_u(s)$ | 76 |
| 3.2.2.4.2 | Détermination des sous-systèmes affectés par un sous-système $G_u(s)$ | 77 |
| 3.2.2.5 | Exemples d'application | 79 |
| 3.2.3 | Méthode de décomposition en deux sous-systèmes carrés | 91 |
| 3.2.3.1 | Décomposition du système $G(s)$ en deux sous-systèmes carrés | 91 |
| 3.2.3.2 | Analyses des interactions entre les deux sous-systèmes | 92 |
| 3.2.3.3 | Exemples d'application | 94 |
| 3.3 | Méthodes de détermination de la configuration de commande | 101 |
| 3.3.1 | Méthode du graphe de fluence | 101 |
| 3.3.1.1 | Construction du graphe de fluence | 102 |
| 3.3.1.2 | Détermination de la configuration de commande | 102 |
| 3.3.1.3 | Exemples d'application | 102 |
| 3.3.2 | Méthode de la transmittance forte | 104 |
| 3.3.2.1 | Caractéristiques de la transmittance forte | 104 |
| 3.3.2.2 | Détermination de la configuration de commande | 104 |
| 3.3.2.3 | Exemples d'application | 109 |
| 3.4 | Conclusion | 111 |

4 Commande multivariable basée sur une méthode d'analyse des interactions

| | | |
|-------|--------------------------------------------------------|-----|
| 4.1 | Introduction | 113 |
| 4.2 | Description de la stratégie de commande proposée | 113 |
| 4.3 | Synthèse du correcteur de faibles interactions K | 115 |
| 4.4 | Exemples d'application | 118 |
| 4.4.1 | Exemple 1 : Détermination analytique du correcteur K | 119 |
| 4.4.2 | Exemple 2 : Détermination graphique du correcteur K | 129 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.4.3 Exemple 3 : Commande multiboucle d'un système multivariable non carré | 137 |
| 4.5 Conclusion | 145 |
| Conclusion générale | 146 |
| Annexes | |
| Annexe A : Calcul matriciel | 149 |
| Annexe B : Démonstrations des expressions des filtres $f_{L_i}^*(s)$ et $f_{C_i}^*(s)$ | 152 |
| Annexe C : Démonstrations des expressions de $I_{s_1 \rightarrow s_2}$ et $I_{s_2 \rightarrow s_1}$ | 155 |
| Annexe D : Synthèse d'un correcteur PID pour un système d'ordre élevé : Méthode de <i>A. J. Issaksson</i> et <i>S. F. Graebe</i> | 158 |
| Références | 163 |

ABREVIATIONS DES METHODES D'ANALYSE DES INTERACTIONS

| | |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------|
| IQ : | Méthode de Quotient d'Interaction. |
| RGA : | Matrice des Gains Relatifs. |
| RDGA : | Matrice des Gains Relatifs Dynamique. |
| ADGA : | Matrice des Gains Dynamiques Moyens. |
| RDA : | Matrice Dynamique Relative. |
| DNA : | Matrice Directe de Nyquist. |
| INA : | Matrice Inverse de Nyquist. |
| IMC : | Méthode de Modèle Interne. |
| IPM : | Matrice des Potentiels d'Interaction. |
| DGM(0) : | Matrice des Gains Directs d'Interactions Statique. |
| DGM(ω) : | Matrice des Gains Directs d'Interactions Dynamique. |
| DDM : | Matrice d'Interactions Dynamique Directe. |
| SIA : | Matrice d'Effets Directs. |
| DRGA : | Matrice des Gains Dynamiques Relatifs. |
| DRMA : | Matrice des Amplitudes Relatives Dynamiques. |
| GDRG : | Matrice des Gains Dynamiques Relatifs Généralisés. |



INTRODUCTION GÉNÉRALE

*“Si vous ne savez où vous allez, vous arriverez
probablement ailleurs.”*

R. F. MAGER

1 Préliminaires

La conception d'un système de commande adapté à un processus industriel multivariable ou, plus simplement, à un ensemble mécanique complexe, qu'il s'agisse d'un satellite, d'un réacteur, d'une colonne de distillation ou d'un générateur de vapeur, pose évidemment un certain nombre de problèmes. Parmi ceux-ci, le problème de la mise en équations, au sens large, c'est-à-dire non seulement la représentation du système à commander par un ensemble d'équations convenables, mais éventuellement la linéarisation de ces équations ou leur simplification par élimination des modes rapides stables [18]. Un autre problème est lié à la synthèse d'un système de commande, là encore, il n'est pas question d'étendre les techniques utilisées en monovariante, et la commande d'un système multivariable doit être envisagée d'une manière globale [19].

L'automatique offre un ensemble de méthodes pour la commande des systèmes multivariables (fig. 1) [19].

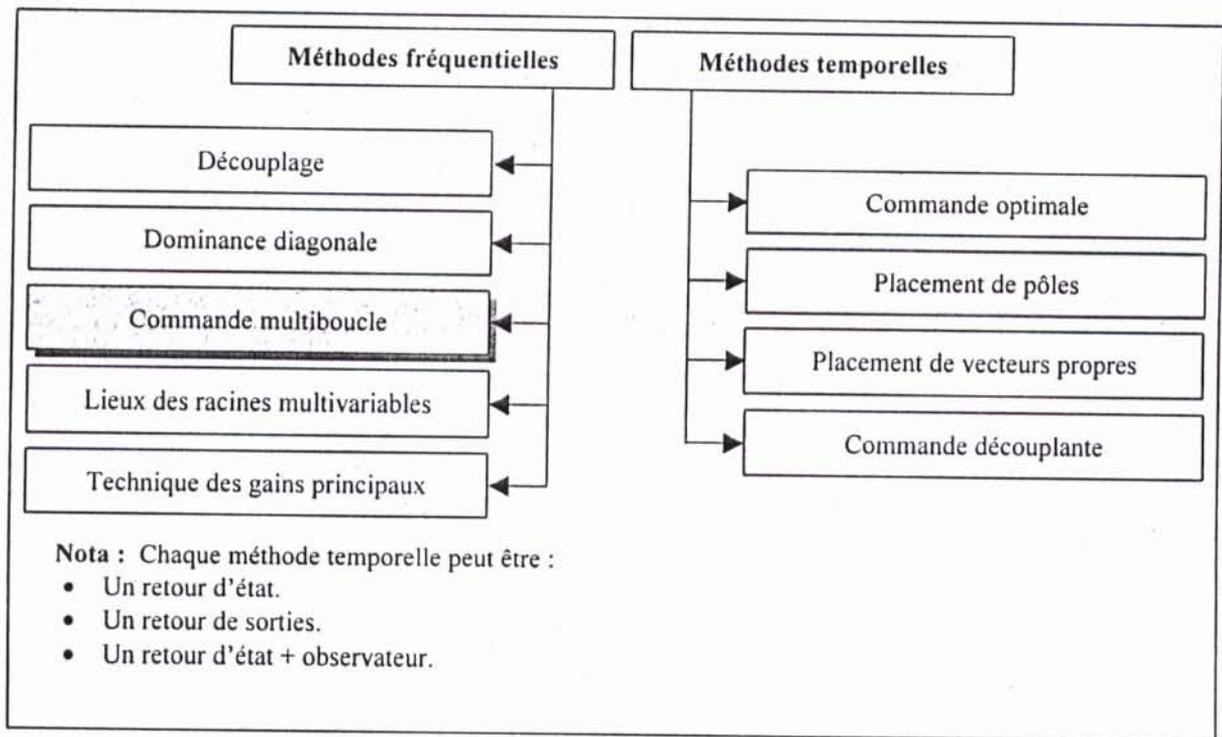


FIG. 1 : Commande des systèmes multivariables (classification des méthodes).

La méthode la plus usitée dans l'industrie pour la commande des processus multivariables est la troisième méthode fréquentielle, à savoir la commande multiboucle (méthode directe boucle par boucle). Elle consiste à créer autant de boucles de retour que de couples entrées-sorties [19], [40 – 42], [45]. Les méthodes fréquentielles ont été développées

principalement par les Anglo-saxons [46].

L'existence des interactions entre les variables d'entrées-sorties du système est la cause principale pour laquelle la synthèse et le fonctionnement du système en multiboucle, boucle par boucle, sont difficiles car un changement d'une variable d'entrée à pour conséquence des changements de plusieurs variables de sorties ; ce qui rend difficile le maintien des performances de chaque boucle. De plus, les performances d'une boucle de commande peuvent être fortement affectées par les paramètres des régulateurs des autres boucles [25], [32].

Dans le cadre général de la commande des systèmes multivariables une attention considérable a été accordée au concept d'analyse des interactions. Dans cette optique, on cherchera le plus souvent à compenser le système de sorte que :

- Chaque entrée affecte seulement une sortie ;
- La perturbation sur une sortie, les entrées étant nulles, n'affecte que cette seule sortie.

Dans la pratique un avantage manifeste du concept d'analyse des interactions est de maintenir certaines sorties du système constantes, alors que d'autres sont délibérément modifiées [18], [40 – 42]. Ces idées ont été appliquées à la conduite de générateurs de vapeur, où la température et la pression sont maintenues constantes, alors que le débit peut être varié à volonté [18].

La technique de commande multiboucle donne un niveau de performances acceptable dans la majorité des cas. La synthèse d'un système de commande multiboucle s'effectue en deux étapes [30] :

Étape 1. Détermination de la configuration de commande par la sélection des couples entrées-sorties (chaque entrée doit être bouclée avec une seule sortie bien déterminée, en introduisant un régulateur bien conçu).

Étape 2. Choix de la loi de commande et détermination des paramètres du régulateur pour chaque boucle assurant les performances désirées.

Dans la première étape, le choix de la configuration de commande adéquate, c'est-à-dire la configuration dont les interactions entre les boucles de commande résultantes sont très faibles, est dicté par l'utilisation d'une méthode d'analyse des interactions qui permet aussi d'évaluer le niveau d'interactions entre les variables du système [27], [30], [41], [45]. Plusieurs méthodes d'analyse des interactions existent dans la littérature, telle que la Matrice des Gains Relatifs (RGA), développée par Bristol, qui a bénéficiée d'une large utilisation

dans l'industrie [6], [21], [41], la Matrice Directe de Nyquist (DNA) [27], [42], Matrice des Effets Directs (SIA) [30],...

Au cours des vingt dernières années, des travaux de recherche sont axés sur le concept d'analyse des interactions en vue d'établir des méthodes d'analyse assurant une analyse fine et complète des interactions présentes dans un système, tout en déterminant la meilleure configuration de commande [2-3], [5], [23], [27]. Les méthodes développées permettent de cerner le problème d'interactions rencontré souvent dans les systèmes multivariables, de simplifier et de faciliter d'avantage la synthèse d'un système de commande multiboucle robuste. Notons que le problème de la détermination de la meilleure configuration de commande a été également approché algébriquement par Morari [43].

2 Position du problème

La figure 2 représente un système multivariable à deux entrées (u_1, u_2) et à deux sorties (y_1, y_2).

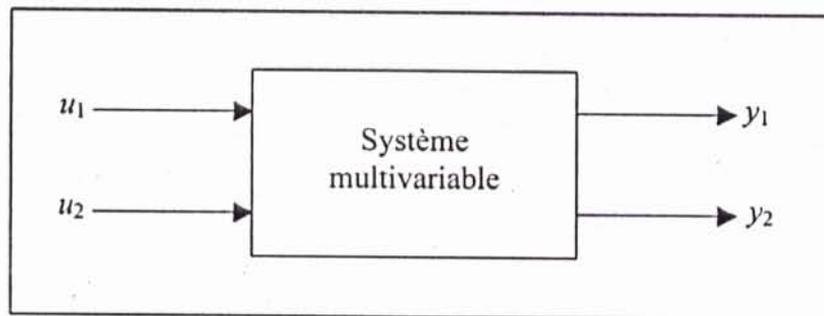


FIG. 2 : Système 2×2 .

Pour la commande multiboucle de ce système deux configurations de commande sont possibles :

- u_1 commande y_1 et u_2 commande y_2 , configuration désignée par $[u_1 - y_1]; [u_2 - y_2]$,
- u_1 commande y_2 et u_2 commande y_1 , configuration désignée par $[u_1 - y_2]; [u_2 - y_1]$.

Dans le cas général, pour un système à m entrées et m sorties, on aura $m!$ configurations de commande possibles, la question qui se pose est :

Comment déterminer ou choisir la meilleure configuration parmi les $m!$ configurations possibles ?

Pour la commande multiboucle d'un système, l'étape la plus importante est le choix de la

configuration de commande (les couples entrées-sorties). Cette dernière est déterminée en analysant les interactions présentes dans le système. Le choix porte sur la configuration dont le niveau d'interactions entre les différentes boucles de commande est très faible, tout en assurant la stabilité de chaque boucle et celle du système global (système en boucle fermée).

Malgré le succès de la méthode de la Matrice des Gains Relatifs (RGA) introduite par Bristol comme une méthode d'analyse des interactions et de choix de la configuration de commande pour une commande multiboucle, elle a ses limites ; ainsi les efforts sont focalisés pour développer d'autres méthodes plus efficaces. Les travaux de recherche réalisés dans ce domaine ont débouché sur un ensemble de méthodes puissantes donnant des résultats probants, permettant ainsi de choisir une configuration de commande convenable, tout en analysant les effets d'interactions existants entre les variables de commande et celles à commander du système.

Au regard de l'ensemble des méthodes existantes, deux grandes familles de méthodes d'analyse des interactions et de la détermination de la configuration de commande se dessinent progressivement : celle basée sur l'utilisation de la fonction de transfert et celle basée sur l'utilisation du modèle d'état du système.

En revanche, malgré l'efficacité des méthodes proposées, l'application de ces dernières pour des systèmes de grande dimension ($m \geq 4$) pose un problème de calcul, car la plupart des méthodes développées nécessitent des outils de représentation (graphe de fluence, représentation fréquentielle) susceptibles de complexifier l'analyse des interactions et la détermination de la configuration de commande. De plus ces méthodes sont caractérisées par un algorithme très difficile à mettre sous forme d'un programme informatique. L'autre problème rencontré est lié à la procédure de détermination de la configuration de commande convenable par l'utilisation de méthodes qui se révèlent parmi les plus rigoureuses. Puisque le choix de cette dernière passe par la comparaison des résultats obtenus en appliquant la méthode pour toutes les configurations de commande possibles en vue de dégager la meilleure configuration, donc $m!$ résultats à comparer ce qui n'est pas aisé à faire.

Dans le présent mémoire, visant à faire l'état de l'art sur l'analyse des interactions dans les systèmes à grande échelle, on se propose d'élaborer une synthèse concrétisant les travaux de recherche présentés dans le domaine d'analyse des interactions en regroupant les différentes méthodes développées. L'objectif principal de notre travail consiste à proposer des méthodes permettant de simplifier l'analyse des interactions et la détermination de la configuration de commande, lorsque la dimension du système est grande pour faire face au

problème de calcul. L'autre objectif visé, consiste à proposer une méthodologie de synthèse d'un système de commande multiboucle pour des systèmes qui ne présentent pas une configuration de commande adéquate, ainsi que les systèmes multivariables non carrés.

Les différents travaux concernant le sujet font l'objet de quatre chapitres qui constituent ce mémoire.

3 Présentation des chapitres

Le présent mémoire est organisé comme suit :

Dans le chapitre 1, sont présentés quelques rappels sur les systèmes multivariables qui seront utilisés tout au long du travail. Un rappel des différentes représentations des systèmes multivariables en l'occurrence la représentation par matrice de transfert et la représentation par modèle d'état sont présentées. Quelques méthodes de passage d'une représentation à une autre sont ensuite données tout en introduisant les notions de commandabilité et d'observabilité. Dans ce même chapitre, nous rappelons également la représentation par le graphe de fluence et la représentation fréquentielle ; ces deux représentations constituent deux outils puissants et fréquemment utilisés pour analyser les interactions dans un système à grande échelle. La commande multiboucle d'un système multivariable est présentée aussi à la fin du chapitre.

Dans le chapitre 2, nous avons rassemblé les différentes méthodes d'analyse des interactions et de détermination de la configuration de commande développées depuis l'introduction de Rijnsdorp de la notion de Quotient d'Interaction (IQ) [27], en 1965, comme méthode pour évaluer le niveau d'interactions entre les variables d'un système. Cette partie, est la synthèse d'une recherche bibliographique qui regroupe une vingtaine d'articles présentant la plupart des méthodes proposées par des chercheurs dans le domaine d'analyse des interactions. En premier lieu, nous définissons tout en expliquant le phénomène d'interaction dans un système multivariable. Par la suite, après classification des méthodes développées, la présentation de chaque méthode sera abordée d'une manière détaillée.

Dans le chapitre 3, nous proposons deux méthodes pour analyser les interactions dans un système à grande dimension et deux méthodes pour le choix de la meilleure configuration de commande. Toutes les méthodes proposées dans ce chapitre sont développées en s'appuyant sur des résultats et des notions inspirées de la synthèse élaborée dans le chapitre 2. Dans la première partie de ce chapitre, après avoir présenter le principe des méthodes d'analyse des interactions proposées et un rappel de quelques remarques importantes, nous abordons de

façon détaillée les deux méthodes proposées d'analyse des interactions par décomposition. Dans la deuxième partie, deux méthodes pour le choix de la meilleure configuration de commande sont proposées et expliquées. Toutes les méthodes présentées dans ce chapitre sont illustrées à travers deux applications détaillées.

Dans le chapitre 4, qui est la dernière partie de notre travail nous abordons le problème de la commande multiboucle dans le cas d'absence d'une configuration de commande adéquate, le niveau d'interaction est fort pour toutes les configurations de commande possibles, et lorsque le système multivariable est non carré. La solution que nous proposons va dans le sens de simplicité et de robustesse, ainsi une méthodologie de synthèse d'un système de commande multiboucle basée sur une méthode d'analyse des interactions est proposée. En premier lieu nous présentons la stratégie de commande considérée qui consiste à introduire un correcteur en cascade sur le système pour réduire les effets d'interactions entre les variables du système, en suite, la méthodologie de synthèse du correcteur est explicitée. A titre d'illustration, trois exemples d'application de la méthodologie de commande proposée sont présentés.

Nous terminons par une conclusion sur l'ensemble de ce travail et nous proposons des perspectives de continuité de travail.

CHAPITRE

1

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES MULTIVARIABLES

*“Toute théorie est grise, mais vert et
florissant l'arbre de la vie.”*

GOETHE

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des généralités sur les systèmes multivariables. Dans ce contexte, on se limitera aux notions utilisées dans l'analyse des interactions. En effet, il existe plusieurs travaux de nature surtout théorique, où une multitude de variantes pour la représentation, l'analyse et la commande des systèmes multivariables sont développées [8], [16],[18–19], [41], [49]. La limitation aux notions de bases se justifie aussi par le fait que dans le domaine d'analyse des interactions on n'utilise qu'une petite partie de toutes les notions et les méthodes existantes.

1.2 Définition d'un système multivariable

Les systèmes multivariables sont des systèmes à plusieurs entrées (u_1, u_2, \dots, u_m) et à plusieurs sorties (y_1, y_2, \dots, y_r) (fig. 1.1). Ces derniers ne se réduisent pas à la mise en parallèle de systèmes monovariables mais se caractérisent par des phénomènes d'interaction – ou de couplage – dans la mesure où l'application d'un signal sur une entrée entraîne en général une variation de plusieurs ou de toutes les sorties [18–19].

À la notion de couplage s'ajoutent ceux de l'intégrité, de sensibilité et de directionnalité qui apparaissent fondamentales pour l'analyse et la commande correcte des systèmes multivariables.

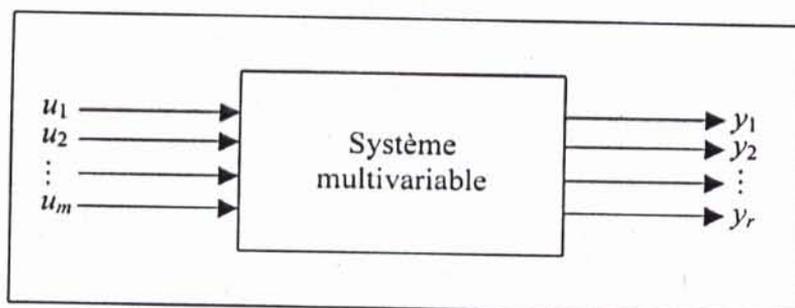


FIG. 1.1 : Système multivariable.

Les entrées sorties d'un système multivariable sont données par :

$$u^T = [u_1, u_2, \dots, u_m], \quad y^T = [y_1, y_2, \dots, y_r].$$

Où :

m : nombres de commandes (entrées).

r : nombre de sorties.

u : vecteur de commande (entrées) de dimensions $m \times 1$.

y : vecteur de sorties de dimensions $r \times 1$.

1.3 Représentation des systèmes multivariables

La figure 1.2 résume les principales représentations d'un système multivariable dans le cas continu [19].

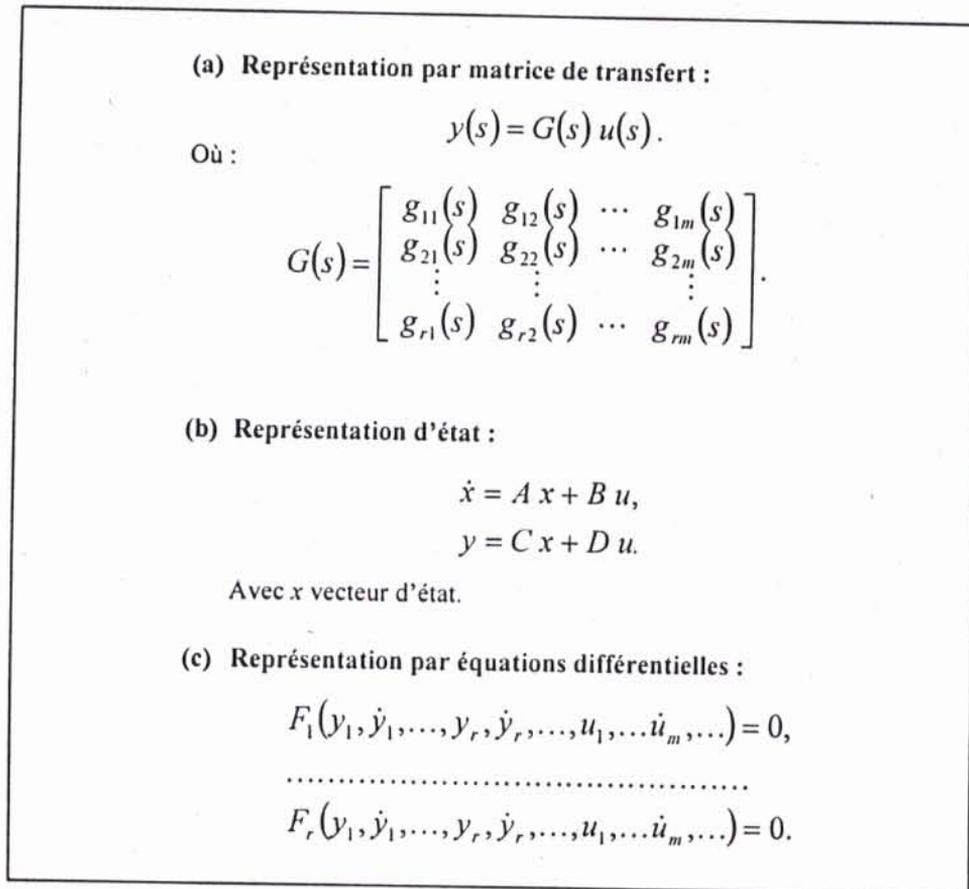


FIG. 1.2 : Divers types classiques de représentation.

Comme pour les systèmes monovariabiles continus, trois types de représentation sont possibles [19] :

- Par un système de r équations différentielles liant les r sorties aux m entrées et à leurs dérivées, c'est le modèle auquel on arrive généralement lorsque les lois de la physique peuvent être utilisées.
- Par une matrice de transfert, c'est-à-dire une matrice de fonctions de transfert représentant les transmittances entre les divers couples entrée-sortie $[u_j - y_i]$, il est en général le modèle de base dont on dispose lorsque le système est trop complexe

pour être mis complètement en équations en utilisant les lois de la physique et que l'on procède à une identification globale entrées-sorties.

- Par un modèle d'état, ce sera le plus souvent un modèle abstrait, fondamental pour l'analyse et la commande.

Remarque 1.1

- Les représentations (a) et (b) sont les plus utilisées pour l'analyse des interactions.

1.4 Notions de matrice de transfert et de représentation d'état

1.4.1 Matrice de transfert

Les matrices de transfert sont utilisées pour représenter les caractéristiques entrées-sorties des systèmes multivariables (fig. 1.1). Le système étant linéaire stationnaire, la représentation s'effectue en utilisant le théorème de superposition [8].

L'effet de la j -ième entrée sur la i -ième sortie s'obtient en posant $u_k \equiv 0, \forall k \neq j$, il vient alors :

$$y_i(s) = g_{ij}(s) u_j(s), \quad u_k \equiv 0 \quad \forall k \neq j, \quad (1.1)$$

en superposant les effets des diverses entrées, il vient :

$$y_i(s) = \sum_{j=1}^m g_{ij}(s) u_j(s), \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad (1.2)$$

en introduisant le vecteur d'entrée,

$$u(s) = \begin{bmatrix} u_1(s), u_2(s), \dots, u_m(s) \end{bmatrix}^T,$$

et le vecteur de sortie

$$y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s), y_2(s), \dots, y_m(s) \end{bmatrix}^T.$$

La relation (1.2) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$y(s) = G(s) u(s). \quad (1.3)$$

Où $G(s)$ est la matrice de transfert du système multivariable, définie par :

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & \cdots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & \cdots & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ g_{r1}(s) & g_{r2}(s) & \cdots & \cdots & g_{rm}(s) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

La notion de matrice de transfert ainsi définie est la généralisation naturelle de celle de fonction de transfert.

Remarque 1.2

- La représentation par matrice de transfert suppose que les conditions initiales sont nulles.

1.4.2 Représentation d'état

1.4.2.1 Notion d'état

L'état à l'instant t_0 d'un système représente l'ensemble des n informations que l'on doit posséder sur le système à cet instant t_0 pour pouvoir déterminer son évolution ultérieure (à $t > t_0$), à partir de la seule donnée des entrées ultérieures [48].

Ces informations, soit :

$$x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0),$$

sont nommées variables d'état, et sont rassemblées dans un vecteur $x(t_0)$ nommé vecteur d'état.

On peut dire que les variables d'état représentent l'évolution des conditions initiales, ou encore qu'elles résument tout le passé du système :

Les variables d'état sont la mémoire du passé.

1.4.2.2 Représentation d'état

Dans la plupart des cas, l'évolution en fonction du temps du système peut être décrite par les deux équations suivantes, qui constituent la représentation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad : \text{équations d'état.}$$

$$y = g(x, u, t) \quad : \text{équations de sortie (ou de mesure).}$$

Dans le cas où le système considéré est linéaire, la représentation d'état se met sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Avec :

$x(t)$: vecteur d'état de dimensions $n \times 1$.

$u(t)$: vecteur de commande de dimensions $m \times 1$.

$y(t)$: vecteur de sortie de dimensions $r \times 1$.

Où :

n : est le nombre d'états du système.

Si le système est supposé, en outre invariant, il vient :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t), \\ y(t) &= C x(t) + D u(t).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Avec :

A : matrice d'état (ou d'évolution) de dimensions $n \times n$.

B : matrice de commande de dimensions $n \times m$.

C : matrice de sortie (d'observation) de dimensions $r \times n$.

D : matrice de transmission directe de dimensions $r \times m$.

Dans tout ce qui suit, nous nous placerons dans ce dernier cas et nous désignerons un système donné sous forme d'une représentation d'état par $S(A, B, C, D)$.

Remarques 1.3

- La représentation d'état permet de mettre en évidence des informations internes au processus, qui n'apparaissent nécessairement sur la description par matrice de transfert.
- La représentation d'état n'est pas unique. Elle peut être orientée de façon à faire apparaître explicitement des variables d'état choisies par l'utilisateur.
- Contrairement à la représentation par matrice de transfert, la représentation d'état ne suppose pas que les conditions initiales sont nulles.

1.5 Passage d'une matrice de transfert à la représentation d'état

Le cas d'un système donné par sa matrice de transfert $G(s)$ est en général plus difficile à traiter. La difficulté essentielle est que la détermination de son ordre, c'est-à-dire celui de la représentation minimale (commandable et observable) associée, est plus délicate [8], [18-19].

Associer à une matrice de transfert $G(s)$ une représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t), \\ y(t) &= C x(t) + D u(t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

c'est de trouver un quadruplet (A, B, C, D) tel que :

- (a) $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$;
 (A, B, C, D) forment une réalisation ;
- (b) le système (A, B, C, D) est commandable et observable ;
 (A, B, C, D) forment une réalisation minimale.

Contrairement à ce que l'on peut penser a priori, c'est en général la condition (b) qui pose des problèmes. Or, elle doit impérativement être vérifiée.

1.5.1 Commandabilité

1.5.1.1 Commandabilité de l'état

Un processus de vecteur d'état $x(t)$ est dit complètement commandable sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ s'il existe une commande $u(t)$ définie sur le même intervalle permettant de le faire évoluer d'un état initial donné quelconque $x(t_0) = x_0$ à un état choisi quelconque $x(t_1) = x_1$ [8], [10].

Théorème 1.1

Dans le cas où le système est invariant, le système est complètement commandable si et seulement si :

$$\text{rang } C_{(A,B)} = n. \tag{1.8}$$

Avec :

$$C_{(A,B)} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Où :

n : est l'ordre du système ($n = \text{rang}(A)$).

$C_{(A,B)}$: s'appelle la matrice de commandabilité du système.

1.5.1.2 Commandabilité de la sortie

La sortie y du processus est dite commandable sur $[t_0, t_1]$ si quel que soit l'état initial $x(t_0) = x_0$ et quelle que soit la valeur choisie y_1 , il existe une commande définie sur $[t_0, t_1]$ permettant d'avoir $y(t_1) = y_1$ [8], [10].

Théorème 1.2

Dans le cas où le système est invariant, la sortie y de système est dite commandable si et seulement si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B & D \end{bmatrix} = r. \quad (1.10)$$

Où :

r : est le nombre des entrées.

Remarque 1.4

- Si on s'intéresse seulement à la commandabilité de la i -ième sortie :

$$y_i = C_i x + D_i u, \quad i = 1, \dots, r, \quad (1.11)$$

il vient la condition nécessaire et suffisante de commandabilité :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C_i B & C_i AB & \dots & C_i A^{n-1} B & D_i \end{bmatrix} = 1. \quad (1.12)$$

1.5.2 Observabilité

Un système est dit complètement observable sur $[t_0, t_1]$ si la connaissance de $u(t)$ et $y(t)$ sur cet intervalle permet de déterminer la valeur de l'état initial $x_0 = x(t_0)$ [8], [10].

Théorème 1.3

Dans le cas d'un système invariant, le système est dit complètement observable si et seulement si :

$$\text{rang } O_{(A,C)} = n. \quad (1.13)$$

Avec :

$$O_{(A,C)} = \begin{bmatrix} C & CA & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T. \quad (1.14)$$

Où :

n : est l'ordre du système ($n = \text{rang}(A)$).

$O_{(A,C)}$: s'appelle matrice d'observabilité du système.

1.5.3 Notations

$G(s)$ est une matrice de dimensions $r \times m$ dont les éléments $g_{ij}(s)$ sont des fonctions de transfert, c'est-à-dire des fonctions rationnelles en s . On l'écrira le plus souvent sous la forme :

$$G(s) = \frac{M(s)}{d(s)}. \quad (1.15)$$

Avec :

$$d(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0. \quad (1.16)$$

Où :

$d(s)$: polynôme, dénominateur commun des $g_{ij}(s)$.

$M(s)$: matrice polynomiale.

On suppose dans la suite que $G(s)$ est une matrice propre, c'est-à-dire que tous les éléments $g_{ij}(s)$ sont tels que :

$$\text{degré (numérateur)} \leq \text{degré (dénominateur)}.$$

Dans le cas contraire (égalité des degrés), on commencera par isoler la transmission directe entre y_i et u_j , correspondant aux éléments $d_{ij}(s)$ de la matrice D .

Le passage de la matrice de transfert à la représentation d'état n'est pas unique, puisqu'un

Le système donné possède une infinité de représentations d'état. Parmi toutes ces représentations (minimales), certaines jouent un rôle privilégié, en particulier parce que les matrices correspondantes ont une structure creuse qui facilite leur manipulation.

Dans le cas général, la recherche directe d'une représentation d'état satisfaisant les conditions (a) et (b) susmentionnées est difficile. C'est pourquoi, il pourra être commode de procéder en deux étapes ; en cherchant d'abord une réalisation A, B, C satisfaisant la condition (a), ensuite le cas échéant en réduisant cette réalisation, de façon à satisfaire (b). La figure 1.3 résume les méthodes possibles [19].

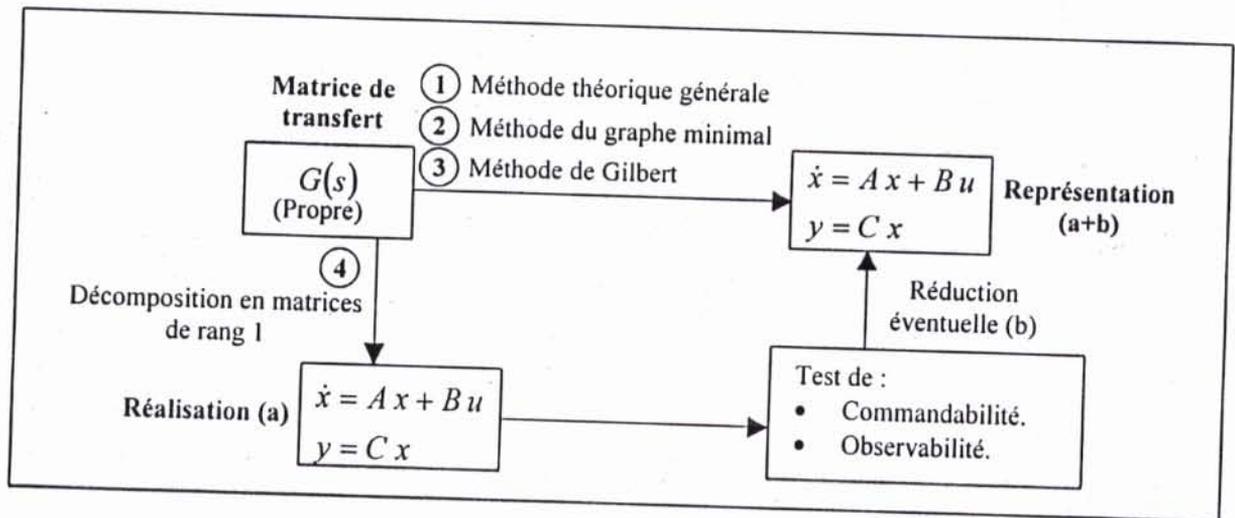


FIG. 1.3 : Passage d'une matrice de transfert à une représentation d'état : Diverses voies possibles.

Les conditions d'utilisation de chaque méthode sont :

- *Méthode théorique générale* : méthode toujours théoriquement applicable ; très lourde en pratique, à éviter.
- *Méthode de graphe minimale* : cette méthode est intéressante dans le cas de pôles réels multiples ou d'une paire complexe.
- *Méthode de Gilbert* : cette méthode n'est applicable *que* lorsque tous les pôles de $G(s)$ sont simples et multiples ; elle est simple dans le premier cas.
- *Méthode de décomposition en matrice de rang 1* : cette méthode est toujours possible ; son intérêt et sa simplicité sont liés au nombre de réductions dans l'étape (b).

On se limitera ici aux deux méthodes les plus exploitables en pratique [8], [19] :

- Méthode de Gilbert.
- Méthode de décomposition en matrices de rang 1 (méthode de Ho).

1.5.4 Méthode de Gilbert

1.5.4.1 Cas des pôles simples

On suppose ici que le dénominateur commun de $G(s)$ a toutes ses racines distinctes [8] :

$$d(s) = \prod_{i=1}^p (s - \alpha_i), \quad \alpha_i \neq \alpha_j, \quad (1.17)$$

$G(s)$ s'exprime alors en éléments simples :

$$G(s) = \frac{M(s)}{d(s)} = \sum_{i=1}^p \frac{M_i}{s - \alpha_i}, \quad (1.18)$$

où les résidus M_i sont des matrices calculées par :

$$M_i = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} (s - \alpha_i) G(s). \quad (1.19)$$

On pose $\rho_i = \text{rang}(M_i)$, et M_i peut alors se factoriser (voir la remarque suivante) en :

$$M_i = C_i B_i, \quad (1.20)$$

avec :

C_i : est une matrice de dimensions $r \times \rho_i$.

B_i : est une matrice de dimensions $\rho_i \times m$.

On vérifie alors que :

$$\begin{cases} A = \text{bloc diag} \{ \alpha_i I_{\rho_i} ; i = 1, \dots, p \}, \\ B^T = [B_1^T, \dots, B_p^T], \\ C = [C_1, \dots, C_p], \end{cases} \quad (1.21)$$

est une réalisation de $G(s)$, d'ordre $n = \sum_{i=1}^p \rho_i$.

Lorsque $d(s)$ a toutes ses racines distinctes, on peut affirmer que cette réalisation est minimale.

Remarque 1.5

- La factorisation (1.20), non unique, peut être obtenue en faisant apparaître dans M_i , par permutations, un bloc carré inversible d'ordre ρ_i , soit :

$$M_i \text{ après permutation} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}, N_{11} (\rho_i \times \rho_i), \det N_{11} \neq 0. \quad (1.22)$$

On pose alors :

$$N_1 = \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{21} \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

et il vient :

$$M_i = N_1 N_{11}^{-1} N_2 = C_i B_i. \quad (1.24)$$

1.5.4.2 Cas des pôles multiples

Lorsque $G(s)$ présente des pôles multiples, on obtient :

$$d(s) = \prod_{i=1}^p (s - \alpha_i)^{n_i}, \quad (1.25)$$

et $G(s)$ s'exprime en éléments simples :

$$G(s) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{M_{ij}}{(s - \alpha_i)^{n_i-j}}, \quad (1.26)$$

La méthode précédente s'applique encore, mais conduit en général à une réalisation non minimale.

1.5.5 Méthode pratique par décomposition en matrices de rang 1

Elle consiste à isoler les colonnes de la matrice $M(s) = [M^1 \ M^2 \ \dots \ M^m]$ en écrivant $G(s)$ sous la forme [19] :

$$G(s) = \frac{M^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}{d(s)} + \frac{M^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}}{d(s)} + \dots + \frac{M^m \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}{d(s)} = \sum_{i=1}^m G_i(s). \quad (1.27)$$

À chaque $G_i(s)$ on associe la représentation d'état (A_i, B_i, C_i) suivante :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, C_i = \left[M'(0) \quad \frac{\dot{M}'(0)}{1!} \quad \dots \right]. \quad (1.28)$$

↑
i-ième colonne.

La représentation finale du système $G(s)$ est :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_m]. \quad (1.29)$$

Remarque 1.6

- Il est important, dans cette méthode, de vérifier si le modèle précédent est observable (il est nécessairement commandable). Cette condition sera vérifiée dans la très grande majorité des cas rencontrés en pratique. S'il elle ne l'était pas, il importerait de réduire la réalisation en éliminant les états inobservables surabondants [19].

Soit $\Gamma_i(\zeta)$ la colonne polynomiale définie par :

$$\Gamma_i(\zeta) = M_i(0) + \zeta \frac{\dot{M}'(0)}{1!} + \zeta^2 \frac{\ddot{M}'(0)}{2!} + \dots \quad (1.30)$$

Le sous-système (1.28) est observable si $\Gamma_i(\zeta) \neq 0$ pour $\zeta =$ racine de $d(s)$ et le système global formé par la «somme» des m sous-système (1.28) est observable si :

$$\text{rang} \left[\Gamma_1(\zeta) \quad \dots \quad \Gamma_m(\zeta) \right] = m \quad \text{pour} \quad \zeta = \text{racine de } d(s). \quad (1.31)$$

1.6 Passage de la représentation d'état à la matrice de transfert

Considérant un système multivariable donnée par la représentation d'état suivante [48] :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t), \\ y(t) &= C x(t) + D u(t). \end{aligned} \quad (1.32)$$

La représentation par matrice de transfert consiste à chercher $G(s)$ telle que,

$$y(s) = G(s)u(s).$$

L'élément $g_{ij}(s)$ de la matrice $G(s)$ est la fonction de transfert entre la sortie y_i et l'entrée u_j .

La matrice de transfert est donc la généralisation, au cas multivariable de la notion de fonction de transfert. Comme pour celle-ci, le système est supposé initialement au repos.

Prenons la transformée de Laplace des deux membres de l'équation (1.32), en imposant les conditions initiales nulles, il vient :

$$s x(s) = A x(s) + B u(s), \quad (1.33)$$

d'où :

$$x(s) = (sI - A)^{-1} B u(s), \quad (1.34)$$

en désignant par I la matrice identité de même dimensions que A .

De même, la deuxième équation de (1.32) entraîne :

$$y(s) = C(s)x(s) + D(s)u(s). \quad (1.35)$$

En reportant dans cette relation l'expression précédente de $x(s)$, on obtient immédiatement :

$$y(s) = \left[C (sI - A)^{-1} B + D \right] u(s). \quad (1.36)$$

D'où :

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D. \quad (1.37)$$

1.7 Graphe de fluence

1.7.1 Représentation par graphe de fluence d'un système

Ce mode de description, très proche de la représentation par schémas fonctionnels, utilise les propriétés des systèmes linéaires [8], [10].

Une variable est représentée par un nœud et une liaison entre variables par un arc orienté.

Il vient pour la figure 1.4 :

$$x_4 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad (1.38)$$

$$x_3 = a_4 x_4 = a_4 a_1 x_1 + a_4 a_2 x_2 + a_4 a_3 x_3.$$

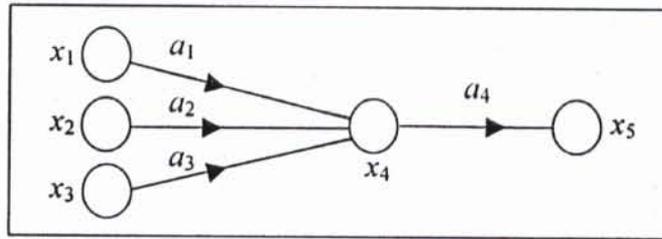


FIG. 1.4 : Nœuds et arcs.

La valeur de la variable représentée par un nœud est égale à la sommation pondérée des variables qui y sont liées par un arc dirigé vers le nœud, le coefficient de pondération étant l'expression inscrite près de l'arc (qui peut être un nombre ou une transmittance).

On désigne sous le terme de nœud source un nœud associé à une variable d'entrée, c'est-à-dire d'origine externe au système étudié.

Une chaîne directe (ou cascade) entre deux variables (fig. 1.5) est une liaison entre ces deux variables, réalisée en suivant le sens des flèches et en ne passant pas deux fois par le même nœud.

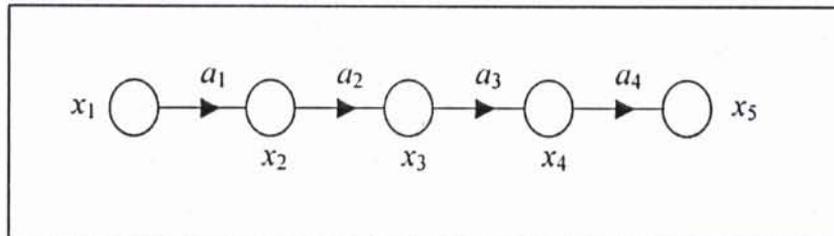


FIG. 1.5 : Chaîne directe.

La transmittance d'une chaîne directe liant deux nœuds est égale au produit des transmittances rencontrées. Pour la chaîne directe entre x_1 et x_5 décrite figure 1.5, il vient la transmittance $T = a_4 a_3 a_2 a_1$.

On appelle boucle un chemin qui, partant d'un nœud, revient en ce même nœud (fig. 1.6) en suivant le sens des arcs.

La transmittance de la boucle est égale au produit des transmittances des arcs composant la boucle. Ici, il vient la transmittance $b = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.

Les k boucles b_1, \dots, b_k sont dites disjointes s'il n'en existe pas deux indices i et $j \neq i$ tels que les boucles b_i et b_j aient un nœud en commun.

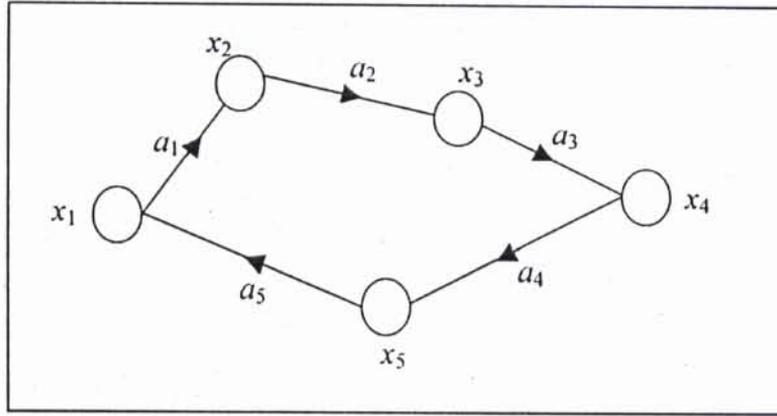


FIG. 1.6 : Boucle d'un graphe.

Le déterminant d'un graphe est la quantité :

$$\Delta = 1 - \sum b_i + \sum b_i b_j - \sum b_i b_j b_k + \dots \quad (1.39)$$

Avec :

$\sum b_i$: somme des transmittances des boucles ;

$\sum b_i b_j$: somme des produits des transmittances des boucles disjointes 2 à 2 ;

$\sum b_i b_j b_k$: somme des produits des transmittances des boucles disjointes 3 à 3, etc...

Le déterminant du graphe peut aussi s'écrire :

$$\Delta = \prod (1 - b_i), \quad (1.40)$$

expression dans laquelle $\prod (1 - b_i)$ représente la quantité obtenue en supprimant dans $\prod (1 - b_i)$ tous les produits où interviennent 2 boucles adjacentes, c'est-à-dire ayant au moins un nœud en commun.

1.7.2 Principe de construction de graphe

La construction d'un graphe de fluence peut s'effectuer suivant les règles suivantes [10] :

1. Expliciter les diverses relations linéaires liant les variables du système en évitant toute omission et redondance. Pour un système ayant m entrées et comportant globalement n variables, on doit avoir $(n - m)$ relations.
2. Mettre en évidence dans chaque relation une variable, qui sera définie par cette relation (une variable d'entrée n'a pas à être définie). Chaque variable, autre qu'une entrée doit

être définie une fois et une seule. Le choix à ce niveau n'étant pas unique, il existe plusieurs graphes possibles pour la description d'un système donné.

3. Représenter par des nœuds les différentes variables du système, de préférence en respectant la topologie du système et en isolant à gauche le nœud d'entrée et à droite le nœud de sortie.
4. Construire le graphe à partir des relations servant à définir chaque variable.
5. Vérifier que chaque nœud qui ne représente pas une entrée a au moins une flèche qui arrive et qu'il est possible d'atteindre chaque sortie en partant d'une entrée et en suivant le sens des flèches.

1.7.3 Règle de Mason

Cette règle permet de déduire simplement d'un graphe, la relation entrée-sortie liant la variable d'entrée associée à un nœud source, au nœud associé à une variable considérée comme variable de sortie [8], [10].

Si on désire déterminer par la règle de Mason la matrice de transfert du processus à m entrées u_j et r sorties y_i , décrit figure 1.1, il convient d'opérer comme suit :

- Calculer le déterminant Δ du graphe complet ;
- Calculer les transmittances T_{ijk} des k_{ij} chaînes directes liants u_j à y_i ;
- Pour chaque chaîne directe déterminer le déterminant Δ_{ijk} associé ;
- Exprimer la relation entrée-sortie entre u_j et y_i pris isolément, il vient :

$$\Delta y_i(s) = \sum_{k=1}^{k_{ij}} T_{ijk} \Delta_{ijk} u_j(s) ; \quad (1.41)$$

- Exprimer la relation liant l'ensemble des entrées à la j -ième sortie :

$$\Delta y_i(s) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{k_{ij}} T_{ijk} \Delta_{ijk} u_j(s). \quad (1.42)$$

La matrice de transfert du système a alors pour éléments $g_{ij}(s)$ de la i -ième ligne et de la j -ième colonne :

$$g_{ij}(s) = \sum_{k=1}^{k_{ij}} \frac{T_{ijk} \Delta_{ijk}}{\Delta}, \quad (1.43)$$

soit :

$$y(s) = G(s)u(s), \tag{1.44}$$

$$G(s) = \left[g_{ij}(s) : i = 1, \dots, r ; j = 1, \dots, m \right].$$

1.8 Représentation fréquentielle des fonctions de transfert

Les représentation fréquentielles ont pour but de caractériser la fonction de transfert $g_{ij}(s)$ par le nombre complexe $g_{ij}(j\omega)$ obtenu en posant $s = j\omega$. Elles font intervenir le gain G_{ij} de $g_{ij}(j\omega)$ exprimé en décibels et la phase φ_{ij} de $g_{ij}(j\omega)$ exprimée en degrés ou en radians [8], [10], [48] :

$$G_{ij} = 20 \log_{10} |g_{ij}(j\omega)|, \tag{1.45}$$

$$\varphi_{ij} = \arg(g_{ij}(j\omega)). \tag{1.46}$$

Trois types de représentation sont couramment utilisés pour décrire les fonctions de transfert : les lieux de Bode, le lieu de Nyquist, et le lieu de Black. À noter que, le lieu de Nyquist est le plus utilisé dans le domaine d'analyse des interactions.

1.8.1 Lieux de Bode

La représentation dans le plan de Bode d'une fonction de transfert $g_{ij}(j\omega)$ consiste à tracer :

- Le module G_{ij} de $g_{ij}(j\omega)$, exprimé en décibels (dB), on le note $|g_{ij}(j\omega)|_{dB}$.
- La phase φ_{ij} de $g_{ij}(j\omega)$, exprimée en degrés.

En fonction de $\log_{10}(\omega)$, pour ω variant de 0 à l'infini.

1.8.2 Lieu de Nyquist

Le lieu de Nyquist représente l'évolution en coordonnées polaires du nombre complexe $g_{ij}(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. Pour certaines applications, telles que les études de stabilité, on trace ce lieu pour ω varie de $-\infty$ à $+\infty$ ajoutant alors la partie symétrique par rapport à l'axe réel et éventuellement si le système comporte un pôle à l'origine des contours à l'infini.

Remarque 1.7

- Dans le lieu de Nyquist, le module G_{ij} est le module réel (donc pas exprimé en décibels).

$$G_{ij} = |g_{ij}(j\omega)|, \quad (1.47)$$

$$\varphi_{ij} = \arg(g_{ij}(j\omega)). \quad (1.48)$$

1.9 Commande multiboucle d'un système multivariable

1.9.1 Présentation

La technique de commande multiboucle (commande directe boucle par boucle) est représentée sur la figure 1.7 [19], [41 – 42], [45].

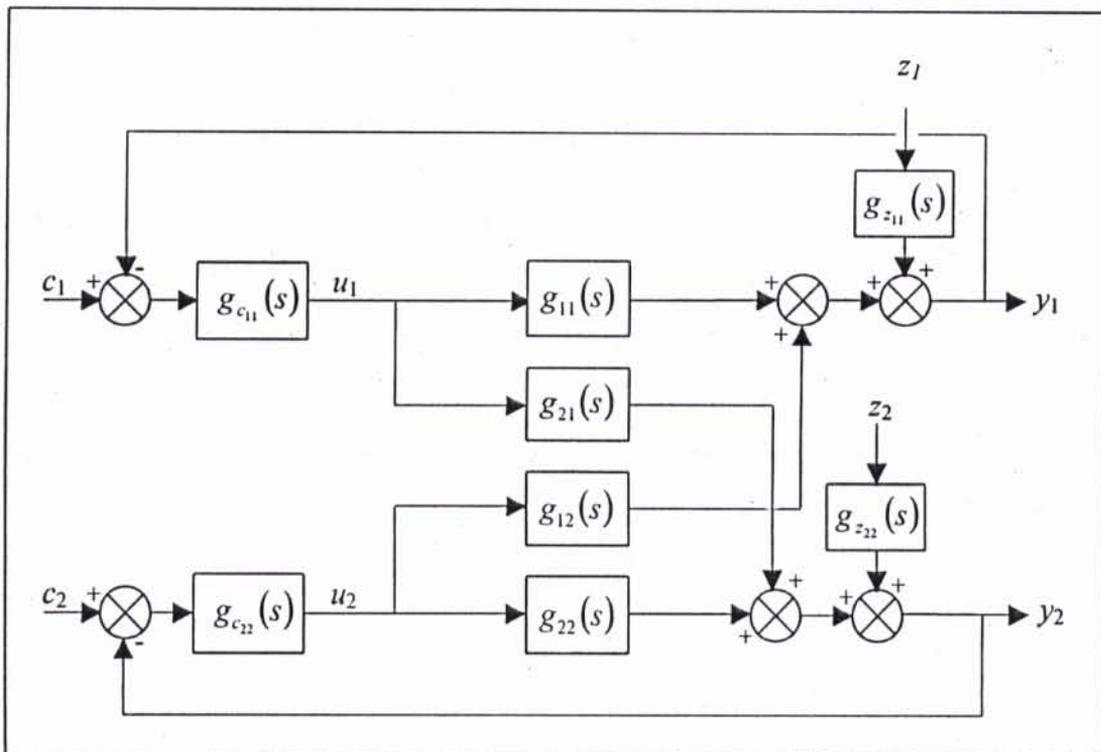


FIG. 1.7 : Commande multiboucle.

L'avènement du concept d'analyse des interactions dans les systèmes multivariables a débouché sur une large utilisation de cette technique de commande dans l'industrie pétrolière et chimique [22], [25], [28 – 29], [41 – 42].

La commande multiboucle consiste à créer autant de boucles de retour que de couples entrées-sorties ; c'est-à-dire à considérer le système comme constitué de m sous-systèmes monovariabiles en parallèle. L'étape d'analyse des interactions et la détermination de la

configuration de commande (couples entrées-sorties) jouent un rôle de premier plan dans la synthèse d'une commande multiboucle robuste [7], [22], [25], [41 – 42], [45].

1.9.2 Synthèse d'un système de commande multiboucle

La synthèse d'un système de commande multiboucle passe par les deux étapes suivantes [22], [30], [40 – 42], [45] :

1. Détermination de la configuration de commande.
2. Choix de la loi de commande pour chaque boucle.

Étape 1. Détermination de la configuration de commande

Pour la commande multiboucle d'un système multivariable, l'étape la plus importante est le choix de la configuration de commande, qui est déterminée en analysant les interactions présentes entre les entrées et les sorties du système par application d'une méthode d'analyse des interactions. Le choix porte sur la configuration de commande dont les boucles sont stables et présentent de faibles interactions entre elles [15], [25], [41 – 42], [45].

Étape 2. Choix de la loi de commande pour chaque boucle

La commande d'un processus industriel (choix de la loi de commande) s'appuie sur deux grandes familles de méthodes et d'outils associés qui se distinguent par la connaissance plus au moins précise que l'on a de comportement dynamique du procédé industriel concerné [22].

La première approche, la plus ancienne est l'approche algorithmique s'appuyant sur un modèle mathématique de comportement. Elle exige une connaissance détaillée du procédé [10], [22], [45]. Cette approche comprend notamment les méthodes de synthèse dans le domaine temporel et fréquentiel (lieu de racines, méthode de Naslin, la commande par modèle interne, le retour d'état, etc.).

La deuxième approche, de développement plus récent, est l'approche cognitiviste (ou heuristique). Elle repose sur une description empirique de la réponse du système à diverses sollicitations externes. L'approche cognitiviste est basée sur un modèle du procédé de type «situation-action». Les systèmes experts, les régulateurs à logique floue et les réseaux neuronaux relèvent de cette approche et permettent, en partant de l'observation des faits réalisée par les opérateurs, d'échapper à la complexité et au coût de l'analyse par le modèle de comportement [22].

Une fois la configuration de commande est obtenue et selon les performances désirées (rapidité, stabilité et précision) on choisit la loi de commande pour chaque boucle et on détermine les paramètres de chaque régulateur.

1.9.3 Avantages pratiques de la commande multiboucle

Comme avantages pratiques essentiels d'une commande multiboucle, on peut mentionner [40 – 42], [45] :

- Elle permet de maintenir certaines sorties constantes alors que les autres sont délibérément modifiées.
- La non-propagation de la perturbation agissant sur une sortie dans le système.
- Elle permet de conserver la stabilité dans le cas où l'une des boucles se trouve coupée (défaillance d'un capteur ou d'un actionneur).
- Dans les méthodes de la commande des systèmes multivariables (optimale ou modale), la loi de retour fait intervenir toutes les composantes du vecteur d'état, ce qui suppose que tous les états sont mesurables, c'est-à-dire que l'on dispose des capteurs correspondants. Il est bien clair que dans la pratique, il n'en sera pas ainsi, car il y a des états qui ne sont pas mesurables, parce que les capteurs correspondants n'existent pas ou qu'ils sont trop onéreux (on rappelle que les états sont liés non seulement aux sorties mais aussi aux dérivées successives de ces sorties). A noter qu'on peut reconstituer d'une manière ou d'une autre les états non mesurables, à partir de mesures sur les entrées et les sorties du système, en utilisant des observateurs. Par contre la méthode multiboucle utilise directement la mesure des grandeurs principales qui sont les sorties.
- Permet l'application des techniques de commande utilisées en monovariante dont l'efficacité n'est plus à démontrer.
- Simple à implanter.

1.9.4 Analyse des interactions et la commande multiboucle

Une grande partie des problèmes de régulation peut être résolue par des correcteurs classiques de type PID et des correcteurs flous. L'objectif principal de l'analyse des interactions dans les systèmes multivariables est de choisir une configuration de commande dont les interactions entre les boucles sont très faibles, permettant ainsi d'appliquer la commande multiboucle, en s'intéressant au réglage individuel de boucles de régulation.

Les méthodes d'analyse des interactions constituent un outil puissant pour l'étude du phénomène d'interaction fréquemment présent dans les systèmes à grande échelle. Ces méthodes ont donné lieu à d'importantes applications de la commande multiboucle dans l'industrie avec des résultats concluants.

En résumé, l'analyse des interactions est une étape d'extrême importance dans la synthèse d'un système de commande multiboucle robuste. Les méthodes d'analyse des interactions développées n'est qu'un moyen pour dégrossir le système à grande échelle en le réduisant à un ensemble de sous-systèmes monovariables en parallèle, par la détermination de la meilleure configuration de commande parmi les $m!$ configurations possibles.

1.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous n'avons pas voulu donner des détails sur l'ensemble des notions présentées, mais seulement amener le lecteur rapidement, à la lecture de la suite en se remémorant les différentes notions et définitions utiles.

Une étude détaillée sur les différentes représentations, la commandabilité et l'observabilité et la théorie de commande des systèmes multivariables peuvent être trouvée dans [8], [16], [19], [41], [49]. Concernant le passage de la représentation par matrice de transfert à la représentation d'état, une synthèse des différentes méthodes est présentée dans [8],[18–19]. Dans le chapitre suivant, nous découvrirons les différentes méthodes développées pour analyser les interactions et le choix de la meilleure configuration de commande.

CHAPITRE

2

ANALYSE DES INTERACTIONS DANS LES SYSTÈMES À GRANDE ÉCHELLE

*“Rien n’est aussi pratique qu’une
bonne théorie.”*

K. LEVIN

2.1 Introduction

La plupart des processus industriels sont multivariables. Ces derniers se caractérisent par le phénomène d'interaction ou de couplage, de ce fait la synthèse d'un système de commande assurant les performances désirées est une étape très délicate et compliquée, compte tenu des exigences pratiques, telle que l'évolution des sorties indépendamment les unes des autres. La tendance à l'industrie pour la commande multiboucle (commande directe boucle par boucle) est la conséquence de l'aboutissement des travaux d'un grand nombre de chercheurs dans le domaine d'analyse des interactions [2–3], [5], [23], [27]. Les méthodes d'analyse développées simplifient la synthèse d'un système de commande multiboucle robuste et simple à mettre en pratique pour un processus multivariable.

Ce chapitre est consacré à définir, à expliquer le phénomène d'interaction et à exposer les méthodes d'analyse des interactions dans un système à grande échelle.

2.2 Définition de l'interaction dans un système à grande échelle

Plusieurs définitions sont données dans la littérature. Parmi ces dernières on peut citer les plus rencontrées :

Définition 1

Les interactions dans un système multivariable sont définies comme étant l'effet total de la consigne $c_j(s)$ sur l'ensemble de sorties $\{y_i(s) : i \neq j\}$ du système ou c'est l'effet total de l'ensemble de consignes $\{c_j(s) : j \neq i\}$ sur une sortie spécifique $y_i(s)$ [15].

Définition 2

Les interactions dans un système multivariable en boucle fermée, sont déterminées par les transmittances qui influent lorsqu'une consigne $c_j(s)$ ou une perturbation $z_j(s)$ affecte l'ensemble de sorties $\{y_i(s) : j \neq i\}$, ou alternativement les interactions sont déterminées par les transmittances qui influent lorsqu'une sortie $y_i(s)$ est affectée par l'ensemble de consignes $\{c_j(s) : j \neq i\}$ ou des perturbations $\{z_j(s)\}$ [27].

Définition 3

Les boucles de commande dans un système multivariable sont dites interactives, si une action de commande $u_k(s)$ dans la k -ième boucle (résultat d'une perturbation $z_k(s)$) ou d'un

changement de consigne $c_k(s)$) provoque une action de commande $u_l(s)$ ($l \neq k$) dans une ou plusieurs boucles, dans le but de maintenir les variable de sorties $y_l(s)$ ($l \neq k$) assignées à ces dernières à leurs points de consignes [30].

En conclusion de toutes les définitions données, le mot *interaction* dans un système multivariable signifie: Une entrée en général affecte plusieurs sorties ou une perturbation (ou une condition initiale) agissant sur une sortie peut, en se propageant dans le système, perturber d'autres sorties [18], [41].

2.3 Explication du phénomène d'interaction

Pour éclaircir le phénomène d'interaction dans un système multivariable, considérons le système de la figure 2.1

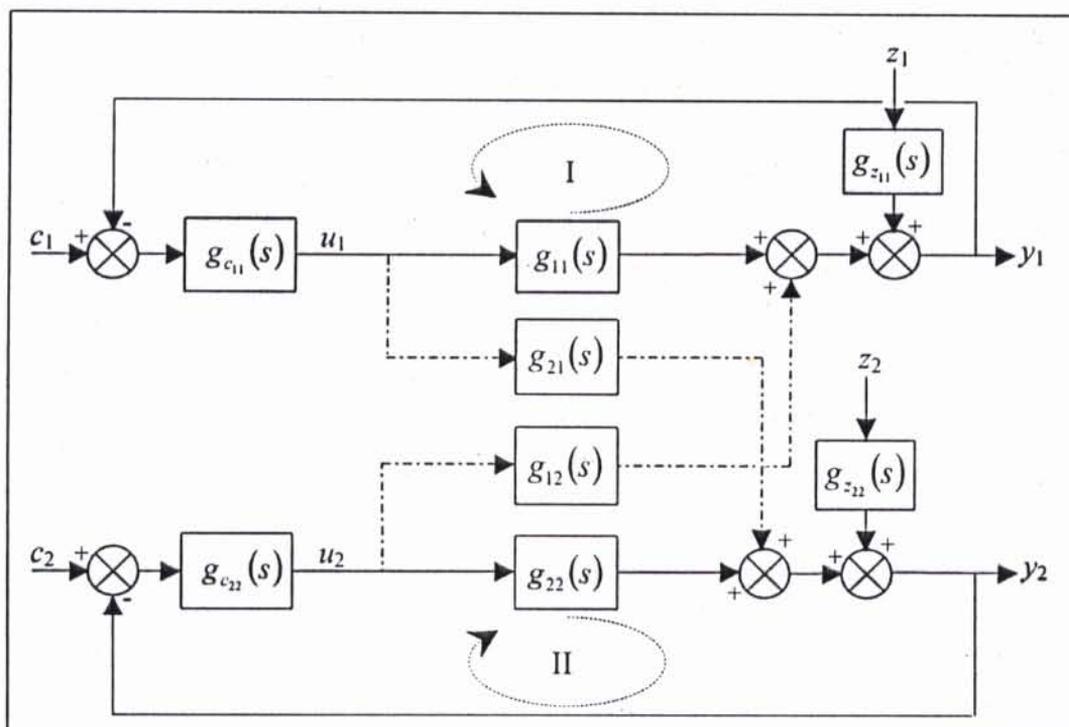


FIG. 2.1 : Commande multiboucle.

Lorsque la perturbation z_1 affecte la sortie y_1 , cette dernière s'écarte de sa valeur de consigne c_1 , le régulateur $g_{c_{11}}(s)$ génère donc une commande u_1 d'une manière à annuler cet écart (ligne continue). Néanmoins, la commande u_1 générée affecte en plus la sortie y_2 à travers la transmittance $g_{21}(s)$ (ligne discontinue), donc la sortie y_2 s'écarte aussi de sa valeur de consigne c_2 . Ceci oblige le régulateur $g_{c_{22}}(s)$ de générer une commande u_2 pour maintenir

la sortie y_2 à la position désirée c_2 . L'action correctrice du régulateur $g_{c_2}(s)$ de la deuxième boucle (II) (la commande u_2) affecte aussi la sortie y_1 à travers la transmittance $g_{12}(s)$. Alors le maintien des sorties y_1, y_2 à leurs positions désirées, en dépit de la perturbation z_1 qui doit être annulée par le régulateur $g_{c_1}(s)$, est une tâche ardue.

Par cet exemple, on a montré comment une commande affecte plusieurs sorties et comment une perturbation affectant une sortie se propage dans le système et perturbe d'autres sorties. Cela est dû essentiellement à l'existence des interactions entre les deux boucles (I) et (II) de la configuration de commande.

Dans ce cas de figure les transmittances $g_{12}(s)$ et $g_{21}(s)$ en se référant à la définition 2 sont des transmittances qui influent sur les performances du système commandé en causant des interactions entre les deux boucles, dont leurs effets sont considérables sur la robustesse de la stratégie de commande considérée. Par conséquent, le phénomène d'interaction est une contrainte qui pose un sérieux problème pour la commande des systèmes multivariables, c'est pourquoi l'analyse des interactions joue un rôle de premier plan lors de la synthèse d'un système de commande multivariable, en particulier un système de commande multiboucle.

2.4 Analyse des interactions dans les systèmes à grandes échelles

Deux grandes classes de méthodes d'analyse des interactions peuvent être définies :

- Méthodes d'analyse directe (ou analyse des interactions en boucle ouverte).
- Méthodes d'analyse indirecte (ou analyse des interactions en boucle fermée).

Les méthodes de la première classe supposent que les régulateurs sont parfaits et l'analyse des interactions est basée sur l'utilisation directe du modèle du système. Ces méthodes permettent de déterminer directement la meilleure configuration de commande.

Cette classe se divise en deux types de méthodes :

- Méthodes utilisant la matrice de transfert du système.
- Méthodes utilisant la représentation d'état du système.

La deuxième classe de méthodes développées a pour principe de base de choisir une configuration de commande en premier lieu. Puis, on fait la synthèse des régulateurs des boucles de commande d'une manière à assurer les performances désirées et d'avoir un niveau d'interaction faible entre les boucles de la configuration de commande choisie ; dans ce cas des contraintes sont introduites lors de la détermination des paramètres de chaque régulateur.

2.4.1 Méthodes d'analyse directe

2.4.1.1 Méthode utilisant la matrice de transfert du système

Dans cette partie, on considère que le système est décrit par une matrice de fonction de transfert $G(s)$ comme suit :

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1}(s) & \cdots & g_{rm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

2.4.1.1.1 Méthode du Quotient d'Interaction (IQ)

Le Quotient d'Interaction est la première méthode d'analyse des interactions proposée par Rijnsdorp en 1965 pour l'analyse des interactions dans un système multivariable. Rijnsdorp considère un système 2×2 et définit le **IQ** comme suit [27] :

$$K(s) = \frac{g_{12}(s) g_{21}(s)}{g_{11}(s) g_{22}(s)}, \quad (2.2)$$

l'analyse des interactions repose sur le calcul de la valeur statique de $K(s)$:

$$k_s = \lim_{s \rightarrow 0} K(s). \quad (2.3)$$

En se basant sur la valeur de k_s , les conclusions de Rijnsdorp sur les interactions dans un système 2×2 sont résumées dans le tableau 2.1

| VALEUR STATIQUE DE $K(s)$ | CONCLUSION |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $k_s > 1$ | Les interactions posent un problème d'instabilité |
| $-1 \leq k_s \leq \frac{1}{3}$ | Faibles interactions entre les variables du système |
| $k_s \leq -1$ et $\frac{1}{3} \leq k_s \leq 1$ | Fortes interactions entre les variables du système |

TAB. 2.1 : Interprétation de Quotient d'Interaction (méthode de Rijnsdorp).

L'importance des hautes et moyennes fréquences dans les systèmes a conduit Kominek et Smith à proposer une extension dynamique pour le Quotient d'Interaction [27], car le **IQ** de

Rijnsdorp néglige ces gammes de fréquences, ce qui convient à dire que le IQ de Rijnsdorp est valable seulement dans les cas des systèmes qui travaillent autour de la fréquence nulle.

La technique de Kominék et Smith consiste à représenter le lieu de Nyquist de $K(s)$ superposé d'un cercle de rayon égal à 1. La comparaison du module de $K(s)$ avec le rayon du cercle donne une information sur les interactions dans le système. Le tableau 2.2 esquisse les cas possibles et leurs interprétations [27].

| MODULE DE $K(s)$ | INTERPRETATION. |
|--------------------------|-----------------------------------------------------|
| $ K(s) > 1$ | Les interactions posent un problème d'instabilité |
| $ K(s) $ est proche de 1 | Fortes interactions entre les variables du système |
| $ K(s) $ est proche de 0 | Faibles interactions entre les variables du système |

TAB. 2.2 : Interprétation du Quotient d'Interaction (méthode de Kominék et Smith).

Remarques 2.1

- Le IQ pour un système à m entrées et m sorties est donné par l'expression mathématique suivante [27] :

$$K_i(s) = -\frac{\sum_{j=1, j \neq i}^m \varphi_j(s) g_j(s)}{g_u(s)} = -\frac{\sum_{j=1, j \neq i}^m \varphi_{ji}(s) g_{ji}(s)}{g_u(s)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

avec :

$$\varphi_j(s) = \frac{h_j(s)}{h_u(s)}. \quad (2.5)$$

Où :

$g_j(s)$: est l'élément (i, j) de la matrice de transfert du système $G(s)$.

$h_j(s)$: est l'élément (i, j) de la matrice des cofacteurs de $G(s)$ désignée par $H(s)$.

$K_i(s)$ s'interprète de la même manière indiquée dans le tableau 2.1 et le tableau 2.2.

- Pour un système 2×2 on aura :

$$K_1(s) = K_2(s) = K(s). \quad (2.6)$$

- Le **IQ** est applicable seulement dans le cas où le système possède le même nombre d'entrées et de sorties ($m = r$).
- Le **IQ** ne permet pas de déterminer directement la meilleure configuration de commande, mais donne une information sur le niveau d'interaction entre les boucles d'une configuration candidate. Pour déterminer la meilleure configuration, il faut calculer le **IQ** pour chaque configuration possible dans le but de dégager la meilleure.
- Si les modules des $K_i(s)$ ($i = 1, \dots, m$) sont proches de 0, cas de la configuration de commande définie par la diagonale de $G(s)$, alors les interactions dans $G(s)$ sont faibles.

2.4.1.1.2 Matrice des Gains Relatifs (RGA)

La méthode de la Matrice des Gains Relatifs développée par Bristol [41], [47], [49], en 1966, permet de dégager une configuration de commande avec un faible niveau d'interaction. Le calcul de la **RGA** est basé sur la matrice des gains statiques du système. Chaque élément de la **RGA** est déterminé par l'expression suivante :

$$\lambda_{ij} = \frac{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{u_k=0, k \neq j}}{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{y_k=0, k \neq i}} \quad (2.7)$$

Le numérateur représente le gain statique en boucle ouverte entre u_j et y_i , et le dénominateur c'est le gain statique entre u_j et y_i lorsque les autres sorties sont contrôlées par des correcteurs parfaits. Le gain relatif λ_{ij} indique si le gain d'une boucle ouverte $[u_j - y_i]$ change lorsque toutes les autres boucles sont fermées [41 – 42].

2.4.1.1.2.1 Calcul de la Matrice des Gains Relatifs (RGA)

La Matrice des Gains Relatifs se calcule directement en utilisant la matrice des gains statiques K_s comme suit :

$$\text{RGA} = K_s \cdot [K_s^{-1}]^T, \quad (2.8)$$

avec :

$$\text{RGA} = \left[\lambda_{ij} : i, j = 1, \dots, m \right], \quad (2.9)$$

$$K_s = \left[K_{s_{ij}} : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.10)$$

Où :

\cdot^* : est le produit de Hadamard (annexe A).

K_s : est la matrice des gains statiques.

$K_{s_{ij}}$: est le gain statique entre u_j et y_i .

Les éléments de K_s sont déterminés par la relation suivante :

$$K_{s_{ij}} = \lim_{s \rightarrow 0} g_{ij}(s). \quad (2.11)$$

Remarques 2.2

- Pour un système donné sous forme d'état $S(A, B, C, D)$ la matrice K_s se calcule comme suit :

$$K_s = C(-A)^{-1} B + D. \quad (2.12)$$

- Lorsque les éléments $g_{ij}(s)$ possèdent des intégrateurs alors :

$$K_{s_{ij}} = \lim_{s \rightarrow 0} g_{ij}(s) = \pm \infty, \quad (2.13)$$

dans ce cas, on pose $K_s = K_{s1} K_{s2}$ (l'une des matrices K_{s1} ou K_{s2} sera en fonction de s) ce qui donne $K_s^{-1} = K_{s2}^{-1} K_{s1}^{-1}$.

2.4.1.1.2.2 Propriétés de la Matrice des Gains Relatifs (RGA)

- La somme algébrique des éléments de la **RGA** le long d'une ligne i ou d'une colonne j est égale à 1.

$$\sum_{j=1, i=Cst}^m \lambda_{ij} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1, j=Cst}^m \lambda_{ij} = 1. \quad (2.14)$$

- Pour un élément $K_{s_{ij}}$ nul, le gain relatif λ_{ij} correspondant est nul.

2.5.1.1.2.3 Interprétation de la Matrice des Gains Relatifs (RGA)

- Si les éléments de la diagonale de la **RGA** ($\lambda_{ij} : i = j$) sont proches de 1, alors le niveau d'interaction dans le système est très faible, dans le cas contraire (inférieur ou supérieur à 1) les interactions sont fortes.

- Pour $\lambda_j = 1$, la réponse pour le couple entrée-sortie $[u_j - y_i]$ quand toutes les autres boucles sont ouvertes ou fermées sera la même, c'est-à-dire que les autres boucles n'ont pas d'influence sur la boucle $[u_j - y_i]$.
- Si λ_j est négatif, la réponse de la boucle correspondante peut changer de sens de variation (système à réponse inverse), si les autres boucles sont fermées. En plus la boucle elle-même peut être instable ou le système global devient instable si jamais la boucle considérée s'ouvre, d'où le couple correspondant ne doit pas être choisi dans la configuration de commande.
- Le choix de la configuration de commande porte sur les couples ayant un gain relatif λ_j proche de 1.

Remarques 2.3

- La **RGA** peut être généralisée pour un système ayant un nombre d'entrées m différent de celui de sorties r , par l'utilisation de la pseudo-inverse de la matrice K_s [13], [47], désignée par K_s^+ , et les interprétations de la **RGA** restent toujours valables [49].
- Pour un système 2×2 dont la **RGA** est :

$$\text{RGA} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

est un système qui présente de fortes interactions.

- La relation entre **IQ** et la **RGA** est :

$$\lambda_{ii} = \frac{1}{1 - k_{s_j}}, \quad (2.16)$$

avec :

$$k_{s_j} = \lim_{s \rightarrow 0} K_i(s). \quad (2.17)$$

- La **RGA** n'est valable que pour les systèmes qui travaillent autour de la fréquence nulle.
- Si la **RGA** d'un système est :

$$\text{RGA} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

alors la meilleure configuration est $[u_1 - y_2]$; $[u_2 - y_1]$.

Lorsque la boucle $[u_1 - y_2]$ est fermée, le gain de la deuxième boucle changera avec un facteur de $1/0.7 = 1.43$, c'est-à-dire une variation de 43%.

- Pour un système à deux entrées et deux sorties, on a :

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} \quad \text{et} \quad \lambda_{12} = \lambda_{21}. \quad (2.19)$$

2.4.1.1.3 Matrice des Gains Relatifs Dynamique (RDGA)

La Matrice des Gains Relatifs (RGA) néglige les moyennes et les hautes fréquences qui peuvent être importantes dans certains systèmes tel qu'un turbo alternateur. En remplaçant le gain statique K_{xy} par la fonction de transfert correspondante $g_y(s)$; Wither, McAvoy et Bristol ont proposé une extension dynamique de la RGA appelée Matrice des Gains Relatifs Dynamique (RDGA) [27], [53] définie par :

$$\text{RDGA} = G(s) \cdot * [G^{-1}(s)]^T, \quad (2.20)$$

avec :

$$\text{RDGA} = \left[\lambda_{ij}(s) : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.21)$$

L'examen des lieux de Nyquist des éléments $\lambda_{ij}(s)$ permet d'analyser les interactions existantes entre les variables du système et de déterminer la configuration de commande.

Interprétation de la Matrice des Gains Relatifs Dynamique (RDGA)

- Les interactions dans le système sont faibles si le module de chaque élément $\lambda_{ij}(s)$ avec $i = j$ (éléments de la diagonale) est proche de 1 et les modules des autres éléments $\lambda_{ij}(s)$ avec $i \neq j$ (éléments hors diagonale) sont proches de zéro dans la bande de fréquences du travail du système. Pour déterminer la configuration de commande, on choisit les couples correspondants à des éléments $\lambda_{ij}(s)$ dont le module est proche de 1 dans la bande de fréquences dans laquelle le système travaille.

Remarques 2.4

- La RDGA est applicable même dans le cas d'un système dont $m = r$, en utilisant la pseudo-inverse de $G(s)$.

- Pour $s = 0$, la RDGA se réduit à la RGA.
- Pour un système à deux entrées et deux sorties, on a :

$$\lambda_{11}(s) = \lambda_{22}(s) \quad \text{et} \quad \lambda_{12}(s) = \lambda_{21}(s). \quad (2.22)$$

- La relation entre le Quotient d'Interaction $K_i(s)$ et les éléments de la diagonale de la RDGA est la suivante :

$$\lambda_{ii}(s) = \frac{1}{1 - K_i(s)}. \quad (2.23)$$

2.4.1.1.4 Matrice des Gains Dynamiques Moyens (ADGA)

La méthode de la Matrice des Gains Dynamiques Moyens développée en 1979, par Gagnepain et Seborg [27], est basée sur le calcul de l'intégrale de la réponse indicielle en boucle ouverte de chaque élément $g_y(s)$ sur un intervalle de temps bien déterminé. La ADGA est définie comme suit :

$$\text{ADGA} = I(\theta) \cdot * [I^{-1}(\theta)]^T, \quad (2.24)$$

avec :

$$\text{ADGA} = \left[\mu_{ij} : i, j = 1, \dots, m \right], \quad (2.25)$$

$$I(\theta) = \left[I_{ij} : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.26)$$

Où :

$I(\theta)$: est la matrice des gains moyens.

$*$: est le produit de Hadamard.

2.4.1.1.4.1 Calcul de la matrice des gains moyens $I(\theta)$

Chaque élément I_{ij} (gain moyen entre u_j et y_i) est calculé par l'intégrale suivante :

$$I_{ij} = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} L^{-1} \left(\frac{g_{ij}(s)}{s} \right) dt. \quad (2.27)$$

Où :

$L^{-1}(\cdot)$: est la transformée de Laplace inverse.

- Pour $s = 0$, la **RDGA** se réduit à la **RGA**.
- Pour un système à deux entrées et deux sorties, on a :

$$\lambda_{11}(s) = \lambda_{22}(s) \quad \text{et} \quad \lambda_{12}(s) = \lambda_{21}(s). \quad (2.22)$$

- La relation entre le Quotient d'Interaction $K_i(s)$ et les éléments de la diagonale de la **RDGA** est la suivante :

$$\lambda_{ii}(s) = \frac{1}{1 - K_i(s)}. \quad (2.23)$$

2.4.1.1.4 Matrice des Gains Dynamiques Moyens (ADGA)

La méthode de la Matrice des Gains Dynamiques Moyens développée en 1979, par Gagnepain et Seborg [27], est basée sur le calcul de l'intégrale de la réponse indicielle en boucle ouverte de chaque élément $g_y(s)$ sur un intervalle de temps bien déterminé. La **ADGA** est définie comme suit :

$$\text{ADGA} = I(\theta) \cdot * [I^{-1}(\theta)]^T, \quad (2.24)$$

avec :

$$\text{ADGA} = \left[\mu_{ij} : i, j = 1, \dots, m \right], \quad (2.25)$$

$$I(\theta) = \left[I_{ij} : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.26)$$

Où :

$I(\theta)$: est la matrice des gains moyens.

$*$: est le produit de Hadamard.

2.4.1.1.4.1 Calcul de la matrice des gains moyens $I(\theta)$

Chaque élément I_{ij} (gain moyen entre u_j et y_i) est calculé par l'intégrale suivante :

$$I_{ij} = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} L^{-1} \left(\frac{g_{ij}(s)}{s} \right) dt. \quad (2.27)$$

Où :

$L^{-1}(\cdot)$: est la transformée de Laplace inverse.

θ_1 : est choisi comme le temps minimal pour lequel la matrice $I(\theta)$ calculée sur l'intervalle $[0, \theta_1]$ ne soit pas singulière.

θ_2 : est choisi tel que :

$$\theta_2 = \theta_1 + \tau_{\max}, \quad (2.28)$$

où :

τ_{\max} : est la plus grande constante du temps du système.

2.4.1.1.4.2 Choix de la configuration de commande

Une fois la ADGA est générée, le choix de la configuration de commande porte sur les couples pour lesquels le gain dynamique moyen μ_{ij} est proche de 1.

Remarques 2.5

- La ADGA est applicable seulement dans le cas d'un système carré ($m = r$).
- La configuration trouvée par l'application de la méthode de la ADGA peut poser un problème de stabilité, car elle débouche sur une configuration avec des interactions faibles mais sans garantir la stabilité des couples et celle du système. Dans ce cas, il est impératif de calculer la RGA pour juger la stabilité des couples trouvés par la ADGA.

2.4.1.1.5 Matrice Dynamique Relative (RDA)

Cette méthode proposée par Witcher et McAvoy [22], repose sur la réponse indicielle en boucle ouverte du système. Elle consiste à calculer la matrice du potentiel dynamique $\phi(\theta)$ en utilisant la formule suivante :

$$\phi_{ij}(\theta) = \int_0^\theta L^{-1} \left(\frac{g_{ij}(s)}{s} \right) dt. \quad (2.29)$$

La borne supérieure du domaine d'intégration θ est choisie entre 20% à 100% de la constante du temps dominante du système.

En remplaçant la matrice des gain statique K_s par la matrice du potentiel dynamique $\phi(\theta)$, on construit la RDA dont les éléments sont donnés par l'expression suivante :

$$\text{RDA} = \phi(\theta) \cdot \left[\phi^{-1}(\theta) \right]^T, \quad (2.30)$$

Avec :

$$\text{RDA} = \left[\mu_{ij}^* : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.31)$$

$$\phi(\theta) = \left[\phi_{ij}(\theta) : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.32)$$

Où :

$\phi(\theta)$: est la matrice du potentiel dynamique.

Une fois la **RDA** est générée, la configuration de commande à choisir est définie par les couples dont les éléments de la **RDA** correspondants sont très grands et positifs.

Propriétés de la Matrice Dynamique Relative (RDA)

- La somme des éléments de chaque ligne ou colonne est égale à 1.

$$\sum_{j=1, j=Cst}^m \mu_{ij}^* = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1, i=Cst}^m \mu_{ij}^* = 1. \quad (2.33)$$

- Lorsque θ tend vers l'infini, la **RDA** se rapproche de la **RGA**.

2.4.1.1.6 Méthodes basées sur le lieu de Nyquist (DNA, INA)

2.4.1.1.6.1 Matrice Directe de Nyquist (DNA)

La Matrice Directe de Nyquist, [27], [42] est une méthode graphique dont le principe est le suivant:

- Construire le lieu de Nyquist de chaque élément $g_{ii}(s)$ de la diagonale de la matrice de transfert $G(s)$ pour ω variant de 0 à $+\infty$.
- Superposer chaque lieu avec les cercles de Gershgorin [46] obtenus pour ω variant de 0 à $+\infty$.

Les coordonnées du centre d'un cercle sont la partie réelle et imaginaire de $g_{ii}(j\omega)$ et le rayon $R_{ii}(\omega)$ du cercle est la somme des modules des éléments de la i -ième colonne sauf le module de l'élément $g_{ii}(s)$ considéré. Le rayon $R_{ii}(\omega)$ est donné par la formule suivante :

$$R_{ii}(\omega) = \sum_{j=1, j \neq i}^m |g_{ij}(j\omega)|. \quad (2.34)$$

2.4.1.1.6.2 Matrice Inverse de Nyquist (INA)

Contrairement à la DNA, la Matrice Inverse de Nyquist utilise l'inverse de la matrice de transfert du système $G(s)$ désignée par $\widehat{G}(s)$. Le principe de INA, [42] est le suivant:

- Calculer $\widehat{G}(s)$ qui est l'inverse de $G(s)$, ($\widehat{G}(s) = G^{-1}(s)$).
- Construire le lieu de Nyquist de chaque élément $\widehat{g}_i(s)$ de la diagonale de la matrice de transfert $\widehat{G}(s)$ pour ω variant de 0 à $+\infty$.
- Superposer chaque lieu avec les cercles de Gershgorin [46] obtenus pour ω variant de 0 à $+\infty$.

Les coordonnées du centre d'un cercle sont la partie réelle et imaginaire de $\widehat{g}_i(j\omega)$ et le rayon $\widehat{R}_i(\omega)$ du cercle est la somme des modules des éléments de la i -ième colonne sauf le module de l'élément $\widehat{g}_i(s)$ considéré. Le rayon $\widehat{R}_i(\omega)$ est donné par la formule suivante :

$$\widehat{R}_i(\omega) = \sum_{j=1, j \neq i}^m |\widehat{g}_j(j\omega)|. \quad (2.35)$$

2.4.1.1.6.3 Interprétation de la DNA et INA

Les deux méthodes présentées permettent d'analyser les interactions entre les boucles de la configuration définie par les éléments de la diagonale de la matrice de transfert. Cette configuration présente des faibles interactions, ou à dominance diagonale, si les cercles de Gershgorin de chaque élément de la diagonale du système $G(s)$ ou $\widehat{G}(s)$ selon la méthode d'analyse considérée, n'encerclent pas l'origine du plan complexe dans la bande de fréquences de travail du système.

Remarques 2.6

- Pour déterminer la configuration de commande adéquate pour la commande multiboucle, il faut appliquer la méthode pour chaque configuration possible ; donc il faut modifier la matrice de transfert du système d'une façon à avoir les éléments de la configuration candidate dans la diagonale.
- En construisant la Matrice Directe de Nyquist de $G(s)$ on peut analyser directement les interactions dans un système, car le lieu de Nyquist d'un élément $g_j(s)$ montre bien l'effet de l'entrée u_j sur la sortie y_j .

2.4.1.1.7 Méthode IMC

Avant d'exposer la méthode d'analyse des interactions par la méthode IMC, on commence par un rappel sur le principe de la commande par modèle interne (IMC) et à présenter quelques notions qui seront utilisées ultérieurement.

2.4.1.1.7.1 Rappel sur la commande par modèle interne (IMC)

Dans la commande par modèle interne [7], [15], [17], la notion de feedback n'intervient que pour corriger l'écart entre l'état observé sur le procédé réel et celui prédit par le modèle, modèle servant lui-même au calcul de la commande.

De façon plus intuitive, cette méthode consiste à soustraire du signal d'écart sa composante prédictible grâce au modèle, pour que ne subsiste dans le signal de «feedback» que la part due aux perturbations et aux erreurs de modèle.

La figure 2.2 montre la structure de la commande par modèle interne, où $G(s)$, $\tilde{G}(s)$ et $G_c(s)$ dénotent respectivement : le processus, le modèle du processus et le régulateur.

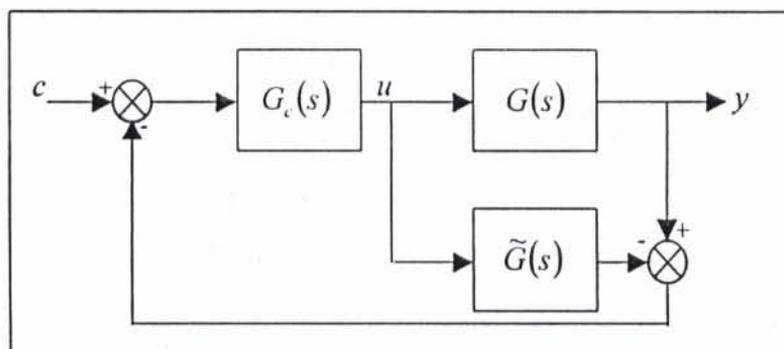


FIG. 2.2 : Structure de la commande par modèle interne.

2.4.1.1.7.2 Conception d'un régulateur SISO dans un environnement multiboucle

Soit $G(s)$ la matrice de fonction de transfert du processus,

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & \cdots & \cdots & g_{2m}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \cdots & g_{mm}(s) \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

et le modèle du processus $\tilde{G}(s)$ tel que :

$$\tilde{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{mm}(s) \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

et le régulateur multivariable $G_c(s)$ suivant :

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} g_{c_{11}}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{c_{22}}(s) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & g_{c_{mm}}(s) \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

avec :

$$g_{c_i}(s) = g_{ii}^{-1}(s) f_i(s), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.39)$$

Où :

$f_i(s)$: est un filtre passe-bas à gain unitaire de forme quelconque. Cependant, il est en général de la forme :

$$f_i(s) = \frac{1}{(\varepsilon_f s + 1)^k}, \quad (2.40)$$

avec :

k : est un nombre entier positif (ordre du filtre) qui est choisi de façon que $g_{c_i}(s)$ soit causale.

ε_f : paramètre du filtre à ajuster pour assurer les performances désirées en boucle fermée.

D'après (2.36) et (2.37), le modèle du système n'est pas parfait, c'est-à-dire $G(s) \neq \tilde{G}(s)$. La stratégie de commande par modèle interne du système $G(s)$ (cas d'un système 2×2) est représentée sur la figure 2.3.

La synthèse de chaque régulateur d'une boucle s'effectue en deux étapes [15], [17] :

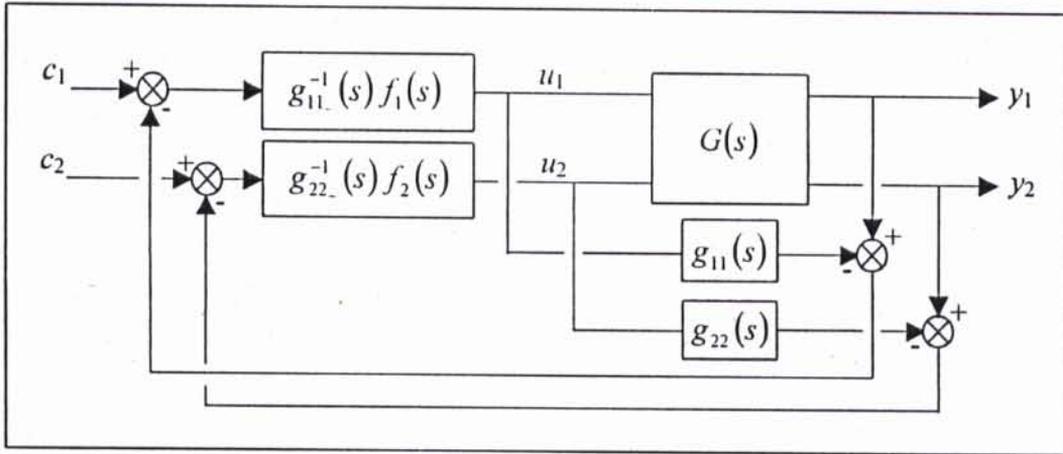


FIG. 2.3 : Commande par modèle interne d'un système 2×2 .

Étape 1.

Factoriser chaque élément $g_u(s)$ de $\tilde{G}(s)$ en deux parties, d'une manière à faire apparaître la partie non inversible,

$$g_u(s) = g_{u_+}(s)g_{u_-}(s), \quad (2.41)$$

avec :

$$|g_{u_+}(0)| = 1. \quad (2.42)$$

Où :

- $g_{u_+}(s)$: est la partie de $g_u(s)$ non inversible (la partie contenant les retards et tous les zéros à partie réelle positive). De plus, le gain de ce transfert est pris égal à 1.
- $g_{u_-}(s)$: est la partie inversible de $g_u(s)$.

Étape 2.

Utiliser la partie inversible $g_{u_-}(s)$ pour concevoir le régulateur de chaque boucle, le régulateur final est pris égal au régulateur idéal $g_{u_-}(s)$ augmenté d'un filtre passe-bas $f_i(s)$ (en général de premier ordre) dont les paramètres (en général un seul) sont ajustés en ligne ou hors ligne pour réduire l'action sur la variable manipulée et augmenter la robustesse du contrôleur aux erreurs de modèle $\tilde{G}(s)$.

La stabilité de la structure de la commande par modèle interne considérée est garantie si chacune des conditions suivantes est satisfaite [15] :

$$\|G_c(s) (G(s) - \tilde{G}(s))\| < 1, \quad (2.43)$$

$$\|(G(s) - \tilde{G}(s)) G_c(s)\| < 1. \quad (2.44)$$

Où :

$\|\cdot\|$: est la norme induite par la norme de la convergence moyenne.

Les relations (2.43) et (2.44) montrent que la stabilité du système en boucle fermée est assurée si le gain de la boucle est inférieur à 1.

Il est important de noter que le passage du système (2.36) au modèle (2.37) les éléments hors diagonale sont éliminés. Comme conséquence, une erreur de modélisation est introduite. Le filtre $f_i(s)$ doit être conçu pour préserver la stabilité du système commandé en présence de telle erreur de modélisation et à «robustifier» le système en boucle fermée vis-à-vis des erreurs du modèle. La condition de stabilité donnée par les deux équations (2.43) et (2.44) «théorème de petit gain» [44], est employée pour dériver les conditions suffisantes de stabilité de la stratégie de commande considérée dans la figure 2.3.

La stabilité est garantie pour n'importe quel filtre stable qui satisfait chacune des deux conditions suivantes (voir annexe B) :

$$|f_i(j\omega)| < f_{l_i}^*(\omega) = \frac{|g_{ii}(j\omega)|}{\sum_{j=1, j \neq i}^m |g_{ij}(j\omega)|}, \quad i = 1, \dots, m, \quad 0 \leq \omega < +\infty, \quad (2.45)$$

$$|f_i(j\omega)| < f_{c_i}^*(\omega) = \frac{|g_{ii}(j\omega)|}{\sum_{j=1, j \neq i}^m |g_{ji}(j\omega)|}, \quad i = 1, \dots, m, \quad 0 \leq \omega < +\infty. \quad (2.46)$$

On remarque que le dénominateur de chaque équation dépend de la configuration de commande choisie, il est préférable d'avoir le coté droit de l'une des équations (2.45) ou (2.46) très grand, car dans le cas des fortes interactions dues aux éléments hors diagonale, les dénominateurs des équations (2.45) et (2.46) seront très grands ; ce qui limite l'ajustement des paramètres des filtres $f_i(s)$ donc l'action des régulateurs [15].

2.4.1.1.7.3 Analyse des interactions par la Méthode IMC

Les questions de conception du filtre et l'évaluation des performances ont été traitées en considérant une configuration particulière de commande. Dans le paragraphe précédent, on a

vu que les filtres $f_i(s)$ influent sur les performances du système en boucle fermée. Dans ce contexte la configuration qui permet de très grandes valeurs des gains des filtres est préférable.

L'analyse des interactions par la méthode du modèle interne (IMC) est introduite par Economou et Morari. Cette méthode est simple et puissante pour différencier entre les configurations de commande possibles et de choisir la meilleure. Economou et Morari concluent que la configuration dont les interactions sont faibles assure de grandes valeurs des gains des filtres.

En utilisant les expressions de $f_{L_i}^*(\omega)$ et $f_{C_i}^*(\omega)$ données par les équations (2.45) et (2.46) respectivement, on définit pour chaque couple entrée-sortie d'une configuration possible les deux quantités suivantes [15] :

$$L_i(\omega) = \frac{1}{1 + f_{L_i}^*(\omega)} = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^m |g_y(j\omega)|}{\sum_{j=1}^m |g_y(j\omega)|}, \quad 0 \leq \omega < +\infty, \quad (2.47)$$

$$C_i(\omega) = \frac{1}{1 + f_{C_i}^*(\omega)} = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^m |g_{j_i}(j\omega)|}{\sum_{j=1}^m |g_{j_i}(j\omega)|}, \quad 0 \leq \omega < +\infty. \quad (2.48)$$

La méthode d'analyse des interactions ainsi développée est basée sur les valeurs de $L_i(\omega)$ et de $C_i(\omega)$ obtenues pour chaque couple d'une configuration.

Interprétation des valeurs de $L_i(\omega)$ et $C_i(\omega)$

En se basant sur les valeurs de $L_i(\omega)$ et de $C_i(\omega)$, dans la bande de fréquences dans laquelle le système travaille, de chaque couple d'une configuration de commande candidate, on peut conclure sur le niveau d'interaction entre les boucles de la configuration en question. Les grandes valeurs de $L_i(\omega)$ et de $C_i(\omega)$ ($L_i(\omega) > 0.5$, $C_i(\omega) < 1$) correspondent à des petits gains des filtres ($f_i^*(\omega) < 1$), ce qui implique des interactions fortes. Par contre, si les valeurs de $L_i(\omega)$ et $C_i(\omega)$ sont petites ($L_i(\omega) > 0$, $C_i(\omega) \leq 0.5$), les interactions entre les boucles de la configuration de commande considérée sont faibles.

Les valeurs de $L_i(\omega)$ et de $C_i(\omega)$ s'interprètent comme suit [15] :

- De faibles valeurs de $L_i(\omega)$ ($L_i(\omega) \leq 0.5$) signifient que la réponse de la i -ième boucle est imposée par son entrée assignée et les interactions avec les autres boucles sont insignifiantes. Lorsque les valeurs de $L_i(\omega)$ sont grandes cela correspond à des fortes interactions de la i -ième boucle avec les autres boucles et la réponse de cette boucle est imposée par d'autres entrées.
- Quand $L_i(\omega)$ est plus grand que $(m-1)/m$, il y a au moins une entrée du système qui est plus importante pour la i -ième boucle que son entrée assignée.
- De petites valeurs de $C_i(\omega) \leq 0.5$ signifient que u_j commande y_i , sa sortie assignée, et ses effets sur les autres sorties du système sont négligeables. Inversement, les valeurs élevées de $C_i(\omega)$ indiquent que u_j de préférence doit commander certaines autres sorties du système que la sortie assignée y_i .
- Lorsque $C_i(\omega)$ est plus grand que $(m-1)/m$, il y a au moins une autre sortie du système qui est affectée considérablement par u_j , en plus de la sortie y_i assignée.

La combinaison de l'information donnée par $L_i(\omega)$ est celle donnée par $C_i(\omega)$ permet d'avoir des informations concernant les interactions entre les boucles d'une configuration candidate et de sélectionner la meilleure. Le tableau 2.3 résume les cas possibles et leur interprétation.

| CAS POSSIBLES. | INTERPRETATION. |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $L_i(\omega) \leq 0.5$ et $C_i(\omega) \leq 0.5$ | Les couples entrée-sortie correspondants définissent la meilleure configuration de commande. La i -ième boucle est indépendante des autres boucles, alors pas d'interactions entre les boucles |
| $L_i(\omega) \geq 0.5$ et $C_i(\omega) \leq 0.5$ | Une détérioration des performances est plus probable d'être perçue dans une autre boucle due aux interactions avec la i -ième boucle |
| $L_i(\omega) \leq 0.5$ et $C_i(\omega) \geq 0.5$ | |
| $L_i(\omega) \geq 0.5$ et $C_i(\omega) \geq 0.5$ | Mauvaise configuration de commande, existence de fortes interactions entre la i -ième boucle et les autres boucles de la configuration considérée |

TAB. 2.3 : Analyse des interactions par la méthode du modèle interne.

En résumé, pour l'analyse des interactions par la méthode de commande par modèle interne, il est judicieux de préparer pour chaque configuration de commande possible les graphes de $L_i(\omega)$ et de $C_i(\omega)$ correspondants à ses couples. La configuration dont $L_i(\omega) \leq 0.5$ et/ou $C_i(\omega) \leq 0.5$ pour tous les couples dans la bande de fréquences de travail du système est le meilleur choix qui assure de faibles interactions.

2.4.1.1.8 Matrice des Potentiels d'Interaction (IPM)

La méthode de la Matrice des Potentiels d'Interaction (IPM) développée en 1994 par Huang, Ohshima et Hashimoto [25], fournit des informations concernant la possibilité d'interaction d'une boucle avec d'autres boucles du système en boucle fermée. Cette méthode est développée sur la base de la théorie de commande par modèle interne d'un système multivariable. Elle permet de déterminer une configuration de commande avec un niveau d'interaction faible tout en garantissant la stabilité du système global. La sélection de la configuration convenable parmi les $m!$ configurations possibles est basée sur le calcul de la IPM dont chaque élément est déterminé par l'intégrale double suivante [25] :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{\pi(\varepsilon_f^* - \varepsilon_f)} \int_{\varepsilon_f}^{\varepsilon_f^*} \int_{\varepsilon_f}^{\varepsilon_f^*} \left\| \frac{h_{ij}(j\omega)}{\omega} \right\|_2^2 d\omega d\varepsilon_f, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (2.49)$$

avec :

$$h_{ij}(j\omega) = (1 - \sigma_{ij}(j\omega)) R_{ij}(j\omega) M_{ij}^{-1}(j\omega), \quad (2.50)$$

$$\sigma_{ij}(j\omega) = \frac{g_{ij+}(j\omega) f_i(j\omega) \lambda_{ij}^{-1}(j\omega)}{1 + (\lambda_{ij}^{-1}(j\omega) - 1) g_{ij+}(j\omega) f_i(j\omega)}, \quad (2.51)$$

$$\text{IPM} = \left[\Omega_{ij} : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.52)$$

Où :

$\|\cdot\|_2$: est la norme euclidienne du vecteur $h(j\omega)$.

$R_{ij}(j\omega)$: est le vecteur ligne obtenu par l'élimination de l'élément $g_{ij}(j\omega)$ de la i -ième ligne de la matrice de transfert du système $G(j\omega)$.

$M_{ij}(j\omega)$: est la sous matrice de $G(j\omega)$ obtenue par l'élimination de la i -ième ligne et

la j -ième colonne de $G(j\omega)$.

$g_{j+}(j\omega)$: est la partie non inversible (contient les retards et les zéros instables) de l'élément $g_j(j\omega)$, avec le module de $g_{j+}(j\omega)$ pour $\omega = 0$ doit être égal à 1.

$f_i(j\omega)$: est le filtre ajustable (premier ordre) assurant les performances désirées de chaque boucle de commande,

$$f_i(j\omega) = \frac{1}{\varepsilon_j j\omega + 1}. \quad (2.53)$$

$\lambda_j(j\omega)$: est le gain dynamique relatif de la boucle $[u_j - y_j]$.

Détermination de la configuration de commande

La sélection de la configuration convenable par la **IPM** passe par les deux étapes suivantes :

1. Élimination des couples instables.
2. Sélection des couples par l'utilisation de la **IPM**.

Étape 1. Élimination des couples instables

En utilisant la matrice des gains relatifs (**RGA**), les couples ayant le gain relatif λ_j négatif sont à éliminer, ce-ci permet de réduire le nombre de configurations candidates.

Étape 2. Sélection des couples par la **IPM**

Théoriquement il y a $m!$ configurations possibles, après l'élimination des couples dont le gain relatif est négatif, il reste à sélectionner parmi les autres la meilleure configuration, en suivant les deux étapes ci-après :

Étape 1. Détermination de la configuration initiale

D'après l'expression (2.49), un intervalle de ε_j est requis pour calculer la **IPM** ; la valeur de ε_j^* dépend de la valeur de ε_j° choisie. Au départ on commence par une petite valeur de ε_j° pour calculer les éléments Ω_{ij} de la **IPM**. Une fois la **IPM** est déterminée, on calcule le potentiel d'interaction total (**TIP**) de chaque configuration

candidate. Le **TIP** d'une configuration de commande est la somme des éléments Ω_{ij} correspondants aux couples de cette dernière. Comme configuration de commande initiale, on opte pour la configuration ayant un **TIP** faible.

Étape 2. Détermination de la meilleure configuration

La stabilité et les performances obtenues en boucle fermée indiquent si le choix de la valeur de ε_j^* dans l'étape 1 est convenable. Si cette dernière assure la stabilité et les performances désirées pour chaque variable commandée y_i , alors la configuration trouvée dans l'étape 1 est convenable pour la commande multiboucle. Dans le cas contraire, on augmente la valeur de ε_j^* et celle de ε_j^* pour changer l'intervalle de ε_j et on répète les deux étapes 1 et 2 jusqu'à l'obtention de la valeur de ε_j^* appropriée, d'où la meilleure configuration de commande.

La figure 2.4 représente l'organigramme de la **IPM**.

Remarques 2.7

- Lorsqu'on calcul la **IPM**, il est inutile de calculer l'élément Ω_{ij} d'un couple éliminé.
- Cette méthode est développée sur la base de la commande par modèle interne du système, dans laquelle le modèle du système est considéré parfait.

2.4.1.2 Méthode d'analyse utilisant la représentation d'état

La représentation par matrice de transfert $G(s)$ ne donne que les relations entre les entrées et les sorties d'un système sans mettre en évidence la structure interne de ce dernier, d'où des informations importantes pour une analyse fine et approfondie des interactions sont omises [28–30]. Par contre la représentation d'état $S(A, B, C, D)$ tient compte des informations internes du système (la structure interne) qui n'apparaissent pas nécessairement sur la description par matrice de transfert. Cette constatation est renforcée par le fait qu'un système donné possède plusieurs représentations d'état, en plus il y a des systèmes qui possèdent une même représentation par matrice de transfert mais leurs structures internes sont complètement différentes [8], [10], [18].

La représentation d'état constitue une alternative intéressante pour l'analyse des interactions. Dans cette section nous allons présenter des méthodes d'analyse des interactions utilisant la représentation d'état tout en définissant des nouvelles notions couramment utilisées dans le domaine d'analyse des interactions.

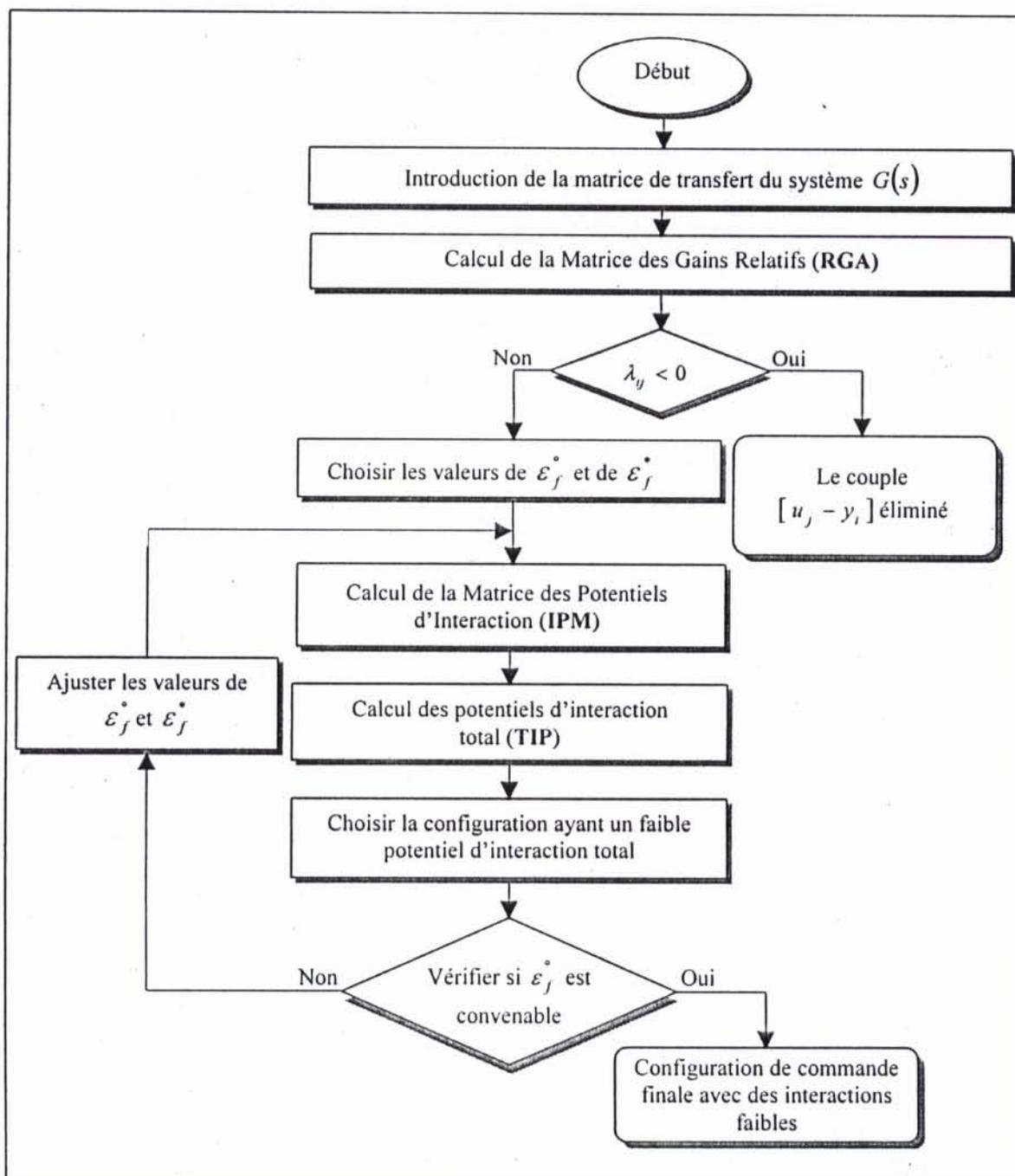


FIG. 2.4 : Organigramme de détermination de la configuration de commande par la méthode de la Matrice des Potentiels d'Interaction (IPM).

2.4.1.2.1 Matrice des Gains Directs d'Interactions Statique (DGM(0))

La Matrice des Gains Directs d'Interactions Statique développée par Johnston et Barton est basée sur la notion du gain statique direct entre une entrée et une sortie du système [28 – 29]. Le principe de la méthode consiste en premier lieu à calculer la matrice des gains directs statique K_s^d , ensuite on utilise cette matrice pour générer la **DGM(0)** qui permet d'analyser les interactions entre les variables du système et de déterminer la meilleure configuration de commande.

Le calcul de la matrice K_s^d peut se faire par deux méthodes :

1. Utilisation du graphe de fluence.
2. Utilisation directe du modèle d'état.

2.4.1.2.1.1 Calcul de la matrice des gains statiques K_s^d

1. Utilisation du graphe de fluence

Le gain direct $K_{s_j}^d$ entre une entrée u_j et une sortie y_i est défini par toutes les chaînes directes entre u_j et y_i , à l'exception des chaînes qui passent par les nœuds correspondants à d'autres sorties y_k ($k \neq i$) et les nœuds correspondants aux variables d'état x_i qui interviennent dans les expressions des sorties y_k ($k \neq i$).

Pour déterminer les gains directs entre les entrées u_j ($j = 1, \dots, m$) et la sortie y_i , on remplace dans le modèle d'état statique du système les autres sorties y_k ($k \neq i$) par zéro. En construisant le graphe de fluence correspondant au nouveau système résultant et d'après la définition du gain statique direct on détermine la matrice K_s^d en utilisant la règle de Mason.

2. Utilisation directe du modèle d'état

Soit un système donné par le modèle d'état $S(A, B, C, D)$ suivant :

$$\dot{x} = A x + B u, \quad (2.54)$$

$$y = C x + D u. \quad (2.55)$$

Où :

Les vecteurs x , y et u sont de dimensions $n \times 1$, $r \times 1$ et $m \times 1$ respectivement.

Pour déterminer les gains directs statiques entre chaque entrée et la i -ième sortie, on suit les étapes suivantes :

Étape 1. Remplacer les variables d'états correspondantes aux autres sorties y_k ($k \neq i$) dans le modèle d'état par la valeur zéro, ce qui donne un nouveau système :

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \quad (2.56)$$

$$y_i = C_i x_i + D_i u_i. \quad (2.57)$$

Où :

Les vecteurs x_i , y_i et u_i sont de dimensions $(n-r+1) \times 1$, 1×1 et $m \times 1$ respectivement.

Étape 2. La i -ième ligne de la matrice K_s^d est obtenue par l'expression suivante :

$$l_i = C_i (-A_i)^{-1} B_i + D_i, \quad (2.58)$$

on refait les deux étapes 1 et 2 pour i allant de 1 jusqu'à r pour déterminer la matrice K_s^d .

$$K_s^d = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_r \end{bmatrix} = [K_{s_{ij}}^d : i = 1, \dots, r ; j = 1, \dots, m]. \quad (2.59)$$

2.4.1.2.1.2 Calcul de la Matrice des Gains Directs D'Interaction Statique DGM(0)

Une fois la matrice K_s^d est obtenue, on détermine la **DGM(0)** dont chaque élément γ_{ij} se calcule comme suit :

$$\gamma_{ij} = \frac{|K_{s_{ij}}^d|}{\sum_{k=1}^r |K_{s_{kj}}^d|}, \quad (2.60)$$

alors :

$$\text{DGM}(0) = [\gamma_{ij} : i = 1, \dots, r ; j = 1, \dots, m]. \quad (2.61)$$

Les couples correspondants à des éléments γ_{ij} qui sont proches de 1 définissent la meilleure configuration de commande.

2.4.1.2.2 Matrice des Gains Directs d'Interactions Dynamique $DGM(\omega)$

La méthode de la Matrice des Gains Directs d'Interactions Dynamique ($DGM(\omega)$) est une extension dynamique de la $DGM(0)$ [29]. Pour déterminer la $DGM(\omega)$ on calcul d'abord la matrice des gains directs dynamique $K_d^d(s)$ en suivant les mêmes étapes 1 et 2 décrites précédemment (utilisation du modèle d'état pour le calcul de la K_x^d) sauf que la i -ième ligne de la matrice $K_d^d(s)$ dans ce cas se détermine par l'expression suivante :

$$l_i(s) = C_i (sI - A_i)^{-1} B_i + D_i, \quad (2.62)$$

d'où la matrice des gains directs dynamique :

$$K_d^d(s) = \begin{bmatrix} l_1(s) \\ l_2(s) \\ \vdots \\ l_r(s) \end{bmatrix} = \left[K_{d_{ij}}^d(s) : i = 1, \dots, r ; j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.63)$$

Les éléments de la $DGM(\omega)$ sont déterminés par l'expression suivante :

$$\delta_{ij}(\omega) = \frac{|K_{d_{ij}}^d(j\omega)|}{\sum_{k=1}^r |K_{d_{ik}}^d(j\omega)|}, \quad (2.64)$$

alors :

$$DGM(\omega) = \left[\delta_{ij}(\omega) : i = 1, \dots, r ; j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.65)$$

La configuration définie par les couples correspondants aux éléments $\delta_{ij}(\omega)$ qui sont les plus proches de 1 dans la bande de fréquences dans laquelle le système travaille, représentent la meilleure configuration de commande dont les interactions entre les boucles de commande sont très faibles.

Remarque 2.8

- La matrice $K_d^d(s)$ peut être déterminée en utilisant la méthode du graphe de fluence décrite dans le paragraphe 2.4.1.2.1, seulement au lieu de travailler avec le modèle statique du système on utilise le modèle dynamique.

2.4.1.2.3 Matrice d'Interaction Dynamique Directe (DDM)

Le principe de la **DDM** est basé sur le calcul de la matrice des gains directs dynamique $K_d^d(s)$, puis calculer la matrice des valeurs moyennes des sorties \bar{y}_d^d dont chaque élément $\bar{y}_{d_{ij}}^d$ est déterminé par l'expression mathématique suivante [28]:

$$\bar{y}_{d_{ij}}^d = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta L^{-1} \left(\frac{K_{d_{ij}}^d(s)}{s} \right) dt, \quad (2.66)$$

où :

θ : est la plus grande constante du temps du système.

Le choix de la configuration de commande repose sur l'analyse des éléments de la matrice **DDM** trouvée. Les éléments de cette dernière sont déterminés par la formule suivante :

$$\delta_{ij}^* = \frac{|\bar{y}_{d_{ij}}^d|}{\sum_{k=1}^r |\bar{y}_{d_{ik}}^d|}, \quad (2.67)$$

d'où :

$$\text{DDM} = \left[\delta_{ij}^* : i = 1, \dots, r ; j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.68)$$

La configuration de commande à choisir est celle définie par les couples ayant δ_{ij}^* proche de 1.

Remarques 2.9

- Les méthodes **DGM(0)**, **DGM(ω)** et de la **DDM** sont applicables même pour un système dont le nombre d'entrées est différent de celui de sorties ($m \neq r$).
- Ces méthodes n'assurent pas la stabilité des couples choisis comme configuration de commande. Donc il faut la vérifier en utilisant la **RGA**.
- La dimension de chaque matrice (**DGM(0)**, **DGM(ω)**, **DDM**) est $r \times m$, qui est la dimension de la matrice de transfert du système $G(s)$.

2.4.1.2.4 Matrice D'Effets Directs (SIA)

Lorsqu'on effectue un changement de consigne d'une sortie y_i ou une perturbation affecte cette sortie, une commande u_j est générée (entrée assignée à y_i) pour maintenir la sortie y_i à son point de consigne. Au même temps toutes les sorties y_k ($k = 1, \dots, m; k \neq i$) doivent être maintenues à leurs points de consignes, par manipulation des entrées u_l ($l = 1, \dots, m; l \neq j$).

L'analyse des interactions par la Matrice d'Effets Directs proposée par Johnston a pour principe de décomposer le gain en boucle fermée entre une entrée u_j et une sortie y_i en trois composantes [30] :

- (a) Effet direct ;
- (b) Effet d'interaction sorties-sortie;
- (c) Effet d'interaction entrées-sortie.

Cette décomposition est illustrée par la figure 2.5. Les effets (a), (b) et (c) sont déterminés en utilisant le graphe de fluence correspondant au modèle statique du système et la règle de Mason.

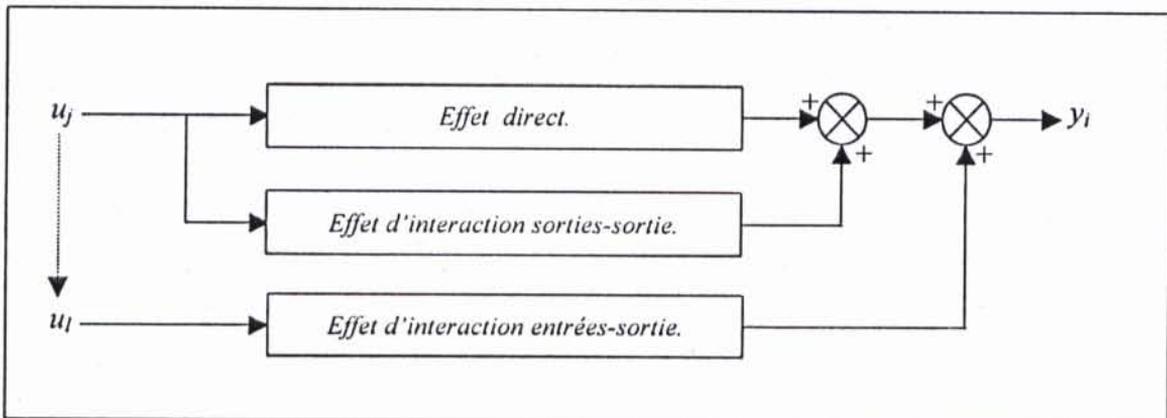


FIG. 2.5 : Décomposition du gain en boucle fermée.

L'effet est défini comme le produit du gain entre une entrée u_j et une sortie y_i par la variation de u_j désignée par δu_j [30].

$$\text{Effet} = T_{u_j \rightarrow y_i} \delta u_j. \quad (2.69)$$

Avec :

$T_{u_j \rightarrow y_i}$: est le gain entre u_j et y_i déterminé selon le cas considéré parmi les trois cas (a), (b) et (c) en utilisant la règle de Mason.

(a) *Effet direct*

C'est l'effet de u_j sur y_i déterminé par toutes les chaînes directes entre u_j et y_i à l'exception des chaînes qui passent par les nœuds (variables d'état) correspondants à d'autres sorties y_k ($k \neq i$) et les nœuds correspondants aux variables d'état x_i qui interviennent dans les expressions des sorties y_k ($k \neq i$). C'est l'effet de non-interaction, il est désigné par :

$$DE_{u_j \rightarrow y_i}$$

(b) *Effet d'interaction sorties-sortie*

C'est l'effet de u_j sur y_i déterminé par toutes les chaînes directes entre u_j et y_i , y compris celles qui passent par les nœuds des autres sorties y_k ($k \neq i$), c'est l'effet d'interaction entre les boucles et il est désigné par :

$$OIE_{u_j \rightarrow y_i}$$

(c) *Effet d'interaction entrées-sortie*

En boucle fermée un changement d'une entrée u_j conduit à des variations des autres entrées u_l ($l \neq j$) dans le but de maintenir leurs sorties assignées à leurs points de consignes. Le changement de chaque entrée u_l a un effet sur la sortie y_i . L'effet d'interaction entrées-sortie est la somme des effets provoqués par toutes les entrées u_l ($l = 1, \dots, m; l \neq j$) sur la sortie y_i , et il représente aussi un effet d'interaction désigné par :

$$IIE_{u_j \rightarrow y_i}$$

Pour un changement de y_i d'une unité, la somme des trois effets est le gain en boucle fermée entre u_j et y_i . Pour choisir une configuration avec des faibles interactions, il suffit de choisir les couples pour lesquels l'effet direct est proche de 1. Donc il faut générer seulement la Matrice d'Effets Directs (SIA) du système pour pouvoir dégager la configuration adéquate.

Calcul de la Matrice des Effets Directs (SIA)

Pour générer la Matrice D'Effets Directs d'un système on suit les étapes suivantes [30] :

Étape 1. $i = 1$.

Étape 2. $j = 0$, On considère un changement $\delta y_i = 1$ de y_i et les autres sorties inchangées

$\delta y_k = 0$ ($k = 1, \dots, m; k \neq i$). On remplace dans le modèle statique du système δy_i

par 1 et δy_k par zéro pour $k = 1, \dots, m; k \neq i$.

Étape 3. Résoudre le système d'équations résultant de l'étape 2 pour calculer les variations δu_j ; $j = 1, \dots, m$.

Étape 4. Calculer l'effet direct $DE_{u_j \rightarrow y_i}$, élément (i, j) de la matrice **SIA**, entre u_j et y_i .

Étape 5. Si $j < m$, étape 4.

Si $j = m$, $i = i + 1$.

Si $i < m$, étape 2. Sinon fin.

D'où :

$$\mathbf{SIA} = \left[DE_{u_j \rightarrow y_i} : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.70)$$

Une fois la matrice **SIA** est générée, les couples correspondants aux éléments proches de 1 définissent la configuration de commande avec de faibles interactions.

Remarques 2.10

- La somme des trois effets $DE_{u_j \rightarrow y_i}$, $OIE_{u_j \rightarrow y_i}$ et $IIE_{u_j \rightarrow y_i}$ est égale à 1.
- La Matrice d'Effets Directs (**SIA**) peut conduire au choix des couples instables. Il est donc indispensable de vérifier la stabilité des couples choisis par l'application de cette méthode en calculant la **RGA** du système, car un couple peut avoir un effet direct proche de 1 par contre son gain relatif correspondant est négatif. Dans ce cas, on refait le choix en utilisant la même Matrice d'Effets Directs **SIA** trouvée.

2.4.1.2.5 Matrice des Gains Dynamiques Relatifs (DRGA)

La Matrice des Gains Dynamiques Relatifs (**DRGA**) a été proposée par Tung et Edgar [50], elle est aussi une extension dynamique de la Matrice des Gains Relatifs (**RGA**). Le calcul de cette matrice est basé sur l'utilisation du modèle d'état du système contrairement à l'extension intuitive introduite par Bristol qui utilise la matrice de transfert du système.

Considérons un système dynamique linéaire donnée par son modèle d'état,

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.71)$$

$$y = Cx. \quad (2.72)$$

Le système doit être commandable et observable. Considérons un changement de vecteur de consignes c qui passe de zéro à c° et le vecteur de commande nécessaire pour positionner le vecteur de sorties y à cette nouvelle valeur de consigne est u° .

En régime permanent,

$$0 = A x^\circ + B u^\circ. \quad (2.73)$$

Supposons que le système est stable, la résolution de l'équation (2.73) par rapport à x° donne :

$$x^\circ = (-A)^{-1} B u^\circ, \quad (2.74)$$

alors,

$$y^\circ = C x^\circ, \quad (2.75)$$

$$y^\circ = C (-A)^{-1} B u^\circ. \quad (2.76)$$

Cette dernière équation donne,

$$u^\circ = [C (-A)^{-1} B]^{-1} y^\circ. \quad (2.77)$$

En prenant les conditions initiales nulles, la réponse de la sortie dans le domaine de Laplace sera :

$$y(s) = C x(s), \quad (2.78)$$

$$y(s) = C (sI - A)^{-1} B \frac{u^\circ}{s}, \quad (2.79)$$

$$y(s) = C (sI - A)^{-1} B [C (-A)^{-1} B]^{-1} \frac{y^\circ}{s}, \quad (2.80)$$

$$y(s) = G(s) K_s^{-1} \frac{y^\circ}{s} = G(s) \Gamma \frac{y^\circ}{s}. \quad (2.81)$$

Sous forme matricielle $y(s)$ sera :

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \cdots & g_{mm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1m} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & & \Gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{m1} & \Gamma_{m2} & \cdots & \Gamma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_m^* \end{bmatrix} \frac{1}{s}, \quad (2.82)$$

d'où :

$$y_i(s) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m g_{ik}(s) \Gamma_{kj} \right) \frac{y_j^*}{s}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.83)$$

Maintenant considérons un changement d'un échelon y_i^* de la sortie y_i seulement, dans ce cas la réponse de y_i sera :

$$y_i(s) = \left(\sum_{k=1}^m g_{ik}(s) \Gamma_{ki} \right) \frac{y_i^*}{s}, \quad (2.84)$$

dans cette dernière équation le k -ième terme dans la somme est l'effet du k -ième régulateur sur la sortie y_i . À partir de l'équation (2.83), on définit la nouvelle Matrice des Gains Dynamiques Relatifs **DRGA** suivante :

$$\text{DRGA} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^*(s) & \cdots & \lambda_{1m}^*(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1}^*(s) & \cdots & \lambda_{mm}^*(s) \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

Où :

$$\lambda_{ij}^*(s) = \frac{g_{ij}(s) \Gamma_{ji}}{s}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (2.86)$$

Pour que l'entrée u_j commande la sortie y_i sans avoir d'effets sur d'autres sorties y_k ($k \neq i$), il faut que l'élément $\lambda_{ij}^*(s)$ correspondant au couple $[u_j - y_i]$ dans la **DRGA**, doit être l'élément dominant dans la i -ième ligne.

2.4.2 Méthode d'analyse indirecte

2.4.2.1 Matrice des Amplitudes Relatives Dynamiques (DRMA)

Cette méthode ne permet pas de dégager une configuration de commande [32 – 33], mais permet d'analyser les interactions présentes dans un système en boucle fermée (commande

multiboucle). Le principe de la **DRMA** [32 – 33] consiste à choisir en premier lieu une configuration de commande en utilisant l'une des méthodes d'analyse des interactions directe, ensuite on détermine le correcteur de chaque boucle. Après la synthèse du système de commande multiboucle, on calcul la **DRMA** pour analyser les interactions dans le système en boucle fermée résultant.

Pour le système de la figure 2.1, la **DRMA** correspondante est [32 – 33]:

$$\text{DRMA} = \begin{bmatrix} \left(\frac{y_1(s)}{c_1(s)} \right)_{oo} & \left(\frac{y_1(s)}{c_2(s)} \right)_{ff} \\ \left(\frac{y_1(s)}{c_1(s)} \right)_{of} & \left(\frac{y_2(s)}{c_2(s)} \right)_{ff} \\ \left(\frac{y_2(s)}{c_1(s)} \right)_{ff} & \left(\frac{y_2(s)}{c_2(s)} \right)_{oo} \\ \left(\frac{y_2(s)}{c_2(s)} \right)_{fo} & \left(\frac{y_2(s)}{c_2(s)} \right)_{fo} \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

$$\text{DRMA} = \left[\chi_{ij}(s) : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.88)$$

Où :

oo : indique que les deux boucles sont ouvertes.

of : indique que la première boucle (I) est ouverte et la deuxième boucle (II) est fermée.

cc : indique que les deux boucles sont fermées.

fo : indique que la première boucle (I) est fermée et la deuxième boucle (II) est ouverte.

Une fois la **DRMA** est déterminée, on trace le diagramme de Bode (courbe du module) de chaque élément $\chi_{ij}(s)$ de la matrice, les diagrammes de Bode obtenus permettent d'analyser les interactions entre les boucles de la configuration choisie.

L'usage de la **DRMA** pour l'analyse des interactions présente deux intérêts distincts :

- Vérification de la commodité de la configuration de commande choisie.
- Examiner le phénomène de propagation de perturbations dans les boucles de commande.

Interprétation de la Matrice des Amplitudes Relative (DRMA)

- Si les éléments de la diagonale de la **DRMA** sont proches de 1 dans la bande de fréquences utile, les interactions dans le système en boucle fermée seront insignifiantes.
- Les éléments hors diagonale permettent d'examiner l'effet de chaque boucle sur une autre. Si l'élément $\chi_{ij}(s)$ ($i \neq j$) est grand (dans la bande de fréquences de travail), alors la commande u_j affecte fortement y_i , par contre si $\chi_{ij}(s)$ ($i \neq j$) est proche de zéro la sortie y_i est faiblement affectée par u_j .

Remarques 2.11

- Pour analyser les interactions par la **DRMA**, on peut choisir par exemple la configuration de commande en utilisant la **RGA**. Cette dernière est valable seulement pour les systèmes travaillant autour de la fréquence nulle ; ainsi en utilisant la **DRMA** on vérifie l'adéquation de la configuration issue de l'application de la **RGA** pour une commande multiboucle.
- Si les résultats d'analyse obtenus par l'application de la **DRMA** ne sont pas probants, alors on refait le choix de la configuration de commande ($m!$ configurations sont possibles) et on reprend l'analyse de nouveau pour déterminer la meilleure configuration.
- Les éléments hors diagonale de la **DRMA** donnent des informations sur l'effet d'une boucle sur une autre (propagation d'une perturbation), dû essentiellement à l'influence des paramètres du régulateur d'une boucle sur les autres car la **DRMA** ne suppose pas que les régulateurs sont parfaits.

2.4.2.2 Matrice des Gains Dynamiques Relatifs Généralisés (GDRG)

Huang, Ohshima et Hashimoto ont proposé en 1994, la Matrice des Gains Dynamiques Relatifs Généralisée (**GDRG**) pour l'analyse des interactions dans un système multivariable en boucle fermée [25]. Contrairement aux méthodes de la première classe, la **GDRG** ne suppose pas que les régulateurs sont parfaits. L'idée de la méthode consiste à analyser les interactions après le choix d'une configuration et la synthèse des régulateurs, l'application de la méthode permet d'évaluer le niveau d'interaction entre les boucles de la configuration considérée. Chaque élément de la matrice est déterminé par [25] :

$$\tilde{\lambda}_y(s) = \frac{\left(\frac{\partial y_i(s)}{\partial u_j(s)} \right)_{\text{Boucle ouverte}}}{\left(\frac{\partial y_i(s)}{\partial u_j(s)} \right)_{\text{Boucle fermée}}}. \quad (2.89)$$

D'où :

$$\text{GDRG} = \left[\tilde{\lambda}_{ij}(s) : i, j = 1, \dots, m \right]. \quad (2.90)$$

Par la définition (2.89), le gain dynamique relatif généralisé $\tilde{\lambda}_{ij}(s)$ indique le changement du gain en boucle ouverte entre u_j et y_i dû aux interactions et aux effets des paramètres des régulateurs des autres boucles.

Pour éclaircir le principe de la méthode, on considère le cas général d'un système à deux entrées et à deux sorties en boucle fermée de la figure 2.1.

D'après la stratégie de commande considérée (commande multiboucle), on constate que la configuration de commande choisie est $[u_1 - y_1] ; [u_2 - y_2]$. Pour analyser les interactions dans ce système, on détermine les éléments de la **GDRG** par l'utilisation de la règle de Mason et l'expression de gain dynamique relatif généralisé (2.89). On se limitera au calcul de $\tilde{\lambda}_{11}(s)$ et $\tilde{\lambda}_{22}(s)$ seulement vu la configuration de commande considérée, le calcul donne :

$$\tilde{\lambda}_{11}(s) = \frac{1}{1 + \eta_2^*(s)(\lambda_{11}^{-1}(s) - 1)}, \quad (2.91)$$

$$\tilde{\lambda}_{22}(s) = \frac{1}{1 + \eta_1^*(s)(\lambda_{22}^{-1}(s) - 1)}. \quad (2.92)$$

Avec :

$$\eta_i^*(s) = \frac{g_{c_u}(s)g_u(s)}{1 + g_{c_u}(s)g_u(s)}, \quad i = 1, 2. \quad (2.93)$$

On remarque que $\tilde{\lambda}_{11}(s)$ est différent de $\tilde{\lambda}_{22}(s)$ et sont en fonction des éléments de $G(s)$ et des régulateurs $g_{c_u}(s)$.

2.4.2.2.1 Interprétation de la Matrice des Gains Dynamiques Généralisée (GDRG)

- Si le module de $\tilde{\lambda}_{11}(s)$ et $\tilde{\lambda}_{22}(s)$ est proche de 1 dans la bande de fréquences de travail du système, alors les interactions entre les boucles sont faibles, donc on garde la configuration de commande choisie ainsi que les régulateurs obtenus.
- Dans le cas où le module de $\tilde{\lambda}_{11}(s)$ et celui de $\tilde{\lambda}_{22}(s)$ ne sont pas proches de 1, on peut jouer sur les paramètres des régulateurs $g_{c_{11}}(s)$ et $g_{c_{22}}(s)$ d'une manière à faire tendre $\eta_1^*(s)$ et $\eta_2^*(s)$ vers zéro dans la bande de fréquence de travail, mais ce-ci se traduit par une détérioration des performances. On peut alors procéder d'une autre manière en considérant la deuxième configuration de commande, à savoir $[u_1 - y_2] ; [u_2 - y_1]$ et les régulateurs adéquats pour les boucles de cette dernière. On refait le calcul de la **MGRG** pour tirer une conclusion sur les interactions dans le système et opter pour la meilleure configuration parmi les deux configurations possibles.

2.4.2.2.2 Propriétés de la matrice des gains dynamiques généralisée (GDRG)

- Si $\eta_1^* = 1$ et $\eta_2^* = 1$, la **GDRG** se réduit à la **RDGA**.
- En régime permanent ($s = 0$), si des régulateurs à action intégrale sont utilisés dans chaque boucle, $\eta_i^* = 1 (i = 1, 2)$, la **GDRG** reflète la **RGA**.

Remarque 2.12

- La **GDRG** s'applique seulement dans le cas où le système est carré ($m = r$).

2.5 Système à grande échelle à matrice de transfert triangulaire

Un cas particulier des systèmes multivariables est rencontré fréquemment dans l'industrie et il est représenté par une matrice de transfert $G(s)$ triangulaire. Pour ce type de système, une seule configuration de commande est possible (configuration définie par les éléments de la diagonale de la matrice de transfert $G(s)$). Dans ce cas de figure, il est impératif d'examiner l'effet de chaque grandeur d'entrée sur l'ensemble de sorties affectées, car l'application de quelques méthodes d'analyse d'interactions exposées conduit à un résultat erroné, en

présentant la seule configuration de commande possible comme la configuration meilleure pour la commande multiboucle [42].

Pour voir si la commande multiboucle est envisageable en optant pour la seule configuration de commande possible, on procède de la manière suivante [1], [42] :

On examine l'effet de chaque commande u_j sur l'ensemble de sorties y_i qu'elle affecte en calculant le rapport suivant :

$$\beta_{ij}(\omega) = \left| \frac{g_{ij}(j\omega)}{g_{ii}(j\omega)} \right|. \quad (2.94)$$

Ensuite, on construit le graphe de $\beta_{ij}(\omega)$ pour ω allant de zéro à l'infini. Si le module $\beta_{ij}(\omega)$ est inférieur à 1 dans la bande de fréquences de travail du système, l'effet de u_j sur la sortie y_i est faible par rapport à celui de la commande assignée et il est négligeable lorsque $\beta_{ij}(\omega)$ est proche de zéro. Dans le cas contraire u_j a un effet considérable sur y_i .

2.6 Conclusion

Les méthodes d'interactions développées sont applicables seulement pour l'analyse des interactions dans un système invariant dont le modèle est linéaire, ainsi un modèle non-linéaire peut être linéarisé autour d'un point de fonctionnement ou d'une trajectoire, et remplacé par son modèle linéaire.

Les méthodes de la première classe (méthodes d'analyse directe) sont plus utilisées car elles permettent d'analyser les interactions et de déterminer une configuration de commande avec un faible niveau d'interactions. Les méthodes utilisant le modèle statique ne sont valables que pour les systèmes travaillant autour de la fréquence nulle, par contre les méthodes basées sur le modèle dynamique conduisent généralement à une configuration de commande assurant de faibles interactions entre les variables de commande et celles à commander sur une bande de fréquences déterminée ; alors il suffit de connaître la bande de fréquences dans laquelle le système travaille pour bien choisir la configuration convenable. L'approche fréquentielle (utilisation du domaine fréquentiel) utilisée pour l'analyse et la recherche de la meilleure configuration de commande reste le point fort des méthodes d'analyse utilisant le modèle dynamique du système.

Les méthodes d'analyse utilisant la représentation d'état présentent un avantage par rapport à celles utilisant la matrice de transfert, car le modèle d'état d'un système représente explicitement les relations internes entre les variables d'état, ce qui n'est pas le cas de la

représentation par matrice de transfert. Cette dernière est caractérisée par une omission d'informations fondamentales et importantes sur la structure interne du système.

La représentation par graphe de fluence d'un système est la représentation la plus correcte, car elle permet de préserver la structure dynamique du système. Celle-ci introduit diverses notions importantes pour une analyse poussée des interactions dans un système multivariable comme le gain statique direct, le gain dynamique direct, l'effet direct, l'effet d'interaction entrées-sortie et effet d'interaction sorties-sortie.

Toutes les méthodes de la première classe supposent que les régulateurs des boucles sont parfaits. Malgré cette hypothèse, elles ont prouvé leur efficacité dans l'analyse des interactions dans les systèmes multivariables et ont bénéficiées d'une large utilisation dans l'industrie.

Les méthodes de la deuxième classe (méthodes d'analyse indirecte) ont montrées leurs limitations, car la tentation d'une telle approche reste forte, la raison d'échec de ses méthodes est le dilemme interactions-performances, c'est-à-dire il est très difficile voir impossible de concevoir un système de commande assurant un compromis entre les interactions entre les variables qui doivent être très faibles et les performances désirées.

Quelques méthodes d'analyse exposées ne sont pas applicables lorsque le système a un nombre d'entrées différent de celui de sorties, ce qui réduit leur utilisation seulement à des systèmes carrés.

Dans le cas où le système est représenté par une matrice de transfert triangulaire, on peut seulement analyser les interactions entre les variables de commande et celles à commander et d'examiner l'effet d'une commande sur les sorties qu'elle affecte, car il n'y a pas de choix à faire puisqu'une seule configuration de commande est possible.

En effet, l'analyse d'interactions ne peut être faite correctement que lorsqu'on possède des informations approfondies sur le comportement du processus (le modèle du système). Cependant, il s'avère souvent indispensable de faire une étude préliminaire sur le modèle du système dont on dispose ; il s'agit d'une étape très importante pour bien choisir la méthode d'analyse. Un modèle raffiné qui décrit suffisamment le comportement réel du système est souhaitable pour analyser finement les interactions, d'où la vérification de la validité du modèle s'impose en premier lieu.

La synthèse d'un système de commande multiboucle robuste repose essentiellement sur la détermination de la configuration de commande convenable. En effet, toutes les méthodes d'analyse montrent que la meilleure configuration de commande assurant de faibles

interactions est définie par des couples correspondants à des transmittances fortes caractérisées par un gain élevé, des constantes de temps faibles et un faible temps de retard. Cependant, la détermination de la configuration de commande ne se réduit pas à la sélection des couples correspondants à des transmittances fortes. De ce fait, nous sommes amené à essayer de gérer de la meilleure façon possible le compromis fondamental performances (robustesse) et interactions en choisissant une configuration de commande pratiquement réalisable et garantissant :

- La stabilité de chaque boucle de commande et celle du système globale dans le cas où l'une des boucles se trouve coupée (l'intégrité du système);
- Des interactions faibles entre les boucles de la configuration.

Les systèmes à grande échelle sont caractérisés par un nombre d'entrées et de sorties important, et une complexité au niveau des interconnexions, d'où l'application des méthodes d'analyse présentées nécessite une envergure de calcul. D'autres méthodes d'analyse nécessitent un calcul symbolique énorme avec un algorithme compliqué très difficile à programmer. De plus, le choix de la configuration de commande par quelque méthode d'analyse présentées passe par une comparaison des résultats d'analyse obtenus pour toutes les configurations de commande candidates en vue de choisir la meilleure, ce qui est fastidieux et gourmand en temps. Ces contraintes rendent complexe l'application de ces méthodes lorsqu'il s'agit d'un système à grande dimension. Les solutions apportées pour l'analyse des interactions et le choix de la configuration de commande dans le cas des systèmes à grande dimension, feront l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE

3

**ANALYSE DES
INTERACTIONS DAN UN
SYSTÈME PAR
DÉCOMPOSITION EN
SOUS-SYSTÈMES**

*“Les connaissances, acquises sous toutes
les formes n'ont d'intérêt réel que par
l'utilisation qu'on en fait.”*

R. AMATO

3.1 Introduction

Les méthodes d'analyse des interactions dans les systèmes à grande échelle, présentées dans le chapitre précédent convergent aux mêmes résultats et donnent dans beaucoup de cas la même configuration de commande adéquate. Il est important de noter que les méthodes utilisant le modèle dynamique du système sont plus fiables que celles reposant sur le modèle statique car ces dernières ne sont valables que pour les systèmes travaillant autour de la fréquence nulle [25], [27].

Le volume de calcul constitue un problème majeur et représente une contrainte sérieuse lors de l'application de ces méthodes à des systèmes de grande dimension, comme dans le cas de beaucoup de systèmes industriels. Ainsi, elles sont difficilement informatisables et demandent souvent beaucoup de calcul symbolique [35]. Le calcul est plus complexe lors de l'utilisation du modèle d'état du système.

Aussi, le choix de la configuration de commande est délicat car il nécessite l'examen d'une multitude de courbes et la comparaison de $m!$ résultats obtenus en appliquant la méthode à toutes les configurations de commande candidates possibles [15], [25], pour choisir la meilleure, donc $m!$ résultats à comparer ce qui est très complexe et fastidieux.

Dans le présent chapitre, on propose une solution systématique pour l'analyse des interactions et pour le choix de la meilleure configuration de commande quand la dimension du système est grande. Deux méthodes d'analyse dont le principe consiste à décomposer le système global en sous-systèmes sont proposées. Le but de ces méthodes est de fournir à l'utilisateur une démarche lui permettant de résoudre avec beaucoup moins de calculs, des problèmes relatifs à l'analyse des interactions, au choix de la configuration de commande, au découplage et au calcul de lois de commande.

Concernant le choix de la configuration de commande, deux méthodes sont proposées. La première utilise le graphe de fluence du système construit à base des résultats d'analyse obtenus par l'application d'une des méthodes d'analyse par décomposition proposées. La seconde méthode est développée sur la base des caractéristiques d'une transmittance forte dans un système à grande échelle.

Pour vérifier leur validité, les méthodes proposées ont été testées sur deux colonnes de distillation trouvées dans la littérature.

3.2 Méthodes d'analyse des interactions par décomposition du système

3.2.1 Principe d'analyse des interactions par décomposition

Le principe fondamental des méthodes proposées consiste à décomposer le système $G(s)$ à grande échelle en sous-systèmes $G_{ii}(s)$ ($i = 1, \dots, n_s$; n_s : est le nombre de sous-systèmes) [35]. Après la décomposition du système $G(s)$, on commence par l'analyse des interactions entre les sous-systèmes obtenus, ensuite on examine chaque sous-système individuellement.

En réduisant l'analyse des interactions dans un système à grande échelle à des sous-systèmes de petite dimension, les méthodes proposées permettent de quantifier et d'analyser les interactions existantes dans un système à grande dimension avec beaucoup moins de calculs, ce qui simplifie d'avantages l'analyse des interactions ainsi que la détermination de la meilleure configuration de commande.

Avant d'exposer les deux méthodes proposées, on rappelle les remarques importantes suivantes [15], [27] :

- Le Quotient d'Interaction (IQ) de Rijnsdorp permet de vérifier si le système est à dominance diagonale.
- Le couple dont le gain relatif λ_{ij} est négatif ne doit pas être choisi dans une configuration de commande pour garantir la stabilité des boucles de commande.
- La Matrice Directe de Nyquist (DNA) permet de déterminer directement les transmittances à faibles effets dans une bande de fréquences bien déterminée.
- Si le gain relatif dynamique $\lambda_{ij}(s)$ est proche de zéro dans la bande de fréquence de travail du système, l'effet de la commande u_j sur la sortie y_i est négligeable.
- Dans la commande par modèle interne, la configuration avec de grandes valeurs des gains des filtres $f_i(s)$ est préférable, car les interactions entre les boucles de cette configuration sont faibles.

Ces remarques seront exploitées pour développer les deux méthodes d'analyse des interactions par décomposition suivantes :

- La méthode de décomposition en sous-systèmes à dominance diagonale.
- La méthode de décomposition en deux sous-systèmes carrés.

Ces dernières sont développées par combinaison des propriétés de quelques méthodes d'analyse exposées dans le chapitre précédent.

3.2.2 Méthode de décomposition en sous-systèmes à dominance diagonale

L'analyse des interactions par la méthode de décomposition en sous-systèmes à dominance diagonale [35] s'effectue suivant les étapes ci-après :

3.2.2.1 Décomposition en sous-systèmes à dominance diagonale

En construisant la Matrice Directe de Nyquist (DNA) correspondante au système à grande échelle $G(s)$ et par permutations des lignes et/ou des colonnes de la matrice de transfert du système $G(s)$, on décompose ce dernier en sous-systèmes $G_{ij}(s)$ ($i, j = 1, \dots, n_s$) de telle sorte à avoir un nouveau système $\hat{G}(s)$ vérifiant la condition :

La diagonale de $\hat{G}(s)$ doit contenir le maximum de sous-systèmes à dominance diagonale.

Cette décomposition donne le nouveau système $\hat{G}(s)$ suivant :

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1n_s}(s) & G_{1n_s}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2n_s}(s) & G_{2n_s}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{k1}(s) & G_{k2}(s) & \cdots & G_{kk}(s) & G_{kn_s}(s) \\ G_{n,1}(s) & G_{n,2}(s) & \cdots & G_{n,k}(s) & G_{n,n_s}(s) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Avec :

n_s : est le nombre de sous-systèmes de la diagonale de $\hat{G}(s)$ ($n_s = k + 1$).

k : est le nombre de sous-systèmes $G_{ii}(s)$ à dominance diagonale.

Dans cette forme, les sous-systèmes $G_{ii}(s)$ ($i = 1, \dots, k$) sont à dominance diagonale, et le nombre de ces derniers ($k = n_s - 1$) doit être maximal pour simplifier l'analyse des interactions. Le sous-système $G_{n,n_s}(s)$ représente la partie non décomposable en sous-systèmes à dominance diagonale de $G(s)$.

Dans ce qui va suivre dans le développement de la méthode d'analyse par décomposition en sous-systèmes à dominance diagonale, $G_{ii}(s)$ désigne le i -ième sous-système à dominance diagonale avec $i \neq n_s$.

3.2.2.2 Analyse des interactions entre les sous-systèmes

Pour analyser les interactions entre les sous-systèmes obtenus, on examine l'effet d'interaction de chaque sous-système $G_u(s)$ sur tous les autres sous-systèmes. Pour cela, on associe au sous-système $G_u(s)$ considéré les matrices suivantes $U_u(s)$, $V_u(s)$ et $Gc_u(s)$, et le système (3.1) s'écrit sous la forme :

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} G_u(s) & U_u(s) \\ V_u(s) & Gc_u(s) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

avec :

$$G_u(s) = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11}(s) & \cdots & \hat{g}_{1m_i}(s) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \hat{g}_{m_i1}(s) & \cdots & \hat{g}_{m_im_i}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Où :

$G_u(s)$: est le sous-système à dominance diagonale considéré de dimensions $m_i \times m_i$.

$U_u(s)$: est le complément ligne de $G_u(s)$ de dimensions $m_i \times (m - m_i)$.

$V_u(s)$: est le complément colonne de $G_u(s)$ de dimensions $(m - m_i) \times m_i$.

$Gc_u(s)$: est le complément diagonale de $G_u(s)$ de dimensions $(m - m_i) \times (m - m_i)$.

De la décomposition (3.2), on définit une nouvelle matrice $\eta_i(\omega)$ qui permet d'analyser les interactions existantes entre le sous-système $G_u(s)$ et les autres sous-systèmes.

3.2.2.3 Calcul de la matrice $\eta_i(\omega)$

Pour calculer la matrice $\eta_i(\omega)$ associée au sous-système $G_u(s)$, on définit les deux matrices suivantes :

$$\hat{G}_u(\omega) = \text{diag} \left[|\hat{g}_{kk}(j\omega)| : k = 1, \dots, m_i \right], \quad (3.4)$$

et

$$\tilde{G}_u(s) = G_u(s) - \text{diag} \left[\hat{g}_{kk}(s) : k = 1, \dots, m_i \right], \quad (3.5)$$

alors

$$\tilde{G}_u(s) = \begin{bmatrix} 0 & \hat{g}_{12}(s) & \cdots & \cdots & \hat{g}_{1m}(s) \\ \hat{g}_{21}(s) & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \hat{g}_{m-1m}(s) \\ \hat{g}_{m1}(s) & \cdots & \cdots & \hat{g}_{m,m-1}(s) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Où :

$\hat{G}_u(\omega)$: est une matrice diagonale dont les éléments sont les modules des éléments de la diagonale de $G_u(s)$.

$\tilde{G}_u(s)$: est la matrice constituée des éléments hors diagonale de $G_u(s)$.

Si l'on note par $H_k(s)$ la k -ième ligne de $\tilde{G}_u(s)$ et par $W_k(s)$ la k -ième colonne de $\tilde{G}_u(s)$, la matrice $\tilde{G}_u(s)$ s'écrit :

$$\tilde{G}_u(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ \vdots \\ H_m(s) \end{bmatrix} = H_u(s), \quad \tilde{G}_u(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) & W_2(s) & \cdots & W_m(s) \end{bmatrix} = W_u(s), \quad (3.7)$$

de même, si l'on note par $U_k(s)$ la k -ième ligne de $U_u(s)$ et par $V_k(s)$ la k -ième colonne de $V_u(s)$, les matrices $U_u(s)$ et $V_u(s)$ s'écrivent :

$$U_u(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}, \quad V_u(s) = \begin{bmatrix} V_1(s) & V_2(s) & \cdots & V_m(s) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Ainsi, des nouvelles matrices $H_u(\omega)$, $W_u(\omega)$, $U_u(\omega)$ et $V_u(\omega)$ sont définies comme suit :

$$H_u(\omega) = \begin{bmatrix} \|H_1(s)\|_1 \\ \|H_2(s)\|_1 \\ \vdots \\ \|H_m(s)\|_1 \end{bmatrix}, W_u(\omega) = \begin{bmatrix} \|W_1(s)\|_1 & \|W_2(s)\|_1 & \cdots & \|W_m(s)\|_1 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

et

$$U_u(\omega) = \begin{bmatrix} \|U_1(s)\|_1 \\ \|U_2(s)\|_1 \\ \vdots \\ \|U_m(s)\|_1 \end{bmatrix}, V_u(\omega) = \begin{bmatrix} \|V_1(s)\|_1 & \|V_2(s)\|_1 & \cdots & \|V_m(s)\|_1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

Où :

$\|\cdot\|_1$: est la norme somme.

Les matrices $H_u(\omega)$, $W_u(\omega)$, $U_u(\omega)$ et $V_u(\omega)$ sont de dimensions $m_i \times 1$, $1 \times m_i$, $m_i \times 1$ et $1 \times m_i$ respectivement.

Ces matrices seront utilisées pour générer la matrice $\eta_i(\omega)$ caractérisant les interactions existantes entre le sous-système $G_u(s)$ considéré et le reste des sous-systèmes. La matrice $\eta_i(\omega)$ est déterminée comme suit :

$$\eta_i(\omega) = \begin{bmatrix} (H_u(\omega) + U_u(\omega))^T \\ (W_u(\omega) + V_u(\omega)) \end{bmatrix} \hat{G}_u^{-1}(\omega). \quad (3.11)$$

On constate que la matrice $\eta_i(\omega)$ est de dimensions $2 \times m_i$. La représentation des éléments de la matrice $\eta_i(\omega)$ en fonction de la fréquence ω permet de conclure sur les interactions existantes entre le sous-système $G_u(s)$ considéré et les autres sous-systèmes. La première ligne de $\eta_i(\omega)$ caractérise l'effet des autres sous-systèmes sur le sous-système $G_u(s)$ et la deuxième ligne caractérise l'effet de $G_u(s)$ sur les autres sous-systèmes.

Remarques 3.1

- La matrice $\eta_i(\omega)$ doit être générée seulement pour les sous-systèmes à dominance diagonale $G_{ii}(s)$ car cette dernière conduit à des résultats erronés si le cas est différent.
- La détermination de la matrice $\eta_i(\omega)$ pour les k sous-systèmes à dominance diagonale $G_{ii}(s)$ permet de déterminer les effets d'interactions existants entre ces derniers et le sous-système $G_{n,n}(s)$.

3.2.2.4 Interprétation de la matrice $\eta_i(\omega)$

Les éléments de la matrice $\eta_i(\omega)$ sont les inverses des expressions de $f_{L_i}^*(\omega)$ et $f_{C_i}^*(\omega)$ correspondants aux couples de la diagonale de $G_{ii}(s)$ assurant sa stabilité (théorème de petit gain donné en annexe B) [15], [44]. D'après les relations (2.47) et (2.48), les deux quantités $L_i(\omega)$ et $C_i(\omega)$ sont en fonction de $f_{L_i}^*(\omega)$ et $f_{C_i}^*(\omega)$ respectivement. En tenant compte des interprétations de $L_i(\omega)$ et $C_i(\omega)$, il ressort les conclusions suivantes :

- Si les éléments de la première ligne de $\eta_i(\omega)$ sont tous inférieurs à 1 dans la bande de fréquences de travail du système, les effets des autres sous-systèmes sur le sous-système $G_{ii}(s)$ considéré sont négligeables.
- Si les éléments de la deuxième ligne de $\eta_i(\omega)$ sont tous inférieurs à 1 dans la bande de fréquences de travail du système, les effets du sous-système $G_{ii}(s)$ sur les autres sous-systèmes sont négligeables.
- Si tous les éléments de la matrice de $\eta_i(\omega)$ sont inférieurs à 1, le sous-système $G_{ii}(s)$ n'est pas interactif avec le reste des sous-systèmes. Dans ce cas, on ignore le sous-système $G_{ii}(s)$, et on passe à l'analyse des interactions dans le nouveau système constitué de sous-systèmes restants.
- Si un élément de la première ligne est supérieur à 1 et inférieur à $(m-1)$ dans la bande utile, il y a possibilité d'existence d'au moins un sous-système avec un effet significatif ou fort sur le sous-système $G_{ii}(s)$.

- Si un élément de la deuxième ligne est supérieur à 1 et inférieur à $(m-1)$ dans la bande utile, il est possible que le sous-système $G_{ii}(s)$ présente un effet significatif ou fort sur au moins un des autres sous-systèmes.
- S'il existe une colonne dans la matrice $\eta_i(\omega)$ dont les deux éléments sont supérieurs à 1 et inférieurs à $(m-1)$, le sous-système $G_{ii}(s)$ peut présenter des interactions significatives ou fortes avec un autre sous-système au moins, c'est-à-dire des interactions peuvent exister entre la boucle correspondante à cette colonne et à au moins une boucle d'un ou de plusieurs sous-systèmes.
- Si un élément de la première ligne est supérieur à $(m-1)$ dans la bande utile, il existe au moins un sous-système avec un effet fort sur le sous-système $G_{ii}(s)$.
- Si un élément de la deuxième ligne est supérieur à $(m-1)$ dans la bande utile, le sous-système $G_{ii}(s)$ présente un effet fort sur l'un des autres sous-systèmes au moins.
- S'il existe une colonne dans la matrice $\eta_i(\omega)$ dont les deux éléments sont supérieurs à $(m-1)$, le sous-système $G_{ii}(s)$ présente de fortes interactions avec un autre sous-système au moins, c'est-à-dire de fortes interactions existent entre la boucle correspondante à cette colonne et une boucle d'un ou de plusieurs sous-systèmes au moins.

Lorsqu'un sous-système présente un effet sur un ou plusieurs sous-systèmes non connus a priori ou dans le cas où ce sous-système est affecté par d'autres sous-systèmes, il est nécessaire d'examiner ces effets pour les raisons impératives suivantes :

- Détermination des sous-systèmes affectés et ceux affectant le sous-système considéré, Pour bien choisir la configuration de commande par la suite.
- Prendre en considération ces effets, lors de la synthèse d'un système de commande, si les boucles correspondantes ne sont pas sélectionnées dans la configuration de commande (dans le cas où le gain relatif de la boucle est négatif ou la réalisation pratique ne permet pas de choisir cette boucle).
- Localiser les boucles qui présentent de fortes interactions, pour étudier la possibilité de découplage ou d'effectuer un changement de configuration de commande (par exemple dans cas où les deux éléments d'une ou plusieurs colonnes sont supérieurs à $(m-1)$).

Il est important de noter que la k -ième colonne de la matrice $\eta_i(\omega)$ associée au sous-système $G_u(s)$ correspond à l'élément $\hat{g}_{kk}(s)$ qui définit une boucle de commande $[u_j - y_i]$. Cette colonne caractérise les effets existants entre cette boucle et les boucles des autres sous-systèmes.

Ainsi, l'existence d'un élément de la première ligne de la matrice $\eta_i(\omega)$ supérieur ou égal à $(m-1)$ signifie que la boucle correspondante est affectée au moins par un autre sous-système et, s'il est supérieur à 1 et inférieur à $(m-1)$, la boucle considérée peut être affectée par un autre sous-système au moins.

Dans le cas où un élément de la deuxième ligne de la matrice $\eta_i(\omega)$ est supérieur à $(m-1)$, la boucle correspondante affecte au moins une boucle dans un ou plusieurs sous-systèmes. Lorsque cet élément est borné entre 1 et $(m-1)$, il y a possibilité d'existence d'au moins d'une boucle dans un ou plusieurs sous-systèmes qui est affectée par la boucle considérée.

Si la matrice $\eta_i(\omega)$ associée à un sous-système $G_u(s)$ contient des éléments qui sont supérieurs à 1, il est impératif de déterminer les effets d'interactions qui peuvent exister (lorsqu'un élément est dans un intervalle borné par 1 et $(m-1)$) ou existants (lorsqu'un élément est supérieur ou égal à $(m-1)$) entre le sous-système en question et les autres.

Il est important de noter que dans la décomposition (3.2) proposée, la matrice $U_u(s)$ caractérise les effets des autres sous-systèmes sur le sous-système $G_u(s)$. Chaque ligne $U_k(s)$ de cette matrice caractérise les effets de toutes les boucles de l'ensemble des autres sous-systèmes sur la boucle de commande du sous-système $G_u(s)$ définie par l'élément $\hat{g}_{kk}(s)$.

La matrice $V_u(s)$ caractérise les effets du sous-système $G_u(s)$ sur tous les autres sous-systèmes. Chaque colonne $V_k(s)$ de cette matrice caractérise les effets de la boucle de commande du sous-système $G_u(s)$ définie par l'élément $\hat{g}_{kk}(s)$ sur toutes les boucles des autres sous-systèmes.

Les deux matrices $U_u(s)$ et $V_u(s)$ définies dans (3.2) seront utilisées pour déterminer les effets d'interactions existants entre le sous-système $G_u(s)$ et les sous-systèmes $G_j(s)$ ($j \neq i$).

3.2.2.4.1 Détermination des sous-systèmes affectant un sous-système $G_{ii}(s)$

Pour chaque boucle de $G_{ii}(s)$ définie par $\hat{g}_{kk}(s)$ dont le premier élément de la colonne correspondante dans la matrice $\eta_i(\omega)$ est supérieur à 1, on définit la matrice ligne suivante :

$$\tilde{U}_k(s) = U_k(s) \hat{g}_{kk}^{-1}(s). \quad (3.12)$$

Où :

$U_k(s)$: est le k -ième ligne de la matrice $U_{ii}(s)$ correspondante à l'élément $\hat{g}_{kk}(s)$.

La matrice $\tilde{U}_k(s)$ est de dimensions $1 \times (m - m_i)$. De (3.12) il vient :

$$\tilde{U}_k(s) = \left[U_k^1(s) \ U_k^2(s) \ \dots \ U_k^{n_s-1}(s) \right], \quad (3.13)$$

l'élément $U_k^l(s)$ ($l = 1, \dots, n_s - 1$) est de dimensions $1 \times m_j$ ($j = 1, \dots, n_s$; $j \neq i$) respectivement.

Chaque élément $U_k^l(s)$ ($l = 1, \dots, n_s - 1$) caractérise l'effet d'un sous-système $G_{jj}(s)$ ($j = 1, \dots, n_s$; $j \neq i$) sur le sous-système $G_{ii}(s)$ respectivement. Pour déterminer ces effets, on trace les modules des éléments de la matrice $\tilde{U}_k(s)$. Les éléments ayant un module supérieur à 1 permettent de localiser les sous-systèmes $G_{jj}(s)$ qui affectent fortement le sous-système $G_{ii}(s)$, et de déterminer les commandes d'un sous-système $G_{jj}(s)$ qui affectent fortement le sous-système $G_{ii}(s)$ considéré.

Toute sous-matrice $U_k^l(s)$ contenant un ou plusieurs éléments ayant un module supérieur à 1 implique que le sous-système $G_{jj}(s)$ correspondant affecte le sous-système $G_{ii}(s)$. Ainsi, la position de ces éléments dans la sous-matrice $U_k^l(s)$ correspondante au sous-système $G_{jj}(s)$ donne les commandes de $G_{jj}(s)$ qui affectent la sortie de la boucle définie par l'élément $\hat{g}_{kk}(s)$ de $G_{ii}(s)$.

3.2.2.4.2 Détermination des sous-systèmes affectés par un sous-système $G_{ii}(s)$

Pour chaque boucle de $G_{ii}(s)$ définie par $\hat{g}_{kk}(s)$ dont le deuxième élément de la colonne correspondante dans la matrice $\eta_i(\omega)$ est supérieur à 1, on définit la matrice ligne suivante :

$$\tilde{V}_k(s) = [V_k(s)]^T \hat{g}_{kk}^{-1}(s). \quad (3.14)$$

Où :

$V_k(s)$: est la k -ième colonne de la matrice $V_{ii}(s)$ correspondante à l'élément $\hat{g}_{kk}(s)$.

La matrice $\tilde{V}_k(s)$ est de dimensions $1 \times (m - m_i)$, de (3.14) il vient :

$$\tilde{V}_k(s) = [V_k^1(s) \quad V_k^2(s) \quad \dots \quad V_k^{n_s-1}(s)], \quad (3.15)$$

l'élément $V_k^l(s)$ ($l = 1, \dots, n_s - 1$) est de dimensions $1 \times m_j$ ($j = 1, \dots, n_s ; j \neq i$) respectivement.

L'élément $V_k^l(s)$ ($l = 1, \dots, n_s - 1$) caractérise l'effet du sous-système $G_{ii}(s)$ sur le sous-systèmes $G_{jj}(s)$ ($j = 1, \dots, n_s ; j \neq i$) respectivement. Pour déterminer ces effets, on trace les modules des éléments de la matrice $\tilde{V}_k(s)$. Les éléments ayant un module supérieur à 1 permettent de localiser les sous-systèmes $G_{jj}(s)$ affectés fortement par le sous-système $G_{ii}(s)$ et de déterminer ainsi les sorties d'un sous-système $G_{jj}(s)$ qui sont affectées fortement par le sous-système $G_{ii}(s)$ considéré.

Toute sous-matrice $V_k^l(s)$ contenant un ou plusieurs éléments ayant un module supérieur à 1 implique que le sous-système $G_{jj}(s)$ correspondant est affecté par le sous-système $G_{ii}(s)$. Ainsi, la position de ces éléments dans la sous-matrice $V_k^l(s)$ correspondante au sous-système $G_{ii}(s)$ donne les sorties de $G_{jj}(s)$ qui sont affectées par la commande assignée à la boucle définie par l'élément $\hat{g}_{kk}(s)$ de $G_{ii}(s)$.

En résumé, il est recommandé de générer la matrice $\eta_i(\omega)$ pour chaque sous-système $G_{ii}(s)$ en premier lieu dans le but d'éliminer les sous-systèmes qui ne présentent pas d'interactions. Cette étape permet de réduire l'analyse des interactions à un système de dimension réduite.

Remarques 3.2

- Avant toute analyse, il est impératif de déterminer la bande de fréquence dans laquelle le système travaille.
- Un sous-système $G_{ii}(s)$ est à dominance diagonale si :

$$|\hat{g}_{ii}(s)| > \sum_{j=1, j \neq i}^{m_i} |\hat{g}_{ij}(s)|. \quad (3.16)$$

- Pour faciliter le choix des sous-systèmes à dominance diagonale, il est judicieux de travailler avec un modèle réduit du système à condition que celui-ci reste valable dans la bande de fréquences de travail.
- Pour simplifier l'analyse des interactions, on entame l'analyse par les sous-systèmes $G_{ii}(s)$ à petite dimension.
- Lorsque des interactions existent entre les sous-systèmes, il est inutile de déterminer pour chaque sous-système $G_{ii}(s)$ les sous-systèmes affectés par ou affectant ce dernier. Mais il faut seulement déterminer pour chaque sous-système $G_{ii}(s)$; soit les sous-systèmes affectés par le sous-système considéré ou ceux affectant ce dernier. Les résultats seront les mêmes dans les deux cas avec moins de calcul.
- La méthode développée tire profit de quelques résultats importants de la commande par modèle interne et de la Matrice Directe de Nyquist. Ces deux méthodes se révèlent parmi les méthodes les plus rigoureuses pour l'analyse des interactions.
- Une fois l'analyse des interactions entre les sous-systèmes est faite, d'autres méthodes présentées dans le chapitre précédent peuvent être appliquées pour analyser finement les interactions dans chaque sous-système $G_{ii}(s)$.
- Lorsque un élément de $U'_k(s)$ est proche de zéro, ce-ci implique que la transmittance définie par le couple correspondant est faible, il est de même lorsque un élément de $V'_k(s)$ est proche de zéro.
- Lorsque un élément de $U'_k(s)$ est supérieur à 0.5, l'effet de la commande u_j sur la sortie y_i (transmittance définie par le couple correspondant à cet élément) est significatif. Il en est de même lorsque un élément de $V'_k(s)$ est supérieur à 0.5. Ainsi, lors de la synthèse d'un système de commande multiboucle, il faut tenir compte de ce couple s'il n'est pas sélectionné.

3.2.2.5 Exemples d'application

Pour tester la méthode d'analyse proposée, deux applications pour l'analyse des interactions dans deux colonnes de distillation trouvées dans la littérature [24], [39], ont été proposées. Les colonnes de distillation considérées sont caractérisées par une dynamique lente. A cet effet, on s'intéresse à l'analyse des interactions en basses fréquences en considérant la bande de fréquences 0.1 rad/min.

3.2.2.5.1 Exemple 1 : Modèle de Doukas et Luyben [24]

1. Modèle de la colonne de distillation

Le modèle de la colonne de distillation est donné par :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-11.3 e^{-3.79s}}{(21.74s+1)^2} & \frac{0.374 e^{-7.75s}}{(22.22s+1)^2} & \frac{-9.811 e^{-1.59s}}{11.36s+1} & \frac{-2.37 e^{-27.33s}}{33.3s+1} \\ \frac{5.24 e^{-60s}}{400s+1} & \frac{-1.986 e^{-0.71s}}{(66.67s+1)^2} & \frac{5.984 e^{-2.24s}}{14.29s+1} & \frac{0.422 e^{-8.72s}}{(250s+1)^2} \\ -0.33 e^{-0.68s} & \frac{0.0204 e^{-0.59s}}{(7.14s+1)^2} & \frac{2.38 e^{-0.42s}}{(1.43s+1)^2} & \frac{0.513 e^{-s}}{s+1} \\ \frac{4.48 e^{-0.52s}}{11.11s+1} & \frac{-0.176 e^{-0.48s}}{(6.90s+1)^2} & \frac{-11.67 e^{-1.91s}}{12.19s+1} & \frac{15.54 e^{-s}}{s+1} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

2. Décomposition de $G(s)$ en sous-systèmes à dominance diagonale

La Matrice Directe de Nyquist (DNA) de $G(s)$ représentée par la figure 3.1, montre que ce dernier est décomposable en deux sous-systèmes à dominance diagonale $G_{ii}(s)$ ($i = 1, 2$) de dimensions 2×2 . La mise de $G(s)$ sous la forme (3.1) donne le système $\hat{G}(s)$ suivant :

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

avec :

| $G_{11}(s)$ | $G_{12}(s)$ | $G_{21}(s)$ | $G_{22}(s)$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{13}(s) \\ g_{41}(s) & g_{43}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{12}(s) & g_{14}(s) \\ g_{42}(s) & g_{44}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{13}(s) \\ g_{21}(s) & g_{23}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{12}(s) & g_{14}(s) \\ g_{22}(s) & g_{24}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{bmatrix}$ |

TAB. 3.1 : Décomposition de $G(s)$ en sous-systèmes à dominance diagonale.

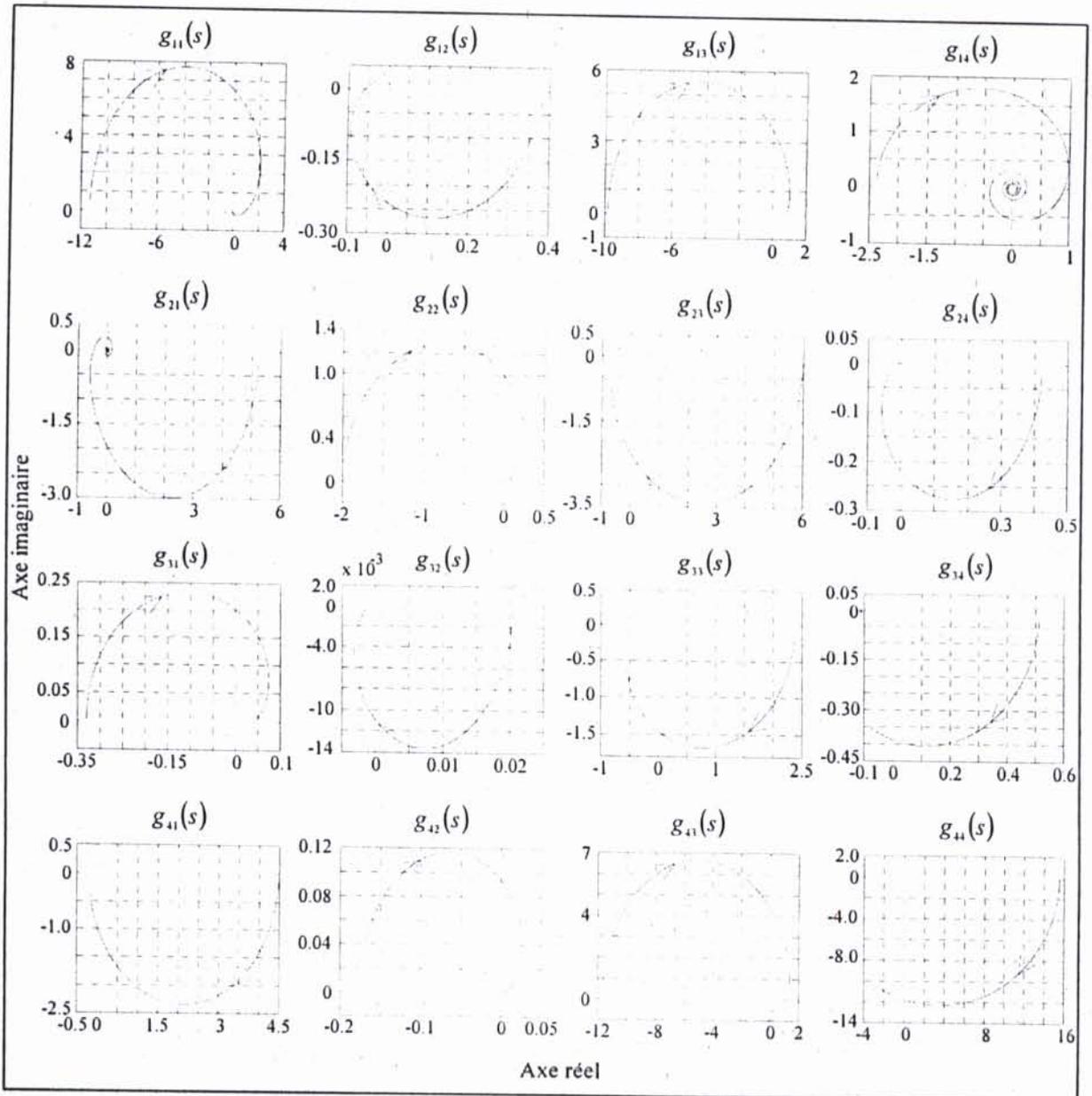


FIG. 3.1 : Matrice Directe de Nyquist de $G(s)$.

3. Analyse des interactions entre les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$

Pour analyser les interactions existantes entre les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$, la matrice $\eta_i(\omega)$ correspondante à l'un des sous-systèmes $G_{ii}(s)$ ($i=1,2$) est déterminée. En appliquant la méthodologie de calcul de la matrice $\eta_i(\omega)$ décrite dans la section 3.2.2.3, on obtient la matrice $\eta_i(\omega)$ correspondante au sous-système $G_{11}(s)$ donnée par la relation (3.11) comme suit :

$$\eta_1(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{|g_{13}(s)| + |g_{14}(s)| + |g_{12}(s)|}{|g_{11}(s)|} & \frac{|g_{41}(s)| + |g_{44}(s)| + |g_{42}(s)|}{|g_{43}(s)|} \\ \frac{|g_{41}(s)| + |g_{31}(s)| + |g_{21}(s)|}{|g_{11}(s)|} & \frac{|g_{13}(s)| + |g_{33}(s)| + |g_{23}(s)|}{|g_{43}(s)|} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

La figure 3.2 donne la représentation fréquentielle (le module) des éléments de la matrice $\eta_1(\omega)$. En examinant les éléments de cette dernière et en tenant compte des interprétations de la matrice $\eta_1(\omega)$, il ressort les conclusions suivantes :

- Les deux éléments de la première ligne de la matrice $\eta_1(\omega)$ sont bornés entre 1 et $(m-1)$ avec $m = 4$. Il est donc possible que le sous-système $G_{22}(s)$ affecte fortement le sous-système $G_{11}(s)$.
- De la deuxième ligne de la matrice $\eta_1(\omega)$, on constate que le premier élément est inférieur à 1, signifiant que l'effet de la commande u_1 sur les deux sorties y_3 et y_2 de $G_{22}(s)$ est négligeable. Le deuxième élément est bornée entre 1 et $(m-1)$, dans ces cas, la commande u_3 peut présenter un effet fort sur l'une des sorties de $G_{22}(s)$.

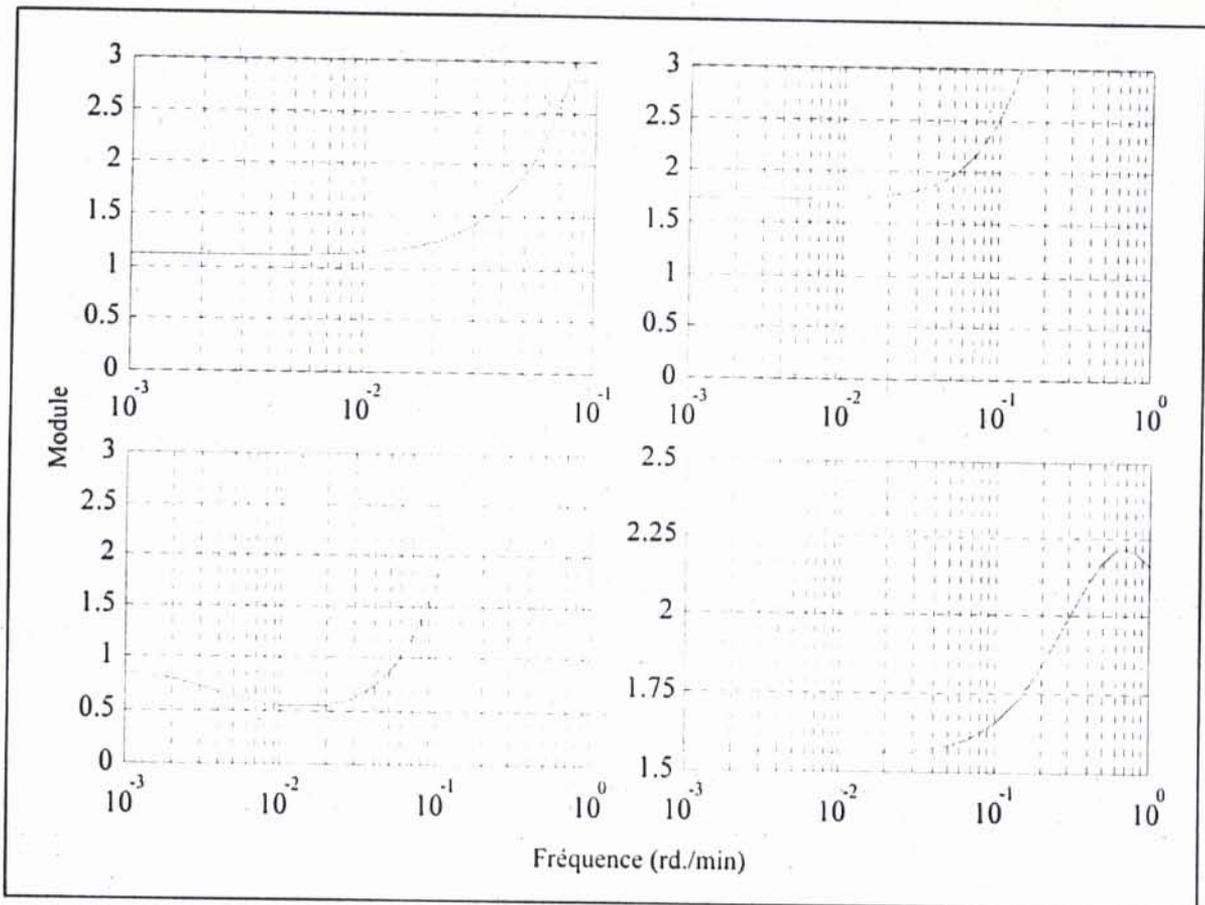


FIG. 3.2 : Matrice $\eta_1(s)$ de $G_{11}(s)$.

Pour quantifier l'effet de $G_{22}(s)$ sur $G_{11}(s)$, on détermine les deux matrices $\tilde{U}_1(s)$ et $\tilde{U}_2(s)$ correspondantes à $G_{11}(s)$. La relation (3.12) donne:

$$\tilde{U}_1(s) = U_1(s) \hat{g}_{11}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_{14}(s)}{g_{11}(s)} & \frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\tilde{U}_2(s) = U_2(s) \hat{g}_{22}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_{44}(s)}{g_{43}(s)} & \frac{g_{42}(s)}{g_{43}(s)} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Les diagrammes d'amplitudes des éléments des matrices $\tilde{U}_1(s)$ et $\tilde{U}_2(s)$ sont présentés respectivement dans les figures 3.3 et 3.4. Les deux éléments de la matrice $\tilde{U}_1(s)$ sont inférieurs à 1, et l'effet de chacune des entrées u_4 et u_2 sur la sortie y_1 est donc très faible. Cependant, le premier élément de la matrice $\tilde{U}_2(s)$ correspondant à l'entrée u_4 est supérieur à 1, signifiant que l'effet de cette dernière sur la sortie y_4 est fort.

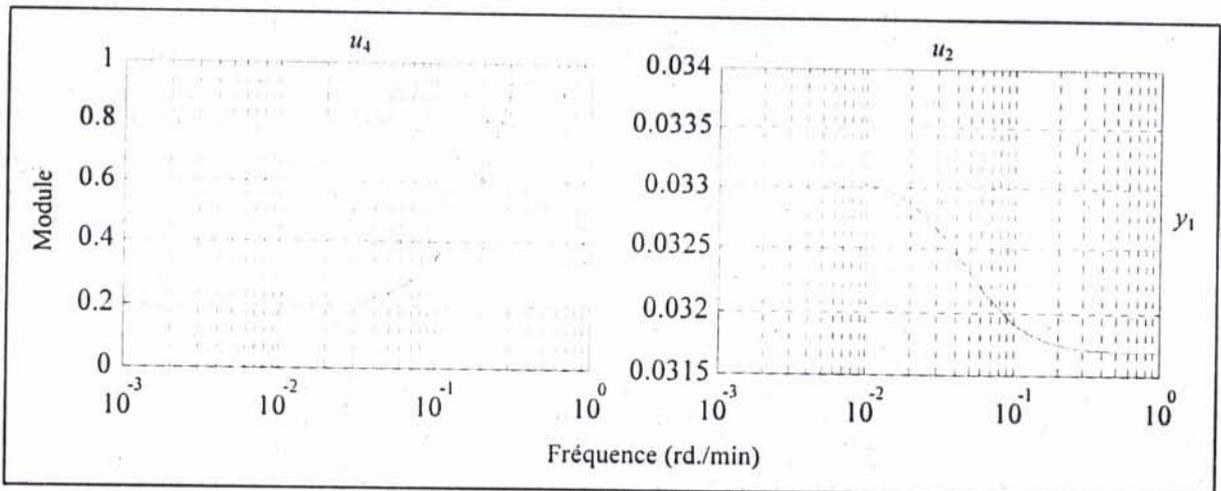


FIG. 3.3 : Matrice $\tilde{U}_1(\omega)$ correspondante à $G_{11}(s)$.

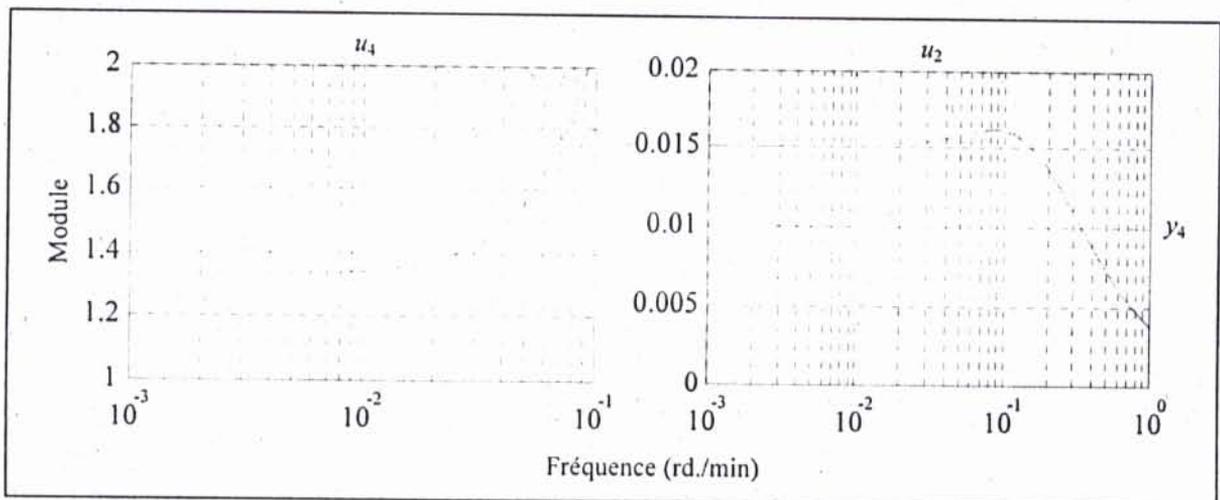


FIG. 3.4 : Matrice $\tilde{U}_2(\omega)$ correspondante à $G_{11}(s)$.

Concernant l'effet de $G_{11}(s)$ sur $G_{22}(s)$, il reste à examiner l'effet de la commande u_3 sur l'ensemble des sorties de $G_{22}(s)$ car l'effet de u_1 sur $G_{22}(s)$ est insignifiant (le premier élément de la deuxième ligne de la matrice $\eta_1(\omega)$ est inférieur à 1). Pour cela, on détermine la matrice $\tilde{V}_2(s)$ par la relation (3.14) comme suit :

$$\tilde{V}_2(s) = [V_2(s)]^T \hat{g}_{22}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_{33}(s)}{g_{43}(s)} & \frac{g_{23}(s)}{g_{43}(s)} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

La figure 3.5 représente la matrice $\tilde{V}_2(s)$ caractérisant l'effet de la commande u_3 sur les sorties y_3 et y_2 .

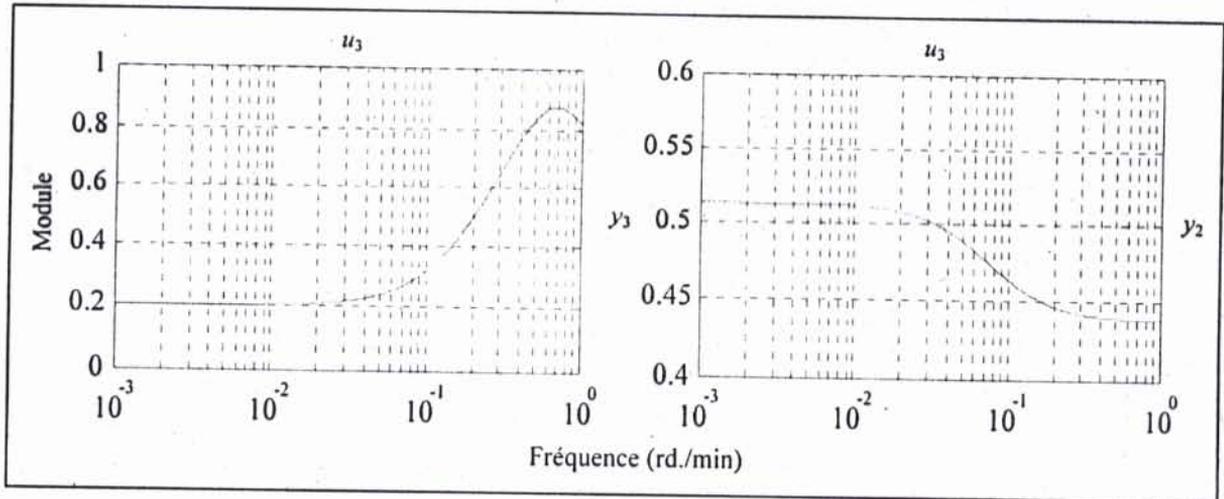


FIG. 3.5 : Matrice $\tilde{V}_2(\omega)$ correspondante à $G_{11}(s)$.

On constate que les deux éléments de la matrice $\tilde{V}_2(s)$ sont inférieurs à 1, et l'effet de la commande u_3 sur le sous-système $G_{22}(s)$ est donc négligeable.

En résumé de l'analyse effectuée, l'effet de $G_{11}(s)$ sur $G_{22}(s)$ est insignifiant. Par contre, $G_{22}(s)$ présente un effet fort sur $G_{11}(s)$ car la commande u_4 affecte fortement la sortie y_4 .

4. Analyse des interactions dans $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$

Les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$ étant à dominance diagonale, pour analyser les interactions dans chaque sous-système, on utilise la méthode de Kominék et Smith présentée dans le paragraphe 2.4.1.1.1.

Les Quotients d'Interaction (IQ) correspondants aux sous-système $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$ sont respectivement :

$$K_1(s) = \frac{g_{13}(s)g_{41}(s)}{g_{11}(s)g_{43}(s)}, \quad (3.23)$$

$$K_2(s) = \frac{g_{32}(s)g_{24}(s)}{g_{34}(s)g_{22}(s)}. \quad (3.24)$$

Les figures 3.6.a et 3.6.b montrent que les lieux de $K_1(s)$ et de $K_2(s)$ sont proches de zéro dans les basses fréquences, les interactions dans chaque sous-système sont donc insignifiantes.

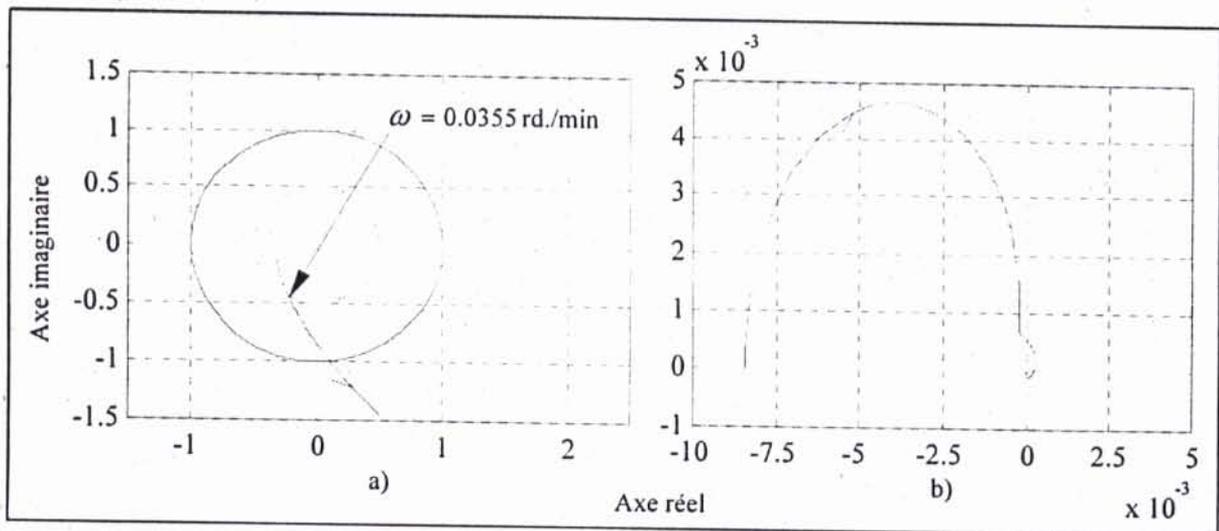


FIG. 3.6 : Quotients d'Interaction (IQ ; méthode de Kominck et Smith) :
(a) pour le système $G_{11}(s)$ et (b) pour le système $G_{22}(s)$.

3.2.2.5.2 Exemple 2 : Modèle d'Alatiqi [39]

1. Modèle de la colonne de distillation

Le modèle de la colonne de distillation est donné par :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{4.09 e^{-1.3s}}{(33s+1)(8.3s+1)} & \frac{-6.36 e^{-0.2s}}{(31.6s+1)(20s+1)} & \frac{-0.25 e^{-0.4s}}{21s+1} & \frac{-0.49 e^{-5s}}{(22s+1)^2} \\ \frac{-4.17 e^{-4s}}{45s+1} & \frac{6.93 e^{-1.01s}}{44.6s+1} & \frac{-0.05 e^{-5s}}{(34.5s+1)^2} & \frac{1.53 e^{-2.8s}}{48s+1} \\ \frac{-1.73 e^{-17s}}{(13s+1)^2} & \frac{5.11 e^{-11s}}{(13.3s+1)^2} & \frac{4.61 e^{-1.02s}}{18.5s+1} & \frac{-5.48 e^{-0.5s}}{15s+1} \\ \frac{-11.18 e^{-2.6s}}{(43s+1)(6.5s+1)} & \frac{14.04 e^{-0.02s}}{(45s+1)(10s+1)} & \frac{-0.1 e^{-0.05s}}{(31.6s+1)(5s+1)} & \frac{4.49 e^{-0.6s}}{(48s+1)(6.3s+1)} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

2. Décomposition de $G(s)$ en sous-systèmes à dominance diagonale

D'après la Matrice Directe de Nyquist (DNA) de la figure 3.7, le système $G(s)$ est décomposable en un sous-système à dominance diagonale $G_{11}(s)$ de dimensions 2×2 et un deuxième sous-système $G_{22}(s)$ qui n'est pas à dominance diagonale. La mise de $G(s)$ sous la forme (3.1) donne le système suivant :

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

avec :

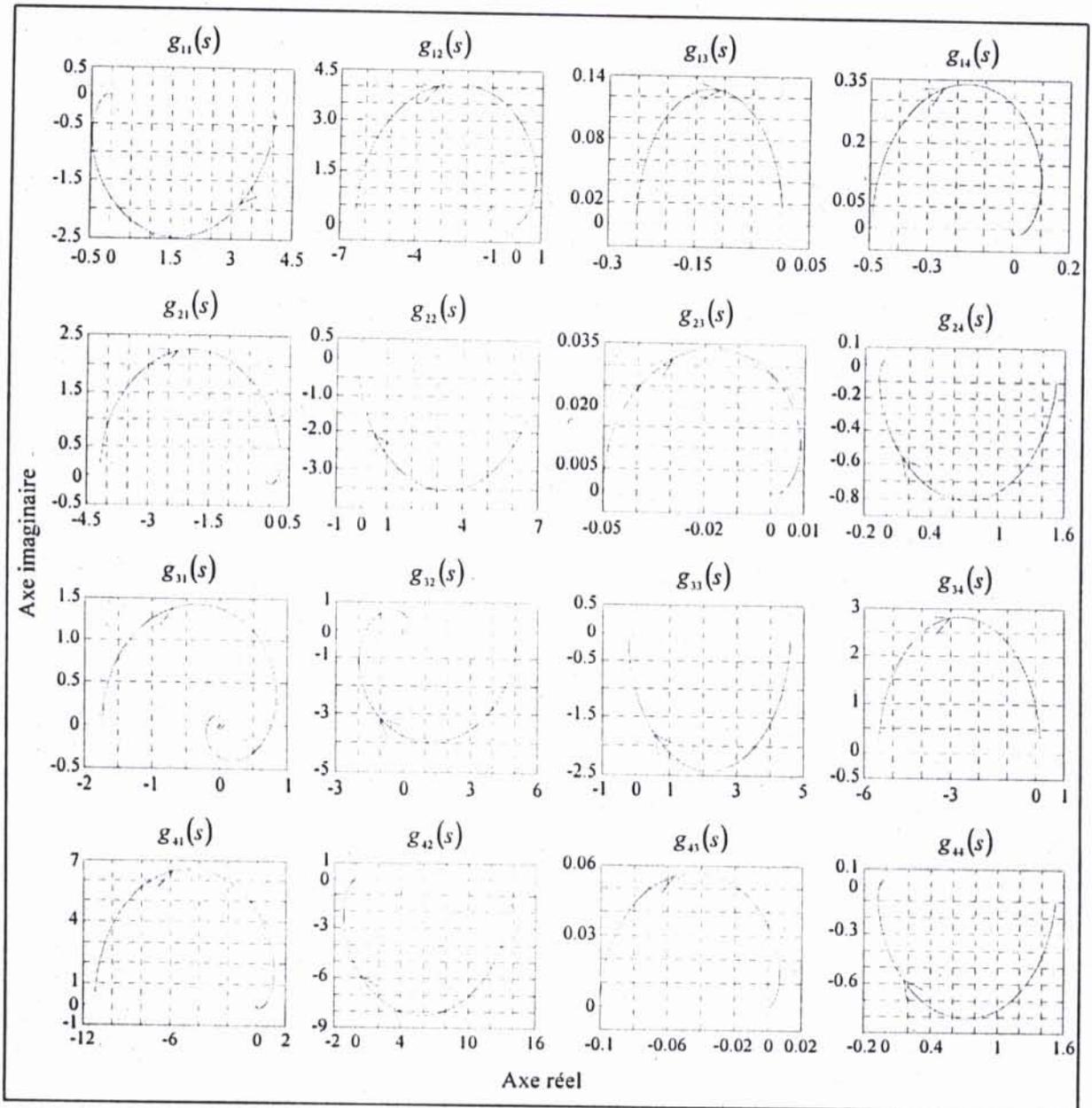


FIG. 3.7 : Matrice Directe de Nyquist de $G(s)$.

| $G_{11}(s)$ | $G_{12}(s)$ | $G_{21}(s)$ | $G_{22}(s)$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{21}(s) & g_{22}(s) \\ g_{31}(s) & g_{32}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{23}(s) & g_{24}(s) \\ g_{33}(s) & g_{34}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{41}(s) & g_{42}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{13}(s) & g_{14}(s) \\ g_{43}(s) & g_{44}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$ |

TAB. 3.2 : Décomposition de $G(s)$ en sous-systèmes à dominance diagonale.

3. Analyse des interactions entre les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$

Pour cet exemple, la matrice $\eta_i(\omega)$ doit être générée pour le sous-système $G_{11}(s)$. Celle-ci permet de conclure sur les interactions entre les sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$. La relation (3.11) donne la matrice $\eta_i(\omega)$ correspondante à $G_{11}(s)$ suivante :

$$\eta_i(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{|g_{23}(s)| + |g_{22}(s)| + |g_{24}(s)|}{|g_{21}(s)|} & \frac{|g_{31}(s)| + |g_{32}(s)| + |g_{34}(s)|}{|g_{33}(s)|} \\ \frac{|g_{31}(s)| + |g_{11}(s)| + |g_{41}(s)|}{|g_{21}(s)|} & \frac{|g_{23}(s)| + |g_{13}(s)| + |g_{43}(s)|}{|g_{33}(s)|} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

En examinant la représentation fréquentielle de la matrice $\eta_i(\omega)$, figure 3.8, on note que :

- Le sous-système $G_{22}(s)$ peut présenter un effet fort sur $G_{11}(s)$ car les deux éléments de la première ligne sont bornés entre 1 et 3.
- Le premier élément de la deuxième ligne est supérieur à 3 signifiant que la commande u_1 affecte fortement au moins l'une des sorties y_1 ou y_4 de $G_{22}(s)$. Le deuxième élément étant inférieur à 1, ce qui implique que l'effet de la commande u_3 sur $G_{22}(s)$ est très faible.

Pour localiser les effets forts entre les deux systèmes, on doit générer les deux matrices $\tilde{U}_1(s)$ et $\tilde{U}_2(s)$ qui permettent de déterminer les sorties de $G_{11}(s)$ qui risquent d'être fortement affectées par les commandes du sous-système $G_{22}(s)$. La matrice $\tilde{V}_1(s)$ détermine la sortie du sous-système $G_{22}(s)$ qui est fortement affectée par la commande u_1 du sous-système $G_{11}(s)$.

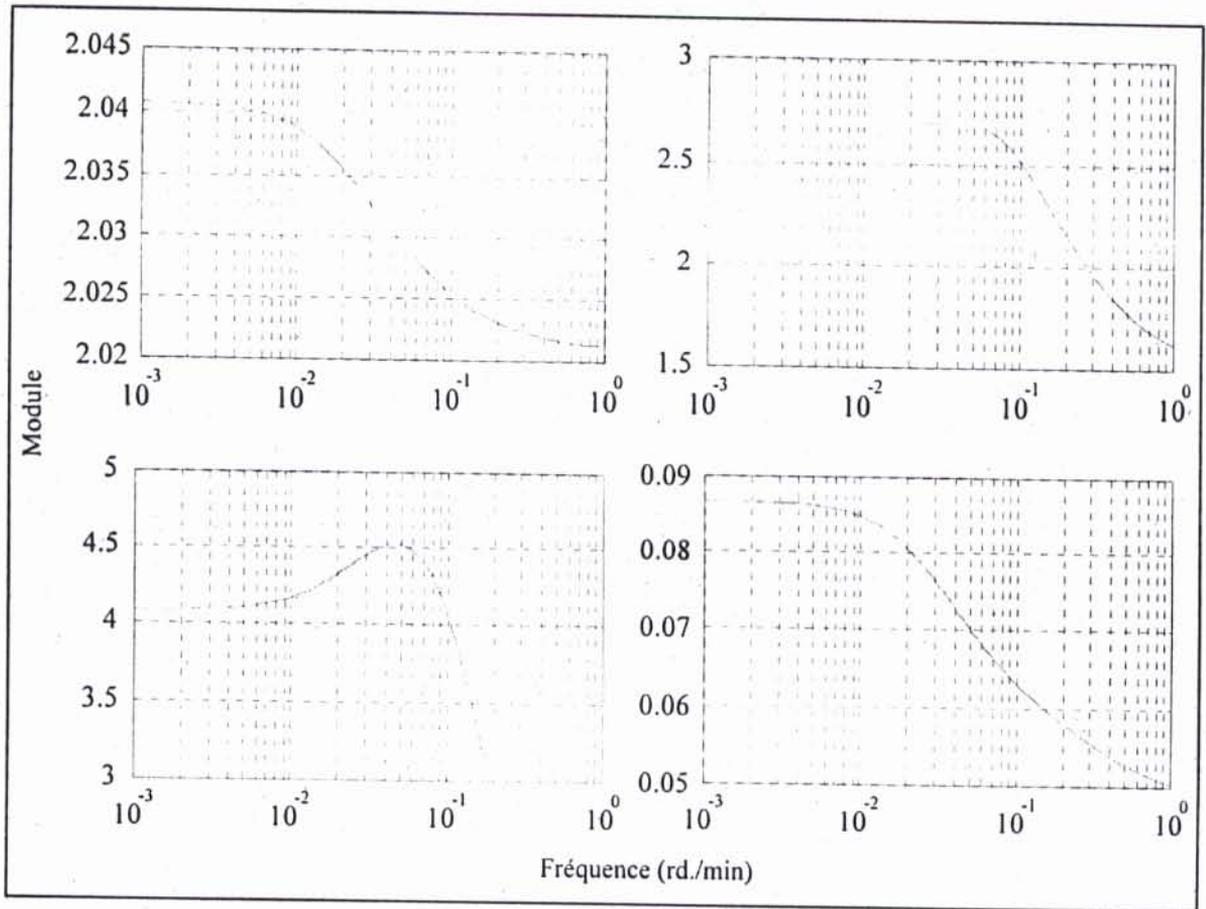


FIG. 3.8 : Matrice $\eta_1(s)$ de $G_{11}(s)$.

Les deux matrices $\tilde{U}_1(s)$ et $\tilde{U}_2(s)$ permettant de quantifier l'effet de $G_{22}(s)$ sur $G_{11}(s)$ données par la relation (3.12) sont :

$$\tilde{U}_1(s) = U_1(s) \hat{g}_{11}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_{22}(s)}{g_{21}(s)} & \frac{g_{24}(s)}{g_{21}(s)} \\ \frac{g_{32}(s)}{g_{33}(s)} & \frac{g_{34}(s)}{g_{33}(s)} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\tilde{U}_2(s) = U_2(s) \hat{g}_{22}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_{32}(s)}{g_{33}(s)} & \frac{g_{34}(s)}{g_{33}(s)} \\ \frac{g_{22}(s)}{g_{21}(s)} & \frac{g_{24}(s)}{g_{21}(s)} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Les figures 3.9 et 3.10 représentent les diagrammes d'amplitudes des matrices $\tilde{U}_1(s)$ et $\tilde{U}_2(s)$ respectivement. Le premier élément de $\tilde{U}_1(s)$ est supérieur à 1, par contre le deuxième est inférieur à 1. Par conséquent, les effets de la commande u_2 et celui de la commande u_4 sur la sortie y_2 sont respectivement très fort et très faible. Les deux éléments de la matrice $\tilde{U}_2(s)$ sont supérieurs à 1, impliquant que l'effet de chaque commande u_2 et u_4 sur la sortie y_3 est significatif, avec un effet plus fort de la commande u_4 (fig. 3.10).

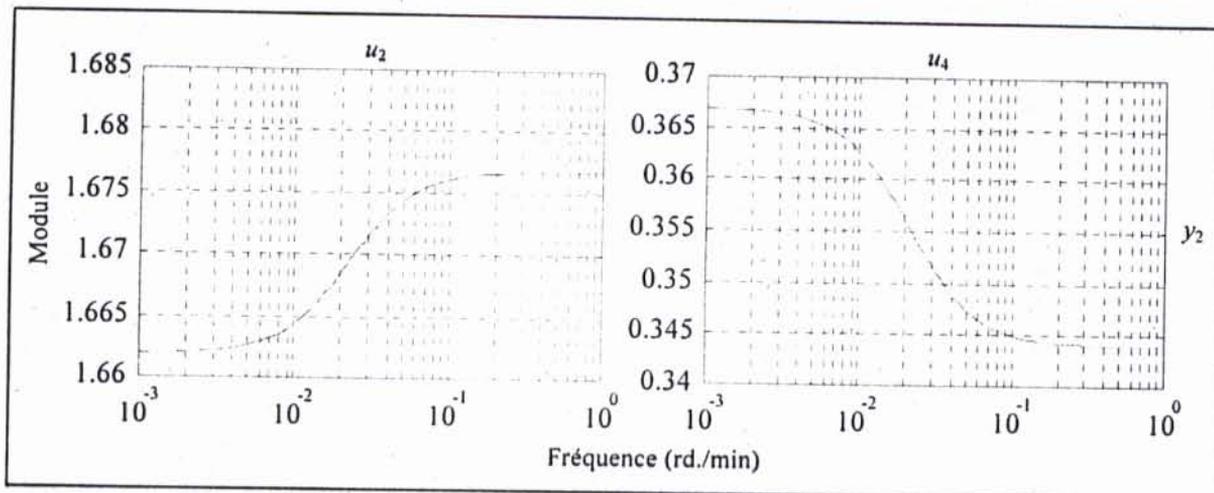


FIG. 3.9 : Matrice $\tilde{U}_1(\omega)$ correspondante à $G_{11}(s)$.

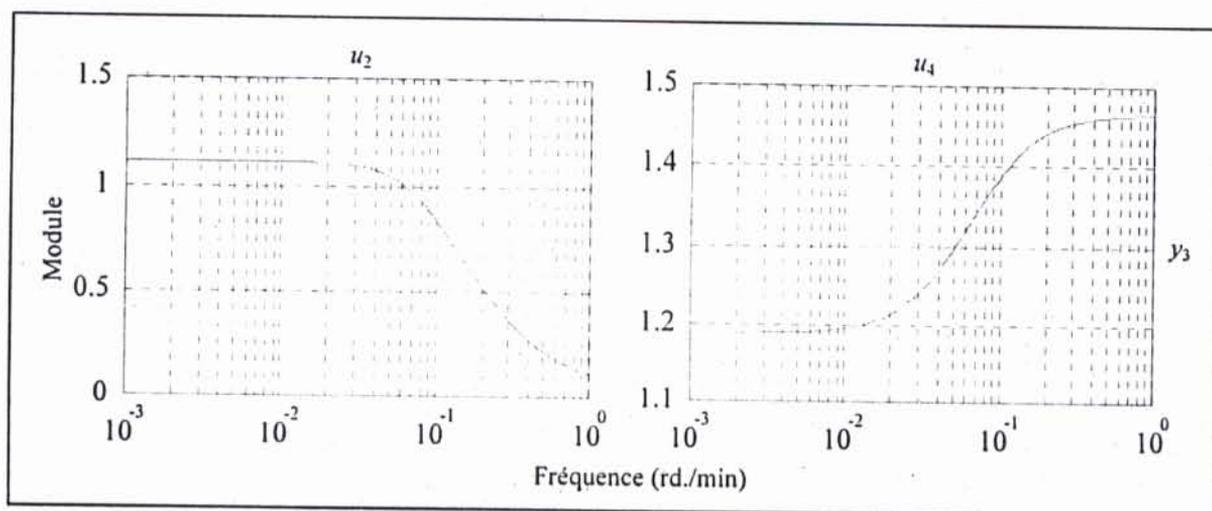


FIG. 3.10 : Matrice $\tilde{U}_2(\omega)$ correspondante à $G_{11}(s)$.

L'effet de $G_{11}(s)$ sur $G_{22}(s)$ est caractérisé par la matrice $\tilde{V}_1(s)$ donnée par la relation (3.14) comme suit :

$$\tilde{V}_1(s) = [V_2(s)]^T \hat{g}_{22}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_{11}(s)}{g_{21}(s)} & \frac{g_{41}(s)}{g_{21}(s)} \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

La figure 3.11 donne les diagrammes d'amplitudes des éléments de la matrice $\tilde{V}_1(s)$. On constate que les deux éléments de $\tilde{V}_1(s)$ sont supérieurs à 1, dans ce cas, l'effet de la commande u_1 sur chacune des sorties y_1 et y_4 de $G_{22}(s)$ est fort. La sortie y_4 étant la plus affectée par rapport à y_1 .

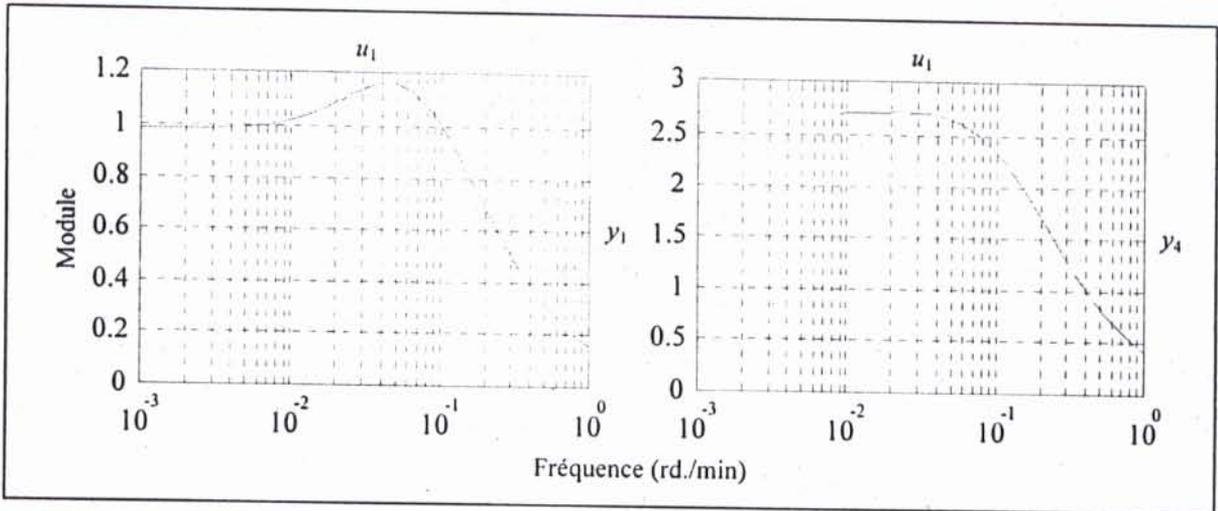


FIG. 3.11 : Matrice $\tilde{V}_1(\omega)$ correspondante à $G_{11}(s)$.

En résumé les interactions entre les sous-systèmes $G_{11}(s)$ sur $G_{22}(s)$ sont fortes.

4. Analyse des interactions dans $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$

Le Quotient d'Interaction correspondant au sous-système $G_{11}(s)$ est :

$$K_1(s) = \frac{g_{31}(s)g_{23}(s)}{g_{21}(s)g_{33}(s)}. \quad (3.31)$$

La figure 3.12 montre que les interactions entre les boucles du sous-système $G_{11}(s)$ sont très faibles car le lieu de $K_1(s)$ est très proche de zéro (méthode Kominék et Smith).

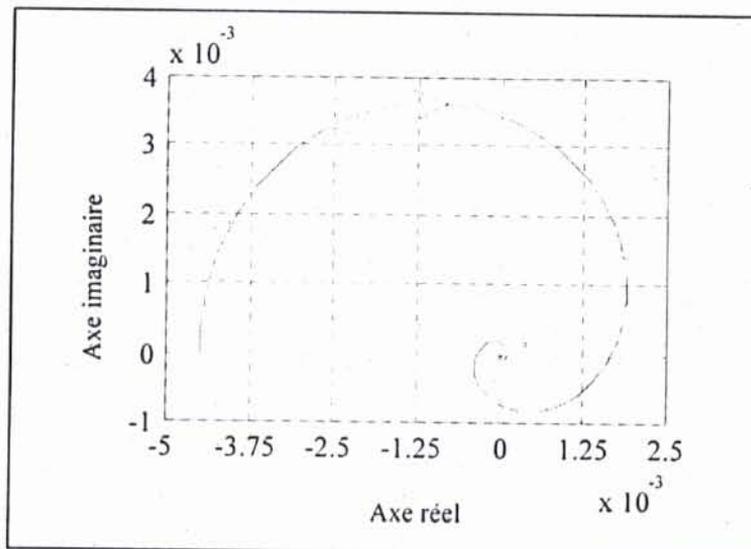


FIG. 3.12 : Quotient d'Interaction (IQ ; méthode de Kominék et Smith) pour le système $G_{11}(s)$.

3.2.3 Méthode de décomposition en deux sous-systèmes carrés

3.2.3.1 Décomposition du système $G(s)$ en deux sous systèmes carrés

Cette méthode consiste à décomposer le système $G(s)$ en deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$ carrés ($n_s = 2$) comme suit :

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Avec :

$G_{11}(s)$: est le premier sous-système de dimensions $m_{11} \times m_{11}$.

$G_{22}(s)$: est le deuxième sous-système de dimensions $m_{22} \times m_{22}$.

$G_{12}(s)$: est le bloc de transmittances (sous-système) liant les entrées de $G_{22}(s)$ avec les sorties de $G_{11}(s)$. Il est de dimensions $m_{11} \times m_{22}$.

$G_{21}(s)$: est le bloc de transmittances (sous-système) liant les entrées de $G_{11}(s)$ avec les sorties de $G_{22}(s)$. Il est de dimensions $m_{22} \times m_{11}$.

Cette décomposition doit impérativement vérifier la condition suivante :

Au moins un des sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$ est inversible.

Dans la décomposition (3.32) de $G(s)$, il est judicieux d'avoir au moins un des sous-systèmes $G_{12}(s)$ ou $G_{21}(s)$ avec toutes les transmittances faibles, ce-ci simplifie d'avantage l'analyse des interactions entre les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$. Dans cette optique, lors de la décomposition du système $G(s)$, on essaie d'isoler d'abord un sous-système à faibles transmittances. Pour cela, on doit déterminer la bande de fréquences dans laquelle le système travaille, puis par construction de la Matrice Directe de Nyquist (**DNA**), on cherche à localiser au moins un sous-système ($G_{12}(s)$ ou $G_{21}(s)$) ayant toutes les transmittances faibles en permutant les lignes et/ou les colonnes du système initial $G(s)$.

De la décomposition (3.32), il ressort les remarques suivantes :

- Le sous-système $G_{12}(s)$ caractérise l'effet de $G_{22}(s)$ sur $G_{11}(s)$.
- Le sous-système $G_{21}(s)$ caractérise l'effet de $G_{11}(s)$ sur $G_{22}(s)$.

Une fois la décomposition (3.32) vérifiant la condition suscitée est obtenue, il reste à analyser les interactions présentes entre les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$, et individuellement dans chacun d'entre eux.

3.2.3.2 Analyse des interactions entre les deux sous-systèmes

En général, lors de la décomposition (3.32) du système $G(s)$, trois cas de figures peuvent se présenter :

1. Toutes les transmittances des deux sous-systèmes $G_{12}(s)$ et $G_{21}(s)$ sont faibles.
2. Un des deux sous-systèmes $G_{12}(s)$ ou $G_{21}(s)$ a toutes les transmittances faibles.
3. Toutes les transmittances des deux sous-systèmes $G_{12}(s)$ et $G_{21}(s)$ sont fortes, c'est-à-dire, il y a absence de sous-système ayant toutes les transmittances faibles.

Dans le premier cas, les deux sous-système $G_{11}(s)$, $G_{22}(s)$ sont indépendants et seule l'analyse des interactions présentes entre les boucles de chaque sous-système est menée.

Dans le second cas, selon le sous-système ayant toutes ses transmittances faibles, un sous-système affecte l'autre. Si toutes les transmittances de $G_{21}(s)$ sont faibles, l'effet de $G_{11}(s)$ sur $G_{22}(s)$ est négligeable; il reste donc à examiner l'effet de $G_{22}(s)$ sur $G_{11}(s)$. Cependant, si toutes les transmittances de $G_{12}(s)$ sont faibles, l'effet de $G_{22}(s)$ sur $G_{11}(s)$ est négligeable, dans ce cas, il faut analyser l'effet de $G_{11}(s)$ sur $G_{22}(s)$.

Dans le dernier cas, chaque sous-système est affecté par l'autre, l'analyse et la quantification de l'effet de chaque sous-système sur l'autre s'imposent.

Pour analyser l'effet de $G_{11}(s)$ sur $G_{22}(s)$, il suffit de déterminer l'une des matrices suivantes :

$$\bullet I_{s_1 \rightarrow s_2}(s) = G_{21}(s) \cdot * \left[-G_{11}^{-1}(s)G_{12}(s)X^{-1}(s) \right]^T, \quad \text{SSI } G_{11}(s) \text{ est inversible.} \quad (3.33)$$

$$\bullet I_{s_1 \rightarrow s_2}(s) = G_{21}(s) \cdot * \left[-Y^{-1}(s)G_{12}(s)G_{22}^{-1}(s) \right]^T, \quad \text{SSI } G_{22}(s) \text{ est inversible.} \quad (3.34)$$

$$\bullet I_{s_1 \rightarrow s_2}(s) = G_{21}(s) \cdot * \left[-G_{11}^{-1}(s)G_{12}(s)X^{-1}(s) \right]^T = G_{21}(s) \cdot * \left[-Y^{-1}(s)G_{12}(s)G_{22}^{-1}(s) \right]^T,$$

$$\text{SSI } G_{11}(s) \text{ et } G_{22}(s) \text{ sont les deux inversibles.} \quad (3.35)$$

Avec :

$$X(s) = G_{22}(s) - G_{21}(s)G_{11}^{-1}(s)G_{12}(s),$$

$$Y(s) = G_{11}(s) - G_{12}(s)G_{22}^{-1}(s)G_{21}(s),$$

La matrice $I_{s_1 \rightarrow s_2}(s)$ est de dimensions $m_{22} \times m_{11}$.

La représentation des modules des éléments de la matrice $I_{s_1 \rightarrow s_2}(s)$ en fonction de la fréquence ω permet de déterminer les commandes du sous-système $G_{11}(s)$ qui affectent fortement $G_{22}(s)$ et de localiser ses sorties affectées.

Lorsque le module d'un élément $\lambda_y(s)$ de la matrice $I_{s_1 \rightarrow s_2}(s)$ est proche de zéro dans la bande de fréquences de travail du système $G(s)$, la transmittance entre la commande u_j et la sortie y_i est faible (l'effet de u_j sur y_i est négligeable). Contrairement, lorsque le module d'un élément $\lambda_y(s)$ de la matrice $I_{s_1 \rightarrow s_2}(s)$ est supérieur ou égal à 0.5, l'effet de u_j sur y_i est considérable, et la transmittance entre u_j et y_i est forte.

De même, pour analyser l'effet de $G_{22}(s)$ sur $G_{11}(s)$, on détermine l'une des matrice suivantes :

$$\bullet I_{s_2 \rightarrow s_1}(s) = G_{12}(s) \cdot \left[-X^{-1}(s) G_{21}(s) G_{11}^{-1}(s) \right]^T, \quad \text{SSI } G_{11}(s) \text{ est inversible.} \quad (3.36)$$

$$\bullet I_{s_2 \rightarrow s_1}(s) = G_{12}(s) \cdot \left[-G_{22}^{-1}(s) G_{21}(s) Y^{-1}(s) \right]^T, \quad \text{SSI } G_{22}(s) \text{ est inversible.} \quad (3.37)$$

$$\bullet I_{s_2 \rightarrow s_1}(s) = G_{12}(s) \cdot \left[-X^{-1}(s) G_{21}(s) G_{11}^{-1}(s) \right]^T = G_{12}(s) \cdot \left[-G_{22}^{-1}(s) G_{21}(s) Y^{-1}(s) \right]^T,$$

$$\text{SSI } G_{11}(s) \text{ et } G_{22}(s) \text{ sont inversibles.} \quad (3.38)$$

La matrice $I_{s_2 \rightarrow s_1}(s)$ est de dimensions $m_{11} \times m_{22}$.

En considérant la matrice $I_{s_2 \rightarrow s_1}(s)$, l'analyse des interactions s'effectue de la façon décrite précédemment.

Les démonstrations des relations de $I_{s_1 \rightarrow s_2}(s)$ et $I_{s_2 \rightarrow s_1}(s)$ sont données en annexe C.

Remarques 3.3

- Les relations de $I_{s_1 \rightarrow s_2}(s)$ et de $I_{s_2 \rightarrow s_1}(s)$ sont déterminées en utilisant l'inverse d'une matrice partitionnée (annexe A) et l'expression de la Matrice des Gains Relatifs Dynamique (2.18) (annexe C). Cela signifie que l'analyse des interactions existantes entre

les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$ se fait par la **DRGA**. D'autres méthodes d'analyse telle que la Matrice des Gains Relatifs (**RGA**), la Matrice des Gains Dynamiques Moyens (**ADGA**) ou la Matrice Dynamique Relative (**RDA**) peuvent être utilisées.

- Les trois expressions de la matrice $I_{s_1 \rightarrow s_2}(s)$ en occurrence les relations (3.33), (3.34) et (3.35) conduisent à des résultats identiques. Selon l'existence de $G_{11}^{-1}(s)$ et $X^{-1}(s)$ ou de $G_{22}^{-1}(s)$ et $Y^{-1}(s)$, seule une de ces relations est utilisée pour analyser l'effet de $G_{11}(s)$ sur $G_{22}(s)$. Cela va de même pour les expressions (3.36), (3.37) et (3.38) de la matrice $I_{s_2 \rightarrow s_1}(s)$.

3.2.3.3 Exemples d'application

Pour éclaircir le principe de la méthode de décomposition en deux sous-systèmes carrés, les exemples de deux colonnes de distillation étudiées précédemment sont repris.

3.2.3.3.1 Exemple 1 : Modèle de Doukas et Luyben

1. Décomposition de $G(s)$ en deux sous-systèmes carrés

D'après la Matrice Directe de Nyquist (**DNA**) de la figure 3.1, le système $G(s)$ est décomposable en deux sous-systèmes carrés avec localisation d'un sous-système ayant toutes les transmittances faibles permettant de mettre $G(s)$ sous la forme (3.32) comme suit :

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

avec :

| $G_{11}(s)$ | $G_{12}(s)$ | $G_{21}(s)$ | $G_{22}(s)$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{13}(s) \\ g_{31}(s) & g_{33}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{12}(s) & g_{14}(s) \\ g_{32}(s) & g_{34}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_2 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{21}(s) & g_{23}(s) \\ g_{41}(s) & g_{43}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_2 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{22}(s) & g_{24}(s) \\ g_{42}(s) & g_{44}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{bmatrix}$ |

TAB. 3.4 : Décomposition de $G(s)$ en deux sous-systèmes carrés.

Où :

$G_{12}(s)$: est le sous-système à faibles transmittances.

2. Analyse des interactions entre les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$

Pour analyser les interactions entre les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$, il suffit de générer la matrice $I_{s_1 \rightarrow s_2}$ caractérisant l'effet de $G_{11}(s)$ sur $G_{22}(s)$ en utilisant l'une des relations (3.33), (3.34) ou (3.35). Pour cet exemple, il est inutile de représenter la matrice $I_{s_2 \rightarrow s_1}$ car toutes les transmittances de $G_{12}(s)$ sont faibles, signifiant que l'effet de $G_{22}(s)$ sur $G_{11}(s)$ est faible.

La représentation fréquentielle de la matrice $I_{s_1 \rightarrow s_2}$ est donnée par la figure 3.14 où on constate que tous les éléments sont proches de zéro dans les bases fréquences signifiant que l'effet de $G_{11}(s)$ sur $G_{22}(s)$ est très faible.

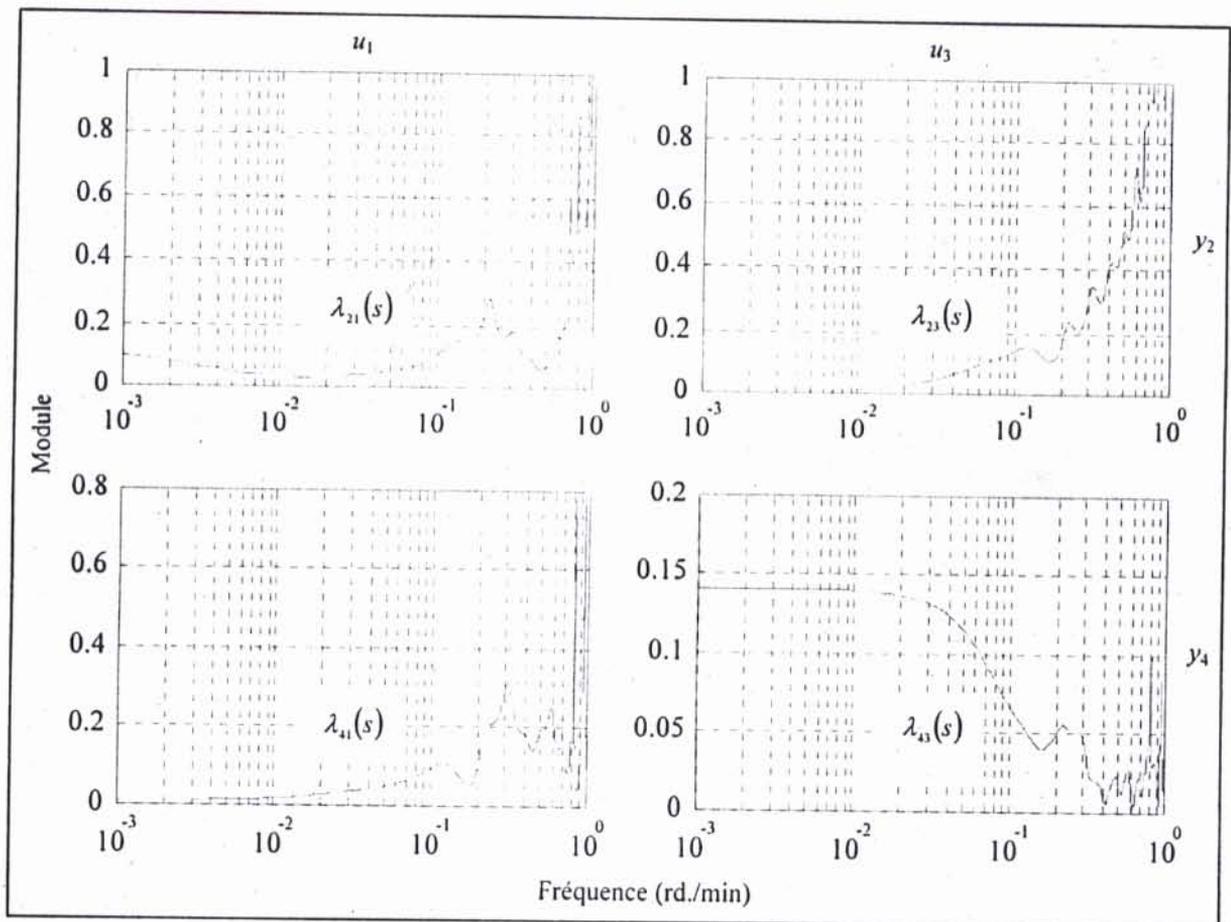


FIG. 3.14 : Matrice $I_{s_1 \rightarrow s_2}$ de l'exemple 1.

3. Analyse des interactions dans $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$

Pour analyser les interactions dans chaque sous-système la méthode **IMC** est utilisée. L'application de celle-ci pour les deux sous-systèmes, en considérant la configuration de commande définie par les éléments de la diagonale, donne :

| LE SOUS-SYSTEME | $G_{11}(s)$ | | $G_{22}(s)$ | |
|-----------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Boucle | $[u_1 - y_1]$ | $[u_1 - y_3]$ | $[u_2 - y_2]$ | $[u_3 - y_4]$ |
| $L_i(\omega)$ | $\frac{ g_{11}(s) }{ g_{11}(s) + g_{13}(s) }$ | $\frac{ g_{31}(s) }{ g_{31}(s) + g_{33}(s) }$ | $\frac{ g_{22}(s) }{ g_{22}(s) + g_{24}(s) }$ | $\frac{ g_{42}(s) }{ g_{42}(s) + g_{44}(s) }$ |
| $C_i(\omega)$ | $\frac{ g_{31}(s) }{ g_{11}(s) + g_{31}(s) }$ | $\frac{ g_{13}(s) }{ g_{11}(s) + g_{31}(s) }$ | $\frac{ g_{42}(s) }{ g_{22}(s) + g_{42}(s) }$ | $\frac{ g_{24}(s) }{ g_{22}(s) + g_{42}(s) }$ |

TAB. 3.5 : Méthode **IMC** pour les sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$.

Les figures 3.15 et 3.16 représentent respectivement les allures de $L_i(\omega)$ et $C_i(\omega)$ des boucles des sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$. L'examen de la figure 3.15.a montre que $L_i(\omega)$ et $C_i(\omega)$ sont inférieurs à 0.5 pour la boucle $[u_1 - y_1]$. Cette boucle est donc indépendante de la boucle $[u_3 - y_3]$.

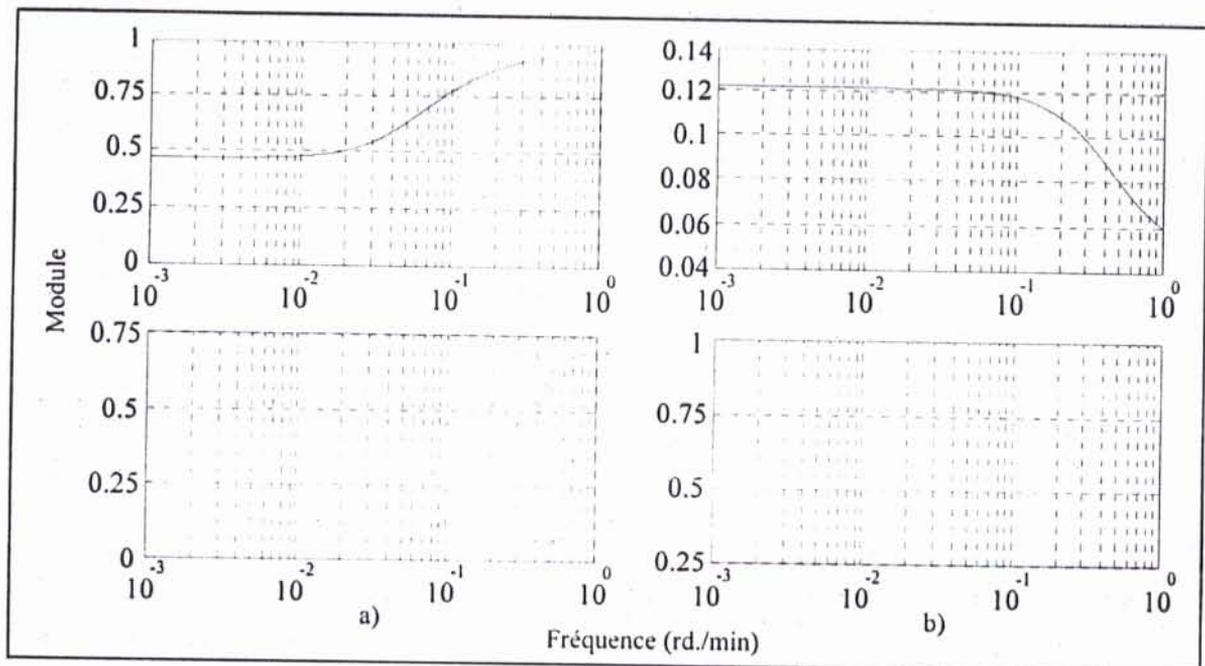


FIG. 3.15 : Méthode **IMC** pour le sous-système $G_{11}(s)$, (a) La boucle $[u_1 - y_1]$ et (b) La boucle $[u_3 - y_3]$:

— $L_i(\omega)$; - - - $C_i(\omega)$

La figure 3.15.b montre que la commande u_3 présente un effet négligeable sur y_1 par rapport à celui de u_1 car $C_i(\omega) \geq 0.5$ de la boucle $[u_3 - y_3]$. En résumé, les interactions dans le sous-système $G_{11}(s)$ sont faibles, et u_1 et u_3 présentent un effet fort respectivement sur y_1 et y_3 .

Selon la figure 3.16, pour chaque boucle de $G_{22}(s)$, $L_i(\omega)$ et $C_i(\omega)$ sont inférieurs à 0.5. Les valeurs de $L_i(\omega)$ et $C_i(\omega)$ montrent que les interactions entre les deux boucles de $G_{22}(s)$ sont très faibles.

En conclusion, les effets de u_2 et de u_4 sont fort sur y_2 et y_4 respectivement.

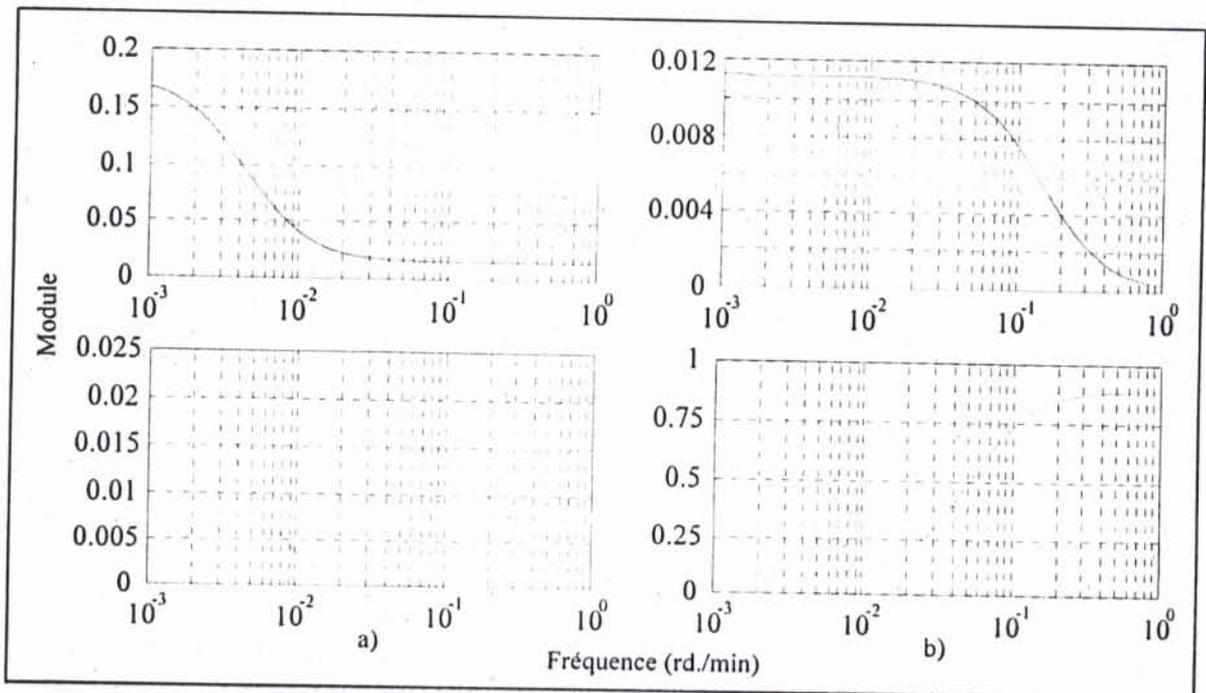


FIG. 3.16 : Méthode IMC pour le sous-système $G_{22}(s)$, (a) La boucle $[u_2 - y_2]$ et (b) La boucle $[u_4 - y_4]$:

— $L_i(\omega)$; - - - $C_i(\omega)$

3.2.3.3.2 Exemple2 : Modèle d'Alatiqi

1. Décomposition de $G(s)$ en deux sous-systèmes carrés

La Matrice Directe de Nyquist (DNA) de la figure 3.7 montre qu'il est impossible de décomposer le système $G(s)$ en deux sous-systèmes carrés en localisant au moins un sous-système ayant toutes les transmittances faibles. Pour cet exemple, on considère la décomposition suivante :

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

avec :

| $G_{11}(s)$ | $G_{12}(s)$ | $G_{21}(s)$ | $G_{22}(s)$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{13}(s) & g_{14}(s) \\ g_{23}(s) & g_{24}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{31}(s) & g_{32}(s) \\ g_{41}(s) & g_{42}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{33}(s) & g_{34}(s) \\ g_{43}(s) & g_{44}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$ |

TAB. 3.6 : Décomposition de $G(s)$ en deux sous-systèmes carrés.

2. Analyse des interactions entre les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$

Les deux matrices $I_{s_1 \rightarrow s_2}$ et $I_{s_2 \rightarrow s_1}$ caractérisant les interactions entre les deux sous-systèmes sont données par les figures 3.17 et 3.18 respectivement.

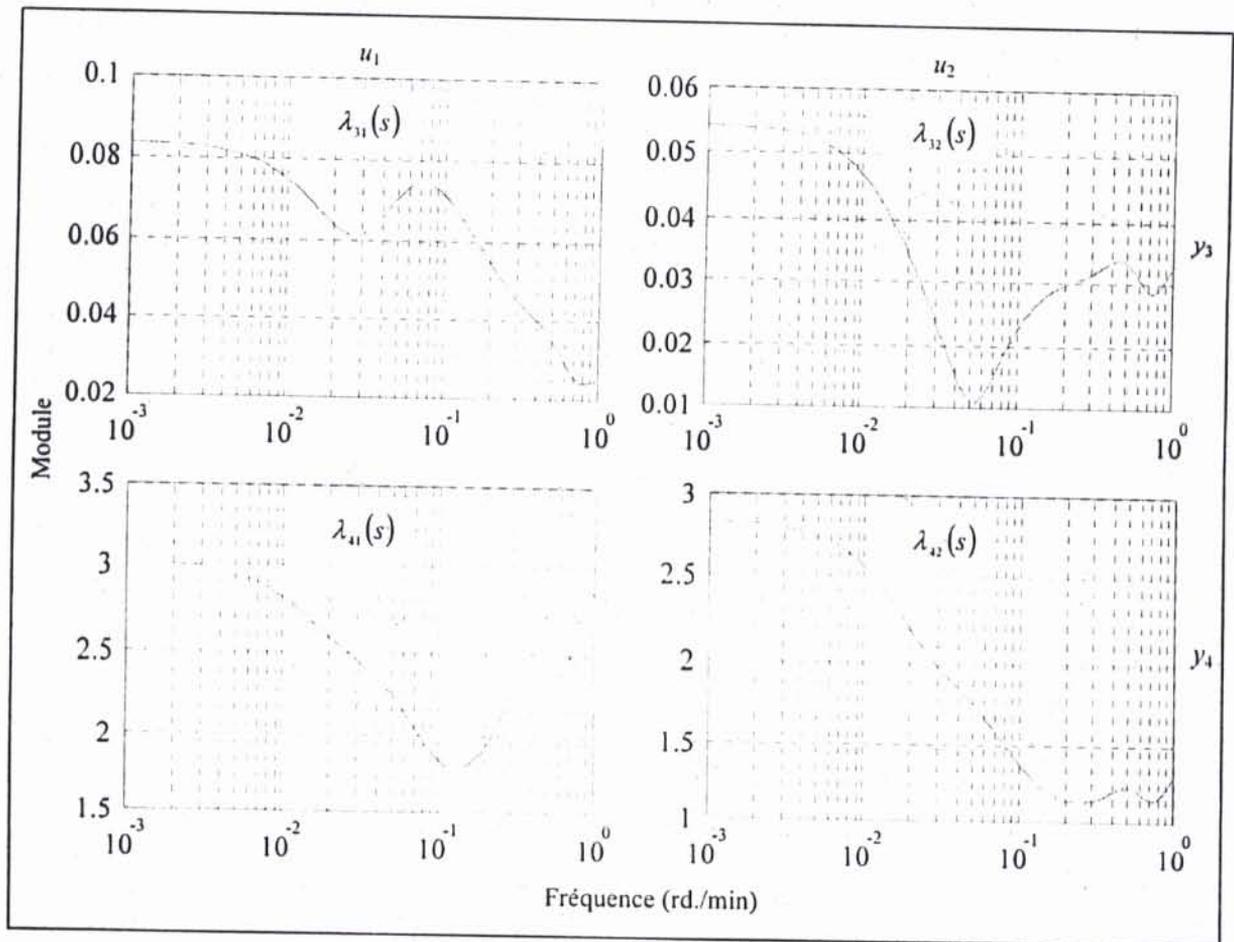


FIG. 3.17 : Matrice $I_{s_1 \rightarrow s_2}$ de l'exemple 2.

La figure 3.17 montre que les deux commandes u_1 et u_2 de $G_{11}(s)$ affectent fortement la sortie y_4 de $G_{22}(s)$; avec un effet considérable de la commande u_1 . L'effet de $G_{22}(s)$ sur $G_{11}(s)$ se traduit par la commande u_4 qui affecte les deux sorties de $G_{11}(s)$, et la sortie y_2 est plus affectée que y_1 (fig. 3.18).

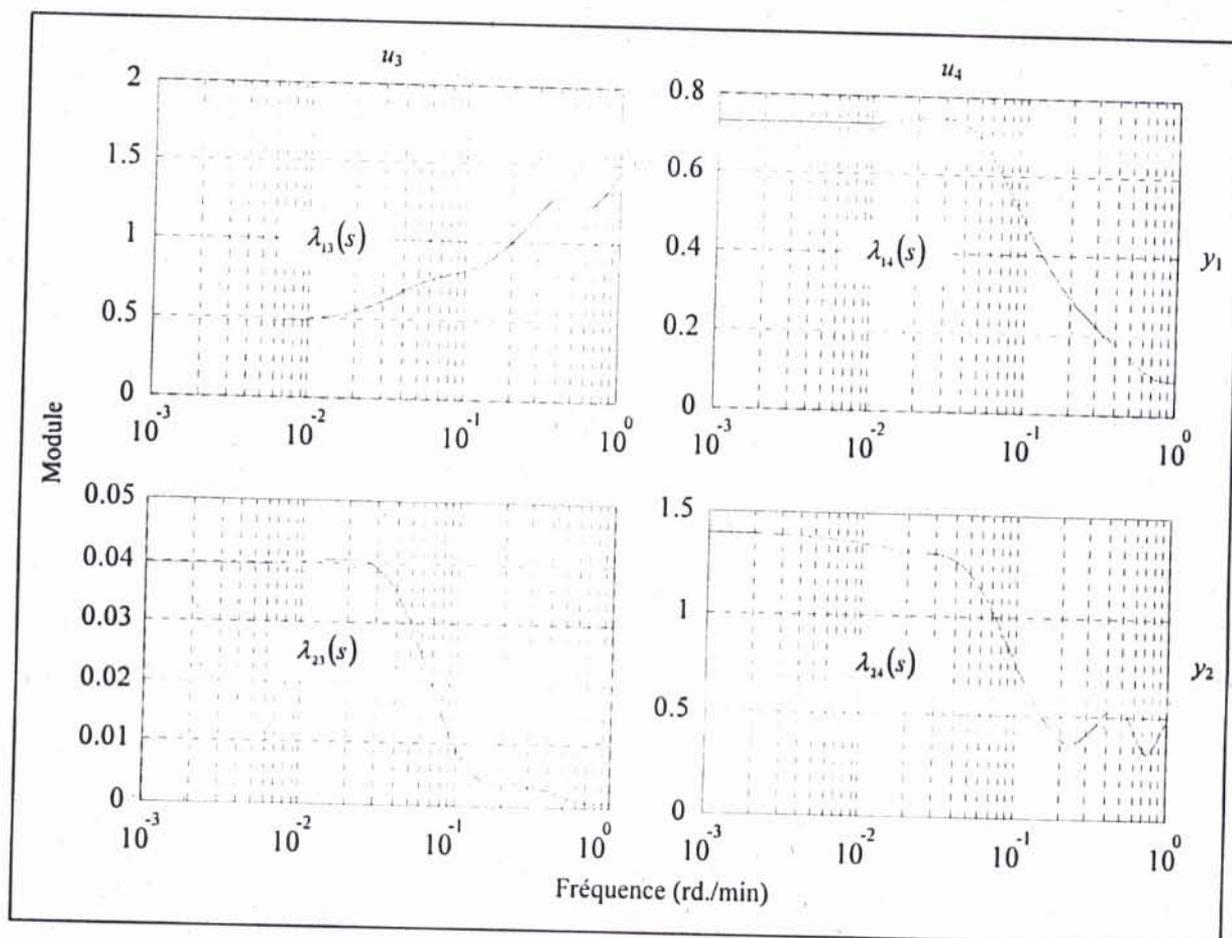


FIG. 3.18 : Matrice $I_{s_1 \rightarrow s_2}$ de l'exemple 2.

3. Analyse des interactions dans $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$

L'application de la méthode IMC pour les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$ en considérant les deux boucles définies par les éléments de la diagonale de chaque sous-système donne :

| LE SOUS-SYSTEME | $G_{11}(s)$ | | $G_{22}(s)$ | |
|-----------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| | $[u_1 - y_1]$ | $[u_2 - y_2]$ | $[u_3 - y_3]$ | $[u_4 - y_4]$ |
| $L_i(\omega)$ | $\frac{ g_{12}(s) }{ g_{12}(s) + g_{11}(s) }$ | $\frac{ g_{21}(s) }{ g_{21}(s) + g_{22}(s) }$ | $\frac{ g_{34}(s) }{ g_{34}(s) + g_{33}(s) }$ | $\frac{ g_{43}(s) }{ g_{43}(s) + g_{44}(s) }$ |
| $C_i(\omega)$ | $\frac{ g_{21}(s) }{ g_{21}(s) + g_{11}(s) }$ | $\frac{ g_{12}(s) }{ g_{12}(s) + g_{22}(s) }$ | $\frac{ g_{43}(s) }{ g_{43}(s) + g_{33}(s) }$ | $\frac{ g_{34}(s) }{ g_{34}(s) + g_{44}(s) }$ |

TAB. 3.7 : Méthode IMC pour $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$.

Les figures 3.19 et 3.20 représentent respectivement les allures de $L_i(\omega)$ et $C_i(\omega)$ des boucles des sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$. La figure 3.19.a, montre que la sortie y_1 est affectée par la commande u_2 ($L_i(\omega) \geq 0.5$ pour $[u_1 - y_1]$). L'effet de la commande u_1 sur la sortie y_2 est insignifiant car $L_i(\omega)$ est inférieur à 0.5 pour la boucle $[u_2 - y_2]$ (fig. 3.19.b). Ces résultats permettent de conclure que l'effet de la commande u_2 est faible sur y_1 et fort sur y_2 .

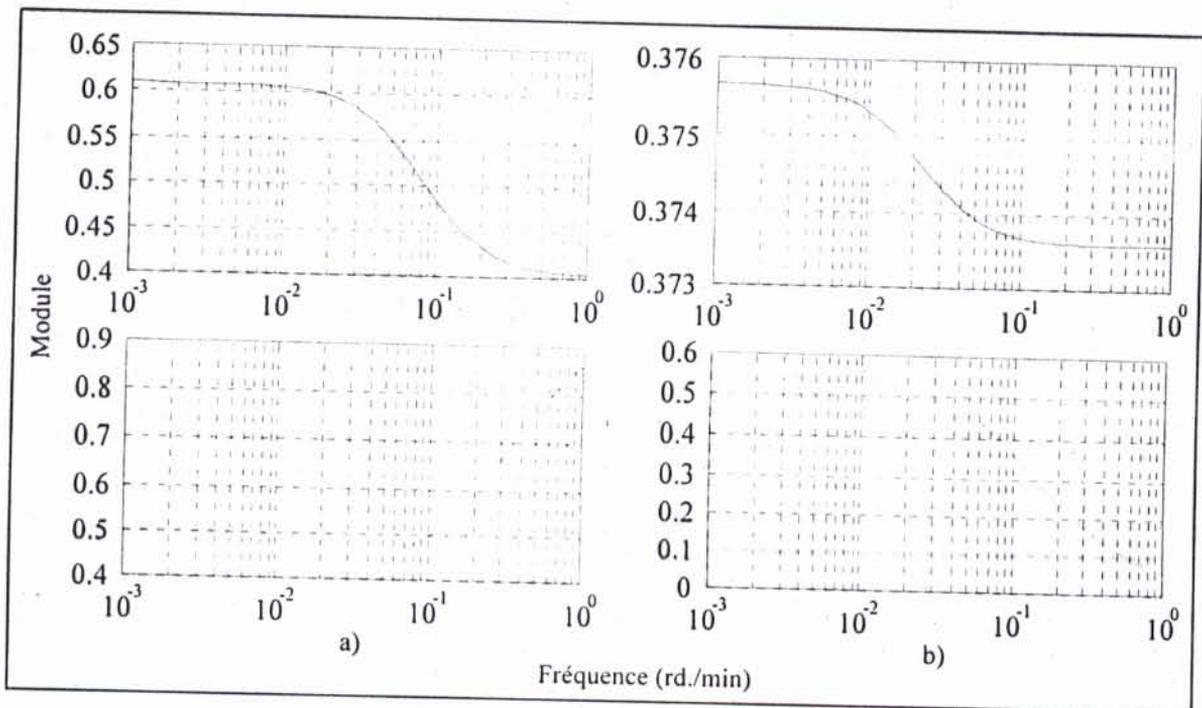


FIG. 3.19 : Méthode IMC pour le sous-système $G_{11}(s)$, (a) La boucle $[u_1 - y_1]$ et (b) La boucle $[u_2 - y_2]$:
 ——— $L_i(\omega)$; - - - - - $C_i(\omega)$

Concernant $G_{22}(s)$, la figure 3.20.a montre que l'effet de la commande u_4 sur la sortie y_3 est significatif car $L_i(\omega) \geq 0.5$ pour $[u_3 - y_3]$ et $C_i(\omega) \geq 0.5$ pour $[u_4 - y_4]$. En se référant aux valeurs de $L_i(\omega)$ et de $C_i(\omega)$ des boucles de $G_{22}(s)$ qui sont faibles, on déduit que les interactions entre les boucles de la configuration de commande considérée pour $G_{22}(s)$ sont insignifiantes.

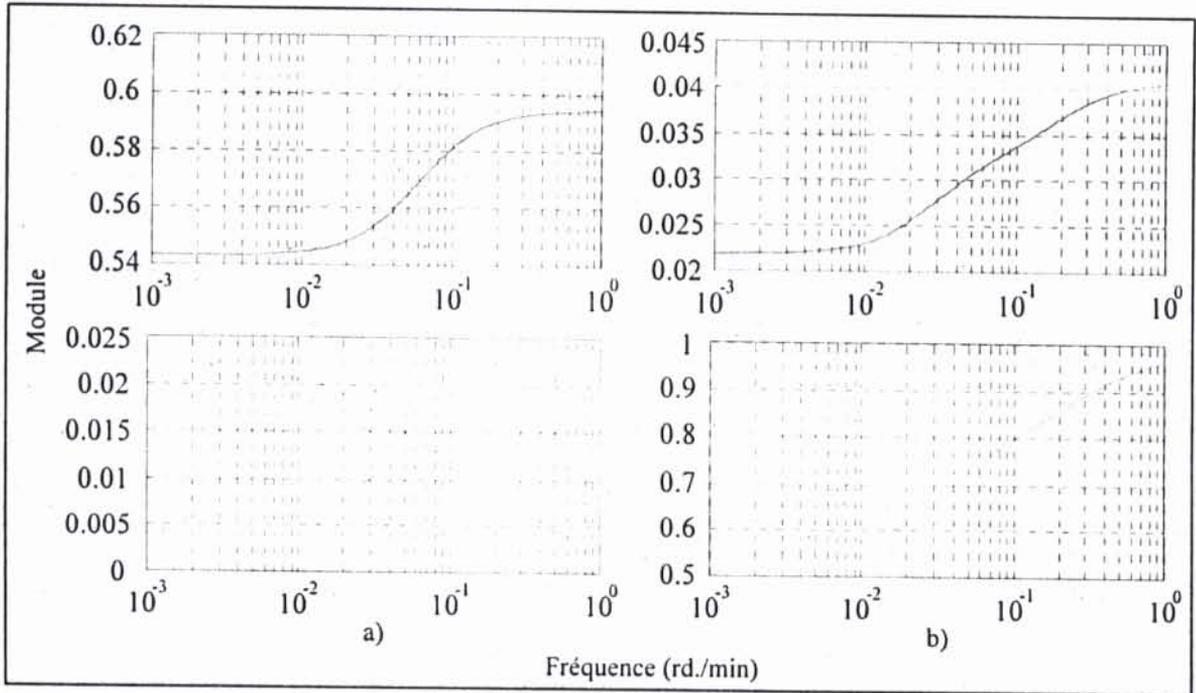


FIG. 3.20 : Méthode IMC pour le sous-système $G_{22}(s)$, (a) La boucle $[u_3 - y_3]$ et (b) La boucle $[u_4 - y_4]$:
 ——— $L_i(\omega)$; - - - - - $C_i(\omega)$

3.3 Méthodes de détermination de la configuration de commande

3.3.1 Méthode du graphe de fluence

Suite à l'analyse des interactions par l'une des deux méthodes développées dans le paragraphe 3.2, une configuration de commande assurant de faibles interactions et une stabilité des boucles de commande doit être choisie pour la commande multiboucle du système. La stabilité est garantie par le choix des couples à gains relatifs positifs imposée par la RGA.

Le choix de la configuration de commande convenable est dicté par les résultats d'analyse des interactions obtenus par l'une des méthodes proposées, combinés avec la Matrice des Gains Relatifs (RGA) [35].

3.3.1.1 Construction du graphe de fluence

Pour déterminer la configuration de commande, le graphe de fluence du système représentant seulement les transmittances à gain relatif positif est construit. Pour faciliter la détermination de la meilleure configuration, on représente les arcs correspondants aux transmittances fortes par une ligne continue et les faibles transmittances par une ligne discontinue [35]. Dans le but d'éviter la sélection d'un couple dont le gain relatif est négatif, il est conseillé de ne pas représenter l'arc de la transmittance correspondante à celui-ci.

3.3.1.2 Détermination de la configuration de commande

Le graphe de fluence final obtenu permet de choisir la meilleure configuration de commande. Celle-ci est déterminée par le choix des couples dont les boucles correspondantes présentent un minimum de transmittances fortes entre elles. En utilisant le graphe de fluence final obtenu, la démarche consiste à faire un changement dans la configuration de commande initiale définie par les couples de la diagonale du système $\hat{G}(s)$, de façon à sélectionner un ensemble de m couples contenant le maximum de couples correspondants aux transmittances fortes [35]. Cet ensemble définit la meilleure configuration de commande.

Remarques 3.4

- Lors de la construction du graphe de fluence pour déterminer la configuration de commande, il faut tenir compte des permutations de lignes et/ou de colonnes de $G(s)$ (effectuées dans le but de positionner les sous-systèmes $G_{ii}(s)$ obtenus dans la diagonale de $\hat{G}(s)$), car cela se traduit par une permutation de commandes et de sorties dans les vecteurs de commandes u et de sorties y du système $G(s)$.
- Lors de la détermination de la configuration de commande, il faut veiller à la possibilité de sa réalisation pratique ; lorsqu'un couple $[u_j - y_i]$ est choisi, il faut que u_j puisse commander y_i pratiquement.

3.3.1.3 Exemples d'application

Comme exemples d'applications, considérons les deux colonnes de distillation étudiées dans le paragraphe 3.2.2.5. Le tableau 3.8, donne la RGA correspondante pour chaque colonne calculée en utilisant la relation (2.8) et les résultats d'analyse des interactions entre les sous-systèmes obtenus par les méthodes d'analyse par décomposition proposées.

| EXEMPLE | DOUKAS ET LUYBEN | ALATIQUI |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| RGA | $\begin{bmatrix} 1.0062 & -0.1013 & 0.1258 & -0.0308 \\ -0.1045 & 1.0935 & 0.0106 & 0.0004 \\ 0.1082 & 0.0024 & 0.7232 & 0.1662 \\ -0.0990 & 0.0053 & 0.1404 & 0.8642 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 3.1058 & -0.9007 & -0.4749 & -0.7302 \\ -5.0308 & 4.6742 & -0.0395 & 1.3961 \\ -0.0838 & 0.0543 & 1.5492 & -0.5197 \\ 3.0088 & -2.8278 & -0.0348 & 0.8538 \end{bmatrix}$ |
| Effets d'interactions | <ul style="list-style-type: none"> La commande u_4 affecte fortement y_4 par rapport à la commande u_3. | <ul style="list-style-type: none"> La commande u_4 affecte fortement y_2 par rapport à la sortie y_1. La sortie y_4 est affectée fortement par u_1 par rapport à la commande u_2. |

TAB. 3.8 : Résumé sur les interactions entre les sous-systèmes de chaque colonne.

En tenant compte des interactions dans chaque sous-système et par élimination des couples à gain relatif négatif indiqués par la RGA, la méthodologie du graphe de fluence proposée est appliquée pour déterminer la configuration de commande adéquate. Les graphes de fluence, obtenus en se basant sur les résultats d'analyse des interactions, sont présentés en figures 3.21.a et 3.21.b respectivement pour le premier et le deuxième exemple.

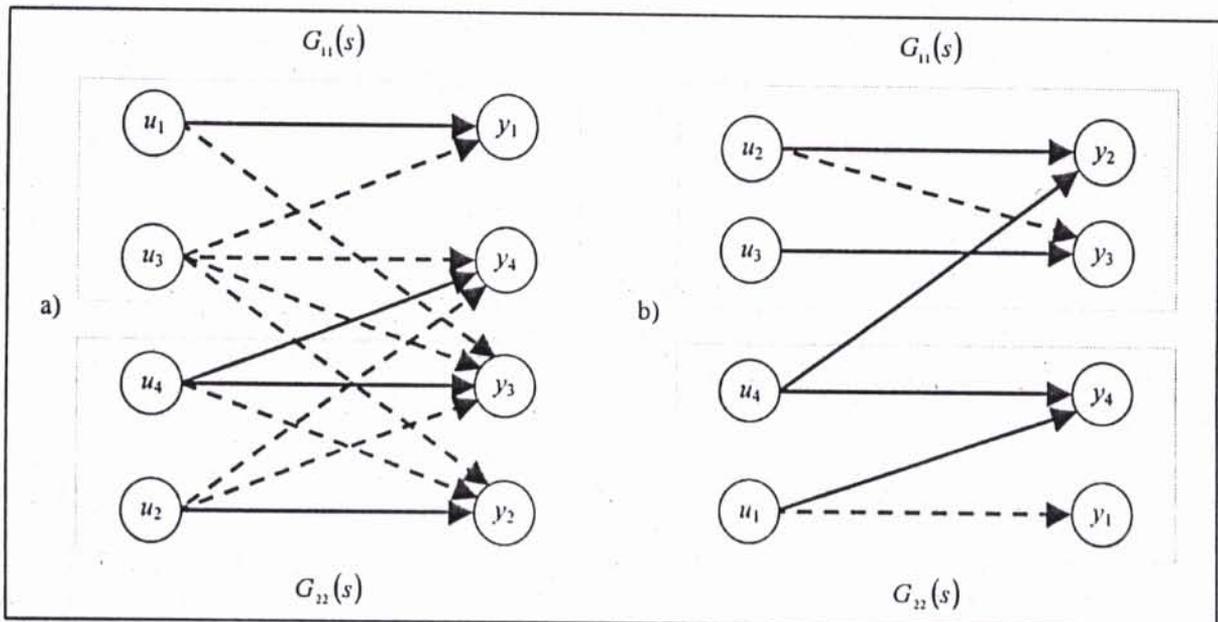


FIG. 3.21 : Graphes de fluence des colonnes distillation (a) Doukas et Luyben (b) Alatiqi.

Le maximum de transmittances fortes pour le premier exemple (fig. 3.21.a) est obtenu en sélectionnant l'une des configurations de commande suivantes :

- $[u_1 - y_1] ; [u_2 - y_2] ; [u_3 - y_4] ; [u_4 - y_3]$
- $[u_1 - y_1] ; [u_2 - y_2] ; [u_3 - y_3] ; [u_4 - y_4]$

Chaque configuration contient trois transmittances fortes. En effet, d'après les résultats d'analyse des interactions, la commande u_4 doit commander de préférence y_4 . Par conséquent la deuxième configuration de commande est la mieux indiquée pour une commande multibouche de la colonne de distillation (modèle de Doukas et Luyben).

Pour le deuxième exemple (fig. 3.21.b), la meilleure configuration de commande est obtenue par le choix de l'ensemble de couples suivants :

- $[u_1 - y_1] ; [u_2 - y_2] ; [u_3 - y_3] ; [u_4 - y_4]$

Cette configuration de commande contenant trois transmittances fortes sur cinq, est la seule possible. Par conséquent, pour la colonne de distillation d'Alatiqi, la meilleure configuration de commande est définie par les couples de sa diagonale.

3.3.2 Méthode de la transmittance forte

3.3.2.1 Caractéristiques d'une transmittance forte

En théorie d'analyse des interactions, la transmittance $g_{ij}(s)$ d'un système multivariable $G(s)$ est forte si l'effet de u_j sur y_i est considérable. L'objectif principal des méthodes d'analyse des interactions est la détermination des transmittances fortes d'un système multivariable et le choix de la meilleure configuration de commande. Cette configuration est définie par un ensemble de m couples correspondants aux transmittances fortes qui assurent la stabilité du système en boucle fermée.

Toutes les méthodes d'analyse développées montrent que la transmittance forte est caractérisée par [22], [41] :

- Un gain statique élevé.
- Des petites constantes du temps.
- Un faible temps de retard.

L'exploitation de ce résultat, permet de développer une méthode de détermination de la configuration de commande adéquate pour une commande multiboucle.

3.3.2.2 Détermination de la configuration de commande

La meilleure configuration de commande est déterminée suivant les étapes ci-après :

Étape 1. Calcul de la Matrice des Gains Relatifs (RGA) et élimination des couples à gain relatif négatif.

Étape 2. Détermination des matrices suivantes :

$$\bullet \quad \tilde{K}_s = \left[\left| K_{s_{ij}} \right| : i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, m \right], \quad (3.41)$$

$$\bullet \quad T = \left[T_{ij} : i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, m \right], \quad (3.42)$$

$$\bullet \quad \tau = \left[\tau_{ij} : i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, m \right]. \quad (3.43)$$

Où :

$K_{s_{ij}}$, T_{ij} , et τ_{ij} : sont respectivement le gain statique, la moyenne des constantes du temps et le temps de retard de l'élément $g_{ij}(s)$ du système $G(s)$ correspondant au couple $[u_j - y_i]$.

Étape 3. Détermination de :

- $\chi_{\tilde{k}_s}$: ensemble de couples $[u_j - y_i]$ dont le gain statique est élevé.
- χ_T : ensemble de couples $[u_j - y_i]$ dont la moyenne des constantes du temps est faible.
- χ_τ : ensemble de couples $[u_j - y_i]$ dont le temps de retard est faible.

Avec :

$$\text{Card}(\chi_{\tilde{k}_s}) = \text{Card}(\chi_T) = \text{Card}(\chi_\tau) = m.$$

Où :

$\text{Card}(\cdot)$: est le cardinal d'un ensemble.

Algorithme de calcul de $\chi_{\tilde{k}_s}$, de χ_T , et de χ_τ

Les m éléments de l'ensemble $\chi_{\tilde{k}_s}$ sont déterminés suivant les étapes ci-après :

Étape 1. $k = 1$, $\tilde{K}_s^1 = \tilde{K}_s$.

Étape 2. Chercher l'élément maximal de la matrice \tilde{K}_s^k . Le k -ième élément de $\chi_{\tilde{K}_s}$ est le couple $[u_j - y_i]$ correspondant dans la matrice \tilde{K}_s à l'élément maximal trouvé.

Étape 3. $k = k + 1$.

Étape 4. Si $k \leq m$

1. Déterminer la matrice \tilde{K}_s^k déduite de la matrice \tilde{K}_s^{k-1} en éliminant la ligne et la colonne contenant l'élément maximal trouvé dans l'étape 2. La matrice \tilde{K}_s^k est de dimensions $(m - k + 1) \times (m - k + 1)$.

2. Aller à l'étape 2.

Sinon Stop.

Les m éléments de l'ensemble χ_T sont déterminés suivant les étapes ci-après :

Étape 1. $k = 1$, $T_s^k = T$.

Étape 2. Chercher l'élément minimal de la matrice T^k . Le k -ième élément de χ_T est le couple $[u_j - y_i]$ correspondant dans la matrice T à l'élément minimal trouvé.

Étape 3. $k = k + 1$.

Étape 4. Si $k \leq m$

1. Déterminer la matrice T^k déduite de la matrice T^{k-1} en éliminant la ligne et la colonne contenant l'élément minimal trouvé dans l'étape 2. La matrice T^k est de dimensions $(m - k + 1) \times (m - k + 1)$.

2. Aller à l'étape 2.

Sinon Stop.

Cet algorithme est utilisé pour déterminer l'ensemble χ_τ en considérant dans la première étape la matrice $\tau^k = \tau$.

Lors de la détermination de ces trois ensembles, l'algorithme peut conduire à la sélection d'un couple ayant un gain relatif négatif. Dans ce cas, il faut reprendre le déroulement de l'algorithme en négligeant dans l'étape 2 l'élément maximal ou minimal (selon le cas) dans l'étape 1 et considère l'élément maximal ou minimal qui vient juste après l'élément négligé.

Une fois les trois ensembles $\chi_{\bar{k}}$, χ_T et χ_τ sont obtenus, il reste à déterminer la meilleure configuration de commande. Pour cela, on définit un autre ensemble $\chi_{\bar{k},T,\tau}$ de couples $[u_j - y_i]$ qui apparaissent le maximum de fois dans les trois ensembles $\chi_{\bar{k}}$, χ_T et χ_τ .

En général, la méthode présentée conduit à un ensemble $\chi_{\bar{k},T,\tau}$ dont le cardinal est inférieur ou égal à m . Lorsqu'il est égal à m , l'ensemble $\chi_{\bar{k},T,\tau}$ définit la meilleure configuration de commande. S'il est inférieur à m , la meilleure configuration de commande est définie par un ensemble parmi $\chi_{\bar{k}}$, χ_T ou χ_τ qui contient le maximum de couples de $\chi_{\bar{k},T,\tau}$.

Trois cas particuliers de systèmes peuvent se présenter lors de l'application de cette méthode :

- 1) Un élément maximal apparaît plusieurs fois dans la matrice \tilde{K}_s , ou lorsque un élément minimal apparaît plusieurs fois dans l'une des matrices T ou τ .
- 2) Le cardinal de $\chi_{\bar{k},T,\tau}$ est nul (chaque couple apparaît une fois dans un seul ensemble) ou les trois ensembles $\chi_{\bar{k}}$, χ_T , et χ_τ se présentent comme la meilleure configuration de commande.
- 3) Deux ensembles parmi les trois se présentent comme la meilleure configuration de commande.

Dans le premier cas, une modification intervient dans la détermination des ensembles $\chi_{\bar{k}}$, χ_T et χ_τ . Pour illustrer la méthode à suivre, on suppose que la matrice \tilde{K}_s possède un élément maximal qui apparaît p fois. Pour déterminer l'ensemble $\chi_{\bar{k}}$, on identifie la ligne L^* ou la colonne C^* contenant l'élément maximal le minimum de fois, soit p^* fois ($p^* \leq p$). Les ensembles $\chi_{\bar{k}}^k$ ($k = 1, \dots, p^*$) sont déterminés par l'application de l'algorithme précédent en éliminant la ligne et la colonne contenant le k -ième élément maximal de la ligne L^* ou de la colonne C^* considérée. Le cardinal de chaque ensemble $\chi_{\bar{k}}^k$ est égal à m .

Par conséquent, l'ensemble $\chi_{\bar{k}}$ est donné par :

$$\chi_{\bar{k}} = \bigcup_{k=1}^{p^*} \chi_{\bar{k}}^k, \quad (3.44)$$

avec :

$$\text{card}(\chi_{\bar{k}_i}) \geq m.$$

La même démarche est applicable pour déterminer les ensembles χ_T et χ_τ si les matrices T ou τ possèdent un élément minimal qui apparaît plusieurs fois.

Dans le deuxième cas, la meilleure configuration de commande à choisir est celle définie par l'ensemble $\chi_{\bar{k}_i}$.

Dans le dernier cas, la meilleure configuration de commande est déterminée suivant l'ordre : $\chi_{\bar{k}_i}$, χ_T , χ_τ .

Les étapes de la méthode proposée sont résumées dans l'organigramme de la figure 3.22.

Remarques 3.5

- Si la matrice \tilde{K}_s contient q fois la ligne L^* ou la colonne C^* , l'algorithme modifié est déroulé pour déterminer les qp^* ensembles $\chi_{\bar{k}_i}^k$ ($k = 1, \dots, qp^*$) avec $\chi_{\bar{k}_i}$ est évalué par la relation (4.44). Il est de même pour les matrices T et τ .
- La configuration de commande doit être pratiquement réalisable. Cette condition est intégrée comme contrainte lors de la détermination de la configuration de commande ou on procède, dès le départ, à éliminer les couples dont la réalisation pratique est impossible.
- Lorsque les éléments $g_y(s)$ du système $G(s)$ sont tous des éléments de premier ordre sans retard, la méthode est applicable et la configuration de commande est déterminée en considérant les ensembles $\chi_{\bar{k}_i}$, χ_T .
- Généralement, le comportement dynamique d'un système peut être décrit par une fonction de transfert de premier ordre avec retard. Il est possible de trouver une représentation par matrice de transfert d'un système à grande échelle dont tous les éléments sont des fonctions de transfert de premier ordre avec retard. Dans ce cas, chaque élément de $G(s)$ est sous forme :

$$g_y(s) = \frac{K_{s_y} e^{-\tau_y s}}{T_y s + 1}, \quad (3.45)$$

ce qui simplifie la détermination de la matrice T .

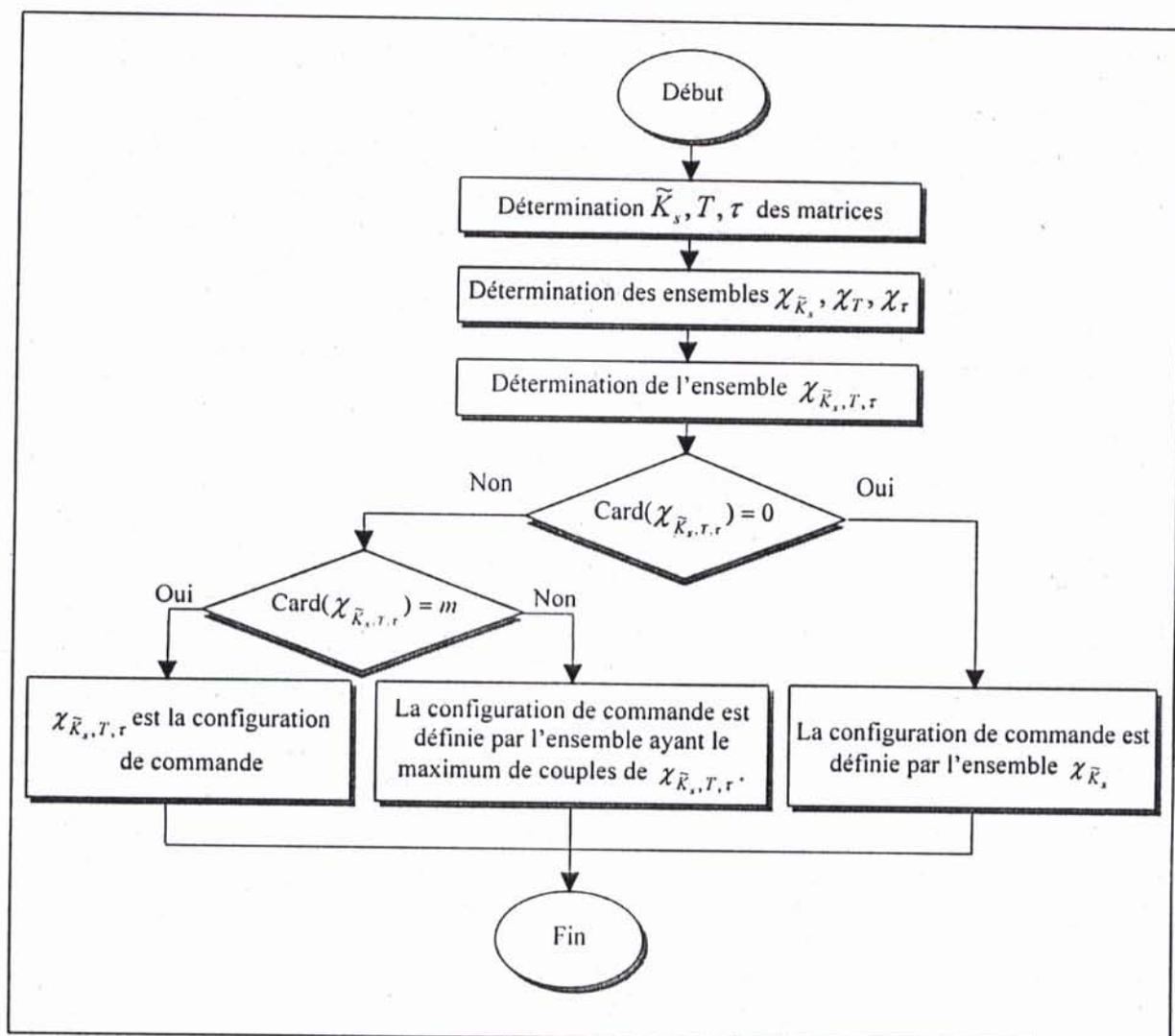


FIG. 3.22 : Algorithme de la méthode de la transmittance forte.

3.3.2.3 Exemples d'application

Dans cette section, nous présentons l'application de la méthode de la transmittance forte pour le choix de la meilleure configuration de commande pour les deux colonnes de distillation étudiées dans le paragraphe 3.2.2.5.

Le tableau 3.9 résume les résultats obtenus en appliquant la méthodologie proposée.

| EXEMPLE | DOUKAS ET LUYBEN | ALATIQUI |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| La matrice \tilde{K}_s | $\begin{bmatrix} 11.3 & N & 9.811 & N \\ N & 1.986 & 5.984 & 0.422 \\ 0.33 & 0.0204 & 2.38 & 0.513 \\ N & 0.176 & 11.67 & 15.54 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 4.09 & N & N & N \\ N & 6.93 & N & 1.53 \\ N & 5.11 & 4.61 & N \\ 11.18 & N & N & 4.49 \end{bmatrix}$ |
| L'ensemble $\chi_{\tilde{K}_s}$ | $[u_1 - y_1]; [u_2 - y_3]; [u_3 - y_2]; [u_4 - y_4]$ | $[u_1 - y_1]; [u_2 - y_2]; [u_3 - y_3]; [u_4 - y_4]$ |
| La matrice T | $\begin{bmatrix} 21.74 & N & 11.36 & N \\ N & 66.67 & 14.29 & 250 \\ 2.38 & 7.14 & 1.43 & 1 \\ N & 6.90 & 12.19 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 20.75 & N & N & N \\ N & 44.6 & N & 48 \\ N & 13.3 & 18.5 & N \\ 24.75 & N & N & 27.15 \end{bmatrix}$ |
| L'ensemble χ_T | $[u_1 - y_1]; [u_2 - y_2]; [u_3 - y_3]; [u_4 - y_4]$ | $[u_1 - y_1]; [u_2 - y_2]; [u_3 - y_3]; [u_4 - y_4]$ |
| La matrice τ | $\begin{bmatrix} 3.79 & N & 1.59 & N \\ N & 0.71 & 2.24 & 8.72 \\ 0.68 & 0.59 & 0.42 & 1 \\ N & 0.48 & 1.91 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.3 & N & N & N \\ N & 1.01 & N & 2.8 \\ N & 11 & 1.02 & N \\ 2.6 & N & N & 0.6 \end{bmatrix}$ |
| L'ensemble χ_τ | $[u_1 - y_1]; [u_2 - y_4]; [u_3 - y_3]; [u_4 - y_2]$ | $[u_1 - y_1]; [u_2 - y_2]; [u_3 - y_3]; [u_4 - y_4]$ |
| L'ensemble $\chi_{\tilde{K}_s, T, \tau}$ | $[u_1 - y_1]; [u_3 - y_3]; [u_4 - y_4]$ | $[u_1 - y_1]; [u_2 - y_2]; [u_3 - y_3]; [u_4 - y_4]$ |

TAB. 3.9 : Applications de la méthode de la transmittance forte.

Dans ce tableau 3.9, la lettre « N » indique que le gain relatif du couple correspondant est négatif. Les éléments soulignés correspondent aux couples sélectionnés lors du premier déroulement de l'algorithme. Les éléments en gras signifient que les couples correspondants définissent l'ensemble recherché.

La matrice T de l'exemple 1, contient deux fois l'élément minimal 1 ($p = 2$). Dans ce cas pour déterminer l'ensemble χ_T , on cherche la ligne ou la colonne contenant l'élément 1 le minimum de fois. On constate que T contient deux lignes $q = 2$ (3^{ème} et 4^{ème} ligne) avec $p^* = 1$. En commençant par l'élément de la troisième ligne, l'algorithme conduit à sélectionner un couple à gain relatif négatif (les éléments de T soulignés), ce qui signifie que l'ensemble obtenu soit χ_T^1 est refusé. Le déroulement de l'algorithme pour l'élément de la

quatrième ligne donne un ensemble χ_T^2 défini par les couples dont les éléments correspondant sont en gras. En examinant les trois ensembles $\chi_{\tilde{K}_s}$, χ_T et χ_τ , on remarque que les couples $[u_1 - y_1]$, $[u_3 - y_3]$ et $[u_4 - y_4]$ apparaissent le maximum de fois dans les trois ensembles (trois fois pour le couple $[u_1 - y_1]$ et deux pour $[u_4 - y_4]$ et $[u_3 - y_3]$). Ces couples définissent l'ensemble $\chi_{\tilde{K}_s, T, \tau}$. La meilleure configuration de commande pour la première colonne de distillation est celle définie par l'ensemble χ_T car il contient le maximum d'éléments de $\chi_{\tilde{K}_s, T, \tau}$ (tous les éléments).

Pour l'exemple 2, le déroulement de l'algorithme en choisissant l'élément maximal 11.18 de la matrice \tilde{K}_s conduit à un ensemble $\chi_{\tilde{K}_s}^1$ refusé, défini par les couples soulignés dans la matrice \tilde{K}_s , car il contient un couple à gain relatif négatif. Il faut alors reprendre l'algorithme en choisissant comme élément maximal l'élément 6.93 qui est juste inférieur à 11.18 et les éléments en gras forment l'ensemble \tilde{K}_s .

La même remarque s'applique à l'ensemble χ_T car le choix de l'élément 13.3 conduit à un ensemble refusé (ensemble défini par les couples correspondants aux éléments de la matrice T soulignés). L'algorithme doit être déroulé avec l'élément 18.5 juste supérieur à 13.3. Dans ce cas, l'algorithme converge vers l'ensemble χ_T défini par les couples correspondants aux éléments gras de la matrice T .

Pour l'exemple 2, les ensembles $\chi_{\tilde{K}_s}$, χ_T et χ_τ trouvés représentent le même ensemble, d'où la configuration de commande est :

- $[u_1 - y_1]$; $[u_2 - y_2]$; $[u_3 - y_3]$; $[u_4 - y_4]$.

Ces résultats sont identiques à ceux obtenus par l'application de la méthode du graphe de fluence pour les deux colonnes de distillation.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, deux méthodologies ont été proposées pour simplifier l'analyse des interactions dans un système de grande dimension. Notre apport, réside dans la démarche intéressante proposée qui consiste à analyser les interactions présentes dans le système en le décomposant en un ensemble de sous-systèmes.

CHAPITRE

4

COMMANDE
MULTIVARIABLE BASÉE
SUR UNE MÉTHODE
D'ANALYSE DES
INTERACTIONS

*“Il ne suffit pas d'avoir de belles-lettres
pour écrire un vrai alphabet.”*

JACQUES PRÉVERT

4.1 Introduction

En général, les méthodes d'analyse des interactions exposées et celles proposées permettent le choix d'une configuration de commande avec des interactions faibles et d'évaluer l'effet de chaque entrée sur toutes les sorties. Néanmoins, lors de la synthèse d'un système de commande multiboucle on peut rencontrer :

- Un système multivariable fortement interactif (fortement couplé) dans la mesure où l'application de toute méthode d'analyse indique l'absence d'une configuration de commande adéquate pour une commande multiboucle. Ce-ci implique l'existence de fortes interactions entre les variables du système.
- Un système multivariable non carré (le nombre d'entrées différent de celui de sorties) qui représente une contrainte pour la synthèse d'un système de commande multiboucle.

Dans ces deux cas,

Peut-on appliquer la commande multiboucle ?

Vu les avantages pratiques de la commande multiboucle et dans le but d'élargir son champ d'application, nous proposons dans ce chapitre une méthodologie de synthèse d'un système de commande multiboucle pour les deux cas de systèmes multivariables sus-cités.

La méthodologie proposée repose sur l'utilisation du principe d'une méthode d'analyse des interactions pour la synthèse d'un correcteur dit de faibles interactions, qu'on introduit en cascade sur le système à commander et dont l'objectif est de porter au minimum les effets d'interactions existants entre les boucles d'une configuration de commande choisie. Cette méthodologie permet aussi de généraliser la commande multiboucle pour un système non carré tout en assurant un faible niveau d'interactions entre les boucles de commande.

4.2 Description de la stratégie de commande proposée

L'existence de fortes interactions entre les variables d'un système multivariable rend la commande plus difficile. Dans ces conditions, peut-on concevoir un système de commande pour surpasser ce problème et commander correctement ce système ? . L'une des solutions généralement retenue pour la commande de systèmes multivariables est : la commande non interactive [18] caractérisée par deux techniques de synthèse d'un système de commande multivariable.

La première utilise les méthodes opérationnelles, c'est-à-dire la notion de matrice de transfert. Dans cette catégorie, on peut citer la technique de découplage implicite, de

découplage total ou partiel pour lesquelles différentes stratégies ont été proposées par Rosenbrock et Davison cité dans [16],[41–42], [49], [51]. On retrouve aussi la technique de la dominance diagonale (**DD**) [18–19] et de la pseudo-diagonalisation (**PDM**), [42]. Une nouvelle approche de découplage, de la **DD** et de la **PDM** basée sur l'interpolation matricielle a été introduite récemment [31].

La seconde technique de synthèse, utilise les techniques d'état, dans laquelle on retrouve la méthode de découplage par retour d'état et la commande découplante [18–19]. Une revue détaillée de certaines de ces méthodes est présentée dans [16], [18–19], [41] [49].

L'objectif de ce chapitre, s'inscrit dans la commande non interactive dans lequel nous proposerons une méthodologie pour la synthèse d'un système de commande multiboucle robuste, lorsque toutes les configurations de commande possibles d'un système présentent un niveau d'interactions fort (absence d'une configuration de commande adéquate) ou dans le cas d'un système multivariable non carré.

Pour ces types de systèmes multivariables, on se propose d'adopter la stratégie de commande présentée par la figure 4.1 [34], [36], [38].

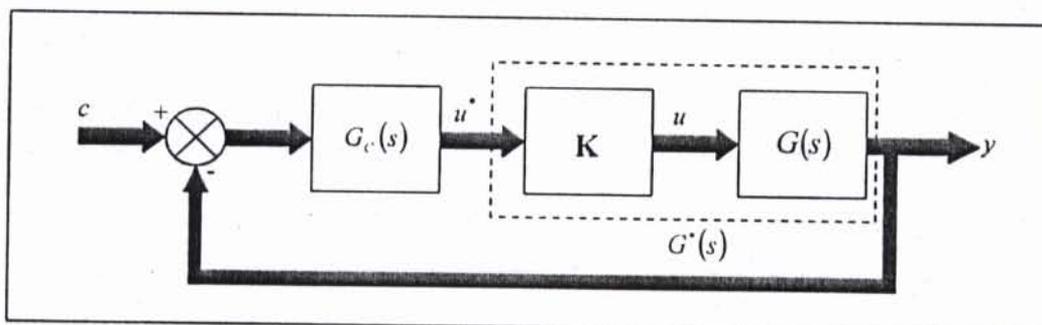


FIG. 4.1 : Stratégie de commande proposée.

Où :

$G_c(s)$: est le régulateur multiboucle.

K : est le correcteur de faibles interactions de dimensions $m \times r$.

$G(s)$: est le système multivariable à commander de dimensions $r \times m$.

$G^*(s)$: est la cascade constituée du système $G(s)$ et le correcteur K de dimensions $r \times r$.

L'idée générale de la stratégie de commande proposée consiste à introduire un correcteur K en cascade sur le système à commander $G(s)$. Le but de ce dernier est de réduire les

interactions existantes entre les boucles d'une configuration de commande choisie dans le cas d'un système carré. Pour un système multivariable non carré, l'introduction du correcteur K permet d'appliquer la commande multiboucle tout en assurant de faibles interactions entre les boucles de la configuration de commande considérée.

L'étape principale dans la méthodologie de synthèse d'un système de commande multiboucle proposée est la détermination du correcteur K appelé «correcteur de faibles interactions». La synthèse de ce dernier est basée sur l'application du principe d'une méthode d'analyse des interactions. Après conception du correcteur K , mis en cascade sur le système $G(s)$ à commander, conduisait à un nouveau système $G^*(s)$ pour lequel la commande multiboucle est envisageable.

4.3 Synthèse du correcteur de faibles interactions K

Dans un processus à grande échelle, l'ensemble des entrées est en général susceptible d'influer sur l'évolution de l'ensemble des sorties. Les méthodes d'analyse des interactions permettent de quantifier l'effet de chaque entrée sur l'ensemble des sorties et de localiser les transmittances fortes. Lors du choix de la configuration de commande, l'existence d'une seule transmittance forte entre les boucles de commande conduit à des performances médiocres.

Dans la stratégie de commande présentée en figure 4.1, le correcteur de faibles interactions K limite l'effet d'une entrée u_j^* à une seule sortie (la sortie assignée après le choix d'une configuration de commande) et réduit son effet sur les autres sorties, permettant ainsi d'avoir un système $G^*(s)$ présentant une configuration de commande dont les interactions entre boucles sont faibles.

La synthèse du correcteur K passe par les étapes suivantes [34], [36], [38] :

Étape 1. Déterminer le nouveau système $G^*(s)$.

Étape 2. Appliquer une méthode d'analyse pour le nouveau système $G^*(s)$.

Étape 3. Choisir une configuration de commande pour $G^*(s)$.

Étape 4. Dédire les contraintes à imposer pour avoir de faibles interactions entre les boucles de commande de la configuration de commande choisie dans l'étape précédente en se basant sur les interprétations de la méthode d'analyse utilisée, ce-ci génère un système d'équations permettant de déterminer le correcteur K .

Étape 5. Déterminer le correcteur K par la résolution du système d'équations résultant.

Étape 6. Vérifier la commodité du correcteur K obtenu.

Une telle approche implique divers commentaires :

- Le point important dans cette approche est le choix de la méthode d'analyse des interactions à utiliser pour la synthèse du correcteur K . A cet effet, avant d'envisager la synthèse du correcteur K , il est préférable d'effectuer une analyse sur la dynamique du système $G(s)$ dans le but de choisir entre les méthodes d'analyse utilisant le modèle statique du système et celles utilisant le modèle dynamique. Le choix de la méthode d'analyse à utiliser repose sur l'étude du comportement dynamique du système à commander. Les méthodes d'analyse utilisant le modèle statique du système sont recommandées pour concevoir un correcteur de faibles interactions K pour des systèmes travaillant autour de la fréquence nulle. Par contre les méthodes d'analyse utilisant le modèle dynamique permettent la synthèse d'un correcteur assurant une cascade $G^*(s)$ à dominance diagonale sur une bande de fréquences ou à la fréquence ω_0 autour de laquelle le système travaille.
- En général, la méthode de synthèse du correcteur K proposée conduit à un correcteur sous forme d'une matrice de gains purs, une forme simple à implémenter, et la mise en cascade sur le système de ce correcteur (fig. 4.1) donne un nouveau système $G^*(s)$ à dominance diagonale. Néanmoins, la méthode est susceptible de faire apparaître des modes non observables ou non commandables, ce qui est particulièrement dangereux, en particulier s'ils sont instables.
- En règle générale, une fois le correcteur K est déterminé, il est impératif de vérifier la stabilité des boucles de la configuration de commande considérée et de tester la stabilité du nouveau système $G^*(s)$.

Ces remarques montrent l'importance de la vérification de la commodité du correcteur K obtenu. A cet effet, après la synthèse du correcteur K , il est indispensable d'examiner :

- La commandabilité des sorties du nouveau système $G^*(s)$.
- La stabilité des boucles de la configuration de commande choisie dans l'étape 3.

La stabilité des boucles de commande du système $G^*(s)$ peut être garantie en ajoutant au système d'équations obtenu en étape 4 des inéquations déduites de la condition de stabilité des boucles imposée par la Matrice des Gains Relatifs (RGA) du système $G^*(s)$. On pose alors les gains relatifs correspondants aux couples choisis supérieurs à zéro, ce qui donne après résolution du système hybride (équations et inéquations) un correcteur K assurant la stabilité du système de la figure 4.1.

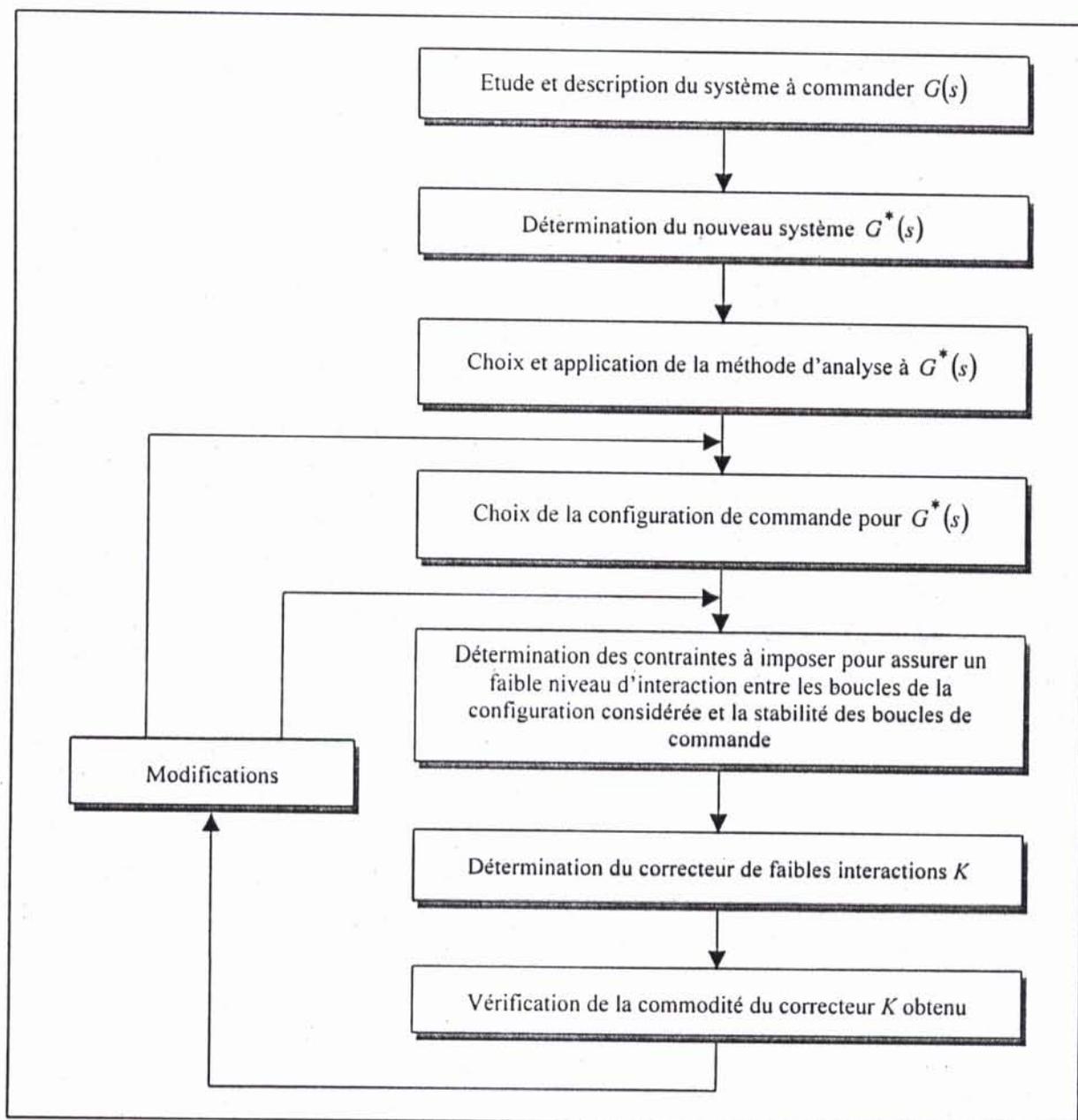


FIG. 4.2 : Etapes principales lors de la synthèse du correcteur de faibles interactions K .

Comme montré par l'organigramme de la figure 4.2 qui résume les étapes de la méthode de synthèse proposée, deux retours sont possibles. Ils permettent d'améliorer les résultats lorsque le correcteur K obtenu ne satisfait pas les deux conditions importantes susmentionnées (commandabilité et stabilité). Dans ce cas, deux démarches sont possibles pour obtenir un correcteur de faible interaction adéquat. La première consiste à faire un autre choix d'une configuration de commande au niveau de l'étape 3, la seconde consiste à modifier les contraintes à imposer pour assurer un faible niveau d'interactions entre les boucles de la configuration choisie dans l'étape 4 en se basant sur les interprétations de la méthode d'analyse des interactions utilisée.

Remarques 4.1

- Les contraintes imposées offrent un domaine (une plage) pour le choix des éléments k_{ij} de K ce qui augmente la chance de trouver un correcteur K commode.
- Lors du choix de la méthode d'analyse des interactions, il est préférable d'opter pour les méthodes utilisant le modèle d'états du système car ce type de représentation tient compte de la structure interne du système.
- La synthèse du correcteur K pour un système travaillant dans une bande de fréquences peut être simplifiée par application de la méthode d'analyse utilisant le modèle dynamique en considérant seulement la fréquence de coupure ω_c du système.

4.4 Exemples d'application

La méthode de synthèse d'un système de commande multiboucle proposée a été appliquée pour la commande de trois systèmes tirés de la littérature [30], [18], [41]. Dans cette section, nous montrerons comment déterminer analytiquement et graphiquement le correcteur de faibles interactions K . Ceci dépend de la méthode d'analyse des interactions utilisée pour la synthèse du correcteur de faibles interactions K .

La détermination des paramètres du correcteur pour chaque boucle se fait par la méthode de synthèse des régulateurs PID classiques développée par A.J. Isaksson et S.F. Graebe [26]. Le principe de cette méthode est présenté en annexe D. Pour mesurer la qualité du réglage, le critère IAE (*Integral of the absolute error*) est utilisé [17], [41].

4.4.1 Exemple 1 : Détermination analytique du correcteur K

Considérons le système multivariable étudié dans [30], [34], [38] dont le modèle est donné par la représentation d'état $S(A, B, C, D)$ suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 20 & 4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} z, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Où:

z : est grandeur perturbatrice.

1. Analyse des interactions

Pour analyser les interactions présentes dans le système (4.1) nous utilisons la Matrice Directe de Nyquist (DNA) décrite au paragraphe 2.4.1.1.6. Les figures 4.3 et 4.4 donnent respectivement la DNA complète (plus les éléments $g_{12}(s)$, $g_{21}(s)$) correspondante au système (4.1) et les éléments de la diagonale superposés par les cercles de Gershgorin.

L'examen de la figure 4.4 montre que la commande u_1 affecte fortement les deux sorties du système y_1 et y_2 . La commande u_1 présente un effet fort sur la sortie y_2 car les cercles de Gershgorin correspondants à $g_{22}(s)$ encerclent l'origine du plan complexe. Cependant, les cercles correspondants à $g_{11}(s)$ ne l'encerclent pas signifiant que la commande u_2 affecte faiblement la sortie y_1 comme l'atteste le lieu de Nyquist de $g_{12}(s)$ de la DNA (fig. 4.3).

En conclusion, les deux configurations de commande possibles sont interactives. Par conséquent, la stratégie de commande proposée en figure 4.1 est indiquée pour pouvoir appliquer la commande multiboucle.

2. Détermination du correcteur de faibles interactions K

Le correcteur de faibles interactions K est déterminé analytiquement en utilisant la Matrice d'Effets Directs (SIA) présentée dans le paragraphe 2.4.1.2.4. Comme la dimension de la cascade constituée du correcteur K et du système (4.1) à commander, celle du correcteur K doit être aussi dans ce cas de 2×2 . Le correcteur de faibles interactions prend la forme :

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

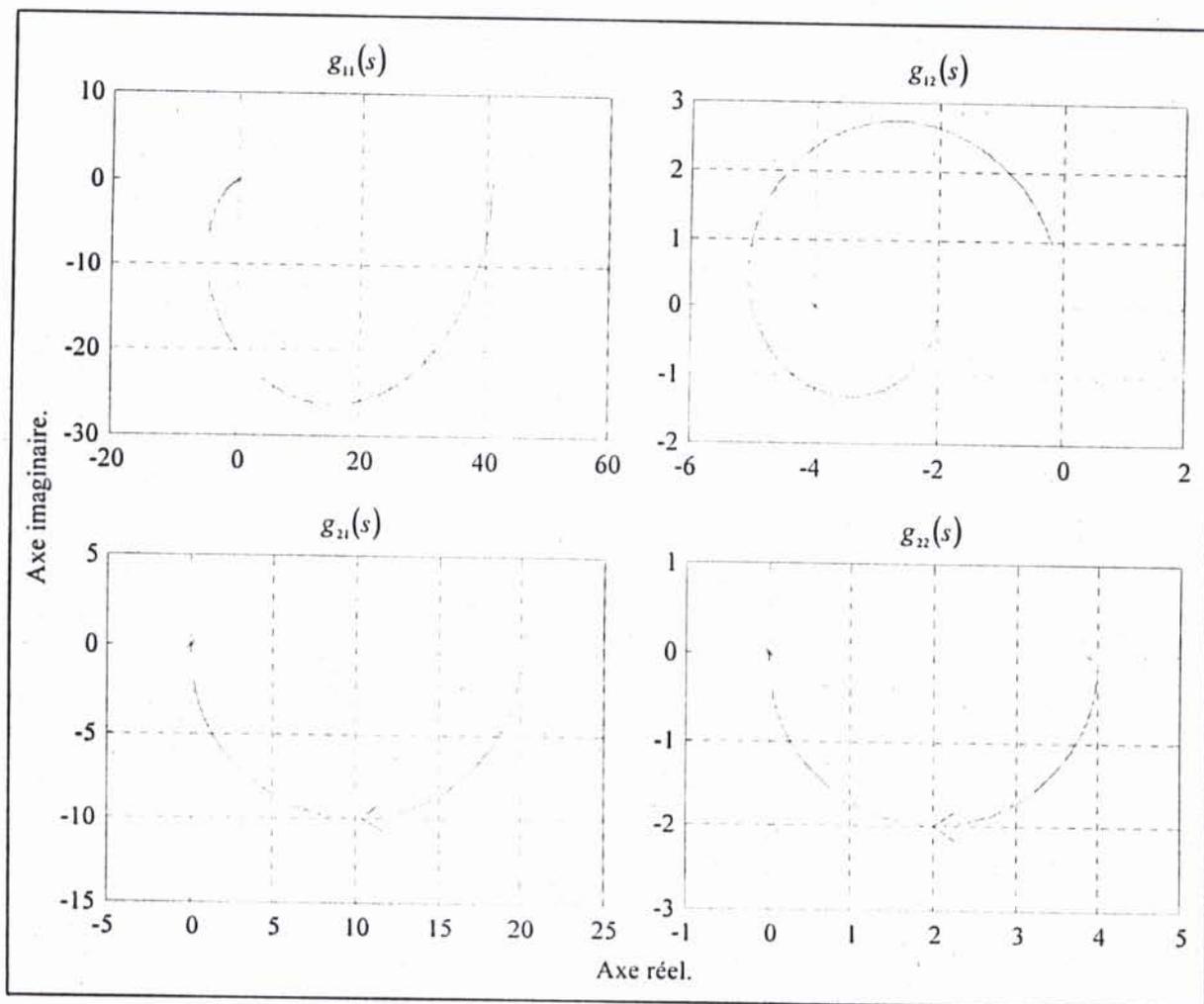


FIG. 4.3 : Matrice Directe de Nyquist de l'exemple 1.

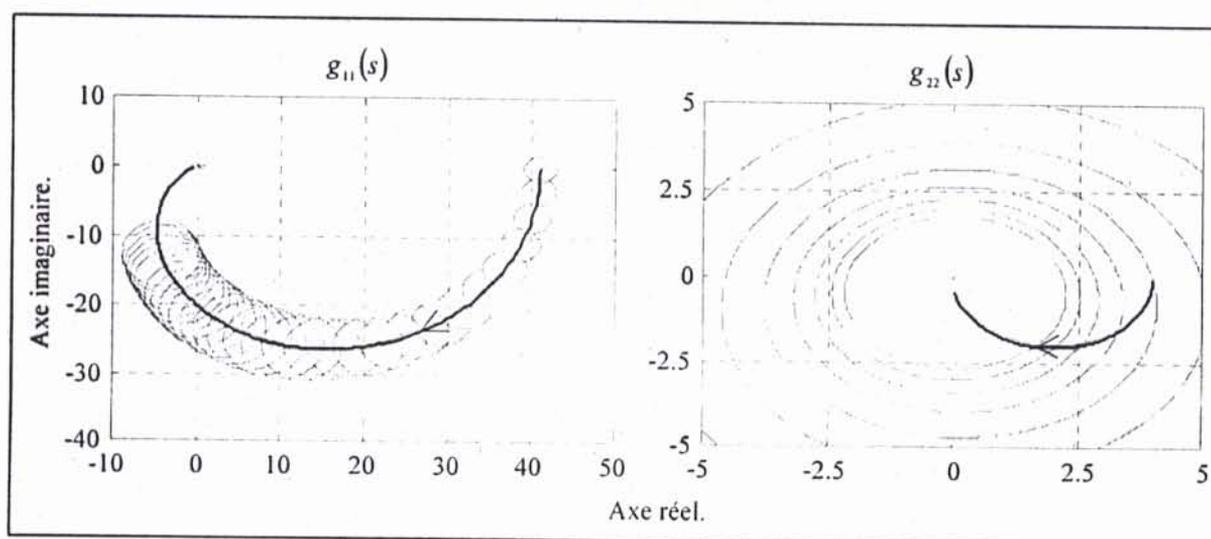


FIG. 4.4 : Les éléments de la diagonale de l'exemple 1 superposés de cercles de Gershgorin.

L'introduction du correcteur en cascade sur le système à commander (4.1) donne le nouveau système $S^*(A, B, C, D)$ suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} u^* + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} z, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} u &= K u^*, \\ a_{11} &= k_{11} - 10 k_{21} \quad ; \quad a_{12} = k_{12} - 10 k_{22}, \\ a_{21} &= 20 k_{11} + 4 k_{21} \quad ; \quad a_{22} = 20 k_{12} + 4 k_{22}. \end{aligned}$$

Le équations statiques du nouveau système (4.3) est :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 x_2 + a_{11} u_1^* + a_{12} u_2^*, \\ x_2 &= a_{21} u_1^* + a_{22} u_2^*, \\ y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Son graphe de fluence est donné par la figure 4.5.

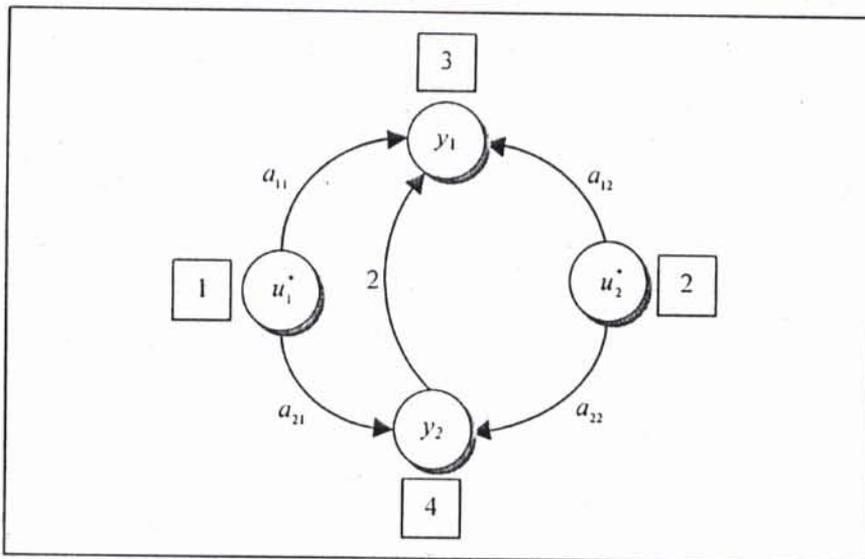


FIG. 4.5 : Graphe de fluence du modèle statique du nouveau système $S^*(A, B, C, D)$

2.1 Calcul de la matrice d'effets directs (SIA)

Le déterminant du graphe de fluence du nouveau système (fig. 4.5) déterminé par la relation (1.39) est égal à 1 ($\Delta = 1$).

2.1.1 Détermination de $DE_{u_1 \rightarrow y_1}$ et $DE_{u_2 \rightarrow y_1}$

En considérant une variation de $\delta y_1 = 1$ et $\delta y_2 = 0$ dans le modèle statique (4.4), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_{11} \delta u_1^* + a_{12} \delta u_2^* = 1, \\ a_{21} \delta u_1^* + a_{22} \delta u_2^* = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

La solution de ce système donne les deux variations de commandes suivantes :

$$\delta u_1^* = \frac{a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad (4.6)$$

$$\delta u_2^* = \frac{a_{21}}{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}}. \quad (4.7)$$

Du graphe de fluence de la figure 4.5, on retrouve les chaînes directes entre les deux commandes u_1^* , u_2^* et la sortie y_1 suivantes :

- $u_1^* \rightarrow y_1$: chaîne directe 1 \rightarrow 3 avec $T_1 = a_{11}$ et $\Delta_1 = 1$ alors $T_{u_1^* \rightarrow y_1} = a_{11}$,
- $u_2^* \rightarrow y_1$: chaîne directe 2 \rightarrow 3 avec $T_1 = a_{12}$ et $\Delta_1 = 1$ alors $T_{u_2^* \rightarrow y_1} = a_{12}$.

La relation (2.69) donne les effets directs suivants :

$$DE_{u_1 \rightarrow y_1} = T_{u_1^* \rightarrow y_1} \delta u_1^* = \frac{a_{11} a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad (4.8)$$

$$DE_{u_2 \rightarrow y_1} = T_{u_2^* \rightarrow y_1} \delta u_2^* = \frac{a_{12} a_{21}}{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}}. \quad (4.9)$$

2.1.2 Détermination de $DE_{u_1 \rightarrow y_2}$ et $DE_{u_2 \rightarrow y_2}$

La substitution de δy_1 par 0 et δy_2 par 1 dans le modèle statique (4.4) conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_{11} \delta u_1^* + a_{12} \delta u_2^* = -2, \\ a_{21} \delta u_1^* + a_{22} \delta u_2^* = 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

La solution de ce dernier est :

$$\delta u_1^* = \frac{a_{12} + 2 a_{22}}{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}}, \quad (4.11)$$

$$\delta u_2^* = \frac{a_{11} + 2 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}. \quad (4.12)$$

Les chaînes directes entre les deux commandes u_1^* , u_2^* et la sortie y_2 sont :

- $u_1^* \rightarrow y_2$: chaîne directe 1 \rightarrow 4 avec $T_1 = a_{21}$ et $\Delta_1 = 1$ alors $T_{u_1^* \rightarrow y_2} = a_{21}$,
- $u_2^* \rightarrow y_2$: chaîne directe 2 \rightarrow 4 avec $T_1 = a_{22}$ et $\Delta_1 = 1$ alors $T_{u_2^* \rightarrow y_2} = a_{22}$.

Les effets directs correspondants sont :

$$DE_{u_1^* \rightarrow y_2} = T_{u_1^* \rightarrow y_2} \delta u_1^* = \frac{a_{21} a_{12} + 2 a_{21} a_{22}}{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}}, \quad (4.13)$$

$$DE_{u_2^* \rightarrow y_2} = T_{u_2^* \rightarrow y_2} \delta u_2^* = \frac{a_{11} a_{22} + 2 a_{21} a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}. \quad (4.14)$$

La Matrice d'Effets Directs (SIA) correspondante au nouveau système (4.3) est :

$$SIA = \begin{bmatrix} \frac{a_{11} a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} & \frac{a_{12} a_{21}}{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}} \\ \frac{a_{21} a_{12} + 2 a_{21} a_{22}}{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}} & \frac{a_{11} a_{22} + 2 a_{21} a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

En utilisant la Matrice d'Effets Directs (4.15), on détermine le correcteur K assurant de faibles interactions entre les boucles d'une configuration de commande parmi les deux configurations possibles.

Quand la matrice **SIA** correspondante à la cascade est générée, le choix de la configuration de commande est effectué. Dans ce cas, on considère la configuration de commande suivante :

$$[u_1^* - y_1] ; [u_2^* - y_2].$$

D'après les interprétations de la Matrice d'Effets Directs, pour que les interactions entre les deux boucles de la configuration de commande choisie soient faibles, l'effet direct correspondant à chaque couple de la configuration considérée doit être proche ou égale à 1, et les effets correspondants aux autres couples doivent être nuls. Ces conditions conduisent au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} DE_{u_1 \rightarrow y_1} = DE_{u_2 \rightarrow y_2} = 1, \\ DE_{u_2 \rightarrow y_1} = DE_{u_1 \rightarrow y_2} = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Pour garantir la stabilité des couples de la configuration considérée et celle du système en boucle fermée, les gains relatifs correspondants aux couples de la configuration de commande choisie doivent être positifs. La Matrice des Gains Relatifs (RGA) correspondante au nouveau système (4.3) donnée par la relation (2.8) est :

$$RGA = K_s \cdot * [K_s^{-1}]^T = \begin{bmatrix} \frac{a_{11} a_{22} + 2 a_{21} a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} & \frac{a_{21} a_{12} + 2 a_{21} a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \\ \frac{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}{a_{11} a_{22} + 2 a_{21} a_{22}} & \frac{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}}{a_{11} a_{22} + 2 a_{21} a_{22}} \\ \frac{a_{11} a_{22} + 2 a_{21} a_{22}}{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}} & \frac{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}}{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

la matrice K_s est déterminée par la relation (2.12).

Afin d'assurer la stabilité du système en boucle fermée, les éléments λ_{11} et λ_{22} correspondants aux couples de la configuration considérée doivent être positifs. Le système étant de dimensions 2×2 , il suffit donc de poser uniquement $\lambda_{11} > 0$ car $\lambda_{11} = \lambda_{22}$ (remarques 2.3).

Ainsi le correcteur K assurant de faibles interactions et la stabilité du système en boucle fermée est déterminé en résolvant le système hybride suivant :

$$\begin{cases} Ed_{u_1 \rightarrow y_1} = \frac{a_{11} a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} = 1, \\ Ed_{u_2 \rightarrow y_1} = \frac{a_{12} a_{21}}{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}} = 0, \\ Ed_{u_1 \rightarrow y_2} = \frac{a_{21} a_{12} + 2 a_{21} a_{22}}{a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}} = 0, \\ Ed_{u_2 \rightarrow y_2} = \frac{a_{11} a_{22} + 2 a_{21} a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} = 1, \\ \lambda_{11} = \frac{a_{11} a_{22} + 2 a_{21} a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} > 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

la résolution de ce dernier donne :

$$a_{21} = 0 \Rightarrow 20 k_{11} + 4 k_{21} = 0 \text{ avec } a_{11} \neq 0 \text{ et } a_{22} \neq 0, \quad (4.19)$$

une solution de (4.18), obtenue en utilisant une méthode d'analyse des interactions pour le choix optimal des éléments du compensateur, donne:

$$k_{11} = 0.0196 \text{ et } k_{21} = -0.0980 \quad (4.20)$$

Pour le correcteur de faibles interactions K on prend :

$$K = \begin{bmatrix} 0.0196 & 0.0490 \\ -0.0980 & 0.0049 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

3 Résultats de la simulation

Afin de montrer l'apport du correcteur de faibles interactions K , une simulation des performances du système sans et avec le correcteur K a été effectuée et les résultats comparés.

Le tableau 4.1 donne les paramètres du régulateur de chaque boucle pour les deux cas étudiés ainsi que les valeurs de IAE obtenues pour les tests examinés.

| STRATEGIE DE COMMANDE | BOUCLE | PARAMETRES DU REGULATEUR PI | | IAE | | | | |
|-----------------------|-----------------|-------------------------------------------------------|--------------|-----------------------|----------------|----------------|-------------------------|---------------------|
| | | $G_{c_m}(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$ | | Rejet de perturbation | | Asservissement | Changement de consignes | |
| | | K_c | T_i (min.) | Régulation | Asservissement | | Changement de c_1 | Changement de c_2 |
| Sans correcteur K | $[u_1 - y_1]$ | 0.067 | 2 | 1.0363 | 2.0412 | 1.0056 | 1.4817 | 1.0944 |
| | $[u_2 - y_2]$ | 0.033 | 1 | 1.5431 | 2.1071 | 0.5562 | 2.0380 | 2.3742 |
| Avec correcteur K | $[u_1^* - y_1]$ | 10 | 1 | 0.0520 | 0.2267 | 0.1747 | 0.2255 | 0.2347 |
| | $[u_2^* - y_2]$ | 5 | 1 | 0.1000 | 0.2001 | 0.1000 | 0.1000 | 0.1606 |

TAB. 4.1 : Paramètres des régulateurs et les valeurs de l'IAE.

3.1 Rejet de la perturbation

Les figures 4.6 et 4.7 montrent l'évolution des sorties du système et les commandes en réponses à une perturbation de 0.1 en régulation et en asservissement respectivement. Les valeurs de consignes pour les sorties y_1 et y_2 dans le cas d'asservissement sont 1 et 0.5 respectivement, la perturbation sur les deux sorties est appliquée à l'instant $t = 15$ min. Avec le correcteur K , on note un faible dépassement pour les deux sorties avec un rejet rapide de la perturbation en régulation et en asservissement. Sans le correcteur K , on observe un dépassement considérable pour y_1 et une chute très importante au niveau de la réponse de y_2 . Le rejet de la perturbation est lent en régulation et en asservissement pour les deux sorties y_1 et y_2 .

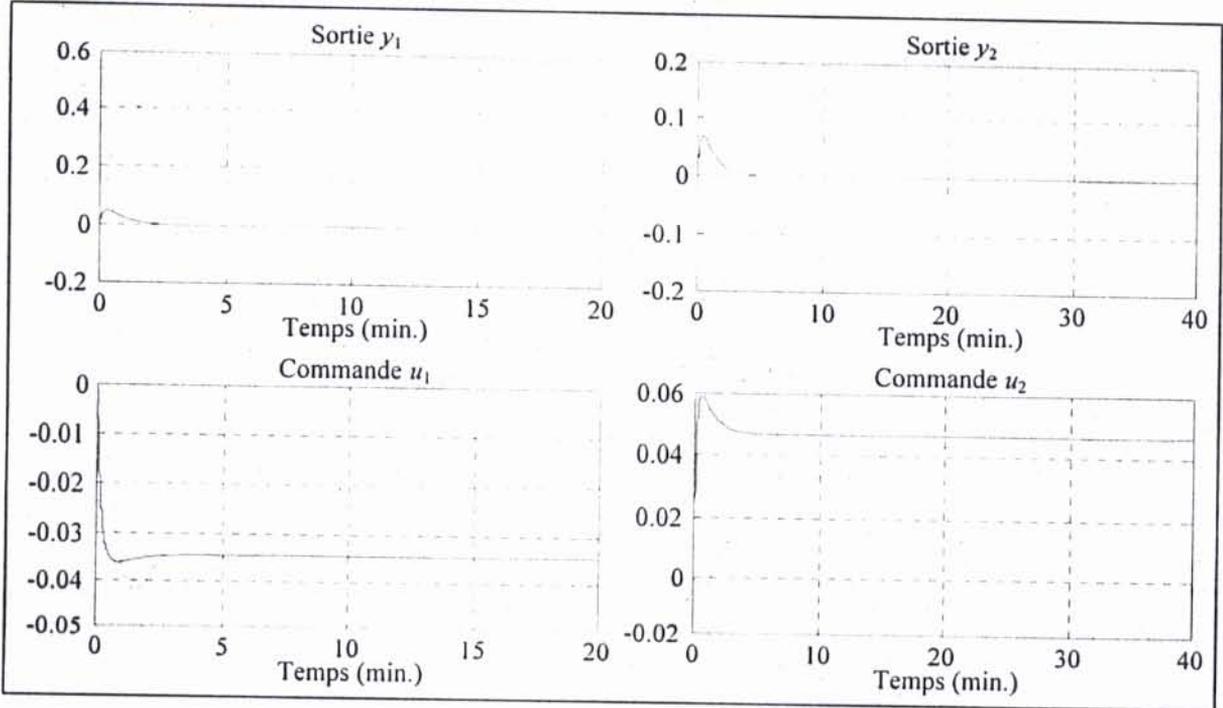


FIG. 4.6 : Rejet de la perturbation en mode régulateur.
 ----- Sans correcteur K ; — Avec le correcteur K .

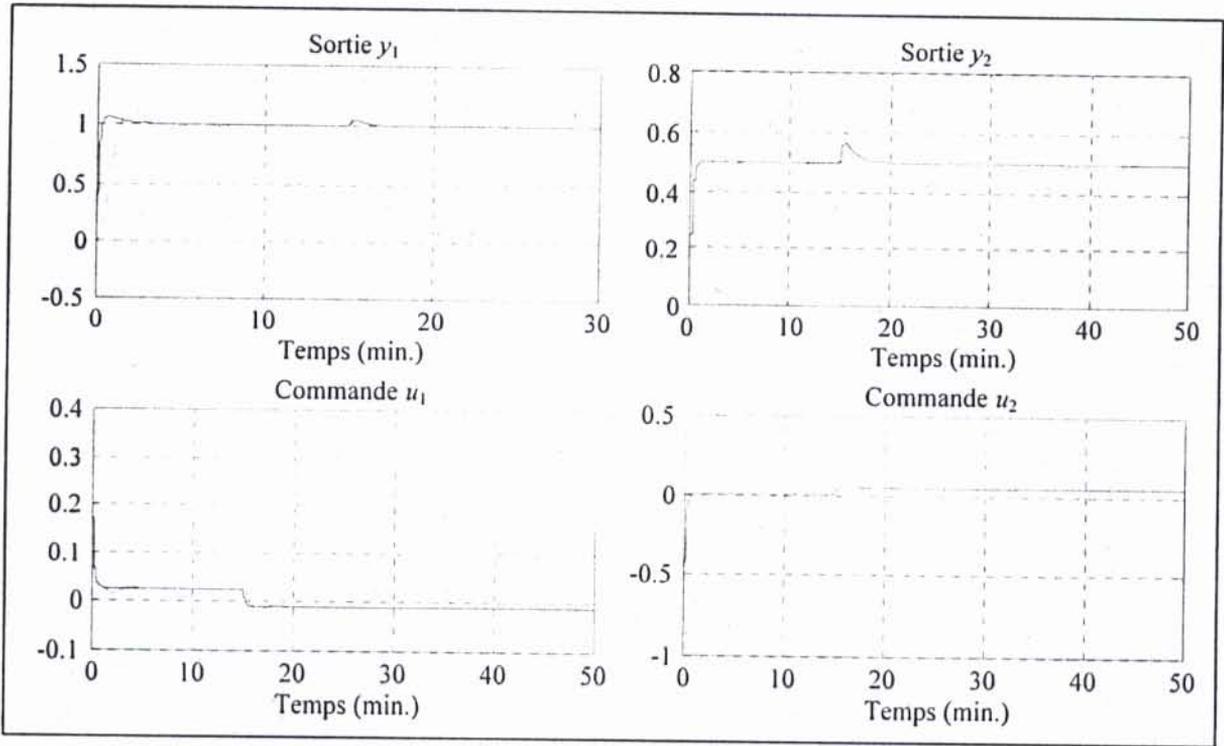


FIG. 4.7 : Rejet de la perturbation en mode suiveur.
 ----- Sans correcteur K ; — Avec le correcteur K .

3.2 Asservissement

La figure 4.8 représente l'évolution des sorties et les entrées du système sollicité par un échelon de consigne de 1 et de 0.5 pour les deux sorties y_1 et y_2 respectivement. Pour les deux stratégies de commande considérées, on constate que chaque régulateur assure la poursuite de la consigne. Néanmoins, sans le correcteur K les sorties du système présentent des oscillations avec des temps de réponse très élevés. Avec le correcteur K , on observe que les deux régulateurs assurent parfaitement la poursuite des consignes avec un faible dépassement pour la sortie y_1 . Les temps de réponse sont très faibles pour les deux sorties.

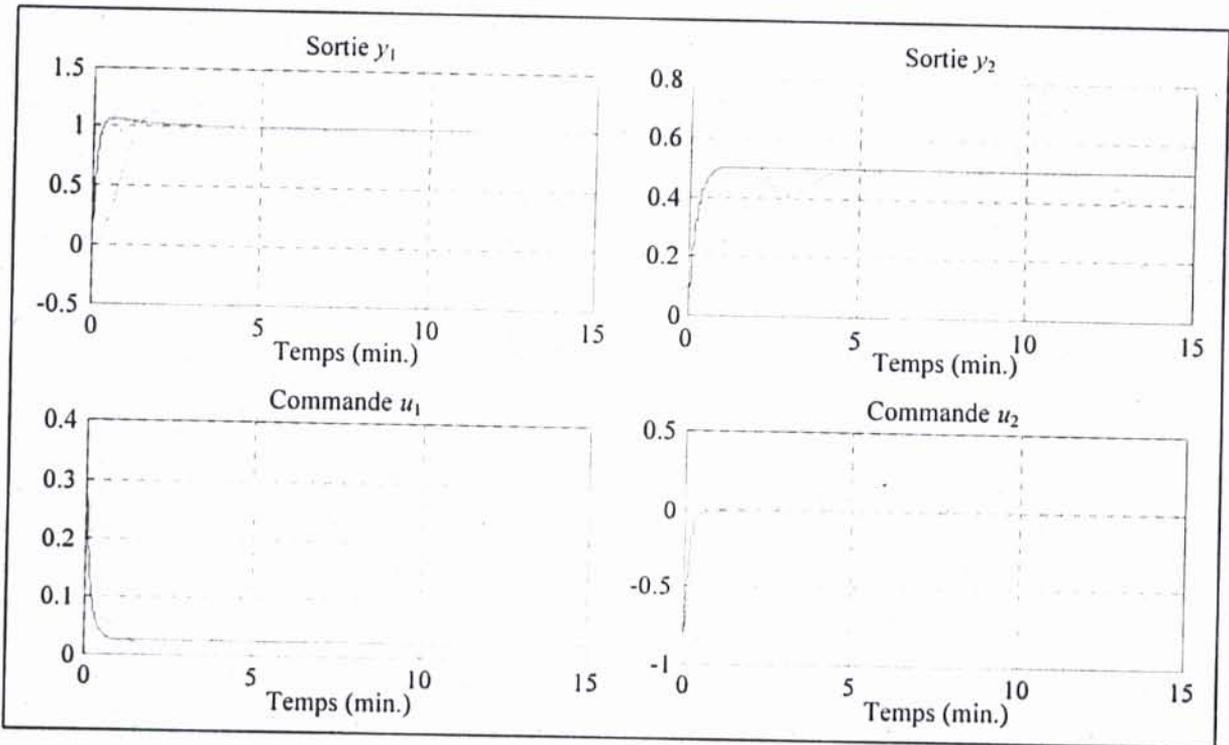


FIG. 4.8 : Réponses indicielles en asservissement.

----- Sans correcteur K ; — Avec le correcteur K .

3.3 Changement de consignes

Les figures 4.9 et 4.10 illustrent les réponses des sorties du système pour un changement de consigne des sorties y_1 et y_2 respectivement. Le changement de la consigne c_1 de la sortie y_1 qui passe de 1 à 0.5 affecte fortement la sortie y_2 dans le cas de la première stratégie de commande. Cependant, dans le cas de la stratégie de commande avec le correcteur K , l'effet de la commande u_1 sur la sortie y_2 est éliminé comme montré par la figure 4.9.

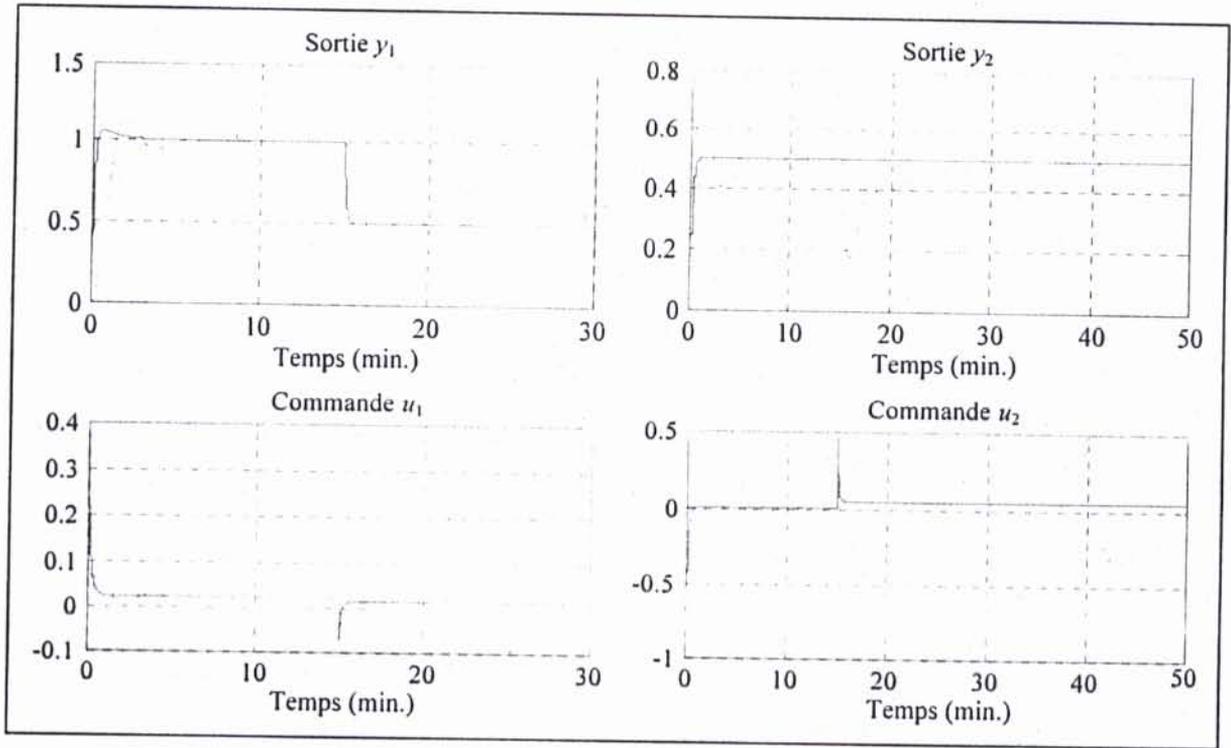


FIG. 4.9 : Changement de consigne de la sortie y_1 .
 ----- Sans correcteur K ; ——— Avec le correcteur K .

Les résultats de simulation obtenus pour un changement de 60 % de la consigne c_2 à l'instant $t = 25$ min (initialement $c_2 = 0.5$), sont donnés par la figure 4.10 où on remarque que la commande u_2 affecte faiblement la sortie y_1 pour les deux stratégies de commande considérées. En examinant les valeurs de l'IAE trouvées pour la sortie y_1 lors du changement de la consigne de c_2 et dans le cas de l'asservissement (tableau 4.1), on conclut que l'effet de la commande u_2 sur la sortie y_1 dans le cas de la stratégie de commande avec le correcteur K est moins significatif qu'en absence de celui-ci.

Le test de changement de points de consignes effectué met en évidence l'apport du correcteur K du point de vue interactions entre les boucles. D'après les résultats de simulation, le correcteur K permet de réduire l'effet de la commande u_2 sur la sortie y_1 et d'éliminer l'effet de u_1 sur la sortie y_2 .

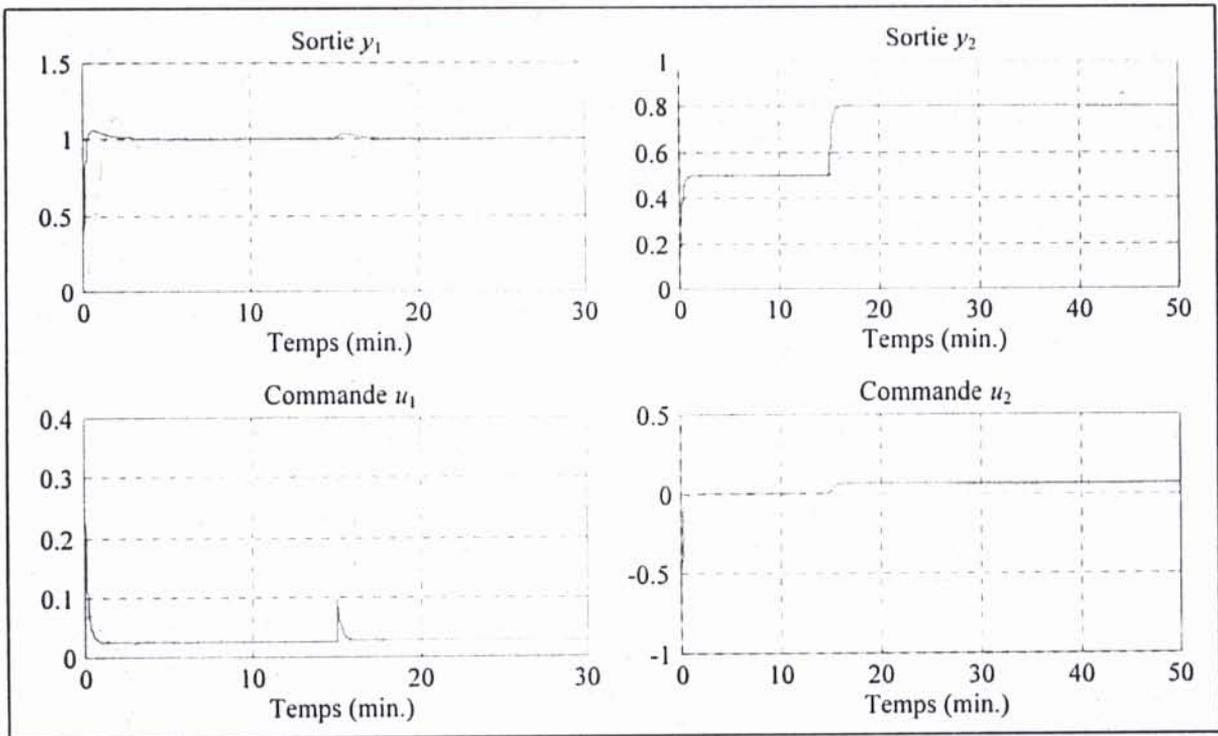


FIG. 4.10 : Changement de consigne de la sortie y_2 .
 ----- Sans correcteur K ; ——— Avec le correcteur K .

4.4.2 Exemple 2 : Détermination graphique du correcteur K

Le second exemple a pour objectif d'illustrer la méthodologie à suivre pour déterminer graphiquement le correcteur de faibles interactions. Le procédé d'étude est une colonne de distillation étudiée dans [41]. Le modèle de cette dernière est donné par la matrice de transfert $G(s)$ suivante :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-0.0747 e^{-2s}}{10s+1} & \frac{0.008 e^{-2s}}{5s+1} \\ \frac{-0.1173 e^{-2s}}{9s+1} & \frac{-0.008 e^{-2s}}{3s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{0.70 e^{-5s}}{14.4s+1} \\ \frac{1.3 e^{-3s}}{12s+1} \end{bmatrix} z. \quad (4.22)$$

1. Analyse des interactions dans la colonne de distillation

L'observation des figures 4.11 et 4.12 qui représentent respectivement la Matrice Directe de Nyquist et les éléments de la diagonale superposés par les cercles de Gershgorin indiquent clairement que les interactions entre les variables de la colonne de distillation sont fortes. L'origine du plan n'est pas encerclé par les cercles correspondants à $g_{11}(s)$, par contre il est encerclé dans le cas de $g_{22}(s)$ impliquant que la commande u_1 affecte fortement les deux sorties y_1 et y_2 . Par contre, l'effet de la commande u_2 sur les deux sorties de la colonne est

insignifiant d'après les lieux de Nyquist de $g_{12}(s)$ et $g_{22}(s)$ de la DNA (fig. 4.11). Les résultats d'analyse des interactions montrent que les deux configurations de commande possibles sont interactives. Pour la commande multiboucle de la colonne de distillation, il est judicieux d'introduire le correcteur de faibles interactions K .

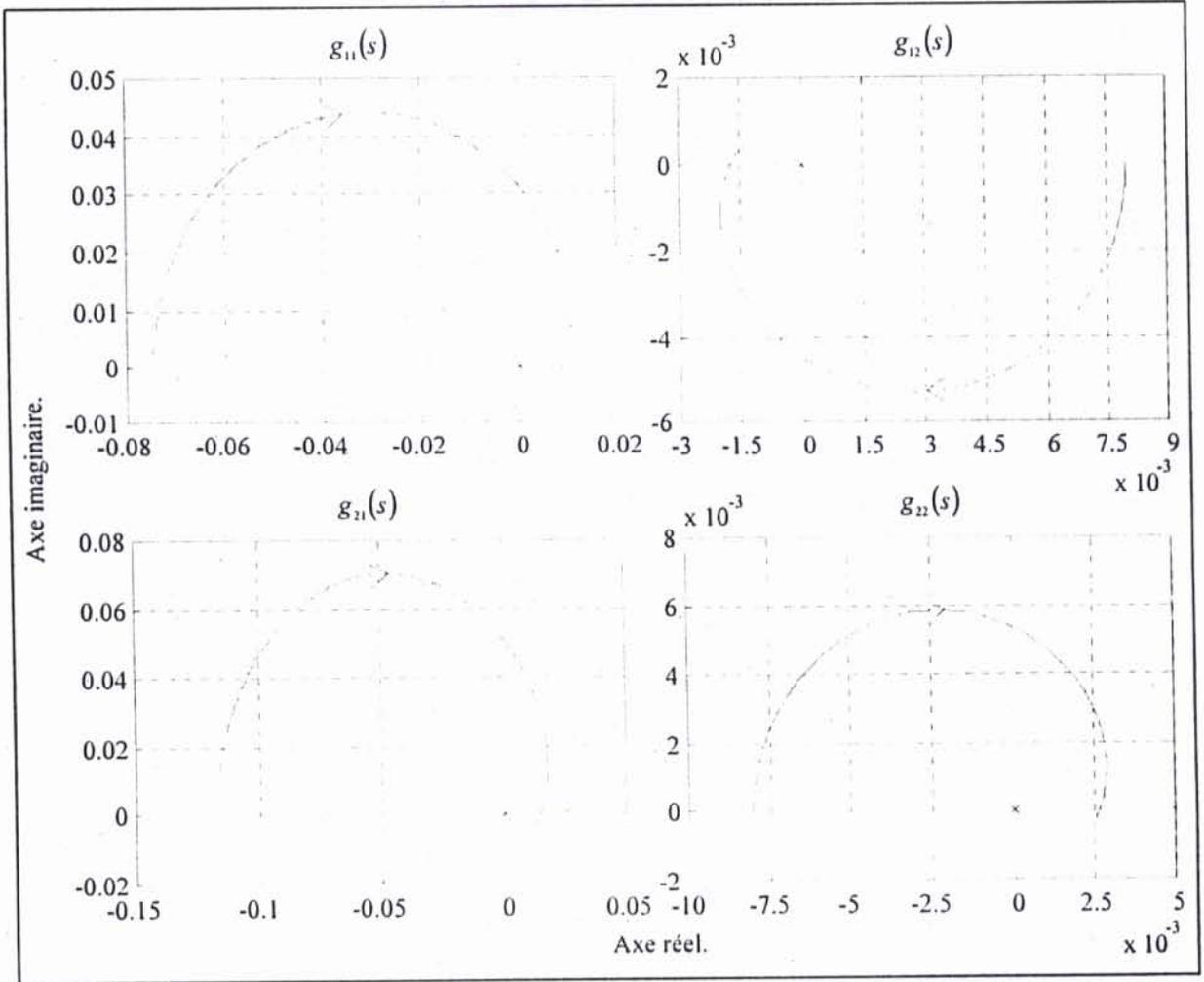


FIG. 4.11 : Matrice Directe de Nyquist de $G(s)$.

2. Détermination du correcteur K

Le correcteur de faibles interactions K doit être une matrice de dimensions 2×2 :

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Pour réduire les interactions présentes dans la colonne de distillation, la démarche consiste à chercher une combinaison linéaire entre les colonnes ou les lignes de la DNA de manière à avoir une configuration de commande avec de faibles interactions.

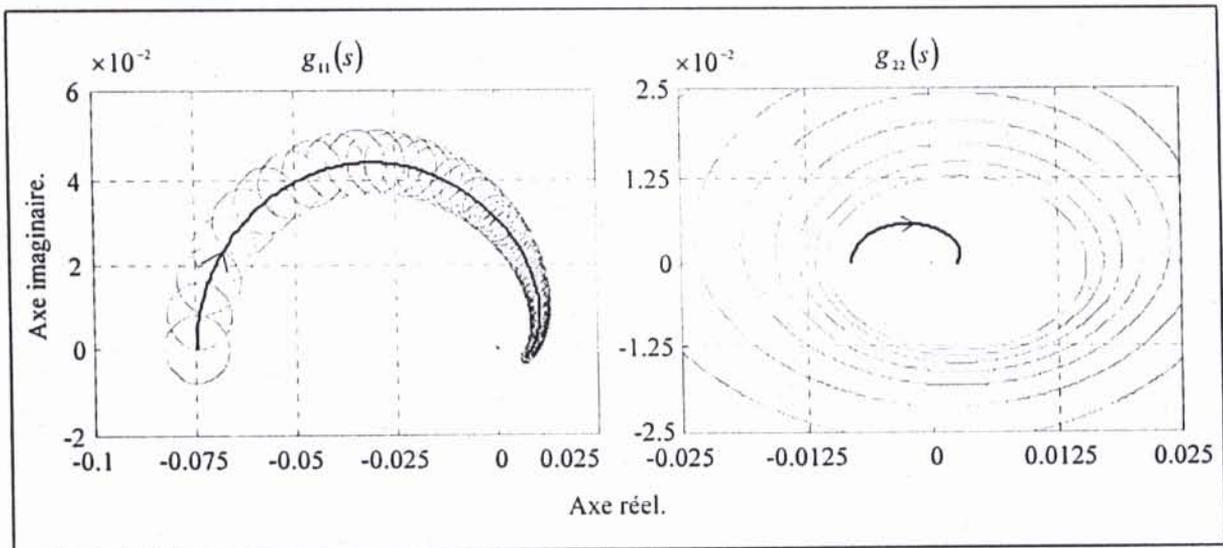


FIG. 4.12 : Les éléments de la diagonale de $G(s)$ superposés de cercles de Gershgorin.

En résumé de l'analyse des interactions effectuée précédemment, l'effet de la commande u_1 sur y_2 est fort et celui de u_2 sur y_1 est faible. Pour éliminer l'effet de u_1 sur y_2 , on remarque que d'après la DNA de la figure 4.11 la soustraction graphique de la deuxième ligne de la première ligne de la DNA réduit significativement l'effet de u_1 sur y_2 . Réduire d'avantage cet effet revient à multiplier la première colonne par un coefficient α , car l'effet de u_1 sur la sortie y_2 est plus important par rapport à celui exercé sur la sortie y_1 . Le coefficient α est déterminé en se basant sur les gains statiques.

Pour réduire l'effet de u_1 sur la sortie y_2 , on pose :

$$\alpha K_{s_{11}} - K_{s_{21}} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{K_{s_{21}}}{K_{s_{11}}}, \quad (4.24)$$

de la relation (2.11), on a :

$$\alpha = \frac{-0.1173}{-0.0747} \Rightarrow \alpha = 1.5703. \quad (4.25)$$

D'après la combinaison linéaire trouvée, le nouveau système $G^*(s)$ à commander est :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ \alpha g_{11}(s) - g_{21}(s) & \alpha g_{12}(s) - g_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{0.70 e^{-5s}}{14.4s + 1} \\ \frac{1.3 e^{-2s}}{12s + 1} \end{bmatrix} z. \quad (4.26)$$

Pour calculer le correcteur de faibles interactions K , on pose :

$$G(s)K = G^*(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ \alpha g_{11}(s) - g_{21}(s) & \alpha g_{12}(s) - g_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

ce-ci conduit aux deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} g_{11}(s)k_{11} + g_{12}(s)k_{21} = g_{11}(s), \\ g_{21}(s)k_{11} + g_{22}(s)k_{21} = \alpha g_{11}(s) - g_{21}(s). \end{cases} \quad (4.28)$$

et

$$\begin{cases} g_{11}(s)k_{12} + g_{12}(s)k_{22} = g_{12}(s), \\ g_{21}(s)k_{12} + g_{22}(s)k_{22} = \alpha g_{12}(s) - g_{22}(s). \end{cases} \quad (4.29)$$

La résolution de ces deux systèmes d'équations, donne le correcteur de faible interaction K suivant :

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)(\alpha g_{11}(s) - g_{21}(s))}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} & \frac{g_{12}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)(\alpha g_{12}(s) - g_{22}(s))}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} \\ \frac{g_{11}(s)(\alpha g_{11}(s) - g_{21}(s)) - g_{11}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} & \frac{g_{11}(s)(\alpha g_{12}(s) - g_{22}(s)) - g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Pour simplifier la structure du correcteur K , celui-ci est présenté sous forme de la matrice des gains purs suivante :

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} K(s) = \begin{bmatrix} 0.3891 & -0.1488 \\ -5.7046 & -0.3891 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

La mise en cascade du correcteur obtenu sur la colonne de distillation donne un nouveau système $G^*(s)$ à dominance diagonale comme le montrent les figures 4.13 et 4.14. La DNA de $G^*(s)$ (fig. 4.13) montre que l'effet de la commande u_1 sur la sortie y_2 est réduit par l'introduction du correcteur K . De plus, on remarque que pour chaque élément de la diagonale de la cascade $G^*(s)$, l'origine du plan n'est pas contenue dans les cercles de Gershgorin (fig. 4.14) signifiant de faibles interactions dans $G^*(s)$. Ainsi, le correcteur K obtenu permet d'appliquer la commande multiboucle en adoptant la stratégie de commande proposée. La configuration de commande est définie par les couples de la diagonale de $G^*(s)$.

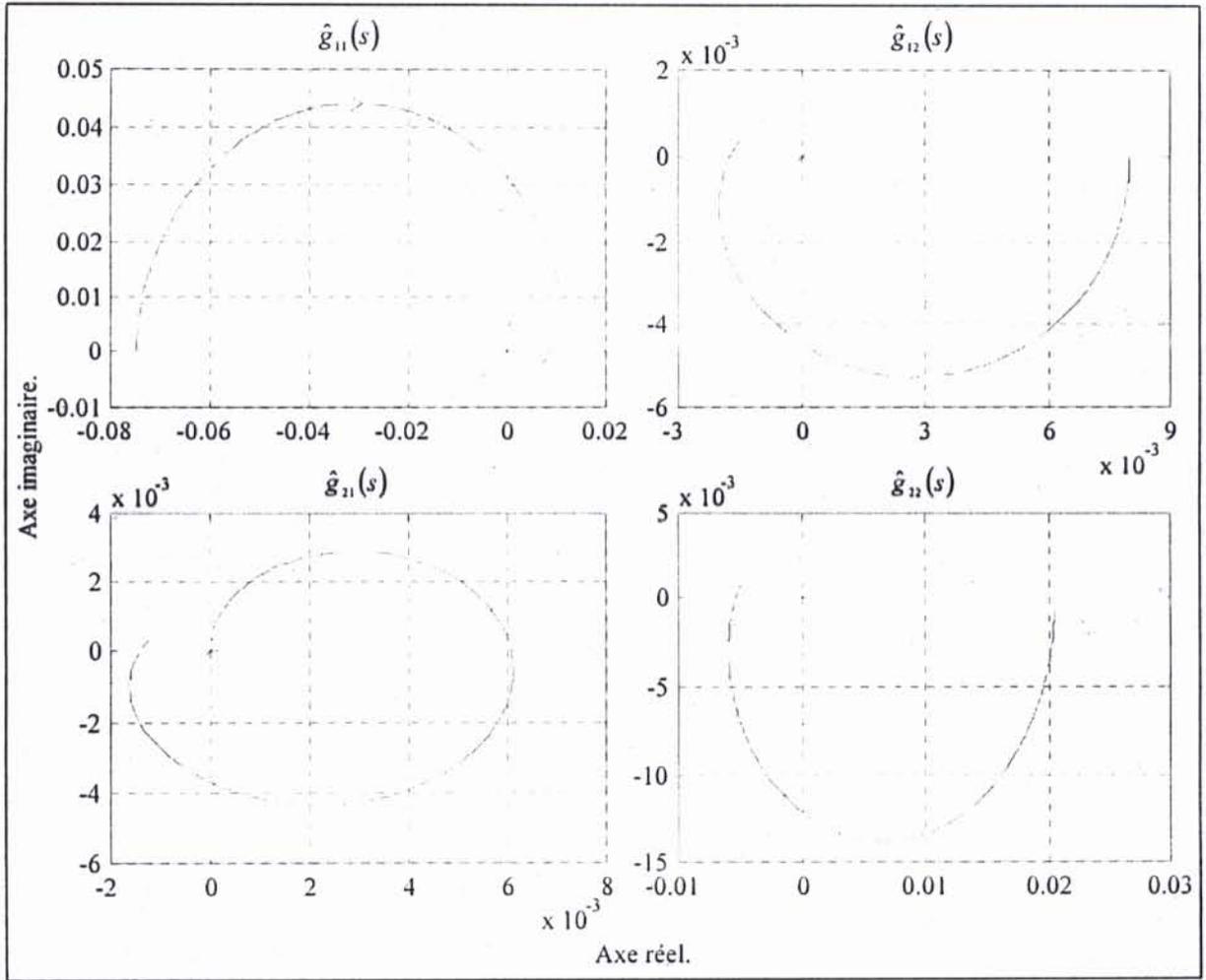


FIG. 4.13 : Matrice Directe de Nyquist de $G^*(s)$.

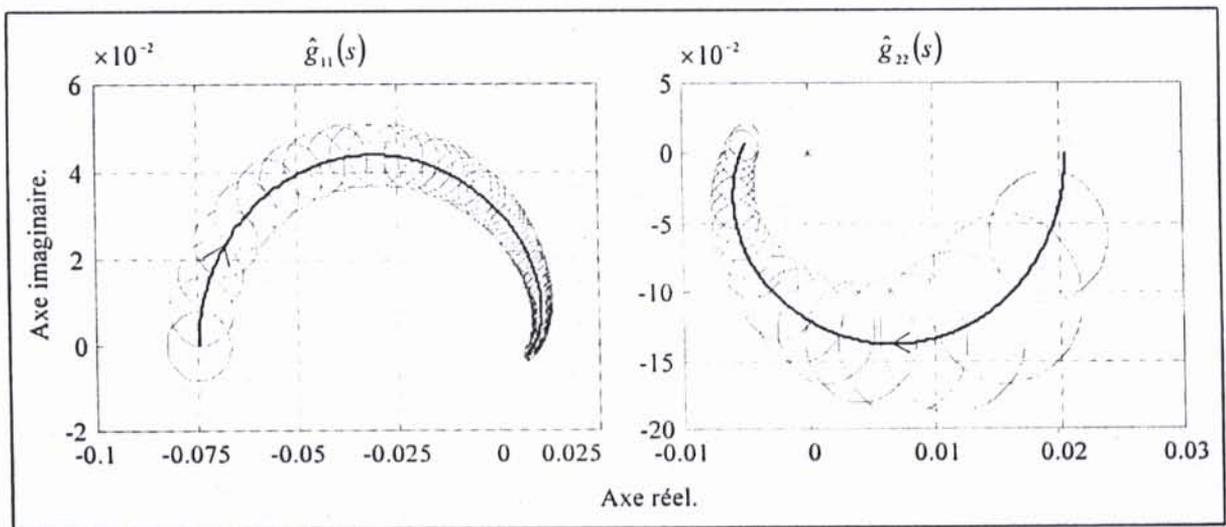


FIG. 4.14 : Les éléments de la diagonale de $G^*(s)$ superposés par des cercles de Gershgorin.

Pour la commande multiboucle de la colonne de distillation, en adoptant la stratégie de commande proposée, il nous reste à vérifier la stabilité des couples de la configuration de commande considérée. Pour cela, on calcule la Matrice des Gains Relatifs (RGA) de $G^*(s)$. Pour la cascade $G^*(s)$ celle-ci est donnée par la relation (2.8) comme :

$$\text{RGA} = \begin{bmatrix} 0.5692 & 0.4308 \\ 0.4308 & 0.5692 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

les gains relatifs correspondants aux couples de la configuration considérée sont positifs garantissant la stabilité des boucles de commande et par conséquent celle du système $G^*(s)$ en boucle fermée.

3. Résultats de la simulation

Une étude comparative entre les deux stratégies de commande considérées dans le premier exemple (sans et avec le correcteur de faibles interactions K) a été effectuée pour le cas de la colonne de distillation. Le tableau 4.2 présente les paramètres du régulateur PI pour chaque boucle de commande et les valeurs de l'indice numérique IAE obtenues pour les tests réalisés.

| STRATEGIE DE COMMANDE | BOUCLE | PARAMETRES DU REGULATEUR PI | | IAE | | |
|-----------------------|-----------------|-------------------------------------------------------|--------------|--------------------------------------------|-------------------------|---------------------|
| | | $G_{i_w}(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$ | | Rejet de la perturbation en asservissement | Changement de consignes | |
| | | K_c | T_i (min.) | | Changement de c_1 | Changement de c_2 |
| Sans correcteur K | $[u_1 - y_1]$ | -28.112 | 10.500 | 0.1556 | 0.0409 | 0.0050 |
| | $[u_2 - y_2]$ | 23.446 | 03.500 | 0.2617 | 0.0863 | 0.0214 |
| Avec correcteur K | $[u_1^* - y_1]$ | -35.574 | 14.259 | 0.0429 | 0.0310 | 0.0046 |
| | $[u_2^* - y_2]$ | 162.862 | 15.237 | 0.2362 | 0.0240 | 0.0116 |

TAB. 4.2 : Paramètres des régulateurs et les valeurs de l'IAE.

3.1 Rejet de la perturbation

La figure 4.15 explicite la différence entre les deux stratégies de commande considérées dans le rejet d'une perturbation de -0.04 appliquée à l'instant $t = 25$ min.

Dans le cas de la stratégie de commande avec correcteur de faibles interactions K , on observe des faibles variations des sorties par rapport à la stratégie de commande sans le correcteur K .

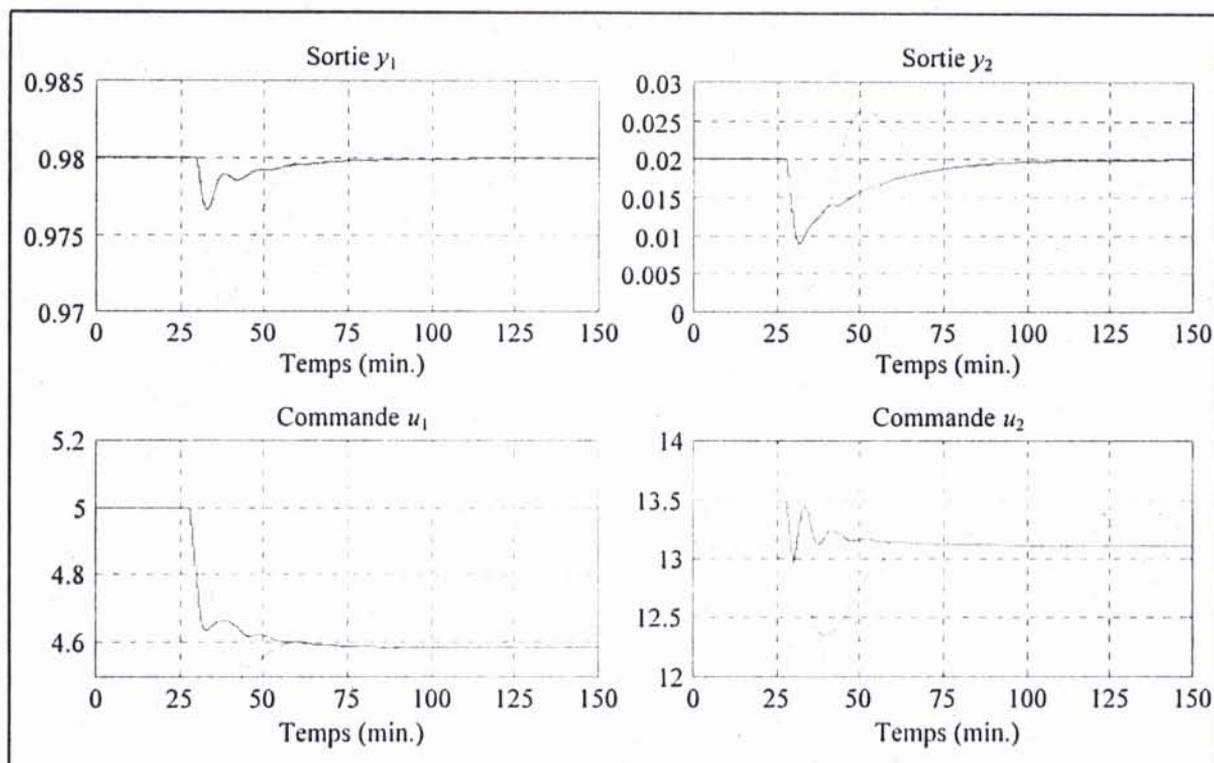


FIG. 4.15 : Rejet de la perturbation en asservissement.

----- Sans correcteur K ; ——— Avec le correcteur K .

3.2 Changement de consignes

La figure 4.16 donne les sorties et les commandes pour un changement de 0.05 de la consigne c_1 . L'examen des résultats obtenus, montre que la sortie y_2 est faiblement affectée par la commande u_1 avec une compensation rapide de l'effet de u_1 sur la sortie y_2 , la sortie y_1 tend vers la nouvelle valeur de consigne avec un temps de réponse faible dans le cas de la stratégie de commande proposée en comparaison avec la stratégie de commande sans correcteur K . De plus, l'amortissement est satisfaisant pour les deux sorties de la colonne.

Dans le cas de la figure 4.17 qui représente les sorties et les commandes pour un changement de 10 % de la consigne c_2 , on note que la sortie y_1 est affectée par la commande u_2 dans les deux stratégies de commande considérées. En se basant sur les valeurs du critère IAE obtenues, on constate que la sortie y_1 est moins affectée dans le cas de la stratégie de commande proposée. Concernant la compensation de l'effet de la commande u_2 sur la sortie y_1 et le temps de réponse de la sortie y_2 , on constate qu'ils sont légèrement améliorés avec l'introduction du correcteur K .

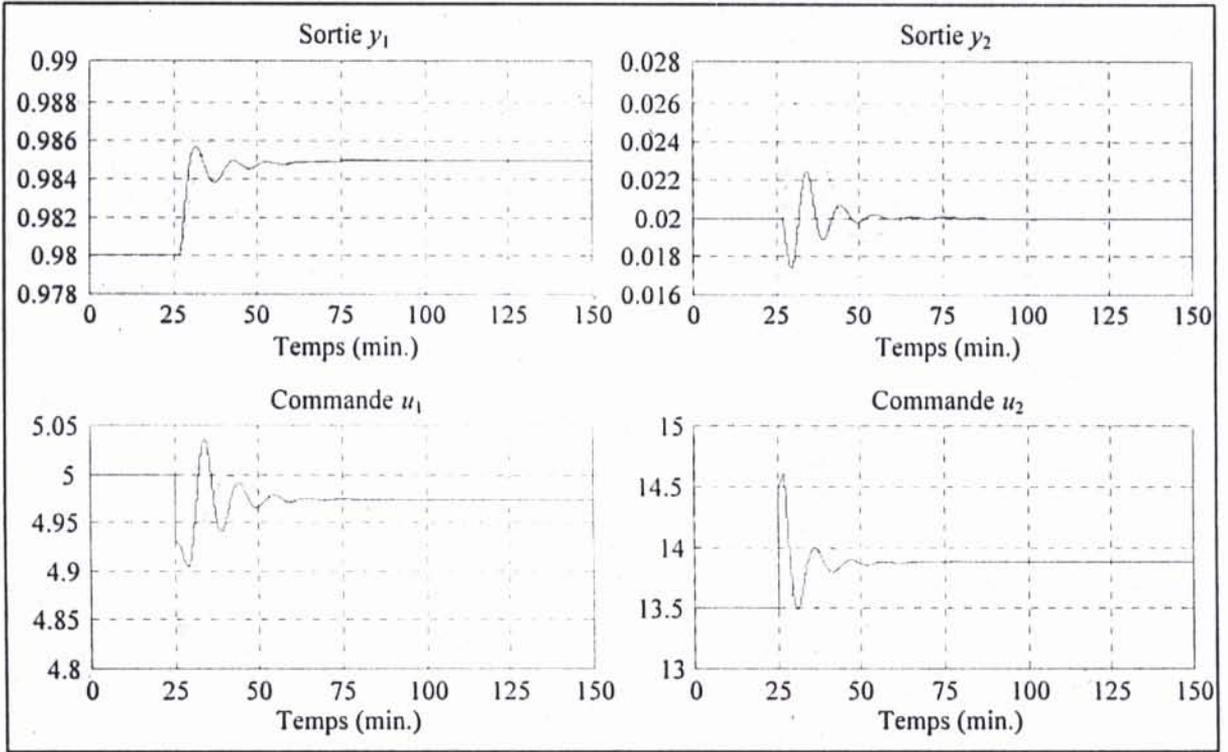


FIG. 4.16 : Changement de consigne de la sortie y_1 .
 ----- Sans correcteur K ; ——— Avec le correcteur K .

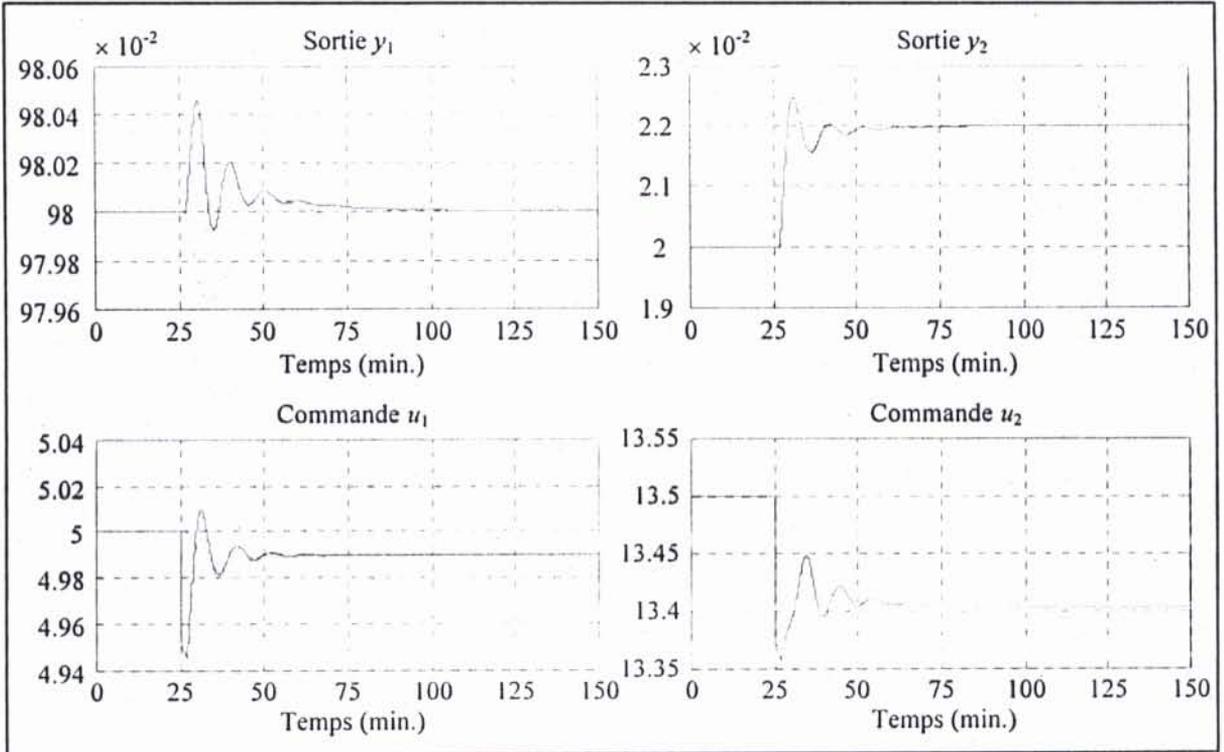


FIG. 4.17 : Changement de consigne de la sortie y_2 .
 ----- Sans correcteur K ; ——— Avec le correcteur K .

4.4.3 Exemple 3 : Commande multiboucle d'un système multivariable non carré

Jusqu'ici, la synthèse du correcteur de faibles interactions K pour la commande multiboucle des systèmes multivariables carrés fortement interactifs a été présentée. La stratégie de commande proposée a permis d'appliquer avec succès la commande multiboucle pour deux systèmes qui ne présentent pas une configuration de commande adéquate. Dans ce qui suit la stratégie de commande proposée est appliquée pour la commande multiboucle d'un système multivariable non carré.

Considérons le système à trois entrées et deux sorties traité dans [18] donné par le modèle d'état $S(A, B, C, D)$ suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (4.33)$$

1. Analyse des interactions

Le système considéré n'étant pas carré, pour analyser les interactions présentes dans le système (4.33), on utilise la méthode de la Matrice des Gains d'Interaction Statique **DGM(0)** du paragraphe 2.4.1.2.1. Les équations statiques du système (4.33) est :

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + u_3, \\ x_2 &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2 + u_3), \\ x_3 &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + u_3), \\ y_1 &= x_1 - x_2, \\ y_2 &= 2x_1 + x_3. \end{aligned} \quad (4.34)$$

On commence d'abord par la détermination de la matrice des gains statiques directs K_s^d en utilisant le graphe de fluence correspondant au modèle statique (4.34) du système donné par la figure 4.18. Le déterminant Δ de ce dernier est égal à 1.

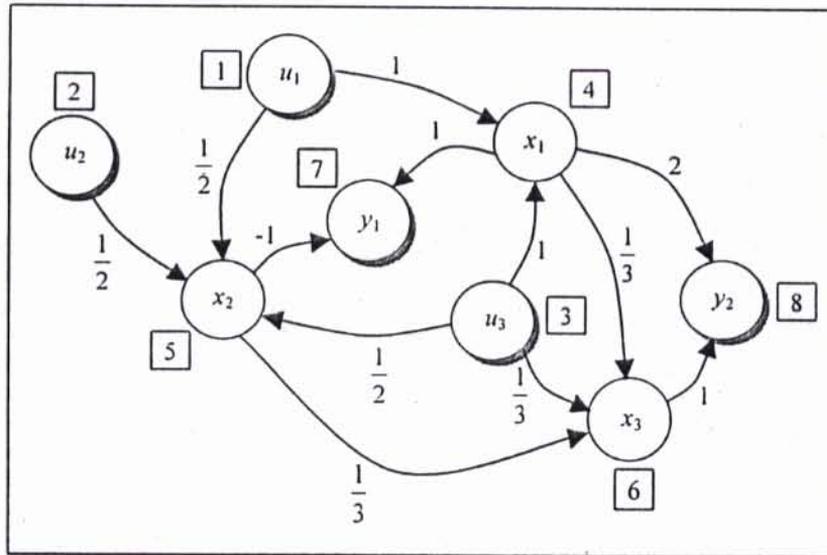


FIG. 4.18 : Graphe de fluence du modèle statique de $S(A, B, C, D)$.

1.1 Calcul de la Matrice des Gains Directs d'Interactions Statiques $DGM(0)$

Le tableau 4.3 donne les chaînes directes entre les variables de commandes (u_1, u_2 et u_3) et les variables à commander (y_1 et y_2) du système ainsi que les gains statiques directs entre chaque commande et chaque sortie obtenus, en suivant la méthode de détermination de la matrice K_s^d (utilisation du graphe de fluence) présentée dans le paragraphe 2.4.1.2.1.1.

| $\Delta = 1$ | | LES COMMANDES | | | | | | | | | | | |
|--------------|-------|------------------|----------------|------------|----------------|------------------|----------------|------------|----------------|------------------|----------------|------------|----------------|
| | | u_1 | | | | u_2 | | | | u_3 | | | |
| | | Chaînes directes | T_i | Δ_i | K_{s,j_1}^d | Chaînes directes | T_i | Δ_i | K_{s,j_2}^d | Chaînes directes | T_i | Δ_i | K_{s,j_3}^d |
| LES SORTIES | y_1 | 1 ; 5 ; 7 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | 2 ; 5 ; 7 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | 3 ; 5 ; 7 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ |
| | y_2 | — | — | — | 0 | — | — | — | 0 | 3 ; 6 ; 8 | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ |

TAB. 4.3 : Chaînes directes et gains statiques directs du système $S(A, B, C, D)$.

De ce tableau, on déduit la matrice K_s^d du système (4.33) suivante :

$$K_s^d = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

la relation (2.60) donne la Matrice des Gains Directs Statiques d'Interaction suivante :

$$\text{DGM}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

L'examen des éléments de la matrice **DGM(0)** trouvée montre que les trois commandes affectent fortement la sortie y_1 , et l'effet de chacune des deux commandes u_1 et u_2 sur la sortie y_2 est négligeable. L'effet de la commande u_3 sur la sortie y_2 est faible devant celui exercé par cette dernière sur la sortie y_1 .

2. Commande multiboucle

L'introduction du correcteur K en cascade sur le système permet d'appliquer la commande multiboucle en assurant de faibles interactions entre les boucles de la configuration de commande considérée. Pour pouvoir appliquer la commande multiboucle en adoptant la stratégie de commande proposée, le correcteur K doit être de dimensions 3×2 :

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

le nouveau système $S^*(A, B, C, D)$ à commander est :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} u^*, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Avec :

$$\begin{aligned} u &= K u^*, \\ a_{11} &= k_{11} + k_{31} & ; & \quad a_{12} = k_{12} + k_{32}, \\ a_{21} &= k_{11} + k_{21} + k_{31} & ; & \quad a_{22} = k_{12} + k_{22} + k_{32}, \\ a_{31} &= k_{31} & ; & \quad a_{32} = k_{32}. \end{aligned}$$

Le correcteur K peut alors être synthétisé analytiquement en utilisant la méthode de la Matrice des Gains Directs d'Interactions Statique **DGM(0)**.

Considérons les équations statiques correspondantes au nouveau système (4.38) suivant :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a_{11} u_1^* + a_{12} u_2^*, \\
 x_2 &= \frac{1}{2} (a_{21} u_1^* + a_{22} u_2^*), \\
 x_3 &= \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + a_{31} u_1^* + a_{32} u_2^*), \\
 y_1 &= x_1 - x_2, \\
 y_2 &= 2x_1 + x_3.
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

En considérant le graphe de fluence du modèle statique (4.39) de la figure 4.19 et par application de la méthode de la **DGM(0)**, il en résulte le tableau 4.4 qui donne les chaînes directes et les gains statiques directs entre les variables du système (4.38).

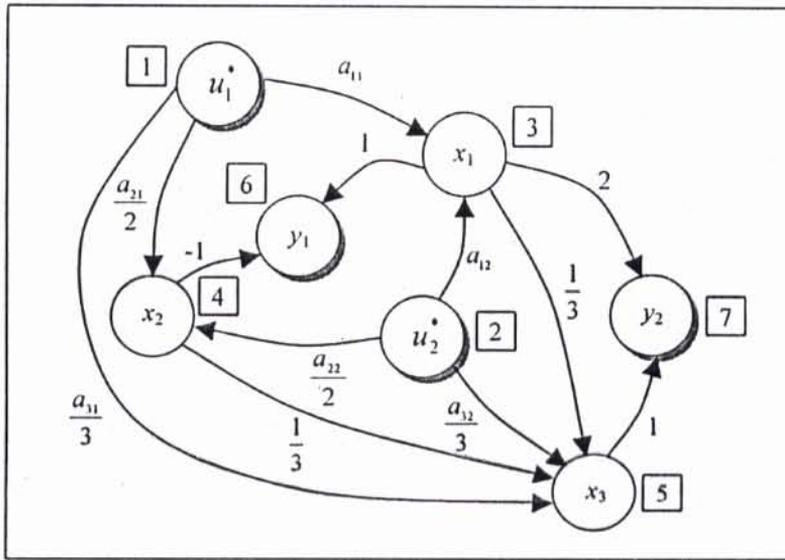


FIG. 4.19 : Graphe de fluence du modèle statique de $S^*(A, B, C, D)$.

| $\Delta = 1$ | | LES COMMANDES | | | | | | | |
|--------------|-------|------------------|---------------------|------------|---------------------|------------------|---------------------|------------|---------------------|
| | | u_1^* | | | | u_2^* | | | |
| | | Chaînes directes | T_i | Δ_i | $K_{s,i}^d$ | Chaînes directes | T_i | Δ_i | $K_{s,i}^d$ |
| LES SORTIES | y_1 | 1 ; 4 ; 6 | $-\frac{a_{21}}{2}$ | 1 | $-\frac{a_{21}}{2}$ | 2 ; 4 ; 6 | $-\frac{a_{22}}{2}$ | 1 | $-\frac{a_{22}}{2}$ |
| | y_2 | 1 ; 5 ; 7 | $\frac{a_{31}}{3}$ | 1 | $\frac{a_{31}}{2}$ | 2 ; 5 ; 7 | $\frac{a_{32}}{3}$ | 1 | $\frac{a_{32}}{3}$ |

TAB. 4.4 : Chaînes directes et gains statiques directs du système $S^*(A, B, C, D)$.

Les résultats du tableau 4.4 conduisent à la matrice des gains statiques directs K_s^d du nouveau système (4.38) suivante :

$$K_s^d = \begin{bmatrix} -\frac{a_{21}}{2} & -\frac{a_{22}}{2} \\ \frac{a_{31}}{3} & \frac{a_{32}}{3} \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

d'où :

$$\text{DGM}(0) = \begin{bmatrix} \frac{3|a_{21}|}{3|a_{21}| + 2|a_{31}|} & \frac{3|a_{22}|}{3|a_{22}| + 2|a_{32}|} \\ \frac{2|a_{31}|}{2|a_{31}| + 3|a_{21}|} & \frac{2|a_{32}|}{2|a_{32}| + 3|a_{22}|} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Considérons pour la commande multiboucle du nouveau système (4.38) la configuration de commande définie par les couples de la diagonale de $S^*(A, B, C, D)$. D'après les interprétations de la **DGM(0)**, pour avoir un faible niveau d'interactions entre les boucles de la configuration de commande choisie, il suffit de poser le gain statique direct d'interaction γ_{ii} ($i = 1, 2$) correspondant à chaque couple de la configuration considérée égal à 1. Ce-ci conduit au système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{11} = \frac{3|a_{21}|}{3|a_{21}| + 2|a_{31}|} = 1, \\ \gamma_{22} = \frac{2|a_{32}|}{2|a_{32}| + 3|a_{22}|} = 1, \\ \gamma_{12} = \frac{3|a_{22}|}{3|a_{22}| + 2|a_{32}|} = 0, \\ \gamma_{21} = \frac{2|a_{31}|}{2|a_{31}| + 3|a_{21}|} = 0. \end{array} \right. \quad (4.42)$$

La stabilité des boucles de commande en boucle fermée est assurée en ajoutant au système (4.42) la condition imposée par la **RGA** calculée pour le nouveau système (4.38), c'est-à-dire que les gains relatifs des couples ($\lambda_{11} = \lambda_{22}$) de la configuration de commande doivent être positifs :

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \frac{14 a_{11} a_{12} + a_{11} a_{22} + 2 a_{11} a_{32} - 7 a_{12} a_{21} - 0.5 a_{12} a_{22} - a_{21} a_{32}}{8 a_{11} a_{22} + 2 a_{11} a_{32} - 8 a_{12} a_{21} - a_{21} a_{32} - 2 a_{12} a_{31} - a_{22} a_{31}} > 0, \quad (4.43)$$

par simplification du système d'équations (4.42) et la relation (4.43), on obtient :

$$\begin{cases} a_{22} = 0, \\ a_{31} = 0, \\ a_{12} (14 a_{11} + a_{21}) > 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Comme solution au dernier système hybride (4.44), on prend :

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

3. Résultats de simulation

Pour cet exemple dont l'objectif est d'illustrer l'application de la méthodologie de synthèse d'un système de commande multiboucle proposée pour un système non carré, on se limite à l'observation du comportement du système en asservissement et face à des changement de consignes. Les paramètres des régulateurs sont donnés par le tableau 4.5.

| BOUCLE | LES PARAMETRES | |
|-----------------|----------------|-------|
| | K_c | T_i |
| $[u_1^* - y_1]$ | 3.33 | 0.33 |
| $[u_2^* - y_2]$ | -0.05 | 0.25 |

TAB. 4.5 : Paramètres des régulateurs.

3.1 Asservissement

La figure 4.20 présente les allures des sorties et des commandes pour le comportement en asservissement. Les valeurs de consigne sont 0.5 et 1 respectivement pour les sorties y_1 et y_2 . On note les bonnes performances sur les deux sorties du système.

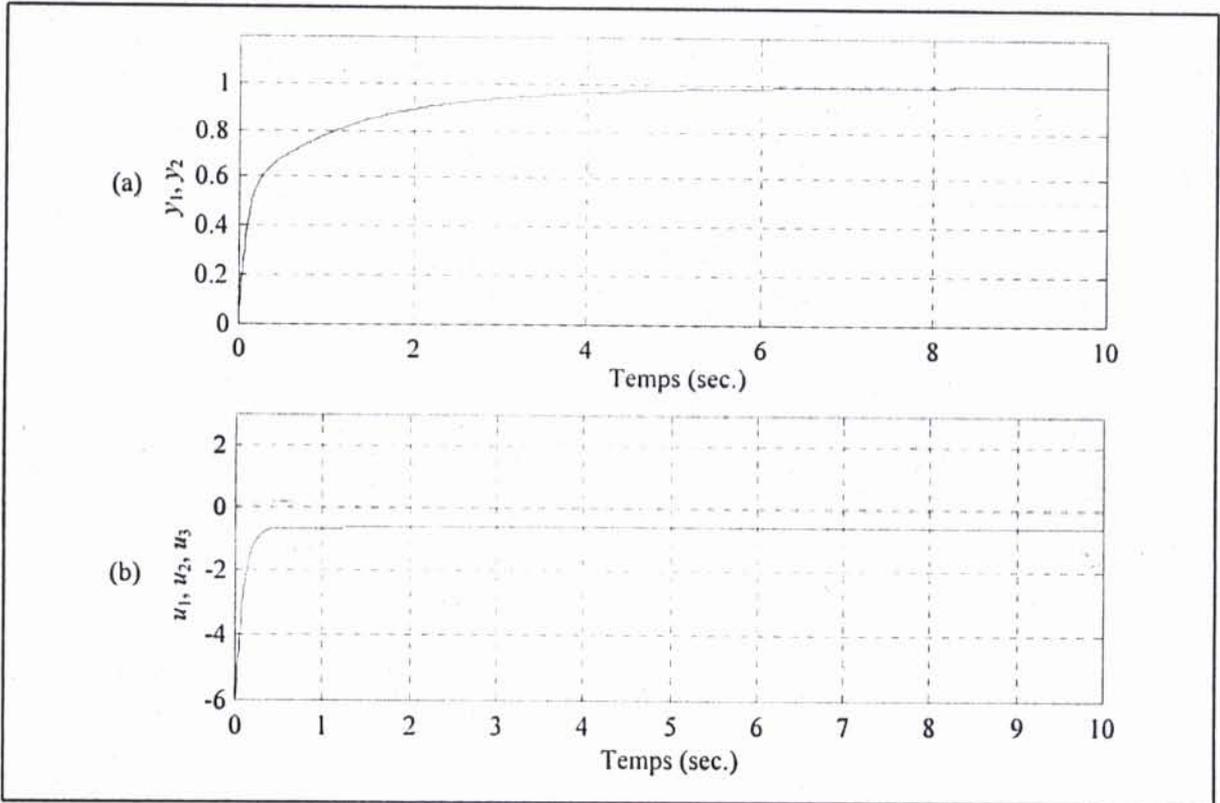


FIG. 4.20 : Sorties (a) et entrées (b) du système sollicité par des échelons de consignes.

----- Sortie y_1 ; ——— Sortie y_2
 ----- Commande u_1 ; ——— Commande u_2 ; -·-·-·- Commande u_3

3.2 Changement de consignes

Les résultats du test de changement de consigne obtenus dans le cas de la sortie y_1 qui passe de 0.5 à 0.25 sont montrés par la figure 4.21. On remarque que le changement de la sortie y_1 s'effectue très rapidement mais en affectant la sortie y_2 , l'effet de la commande u_1 engendre une chute de la sortie y_2 qui revient à sa valeur de consigne avec un temps de stabilisation faible.

La figure 4.22 donne les résultats de simulation obtenus pour une diminution de 50 % de la consigne de y_2 . Elle montre clairement que l'effet de la commande u_2 sur la sortie y_2 est insignifiant car la sortie y_2 atteint sa nouvelle valeur de consigne sans perturber la sortie y_1 .

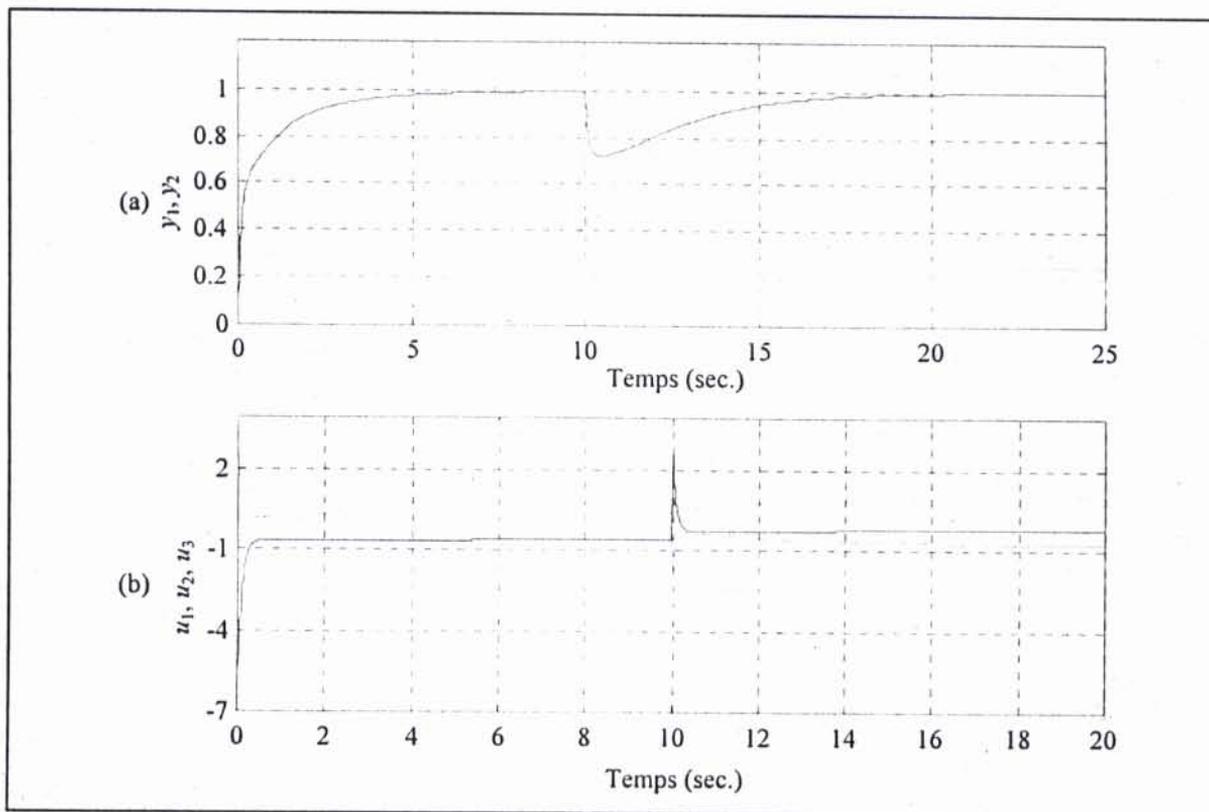


FIG. 4.21 : Sorties (a) et entrées (b) du système pour un changement de consigne de y_1 .

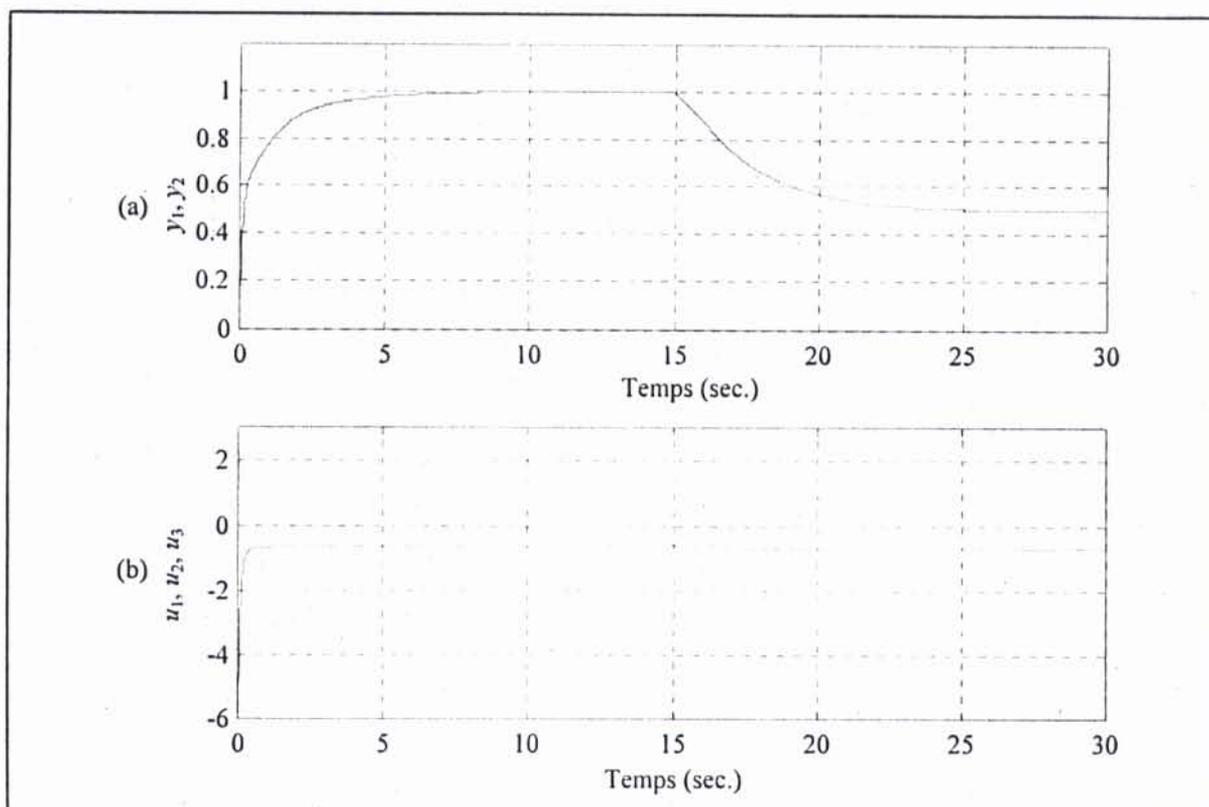


FIG. 4.22 : Sorties (a) et entrées (b) du système pour un changement de consigne de y_2 .

----- Sortie y_1 ; ——— Sortie y_2
 ----- Commande u_1 ; ——— Commande u_2 ; Commande u_3

Remarques 4.2

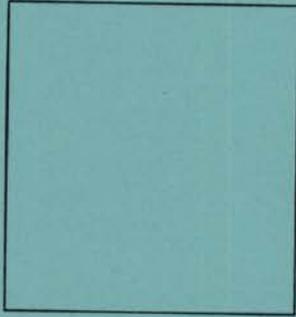
- Pour les exemples d'application présentés, on peut vérifier facilement que le nouveau système (la cascade constituée du correcteur K et du système à commander) est un système commandable et observable.
- Les entrées de chaque système ne sont pas excessivement sollicitées pour l'ensemble des tests effectués dans les deux cas de stratégies de commande considérées.

4.5 Conclusion

Motivés par l'intérêt porté par l'industrie pour la commande multiboucle et la place occupée par cette dernière comme technique de commande de systèmes multivariables, nous avons proposé une méthodologie pour la commande multiboucle des systèmes multivariables fortement interactifs. Cette méthode permet aussi de généraliser la commande multiboucle pour les systèmes multivariables non carrés. Elle consiste à introduire un correcteur en cascade sur le système à commander dont l'objectif est de réduire l'effet d'interactions entre les boucles de commande d'une configuration de commande choisie en départ.

Pour montrer l'apport du correcteur de faibles interactions dans la commande multiboucle en utilisant la stratégie de commande proposée, une étude comparative entre la stratégie de commande multiboucle conventionnelle et la stratégie de commande proposée a été menée sur deux exemples de systèmes qui présentent de fortes interactions dont l'un est une colonne de distillation. Les résultats de simulation montre que la stratégie de commande proposée donne de meilleures performances. La généralisation de la commande multiboucle pour des systèmes multivariables non carrés a été illustrée, avec des résultats de simulations satisfaisants, par une application sur un exemple d'un système non carré tiré de la littérature.

Ce qui distingue cette méthodologie est le fait que la synthèse du correcteur est fondée sur l'utilisation des propriétés d'une méthode d'analyse des interactions et le correcteur résultant est simple à implémenter. L'aspect robustesse du système de commande conçu par cette méthodologie réside d'une part dans la réduction des interactions entre les boucles de commande permettant d'éviter la propagation des perturbations dans le système en diminuant leurs effets, et d'autre part, dans la stabilité des boucles de commande et par conséquent celle du système global. Une telle solution constitue une alternative pour la commande multiboucle des systèmes multivariables car l'obtention d'une configuration de commande adéquate n'est pas toujours possible en raison des fortes interactions existantes entre les boucles de l'ensemble des configurations candidates.



CONCLUSION GÉNÉRALE

*"... la vision d'un homme ne prête pas ses
ailes à un autre homme."*

KHALIL GIBRAN

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire concerne l'analyse des interactions dans les systèmes à grande échelle et la commande multiboucle des systèmes multivariables. L'objectif principal visé par notre travail est de développer une démarche méthodologique permettant de simplifier l'analyse des interactions et le choix de la meilleure configuration de commande lorsque la dimension du système est grande. L'autre objectif s'inscrit dans le cadre de la commande des systèmes multivariables. Il consiste à proposer une méthode de synthèse d'un système de commande multiboucle pour un système multivariable fortement interactif et de généraliser la commande multiboucle pour un système multivariable non carré. Les solutions des problèmes abordés ont été obtenues en se basant sur des résultats importants de la théorie d'analyse des interactions.

Ainsi, après un rappel de quelques notions de la théorie des systèmes multivariables utilisées dans l'analyse des interactions, nous avons présenté une synthèse regroupant la plupart des méthodes d'analyse des interactions développées et les résultats importants des travaux de recherche.

En exploitant quelques résultats, nous avons proposé deux méthodes d'analyse des interactions beaucoup plus simples permettant de simplifier l'analyse des interactions lorsque la dimension du système est grande. Le principe consiste à décomposer le système à analyser en un ensemble de sous-systèmes. L'une des méthodes est développée en utilisant conjointement la Matrice Directe de Nyquist et la méthode d'analyse des interactions IMC. La seconde méthode utilise la Matrice des Gains Relatifs Dynamique pour évaluer les niveaux d'interactions entre les sous-systèmes obtenus en utilisant l'inverse d'une matrice partitionnée. Il convient de noter que la solution proposée permet une analyse fine et complète des interactions présentes dans un système multivariable avec beaucoup moins de calculs, ainsi de surmonter le problème de calcul rencontré lors de l'application des méthodes d'analyse développées qu'on retrouve dans la littérature pour un système de dimension élevée. Les fondements théoriques des méthodes proposées justifient leur validité démontrée par les exemples d'application présentés.

Nous avons également montré que les interactions existantes dans un système, peuvent être caractérisées par un graphe de fluence mettant en évidence tous les effets d'interactions existants dans le système et qui sont déterminés par l'application de l'une des méthodes d'analyse par décomposition proposées. Pour le choix de la meilleure configuration de commande, nous avons proposé une méthode basée sur le graphe de fluence, construit sur la base des résultats d'analyse des interactions et l'introduction de la Matrice des Gains Relatifs

pour garantir la stabilité des boucles de commande, ainsi la stabilité du système en boucle fermée. Une autre démarche intéressante pour le choix de la meilleure configuration pour une commande multiboucle a été développée en s'appuyant sur les caractéristiques d'une transmittance forte dans un système à grande échelle. Les étapes de la méthode développée sont données sous forme d'un algorithme simple à programmer. Les deux méthodes du choix de la configuration de commande proposées ont été utilisées avec succès dans plusieurs applications dont deux sont présentées dans ce mémoire.

Le problème de la commande multiboucle d'un système multivariable fortement interactif a été abordé en proposant une stratégie de commande multiboucle dans laquelle nous avons introduit un correcteur, dit de faibles interactions, en cascade sur le système à commander. L'objectif étant de réduire le niveau des interactions existantes entre les boucles d'une configuration de commande choisie. La méthodologie de synthèse du correcteur introduit s'appuie sur l'exploitation du principe et les interprétations d'une méthode d'analyse des interactions convenablement choisie. L'intérêt principal de cette approche est qu'elle débouche sur une méthode constructive pour la synthèse du correcteur de faibles interactions et conduit à un correcteur, sous forme des gains purs, qui est simple à implémenter. En outre, la stratégie de commande proposée s'avère particulièrement adaptée à la synthèse d'un système de commande multiboucle robuste pour un système multivariable non carré. Les applications présentées montrent que la stratégie de commande proposée possède une excellente robustesse en stabilité tout en assurant une bonne robustesse aux performances.

La simplicité des solutions apportées pour l'analyse des interactions, le choix de la configuration de commande et la commande multiboucle d'un système multivariable fortement interactif et d'un système multivariable non carré constitue une caractéristique qu'il est intéressant de la signaler.

L'analyse des interactions dans les systèmes à grande échelle constitue actuellement un axe de recherche très actif. Les perspectives se trouvent dans le développement des méthodes d'analyse des interactions pour des systèmes linéaires variants et des systèmes non linéaires. Dans ce cadre, l'analyse des interactions dans un système à grande échelle non linéaire peut être étudiée par l'approche du modèle flou et de contribuer à la résolution des problèmes de commande des systèmes complexes. Les résultats obtenus en utilisant la modélisation par bond-graphs dans l'étude des systèmes et la synthèse des lois de commande laisse à penser qu'un modèle bond-graphs d'un système à grande échelle peut constituer une voie pour

l'analyse des interactions, si l'on considère que l'objectif majeur est de réussir à mieux appréhender le comportement du système.

Un autre aspect non négligeable qui reste ouvert est celui de développement des méthodes de synthèse des systèmes de commande multivariables sur la base des méthodes d'analyse des interactions.



ANNEXES

*“Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement,
ce qu'on énonce clairement induit qu'on
le conçoit bien ou mieux.”*

HENRI DESROCHE

Calcul matriciel

A.1 Produit de Hadamard

Pour deux matrices $A(m, n)$ et $B(m, n)$, la matrice produit de Hadamard $C(m, n)$ est donnée par :

$$C = A \cdot *B = \left[c_{ij} = a_{ij} b_{ij} : i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n \right]. \quad (\text{A.1})$$

Où :

a_{ij} : est l'élément (i, j) de la matrice A .

b_{ij} : est l'élément (i, j) de la matrice B .

c_{ij} : est l'élément (i, j) de la matrice C .

A.2 Matrices partitionnées

A.2.1 Produit de Hadamard de deux matrices partitionnées

L'extension de produit de Hadamard au cas des matrices partitionnées (les matrices doivent être partitionnées de la même manière) s'effectue sans difficulté sous la forme :

$$C = A \cdot *B = \left[C_{ij} = A_{ij} \cdot *B_{ij} : i = 1, \dots, l ; j = 1, \dots, k \right]. \quad (\text{A.2})$$

Où :

l : est le nombre de blocs en lignes.

k : est le nombre de blocs en colonnes.

Dans ce cas chaque bloc A_{ij} est de dimension égale à celle de B_{ij} .

A.2.1 Transposée d'une matrice partitionnée

Soit la matrice A partitionnée sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

la transposée de matrice A désignée par A^T est :

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

A.2.2 Inverse d'une matrice partitionnée

Soit la matrice carrée régulière A partitionnée sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

où les blocs A_{11} et A_{22} sont carrés. Si l'on partitionne l'inverse de A sous la forme :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

où les blocs X_{ij} ont des tailles identiques à celles des blocs A_{ij} , $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, les produits $A A^{-1} = A^{-1} A = I$ conduisent aux relations :

$$\begin{aligned} A_{11} X_{11} + A_{12} X_{21} &= I, & X_{11} A_{11} + X_{12} A_{21} &= I, \\ A_{21} X_{11} + A_{22} X_{21} &= 0, & X_{21} A_{11} + X_{22} A_{21} &= 0, \\ A_{11} X_{12} + A_{12} X_{22} &= 0, & X_{11} A_{12} + X_{12} A_{22} &= 0, \\ A_{21} X_{12} + A_{22} X_{22} &= I, & X_{21} A_{12} + X_{22} A_{22} &= I. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Supposons que A_{11} soit inversible, alors de ces relations on peut tirer :

$$\begin{aligned} X_{12} &= -A_{11}^{-1} A_{12} X_{22}, \\ X_{21} &= -X_{22} A_{21} A_{11}^{-1}, \\ X_{11} &= A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} X_{22} A_{21} A_{11}^{-1}, \\ (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) X_{22} &= I. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Mais comme A est supposée inversible cela implique que X_{22} existe donc que $A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$ est régulière et on a :

$$X_{22} = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1}. \quad (\text{A.9})$$

De même si on avait supposé A_{22} inversible on aurait obtenu que la matrice $A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$ est nécessairement inversible et que :

$$\begin{aligned}
X_{11} &= (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1}, \\
X_{12} &= -X_{11} A_{12} A_{22}^{-1}, \\
X_{21} &= -A_{22}^{-1} A_{21} X_{11}, \\
X_{22} &= A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} X_{11} A_{12} A_{22}^{-1}.
\end{aligned}
\tag{A.10}$$

Dans le cas où A_{11} et A_{22} sont toutes les deux inversibles, le calcul se simplifie légèrement. L'utilisation du lemme matriciel d'inversion [13], [47] sur la dernière expression obtenue donne :

$$\begin{aligned}
X_{22} &= A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1}, \\
&= (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1},
\end{aligned}
\tag{A.11}$$

qui est l'expression que l'on avait obtenue dans le cas où A_{11} est inversible. On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
X_{11} &= (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1}, \\
X_{22} &= (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1}, \\
X_{12} &= -A_{11}^{-1} A_{12} X_{22} = -X_{11} A_{12} A_{22}^{-1}, \\
X_{21} &= -X_{22} A_{21} A_{11}^{-1} = -A_{22}^{-1} A_{21} X_{11}.
\end{aligned}
\tag{A.12}$$

A.3 Normes de matrices

Soit la matrice A suivante :

$$A = \left[a_{ij} : i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n \right].
\tag{A.13}$$

La norme de Hölder d'une matrice s'écrit [13], [47] :

$$\| A \|_{(p)} = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n | a_{ij} |^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1
\tag{A.14}$$

d'où l'on déduit :

- Pour $p = 1$ on définit la norme de la **Somme des modules** : $\| A \|_{(1)}$.
- Pour $p = 2$ on définit la **Norme euclidienne** : $\| A \|_{(2)}$.
- Pour $p = \infty$ on définit la **Norme du maximum** : $\| A \|_{\infty}$.

Démonstration des expressions des filtres

$$f_{L_i}^*(\omega) \text{ et } f_{C_i}^*(\omega)$$

B.1 Résumé du théorème de petit gain [44]

Dans la boucle de commande de la figure B.1, on suppose que $H(s)$ est un système BIBO stable. Une condition suffisante pour que la boucle de la figure B.1 soit stable intérieurement est que :

$$\|H(j\omega)\|_{\infty} < 1. \quad (\text{B.1})$$

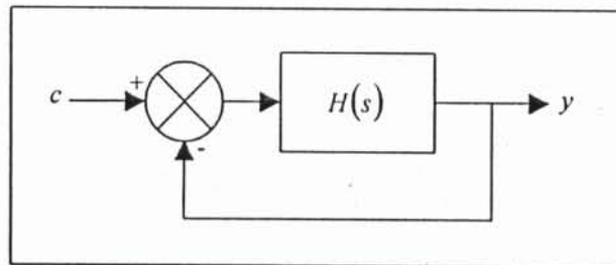


FIG. B.1 : Boucle de commande.

B.2 Démonstration de la relation de $f_{L_i}^*(\omega)$

D'après le théorème de petit gain [44], la stabilité de la structure de commande par modèle interne de la figure 2.2 est garantie si la condition (2.43) est satisfaite, c'est-à-dire :

$$\|G_c(s)(G(s) - \tilde{G}(s))\| < 1. \quad (\text{B.2})$$

Le système $G(s)$, le modèle $\tilde{G}(s)$ et le régulateur $G_c(s)$ dans (2.36), (2.37) et (2.38) respectivement, sont remplacés dans (B.2) ce qui donne :

$$\left\| \text{diag} \left[f_1(s)g_{11}^{-1}(s) \quad f_2(s)g_{22}^{-1}(s) \quad \cdots \quad f_m(s)g_{mm}^{-1}(s) \right] \begin{bmatrix} 0 & g_{12}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & 0 & \cdots & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \quad (\text{B.3})$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & f_1(s) g_{11}^{-1}(s) g_{12}(s) & \dots & f_1(s) g_{11}^{-1}(s) g_{1m}(s) \\ f_2(s) g_{22}^{-1}(s) g_{21}(s) & 0 & \dots & f_2(s) g_{22}^{-1}(s) g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(s) g_{mm}^{-1}(s) g_{m1}(s) & f_m(s) g_{mm}^{-1}(s) g_{m2}(s) & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1, \quad (\text{B.4})$$

$$\Leftrightarrow \max_i \sum_{j, j \neq i} |f_i(s) g_{ii}^{-1}(s) g_{ij}(s)| < 1, \quad (\text{B.5})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j, j \neq i} |f_i(s)| |g_{ii}^{-1}(s)| |g_{ij}(s)| < 1, \quad \text{pour } i = 1, \dots, m. \quad (\text{B.6})$$

$|g_{ii}^{-1}(s)|$ est calculé en suivant la procédure décrite dans l'étape 1 (cf. § 2.4.1.1.7.2), donc :

$$g_{ii}(s) = g_{ii}(s) g_{ii}(s), \quad (\text{B.7})$$

avec :

$$|g_{ii}(0)| = 1, \quad (\text{B.8})$$

de (B.7) et (B.8) on peut écrire :

$$|g_{ii}^{-1}(s)| = |g_{ii}^{-1}(s) g_{ii}(s)| = |g_{ii}(s)|^{-1} |g_{ii}(s)| = |g_{ii}(s)|^{-1}, \quad (\text{B.9})$$

on remplace $|g_{ii}^{-1}(s)|$ dans (B.6), on aura :

$$|f_i(s)| |g_{ii}(s)|^{-1} \sum_{j, j \neq i} |g_{ij}(s)| < 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{B.10})$$

$$\Leftrightarrow |f_i(j\omega)| < f_{i,c}^*(j\omega) = \frac{|g_{ii}(j\omega)|}{\sum_{j, j \neq i} |g_{ij}(j\omega)|}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{B.11})$$

CQFD

B.3 Démonstration de la relation de $f_{c_i}^*(\omega)$

Pour démontrer la relation $f_{c_i}^*(\omega)$, on considère la deuxième condition de stabilité (2.44) :

$$\| (G(s) - \tilde{G}(s)) G_c(s) \| < 1, \quad (\text{B.12})$$

la substitution du système $G(s)$, du modèle $\tilde{G}(s)$ et le régulateur $G_c(s)$ dans (B.12) donne :

$$\left\| \left[\begin{array}{cccc} 0 & g_{12}(s) & \dots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & 0 & \dots & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \dots & 0 \end{array} \right] \text{diag} \left[f_1(s)g_{11}^{-1}(s) \quad f_2(s)g_{22}^{-1}(s) \quad \dots \quad f_m(s)g_{mm}^{-1}(s) \right] \right\|_{\infty} < 1, \quad (\text{B.13})$$

$$\left\| \left[\begin{array}{cccc} 0 & f_2(s)g_{22}^{-1}(s)g_{12}(s) & \dots & f_m(s)g_{mm}^{-1}(s)g_{1m}(s) \\ f_1(s)g_{11}^{-1}(s)g_{21}(s) & 0 & \dots & f_m(s)g_{mm}^{-1}(s)g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(s)g_{11}^{-1}(s)g_{m1}(s) & f_2(s)g_{22}^{-1}(s)g_{m2}(s) & \dots & 0 \end{array} \right] \right\|_{\infty} < 1, \quad (\text{B.14})$$

$$\Leftrightarrow \max_i \sum_{j, j \neq i} |f_i(s)g_{ii}^{-1}(s)g_{ij}(s)| < 1. \quad (\text{B.15})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j, j \neq i} |f_i(s)||g_{ii}^{-1}(s)||g_{ij}(s)| < 1, \quad \text{pour } i = 1, \dots, m. \quad (\text{B.16})$$

En remplaçant $|g_{ii}^{-1}(s)|$ donné par (B.9) dans (B.16), on aura :

$$|f_i(s)||g_{ii}(s)|^{-1} \sum_{j, j \neq i} |g_{ij}(s)| < 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{B.17})$$

$$\Leftrightarrow |f_i(j\omega)| < f_{i,i}^*(j\omega) = \frac{|g_{ii}(j\omega)|}{\sum_{j, j \neq i} |g_{ij}(j\omega)|}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{B.18})$$

CQFD

Démonstration des expressions de $I_{s_1 \rightarrow s_2}(s)$ et $I_{s_2 \rightarrow s_1}(s)$

La méthode de décomposition en deux sous-systèmes carrées exposée dans le paragraphe 3.2.3 du chapitre 3, repose sur l'utilisation de la méthode de la Matrice des Gains Relatifs Dynamique (RDGA) pour analyser les interactions entre les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{22}(s)$.

D'après la définition (2.20), la RDGA correspondante au système $\hat{G}(s)$ donné par (3.32) est :

$$\text{RDGA} = \hat{G}(s) \cdot * \left[\hat{G}^{-1}(s) \right]^T, \quad (\text{C.1})$$

la substitution de $\hat{G}(s)$ par la décomposition (3.32) dans (C.1) donne :

$$\text{RDGA} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot * \left(\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}^{-1} \right)^T. \quad (\text{C.2})$$

On pose :

- $X(s) = G_{22}(s) - G_{21}(s)G_{11}^{-1}(s)G_{12}(s)$.
- $Y(s) = G_{11}(s) - G_{12}(s)G_{22}^{-1}(s)G_{21}(s)$.

En considérant l'inverse d'une matrice en bloc présentée dans l'annexe A, les trois cas possibles pour $\hat{G}^{-1}(s)$ sont :

1. Si $G_{11}^{-1}(s)$ et $X^{-1}(s)$ existes, et d'après l'inverse d'une matrice en bloc (voir annexe A) l'expression (C.2) devient :

$$\text{RDGA} = \hat{G}(s) \cdot * \left(\begin{bmatrix} G_{11}^{-1}(s) + G_{11}^{-1}(s)G_{12}(s)X^{-1}(s) & G_{21}(s)G_{11}^{-1}(s) - G_{11}^{-1}(s)G_{12}(s)X^{-1}(s) \\ -X^{-1}(s)G_{21}(s)G_{11}^{-1}(s) & X^{-1}(s) \end{bmatrix} \right)^T. \quad (\text{C.3})$$

D'où :

RDGA =

$$\begin{bmatrix} G_{11}(s) \cdot * \left(G_{11}^{-1}(s) + G_{11}^{-1}(s) G_{12}(s) X^{-1}(s) G_{21}(s) G_{11}^{-1}(s) \right)^T & G_{12}(s) \cdot * \left(-X^{-1}(s) G_{21}(s) G_{11}^{-1}(s) \right)^T \\ G_{21}(s) \cdot * \left(-G_{11}^{-1}(s) G_{12}(s) X^{-1}(s) \right)^T & G_{22} \cdot * \left(X^{-1}(s) \right)^T \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

En se basant sur l'interprétation de la **RDGA**, il en résulte que les éléments hors diagonale de **RDGA** caractérisent les interactions existantes entre les deux sous-systèmes $G_{11}(s)$ et $G_{12}(s)$ considérés. Les éléments hors diagonale de la **RDGA** (C.4) sont les expressions de $I_{s_1 \rightarrow s_2}(s)$ et de $I_{s_2 \rightarrow s_1}(s)$ données par les relations (3.33) et (3.36) respectivement.

2. Si maintenant $G_{22}^{-1}(s)$ et $Y^{-1}(s)$ existes, et en considérant toujours l'inverse d'une matrice en blocs l'expression (C.2) s'écrit :

$$\text{RDGA} = \hat{G}(s) \cdot * \left(\begin{bmatrix} Y^{-1}(s) & -Y^{-1}(s) G_{12}(s) G_{22}^{-1}(s) \\ -G_{22}^{-1}(s) G_{21}(s) Y^{-1}(s) & G_{22}^{-1}(s) + G_{22}^{-1}(s) G_{21}(s) Y^{-1}(s) G_{12}(s) G_{22}^{-1}(s) \end{bmatrix} \right)^T \quad (C.5)$$

ce qui donne après calcul la Matrice des Gains Relatifs Dynamique suivante :

RDGA =

$$\begin{bmatrix} G_{11}(s) \cdot * \left(Y^{-1}(s) \right)^T & G_{12}(s) \cdot * \left(-G_{22}^{-1}(s) G_{21}(s) Y^{-1}(s) \right)^T \\ G_{21}(s) \cdot * \left(-Y^{-1}(s) G_{12}(s) G_{22}^{-1}(s) \right)^T & G_{22}(s) \cdot * \left(G_{22}^{-1}(s) + G_{22}^{-1}(s) G_{21}(s) Y^{-1}(s) G_{12}(s) G_{22}^{-1}(s) \right)^T \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

De cette dernière expression de la **RDGA**, on obtient les relations (3.34) et (3.37) correspondantes aux éléments hors diagonale de (C.6) qui sont respectivement les expressions de $I_{s_1 \rightarrow s_2}(s)$ et $I_{s_2 \rightarrow s_1}(s)$.

3. Dans le cas où $G_{11}^{-1}(s)$, $G_{22}^{-1}(s)$, $X^{-1}(s)$ et $Y^{-1}(s)$ existes, l'expression (C.2) peut s'écrire :

$$\text{RDGA} = \hat{G}(s) \cdot * \left(\begin{bmatrix} Y^{-1}(s) & -G_{11}^{-1}(s) G_{12}(s) X^{-1}(s) \\ -X^{-1}(s) G_{21}(s) G_{11}^{-1}(s) & X^{-1}(s) \end{bmatrix} \right)^T \quad (C.7)$$

Ou

$$\text{RDGA} = \hat{G}(s) \cdot * \left(\begin{bmatrix} Y^{-1}(s) & -Y^{-1}(s) G_{12}(s) G_{22}^{-1}(s) \\ -G_{22}^{-1}(s) G_{21}(s) Y^{-1}(s) & X^{-1}(s) \end{bmatrix} \right)^T \quad (C.8)$$

le calcul donne pour chacune des expressions (C.7) et (C.8) respectivement :

$$\text{RDGA} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) \cdot *(Y^{-1}(s))^T & G_{12}(s) \cdot *(-X^{-1}(s) G_{21}(s) G_{11}^{-1}(s))^T \\ G_{21}(s) \cdot *(-G_{11}^{-1}(s) G_{12}(s) X^{-1}(s))^T & G_{22}(s) \cdot *(X^{-1}(s))^T \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

et

$$\text{RDGA} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) \cdot *(Y^{-1}(s))^T & G_{12}(s) \cdot *(-G_{22}^{-1}(s) G_{21}(s) Y^{-1}(s))^T \\ G_{21}(s) \cdot *(-Y^{-1}(s) G_{12}(s) G_{22}^{-1}(s))^T & G_{22}(s) \cdot *(X^{-1}(s))^T \end{bmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Dans ce dernier cas, les deux expressions (C.9) et (C.10) donnent la même **RDGA**. Les expressions de $I_{s_1 \rightarrow s_2}(s)$ et $I_{s_2 \rightarrow s_1}(s)$ données par les relations (3.35) et (3.38) sont respectivement les éléments hors diagonale de la **RDGA** (C.9) et (C.10).

Synthèse d'un correcteur PID pour un système d'ordre élevé :

Méthode de A. J. ISSAKSSON et S. F. GRAEBE

D.1 Principe

Pour tous les modèles de premier et de deuxième ordre, la structure à modèle interne est équivalente à un régulateur PID classique [17]. Cette approche est donc un moyen d'obtenir des réglages PID pour des systèmes d'ordre élevé. En s'appuyant sur ce résultat, la méthode proposée par A. J. Issaksson et S. F. Graebe consiste à concevoir un régulateur IMC pour le modèle réduit du système, puis l'utiliser pour le réglage du système initial [26].

D.2 Méthode

La synthèse d'un régulateur pour un système d'ordre élevé donné sous forme d'une fonction de transfert $g(s)$ se réalise en deux étapes [26] :

- Étape 1.* Rechercher un modèle réduit du système $g(s)$ soit $g_r(s)$. Le modèle réduit $g_r(s)$ doit être valable dans la bande de fréquences concernée par le problème (voir remarque D.1).
- Étape 2.* Synthèse d'un régulateur IMC pour le système réduit $g_r(s)$ trouvé en suivant la méthodologie décrite dans le paragraphe 2.4.1.1.7.2. La fonction de transfert du régulateur est :

$$G_c(s) = \frac{f(s)g_r^{-1}(s)}{1 - f(s)g_{r+}(s)}. \quad (\text{D.1})$$

Remarque D.1

En utilisant le régulateur IMC (D.1), la fonction de transfert du système en boucle fermée est :

$$\frac{y(s)}{c(s)} = \frac{f(s)g_r^{-1}(s)g(s)}{1 + f(s)g_r^{-1}(s)\Delta g(s)}. \quad (\text{D.2})$$

Où :

$\Delta g(s) = g(s) - g_r(s)$: est l'erreur du modèle.

$c(s)$: est la consigne de $y(s)$.

Un très bon réglage est obtenu si :

$$|g_r^{-1}(j\omega)\Delta g(j\omega)| \approx 0, \quad (\text{D.3})$$

et

$$|g_r^{-1}(j\omega)g(j\omega)| \approx 1. \quad (\text{D.4})$$

Considérons que $|g_r^{-1}(j\omega)g(j\omega)| = 1$, la condition (D.3) est vérifiée si :

$$g_r(j\omega) \approx g(j\omega). \quad (\text{D.5})$$

Ainsi, un correcteur (D.1) assurant de très bonnes performances pour le système $g(s)$ est obtenu en utilisant un modèle réduit $g_r(s)$ valable dans les basses fréquences avec une bande passante la plus large possible [26].

D.3 Simplification de modèles

Une méthode permettant de simplifier le système $g(s)$ a été proposée par A. J. Issaksson et S. F. Graebe dont le principe est le suivant [26] :

Considérons le système donné par la fonction de transfert suivante :

$$g(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (\text{D.6})$$

la réduction de $g(s)$ s'effectue pour le numérateur et le dénominateur séparément en suivant les trois étapes suivantes :

Étape 1. Déterminer les polynômes $N_{r1}(s)$ et $D_{r1}(s)$ en retenant seulement les pôles dominants de $N(s)$ et de $D(s)$ respectivement. Si $N(s)$ et $D(s)$ possèdent des racines complexes, dans ce cas :

- Lorsqu'on réduit à un élément de premier ordre, si le pôle dominant est complexe, on retient la partie réelle du pôle.
- Lorsqu'on réduit à un système de deuxième ordre, si le pôle dominant est réel et suivi d'une paire de pôles complexes, c'est-à-dire :

$$D(s) = (\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s + 2\zeta\tau_2 + 1), \quad \tau_1 > \tau_2, \quad (\text{D.7})$$

alors on prend :

$$D_{r1}(s) = \begin{cases} \tau_2^2 s + 2\xi\tau_2 + 1 & \text{si } \tau_1 < \frac{\tau_2}{2\xi}, \\ (\tau_1 s + 1)(\tau_2 + 1) & \text{si } \tau_1 > \frac{\tau_2}{2\xi}. \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

Étape 2. Déterminer de la même manière les polynômes $N_{r2}(s)$ et $D_{r2}(s)$ en retenant les coefficients correspondant aux monômes s^p (p est positif) de $N(s)$ et $D(s)$ respectivement dont le degré p est faible.

Étape 3. Le modèle réduit :

$$g_r(s) = \frac{N_r(s)}{D_r(s)}, \quad (\text{D.9})$$

est obtenu comme suit :

$$N_r(s) = \frac{1}{2}(N_{r1}(s) + N_{r2}(s)), \quad (\text{D.10})$$

$$D_r(s) = \frac{1}{2}(D_{r1}(s) + D_{r2}(s)). \quad (\text{D.11})$$

Remarque D.2

Plusieurs méthodes de simplification de modèles permettant d'avoir un modèle réduit valable dans les basses fréquences peuvent être trouvées dans la littérature [8], [49], on peut citer :

Pour les méthodes utilisant la fonction de transfert : approximation par les moments, approximants de Padé, méthode de Routh, méthode de réduction modale.

Pour les méthodes utilisant la représentation d'état : méthode de symétrisation interne, méthode d'agrégation, méthode des perturbations singulières et méthode des perturbations régulières.

D.4 Exemple d'application de la méthode A. J. Issaksson et S. F. Graebe

Illustrons la méthodologie de synthèse en reprenant l'exemple d'un système du premier ordre avec retard considéré par A. J. Issaksson et S. F. Graebe suivant [26] :

$$g(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{Ts + 1}, \quad T > \tau. \quad (\text{D.12})$$

La première étape consiste à éliminer le temps de retard de cette fonction de transfert avec une approximation de Padé d'ordre un :

$$g(s) = \frac{K \left(1 - \frac{\tau}{2} s\right)}{(1 + Ts) \left(1 + \frac{\tau}{2} s\right)}. \quad (\text{D.13})$$

1. Simplification de $g(s)$

On se propose de déterminer un modèle simplifié d'ordre un pour le système $g(s)$ en appliquant la méthode de réduction présentée décrite dans le paragraphe précédent.

On a :

$$g(s) = \frac{K \left(1 - \frac{\tau}{2} s\right)}{(1 + Ts) \left(1 + \frac{\tau}{2} s\right)} = \frac{K \left(1 - \frac{\tau}{2} s\right)}{\frac{\tau T}{2} s^2 + \left(\frac{\tau}{2} + T\right) s + 1}. \quad (\text{D.14})$$

La réduction du numérateur à l'ordre zéro et du dénominateur à l'ordre un donne :

$$N_{r1}(s) = N_{r2}(s) = K, \quad (\text{D.15})$$

$$D_{r1}(s) = Ts + 1, \quad D_{r2}(s) = \left(\frac{\tau}{2} + T\right) s + 1, \quad (\text{D.16})$$

c'est-à-dire :

$$g_r(s) = \frac{K}{\left(\frac{\tau}{2} + T\right) s + 1}, \quad (\text{D.17})$$

cette fonction peut être factorisée (commande par modèle interne) comme suit :

$$g_r(s) = g_{r-}(s) g_{r+}(s), \quad (\text{D.18})$$

avec :

$$g_{r+}(s) = 1 \text{ et } g_{r-}(s) = g_r(s). \quad (\text{D.19})$$

2. Détermination du correcteur $G_c(s)$ pour le système $g(s)$

En choisissant un filtre de d'ordre un ($k = 1$) donné par la relation (2.40) :

$$f(s) = \frac{1}{\varepsilon_f s + 1}, \quad (\text{D.20})$$

alors, la fonction de transfert du système $g(s)$ en boucle fermée est :

$$\frac{G_c(s)g_r(s)}{1 + G_c(s)g_r(s)} = \frac{1}{\varepsilon_f s + 1}, \quad (\text{D.21})$$

à partir de (D.19) ou en utilisant la relation (D.1), il est possible de calculer le correcteur classique équivalent, ce qui donne :

$$G_c(s) = \frac{f(s)g_r^{-1}(s)}{1 - f(s)} = \frac{\left(\frac{\tau}{4} + T\right)s + 1}{K\varepsilon_f s}, \quad (\text{D.22})$$

on peut identifier cette fonction de transfert avec celle d'un régulateur PI :

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (\text{D.23})$$

et on obtient les réglages PI suivant :

$$K_c = \frac{\frac{\tau}{4} + T}{K\varepsilon_f}, \quad (\text{D.24})$$

$$T_i = \frac{\tau}{4} + T. \quad (\text{D.25})$$



RÉFÉRENCES

*“Tout professeur en puissance est un facilitateur,
une personne qui met les choses sur table,
montre aux gens combien c'est excitant et merveilleux
et leur dit de se servir.”*

LÉO BUSCAGLIA

- [1] AGAMENNONI, O. E., FIGUEROA J. L., BARTON G. W. and ROMAGNOLI J. A., "Advanced Controller Design for a Distillation Column". *Int. J. Control*, Vol. 59, No. 3, 1994, pp. 817–839.
- [2] ARKUN, Y., "Dynamic Block Relative Gain and its Connection with the Performance and Stability of Decentralized Control Structures". *Int. J. Control*, Vol. 46, No. 4, 1987, pp. 1187–1193.
- [3] ARKUN, Y., "Relative Sensitivity: A Dynamic Closed-Loop Interaction Measure and Design Tool". *AIChE Journal*, Vol. 34, No. 4, April 1988, pp. 672–675.
- [4] ARULALAN, G. R. and DESHPANDE P. B., "New Algorithm for Multivariable Control". *Hydrocarbon Processing*, June 1986, pp. 51–54.
- [5] ASMAR, B. N., WILSON J. A. and JONES W. E., "Interaction Analysis of a Two-Stage refrigeration Control System". *IchemE, the 1997 jubilee research event*.
- [6] BEQUETTE, B. W. and EDGAR T. F., "A Dynamic Interaction Index Based on Set Point Transmittance". *AIChE Journal*, Vol. 34, No. 5, May 1988, pp. 849–852.
- [7] BORNE, P., DAUPHIN-TANGUY G., RICHARD J. P., ROTELLA F. et ZAMBETTAKIS I., "Commande et Optimisation des Processus". Editions Technip, 1990.
- [8] BORNE, P., DAUPHIN-TANGUY G., RICHARD J. P., ROTELLA F. et ZAMBETTAKIS I., "Modélisation et Identification des Processus". Tome 1, Editions Technip, 1992.
- [9] BORNE, P., DAUPHIN-TANGUY G., RICHARD J. P., ROTELLA F. et ZAMBETTAKIS I., "Modélisation et Identification des Processus". Tome 2, Editions Technip, 1992.
- [10] BORNE, P., DAUPHIN-TANGUY G., RICHARD J. P., ROTELLA F. et ZAMBETTAKIS I., "Analyse et Régulation des Processus Industriels". Tome 1, Editions Technip, 1993.
- [11] BRISTOL, E. H., "On a New Measure of Interaction for Multivariable Process Control". *IEEE Trans. Auto. Control*, Vol. 11, 1966, pp. 133–134.
- [12] BRISTOL, E. H., "Industrial Needs and Requirements for Multivariable Control". *AIChE Symposium Series*, Vol. 159, No. 72, pp. 88–98.
- [13] BRONSON, R. "Calcul Matriciel". *Série Schaum*, Editions McGaw-Hill, 1994.
- [14] CHEN, J., FREUDENBERG J. S. and NETT C. N., "The Role of The Condition Number and The Relative Gain Array in Robustness Analysis". *Automatica*, Vol. 30, No. 6, 1994, pp. 1029–1035.

- [15] ECONOMOU, C. G. and MORARI M., "Internal Model Control. 6. Multiloop Design". *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev*, Vol. 25, No. 2, 1986, pp. 411–419.
- [16] EDGAR, T. F., "Status of Design Methods for Multivariable Control". *AIChE Symposium Series*, Vol. 159, No. 72, pp. 99–111.
- [17] FLAUS, J. M., "Régulation Industrielle : Régulateurs PID, prédictifs et flous". Editions Hermès, 1994.
- [18] FOSSARD, A. et GUEGUEN C., "Commande des Systèmes Multidimensionnels". Editions Dunod, 1972.
- [19] FOSSARD, A., "Systèmes Multientées-Multisorties". *Technique de l'ingénieur, traité Mesures et Contrôle*, No. 139, R 7 220, 1997.
- [20] FREUDENBERG, J. and MIDDLETON R., "Properties of Single Input, Two Output Feedback Systems". *Int. J. Control*, Vol. 72, No. 16, 1999, pp. 1446–1465.
- [21] FRIEDLY, J. C., "Use of the Bristol Array in Designing Noninteracting Control Loops. A Limitation and Extension". *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev*, Vol. 23, No. 3, 1984, pp. 469–472.
- [22] GAGNEPAIN, J. P. and SEBORG D. E., "Analysis of Process Interactions with Applications to Multiloop Control System Design". *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev*, Vol. 21, No. 1, 1982, pp. 5–11.
- [23] GROSIDIDIER, P. and MORARI M., "Interaction Measures for Systems Under Decentralized Control". *Automatica*, Vol. 22, No. 3, 1986, pp. 309–319.
- [24] GROSIDIDIER, P. and MORARI M., "The μ Interaction Measure". *Ind. Eng. Chem. Res*, Vol. 26, No. 6, 1987, pp. 1193–1202.
- [25] HUANG, H.P., OHSHIMA M. and HASHIMOTO I., "Dynamic Interaction and Multiloop Control System Design". *J. Proc. Cont.* Vol. 4, No. 1, 1994, pp. 15–27.
- [26] ISAKSSON, A. J. and GRAEBE S. F., "Analytical PID Parameter Expressions for Higher Order Systems". *Automatica*, Vol. 35, No. 6, June 1999, pp. 1121–1130.
- [27] JENSEN, N., FISHER D. G. and SHAH S. L., "Interaction Analysis in Multivariable Control Systems". *AIChE Journal*. Vol. 32, No. 6, June 1986, pp. 959–969.

- [28] JOHNSTON, R. D. and BARTON G. W. "Quantification of Interactions in Control Systems". *The Twelfth Australian Chemical Engineering Conference*, Melbourne, 26–29 August 1984, pp. 735–742.
- [29] JOHNSTON, R. D. and BARTON G. W., "Structural Interaction Analysis". *Int. J. control*, Vol. 41, 1985, pp. 1005–1013.
- [30] JOHNSTON, R. D. "Steady-State Closed-Loop Structural Interaction Analysis". *Int. J. Control*. Vol. 52, No. 6, 1990, pp. 1351–1369.
- [31] KARIMI, M., TAHANI V. and GAZOR S., "Matrix Interpolation: Some Control Applications". *Int. J. control*, Vol. 72, No. 2, 1999, pp. 174–192.
- [32] KHELASSI, A., "Control Loop Interaction in Process Systems". *P. R. Symposium* 10–11 April 1990, University of Nottingham, England.
- [33] KHELASSI, A., "Analysis and Asservissement of Interaction in Process Control Systems". Ph.D., University of Nottingham, England, 1991.
- [34] KHELASSI, A. et MAIDI A., "Méthodologie de Synthèse d'un Système de Commande Multivariable Basée sur un Critère d'Analyse des Interactions". *Symposium International sur les Hydrocarbures et la Chimie*, Université de Boumerdès du 30 Mai au 01 Juin 2000.
- [35] KHELASSI, A. et MAIDI A. "Analyse des Interactions dans un Système à Grande Échelle : Méthode de Décomposition en Sous-Systèmes à Dominance Diagonale". *First Instrumentation and Measurement in Petroleum Applications Conférence (IMPAC-2000)*, IAP de Boumerdès (Algeria), October 23–24, 2000, pp. 218 – 223.
- [36] KHELASSI, A. and MAIDI A., "Fuzzy Multiloop Control of a Multivariable System". *First International conference on Electrical Engineering (ICEE 2000)*, University of Boumerdès (Algeria), November 4–6, 2000.
- [37] KHELASSI, A., MAIDI A., BENHALLA A. and WILSON J. A., " Assessment of Interaction and Control of a Two-Stage Refrigeration System ". *Arab – African Conference for Refrigeration and Air Conditioning*, Cairo, Egypt, 29 April – 1 May 2001.
- [38] KHELASSI, A. and MAIDI A., "A General Method to Control Highly Interactive Systems". *IFAC Symposium on System Structure and Control*, 29 – 31 August 2001, Prague, Czech Republic.

- [39] LUYBEN, W. L., "Simple Method for Tuning SISO Controllers in Multivariable Systems". *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, Vol. 25, No. 3, 1986, pp. 654–660.
- [40] MAIDI, A. et KHELASSI A., "Commande Directe Boucle par Boucle d'un Système Multivariable Basée sur l'Analyse des Interactions". *1^{er} Séminaire National sur l'Automatisation et Electrification des Procédés*, Université de Boumerdes 07–08 Décembre 1999, pp.63–70.
- [41] MARLIN, T. E. "Process Control, Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance". McGraw-Hill International Editions, 1995.
- [42] MCAVOY, T. J., "Interaction Analysis". Instrument Society of America, 1983.
- [43] MORARI, A. and STÉPHANOPOULOS, G. "Structural Aspects and Synthesis of Alternative Feasible Control Schemes". Part I, *AIChE Journal*, Vol. 26, No. 2, March 1980, pp. 232–245.
- [44] OUSTALOUP, A., "La Robustesse, Analyse et Synthèse de Commandes Robustes". Editions Hermès, 1994.
- [45] POMERLEAU, A., "La Commande des Procédés Industriels: Une approche fréquentielle unifiée". Editions Hermès, 1997.
- [46] ROSENBROCK, H. H., "Computer Aided Control System Design". Academic Press, New York, 1974.
- [47] ROTELLA, F. et BORNE P., "Théorie et Pratique du Calcul Matriciel". Editions Technip, 1995.
- [48] SIARRY, P., "Automatique de Base". Editions Berti, 1993.
- [49] SKOGESTAD, S. and POSTLETHWAITE I., "Multivariable Feedback Control, Analysis and Design". John Wiley & Sons, 1998.
- [50] TUNG, L. S. and EDGAR T. F., "Analysis of Control-Output Interactions in Dynamic Systems". *AIChE Journal*, Vol. 27, No. 4, July 1981, pp. 690–693.
- [51] WALLER, K. V., "Distillation Control System Structures". *IFAC control of distillation columns and chemicals reactors*, Bournemouth, UK, 1986, pp. 1–10.
- [52] WELLER, S. R. and GOODWIN G. C., "Controller Design for Partial Decoupling of Linear Multivariable Systems". *Int. J. Control*, Vol. 63, No. 3, 1996, pp. 535–556.

- [53] WITCHER, M. F. and MCAVOY T. J., "Interacting Control Systems: Steady State and Dynamic Measurement of Interaction". *ISA Transactions*, Vol. 16, No. 3, 1977, pp. 35-41.

ARTICLES SOUMIS :

- [1] "Novel Interaction Measure in Large-Scale Systems". 9th *IFAC/IFORS/IMACS/IFIP/Symposium on Large-Scale Systems: Theory and Applications, July 18-20, 2001, Bucharest, Romania.*
- [2] "Commande Multiboucle: Une Nouvelle Approche pour la Détermination de la Configuration de Commande". *Journal Européen des Systèmes Automatisés, Editions Hermès, Paris.*

ملخص — إن معظم الأنظمة الصناعية متعددة المتغيرات وتتميز بظاهرة التداخل أو الترابط، هذه الظاهرة تطرح إشكالية حقيقية عند استخلاص نظام تحكم متماسك يأخذ بعين الاعتبار المتطلبات التطبيقية، مثل تطور مقادير المخرج، مستقلة عن بعضها البعض. يوجد أساسا تركيبين للتحكم في الأنظمة المتعددة المتغيرات: التحكم متعدد الشبكات و التحكم المتعدد المتغيرات.

التحكم المتعدد الشبكات يتمثل أساسا في استخدام أنظمة تحكم أحادية المتغيرات من أجل التحكم في نظام صناعي متعدد المتغيرات. هذه التقنية متميزة الاستعمال في الأوساط الصناعية لأنها توفر إيجابيات مقارنة بالتحكم المتعدد المتغيرات، متمثلة في سهولتها، و تركيبها على المعدات الصناعية أكثر سرعة و مرونة. إن استخلاص نظام تحكم متعدد الشبكات يتم عبر مرحلتين:

- تعيين احسن تركيبية تحكم من بين مجموعة التركيبات الممكنة.
- اختيار إستراتيجية التحكم لكل شبكة و تعيين معايير كل نظام تحكم.

إنه لا جدري بالذكر أن نشير أن مرحلة تعيين احسن تركيبية تحكم هي أهم مرحلة في استخلاص نظام تحكم متعدد الشبكات. بناء عليه، إن تركيبية التحكم الملائمة لنظام تحكم متعدد الشبكات تعرف بالأزواج (مدخل - مخرج) التي تضمن: استقرار شبكات التحكم و مستوى تداخل بين الشبكات المكونة للتركيبية المعترية في أدنى مستوى. هذه التركيبية نتحصل عليها باستعمال طريقة معالجة التدخلات في الأنظمة المتعدد المتغيرات .

لهذا الغرض تم اقتراح و تطوير عدّة طرق لبلوغ الأهداف المذكورة أعلاه. إلا أن هذه الطرق تواجه بعض العقبات المتمثلة في حجم الحساب المطلوب خاصة الحساب الرمزي، و تتميز بخوارزمية معقدة صعبة البرمجة. و هذا راجع أساسا لاستخدامها لوسائل تمثيل تساهم في تعقيد و تصعيب معالجة التدخلات و تعيين أحسن تركيبية تحكم خاصة في حالة الأنظمة الكبرى كما هو الحال لمعظم الأنظمة الصناعية.

في عملنا هذا، قمنا بعرض مجموعة الأعمال المقترحة في ميدان معالجة التدخلات. الهدف الأساسي من عملنا هذا، يتمثل في اقتراح طرقا تسمح بتسهيل و تبسيط معالجة التدخلات و تعيين أحسن تركيبية تحكم في حالة الأنظمة الكبرى. لهذا الغرض اقترحتنا فكرة تقسيم النظام إلى مجموعة أنظمة تحتية حيث نبدأ بمعالجة التدخلات بين الأنظمة التحتية أولا، ثم نتقل إلى معالجة التدخلات في كل نظام تحتي على حدا.

انطلاقا من هذه الفكرة قمنا بتطوير طريقتين، تعتمد الأولى على تقسيم النظام إلى مجموعة أنظمة تحتية ذات السيطرة القطرية ، و تعتمد الثانية على تقسيم النظام إلى نظامين تحتيين مربعين.

أما فيما يخص تعيين احسن تركيبية تحكم، اقترحتنا طريقتين: الأولى تعتمد على شرط استقرار شبكات التحكم و نتائج معالجة التدخلات المحصلة عليها باستعمال إحدى طرق معالجة التدخلات التي اقترحتنا لإنشاء منحني التوجه الذي يمكننا من تعيين التركيبية الملائمة. الطريقة الثانية تستغل مميزات المسلك ذات التأثير الشديد.

بهدف تطبيق التحكم المتعدد الشبكات للأنظمة ذات التدخلات الشديدة و الأنظمة الغير مربعة، اقترحتنا آلية تحكم تتمثل في إدخال نظام تحكم على التسلسل مع النظام الصناعي يعمل على تخفيض مستوى التدخلات بين متغيرات التركيبية المختارة، و استخلاص النظام المدرج يركز على استخدام طريقة معالجة التدخلات.

كل هذه الطرق المقترحة لمعالجة التدخلات في الأنظمة الكبرى، لتعيين احسن تركيبية تحكم و التحكم المتعدد الشبكات في حالة الأنظمة الشديدة التدخلات تم تطبيقها بنجاح على نماذج أنظمة صناعية مقتبسة من أعمال بحث صادرة في هذا المجال.

كلمات مفتاحيه — الأنظمة المتعدد المتغيرات، التحكم المتعدد الشبكات، معالجة التدخلات، تركيبية تحكم، التقسيم.

Abstract — In recent years there has been considerable interest in developing process control strategies for multivariable control systems. Multivariable control involves the objective of maintaining several controlled variables at their independent set points. However, in these systems new characteristics due to *interaction* must be considered. Interaction results from process relationships that cause a manipulated variable to affect more than one controlled variable. Despite its importance, interaction analysis gives a full understanding of process behavior.

There are two basic multivariable control approaches. The first is a straightforward extension of single-loop control to many controlled variables in a single process. This is termed *multiloop control* and has been applied with success for many decades. The second main category is *coordinated or centralized control*, in which a single control algorithm uses all measurements to calculate, all manipulated variables simultaneously.

The traditional industrial control strategy for multivariable control problems is to use a multiloop control scheme consisting of several conventional PI or PID controllers. The design of the multiloop control system can be broadly divided into two stages as follows:

1. Selection of controlled and manipulated variables to be paired on one-to-one basis; and
2. Selection of control law and tuning controllers to provide an acceptable level of performance.

In this approach, the key decision is to select the best pairing of controlled and manipulated variables. During the last three decades, a number of investigations have been carried out and various methods are proposed for determining the best controller pairing from among the large number of possible pairings. But then, in spite of the efficiency of the proposed methods, the application of these last for a large-scale systems ($m \geq 4$) pose a problem of calculation. Most of the developed methods require a representation tools (flow graph, frequency representations) susceptible to complicate the interaction analysis and the determination of the best control configuration. Besides, a very complicate algorithm characterizes these methods, which is difficult to program and require an enormous symbolic calculation. The other problem is the selection of the best control configuration by the utilization of methods that are revealed most rigorous. Since the choice of this last passes by the comparison of the obtained results by applying the method for all possible candidates control configuration, in order to determine the best control configuration, therefore $m!$ combinations to compare, which is not easy to deal with.

In this thesis, we aim to make the state of the art on the interaction analysis in multivariable systems. A synthesis concretizing research work presented in the domain of interaction analysis regrouping different developed methods is presented. The main objective of our work consists in proposing methods allowing simplification of the analysis of interactions in large systems and the determination of the control configuration, to overcome calculation problem. The other objective aimed by our work, consists to propose a multiloop control structure for systems that don't present an adequate control configuration. The proposed method can be applied even for no square multivariable systems.

In order to simplify and facilitate the analysis of interactions in large-scale systems, we have proposed two methods based on the decomposition of the system into subsystems. The first method consists on the decomposition of the system into *diagonally dominant subsystems*. Then, the Direct Nyquist Array has been used jointly with the Internal Model Control interaction method to analyse the interactions that occur between the subsystems. The second method is to decompose the system into *two square subsystems* with the condition that one of these subsystems must be *invertible*. The calculation of the Relative Dynamic Gains Array using the properties of the inverse matrix of the partitioned system permit to analyse directly the interactions between the two obtained subsystems.

The proposed methods have been used in conjunction with *the stability condition* given by Bristol's Array (RGA) to construct a *flow graph characterizing the interactions* that permit to predict the correct and the best controller pairing. The second method uses the RGA jointly with the *dominant process interaction characteristics* to develop a procedure to select the best control configuration. The proposed method can be applied even for no square systems, where there are more manipulated variables than controlled variables and requires less calculation compared to the existing methods. All proposed methods have been applied with success on physical processes taken from the literature. By comparing the results obtained by using the proposed method with those that utilise other established methods, it is shown that the former gives the same results.

Concerning the multiloop control scheme of *interactive multivariable* systems, we have proposed a control strategy to apply the multiloop control technique for these cases. The proposed strategy introduces a *compensator in cascade with the system* that reduces the interactions that occur between the loops of the selected control configuration. The *compensator is designed by using an interaction analysis method*, which permits a reduction of the undesirable interactions. Using this control strategy, a multiloop control can be applied for no square multivariable system. The design of the compensator can be done *graphically or analytically*; this depends on the interaction analysis method that is used. Simulation examples show the effectiveness and robustness of the proposed control strategy.

Keywords — Multivariable systems, multiloop control, interaction analysis, control configuration, decomposition.