REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université de M'hamed Bougara-Boumerdès

Faculté des Sciences–Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master** en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par

Ben tiba Zineb

Résolution d'un système non linéaire de problèmes aux limites du second ordre

Soutenu le 08 Juillet 2023 devant le jury composé de :

S. Benakmoum	**MCB**	**Univ.M.B Boumerdes**	**Présidente**
S. Mechrouk	**MCA**	**Univ.M.B Boumerdes**	**Examinatrice**
N. Meskine	**MCB**	**Univ.M.B Boumerdes**	**Encadreur**
D. Seba	**Professeur**	**Univ.M.B Boumerdes**	**Co-Encadreur**

Année scholaire : 2022/2023

*J*e dedie

J'ai le grand plaisir de dédier ce travail .

À ma très chère mère ***Fatma Zohra***, qui me donne toujours l'espoir de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi .

À mon très cher père ***Ahmed***, pour ces encouragements, son soutien, surtout pour son amour et son sacrifice afin que rien n'entrave le déroulement de mes études.

À mes frères ***Younes*** et ***Kamel***, et à ma sœur ***Maroua*** qui n'ont pas cessée de me conseiller et encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège, leurs offre la chance et le bonheur.

À ma grande famille et spécialement ***ma grande mère*** et ma cousine ***Tasnim***, que Dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

À mes meilleurs amis ***Halima*** et ***Lamia***, je vous souhaite du succès.

À mes amis ***Imen, Asma, Maïssa, Loubna, Sara, Hind, Amira, Yousra, Yahia, abdelhak, Douaa, Hadjer, Salsabil, Bouchra, Asma, Meriem, Nour, Khawla, Hadil, Ayhem, Chaima*** ; Bon courage dans vos études.

Et merci pour tout qui m'aide dans ce mémoire.

Remerciement

En tant que croyant, je crois fermement que tout succès et accomplissement proviennent de la volonté d'Allah. Je lui suis reconnaissant de m'avoir guidé, inspiré et soutenu à chaque étape de ce travail. Sa lumière et Sa sagesse ont illuminé mon chemin et ont été la source de ma force et de ma détermination.

Je profite de cette occasion pour exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de cette thése. Je tiens à remercier chaleureusement mes directeurs de recherche, le ***Dr N. Meskine*** et le ***Professeur D.Seba***, pour leurs précieux conseils tout au long de la réalisation du mémoire.

Mes remerciements vont également aux membres de mon jury ***Dr S. Benakmoum*** et ***Dr S. Mechrouk*** pour avoir consacré leur temps précieux à l'évaluation de mon travail et pour leurs suggestions constructives qui ont amélioré la qualité de ce mémoire.

Je remercie ***Mr Ferrani Yacine***, ***Dr K. Laoubi*** et tous les enseignants de la spécialité ***Analyse Mathématiques*** pour leur soutien académique et administratif.

Table des matières

Notations

1. $\rightarrow$ indique la convergence.

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}$: dérivée partielle.

3. H : espace de Hilbert.

4. $||.||_H$: norme dans l'espace H.

5. $< .,. >_H$: produit scalaire dans l'espace H.

6. $\delta(x)$: fonction de Dirac.

7. $H(x)$: fonction de Heaviside.

8. $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$: espace des fonctions p-intégrables locales sur $\mathbb{R}$ avec la norme $||.||_p$.

9. W_2^m : espace à noyau reproduisant.

10. $R_y(x)$: noyau reproduisant.

11. A^* : opérateur adjoint de A.

12. $L(H1, H2)$: ensemble des opérateurs linéaires bornés défini de $H1$ dans $H2$.

13. $u = (u_1, u_2)^T \in W_2^m \bigoplus W_2^m$ c'est à dire $u_1 \in W_2^m$ *et* $u_2 \in W_2^m$.

14. $\overline{\psi_{ij}(x)}$ est obtenue par orthogonalisation de Gram-Schmidt de système ψ_{ij}.

15. β_{lk}^{ij} : les coefficients d'orthogonalisation.

Résumé

On considère le système non linéaire de problèmes aux limites du second ordre :

$$\begin{cases} u_1''(x) + a_1(x)u_1'(x) + a_2(x)u_1(x) + a_3(x)u_2''(x) + a_4(x)u_2'(x) + a_5(x)u_2(x) + N_1(u_1,u_2) = f_1(x) \\ 0 \leq x \leq 1 \\ u_1''(x) + b_1(x)u_1'(x) + b_2(x)u_1(x) + b_3(x)u_2''(x) + b_4(x)u_2'(x) + b_5(x)u_2(x) + N_2(u_1,u_2) = f_2(x) \\ 0 \leq x \leq 1 \\ u_1(0) = u_1(1) = 0 \ ; \ u_2(0) = u_2(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où N_1, N_2 sont deux fonctions non linéaires de u_1, u_2 telle que u_1 *et* u_2 *dans* $W_2^3[0,1]$, $f_i - N_i \in W_2^1[0,1],\ i = 1,2$ et $a_j(x), b_j(x)$ sont continues, $j = \{1,2,3,4,5\}$.

D'abord on a transformé le système vers un système matriciel :

$$\begin{cases} Au = f(x) - N(u_1,u_2) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ avec\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

avec A un opérateur linéaire borné.

La méthode du noyau reproduisant est décrite afin d'obtenir la solution analytique pour le problème posé (2).

Les solutions analytiques sont obtenues sous la forme d'une série de fonctions convergente pour des conditions aux limites approchées dans l'espace $W_2^3[0,1]$, tandis que deux fonctions de noyau reproduisant continus sont utilisées tout au long de l'évolution de ce travail. Quelques exemples du noyau sont présentés pour illustrer l'obtention des solutions.

mots clés : Le noyau reproduisant, RKM, l'espace à noyau reproduisant, système non linéaire, résoudre problème non linéaire .

Introduction

Dans l'univers, il existe plusieurs phonèmes qui attendent d'être compris. Pour les comprendre, il faut d'abord les modéliser. Ces phonèmes présentent sous deux formes : problème aux valeurs initiales (IVP) et problème aux limites (BVP). Dans une grande variété de domaines tels que la dynamique des fluides, les circuits électriques, la théorie du contrôle,... etc.

Les systèmes différentiels ordinaires sont des outils importants pour résoudre et étudier les problèmes du monde réel. Une grande variété de phénomènes naturels sont modélisés par des systèmes différentiels ordinaires, ils ont été appliqués à de nombreux problèmes.

Dans ce mémoire on va résoudre le problème intitulé "Résolution d'un système non linéaire de problèmes aux limites du second ordre". Beaucoup des méthodes numériques classiques utilisées ne peuvent pas être appliquées pour les problèmes aux limites du deuxième ordre et la méthode des différences finies peut-être utilisée pour résoudre des problèmes de valeurs aux limites linéaires du deuxième ordre mais elle peut-être difficile de résoudre des problèmes de valeurs aux limites non linéaires. Il existe peu des méthodes valides pour obtenir des solutions de ce problème.

Pour cela, on va utiliser la méthode du noyau reproduisant. La théorie des noyaux reproduisants a été utilisée pour la première fois par "Zaremba" au début du le vingtième siècle, elle a des implémentations significatives dans l'analyse numérique, les équations différentielles, les probabilités, les équations différentielles fractionnaires...etc.

L'établissement initial de la théorie générale du noyau reproduisant a commencé avec les recherches d'Aronszajn et d'Bergman qui ont trouvé que la méthode est très efficace. De nombreux chercheurs ont appliqué cette méthode à plusieurs types des problèmes, par exemple le livre publie par Cui et al [3] sur la théorie du noyau reproduisant qu'est une étude complète.

On a aussi les noyaux reproduisants sont la base de cette méthode pour approcher la solution, cette solution approchée est le terme générale d'une suite de fonction $u_n(x)$ à n termes, ensuite on prouve qu'elle converge vers la solution analytique.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, on rappelle quelques définitions, théorèmes et propriétés. Pour l'utilisation dans les chapitres suivants.

Chapitre 2 : On présente la théorie de l'espace à noyau reproduisant et les noyaux reproduisants.

Chapitre 3 : le dernier chapitre, on étudie la méthode d'implémentation pour résoudre un système non linéaire du deuxième ordre valeur au limite.

On termine ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaire :

Le but de ce chapitre est de faire un court rappel de quelques définitions, théorèmes et propriétés qui nous seront d'une grande utilité dans les chapitres suivants.

1.1 Espaces de Hilbert :

On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel H (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire

Définition 1.1.1. [1] *Un espace de Hilbert réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, associé aux données d'un produit scalaire.*

$$(x, y) \in H \times H \rightarrow < x, y > \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire une application à valeurs réelles :

(i) symétrique, $< x, y > = < y, x >$ *pour tous* x, y *dans* H .

(ii) $< x, x > > 0$ *pour tout* $x \in H$.

(iii) $< x, x > = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

De plus, l'espace vectoriel normé $(H, ||.||)$*, où*

$$||x|| = \sqrt{< x, x >},$$

est un espace complet (c'est-à-dire un espace de Banach).

Définition 1.1.2. *[1] Un espace de Hilbert complexe est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, associé aux données d'un produit scalaire.*

$$(x, y) \in H \times H \to < x, y > \in \mathbb{C},$$

C'est-à-dire :

(i) la symétrie, c'est à dire : $< x, y > = \overline{< y, x >}$ pour tous x, y dans H .

(ii) $< x, x > > 0$ pour tout $x \in H$.

(iii) $< x, x > = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Exemple 1.1.1. *Soit E un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définition positive sur $E \times E$. Un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé espace euclidien. Si $(x, y) \to < x, y >$ est le produit scalaire sur E, la norme euclidienne d'un élément $x \in E$ est :*

$$||x|| = \sqrt{< x, x >}.$$

-Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$:

Si $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors on a $< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ quand $x \neq 0$.

1.2 Orthogonalité, Bases orthonormées, procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

1.2.1 Orthogonalité :

Définition 1.2.1. *[9] Soit deux éléments f et g dans H muni par le produit scalaire $< f, g >$ sont orthogonaux si :*

$$< f, g >_H = 0, \text{ et on écrit } f \perp g.$$

Propriété 1.2.1. *[9] Si $f \perp g$ alors :*

$$||f + g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2.$$

Démonstration. On sait que si $< f, g >_H = 0$ alors $< g, f >_H = 0$, et donc :

$$||f+g||^2 =< f+g, f+g >= ||f||^2 + < f, g >_H + < g, f >_H + ||g||^2.$$

donc

$$||f+g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2.$$

□

Définition 1.2.2. *[9] Soient H un espace de Hilbert, E un sous-ensemble de H et u un vecteur de H. On dit que l'ensemble E et le vecteur u sont orthogonaux dans H si u est orthogonal à tout vecteur de E.*

$$E^* = \{u \in H; < u, v >= 0, \forall v \in E\}.$$

(i.e. l'ensemble E^* formé des vecteurs de H qui sont orthogonaux à tout vecteur de E).

1.2.2 Bases orthonormées :

Définition 1.2.3. *[12] Soient E un espace de Hilbert et $X = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une base de E. La base X est dite orthogonale si :*

$$< u_i, u_j >= 0, \text{ pour tout } i \neq j.$$

La base X est dite orthonormée si :

$$< u_i, u_j >= \delta_{ij}, \text{ pour tout } i, j \leq n.$$

Proposition 1.2.1. *[12] Soient E un espace de Hilbert et $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ est une base orthonormée de E.*

Alors :

$$\forall x \in E, \; x = \sum_{i=1}^{n} < x, u_i > u_i \text{ et } ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} | < x, u_i > |^2.$$

Lemme 1.2.1. *[7] Soit $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ est un système orthonormal dans un espace de Hilbert E et soit $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ est une séquence composée d'un nombre fini d'éléments. Alors $\forall x \in E$,*

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\|^2 = ||x||^2 - \sum_{n=1}^{N} | < x, x_n > |^2 + \sum_{n=1}^{N} |a_n - < x, x_n > |^2.$$

Corollaire 1.2.1. *[7]*

1- $\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.$

2- $\left\|x - \sum_{n=1}^{N} < x, x_n > x_n\right\|^2 = ||x||^2 - \sum_{n=1}^{N} | < x, x_n > |^2.$

3- $\sum_{n=1}^{N} | < x, x_n > |^2 \leq ||x||^2.$

4- Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *est un système orthonormal, alors pour chaque* $x \in E$*, la série* $\sum_{n=1}^{\infty} | < x, x_n > |^2$ *converge et* $\sum_{n=1}^{\infty} | < x, x_n > |^2 \leq ||x||^2.$

1.2.3 Procédé de Gram-Schmidt :

Le procédé de Gram-Schmidt est une méthode essentielle en algèbre linéaire qui permet de construire une base orthonormée à partir d'une base quelconque.

Théorème 1.2.1. *[4] Soient* E *un espace de Hilbert de dimension* n *et* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *une base de* E*. Alors il existe une unique base orthonormée* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *à partir de* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$

Démonstration. La preuve est constructive, dans le sens qu'elle donne la méthode pour construire une base orthonormale à partir d'une base quelconque.

- 1 ère étape, normalisation de u_1 :

$$v_1 = \frac{u_1}{||u_1||}.$$

- 2 ème étape, on projette u_2 en direction de v_1 :

$$v_2 = \frac{u_2 - < u_2, v_1 >}{||u_2 - < u_2, v_1 > ||}.$$

- n-ème étape, par itération :

$$v_n = \frac{u_n - \sum_{j=1}^{n-1} < u_n, v_j > v_j}{||u_n - \sum_{j=1}^{n-1} < u_n, v_j > v_j||}.$$

□

Définition 1.2.4. *[7] $\{x_i\}_{i>0}$ est un système dans un espace de Hilbert E est complet si $< y, x_i >= 0$, $\forall i > 0$ implique que $y = 0$.*

Théorème 1.2.2. *(Le théorème de représentation de Riesz)[9] Si $L : H \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle linéaire bornée, alors il y a un vecteur unique $u_0 \in H$ tel que $L(u) =< u, u_0 >$ pour tout $u \in H$. De plus $||L|| = ||u_0||$.*

1.3 Fonctions absolument continues et quelques propriétés :

Définition 1.3.1. [3] *Soit $f(x)$ une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$, et Soit $(a_k, b_k)_{k=1}^n$ un ensemble d'intervalles ouverts disjoints $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ si pour tout $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ telle que :*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon \ , \quad \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta,$$

alors la fonction f(x) est absolument continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Proposition 1.3.1. [3]

Toute fonction absolument continue sur l'intervalle $[a, b]$ est une fonction continue sur $[a, b]$.

Proposition 1.3.2. [3]

Soit f(x) une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$, si $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, alors f(x) est absolument continue.

Démonstration. Pour un $\epsilon > 0$ arbitraire, on choisit $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Soit $\{(a_k, b_k),\ k \in \{1, 2, 3, ..., n\}\}$ un ensemble d'intervalles ouverts disjoints $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ satisfaisant $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$.

On a :

$$|f(b_k) - f(a_k)| = |f'(c_k)|(b_k - a_k) < M(b_k - a_k),\ c_k \in [a_k, b_k] \subset [a, b],$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < M \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

□

Corollaire 1.3.1. *[3]*

Si $f(x)$ est une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$, alors $f(x)$ est absolument continue.

Proposition 1.3.3. *[3]*

Si f(x) est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$, alors la fonction $\int_a^x f(t)dt$ est absolument continue sur $[a,b]$.

Démonstration. Par continuité absolue d'intégrale, pour $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, telle que $\int_E f(t)dt < \epsilon$ pour m(E) $<\delta$.

On suppose que $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ est un ensemble des éléments intervalles ouverts disjoints telle que : $(a_k, b_k) \subset [a,b]$, pour chaque $k \in \{1, 2, ..., n\}$, satisfaisant $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$:

$$\sum_{k=1}^n \left| \int_a^{b_k} f(t)dt - \int_a^{a_k} f(t)dt \right| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |f(t)dt| = \int_{\cup_{k=1}^n (a_k,b_k)} |f(t)|dt < \epsilon.$$

□

1.4 Accroissements finis :

Théorème 1.4.1. *[8] Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable dans $]a,b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Proposition 1.4.1. *(Inégalité des accroissements finis) [8]*

On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall c \in]a,b[,\ |f'(c)| \leq M,$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.

1.5 Espace L^p

Définition 1.5.1. *[6] Pour un exposant p satisfaisant : $1 \leq p < \infty,\ d \in N^*$.*

L'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)$ est constitué des fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable au sens de Lebesgue :

$$\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : f \; est \; une \; fonction \; mesurable \; et \; satisfait \; \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

De même, pour $p = 2$:

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : f \; est \; une \; fonction \; mesurable \; et \; satisfait \; \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

est un espace vectoriel normé complet.

Le produit scalaire dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ est :

$$< f, g >_{\mathbb{L}^2} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)d\mu(x), \; \mu \text{ est la mesure de Lebesgue.}$$

et la norme est donnée par :

$$||f||_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.5.1. *(Inégalité de Hölder)[6]*

Soit $p, q \in [1, \infty[$ des exposants conjugués, $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables et $\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = 1$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |fg|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

L'intégralité de Hölder peut s'écrire :

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q.$$

1.6 Opérateur :

1.6.1 Opérateur linéaire :

Définition 1.6.1. *[13] Soit E, F deux E.V réels ou complexes et $g : E \to F$ une application.On dit que :*

1- g est additive si $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in E$.

2- g est homogène si $g(\lambda x) = \lambda g(x)$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

1.6.2 Opérateurs linéaires bornés :

Définition 1.6.2. *[13] Soit* $(E, ||.||_E)$ *et* $(F, ||.||_F)$ *deux E.V.N. L'opérateur linéaire* $g : E \to F$ *est dit borné s'il existe M>0, tel que* $\forall x \in E$ *:*

$$||g(x)||_F \leq M||x||_E.$$

1.6.3 Opérateur Adjoint :

Définition 1.6.3. [*13*] *Soit* $H1$ *et* $H2$ *deux espaces de Hilbert. On appelle adjoint de l'opérateur* $T \in L(H1, H2)$ *l'opérateur* T^* *:* $H2 \to H1$ *tel que :*

$$\forall u \in H1, \forall v \in H2 < T(u), v >_{H2} = < u, T^*(v) >_{H1} .$$

où $L(H1, H2)$ *l'ensemble des opérateurs linéaires bornés défini de* $H1$ *dans* $H2$*.*

Propriété 1.6.1. *[13] Soit* $H1$ *et* $H2$ *deux espaces de Hilbert et* $A \in L(H1, H2)$ *avec* A *une application linéaire continue. Il existe une unique application linéaire continue* $A^* \in L(H2, H1)$ *telle que pour tout* $u \in H1, v \in H2$ *on a :*

$$< Au, v >_{H2} = < u, A^*v >_{H1} .$$

De plus $||A|| = ||A^*||$ *et* $A^{**} = A$*.*

L'application A^* *est appelée l'application adjointe de* A *(ou bien l'opérateur adjoint de l'opérateur* A*).*

Chapitre 2

Noyaux reproduisants :

Dans ce chapitre on définit l'espace à noyau reproduisant avec son produit scalaire, sa norme et quelque propriétés [3]. Ensuite on construit la fonction à noyau reproduisant pour chaque produit scalaire [10],[11],[14]et[5].

2.1 Espace à noyau reproduisant :

Définition 2.1.1. *[3] Soit*

$$H = \left\{ \begin{array}{c} f(x)|f(x) est\ une\ fonction\ de\ valeur\ réelle\ ou\ une\ fonction\ complexe \\ avec\ x \in X,\ X\ un\ ensemble \end{array} \right\}$$

un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$< f(x), g(x) >_H; \quad f(x), g(x) \in H.$$

S'il existe une fonction $R_y(x)$, pour tout $y \in X$ fixé, alors $R_y(x) \in H$, et pour tout $f(x) \in H$:

$$< f(x), R_y(x) >_H = f(y), \tag{2.1}$$

alors $R_y(x)$ est appelée le noyau reproduisant de H et H l'espace de Hilbert à noyau reproduisant.

Exemple 2.1.1. *[3] $\mathbb{R}^n$ est un espace à noyau reproduisant.*

$$\mathbb{R}^n = \{a|a = (a_1, a_2, ..., a_n), a_i \in \mathbb{R}\}.$$

$$e_m(i) = \begin{cases} 0, & i \neq m \quad (i, m \in \mathbb{N}) \\ 1, & i = m \quad\ \ (m \leq n) \end{cases}$$

est un noyau reproduisant de $\mathbb{R}^n$ *car* $e_m = (0, ..., 1^m, ..., 0)$, *et* $< a, e_m >= a_m$.

Similairement,

L'espace

$$l^2 = \left\{ a | a = a = (a_1, a_2, ...), a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \right\}$$

est un espace à noyau reproduisant.

$$e_m(i) = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ 1, & i = m \quad (i, m \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

est un noyau reproduisant de l^2.

Exemple 2.1.2. *[3] Soit* H *un espace de Hilbert,* $\{e_i\}_{i=1}^n$*est base orthonormale, c'est à dire*

$$< e_i(t), e_j(t) >_H = e_i(t)\overline{e_j(t)} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \quad (i, j \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$R_s(t) = \sum_{i=1}^n e_i(t)\overline{e_j(s)}$ *est le noyau reproduisant de* H.

$f(t) \in H$ *donc s'écrit comme combinaison linéaire de la base,* $f(t) = \sum_{i=1}^n a_i e_i(t)$, *avec* a_i *sont des nombres complexes.*

$$\begin{aligned} < f(t), R_s(t) >_H &= < \sum_{i=1}^n a_i e_i(t), \sum_{j=1}^n e_j(t)\overline{e_j(s)} > \\ &= \sum_{i=1}^n a_i < e_i(t), e_i(t)\overline{e_i(s)} > \\ &= \sum_{i=1}^n a_i e_i(t)\overline{e_i(t)\overline{e_i(s)}} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i e_i(t)\overline{e_i(t)}e_i(s) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i e_i(s) \\ &= f(s) \end{aligned}$$

donc H est l'espace à noyau reproduisant de .

2.1.1 Propriétés fondamentales des noyaux reproduisants :

Propriété 2.1.1. *[3] Si H est un espace à noyau reproduisant, alors le noyau reproduisant $R_y(x)$ dans H est symétrique conjugué c'est -à-dire :*

$$R_y(x) = \overline{R_x(y)}.$$

Démonstration.

$$R_y(x) =< R_y(.), R_x(.) >_H = \overline{< R_x(.), R_y(.) >_H} = \overline{R_x(y)}.$$

□

Propriété 2.1.2. *[3] Si H est un espace à noyau reproduisant alors le noyau reproduisant $R_y(x)$ est unique dans H.*

Démonstration. Soit $Q_y(x)$ un autre noyau reproduisant de H alors,

$$Q_y(x) =< Q_y(.), R_x(.) >_H = \overline{< R_x(.), Q_y(.) >_H} = \overline{R_x(y)} = R_y(x).$$

□

Propriété 2.1.3. *[3] Si $R_y(x)$ est le noyau reproduisant de H, alors pour chaque $x \in X$ $R_x(x) \geq 0$ et $R_x(x) = 0$ si et seulement si H=$\{0\}$.*

Démonstration. Pour $R_y(x)$ est le noyau reproduisant dans H, $\forall x \in X$ on a :

$$R_x(x) =< R_x(.), R_x(.) >_H = ||R_x(.)||_H^2,$$

donc $R_x(x) \geq 0$. □

Propriété 2.1.4. *[3] Le noyau reproduisant $R_y(x)$ est un noyau défini positif, c'est -à-dire :*

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_{x_i}(x_j)\overline{\epsilon_i}\epsilon_j \geq 0 \text{ pour toute } x_i,\ x_j \in X,$$

où ϵ_i, ϵ_j sont des nombres complexe $(i, j = 1, 2, ..., n)$.

Propriété 2.1.5. *[3] Soit H l'espace de fonctions. H est un espace à noyau reproduisant si seulement si pour tout $x \in X$, la fonctionnelle linéaire $I(f) = f(x)$ est bornée.*

Démonstration. Condition nécessaire, comme H est un espace à noyau reproduisant, il existe un noyau reproduisant $R_y(x)$. Pour toute fonctionnelle linéaire $I(f) = f(x)$, on a :

$$\begin{aligned} &|I(f)| = |f(x)| = |< f(.), R_x(.) >_H| \leq ||f(.)||_H ||R_x(.)||_H, \\ &|I(f)| \leq ||f(x)||_H \sqrt{R_x(x)} \leq M_x ||f||_H \ avec\ M_x^2 = R_y(x),\ donc\ M_x > 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Condition suffisante, pour $f(x) \in H$, on a $I(f) = f(x)$ est une fonction linéaire, d'après le théorème de Riesz1.2.2 il existe un unique $R_x(.) \in H$, de sort que, $f(x) = I(f) =< f, R_x >_H$. Donc $R_y(x)$ est l'unique noyau reproduisant dans l'espace H. □

2.2 L'espace $W_2^m[a,b]$ et son noyau reproduisant :

2.2.1 W_2^m[a,b] est un espace de Hilbert :

L'espace de fonction $W_2^m[a,b]$ avec m $\in \mathbb{N}^*$ est définie comme suit [3] :

$$W_2^m[a,b] = \left\{ f \ |f^{(i)} \ sont\ absolument\ continues\ i = \{0,1,...,m-1\}, f^{(m)} \in \mathbb{L}^2[a,b], x \in [a,b] \right\}. \tag{2.3}$$

Le produit scalaire dans l'espace de fonctions W_2^m est :

$$< f, g >_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx. \tag{2.4}$$

et la norme dans l'espace de fonctions W_2^m [a,b] est donné par :

$$||f||_{W_2^m} = \sqrt{< f, f >_{W_2^m}}. \tag{2.5}$$

Pour toutes fonctions $f, g \in W_2^m[a,b]$.

Théorème 2.2.1. *[3] $W_2^m[a,b]$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. On montre que $W_2^m[a,b]$ est complet.

Supposons que $f_n(x)$ $(n = 1,2,3...)$ est une suite de Cauchy dans $W_2^m[a,b]$, c'est à dire :

$$||f_{n+p} - f_n||^2_{W_2^m[a,b]} = \sum_{i=0}^{m-1} (f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a))^2 + \int_a^b [f_{n+p}^{(m)}(x) - f_n^{(m)}(x)]^2 dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc :

$$||f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a)||_{W_2^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, i = 0,1,2...,m-1,$$

et

$$||\int_a^b [f_{n+p}^{(m)}(x) - f_n^{(m)}(x)]^2 dx||_{W_2^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où : $f_n^{(i)}(a)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, $i = \{1,2,3...,m-1\}$.

et $f_n^{(m)}(x)$, $(n = 1,2,...)$ est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2[a,b]$.

Puisque $\mathbb{R}$ et $\mathbb{L}^2[a,b]$ sont complet muni respectivement par la valeur absolue et la norme de $\mathbb{L}^2$, alors :

Il existe un nombre réel unique λ_i $(i = 0,1,...,m-1)$ et une fonction unique $h(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$, tel que :

$$f_n^{(i)}(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_i, \ (i = 0,1,2,...,m-1) \tag{2.6}$$

et

$$\int_a^b f_n^{(m)}(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(x). \tag{2.7}$$

On suppose que :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda_k}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \int_a^x \int_a^x \int_a^x ... \int_a^x h(t)(dt)^m$$

donc :

$$g^{(m-1)}(x) = \lambda_{m-1} + \int_a^x h(t)dt.$$

Puisque $h(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$, alors $h(x) \in \mathbb{L}^1[a,b]$ ce qui veut dire que $h(x)$ est intégrable d'après la proposition 1.3.3, $g^{(m-1)}(x)$ est absolument continue sur $[a,b]$ et

$$g^{(m)}(x) = h(x) \in \mathbb{L}^2[a,b], \ sur \ [a,b]$$

d'où : $g(x) \in W_2^m[a,b]$ et $g^{(i)}(a) = \lambda_i$ $(i = 0, ..., m-1)$.

On doit montrer que : $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x)$ dans $W_2^m[a,b]$.

On a :

$$\begin{aligned} ||f_n(x) - g(x)||^2_{W_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} (f_n^{(i)}(a) - g^{(i)}(a))^2 + \int_a^b [f_n^{(m)}(x) - g^{(m)}(x)]^2 dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (f_n^{(i)}(a) - \lambda_i)^2 + \int_a^b [f_n^{(m)}(x) - h(x)]^2 dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \; d'après \; (2.6) \; (2.7). \end{aligned}$$

De là : l'espace de fonction $W_2^m[a,b]$ est un espace de Hilbert. □

2.2.2 W_2^m[a,b] est un espace à noyau reproduisant :

Théorème 2.2.2. *[3] W_2^m[a,b] est un espace à noyau reproduisant.*

Démonstration. Posons $I(f) = f(x)$, $x \in [a,b]$, I est une fonctionnelle linéaire de W_2^m[a,b] et $f(x) \in W_2^m[a,b]$, on a :

$$f^{(m-1)}(x) = f^{(m-1)}(a) + \int_a^x f^{(m)}(t)dt$$

et

$$|f^{(m-1)}(x)| \leq |f^{(m-1)}(a)| + |\int_a^x f^{(m)}(t)dt| \leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^b |f^{(m)}(t)|dt$$

En utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\int_a^b |f^{(m)}(t)|dt \leq \left[(b-a)\int_a^b |f^{(m)}(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} = M_0 \left[\int_a^b |f^{(m)}(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq M_0 \left[\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b |f^{(m)}(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} = M_0 ||f||_{W_2^m}$$

avec $M_0 = (b-a)^{\frac{1}{2}}$ et pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3, 4..., m-1\}$

$$|f^{(i)}(a)| \leq \left[\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b |f^{(m)}(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} = ||f||_{W_2^m} \tag{2.8}$$

Donc

$$|f^{(m-1)}(x)| \leq M_0 ||f||_{W_2^m} + |f^{(i)}(a)|$$

$$|f^{(m-1)}(x)| \leq M_0||f||_{W_2^m} + ||f||_{W_2^m}$$

$$|f^{(m-1)}(x)| \leq M_1||f||_{W_2^m}, \quad \text{où } M_1 = M_0 + 1 \tag{2.9}$$

on note que :

$$|f^{(m-2)}(x)| \leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^x |f^{(m-1)}(t)|dt \leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^b |f^{(m-1)}(t)|dt$$

d'après (2.8) et (2.9),on a :

$$|f^{(m-2)}(x)| \leq ||f||_{W_2^m} + (b-a)M_1||f||_{W_2^m} = M_2||f||_{W_2^m} \tag{2.10}$$

De même, nous avons :

$$|I(f)| = |f(x)| \leq M_m||f||_{W_2^m}. \tag{2.11}$$

Donc I est une fonctionnelle bornée dans W_2^m, d'après la propriété (2.1.5) on a W_2^m[a,b] un espace à noyau reproduisant.

Pour tout $y \in [a,b]$ fixé et tout $f(x) \in W_2^m[a,b]$, $R_y(x)$ doit satisfaire :

$$< f(x), R_y(x) >_{W_2^m} = f(y). \tag{2.12}$$

En appliquant (2.4), on trouve :

$$< f(x), R_y(x) >_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)\frac{\partial^{(i)} R_y(a)}{\partial^{(i)} x} + \int_a^b f^{(m)}\frac{\partial^{(m)} R_y(x)}{\partial^{(m)} x}(x)dx.$$

par l'intégration successive par partie, on trouve :

$$\int_a^b f^{(m)}\frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m}dx = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i f^{(m-i-1)}(x)\frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}}\Bigg]_{x=a}^{b} + (-1)^m\int_a^b f(x)\frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}}dx$$

de plus :

$$\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i f^{(m-i-1)}(x)\frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i-1} f^{(i)}(x)\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}}, \text{ par le changement } i = m-i-1.$$

d'où

$$\begin{aligned} < f(x), R_y(x) >_{W_2^m} = & \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)\left[\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1}\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}}\right] \\ & + \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i-1} f^{(i)}(b)\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} \\ & + (-1)^m\int_a^b f(x)\frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}}dx = f(y). \end{aligned}$$

A partir de (2.12), on a les conditions suivantes :

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y) \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0 \\ \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, ..., m-1. \end{cases} \tag{2.14}$$

-Pour $x \neq y$, $R_y(x)$ est la solution générale de l'équation différentielle homogène linéaire à coefficients constants d'ordre 2m, c'est -à-dire :

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = 0 \tag{2.15}$$

la solution générale de l'équation(2.15) est :

$$R_y(x) = \begin{cases} l \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1}, & x < y \\ r \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1}, & x > y \end{cases} \tag{2.16}$$

On va calculer les coefficients $c_i(y)$ et $d_i(y)$ où $i = 1, 2, 3, ..., 2m$.

À partir de :

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y)$$

on a

$$\frac{\partial^i lR_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i rR_y(y)}{\partial x^i} \; ; i = 0, 1, 2, 3, ..., 2m-2 \tag{2.17}$$

et

$$(-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} lR_y(y^+)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} rR_y(y^-)}{\partial x^{2m-1}} \right) = 1 \tag{2.18}$$

Les conditions (2.14), (2.17) et (2.18), ont donné 2m équations à 2m inconnus à trouver.

-i.e. Les inconnus sont les coefficients $c_i(y)$ et $d_i(y)$, $(i = 1, 2, 3, ..., 2m)$ de (2.16). □

Proposition 2.2.1. *[3] Soit $R_y(x)$ le noyau reproducteur de l'espace $W_2^m[a,b]$, alors*

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in \mathbb{L}^2[a,b] \; ; i + j = 2m - 1$$

Démonstration. Par l'équation (2.13), pour tous $x, y \in [a,b]$:

$$\frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = (-1)^{2m} \delta(x-y)$$

donc :

$$\frac{\partial^{2m-1}R_y(x)}{\partial x^{2m-1}} = (-1)^{2m}(x-y)_+^0 + c_1(y)$$

avec

$$(x-y)_+^0 = \begin{cases} 1, & x > y \\ 0, & x \leq y \end{cases}$$

et c_1 est une constante

on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial^{2m}R_y(x)}{\partial x^{2m-1}\partial y} = (-1)^{2m-1}\delta(x-y)$$

on intègre par rapport à x, on trouve :

$$\frac{\partial^{2m-1}R_y(x)}{\partial x^{2m-2}\partial y} = (-1)^{2m-1}(x-y)_+^0 + c_2(y), \quad c_2 \text{ est une constante}$$

c'est à dire :

$$\frac{\partial^{2m-1}R_y(x)}{\partial x^{2m-2}\partial y} \in \mathbb{L}^2[a,b]$$

pour $2m-1 = i+j$, donc :

$$\frac{\partial^{i+j}R_y(x)}{\partial x^i\partial y^j} \in \mathbb{L}^2[a,b]$$

□

Corollaire 2.2.1. *[3]*

$$\frac{\partial^{i+j}R_y(x)}{\partial x^i\partial y^j} \,; 0 \leq i+j \leq 2m-2.$$

est une fonction absolument continue dans [a,b] par rapport à x ou y .

Théorème 2.2.3. *Proposition 2.2.1 et corollaire 2.2.1 nous donne*

$$\frac{\partial^{i+j}R_y(x)}{\partial x^i\partial y^j} \in W_2^m \,; i+j = m-1$$

par rapport à x ou y.

Théorème 2.2.4. *[3] Soit W_2^m[a,b] est un espace à noyau reproduisant, $f_n(x) \in W_2^m[a,b]$ $(n = 1, 2, 3...)$. Si $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ au sens de $||.||_{W_2^m}$ alors $f_n^{(k)}(x)$ converges vers $f^{(k)}(x)$ uniformément pour $0 \leq k \leq m-1$.*

Démonstration. Soit $R_y(x)$ est le noyau reproduisant de W_2^m et $f(x) \in W_2^m$, donc

$$f_n(x) - f(x) =< f_n(y) - f(y), R_x(y) >_{W_2^m}$$

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) &= \frac{\partial^k}{\partial x^k}(f_n(x) - f(x)), \quad 0 \le k \le m-1. \\ &= \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(< f_n(y) - f(y), R_x(y) >_{W_2^m}\right). \\ &=< f_n(y) - f(y), \frac{\partial^k}{\partial x^k} R_x(y) >_{W_2^m} . \end{aligned}$$

et $\frac{\partial^k R_x(y)}{\partial x^k} \in W_2^m[a,b]$ par théorème2.2.3, on obtient :

$$|f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| \le ||f_n(y) - f(y)||_{W_2^m} \left\| \frac{\partial^k R_x(y)}{\partial x^k} \right\|_{W_2^m}$$

et $\left\| \frac{\partial^k R_x(y)}{\partial x^k} \right\|_{W_2^m}$ est continue pour tous $x \in [a,b]$, alors :

$$|f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| \le M||f_n(y) - f(y)||_{W_2^m}, \quad \text{où } M > 0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x).$$

□

2.3 L'espace à noyau reproduisant $W_2^1[0,1]$:

On définit[10] :

$$W_2^1([0,1]) = \left\{ \ u(x)|u(x) \ est \ une \ fonction \ absolument \ continue \ u'(x) \in \mathbb{L}^2([0,1]) \ \right\}$$

le produit scalaire de $W_2^1([0,1])$ est défini par :

$$< u(x), v(x) >_{W_2^1([0,1])} = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx. \tag{2.19}$$

et la norme est défini par :

$$||u(x)||_{W_2^1([0,1])} = \sqrt{< u(x), v(x) >_{W_2^1([0,1])}}.$$

Théorème 2.3.1. *[10] L'espace $W_2^1[0,1]$, est un espace à noyau reproduisant*

Autrement dit, pour tout $u(x) \in W_2^1[0,1]$ et chaque $y \in [0,1]$ fixé, il existe $R_y(x) \in W_2^1[0,1]$ et $x \in [0,1]$, tel que :

$$< u(x), R_y(x) >_{W_2^1} = u(y). \tag{2.20}$$

Donc le noyau reproduisant $R_y(x)$ est donné par :

$$R_y(x) = \begin{cases} c_1(y)x + c_2(y), & x < y \\ d_1(y)x + d_2(y), & x > y \end{cases} \tag{2.21}$$

Démonstration. Suivant intégration par partie de (2.19), on trouve :

$$\begin{aligned} < u(x), R_y(x) >_{W_2^1[a,b]} &= u(0)R_y(0) + \int_0^1 u'(x)R_y'(x)dx. \\ &= u(0)R_y(0) + u(x)R_y'(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(x)R_y''(x)dx. \\ &= u(0)[R_y(0) - R_y'(0)] + u(1)R_y'(1) - \int_0^1 u(x)R_y''(x)dx. \end{aligned}$$

puisque $R_y(x),\ u(x) \in W_2^1[0,1]$ et d'après (2.20), on a les conditions suivantes :

$$\begin{cases} -R_y''(x) = \delta(x-y) \\ R_y(0) - R_y'(0) = 0 \\ R_y'(1) = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

pour trouver la formule du noyau reproduisant, il faut trouver la solution de l'équation différentielle suivante :$-R_y''(x) = \delta(x-y)$, pour $x \neq y$ nous donne la formule (2.21) et pour trouver les c_i, d_i $i = 1, 2$, on applique les conditions (2.17), (2.18) et (2.57)

$$\begin{cases} R_y(0) - R_y'(0) = 0 \\ R_y'(1) = 0 \\ R_y(y^+) = R_y(y^-) \\ R_y'(y^-) - R_y'(y^+) = -1 \end{cases} \tag{2.23}$$

Après les calcules, on trouve :

$$c_1 = 1, c_2 = 1, d_1 = 0, d_2 = y + 1$$

Donc (2.21) devient :

$$R_y(x) = \begin{cases} x+1, & x < y \\ y+1, & x > y \end{cases} \tag{2.24}$$

□

2.4 L'espace à noyau reproduisant $W_2^1(\mathbf{R})$:

Pour la variable $x \in (-\infty, +\infty)$ il faut construire l'espace de noyau reproduisant.

Par exemple pour cette variable, on définit[3] :

$$W_2^1(\mathbb{R}) = \left\{ \ u(x)|u(x) est\ une\ fonction\ absolument\ continue\ u'(x) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \ \right\}$$

le produit scalaire et la norme de $W_2^1(\mathbb{R})$ sont définis par :

$$< u(x), v(x) >_{W_2^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x)v(x) + u'(x)v'(x)]dx. \tag{2.25}$$

$$||u(x)||_{W_2^1(\mathbb{R})} = \sqrt{< u(x), v(x) >_{W_2^1(\mathbb{R})}}$$

Pour trouver la formule de noyau reproduisant $R_y(x)$ dans $W_2^1(\mathbb{R})$.

D'abord, d'après (2.25) et par intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} < u(x), R_y(x) >_{W_2^1(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x)R_y(x) + u'(x)\frac{\partial R_y(x)}{\partial x}]dx \\ &= u(x)\frac{\partial R_y(x)}{dx}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\left[R_y(x) - \frac{\partial^2 R_y(x)}{dx^2}\right] \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $y \in (-\infty, +\infty)$ fixé et tout $u(x) \in W_2^1(\mathbb{R})$, donc $R_y(x)$ doit satisfaire :

$$< u(x), R_y(x) >_{W_2^1(\mathbb{R})} = u(y).$$

Ce qui veut dire que :

$$\begin{cases} R_y(x) - \dfrac{\partial^2 R_y(x)}{\partial x^2} = \delta(x-y) \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\partial R_y(x)}{\partial x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\partial R_y(x)}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

si $x \neq y$, $R_y(x)$ est la solution de l'équation différentielle de deuxième ordre homogène linéaire à coefficients constante :

$$R_y(x) - \frac{\partial^2 R_y(x)}{\partial x^2} = 0. \tag{2.27}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\partial R_y(x)}{\partial x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\partial R_y(x)}{\partial x} = 0 \\ R_y(y^+) = R_y(y^-) \\ R'_y(y^-) - R'_y(y^+) = -1 \end{cases} \tag{2.28}$$

la solution de l'équation différentielle (2.27) est sous forme $e^{\lambda x}$, donc l'équation caractéristique est $1 - \lambda^2 = 0$ et ses valeurs propres sont : $\lambda = 1$ *et* $\lambda = -1$,

la solution générale de l'équation (2.27) est donnée par :

$$R_y(x) = \begin{cases} c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x}, & x < y \\ d_1(y)e^x + d_2(y)e^{-x}, & x > y \end{cases} \tag{2.29}$$

D'après les conditions (2.28), on obtient les coefficients suivants :

$$c_1(y) = \frac{e^{-y}}{2},\ c_2(y) = 0,\ d_1(y) = 0,\ d_2(y) = \frac{e^y}{2}.$$

donc (2.29) devient :

$$R_y(x) = \frac{e^{-|x-y|}}{2}.$$

2.5 L'espace à noyau reproduisant $W_2^2[0,1]$

On définit l'espace[3] :

$$W_2^2[0,1] = \left\{ \begin{array}{c} u(x)|u, u' \ sont\ des\ fonctions \text{ à } valeurs\ réelles\ absolument\ continues \\ u'' \in \mathbb{L}^2[0,1] \end{array} \right\}$$

On définit le produit scalaire dans $W_2^2[0,1]$:

$$< u(x), v(y) >_{W_2^2[0,1]} = u(0)v(0) + u'(0)v'(0) + \int_0^1 [u^{(2)}(x)v^{(2)}(x)]dx \tag{2.30}$$

et la norme :

$$||u||_{W_2^2} = \sqrt{< u, u >_{W_2^2}} \quad avec\, u, v \in W_2^2[0,1]$$

Théorème 2.5.1. *L'espace $W_2^2[0,1]$ est un espace à noyau reproduisant.*

C'est-à-dire, pour tout $u(x) \in W_2^2[0,1]$ et chaque $y \in [0,1]$ fixé, il existe $R_y(x) \in W_2^2[0,1]$, $x \in [0,1]$ tel que :

$$< u(x), R_y(x) >_{W_2^2} = u(y) \tag{2.31}$$

alors le noyau reproduisant $R_y(x)$ est donné par :

$$R_y(x) = \begin{cases} c_1(y)x^3 + c_2(y)x^2 + c_3(y)x + c_4(y), & x < y \\ d_1(y)x^3 + d_2(y)x^2 + d_3(y)x + d_4(y), & x > y \end{cases} \tag{2.32}$$

Démonstration. D'après le produit scalaire (2.30), on trouve :

$$< u(x), R_y(x) >_{W_2^2} = u(0)R_y(0) + u'(0)R'_y(0) + \int_0^1 u^{(2)}(x)R_y^{(2)}(x)dx \tag{2.33}$$

on pose :$I = \displaystyle\int_0^1 u^{(2)}(x)R_y^{(2)}(x)dx$, par intégration par partie :

$$\begin{aligned} I &= \Big[u'(x)R''_y(x)\Big]_0^1 - \Big[u(x)R_y^{(3)}(x)\Big]_0^1 + \int_0^1 u(x)R_y^{(4)}(x)dx. \\ &= u'(1)R''_y(1) - u'(0)R''_y(0) - u(1)R_y^{(3)}(1) + u(0)R_y^{(3)}(0) + \int_0^1 u(x)R_y^{(4)}(x)dx. \end{aligned}$$

Donc (2.33) devient :

$$\begin{aligned} < u(x), R_y(x) >_{W_2^2} &= u(0)[R_y(0) + R_y^{(3)}(0)] + u'(0)[R'_y(0) - R''_y(0)] \\ &\quad + u'(1)R''_y(1) - u(1)R^{(3)}(1) + \int_0^1 u(x)R_y^{(4)}(x)dx. \end{aligned} \tag{2.34}$$

puisque $R_y(x),\ u(x) \in W_2^2[0,1]$ et d'après (2.31), on obtient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} R_y^{(4)}(x) = \delta(x-y). \\ R_y(0) + R_y^{(3)}(0) = 0. \\ R'_y(0) - R''_y(0) = 0. \\ R''_y(1) = 0. \\ R_y^{(3)}(1) = 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

La solution de l'équation différentielle suivante $R_y^{(4)}(x) = \delta(x-y)$ pour $x \neq y$, nous donne la formule du noyau (2.32)

avec les conditions suivantes :

$$R_y^{(k)}(y^+) = R_y^{(k)}(y^-), k = 0, 1, 2. \tag{2.36}$$

et

$$R_y^{(3)}(y^+) - R_y^{(3)}(y^-) = 1. \tag{2.37}$$

de (2.35),(2.36) et (2.37), on obtient les coefficients de (2.32) :

$$c_1(y) = \frac{1}{6},\ c_2(y) = -\frac{1}{2}y,\ c_3(y) = -y,\ c_4(y) = -1.$$
$$d_1(y) = 0,\ d_2(y) = 0,\ d_3(y) = -\frac{1}{2}y^2 - y,\ d_4(y) = \frac{1}{6}y^3 - 1.$$

□

2.6 L'espace à noyau reproduisantW_2^3[0,1] :

L'espace est défini comme suit[10] :

$$W_2^3[0,1] = \left\{ \begin{array}{c} u(x)|u, u', u'' \ sont\ des\ fonctions \text{ à } valeurs\ réelles\ absolument s\ continues \\ u^{(3)} \in \mathbb{L}^2[0,1], x \in [a,b],\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right\}$$

$$< u(x), v(y) >_{W_2^3[0,1]} = u(0)v(0) + u'(0)v'(0) + u^{(2)}(0)v^{(2)}(0) + \int_0^1 u^{(3)}(x)v^{(3)}(x)dx \tag{2.38}$$

et la norme :

$$||u||_{W_2^3[0,1]} = \sqrt{< u, u >_{W_2^3[0,1]}} \quad avec\ u, v \in W_2^3[0,1]$$

Théorème 2.6.1. *[10] L'espace $W_2^3[0,1]$ est un espace à noyau reproduisant.*

Pour tout $u(x) \in W_2^3[0,1]$ et chaque $y \in [0,1]$ fixé, il existe $R_y(x) \in W_2^3[0,1]$ et $x \in [0,1]$, telle que :

$$< u(x), R_y(x) >_{W_2^3} = u(y) \tag{2.39}$$

alors le noyau reproduisant $R_y(x)$ est donné par :

$$R_y(x) = \begin{cases} c_6(y)x^5 + c_5(y)x^4 + c_4(y)x^3 + c_3(y)x^2 + c_2(y)x + c_1(y) & x < y \\ d_6(y)x^5 + d_5(y)x^4 + d_4(y)x^3 + d_3(y)x^2 + d_2(y)x + d_1(y) & x > y \end{cases} \quad (2.40)$$

Démonstration. D'après le produit scalaire (2.38), on trouve :

$$< u(x), R_y(x) >_{W_2^3} = u(0)R_y(0) + u'(0)R'_y(0) + u''(0)R''_y(0) + \int_0^1 u^{(3)}(x)R_y^{(3)}(x)dx \quad (2.41)$$

on pose : $G = \int_0^1 u^{(3)}(x)R_y^{(3)}(x)dx$ par intégration par partie, on trouve :

$$\begin{aligned} G &= \left[u^{(2)}(x)R_y^{(3)}(x)\right]_0^1 - \left[u'(x)R_y^{(4)}(x)\right]_0^1 + \left[u(x)R_y^{(5)}(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u(x)R_y^{(6)}(x)dx. \\ &= u^{(2)}(1)R_y^{(3)}(1) - u^{(2)}(0)R_y^{(3)}(0) - u'(1)R_y^{(4)}(1) + u'(0)R_y^{(4)}(0) \\ &+ u(1)R_y^{(5)}(1) - u(0)R_y^{(5)}(0) - \int_0^1 u(x)R_y^{(6)}(x)dx. \end{aligned}$$

Donc (2.41) devient :

$$\begin{aligned} < u(x), R_y(x) >_{W_2^3} &= u(0)[R_y(0) - R_y^{(5)}(0)] + u'(0)[R'_y(0) + R_y^{(4)}(0)] \\ &+ u''(0)[R''_y(0) - R_y^{(3)}(0)] + u''(1)R_y^{(3)}(1) - u'(1)R_y^{(4)}(1) + u(1)R_y^{(5)}(1) \\ &- \int_0^1 u(x)R_y^{(6)}(x)dx. \end{aligned} \quad (2.42)$$

puisque $R_y(x),\ u(x) \in W_2^3[0,1]$ et d'après(2.39), on a les conditions suivantes :

$$\begin{cases} -R_y^{(6)}(x) = \delta(x-y) \\ R_y(0) = 0 \\ R_y^{(2)}(0) - R_y^{(3)}(0) = 0 \\ R'_y(0) + R_y^{(4)}(0) = 0 \\ R_y^{(3)}(1) = 0 \\ R_y^{(4)}(1) = 0 \\ R_y(1) = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

La solution de l'équation différentielle suivante $-R_y^{(6)}(x) = \delta(x-y)$ pour $x \neq y$, nous donne la formule du noyau (2.40) avec les conditions suivantes :

$$R_y^{(k)}(y^+) = R_y^{(k)}(y^-), k = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{2.44}$$

et

$$R_y^{(5)}(y^+) - R_y^{(5)}(y^-) = -1. \tag{2.45}$$

A partir des conditions de (2.43),(2.44) et(2.45), on obtient les coefficients inconnus de (2.40) :

$$\begin{aligned}
c_1(y) &= 0.\\
c_2(y) &= \frac{5}{516}y^4 - \frac{1}{156}y^5 - \frac{5}{26}y^2 - \frac{5}{78}y^3 + \frac{3}{13}y.\\
c_3(y) &= \frac{5}{624}y^4 - \frac{1}{624}y^5 + \frac{21}{104}y^2 - \frac{5}{312}y^3 - \frac{5}{26}y.\\
c_4(y) &= \frac{5}{1872}y^4 - \frac{1}{1872}y^5 + \frac{7}{104}y^2 - \frac{5}{936}y^3 - \frac{5}{78}y.\\
c_5(y) &= -\frac{5}{3744}y^4 + \frac{1}{3744}y^5 + \frac{5}{624}y^2 + \frac{5}{1872}y^3 - \frac{1}{104}y.\\
c_6(y) &= \frac{1}{120} + \frac{1}{3744}y^4 - \frac{1}{18720}y^5 - \frac{1}{624}y^2 - \frac{1}{1872}y^3 - \frac{1}{156}y.\\
d_1(y) &= \frac{1}{120}y^5.\\
d_2(y) &= -\frac{1}{104}y^4 - \frac{1}{156}y^5 - \frac{5}{26}y^2 - \frac{5}{78}y^3 + \frac{3}{13}y.\\
d_3(y) &= \frac{5}{624}y^4 - \frac{1}{624}y^5 + \frac{21}{104}y^2 + \frac{7}{104}y^3 - \frac{5}{26}y.\\
d_4(y) &= \frac{5}{1872}y^4 - \frac{1}{1872}y^5 - \frac{5}{312}y^2 - \frac{5}{936}y^3 - \frac{5}{78}y.\\
d_5(y) &= -\frac{5}{3744}y^4 + \frac{1}{3744}y^5 + \frac{5}{624}y^2 + \frac{5}{1872}y^3 + \frac{5}{156}y.\\
d_6(y) &= \frac{1}{3744}y^4 - \frac{1}{18720}y^5 - \frac{1}{624}y^2 - \frac{1}{1872}y^3 - \frac{1}{156}y.
\end{aligned}$$

$\square$

2.7 L'espace à noyau reproduisant$W_2^3[0,1]$:

L'espace $W_2^3[0,1]$ est défini comme suit[5] :

$$W_2^3[0,1]=\left\{\begin{array}{c} u(x)|u,u',u'' \; sont\ des\ fonctions \text{ à } valeurs\ r\acute{e}elles\ absoluments\ continues \\ u,u',u'',u^{(3)}\in\mathbb{L}^2[0,1],\ avec\ u(0)=0\ u(1)=0 \end{array}\right\}$$

On définit le produit scalaire dans $W_2^3[0,1]$:

$$<u(x),v(y)>_{W_2^3[0,1]}=\int_0^1(36uv+49u'v'+14u''v''+u^{(3)}v^{(3)})dx \tag{2.46}$$

et la norme :

$$||u||_{W_2^3}=\sqrt{<u,u>_{W_2^3}} \quad avec\ u,v\in W_2^3[0,1]$$

Théorème 2.7.1. *[5] L'espace $W_2^3[0,1]$, est un espace à noyau reproduisant.*

C'est-à-dire, pour tout $u(x)\in W_2^3[0,1]$ et chaque $y\in[0,1]$ fixé, il existe $R_y(x)\in W_2^3[0,1]$, $x\in[0,1]$, tel que :

$$<u(x),R_y(x)>_{W_2^3}=u(y), \tag{2.47}$$

alors le noyau reproduisant $R_y(x)$ est donné par :

$$R_y(x)=\left\{\begin{array}{ll} c_1(y)e^x+c_2(y)e^{-x}+c_3(y)e^{2x}+c_4(y)e^{-2x}+c_5(y)e^{3x}+c_6(y)e^{-3x} & x<y \\ d_1(y)e^x+d_2(y)e^{-x}+d_3(y)e^{2x}+d_4(y)e^{-2x}+d_5(y)e^{3x}+d_6(y)e^{-3x} & x>y \end{array}\right. \tag{2.48}$$

Démonstration. Par plusieurs intégrations par partie pour (2.46), alors :

$$<u(x),R_y(x)>_{W_2^3}=\int_0^1(36u(x)R_y(x)+49u'(x)R_y(x)'+14u''(x)R_y(x)''+u^{(3)}R_y^{(3)}(x))dx$$

$$\begin{aligned}<u(x),R_y(x)>_{W_2^3} &=\int_0^1 u(x)(36R_y(x)-49R_y^{(2)}(x)+14R_y^{(4)}(x)-R_y^{(6)}(x))dx \\ &+u(x)\left[49R_y^{(1)}(x)-14R_y^{(3)}(x)+R_y^{(5)}(x)\right]_0^1 \\ &+u'(x)\left[14R_y^{(2)}(x)-R_y^{(4)}(x)\right]_0^1+\left[u''(x)R_y^3(x)\right]_0^1\end{aligned} \tag{2.49}$$

puisque $R_y(x),\ u(x) \in W_2^3[0,1]$ et d'après l'équation(2.47) :

$$36R_y(x) - 49R_y^{(2)}(x) + 14R_y^{(4)}(x) - R_y^{(6)}(x) = \delta(x-y) \tag{2.50}$$

et

$$\begin{cases} R_y(0) = 0, & R_y(1) = 0 \\ 14R_y^{(2)}(0) - R_y^{(4)}(0) = 0 & \\ 14R_y^{(2)}(1) - R_y^{(4)}(1) = 0 & \\ R_y^3(0) = 0, & R_y^3(1) = 0 \end{cases} \tag{2.51}$$

Lorsque $x \neq y$ donc la solution de l'équation (2.50) sous forme $e^{\lambda x}$, l'équation caractéristique associée à (2.50) :

$$\lambda^6 - 14\lambda^4 + 49\lambda^2 - 36 = 0$$

on peut obtenir les racines de l'équation caractéristiques :

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$,$\lambda_3 = 2$ $\lambda_4 = -2$, $\lambda_5 = 3$ et $\lambda_6 = -3$, alors le noyau donné par :

$$R_y(x) = \begin{cases} c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x} + c_3(y)e^{2x} + c_4(y)e^{-2x} + c_5(y)e^{3x} + c_6(y)e^{-3x} & x < y \\ d_1(y)e^x + d_2(y)e^{-x} + d_3(y)e^{2x} + d_4(y)e^{-2x} + d_5(y)e^{3x} + d_6(y)e^{-3x} & x > y \end{cases}$$

ce noyau doit satisfaire les conditions suivantes :

$$R_y^{(k)}(y^-) = R_y^{(k)}(y^+), k = 0,1,2,3,4. \tag{2.52}$$

et

$$R_y^{(5)}(y^-) - R_y^{(5)}(y^+) = -1. \tag{2.53}$$

A partir de (2.51), (2.52) et (2.53), les coefficients inconnus de (2.48) peuvent être obtenus.

□

2.8 L'espace à noyau reproduisant $W_2^1[0,1]$:

L'espace de $W_2^1[0,1]$, est défini par [5] :

$$W_2^1[0,1] = \left\{ \begin{array}{c} u(x)|u \textit{ est une fonction à valeur réelle absolument continue} \\ u, u' \in \mathbb{L}^2[0,1] \end{array} \right\}$$

Le produit scalaire et la norme dans $W_2^1[0,1]$ sont comme suit :

$$< u(x), v(x) >_{W_2^1} = \int_0^1 (u(x)v(x) + u'(x)v'(x))dx \tag{2.54}$$

$$||u(x)||_{W_2^1} = \sqrt{< u(x), u(x) >_{W_2^1}}$$

où $u(x), v(x) \in W_2^1[0,1]$.

Théorème 2.8.1. *L'espace $W_2^1[0,1]$, est un espace à noyau reproduisant*

C'est-à-dire, pour tout $u(x) \in W_2^1[0,1]$ et chaque $y \in [0,1]$ fixé, il existe $R_y(x) \in W_2^3[0,1]$ et $x \in [0,1]$, telle que :

$$< u(x), R_y(x) >_{W_2^1} = u(y). \tag{2.55}$$

Donc le noyau reproduisant $R_y(x)$ s'écrit sous forme :

$$R_y(x) = \begin{cases} c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x}, & x < y \\ d_1(y)e^x + d_2(y)e^{-x}, & x > y \end{cases} \tag{2.56}$$

Démonstration. Par intégration par partie de (2.54), on trouve :

$$\begin{aligned} < u(x), R_y(x) >_{W_2^1[0,1]} &= \int_0^1 \left[u(x)R_y(x) + u'(x)R_y'(x)\right] dx. \\ &= \int_0^1 u(x)R_y(x) + u(x)R_y'(x)|_0^1 - \int_0^1 u(x)R_y''(x)dx. \\ &= u(1)R_y'(1) - u(0)R_y'(0) + \int_0^1 u(x)[R_y(x) - R_y''(x)]dx. \end{aligned}$$

Puisque $R_y(x),\ u(x) \in W_2^3[0,1]$ et d'après (2.55), on a les conditions suivantes :

$$\begin{cases} R_y(x) - R_y''(x) = \delta(x-y) \\ R_y'(0) = 0 \\ R_y'(1) = 0 \end{cases} \tag{2.57}$$

La solution de l'équation différentielle suivante $R_y(x) - R_y''(x) = \delta(x-y)$ pour $x \neq y$, nous donne la formule du noyau (2.56) avec les conditions suivantes :

$$\begin{cases} R'_y(0) = 0 \\ R'_y(1) = 0 \\ R_y(y^+) = R_y(y^-) \\ R'_y(y^+) - R'_y(y^-) = -1 \end{cases} \tag{2.58}$$

A partir des conditions de (2.58), on obtient les coefficients inconnus de (2.56) :

$$c_1(y) = \frac{e^y e^{-1} + e^{-y} e}{2e^y e^{-y}(e - e^{-1})}.$$
$$c_2(y) = \frac{e^y e^{-1} + e^{-y} e}{2e^y e^{-y}(e - e^{-1})}.$$
$$d_1(y) = \frac{e^{-1}(e^y + e^{-y})}{2e^y e^{-y}(e - e^{-1})}.$$
$$d_2(y) = \frac{e^{1}(e^y + e^{-y})}{2e^y e^{-y}(e - e^{-1})}.$$

Après des simplifications, (2.56) devient :

$$R_y(x) = \frac{1}{2sinh(1)}\left[cosh(x + y - 1) + cosh(|x - y| - 1)\right] \tag{2.59}$$

$\square$

Chapitre 3

Applications de la méthode du noyau reproduisant sur un système non linéaire

Dans ce chapitre, on considère la méthode du noyau reproduisant pour trouver la solution analytique d'un système non linéaire du deuxième ordre.

On considère le système non linéaire du deuxième ordre avec des conditions aux limites dans l'espace à noyau reproduisant [5] :

$$\begin{cases} u_1''(x) + a_1(x)u_1'(x) + a_2(x)u_1(x) + a_3(x)u_2''(x) + a_4(x)u_2'(x) + a_5(x)u_2(x) + N_1(u_1, u_2) = f_1(x) \\ 0 \leq x \leq 1 \\ u_1''(x) + b_1(x)u_1'(x) + b_2(x)u_1(x) + b_3(x)u_2''(x) + b_4(x)u_2'(x) + b_5(x)u_2(x) + N_2(u_1, u_2) = f_2(x) \\ 0 \leq x \leq 1 \\ u_1(0) = u_1(1) = 0 \;;\; u_2(0) = u_2(1) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Où N_1, N_2 sont deux fonctions non linéaires de u_1, u_2 telle que u_1 *et* u_2 *dans* $W_2^3[0,1]$, $f_i - N_i \in W_2^1[0,1],\ i = 1, 2$ et $a_j(x), b_j(x)$ sont continues, $j = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On pose que :

$$A_{11}u_1 = u_1''(x) + a_1(x)u_1'(x) + a_2(x)u_1(x),$$

$$A_{21}u_1 = u_1''(x) + b_1(x)u_1'(x) + b_2(x)u_1(x),$$

$$A_{12}u_2 = a_3(x)u_2''(x) + a_4(x)u_2'(x) + a_5(x)u_2(x),$$

$$A_{22}u_2 = b_3(x)u_2''(x) + b_4(x)u_2'(x) + b_5(x)u_2(x),$$

avec $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $u = (u_1, u_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$ et $N = (N_1, N_2)^T$

donc le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} Au = f(x) - N(u_1, u_2) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ avec\; u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Où $f - N \in W_2^1[0,1] \bigoplus W_2^1[0,1]$ et $u \in W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1]$, c'est à dire ($u_1 \in W_2^3[0,1]\; et\; u_2 \in W_2^3[0,1]$).

Le produit scalaire et la norme sont donnés comme suit :

$$< u, v >_{W_2^3} = \sum_{i=1}^{2} < u_i, v_i >_{W_2^3},$$

$$||u||_{W_2^3} = (\sum_{i=1}^{2} ||u_i||^2)^{\frac{1}{2}}.$$

telle que

$$u, v \in W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1].$$

Comme $W_2^1[0,1]$ et $W_2^3[0,1]$ sont des espace de Hilbert (déjà vu dans le chapitre précédent), donc le produit de deux espaces de Hilbert est un espace de Hilbert, cela signifie que $W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1]$ et $W_2^1[0,1] \bigoplus W_2^1[0,1]$ sont des espaces de Hilbert.

3.1 Les solutions analytique et approchée du système :

Dans cette section, on va donner la solution analytique de problème (3.2), et la méthode implémentée dans l'espace à noyau reproduisant $W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1]$ [5].

Lemme 3.1.1. *[5] Si* $A_{ij} : W_2^3[0,1] \to W_2^1[0,1]$, *i,j=1,2, sont des opérateurs linéaires bornés alors :*

$$A : W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1] \to W_2^1[0,1] \bigoplus W_2^1[0,1],$$

est un opérateur linéaire borné.

Démonstration. Pour tout $u \in W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1]$

$$Au = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} A_{ij} u_j$$

donc

$$\begin{aligned} ||Au||_{W_2^1} &= \left(\sum_{i=1}^{2} \parallel \sum_{j=1}^{2} A_{ij} u_j \parallel^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} ||A_{ij}|| \, ||u_j|| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} ||A_{ij}|| \right)^2 \left(\sum_{j=1}^{2} ||u_j|| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Comme : $\left[\left(\sum_{j=1}^{2} ||u_j||_{W_2^3[0,1]} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = ||u||_{W_2^3[0,1]}$, et on sait que : $||u||_{W_2^3[0,1]} < \infty$, avec A_{ij} sont des opérateurs linéaires bornées donc :

$$\exists M_{ij} > 0, i, j = \{1,2\} \ \textit{tel que} \ A_{ij} \leq M_{ij}.$$

$$||Au||_{W_2^1} \leq \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} M_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, ||u||_{W_2^3[0,1]} < \infty.$$

$$||Au||_{W_2^1} \leq k ||u||_{W_2^3}, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

cela signifie que A est borné, ainsi que son opérateur Adjoint est :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A*_{22} \end{pmatrix}$$

où A_{ij}^* est l'opérateur adjoint deA_{ij}. □

A est un opérateur linéaire borné de $W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1] \to W_2^1[0,1] \bigoplus W_2^1[0,1]$.

On pose :

$$\phi_{ij}(x) = \overline{R_{x_i}(x)}\vec{e_j} = \begin{cases} (\overline{R_{x_i}(x)}; 0)^T, & j = 1 \\ (0; \overline{R_{x_i}(x)})^T, & j = 2 \end{cases} \tag{3.3}$$

et : $\psi_{ij}(x) = A^*\phi_{ij}(x);\ j = 1, 2.\ i = 1, 2....$

Où $\overline{R_y(x)}$ est le noyau reproduisant de $W_2^1[0,1]$, A^* est l'opérateur adjoint de A et $\vec{e_j}$ la base canonique.

Le système orthonormal $\left\{\overline{\psi_{ij}(x)}\right\}_{(1;1)}^{(\infty;2)}$ de $W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1]$,

où :

$$\overline{\psi_{ij}(x)} = \sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} \beta_{lk}^{ij}\psi_{lk}(x);\ j = 1, 2.\ i = 1, 2, ... \tag{3.4}$$

-$\overline{\psi_{ij}(x)}$ est obtenue par orthogonalisation de Gram-Schmidt de ψ_{ij}.

-β_{lk}^{ij} sont les coefficients d'orthogonalisation.

Théorème 3.1.1. *[5] Pour l'équation* (3.2)*, si* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *est dense sur [0,1], alors* $\{\psi_{ij}(x)\}_{(1,1)}^{(\infty,2)}$ *est le système complet de* $W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1]$.

Démonstration. Pour tout $u \in W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1]$ fixé.

Soit $< u(x), \psi_{lk} >_{W_2^3} = 0$

$$\begin{aligned} < u(x), \psi_{lk} >_{W_2^3} &= 0, \\ < u(x), A^*\phi_{ij} >_{W_2^3} &= 0, \\ < Au(x), \phi_{ij} >_{W_2^1} &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

On note $u(x) = \sum_{j=1}^{2} u_j(x)\vec{e_j}$

$$u(x) = \sum_{j=1}^{2} < u(.), R_x(.)\vec{e_j} >_{W_2^3} \vec{e_j}$$

$$Au(x_i) = \sum_{j=2}^{2} < Au(y), \phi_{ij}(y) >_{W_2^1} \vec{e_j},\ i = 1, 2, ...$$

d'après (3.5) $Au(x_i) = 0$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est dense dans $[0,1]$ et de plus A matrice inversible alors $u(x_i) = 0$, $\forall x_i \in [a,b]$, d'après la définition1.2.4 $\{\psi_{ij}(x)\}_{(1,1)}^{(\infty,2)}$ est le système complet de $W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1]$. □

Théorème 3.1.2. *[5] Si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est dense sur $[0,1]$ et la solution de (3.2) est unique, alors la solution est donnée sous la forme :*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} \beta_{lk}^{ij} F_k(x_l, u_1(x_l), u_2(x_l))\overline{\psi_{ij}(x)}, \tag{3.6}$$

où $F(x, u_1(x), u_2(x)) = f(x) - N(u_1(x), u_2(x)) = (F_1, F_2)^T$

Démonstration. Soit $u(x)$ est la solution du problème (3.2), on applique le théorème 3.1.1 et $\left\{\overline{\psi_{ij}(x)}\right\}_{(1,1)}^{(\infty,2)}$ est la base orthonormée complète de $W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1]$.

On a :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} < u(x), \overline{\psi_{ij}(x)} >_{W_2^3} \overline{\psi_{ij}(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} < u(x), \sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} \beta_{lk}^{ij}\psi_{lk}(x) >_{W_2^3} \overline{\psi_{ij}(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} \beta_{lk}^{ij} < u(x), A^*\phi_{lk}(x) >_{W_2^3} \overline{\psi_{ij}(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} \beta_{lk}^{ij} < Au(x), \phi_{lk}(x) >_{W_2^1} \overline{\psi_{ij}(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} \beta_{lk}^{ij} < F(x, u_1(x), u_2(x)), \phi_{lk}(x) >_{W_2^1} \overline{\psi_{ij}(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} \beta_{lk}^{ij} F_k(x_l, u_1(x_l), u_2(x_l))\overline{\psi_{ij}(x)}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

□

La solution analytique du problème linéaire peut être obtenue à partir de (3.7).

Cependant la solution du problème non linéaire (3.2), on va l'obtenir à partir de la procédure suivante :

3.2 la méthode d'implémentation :

Pour simplifier l'écriture, on pose $F(x, u(x)) = F(x, u_1(x), u_2(x))$

donc (3.6) peut être notée par :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} B_{ij} \overline{\psi_{ij}(x)}$$

où

$$B_{ij} = \sum_{l=1}^{i} \sum_{k=1}^{j} \beta_{lk}^{ij} F_k(x_l; u(x_l)).$$

Soit $x_1 = 0$, il s'ensuit que $u(x_1)$ est connu à partir des conditions aux limites de l'équation (3.2). Donc $F(x_1, u(x_1))$ est connu en considérant le calcule suivant.

Nous posons $u_0(x_1) = u(x_1)$ et définissons l'approximation à n termes de $u(x)$ par :

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} B_{ij} \overline{\psi_{ij}(x)}. \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
o\grave{u} \;\; B_{1j} &= \sum_{k=1}^{j} \beta_{1k}^{1j} F_k(x_1, u_0(x_1)), \quad j = 1, 2. \\
u_1(x) &= \sum_{j=1}^{2} B_{1j} \overline{\psi_{1j}(x)}. \\
B_{2j} &= \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{j} \beta_{lk}^{2j} F_k(x_l, u_{l-1}(x_l)), \quad j = 1, 2. \\
u_2(x) &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} B_{ij} \overline{\psi_{ij}(x)}. \\
&\;\;.\\
&\;\;.\\
&\;\;.
\end{aligned}$$

$$u_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{2} B_{ij}\overline{\psi_{ij}(x)}. \quad (3.9)$$

$$B_{nj} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} \beta_{lk}^{nj} F_k(x_l, u_{l-1}(x_l)) \quad j = 1, 2. \quad (3.10)$$

Ensuite, la convergence de $u_n(x)$ sera démontrée en utilisant deux lemmes suivants :

Lemme 3.2.1. *[5] Si $u(x) \in W_2^3[0,1]$ alors $|u(x)| \leq \sqrt{3}||u(x)||_{W_2^3}$ et $|u'(x)| \leq \sqrt{3}||u(x)||_{W_2^3}$.*

Démonstration. On remarque que $u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)dt$, donc $u(x) = u(y) + \int_y^x u'(t)dt$

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \int_y^x |u'(t)|dt$$

de plus

$$|u(x)|^2 \leq |u(y)|^2 + \left(\int_0^1 |u'(t)|dt\right)^2 + 2|u(y)|\int_0^1 |u'(t)|dt \quad (3.11)$$

On intègre (3.11) par rapport à y de 0 à 1 et on utilise inégalité de Hölder, alors :

$$\begin{aligned}|u(x)|^2 \leq &\int_0^1 |u(y)|^2 dy + \int_0^1 |u'(t)|^2 dt + 2\int_0^1 |u'(t)|dt \int_0^1 |u(y)|dy. \\ \leq &||u(y)||^2_{W_2^3[0,1]} + 2||u||_{W_2^3}||u||_{W_2^3}. \\ \leq &3||u||^2_{W_2^3}.\end{aligned}$$

donc $|u(x)| \leq \sqrt{3}||u||_{W_2^3}$, et de la même façon, on obtient que $|u'(x)| \leq \sqrt{3}||u||_{W_2^3}$ □

Lemme 3.2.2. *[5] Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{||\cdot||_{W_2^3}} \overline{u}$, $||u_n||$ est bornée, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ et $f(x, u(x))$ est continue, alors $f(x_n, u_{n-1}(x_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(y, \overline{u(y)})$*

Démonstration. Soit :

$$|u_{n-1}(x_n) - \overline{u(y)}| = |u_{n-1}(x_n) - u_{n-1}(y) + u_{n-1}(y) - \overline{u(y)}|$$

par l'inégalité des accroissements finis, on trouve :

$$|u_{n-1}(x_n) - \overline{u(y)}| \leq |u'_{n-1}(\epsilon)|\,|x_n - y| + |u_{n-1}(y) - \overline{u(y)}|, \quad \textit{tell que } x_n \leq \epsilon \leq y$$

On a :

$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{u}$, c'est-à-dire : $|u_{n-1}(y) - \overline{u(y)}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
et d'après lemme 3.2.1, il s'ensuit que : $|u'(x)| \leq \sqrt{3}||u||_{W_2^3}$

En termes des limites de $||u_n||_{W_2^3}$ donc on obtient :

$$|u_{n-1}(x_n) - \overline{u(y)}| \to 0, \ lorsque \ n \to \infty$$

et comme f est continue, alors :

$$f(x_n, u_{n-1}(x_n)) \to f(y, \overline{u(y)}), \ lorsque \ n \to \infty.$$

□

Théorème 3.2.1. *[5] On suppose que* $||u_n||_{W_2^3}$ *est bornée dans l'équation* (3.8) *et le problème* (3.2) *admet une solution unique.*

Si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *est dense sur [0,1], alors le terme générale de la suite des solutions approchées* $u_n(x)$ *converge vers la solution analytique* $u(x)$ *de l'équation* (3.2) *et*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} B_{ij}\overline{\psi_{ij}(x)}.$$

où B_{ij} *est donné par* (3.10)

Démonstration. Au début, on va démontrer la convergence de $u_n(x)$.

De (3.8), on déduire que :

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} B_{i,j}\overline{\psi_{i,j}(x)}$$
$$u_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{2} B_{i,j}\overline{\psi_{i,j}(x)}$$
$$u_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} B_{i,j}\overline{\psi_{i,j}(x)} + \sum_{j=1}^{2} B_{n+1,j}\overline{\psi_{n+1,j}(x)}$$
$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \sum_{j=1}^{2} B_{n+1,j}\overline{\psi_{n+1,j}(x)} \tag{3.12}$$

Grâce à l'orthogonalité de $\left\{\overline{\psi_{i,j}}\right\}_{(1,1)}^{(\infty,2)}$, le lemme1.2.1 et le corollaire1.2.1 on a :

$$||u_{n+1}||^2 = ||u_n(x)||^2 + \sum_{j=1}^{2} B_{n+1,j}^2 = ... = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{2} B_{i,j}^2 \tag{3.13}$$

de (3.13), on considère que :

$$||u_{n+1}|| \geq ||u_n||$$

Comme $||u_n||$ est bornée, $||u_n||$ est converge donc il existe une constante tel que :

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{2} B_{i,j}^2 = c$$

Ce ci implique que $\left\{\sum_{j=1}^{2} B_{i,j}^2\right\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$

Si $m > n$, alors :

$$\begin{aligned} ||u_m - u_n||^2 =& ||u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + u_{m-2} + ... + u_{n-1} - u_n||^2 \\ ||u_m - u_n||^2 \leq& ||u_m - u_{m-1}||^2 + ||u_{m-1} - u_{m-2}||^2 + ... + ||u_{n+1} - u_n||^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

On remarque que $||u_m - u_n||^2 = \sum_{j=1}^{2} B_{m,j}^2$ d'après (3.13),

par conséquent : $||u_m - u_n||^2 = \sum_{l=n+1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{2} B_{l,j}^2\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

comme l'espace $W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1]$est complet, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{u}$.

Ensuite, on va montrer que $\overline{u}$ est la solution de l'équation (3.2).

En prenant les limites dans (3.8), on obtient :

$$\overline{u} = \lim_{n\to\infty} u_n$$

$$\overline{u(x)} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} B_{ij}\overline{\psi_{ij}(x)}.$$

On note que :

$$(A\overline{u})(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} B_{ij}A\overline{\psi_{ij}(x)}$$

et

$$\begin{aligned}(A\overline{u})_k(x_l) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} B_{ij} < A\overline{\psi_{ij}(x)}, \phi_{lk}(x) > \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} B_{ij} < \overline{\psi_{ij}(x)}, A^*\phi_{lk}(x) > \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} B_{ij} < \overline{\psi_{ij}(x)}, \psi_{lk}(x) >\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{l'=1}^{l}\sum_{k'=1}^{k} \beta_{l'k'}^{lk}(A\overline{u})_{k'}(x_{l'}) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} B_{ij} < \overline{\psi_{ij}(x)}, \sum_{l'=1}^{l}\sum_{k'=1}^{k} \beta_{l'k'}^{lk}\psi_{l'k'}(x) > \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} B_{ij} < \overline{\psi_{ij}(x)}, \overline{\psi_{lk}(x)} > \\ &= B_{lk}.\end{aligned}$$

Avec $B_{lk} = \sum_{l'=1}^{l}\sum_{k'=1}^{k} \beta_{l'k'}^{lk} F_{k'}(x_{l'}, u_{l'-1}(x_{l'}))$, alors $(A\overline{u})_{k'}(x_{l'}) = F_{k'}(x_{l'}, u_{l'-1}(x_{l'}))$.

Si l=1 alors, $(A\overline{u})_k(x_1) = F_k(x_1; u_0(x_1))$, k=1,2. C'est-à-dire $A\overline{u}(x_1) = F(x_1; u_0(x_1))$

Si l=2 alors, $(A\overline{u})_k(x_2) = F_k(x_2; u_1(x_2))$, k=1,2. C'est-à-dire $A\overline{u}(x_2) = F(x_2; u_1(x_2))$

De même $A\overline{u}(x_n) = F(x_n; u_{n-1}(x_n))$.

Comme $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est dense dans $[0,1]$, pour tout $y \in [0,1]$, il existe une sous suite $\{x_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$ tel que $x_{nj} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$.

On sait que $A\overline{u}(x_{nj}) = F(x_{nj}; u_{n,j-1}(x_{nj}))$, quand $j \to \infty$, d'après lemme 3.2.2 et la continuité de F, on a :

$$(A\overline{u})(y) = F(y; \overline{u}(y)) \tag{3.15}$$

De (3.15), il s'ensuit que $\overline{u}(x)$ est la solution de (3.2).

Puisque $\overline{\psi_{ij}(x)} \in W_2^3[0,1] \bigoplus W_2^3[0,1]$ et $\overline{u}(x)$ satisfaire les conditions aux limites du problème (3.2) donc $\overline{u}(x)$ est la solution de l'équation (3.2), comme $\overline{u}(x)$ vérifie les conditions aux limites du problème (3.2), alors la solution est unique.

La solution du problème (3.2) est :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} B_{ij} \overline{\psi_{ij}(x)}. \tag{3.16}$$

□

Chapitre 4

Conclusion

En conclusion, le système non linéaire du deuxième ordre en valeurs aux limites a été résolu par la méthode de noyau reproduisant.

Dans cette approche, des espaces de noyau reproduisant sont construit dans les-quelle les conditions aux limites données dans le problème peuvent être impliquées et les solutions analytiques du système ont été calculées sous la forme d'une série convergente.

Dans l'espace $W_2^3[0,1]$ à composantes calculables dans l'intervalle, les solutions à n-termes sont obtenues et il est prouvé qu'elle converge vers la solution analytique.

La méthodologie est basée sur la génération de la base orthonormée à partir des noyaux obtenus, tandis que la base orthonormée se construit pour formuler et exploiter les solutions sous forme d'une série dans l'espace $W_2^3[0,1]$.

Quelques exemples pour l'obtention du noyau sont présentés pour illustrer l'obtention des solutions.

Les idées de base de cette approche peuvent être utilisées pour résoudre d'autres systèmes non linéaires. Cette voie est validée par simulation numérique et comparaison des solutions approchées avec les solutions exactes.

Bibliographie

[1] Alain Yger Espaces de Hilbert et Analyse de Fourier 5 décembre 2013 .

[2] Chunli Li, Minggen Cui, The exact solution for solving a class nonlinear operator equations in the reproducing kernel. space, Appl. Math. Comput. 143 (2–3) (2003) 393–399.

[3] Cui, Minggen_ Lin, Yingzhen - Nonlinear numerical analysis in reproducing kernel space-Nova Science Publishers (2008) (1)

[4] Edoardo provenzi Des espaces Euclidiens aux espaces de Hilbert, Edoardo provenzi.

[5] Fazhan Geng , Minggen Cui Solving a nonlinear system of second order boundary value problems.

[6] François DE MARÇAY Espaces de Hölder lp(R^d) Département de Mathématiques d'Orsay Université Paris-Sud, France.

[7] George Mason University Orthogonal bases in Hilbert space.

[8] Jean-Pierre Demailly. "Analyse mathématique : Fonctions d'une variable" .

[9] Jeppsson, J. (2013). Reproducing Kernels.

[10] Mustafa Inc a, Ali Akgu¨l The reproducing kernel Hilbert space method for solving Troesch's problem.

[11] Nourhane Attia , Ali Akgül, Djamila Seba, Abdelkader Nour , Muhammad Bilal Riaz Reproduicing kernel hilbert space methode for solving fractal fractional differntial equations.

[12] Olivier Glass Université Paris-Dauphine DE MI2E, 2 ème année Algèbre linéaire 3 :normes, produits scalaires, espaces euclidiens, formes quadratiques.

[13] W Han, KE Atkinson Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework.

[14] YE Nuray, A Akgul, M Inc Reproducing kernel functions and homogenizing transforms.