RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE M'AHMED BOUGERRA

FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques

Mémoire de fin f'étude

Pour L'Obtension Du Diplôme De Master

En Mathématiques

Option : Mathématique Financières

Théorèmes limites pour l'image d'une chaine de Markov

Réalisé par :

ABBAS CHAIMA

NEZLIOUI NARIMANE

Encadré par :

Mme. LARABI (MAA)

Soutenu le 06 juillet 2023, Devant le jury composé de :

Mr TAZEROUTI : MCB	UMBB	- Présidente
Mme YASSA : MAA	UMBB	- Examinateur

Anneé universitaire : 2022 /2023

Remerciment

Tout d'abord nous rendons grâce à Dieu, lui qui nous a permis d'être bien portant afin d'effectuer ce travail du début jusqu'à la fin. Nous remercions nos parents respectifs pour leurs soutiens durant notre parcours de formation.

*Nos remerciements vont, à notre directeur de mémoire, le professeur **Mme LARABI GHENIMA**, elle qui nous a guidés avec ses orientations, ses conseils et ses critiques tout au long de ce travail de recherche en nous laissant la liberté dont on avait besoins. On ne peut que lui être reconnaissant surtout pour ses qualités intellectuelles et humaines.*

Nos remerciements vont aussi au membre du jury, pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'évaluer ce travail et de participer à la soutenance.

Dédicace

“ *Je dédie ce travail*

À mon père, pour son soutien, son affection et la confiance qu'il m'a accordé

*À ma Chère maman "**KHADIDJA** "pour son amour, ses encouragement et ses sacrifices*

Je leur serai reconnaissant tout le reste de ma vie

*À ma très chère sœur "**FATIMA**"*

*À mes chers frères "**YOUNES , BENISSA , LARBI**"*

*À mes amies "**WIAME , YASMINE , HAYAT , MARIA , IMANE** "*

*À ma deuxième famille "**BENDJEDOU**"* ”

CHAIMA

Dédicace

Je remercie mes parents mes soeur

Mes amis "**imane assia djamila zineb** "

NARIMANE

Table des matières

Table des figures

Introduction Générale

Les chaînes de Markov sont des outils puissants pour modéliser et analyser les phénomènes aléatoires dynamiques. Elles sont largement utilisées dans de nombreux domaines tels que les sciences de l'informatique, les sciences économiques, la biologie et bien d'autres. Une chaîne de Markov est une séquence de variables aléatoires qui évoluent selon une règle de transition probabiliste dépendant uniquement de l'état présent, et non des états passés. L'une des questions fondamentales dans l'étude des chaînes de Markov concerne le comportement à long terme de ces processus. Les théorèmes limites d'une image de chaîne de Markov sont des résultats clés qui permettent de comprendre et de caractériser cette convergence asymptotique.

L'objectif de ce mémoire de fin d'étude est d'explorer en détail les théorèmes limites d'une image chaîne de Markov dans le cas discret. Nous examinerons les concepts, les définitions et les résultats fondamentaux associés à ces théorèmes, en mettant l'accent sur le cas discret où l'espace d'états et le temps sont tous les deux discrets. Nous étudierons les conditions requises pour l'application de ces théorèmes et les méthodes de démonstration qui les soustendent. Nous présenterons également des exemples concrets pour illustrer l'application pratique de ces théorèmes dans différents domaines.

En plus des aspects théoriques, nous discuterons également des applications potentielles des théorèmes limites d'une image de chaîne de Markov dans des domaines tels que la modélisation du trafic, l'analyse financière, la biologie des populations, etc. Nous aborderons les avantages et les limitations de ces théorèmes, ainsi que les perspectives de recherche future pour leur extension et leur application dans des contextes plus complexes.

Ce mémoire est structuré par trois chapitres Dans le premier chapitres nous étudions les chaines de Markov dans le cas général .

Ce chapitre est partagé en deux parties :

La premières partie est consacré pour les définitions et les propriétés ainsi que la caractérisations des états d'une chaine de Markov.

La deuxième partie, on a donné quelques résultats sur le comportement asymptotique , les théorèmes limites d'une chaine de Markov . On termine ce chapitre par un exemple d'application en finance .

De même pour le deuxième chapitre on a deux parties :

La première partie concerne l'image d'une chaine de Markov en général , en particulier la chaine de Markov image.

La deuxième partie est l'objectif de notre travail , consiste à appliqué les résultats qu'on a donné dans le premier chapitre sur l'image d'une chaine de Markov , en particulier sur la chaine de Markov image.

Le troisièmes chapitres est consacré pour l'application sur Matlab des théories étudiées dans les chapitres précédents.

Chapitre 1

Chaine de Markov

1.1 Introduction

Les chaînes de Markov constituent un des exemples les plus simples de suites de variables aléatoires X_n. Les variables X_n sont à valeurs dans un ensemble E appelé espace d'état.

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n, n \in \mathbb{N})$ qui permet de modéliser l'évolution dynamique d'un système aléatoire : X_n représente l'état du système à l'instant n. La propriété fondamentale des chaînes de Markov, dite propriété de Markov, est que son évolution future ne dépend du passé qu'au travers de sa valeur actuelle. Autrement dit, conditionnellement à $X_n, (X_0, ..., X_n)$ et $\left(X_{(n+k)}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants.[7]

1.2 Définitions et Propriétés

1.2.1 Chaine de Markov

Définition 1.2.1 *Soit $(X_n), n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires. à valeurs dans un espace E fini ou dénombrable, appelé espace d'états. On dit que $(X_n), n \in \mathbb{N}$ est une chaîne de Markov si et seulement si :*

$$p(X_{(n+1)} = j|X_n = i, X_{(n-1)} = i_{(n-1)}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{(n+1)} = j \mid X_n = i).....(1)$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, pour tout état j et pour toute suite d'états $i_0, , ..., i_{n-1}$, i pour lesquels la probabilité conditionnelle a un sens, i.e

$$p(X_n = i, X_{(n-1)} = i_{(n-1)}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) > 0$$

Remarque 1 *Une réalisation du vecteur aléatoire $(X_0, , , ..., X_n)$ est parfois appelée trajectoire de la chaîne de Markov $X_n, n > 0$.*

Remarque 2 ■ *L'état du processus à l'instant $(n+1)$ ne dépend que de celui à l'instant n précédent, mais non de ses états antérieurs.*

■ *On dira qu'un tel processus est sans mémoire .*

1.2.2 Chaîne de Markov homogène

Une chaîne de Markov est dite homogène (dans le temps), si la probabilité suivante définie par $p_{i,j}(n) = p\,(X_{n+1} = j/X_n = i)$ ne dépend pas de n. ie,

$$p_{i,j}(n) = P(X_{n+1} = j|Xn = i) = p_{i,j} = p(X1 = j|X0 = i), n \geq 0$$

Dans toute la suite, on considère un chaine de Markov homogène $(X_n)_n$ d'espace d'états.

1.2.3 Probabilité de transition :

Définition 1.2.2 *On définit la probabilité de transition de l'état i à l'état j entre les instants n et n + 1 par la quantité*

$$p_{ij} = p(X_{(n+1)} = j \mid X_n = i), \forall i, j \in E$$

Où, P_{ij} : probabilité pour que le système soit dans l'état j à l'instant n+1 sachant à l'instant n il se trouvait à l'état i.[10]

1.2.4 Matrice de transition :

Définition 1.2.3 *On appelle matrice de transition de $(X_n)_n$ la matrice :*

$$P = (p_{i,j})i, j \in E :$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{i_0,j_0} & p_{i_0,j_1} & p_{i_0,j_2} & \cdots \\ p_{i_1,j_0} & p_{i_1,j_1} & p_{i_1,j_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

La matrice de transition P de la chaine de Markov discret (X_n) est une matrice carrée.[4]

Exemple 1.2.1 *On invente un dé magique : Il se comporte comme un dé normal au premier lancer, puis par la suite ne peut pas prendre 2 fois la même valeur d'affiler (et tombe de manière équiprobable sur les cinq autres valeurs à chaque lancer). On note la distribution initiale μ_0 :*

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Si on pose (X_n) la valeur du dé du $(n+1)$-ème lancer, alors (X_n)est une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et la matrice associée à cette chaîne de Markov est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.5 Les propriétés d'une matrice de transition :

Proposition 1.2.1 *Toute matrice de transition vérifie les propriétés suivantes :*

- *pour tout couple (i,j) de E,* $0 \le p_{i,j} \le 1$;
- *pour tout $i \in E$, on a* $\sum_{j \in E} p_{i,j} = 1$.

Preuve 1 *Les nombres $p_{i,j}$ sont des probabilités, donc le premier point est évident. Le second point découle du fait qu'on somme les probabilités sur toutes les valeurs possibles d'une variable aléatoire.*

Proposition 1.2.2 *Soit P une matrice stochastique. Alors P admet 1 comme valeur propre ; le vecteur V ayant toutes ses composantes égales à 1 est un vecteur propre associé à cette valeur propre .*

1.2.6 Graphe de probabilité :

Définition 1.2.4 *Un graphe de probabilité est un graphe orienté pondéré tel que :*

- *Tous les poids appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,1]$.*
- *La somme des poids des chemins issus d'un sommet est égale à 1.*

La matrice d'adjacence d'un graphe de probabilité est une matrice stochastique.
Par exemple le graphe d'une chaîne de Markov à trois états :

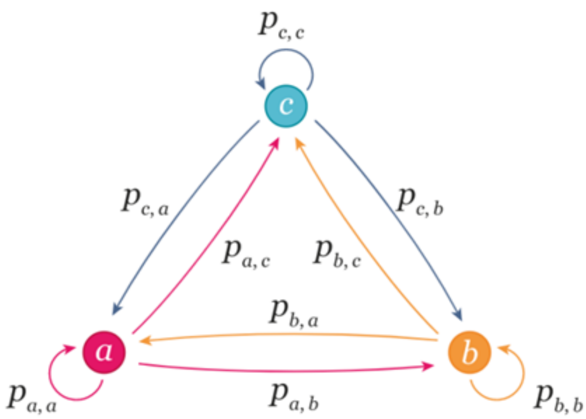

FIGURE 1.1 – Graphe d'une chaîne de Markov à trois états

Exemple 1.2.2 *Pour la matrice de transition suivante d'une chaine de Markov d'espace d'états $E = \{A, B, C\}$:*

$$P = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.55 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}$$

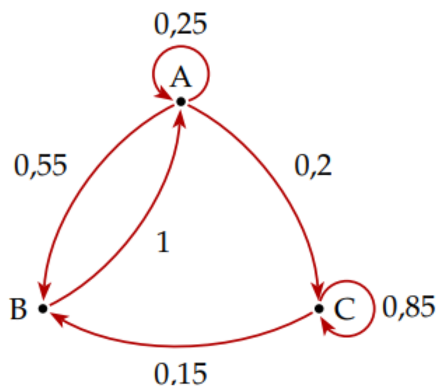

FIGURE 1.2 – Graphe de la chaîne de Markov de exemple 2

Remarque 3 *On pourra définir une chaîne de Markov par un graphe de probabilité .*

1.3 Distribution de transition :

1.3.1 Chapman-Kolmogorov :

On peut décomposer la probabilité de transition de l'état i vers l'état j entre la date l et la date $l+m$ en fonction de l'état occupe à une date intermédiaire $l+n(1 \leq n < m)$. Dans le cas général (non homogène), on a :

$$p_{i,j}^{l,l+m} = \sum_{k \in E} p_{i,k}^{l,l+n} p_{k,j}^{l+n,l+m}.$$

Cas particulier : Dans le cas d'une chaine de Markov homogène, l'équation générale est :

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{l+m} &= \sum_{(k \in E)} p_{i,k}^{l} p_{k,j}^{m} \\ &= \sum_{(k \in E)} p_{i,k}^{m} p_{k,j}^{l} \end{aligned}$$

1.3.2 Relation Chapman-Kolmogorov

Théoreme 1.3.1 *Soit une chaîne de Markov homogène et $P = (p_{i,j})$ sa matrice de transition. Si on note $P^n = p^n_{i,j}{}_{i,j}$, on a alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$*

$$p_{i,j}^{n} = p(X_0 = i)(X_n = j)$$

Corollaire 1.3.1 *L'équation de Chapman-Kolmogorov implique l'inégalitéé suivante pour tout i, j et k :*

$$p_{i,j}^{l+m} \geq p_{i,k)k,j}^{l \quad m}$$

Preuve 2 $p_{i,k}^{l} p_{k,j}^{m}$ *n'est qu'un des éléments du terme de droite de l'équation*

$$p_{i,j}^{l+m} = \sum_{k \in E} p_{i,k}^{l} p_{k,j}^{m}$$

dont tous les termes sont positifs.

1.4 Loi de probabilité de X_n

L'analyse du régime transitoire d'une chaîne de Markov d'espace d'états dénombrables consiste à déterminer le vecteur $p_i^{(n)}$ des probabilités d'états qu'on note généralement

$$p_i^{(n)} = p(X_n = i)$$

Pour que la chaîne $(X_n, n \in \mathbb{N})$ se trouve dans l'état i après n pas. La distribution de X_n peut être décrite sous la forme de la vecteur ligne : $\pi_n = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, ..)$, dont la somme des termes vaut 1 :
Pour calculer le vecteur π_n, il faut connaître soit la valeur prise par X_0, c'est-à-dire l'état initial du processus, soit sa distribution initiale et les probabilité de transitions.

$$\pi_0 = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, p_i^{(0)}, \ldots)$$

D'après le théorème des probabilités totales, on a

$$p(X_n = i) = \sum_{(j \in E)} p(X_0 = j).p(X_n = i|X_0 = j)$$

$$p_i(n) = \sum_{(j \in E)} p_i(0).P_{i,j}(n)$$

Nous avons aussi la notation matricielle de la relation qui est donnée comme suit :

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} p^{(n)}$$

De façon analogue, on obtient :

$$p^{(n)} = \pi^{(0)} p^{(n)}$$

1.5 Classification des états :

1.5.1 Classes d'états communicants :

⊚ **Etat accessible :** Soient i et j deux états d'une chaine de Markov X_n d'espace d'états dénombrable E. On dit que l'état j est accessible à partir de i si et seulement si la probabilité de passer de i à j est non nulle :

$$\exists n \geq 0, p_{i,j}^{n} = p(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$$

⊚ **Etat communiquant :** On dit que les états i et j communiquent et on note $i \longleftrightarrow j$ si et seulement si j est accessible à partir de i et i est accessible à partir de j.

$$i \longleftrightarrow j \Longleftrightarrow \begin{cases} i \rightarrow j \\ j \rightarrow i \end{cases}$$

1.5.2 Classes d'équivalence sur les états

Il est important de noter que la communication entre états est une relation d'équivalence :

★ la réflexivité vient du fait que $\forall i : p_{i,i}^{0} = 1$

★ la symétrie vient du caractère symétrique de la définition elle même,

★ la transitivité se démontre en utilisant le corollaire 1 précédent,

$$\begin{aligned} \{i \rightarrow j, j \rightarrow k\} &\Rightarrow \exists (l,m) : p_{i,j}^{l} > 0, p_{j,k}^{m} > 0 \\ &\Rightarrow p_{i,k}^{l+m} \geq p_{i,j}^{l} p_{j,k}^{m} > 0 \\ &\Rightarrow i \rightarrow k \end{aligned}$$

Et symétriquement pour " $i \rightarrow k$ "

La communication induit donc des classes d'équivalence dans l'ensemble des états : on peut découper l'ensemble des états en classes d'états communiquant entre eux, ces classes ne communiquant pas entre elles.

Exemple 1.5.1 *On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Cette chaîne possède deux classes de communication : $C_1 = \{1,2\}$ *et* $C_2 = \{3,4\}$. *Ces classes ne communiquent pas entre elles : on peut passer de* C_1 *à* C_2 *mais pas le contraire. Le graphe associé à cette matrice est présent dans la Fig 1.3.*

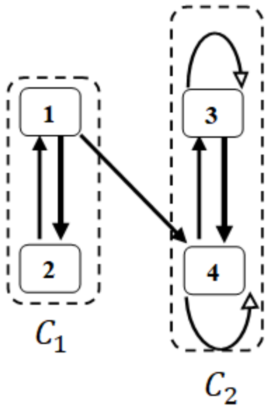

FIGURE 1.3 – Graphe avec classes de communication

1.5.3 Récurrence et transience :

Pour tout état j, désignons par T_j le temps d'atteinte de l'état j à partir de l'instant 1 ; autrement dit $T_j = \inf\{n \geq 1, X_n = j\}$ et N_j= le nombre de passage la suite X_n en x

Définition 1.5.1 *On dit que l'état j est récurrent si, partant de l'état j, la probabilité que la chaîne de Markov retourne à l'état j en un temps fini est égale à 1, i.e. si*

$$p_j\left(T_j < +\infty\right) = p\left(T_j < +\infty \mid X_0 = j\right) = 1.$$

Sinon, lorsque $p(T_j < +\infty \mid X_0 = j) < 1$, *l'état j est transient ou transitoire.*

Définition 1.5.2 *Un état* $j \in E$ *est récurrent positif si* $\mathbb{E}_j[T_j] < \infty$.
Si un état est récurrent et n'est pas récurrent positif, il est dit récurrent nul.

Proposition 1.5.1 ◇ *Si j est récurrent, le nombre de passages en j en partant de j est presque sûrement infini :* $p_j(N_j = +\infty) = 1$, *et* $\mathbb{E}_j\left[N_j\right] = \infty$.

◇ *Si j est transient, le nombre de passages en j en partant de j (c'est-à-dire N_j conditionné par $X_0 = j$) suit une loi géométrique et est donc presque sûrement fini, et d'espérance finie. De plus, si j est transient, le nombre de passages en j en partant de i est également p.s. fini et d'espérance finie.[2]*

Exemple 1.5.2 *le graphe ci-dessus explique les différents types d'état pour une chaîne de Markov*

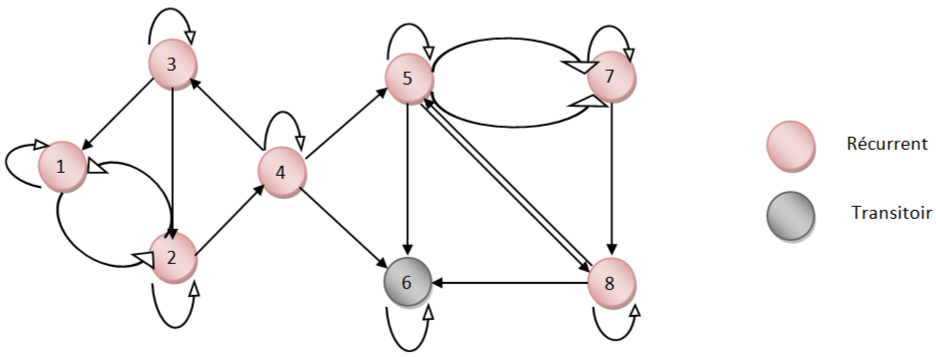

FIGURE 1.4 – les différents types d'état pour une chaîne de Markov

1.5.4 Irréductible :

Définition 1.5.3 *S'il n'y a qu'une seule classe pour la relation de communication, autrement dit, si tous les états communiquent entre eux, la chaîne est dite irréductible.*

Théoreme 1.5.1 *Soit X_n une chaîne de Markov homogène irréductible, les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- *tous les états sont récurrents positifs,*
- *il existe au moins un état récurrent positif,*
- *X_n admet une probabilité invariante π.*

Si l'une de ces conditions est réalisée, π est unique :

$$\forall i \in E, \pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}_i(T_i)}$$

Le théorème précédent établit que la récurrence positive ($resp.nulle$) est une propriété de classe et donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une chaîne de Markov homogène irréductible soit récurrente positive.

Exemple 1.5.3 *Soit une chaine de Markov d'espace d'état $E = \{0, 1, 2\}$ et de la matrice de transition :*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Cette chaîne est irréductible. Tous les états communiquent,

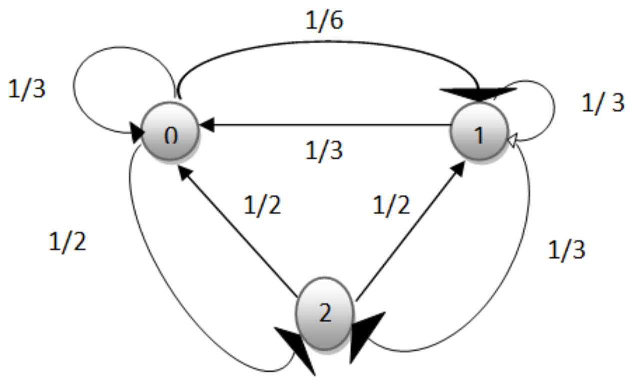

FIGURE 1.5 – Graphe de transition de exemple 5

1.5.5 Périodicité :

Définition 1.5.4 *La période d_i de l'état $i \in E$ est par définition, $d_i = PGCD\{n \geq 1; p_{ii}(n) > 0\}$, avec la convention $d_i = +\infty$ s'il n'y a pas d'indice $n \geq 1$ tel que $p_{i,i}(n) > 0$ (on ne revient pas en i). Si $d_i = 1$, l'état i est dit apériodique, sinon on que la chaine est périodique.*

Théoreme 1.5.2 *Si les états i et j communiquent, ils ont la même période.*

Preuve 3 *Comme i et j communiquent, il existe des entiers m et n tels que $p_{i,j}(m) > 0$ et $p_{i,j}(l) > 0$. Pour tout $k \geq 1$,*

$$p_{i,i}(m + nk + l) \geq p_{i,j}(m)(P_{j,j}(k)np_{i,j}(l)$$

(En effet, un chemin tel que $\left(X_0 = i, X_m = j, X_{(m+k)} = j, ..., X_{(m+nk)} = j, X_{(m+nk+l)} = i\right)$ est un des moyens parmi d'autres d'aller de i à i en $m + nk + l$ étapes).
Donc, pour tout $k \geq 1$ tel que $p_{j,j}(k) > 0$, on a $p_{i,i}(m + nk + l) > 0$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, d_i divise $m+nk+l$ pour tout $n \geq 1$, et en particulier, d_i divise k. On a donc montré

que d_i divise tout k tel que $P_{j,j}(k) > 0$, et en particulier, d_i divise d_j .
Par symétrie, d_j divise d_i, et donc, finalement $d_i = d_j$.

1.6 Comportement asymptotique d'une chaine de markov :

Dans cette section , notre objectif est d'étudier le comportement asymptotique d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, , En outre , nous posons deux questions spécifiques sur le comportement de cette chaîne de Markov :

- √ Si n est grand, que peut-on dire de la loi marginale $\pi_n = \pi_0 P^n$? Y-a-t'il une convergence en loi $\pi_n \to \pi$ pour une certaine mesure de probabilité γ ?

- √ On peut considérer la moyenne en utilisant une analogie avec la loi des grands nombres

$$M_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$$

d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$, le long d'une trajectoire de la chaîne de Markov.
Si les X_i sont des variables i.i.d., on sait que $M_n(f) \to \mathbb{E}(X_i)$ presque sûrement (par exemple pour une fonction bornée ; c'est la loi des grands nombres classiques).
Y-a-t'il le même genre de résultats avec une chaîne de Markov ?
Ces deux problèmes font intervenir les mêmes éléments pour leur résolution : les mesures invariantes (ou stationnaires) d'une matrice stochastique . Nous devons d'abord nous pencher sur l'étude de ces mesures.

1.6.1 Mesures invariantes :

Dans tout ce qui suit, la suite $(X_n)n \in \mathbb{N}$ représente une chaîne de Markov évoluant sur un espace d'états E et dont la matrice de transition P est constante. On peut définir une mesure π sur un espace d'états E dénombrable de manière pratique en utilisant un vecteur ligne donné $\pi = (\pi)_i), i \in E$ où $\pi_i = \pi(i)$.

Définition 1.6.1 *Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène, on dit qu'une mesure π sur E est invariante par P si et seulement si elle est positive et satisfait l'équation matricielle $\pi P = \pi$.*
L'intérêt pour les mesures invariantes est justifié par la proposition suivante :

Proposition 1.6.1 • $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *est une chaîne de Markov homogène et que* π *est une probabilité invariante telle que la loi de* X_k *soit égale à* μ *à un instant k, alors la loi de* X_m *est également égale à* μ *pour tout instant ultérieur* $m \geq n$.

- *Lorsque E est un espace d'états fini et que pour tout couple (i,j) de* $\mathbb{E}^2$, $P^n(i,j)$ *converge vers* $L_i(j)$, *alors* L_i *est une probabilité invariante de P.*

Preuve 4 ♣ *Il est facile de vérifier que si* μ *est la loi de* X_k, *alors* μP *est la loi de* $X_{(k+1)}$.

♣ *Si la suite de matrices* P^n *converge vers la matrice L, alors* $P^{(n+1)}$ *converge également vers L. Comme* $P^{(n+1)} = P^n P$ *, la matrice limite L satisfait* $L = LP$ *(en raison de la linéarité du passage à la limite, E étant fini), ce qui signifie que chacune de ses lignes Li satisfait* $L_i = L_i P$.

Il convient de chercher les mesures limites possibles parmi les mesures invariantes.

Théoreme 1.6.1 *Toute chaîne de Markov homogène récurrente irréductible possède une mesure invariante strictement positive sur E, et toutes les mesures invariantes sont proportionnelles.*

1.6.2 Mesure réversible :

Définition 1.6.2 *Soit* $\pi = (\pi)_{(i\in E)}$ *une mesure de probabilité sur E. On dit que* π *est une mesure réversible pour la chaîne de Markov de matrice de transition P, ou que la matrice P est* π*−réversible, si :*

$$\pi_i p_{i,j} = \pi p_{j,i}, \forall i,j \in E...(1)$$

Observons tout d'abord qu'une mesure réversible est nécessairement stationnaire. En effet si on somme par rapport à j l'équation (1) on obtient :

$$\pi_i = \sum_{j\in E} \pi_j p_{j,i}, \forall i,j \in E$$

qui est la condition de stationnarité.

1.7 Distribution d'une chaine de Markov :

1.7.1 Chaîne de Markov Stationnaire :

Définition 1.7.1 *Une chaîne de Markov est dite stationnaire si la distribution π_n est indépendante du temps n :*
En d'autres termes si la distribution initiale π_0 est une distribution stationnaire de la chaîne de Markov en question.

1.7.2 Distribution stationnaire :

Définition 1.7.2 *Supposons que $\rho < 1$, et soit $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots .\pi_n)$ la distribution de la chaîne de Markov . Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution π elle-même,*

$$\pi P = \pi$$

Une distribution de probabilité discrète $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots .\pi_n)$ est dite stationnaire par rapport à une matrice stochastique P si :

$$\pi P = \pi$$

1.7.3 Calcule de la distribution stationnaire :

Pour calculer la distribution stationnaire d'une chaine de Markov d'espace d'états fini, on résout le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_i p_{ij}, j \in E \\ \sum_{i=1}^{n} \pi_j = 1 \end{cases}$$

Théoreme 1.7.1 *Si la distribution initiale d'une chaîne de Markov homogène est la distribution stationnaire, la chaîne de Markov homogène est stationnaire*

Théoreme 1.7.2 (l'existence d'une distribution stationnaire) *Pour une chaine de Markov d'espace d'états fini, il existe toujours au moins une distribution stationnaire.*

Théoreme 1.7.3 (l'unicité de distribution stationnaire) *La distribution stationnaire si elle existe, n'est pas nécessairement unique. Son unicité dépend de nombre de classes récurrentes.*

Donc pour chaque classe récurrente C_j, il existe une distribution stationnaire π_{c_j}, et les coordonnées $\pi_{c_{ji}}$ sont nulles pour touts les états i n'appartenant pas à C_{ij}.

Exemple 1.7.1 *Chaîne de Markov à 2 états. L'espace d'état est $E = \{1,2\}$ et la matrice de transition est :*

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta \in [0,1]$, on a :

$$\pi_1 = \pi_1(1\alpha) + \pi_2\beta$$

$$\pi_2 = \pi_1\alpha + \pi_2(1-\beta).$$

Ce système dépendant se réduit à une seule équation $\pi_1\alpha = \pi_2\beta$ à laquelle il faut ajouter $\pi_1 + \pi_2 = 1$ qui exprime que π est une probabilité. On obtient :

$$\pi_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

.

1.7.4 Distribution limite :

On dit qu'une chaîne de Markov converge vers π ou possède une distribution limite π si :

$$lim_{n\to\infty}\pi^n = \pi$$

et cela indépendamment de la distribution initiale π_0 [10]

1.7.5 Différence entre distribution limite et distribution stationnaire :

Si π^* est la distribution limite d'une chaine de Markov alors π^* est l'unique distribution stationnaire de cette chaîne $(\pi^* = \pi)$. La réciproque est fausse.

Remarque 4 *une chaine de Markov irréductible possède une unique distribution stationnaire ne possède pas nécessairement une distribution limite.*

1.8 Théorèmes limites :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov dans l'espace d'états E, μ_0 la loi initiale de X_n et P matrice de transition .

Théoreme 1.8.1 *i est un état récurrent, alors sous P_i on a $\frac{N_n}{n} \to \frac{1}{\mathbb{E}_i(T_i)}$*

1.8.1 Convergence en loi :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène irréductible apériodique pour laquelle il existe une probabilité invariante π. Alors, pour toute loi initiale μ_0,

$$P_{\mu_0}(X_n = j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_j.$$

En particulier, pour tout état i, $P^n(i,j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_j$ [8].

Théoreme 1.8.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un ensemble Ω de matrice de transition P et de loi initiale μ_0. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(f_{ik})_{0\leq k\leq n}$ des fonctions de Ω dans C. Alors, pour tout $k \in \Omega$*

$$\mathbb{E}(\prod_{k=0}^{n} f_k(X_k)) = \mu_0(f_0 P(f_1 P(f_2 p(\ldots(f_{n-1} P f_n)))))(1)$$

où • représente le produit terme à terme de vecteurs (i.e le produit de fonctions). Ce théorème nous conduira assez vite (en remplaçant $f_1 \ldots\ldots f_{n-1}$) par la fonction constante égale à 1, que l'on notera $\mathbb{1}$) à nous poser la question du comportement de P_n quand n devient grand.
C'est l'objet du théorème de Perron Frobenius.

Preuve 5 *Tout d'abord on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(f_i)_{0\leq i\leq n}$ des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$, alors*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{n} f_i(X_i)\right) = \sum_{\sigma\in\Omega} \mu_0(\sigma) E\left(\prod_{0\leq i\leq n} f_i(X_i) | X_0 = \sigma\right) \quad \ldots(1.1)$$

On démontre alors le résultat par récurrence :

- ✓ *Pour n=0,le théorème de transfert indique que l'espérance de $(f_0(X_0))$ est simplement le produit de vecteur ligne μ_0 par le vecteur colonne $(f_0(X_0))$ .on a bien le résultat attendu.*

- ✓ *Pour n=1, on a pour $\sigma \in \omega$ fixé :*

$$
\begin{aligned}
E(f_0(x_0)f_1(x_1)|X_0=\sigma) &= \sum_{j\in\Omega} p(\sigma,j)(f_0(\sigma)f_1(j)) \\
&= \sum_{j\in\Omega} f_0(\sigma)p(\sigma,j)f_1(j) \\
&= f_0(\sigma)\left(\sum_{j\in\Omega} p(\sigma,j)f_1(j)\right)
\end{aligned}
$$

et la propriété est bien vérifiée grâce au résultat (1.1)

Soit $n \geq 1$*, supposons que le résultat est vrai au rang n-1,alors en posant* $x_0=\sigma$ *:*

$$
\begin{aligned}
E\left(\prod_{i=0}^{n} f_i(X_i)|X_0=\sigma\right) &= \sum_{x_1,\ldots,x_n\in\Omega} f_0(\sigma)\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)p(x_{i-1},x_i) \\
&= \sum_{x_1,\ldots,x_n\in\Omega}\left(\prod_{i=1}^{n-1} p(x_{i-1},x_i)f_i(x_i)\right)\cdot p(x_{n-1})f_n(x_n) \\
&= f_0(\sigma)\sum_{x_1,\ldots,x_n\in\Omega}\left(\prod_{i=1}^{n-1} p(x_{i-1},x_i)f_i(x_i)\right)\cdot f_n(x_{n-1})
\end{aligned}
$$

On pose pour tout $i \in \{0,\ldots\ldots.,n\}$

$$
g_i = \begin{cases} f_n & \text{if } i < n-1 \\ f_{n-1}\cdot(p\cdot f_n) & \text{if } i = n-1 \end{cases}
$$

On a alors par hypothèse de récurrence :

$$
\begin{aligned}
E\left(\prod_{i=0}^{n} f_i(X_i)|X_0=\sigma\right) &= E\left(\prod_{i=0}^{n} g_i(X_i)|X_0=\sigma\right) \\
&= g_0(\sigma)p(g_1\cdot p(g_2\cdot\ldots\cdot(g_{n-2}\cdot p(g_{n-1}))\ldots))(\sigma) \\
&= f_0(\sigma)p(f_1\cdot p(f_2\cdot\ldots\cdot(f_{n-1}\cdot p(f_n)))\ldots)(\sigma)
\end{aligned}
$$

Quelques conséquences

Proposition 1.8.1 *Soit* $n\in\mathbb{N}, et i_0,\ldots,i_n \in \Sigma$*, alors :*

$$
\mathbb{P}(X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n) = \mu_0 P_{i_0,i_1}\ldots P_{i_{n-1},n}.
$$

Preuve 6 *On pose, pour tout* $i\in[0,n], f_k = \mathbb{1}_{i_k}$.

On remarque que :

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{i_k}(X_k)\right)...(1)$$

On peut alors appliquer le théorème précédent :

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = \mu_0(i_0)(\mathbb{1}_{i_1}.P(\mathbb{1}_{i_2}.P(...(\mathbb{1}_{i_{n-1}}.P\mathbb{1}_{i_n})))...)(i_0).$$

Or, on remarque que $\mathbb{1}_{i_n}.P\mathbb{1}_{i_{n+1}} = P_{i_n,i_{n+1}}\mathbb{1}_{i_n}$. *On montre alors par récurence que :*

$$P(\mathbb{1}_{i_k}.P(\mathbb{1}_{i_2}.P(...(\mathbb{1}_{i_{n-1}}.P\mathbb{1}_{i_n})))...)(i_0) = \prod_{k=0}^{n-1} P_{i_k,i_{k+1}}.$$

1) *Initialisation :L'équation (1) est vérifiée pour n=0,*

2) *Hérédité : Supposons (1) vraie pour un certain n, alors :*

$$\begin{aligned} P\left(\mathbb{1}_{i_1}....\left(\mathbb{1}_{i_n}.P\mathbb{1}_{i_{n+1}}\right)...\right)(i_0) &= P\left(\mathbb{1}_{i_1}....\left(P_{i_n,i_{n+1}} * \mathbb{1}_{i_n}\right)...\right)(i_0) \\ &= P_{i_n,i_{n+1}} \times P\left(\mathbb{1}_{i_1}....\left(\mathbb{1}_{i_n}\right)...\right)(i_0) \\ &= P_{i_0,i_1}...P_{i_n,i_{n+1}}. \end{aligned}$$

Proposition 1.8.2 *Pour toutes fonctions f, g de* Ω *dans* $\mathbb{C}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left(f(X_0)g(X_n)\right) = \mu_0(f.P^n g))$$

où . encode le produit de fonctions.[11]

Preuve 7 *On pose* $f_0 = f, f_i = \mathbb{1}$ *pour* $1 \leq i \leq n-1$ *et* $f_n = g$. *On a alors :*

$$\mathbb{E}\left(f(X_0)g(X_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(X_0)g(X_1)...f_n(X_n)\right).$$

Donc avec le théorème précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X_0)g(X_n)) &= \mathbb{E}(f(X_0)g(X_1)...f_n(X_n)) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mu_0(i_k)\mathbb{E}(f(X_0)g(X_1)...f_n(X_n) \mid X_0 = i_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mu_0(i_k)P(f_1P(f_2P(...(f_{n-1}Pf_n)))...)(i_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mu_0(i_k)(f.P^n g))(i_k) \\
&= \mu_0 f.(P^n g)
\end{aligned}$$

Proposition 1.8.3 *Pour toutes fonctions g de Ω dans $\mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{E}(g(X_n)) = \mu_0(P^n g).$$

[11]

Preuve 8 *Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $f = \mathbb{1}$.*

Définition 1.8.1 *Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, noté $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si X admet comme densité de probabilité la fonction f définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)\right).$$

Corollaire 1.8.1 *: Sous P_i avec i récurrent, les suites de variables aléatoires :*

$$(\tau_{k+1} - \tau_k, k \geq 1) et \sum_{i=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f(X_i), k \geq 1$$

sont iid.

Définition 1.8.2 *Un état récurrent positif et apériodique est dit ergodique. Une chaîne irréductible, apériodique et récurrente positive est dite chaîne ergodique.[12]*

1.8.2 Théorème ergodique :

Théoreme 1.8.3 *Soit P une matrice de transition irréductible et récurrente positive, π son unique distribution stationnaire et $f : E \to \mathbb{R}$. Si $\sum_{i\in E} \mid f(i) \mid \pi(i) < \infty$, alors pour toute distribution initiale π_0, On a :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow{P.S} \sum_{i\in E} \pi_i f(i) = E_\pi(f(X_0))$$

De plus, si i est récurrente positive de probabilité invariante π, pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ bornée (Le résultat peut se généraliser à f $(\pi - intgrable)$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow{P.S} \sum_{i\in E} \pi_i f(i) = \mathbb{E}_\pi(f(X_0)), n \to \infty.[9].$$

Preuve 9 *En écrivant*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \sum_{k=1}^{n} f(X)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}X_k = x = \sum_{k=1}^{n} f(x)\frac{N_x^n}{n}$$

Et en utilisant le fait que $\frac{N_x^n}{n} \to \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}$ et que $\frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)} = \pi(x)$ par le Théorème 1.8.1 et que $\frac{N_x^n}{n} \to \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x})$, l'intuition est claire. Pour la preuve formelle, on suppose sans perte de généralité que$f \geq 0$ et on utilise la décomposition en cycles. Soit (τ_k) les instants de visite successifs de x fixé et

$$U_k = \sum_{i=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f(X_i)$$

Alors les $(U_k, k \geq 2)$ sont i.i.d par Markov fort (corollaire précédent), et

$$\frac{N_x^n}{n}\frac{1}{N_x^n}\sum_{i=1}^{N_x^n} U_i \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \leq \frac{N_x^n+1}{n}\frac{1}{N_x^n+1}\sum_{i=1}^{N_x^n+1} U_i$$

avec N_x^n le nombre de visites en x entre 0 et n.

On a vu que $\frac{N_x^n}{n} \xrightarrow{P.S} \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}$ et donc la loi forte des grands nombres donne

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow{P.S} \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}\mathbb{E}_x(U_1) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}\mathbb{E}_x\sum_{i=0}^{T_x-1} f(X_i)$$

Proposition 1.8.4 *Les moyennes de Césaro des matrices P_n d'une chaîne de Markov homogène* *irréductible convergent :*

$$\forall (i,j) \in E \times E; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k(i,j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}_j(T_j)}$$

avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$ *pour les états j transients ou récurrents nuls.[5]*

Définition 1.8.3 *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On dit que* (X_n) *converge en loi vers* X *si pour toutes fonction continue bornée* φ *sur* E *à valeurs réelles :*

$$\mathbb{E}(\varphi_{X_n}) \to \mathbb{E}(\varphi(X))$$

Définition 1.8.4 *Soit* X *une variable aléatoire réelle. On définit alors la fonction caractéristique* φ_X*de* X *:*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Le théorème central limite joue un rôle essentiel pour démontrer la convergence en loi d'une variable aléatoire spécifique. C'est pourquoi le théorème suivant revêt une importance capitale dans les démonstrations du théorème central limite.

Théoreme 1.8.4 (Théorème de Lévy) *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi et* X *une variable aléatoire réelle. Il y'a équivalence entre les 2 assertions suivantes :*

- ♢ $(X_n)_n$ *converge en loi vers* X *.*
- ♢ $(\phi_{X_n})_n$ *converge simplement vers* ϕ_X*.*

Remarque 5 *Pour la démonstration, on réfère le lecteur à l'on trouve une application du théorème de Lévy, une version renforcée de la loi faible des grands nombres.[6]*

1.8.3 Théorème central limite pour les chaînes de Markov

Théoreme 1.8.5 *Soit* $(X_n)_n$ *une chaîne de Markov de matrice stochastique P associée primitive. Soit F une application de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*, soit* π *l'unique mesure stationnaire de P (donnée par le théorème de Perron Frobenius) et supposons que* $\pi F = 0$*. On note :*

$$\sigma^2(F) = \pi(F^2) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \pi(F \cdot P^n F)$$

Posons :

$$S_n(F) = \sum_{k=1}^{n-1} F(X_k).$$

La suite $(S_n(F))$ *converge en loi vers* $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(F))$

Preuve 10 *[11]*

1.9 Exemple d'application d'une chaîne de Markov en finance :

Modélisation des tendances de marché [3]

Introduction :

Les chaînes de Markov sont largement utilisées dans le domaine de la finance pour modéliser les tendances de marché et prévoir les mouvements futurs des prix des actifs financiers. Dans cette application, nous allons créer un modèle de chaîne de Markov pour prédire les tendances du marché boursier en utilisant des données historiques des prix des actions. Nous allons fournir des détails sur la construction du modèle, y compris la matrice de transition, les probabilités de transition et le graphe de probabilité associé.

- ***Collecte de données :***
  Pour construire notre modèle, nous collectons des données historiques des prix des actions sur un marché boursier spécifique. Ces données peuvent être obtenues à partir de sources financières telles que les bases de données de transactions ou les services de données financières.
- ***Prétraitement des données :***
  Nous effectuons un prétraitement sur les données pour les rendre adaptées à l'application de la chaîne de Markov. Cela peut inclure des étapes telles que la normalisation des prix, la discrétisation en intervalles de temps et la division en périodes (par exemple, jours, semaines ou mois).
- ***Création de la matrice de transition :***
  La matrice de transition est un élément clé de la modélisation des chaînes de Markov. Dans notre cas, chaque état représente une tendance du marché, telle que "haussière", "baissière" ou "stable". Nous créons une matrice de transition qui représente les probabilités de transition entre ces états. Par exemple : on prendre : Haussière =H , Baissière =B ,

Stable =S

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Cette matrice indique que la probabilité de rester dans un état haussier est de 0.6 , de passer d'un état haussier à un état baissier est de 0.3 , et ainsi de suite.

- ***Estimation des probabilités de transition :*** *Nous estimons les probabilités de transition à partir des données historiques des prix des actions. Par exemple, si nous observons que, historiquement, 60 % des périodes haussières ont été suivies d'une autre période haussière, nous fixons la probabilité de transition correspondante à 0,6.*
- ***Vérification de la propriété de Markov :*** *Nous vérifions si notre modèle satisfait la propriété de Markov en analysant les données historiques. Nous nous assurons que les transitions futures sont indépendantes des transitions passées, ce qui est une hypothèse clé de la modélisation des chaînes de Markov.*
- ***Construction du graphe de probabilité :*** *Nous construisons le graphe de probabilité associé à notre modèle. Chaque nœud représente un état (tendance du marché) et les arcs représentent les probabilités de transition entre les états. Ce graphe permet de visualiser les flux de probabilité et facilite l'analyse du modèle.*

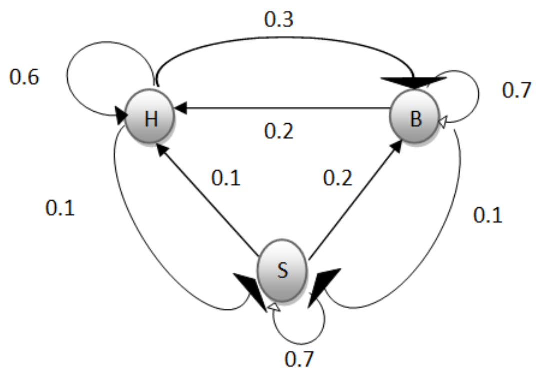

FIGURE 1.6 – Graphe de transition

1.10 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de comprendre les concepts fondamentaux des chaines de Markov, en mettant l'accent sur les états , les probabilités de transition et la propriété de Markov . Nous avons exploré différentes propriété et caractéristique de ces chaines .

On a réchire notre étude par les théorèmes limites d'une chaine de Markov. Mais la question qui ce pose est-ce-que ces théorèmes sont applicables pour l'image d'une chaine de Markov ?

Chapitre 2

Chaine de Markov image

2.1 Introduction

Ce chapitre, constitié deux parties. Dans la premier partie on s'intéresse à trouver une réponse a la questions suivante : L'image d'une chaîne de Markov est-elle aussi une chaîne de Markov ? Dans le cas général l'image d'une chaîne de Markov n'est pas une chaîne de Markov, comme le montre l'exemple suivant.

Dans le cas d'une chaîne de Markov surjective, chaque état de la chaîne a une probabilité non nulle de passer à un autre état. Cependant, il est possible de construire un exemple où l'image d'une chaîne de Markov n'est pas une chaîne de Markov. Considérons une chaîne de Markov simple à trois états : A, B et C. Les probabilités de transition sont les suivantes :

- *De A à B :1*
- *De B à C :1*
- *De C à A :1*

Et matrice de transition :

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette chaîne de Markov, à chaque étape, l'état change de manière déterministe. Cependant, si nous considérons l'image de cette chaîne de Markov en éliminant l'état A, nous obtenons une chaîne avec seulement deux états : B et C.
Les probabilités de transition pour la nouvelle chaîne sont :

- *De B à C :1*

- *De C à B :1*

Maintenant, examinons la propriété de Markov pour cette nouvelle chaîne. La propriété de Markov stipule que la probabilité d'arriver à l'état futur dépend uniquement de l'état actuel et non de l'historique des états précédents.
Cependant, dans notre exemple, si nous sommes à l'état B dans la nouvelle chaîne, la probabilité de passer à l'état C est de 1. Mais si nous connaissons l'état précédent, nous savons qu'il s'agit forcément de C, car C est le seul état qui peut passer à B. Donc, la probabilité de passer à l'état C dépend de l'historique des états précédents, ce qui viole la propriété de Markov. Ainsi, l'image de la chaîne de Markov dans cet exemple n'est pas une chaîne de Markov, même si la chaîne d'origine l'est.

2.2 Les définitions d'une application injective - surjective - bijective

Soit $f : E \to F$ une fonction :
f est dite injective si seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ce que équivalent à dire que : pour tout y dans F ,$\exists$ au plus $x \in E$ tel que :
$y = f(x)$(l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution dans E).
f est dite surjective si et seulement si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y$$

(ou bien l'équation $y = f(x)$ admet au moins solution dans E .)
f est dite bijective si seulement si : f injective et surjective et on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} \forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \forall y \in F, \exists x | f(x) = y)| \end{cases}$$

2.3 Chaine de Markov image :

Dans certains cas spécifiques, l'image d'une chaîne de Markov soit également une chaîne de Markov. Cela se produit lorsque la chaîne de Markov initiale satisfait certaines propriétés *particulières.*

2.3.1 Cas injective(bejctive)

Soit X_n une chaine de Markov d'espace d'etat E et $f : E \to F$ une application

- **Proposition 2.3.1** *Si f injective et $Y_n = f(X_n)$, alors Y_n est une chaine de Markov de matrice de transition*

$$Q_{(x,y)} = P_{f^{-1}(x),f^{-1}(y)}$$

pour tout x et y dans F tel que $f^{-1}(x)$ existent .
De plus si $(X_n)_n$ possède une distribution stationnaire $(\pi_i)_{i\in E}$ alors $(Y_n)_n$ possède une distribution stationnaire $\pi' = (\pi'_x)_{x\in F}$
tel que :

$$\begin{cases} \pi'_x = \pi_{f^{-1}(x)} & \text{si } f^{-1}(x) \text{ existe} \\ \pi'_x = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve 11 *Soient $y_0, y_1, \ldots\ldots, y_n, y_{n+1} \in F$. On a $y_n = f(i_n), i_{n\in E}$ donc :*

$$\begin{cases} P(Y_{n+1} = Y_{n+1}/Y_n = Y_n, \ldots, Y_0 = Y_0) \\ \qquad = P(X_{n+1} = f^{-1}(Y_{n+1})/X_n = f^{-1}(Y_n), \ldots, X_0 = f^{-1}(Y_0))\ldots(1) \\ \\ P(Y_{n+1} = Y_{n+1}/Y_n = Y_n, \ldots, Y_0 = Y_0) \\ \qquad = P(X_{n+1} = f^{-1}(Y_{n+1})/X_n = f^{-1}(Y_n))\ldots(2) \end{cases} \tag{2.1}$$

(1) f est injective

(2) (X_n) est une chaine de Markov

Exemple 2.3.1 *Soit (X_n) une chaine de Markov de loi initiale*

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- *distribution stationnaire :*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

- *matrice de transition :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- *graphe de trasition :*

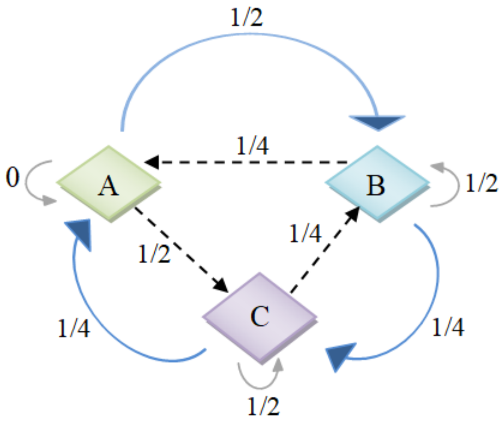

FIGURE 2.1 – Graphe d'une chaîne de Markov à trois états (A,B,C), cas f injective

Soit $f : E = \{1,2,3\}$ *et* $F = \{1,2,3,4\}$ *une application injective (bijective) tel que*

$$f(1) = 3 \cdot f(2) = 1 \cdot f(3) = 2.$$

- $Q_{x,y} = P_{f^{-1}(x)f^{-1}(y)}$

⊚ $Q_{1,1} = P_{f^{-1}(1)f^{-1}(1)} = P_{2,2} = \frac{1}{2}$

⊚ $Q_{1,2} = P_{f^{-1}(1)f^{-1}(2)} = P_{2,3} = \frac{1}{4}$

⊚ $Q_{1,3} = P_{f^{-1}(1)f^{-1}(3)} = P_{2,1} = \frac{1}{4}$

⊚ $Q_{2,2} = P_{f^{-1}(2)f^{-1}(2)} = P_{3,3} = \frac{1}{2}$

⊚ $Q_{2,1} = P_{f^{-1}(2)f^{-1}(1)} = P_{3,2} = \frac{1}{4}$

⊚ $Q_{2,3} = P_{f^{-1}(2)f^{-1}(3)} = P_{3,1} = \frac{1}{4}$

⊚ $Q_{3,3} = P_{f^{-1}(3)f^{-1}(3)} = P_{1,1} = 0$

⊚ $Q_{3,1} = P_{f^{-1}(3)f^{-1}(1)} = P_{1,2} = \frac{1}{2}$

⊚ $Q_{3,2} = P_{f^{-1}(3)f^{-1}(2)} = P_{1,3} = \frac{1}{2}$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

√ *La matrice Q est une matrice stochastique*

✓ *La distribution stationnaire image est :*

$\pi' = (\pi_y)$ *avec :* $\pi_y = \pi_{f^{-1}(y).}$

- $\pi'_1 = \pi_{f^{-1}(1)} = \pi_2 = \frac{2}{5}$
- $\pi'_2 = \pi_{f^{-1}(2)} = \pi_3 = \frac{2}{5}$
- $\pi'_3 = \pi_{f^{-1}(3)} = \pi_1 = \frac{1}{5}$

$$\pi' = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.3.2 *Soit f une fonction injective tels que :* $f : \{1,2,3\} \to (1,2,3,4\}$ *: avec* $f(1) = 1; f(2) = 3; f(3) = 2$*, tels que :*$Y_n = f(X_n)$*.*

La matrice de transition de $X_n est$ *:*$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} On donne \pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$f est une fonction injective, alors Y_n = f(X_n)$ *est une chaine de Markov de matrice de transition image(avec une restriction sur* $F = \{1,2,3\}$*, car* $y_4 = 4$ *ne possède aucun antécédent)*

■

$$\begin{cases} Q_{11} = P(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 1) = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = P_{11} = 0 \\ Q_{12} = P(Y_{n+1} = 2 \mid Y_n = 1) = P(X_{n+1} = 3 \mid X_n = 1) = P_{13} = 1 \\ Q_{13} = P(Y_{n+1} = 3 \mid Y_n = 1) = P(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1) = P_{12} = 0 \end{cases}$$

■

$$\begin{cases} Q_{21} = P(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 2) = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 3) = P_{31} = 1 \\ Q_{22} = P(Y_{n+1} = 2 \mid Y_n = 2) = P(X_{n+1} = 3 \mid X_n = 3) = P_{33} = 0 \\ Q_{23} = P(Y_{n+1} = 3 \mid Y_n = 2) = P(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 3) = P_{23} = 0 \end{cases}$$

■

$$\begin{cases} Q_{31} = P(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 3) = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2) = P_{21} = 0 \\ Q_{32} = P(Y_{n+1} = 2 \mid Y_n = 3) = P(X_{n+1} = 3 \mid X_n = 2) = P_{33} = 0 \\ Q_{33} = P(Y_{n+1} = 3 \mid Y_n = 3) = P(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 2) = P_{22} = 1 \end{cases}$$

La matrice Q est stochastique

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Cas surjective

Si $f : E \to F$ *est surjective tel que :* $Y_n = f(X_n)$*. On ne peut rien dire sur le caractère markovien de la suite* Y_n *car dans le cas général, la surjection n'assure pas cette propriété.*

Proposition 2.3.2 (condition nécessaire et suffisante) *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène et f une application mesurable surjective telle que :*

$$Y_n = f(X_n)$$

Si $\forall i, j \in E : f(i) = f(j) \to \sum_{k\in E/f(k)=x)} p(i,k) = \sum_{k'\in E/f(k')=x} p(j,k')$.
Alors $(Y_n)_n$ est une chaine de Markov de Matrice de probabilité de transition :

$$Q(x,y) = \sum_{j\in E/f(j)=y} p(i,j)$$

Telle que :$f(i) = x, x \in F$

Proposition 2.3.3 *Si π est une distribution stationnaire pour la suite$(X_n)_n$ alors π' est une distribution stationnaire pour la suite (Y_n) telle que :*

$$\pi' = (\pi'_y)_{y\in F}$$

et $\pi'_y = \sum_{f(j)=y} \pi_j$

Preuve 12 *$\pi' = (\pi'_y)_y$ est une distribution stationnaire si et seulement si :*

$$\sum_{y\in F} \pi'_y = 1 \quad et \quad \sum_{x\in F} \pi'_x q_{xy} = \pi'_y$$

$$\begin{aligned}\sum_{y\in F} \pi'_y &= \sum_{y\in F} \sum_{f(i)=y} \pi_{f^{-1}(y)} \\ &= \sum_{j\in E} \pi_j \\ &= 1 \quad car\ E = \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i\in E} \sum_{f(i)=y} \pi_i p_{ij} &= \sum_{f(i)=y} \pi_j \\ &= \sum_{f(j)=y} \pi_{f^{-1}(y)} \\ &= \sum_{f(j)=y} \pi_y \\ &= \pi'_y\end{aligned}$$

Exemple 2.3.3 (1.C) *Soit une fonction surjective tel que :* $f : \{1,2,3\} \to \{1,2\}$ *avec :* $f(1) = 1; f(2) = f(3) = 2$ *et soit* (X_n) *une chaine de Markov de loi initiale* $\mu_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$*, de distribution stationnaire* $\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ *et la matrice de transition :*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= p(Y_{n+1} = 1/Y_n = 1) = p(X_{n+1} = 1/X_n = 1) \\
&= p_{11} = 0 \\
Q_{12} &= p(Y_{n+1} = 2 \mid Y_n = 1) \\
&= p(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1) \\
&= \frac{p(X_{n+1} = 2; X_n = 1) + p(X_{n+1} = 3; X_n = 1)}{p(X_n = 1)} \\
&= \frac{p(X_n = 1)p(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1) + p(X_n = 1)p(X_{n+1} = 3 \mid X_n = 1)}{p(X_n = 1)} \\
&= p(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1) + p(X_{n+1} = 3 \mid X_n = 1) \\
&= p_{11} + p_{13} = 1 \\
Q_{21} &= p(Y_{n+1} = 1/Y_n = 2) \\
&= p(X_{n+1} = 1\ X_n \in \{2,3\}) \\
&= \frac{p(X_{n+1} = 1; X_n = 2) + p(X_{n+1} = 1; X_n = 3)}{p(X_n \in \{2,3\})} \\
&= \frac{p(X_n = 2)p_{21} + p(X_n = 3)p_{31}}{p(X_n = 2) + p(X_n = 3)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \\
Q_{22} &= p(Y_{n+1} = 2/Y_n = 2) \\
&= p(X_{n+1} \in \{2,3\}/X_n \in \{2,3\}) \\
&= \frac{p(X_{n+1} \in \{2,3\}, X_n \in \{2,3\})}{p(X_n \in \{2,3\})} \\
&= \frac{p(X_n = 2)p(X_{n+1} = 2/X_n = 2) + p(X_n = 3)p(X_{n+1} = 2/X_n = 3)}{p(X_n = 2) + p(X_n = 3)} \\
&= \frac{p(X_{n+1} \in \{2,3\}, X_n \in \{2,3\})}{p(X_n \in \{2,3\})} \\
&= \frac{p(X_n = 2)p(X_{n+1} = 2|X_n = 2) + p(X_n = 3)p(X_{n+1} = 2|X_n = 3)}{p(X_n = 2) + p(X_n = 3)} \\
&+ \frac{p(X_n = 2)p(X_{n+1} = 3|X_n = 2) + p(X_n = 3)p(X_{n+1} = 3|X_n = 3)}{p(X_n = 2) + p(X_n = 3)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La distribution stationnaire de Y_n est :

$$\pi' = \left(\pi'_y\right)_{y\in F} \quad \textit{tel que} \quad \pi'_y = \sum_{f(j)=y} \pi_j$$

$$\pi'_1 = \sum_{f(j)=1} \pi_j = \pi_1 = \frac{1}{4}$$

$$\pi'_2 = \sum_{f(j)=2} \pi_j = \sum_{j=2}^{3} \pi_j = \pi_2 + \pi_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Donc :

$$\pi' = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

2.4 Caractérisation d'une chaine de Markov image :

2.4.1 Injective

Proposition 2.4.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$une chaine de Markov $f : E \to F$ une fonction bijective , et $x \in F$ on pose :$i = f^{-1}(x)$*

- *Si i état récurrent alors x récurrent.*
- *Si i état transitoire alors x transitoire .*

Preuve 13 *Soit $i \in E$, et $x \in F$ tel que $f(i) = x$.*

- $\sum_{n=1}^{\infty} q_{xx}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{f^{-1}(x)f^{-1}(x)}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$ *(car l'état i est récurrent),* *donc x est récurrente*

- $\sum_{n=1}^{\infty} q_{xx}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{f^{-1}(x)f^{-1}(x)}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$ *(car l'état i est transitoire),* *donc x est transitoire*

Proposition 2.4.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chaine de Markov irréductible , et $f : E \to F$ une fonction Alors : la chaine de Markov $(f(X_n))_{n\geq 0)}$ est irréductible.*

Preuve 14 *Soit $x, y \in F$ donc $\exists i, j \in E$ tel que $x = f(i), y = f(j)$.*
- (X_n) est une chaine de Markov irréductible $\Leftrightarrow \forall i, j \in E, \exists n, m \in N^*$ tel que $p_{ij}^n > 0$ et $p_{ji}^m > 0$
- La chaine de Markov $(f(X_n))_{n\geq 0)}$ est irréductible $\Leftrightarrow \forall x, y \in F; \exists n; p_{xy}^n$ et $\exists m; p_{yx}^m > 0$ on a :

$$q_{xy}^n = p_{f^{-1}(x)f^{-1}(y)}^n = p_{ij}^n > 0 \quad \textit{(car } (X_n)_n \textit{ est irréductible)}$$

$$q_{yx}^m = p_{f^{-1}(y)f^{-1}(x)}^m = p_{ij}^m > 0 \quad \textit{(car } (X_n)_n \textit{ est irréductible)}$$

Proposition 2.4.3 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov , $i \in E$ récurrent positive , et $f : E \to F$ une fonction bijective alors : f(i) est aussi récurrent positive de $(Y_n)_n$.*

Preuve 15 *Soit i un état récurrent positive et x=f(i)*

$$E(T_x) = \sum_{n\geq 0} np^n(f^{-1}(x)f^{-1}(x)) = \sum_{n\geq 0} np_{ii}^n < \infty$$

Alors x récurrent positive.

2.4.2 Bejictive

Proposition 2.4.4 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov irréductible , et $f : E \to F$ une fonction injective , avec $p(Y_n = y_{n,\ldots}, Y_0 = y_0) \neq 0$. Alors chaine de Markov $(f(X_n))_{n\geq 0}$ est irréductible .*

Preuve 16 *Soient $y_0, \ldots\ldots, y_{n\in F}$tel que$p(Y_n = y_n, \ldots\ldots., Y_0 = y_0)0$.*

$$f(X_n)_{n\geq 0} \textit{ est irréductible } \Leftrightarrow \forall x, y \in F, \exists n : p_{xy}^n > 0 \textit{ et } \exists m : p_{yx}^m > 0, x, y \in F$$

On a :

$$(X_n)_{n\geq 0} \textit{ est irréductible } \iff \forall i, j \in E, \exists n : p_{ij}^n > 0 \textit{ et } \exists m : p_{ij}^m > 0,$$

$$x, y \in E \Rightarrow \begin{cases} q_{xy}^n = p_{f^{-1}(x)f^{-1}(y)}^n = p_{ij}^n > 0 \textit{ (car } (X_n) \textit{ est irréductible)} \\ q_{yx}^m = p_{f^{-1}(y)f^{-1}(x)}^m = p_{ij}^m > 0 \textit{ (car } (X_n) \textit{ est irréductible)} \end{cases}$$

Proposition 2.4.5 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov, et $f : E \to F$ une fonction injective ,$\forall i \in E, \exists! x \in F$ tel que $f(i) = x$.*
Alors :

- √ *Si i est un état récurrent ⇒ x est récurrent.*
- √ *Si i est un état transitoire ⇒ x est transitoire.*

$\forall i \in E, \exists x \in F$ *tel que* $f(i) = x$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} q_{xx}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{f^{-1}(x)f^{-1}(x)}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$

  (car i est un état récurrent) $\Rightarrow$ *x est récurrente*

- $\sum_{n=1}^{\infty} q_{xx}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{f^{-1}(x)f^{-1}(x)}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$

  (car i est un état transitoire) $\Rightarrow$ *x est transitoire*

Proposition 2.4.6 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une chaine de Markov* $i \in E$ *récurrent , et* $f : E \to F$ *une fonction injective , avec* $p(Y_n = y_{n,\ldots,}Y_0 = y_0)0$. *Alors : f(i) est récurrent positive de* $(Y_n)_n$

$$E(T_x) = \sum_{n\geq 0} np(T_x = n) = \sum_{n\geq 0} np^n_{f^{-1}(x)f^{-1}(x)} = \sum_{n\geq 0} np^n_{ii} < \infty$$

Alors : x récurrent positive

Remarque 6 • *On a donc le nombre de classe récurrente (transitoire) pour* $(X_n)_n$ *égale au nombre classe récurrente (transitoire) pour* $(Y_n)_n$

- $(X_n)_n$ *irréductible* $\Leftrightarrow$ *il existe une seule classe de communication pour* $(X_n)_n$ $\Leftrightarrow$ *existe une seule classe de communication pour* $(Y_n)_n$ $\Leftrightarrow$ $(Y_n)_n$ *irréductible .*

Proposition 2.4.7 *Soit* $(X_n)_{n\in N}$ *une chaine de Markov,* $f : E \to F$ *une fonction injective. Soit* $i \in E, x = f(i) \in F$

◇ *i apériodique* $\Leftrightarrow$ *x apériodique*

◇ *i périodique* $\Leftrightarrow$ *x périodique*

Preuve 17 *Soit* $i \in E, x = f(i) \in F$

$$d(x) = PGCD\{n \geq 1; Q^n_{xx} > 0\} = PGCD\{n \geq 1; p^n_{f^{-1}(x)f^{-1}(x)} > 0\} = d(i)$$

♦ $d(i) = 1$ *si* $(X_n)_n$ *est apériodique* $\Longleftrightarrow$ $d(x) = 1$ *pour tout x* $\Rightarrow$ *x est apériodique*

♦ $d(i) > 1$ *si* $(X_n)_n$ *est périodique* $\Longleftrightarrow$ $d(x) > 1$ *pour tout x* $\Rightarrow$ *x est périodique*

Remarque 7 *Si F fini et* $(Y_n)_n$ *est irréductible , alors* $(Y_n)_n$ *récurrente positive .*

Exemple 2.4.1 *La matrice de transition p d'une chaine de Markov X_n :*

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Le graphe de transition de $(X_n)_n$:

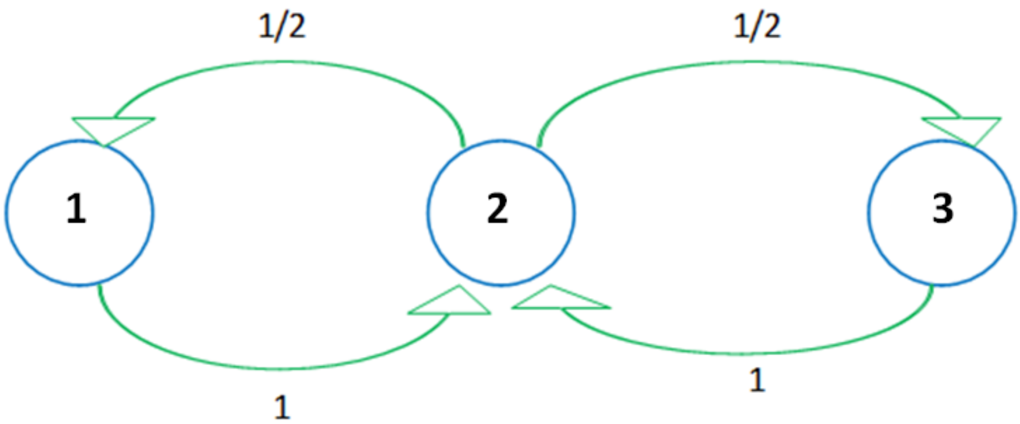

FIGURE 2.2 – Graphe de transition de $(X_n)_n$ (cas inejctive)

La chaine $(X_n)_n$ contient une seule classe d'équivalence $\Leftrightarrow$ $(X_n)_n$ irréductible)

La matrice de transition de Y_n est :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Son graphe :

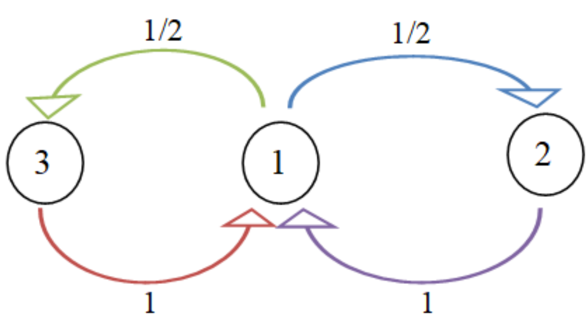

FIGURE 2.3 – Graphe d'une image de chaîne de Markov $(Y_n)_n$, cas inejctive

2.4.3 Surjective

Proposition 2.4.8 *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaine de Markov homogène irréductible vérifie la condition de la proposition (2.4.7) et f une application surjective tel que $Y_n = f(X_n)$ alors*

La chaine de Markov $(f(X_n))_{n\geq 0}$ est aussi irréductible.

Preuve 18 *soient $x, y \in F$, $\quad i, j \in E$ que $f(i) = x\ et\ f(j) = y$*

✓ *$(X_n)_n)$ est irréductible $\longleftrightarrow (\forall i, j \in E), (\exists n, m \in \mathbb{N}^*)$ tels que $(p^n_{ij} > 0)$ et $(p^m_{ij} > 0)$.*

✓ *$(Y_n)_n)$ est irréductible $\longleftrightarrow (\forall x, y \in F), (\exists n, m \in \mathbb{N}^*)$ tels que $(Q^n_{xy} > 0)$ et $(Q^m_{xy} > 0)$.*

On a

◊ $Q^n_{xy} = \sum_{j\in E, f(j)=y} p^n_{ij} > 0$ *(car (X_n) est irréductible)*

◊ $Q^m_{yx} = \sum_{j\in E, f(j)=y} p^m_{ij} > 0$ *(car (X_n) est irréductible)*

Donc $(Y_n)_n$ est irréductible .

Proposition 2.4.9 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène et f une application surjective tel que $Y_n = f(X_n)$ une chaine de Markov Soit $x \in F$ et $i \in E$ tel que $i \in f^{-1}(\{x\})$ alors :*

- *i état récurrent $\longleftrightarrow$ x récurrent*
- *i état transitoire $\longleftrightarrow$ x transitoire*

Preuve 19 *Soit $x \in F$, alors : $f^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset, \exists i \in f^{-1}(\{x\})$*

- *Si i état récurrent alors $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$,donc :*
  $\sum_{n=1}^{\infty} Q_{xx}(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in E/f(j)=y} p_{ii}(n) = \infty$
- *Si i état transitoire alors $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$,donc :*
  $\sum_{n=1}^{\infty} Q_{xx}(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in E/f(j)=y} p_{ii}(n) < \infty$

Exemple 2.4.2 *On considère l'exemple précédent (exemple 1.C)*

- *La distribution stationnaire de X_n est : $\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$*
- *La distribution stationnaire de $Y_n est$:$\pi' = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$*
- *La matrice de transition est :*

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- *Le graphe de transition de X_n est :*

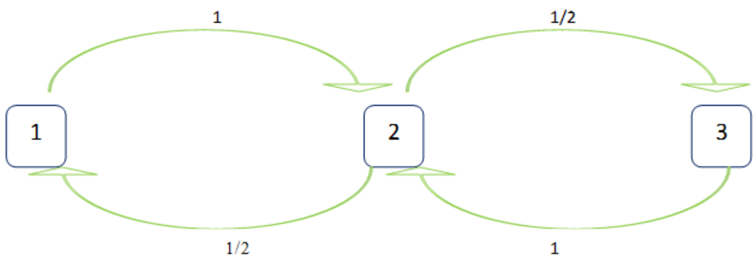

FIGURE 2.4 – Graphe d'une chaîne de Markov $(X_n)_n$, cas surjective

D'après le graphe on déduit que la chaine $(X_n)_{n\in N}$ contient une seule classe de communication donc elle est irréductible.

- *La matrice de transition de $(Y_n)_n$ est :*

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

- *Le graphe de transition :*

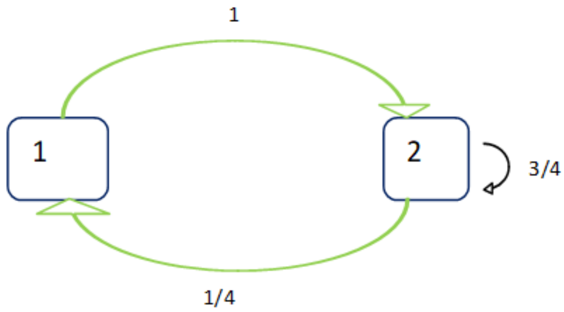

FIGURE 2.5 – Graphe d'une image de chaîne de Markov $(Y_n)_n$, cas surjective

La chaine $(Y_n)_n$ contient une seule classe d'équivalence $\longleftrightarrow$ $(Y_n)_n$ est irréductible.

2.5 Classification d'état

Proposition 2.5.1 *Si $(X_n)_n$ est une chaine de Markov irréductible, alors la chaine de Markov $f(X_n)_{n\geq 0}$ est aussi irréductible Soit $x, y \in F, i, j \in E$ tel que $f(i) = x$ et $f(j) = y$.*
On a :

$$q^n_{xy} = \sum_{j\in E/f(j)=y} p^n_{ij} > 0 \quad (X_n)_n \quad \textit{(car } (X_n)_n \textit{ irréductible)}$$

$$q^m_{yx} = \sum_{j\in E/f(j)=y} p^m_{ij} > 0 \quad (X_n)_n \quad \textit{(car } (X_n)_n \textit{ irréductible)}$$

Proposition 2.5.2

$$\forall x \in F \text{ et } \forall i \in E \text{ tel que } i \in f^{-1}(\{x\})$$

a) i état récurrent $\implies$ *x récurrent*

b) i état transitoire $\implies$ *x transitoire*

c) i récurrent positif $\implies$ *x récurrent positif*

Preuve 20 *Soit* $x \in F$*, alors* $f^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow \exists i \in f^{-1}(\{x\})$

- *Si i est récurrent alors* $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$,
  Donc $\sum_{n=1}^{\infty} q_{xx}^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in E/f(j)=y} p_{ii}^{n} = \infty$*, alors x est récurrent.*
- *Si i est transitoire alors* $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$,
  Donc $\sum_{n=1}^{\infty} q_{xx}^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in E/f(j)=y} p_{ii}^{n} < \infty$*, alors x est transitoire.*
- $E(T_x) = \sum_{n\geq 0} np(T_x = n) = \sum_{n\geq 0} n \sum_{j\in E/f(j)=y} p_{ij}^{n} = \sum_{j\in E/f(j)=y} \sum_{n\geq 0} np_{ii}^{n} < \infty$,
  Alors x est récurrent positive.

Proposition 2.5.3 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaine de Markov* $f : E \to F$ *une fonction injective (bijective).*

Soit $i \in E, x = f(i) \in F$

◇ *i apériodique* $\Leftrightarrow$ *x apériodique*

◇ *i périodique* $\Leftrightarrow$ *x périodique*

Preuve 21 *Soit* $i \in E, x = f(i) \in F$

$$d(x) = PGCD\left\{n \geq 1 \,\middle|\, Q_{xx}^{n} > 0\right\} = PGCD\left\{n \geq 1 \,\middle|\, p_{f^{-1}(x)f^{-1}(x)}^{m} > 0\right\} = d(i)$$

√ $d(i) = 1((X_n)_n$ *est apériodique)* $\Leftrightarrow d(x) = 1 \Rightarrow x$ *est apériodique .*

√ $d(i) > 1((X_n)_n$ *est périodique)* $\Leftrightarrow d(x) > 1 \Rightarrow x$ *est périodique .*

Exemple 2.5.1 *Soit* X_n *une chaine de Markov de matrice de transition P et de loi initial* μ_0*,tel que :*

$$\mu_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Soit f une fonction surjective $f : E = \{a, b, c\} \to F = \{0, 1\}$ tel que $f(a) = 0; f(b) = f(c) = 1$

Le graphe de transition :

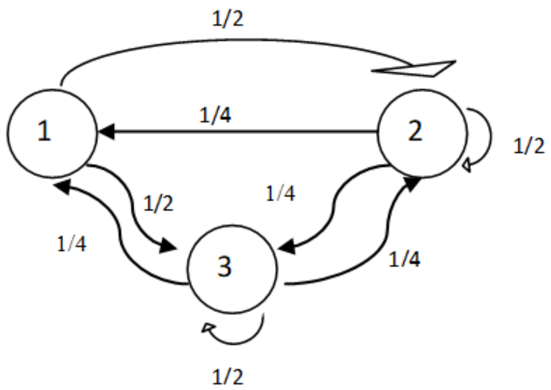

FIGURE 2.6 – Graphe d'une chaîne de Markov $(X_n)_n)$, cas surjective

D'apèrt le graphe on déduit que la chaine $(X_n)_n$ contient une seule classe de communication donc elle est irréductible .

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Le graphe :

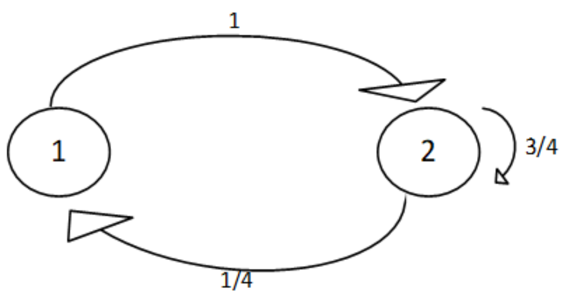

FIGURE 2.7 – Graphe d'une image de la chaîne de Markov $(Y_n)_n)$, cas surjective

La chaine $(Y_n)_n$ contient une seule classe d'équivalence $\rightarrow (Y_n)_n$ irréductible.

$d(i) = PGCD \left\{ n \geq 1 \mid p_{ii}^n > 0 \right\}$ comme X_n irréductible, $d(a) = d(b) = d(c) = 1$

Car $p_{aa}^1 = 0$, $p_{aa}^2 > 0$, $p_{aa}^3 > 0$, $p_{aa}^4 > 0$, donc la chaîne X_n est apériodique.

$d(x) = PGCD \left\{ n \geq 1 \mid p_{xx}^n > 0 \right\}$ comme Y_n irréductible, $d(0) = d(1) = 1$

Car $Q_{11}^1 > 0$, $Q_{11}^2 > 0$, $Q_{11}^3 > 0$, $Q_{11}^4 > 0$, donc la chaîne Y_n est apériodique.

2.6 Le comportement asymptotique d'une chaine de Markov image

2.6.1 Dans le cas générale

• *Cas injective (bijective)*

Soient $(X_n)_n$ une chaine de Markov d'espace d'état E fini, de distribution limite π et f une application injective (bijective) tel que $Y_n = f(X_n)$ une chaine de Markov image d'espace d'état F et de distribution limite $\pi' = (\pi'_y)_{y\in F}$ tel que $\pi'_y = \pi_{f^{-1}(y)}$.

• *Cas surjective*

Soient $(X_n)_n$ une chaine de Markov d'espace d'état E fini , de distribution limite π et f une application surjective tel que $f : E \to F$ et $Y_n = f(X_n)$

Si la chaine $(Y_n)_n$ satisfait la condition nécessaire et suffisante alors $(Y_n)_n$ est une chaine de Markov image d'espace d'états F , de distribution limite $\pi' = \sum_{j\in Ef(j)=y} \pi_j$ et de matrice de transition $Q_{xy} = \sum_{j\in E/f(j)=y} p_{ij}, f(i) = y$.

2.6.2 Les cas particuliers

Chaine de Markov irréductible apériodique

Distribution limite

- ***Injective (bijective) :***

  Une chaîne de Markov image est dite irréductible si, à partir de n'importe quel état image, il est possible d'atteindre n'importe quel autre état image en un certain nombre de transitions. Elle est apériodique si les transitions ne se produisent pas selon un schéma périodique fixe.

  Proposition 2.6.1 *Si $(X_n)_n$ est irréductible apériodique alors la chaine de $(Y_n)_n$ est irréductible apériodique et*

  $$\forall x, y \in F, \lim_{n\to\infty} Q^n_{xy} = \lim_{n\to\infty} p^n_{f^{-1}(x)f^{-1}(y)} = \pi'_{xy}$$

  Si la chaine $(Y_n)_n$ est ergodique on a :

  $$\lim_{n\to\infty} Q^n = Q^*$$

Où Q^* est une matrice dans tout les lignes égales à π'

- ***Surjective :***

Si $(X_n)_n$ est irréductible apériodique alors la chaine de $(Y_n)_n$ est irréductible apériodique

$$\forall x, y \in F, \lim_{n\to\infty} Q^n_{xy} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in E/f(j)=y} p^n_{ij} = \pi_{f^{-1}(y)}$$

-Si la chaine $(Y_n)_n$ est ergodique on a

$$\lim_{n\to\infty} Q^n = Q^*$$

Où Q^* est une matrice dans tout les lignes égales à $\pi_{f(-1)} = \pi'$

Exemple 2.6.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov tel que :*

$$\pi = \left(\frac{3}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{15}\right)$$

et de Matrice de transition :

$$p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Soit f une application surjective $f : \{1,2,3\} \to \{1,2\}$ tel que $f(1) = 1; f(2) = f(3) = 2$
$(Y_n)_n$ est une chaine de Markov image de matrice de transition .

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Le graphe :

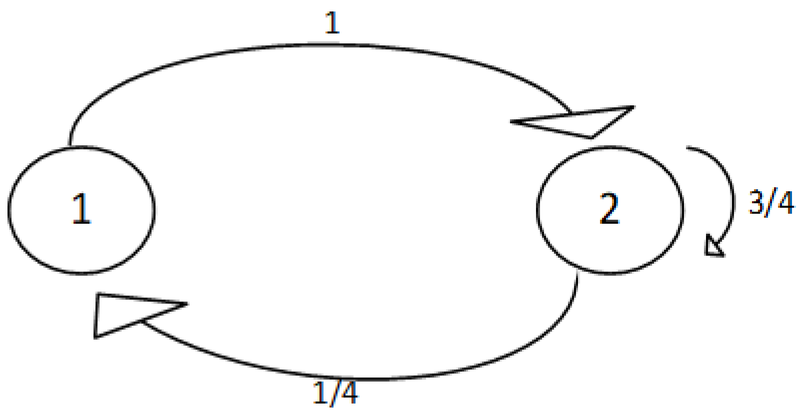

FIGURE 2.8 – Graphe de la chaîne de Markov $(Y_n)_n)$, cas surjective

Chaine de Markov irréductible périodique :

Soit (X_n) *une chaine de Markov irréductible périodique . et f une fonction tel que* $f : E \rightarrow F et Y_n = f(X_n)$ *est une chaine de Markov .*

a) *Injective (bijective) :*

Soit $(Y_n)_(n)$ *irréductible périodique (de période* $d > 1$*)*

$$\lim_{n\to\infty} r^n_{xy} = \lim_{n\to\infty} p^n_{f^{-1}(x)f^{-1}(y)} = \begin{cases} d_{\pi'} & Si\ f^{-1}(x), f^{-1}(y) appartiennent\ à\ la\ même\ classe \\ 0 & Sinon \end{cases}$$

$$r^n_{xy} = p^{nd}_{f^{-1}(x)f^{-1}(y)}$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi_k = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \pi^{c_i}$$

Exemple 2.6.2 *Soit* X_n *une chaine de Markov de matrice de transition :*

$$p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \pi_k = \left(\frac{23}{50}, \frac{11}{50}, \frac{16}{50}\right)$$

Soit $f : \{1,2,3,4\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$ *une application injective tel que*

$$, f(1) = 3; f(2) = 1; f(3) = 4; f(4) = 2$$

- Etudier le comportement de $(Y_n)_{n\in N}$

Solution :

f injective donc $(Y_n)_{n\in N}$*est une chaine de Markov : La matrice de transition :*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Le graphe de transition :

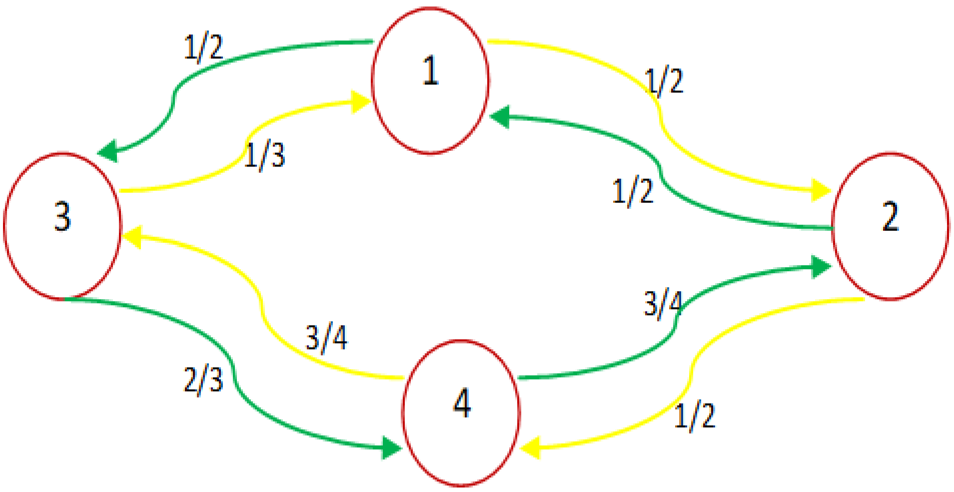

FIGURE 2.9 – Graphe d'une image de chaîne de Markov $(Y_n)_n)$, cas injective

La chaine est apériodique car $d(x) > 1$

Les classe :

- $D_1 = f(1), f(4) = 2, 3.$
- $D_2 = f(2), f(3) = 1, 4.$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & 0 & 0 & \frac{7}{12} \\ 0 & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{11}{24} & 0 & 0 & \frac{11}{24} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \\ 0 & 0 & \frac{11}{24} & \frac{13}{24} \end{pmatrix}$$

La distribution stationnaire de la 1^{ere} *classe :*

$$\begin{cases} \pi'_1 = \pi_2 = 0 \\ \pi'_2 = \pi_4 = \frac{16}{25} \\ \pi'_3 = \pi_1 = \frac{9}{25} \\ \pi'_4 = \pi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \pi^{(D_1)} = \left(0, \frac{16}{25}, \frac{9}{25}, 0\right)$$

La distribution stationnaire de la 2^{eme} *classe :*

$$\begin{cases} \pi'_1 = \pi_2 = \frac{11}{25} \\ \pi'_2 = \pi_4 = 0 \\ \pi'_3 = \pi_1 = 0 \\ \pi'_4 = \pi_3 = \frac{14}{25} \end{cases} \Rightarrow \pi^{(D_1)} = \left(\frac{11}{25}, 0, 0, \frac{14}{25}\right)$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \pi_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2} \pi^{(D_i)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{25}, \frac{11}{25}, \frac{14}{25}, \frac{16}{25}\right) = \left(\frac{9}{50}, \frac{11}{50}, \frac{15}{50}, \frac{16}{50}\right)$$

on calculons :

- $\lim_{n\to\infty} r_{11}^n = \lim_{n\to\infty} Q_{11}^{2n} = \lim_{n\to\infty} p_{22}^{2n} = \lim_{n\to\infty} Q_{41}^n = 2 \times \pi_2 = 2 \times \frac{11}{50} = \frac{22}{50}$
- $\lim_{n\to\infty} r_{14}^n = \lim_{n\to\infty} Q_{14}^{2n} = \lim_{n\to\infty} p_{23}^{2n} = \lim_{n\to\infty} Q_{44}^n = 2 \times \pi_3 = 2 \times \frac{14}{50} = \frac{28}{50}$
- $\lim_{n\to\infty} r_{23}^n = \lim_{n\to\infty} Q_{23}^{2n} = \lim_{n\to\infty} p_{41}^{2n} = \lim_{n\to\infty} Q_{33}^n = 2 \times \pi_1 = 2 \times \frac{9}{50} = \frac{18}{50}$
- $\lim_{n\to\infty} r_{22}^n = \lim_{n\to\infty} Q_{22}^{2n} = \lim_{n\to\infty} p_{44}^{2n} = \lim_{n\to\infty} Q_{32}^n = 2 \times \pi_4 = 2 \times \frac{16}{50} = \frac{32}{50}$
- $\lim_{n\to\infty} r_{12}^n = \lim_{n\to\infty} r_{13}^n = \lim_{n\to\infty} r_{21}^n = \lim_{n\to\infty} r_{24}^n = \lim_{n\to\infty} r_{31}^n = \lim_{n\to\infty} r_{34}^n = \lim_{n\to\infty} r_{42}^n = \lim_{n\to\infty} r_{43}^n = 0$

  (car x,y n'appartiennent pas à la même classe)

b) *Surjective :* Y_n *est une chaine de Markov de matrice de transition :*

- $Q_{xy} = \sum_{j\in E/f(j)=y} P_{ij}$

  $$\lim_{n\to\infty} r_{xy}^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in E/f(j)=y} P_{ij}^n d = \begin{cases} d_{\pi'}, & Si\ f^{-1}(x), f^{-1}(y) appartient\ à\ la\ même\ classe, \\ 0, & Sinon. \end{cases}$$

- $r_{xy}^n = \sum_{j\in E/f(j)=y} P_{ij}^n = \sum_{j\in E/f(j)=y} P_{ij}^n d$

Chaine de Markov réductible :

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une chaine de Markov, f une application telle que $f : E \to F$. $(Y_n)_{n\in N}$ une chaine de Markov réductible ne contient pas une seule classe d'équivalence (ou de communication)

Proposition 2.6.2 *Soit une état $x \in F$, la probabilité de se trouver dans un état y à l'étape n est :*

$$\lim_{n\to\infty} Q^n_{xy} = \begin{cases} 0, & Si f^{-1}(y) \text{ est transitoire,} \\ 0, & Si\ f^{-1}(x), f^{-1}(y) \text{ appartient à deux classes récurrentes différentes,} \\ \pi_{f^{-1}(y)}, & Si\ f^{-1}(x) \text{ et } f^{-1}(y) \text{ sont récurrentes et appartient à la même classe,} \\ \pi_{f^{-1}(x)}, & Si\ f^{-1}(x) \text{ est transitoire et } f^{-1}(y) \text{ est récurrente.} \end{cases}$$

Ou $A_{xx} = \sum_{y\in C} p_{f^{-1}(x)f^{-1}(y)} + \sum_{k\in T} p_{f^{-1}(x)k} A_{kc}$ probabilité de passer de x vers y

2.7 Théorèmes limites pour l'image d'une chaine de Markov

Proposition 2.7.1 (Temps d'arrêt pour l'image d'une chaine de Markov) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov dans d'espace d'états E, $(Y_n)_n$ l'image de la chaine de Markov X_n tel que $x, y \in F$ et $i, j \in E$.*
On note $N_{x;f}$ nombre de passage de la suite Y_n en x, $T_{x,f}$ le temps d'arrêt de la suite Y_n

$$N_{(x,f)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{Y_n=x} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{(f(X_n)=x)}$$

$$N_{(x,f)} = \begin{cases} \sum_n \mathbb{1}_{(X_{(n=f^{-1}(x)}} & si\ f \text{ est bijective} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{X_n\in f^{-1}(\{x\})} & \text{si et seulement si } f \text{ est surjective} \end{cases}$$

$$N_{(x,f)} = \begin{cases} N_{(f^{-1}(x))} & Si\ f \text{ est bijective} \\ \sum_{f(i)=x} N_i & Si\ f \text{ est seulement surjective} \end{cases}$$

$$T_j = m \iff \inf\{n \geq 1; X_n = j\} = m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$T_{(x,f)} = m \iff \inf\{n \geq 1; Y_n = x\} = m$$

1) Cas injective (bijective)

$$\{n \geq 1; Y_n = x\} = \left\{n \geq 1, X_n = f^{-1}(x)\right\} \Rightarrow T_{(x,f)} = T_{f^{-1}(x)}$$

$$\begin{aligned} p_x(Y_n = y) = p_{x_0}(f(X_n) = y) & \\ &= p(f(X_n) = y / \mid f(X_0) = x) \\ &= p(X_n = f^{-1}(y) \ \mid X_0 = f^{-1}(x)) \\ &= p_{f^{-1}(x)}(X_n = f^{-1}(y)) \to \pi_{f^{-1}(y)} \end{aligned}$$

B)Cas surjective

$$\begin{aligned} p(Y_n = y \mid Y_0 = x) &= \frac{p(Y_n = y \mid Y_0 = x)}{p(Y_0 = x)} \\ &= \frac{\sum_{f(j)=y, f(i)=x} p(X_n = j, X_0 = i)}{\sum_{f(k)=x} p(X_0 = k)} \\ &= \sum_{f(j)=y} \left(\frac{\sum_{f(i)=x} p(X_n = j \mid X_0 = i) p(X_0 = i)}{\sum_{f(h)=x} p(X_0 = k)} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_i(T_i) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_i(T_i = n)$$

$$\mathbb{E}_x(T_{x,f}) = \sum_m p_x(T_x = m) = \sum \mathbb{E}_i(\pi_i)$$

$$\begin{aligned} N_{x,f} &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{Y_n = x} \\ &= \sum_n \mathbb{1}_{f(X_n) = x} \\ &= \sum_n \mathbb{1}_{X_n \in f^{-1}(\{x\})} \\ &= \sum_{f(k)=x} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{X_n = k} \\ &= \sum_{f(k)=x} N_k \end{aligned}$$

$$\frac{N_x}{n} = \sum_{f(k)=x} \frac{N_k}{n} \to \sum_{f(k)=x} \frac{1}{\mathbb{E}_k(T_k)}$$

2.7.1 Convergence en loi

Soit X_n une chaine de Markov homgène irréductible apériodique pour laquelle il existe une probabilité invariante π. Alors pour toute loi initiale μ_0,

$$p_{\mu_0}(Y_n = x) \xrightarrow{n\to\infty} \pi'_x$$

Proposition 2.7.2 (Formule de l'espérance) *Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une chaine de Markov image de X_n à valeur dans un ensemble F de Matrice de transition Q et de loi initiale μ_0. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(g_k)_{0\leq k\leq n}$ des fonction de μ dans $\mathbb{C}$,$k \in F$.*

$$E\left(\prod_{k=0}^{n} g_k(X_k)\right) = \mu_0\left(g_0 Q\left(g_1 Q\left(g_2 Q\left(\ldots g_{n-1} Q g_n\right)\right)\ldots\right)\right)$$

2.7.2 Théorème ergodique

Soit q une matrice de transition irréductible et récurrente positive, π' son unique distribution stationnaire et $f : E \to F$. Si $\sum_x \mid g(x) \mid \pi'(x) < \infty$ alors pour toute distribution initiale μ_0 on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(Y_k) \to \sum_{k\in E} \pi'_k f(k) = E_{\pi'}(g(Y_0))$$

Si X_n est récurrente positive de probabilité invariante π pour toute fonction $f : E \to F$

$$\begin{cases} \pi'_{f^{-1}(x)} & \text{si } f \text{ est bijective} \\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(Y_k) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k\in E} \pi'_k g(k) = E_{\pi'}(g(Y_0)), & \text{sinon} \end{cases}$$

2.7.3 Théorème central limite pour l'image des chaînes de Markov

On suppose que p est irréductible et positive récurrente et on note π' son unique distribution invariante.
Soit $g : E \to F$ fonction avec $\pi'(g) = 0$. Alors

$$\pi'(g^2) + 2\sum_{n\geq 1} E(g(Y_n)g(Y_0)) \in [0, \infty]$$

Si bien que l' on peut définir

$$\sigma'^2(g) = \pi'(g^2) + 2\sum_{n\geq 1} E_{\pi'}(g(Y_n)g(Y_0)) \in [0, \infty]$$

Si en outre $\sigma'^2 < \infty$, alors pour toute distribution initiale π' on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} g(Y_k) \xrightarrow{\mathscr{L}} N(\mu, \sigma)$$

2.8 Conclusion

Après les recherches qu'on a fait. on peux répondre à la question qui dit (est-ce que l'image d'une chaine de Markov est une chaine de Markov) ?

L'image d'une chaine de Markov par la fonction f peut être une chaine de Markov dans certains condition qui garde les propriété particulières de Markov, et cela est relié aux type de fonction (injective, surjective).

Après avoir confirmé que les théorèmes limite pour une chaine de Markov sont applicable sur chaine de Markov image dans le cas (injective, surjective).

On dit que si la chaine de Markov satisfait les théorèmes limites, alors chaine de Markov image vérifié ces conditions.

Chapitre 3

Application sur Matlab

3.1 Introduction aux Matlab

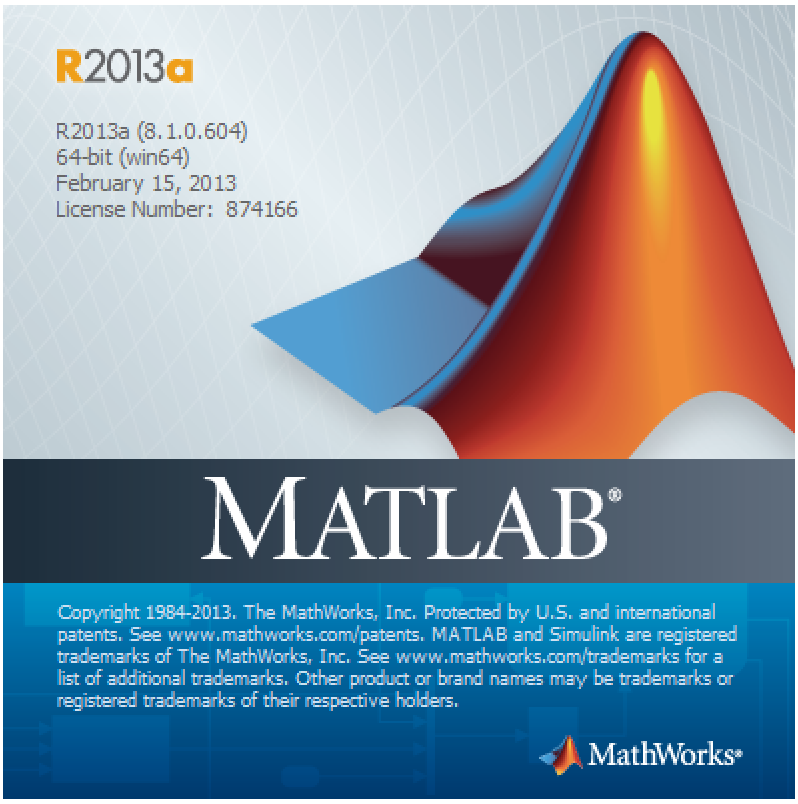

FIGURE 3.1 – MATLAB

Matlab pour « MATtrix LABoratory », MATLAB est un langage de programmation de haut niveau et un environnement de développement développé par MathWorks. Il est particulièrement performant pour le calcul matriciel car sa structure de données interne est basée sur les matrices. Il dispose également de grandes capacités graphiques pour, par exemple, la visualisation d'objets mathématiques complexes. Son fonctionnement repose sur un langage de programmation interprété qui permet un développement très rapide. Pour des applications nécessitant un temps de calcul plus élevé, un langage compilé comme le C++ ou le fortran, est mieux adapté.

Matlab a été initialement développé à la fin des années 70 par Cleve Moler, professeur de mathématique à l'université du Nouveau-Mexique puis à Stanford, pour permettre aux étudiants de travailler à partir d'un outil de programmation de haut niveau et sans apprendre le Fortran ou le C.

MATLAB offre un ensemble complet d'outils et de fonctions pour les calculs numériques, l'analyse de données, la visualisation et le développement d'algorithmes.

Avec MATLAB, vous pouvez effectuer une large gamme de tâches, notamment :

- ⊚ *Analyse de données : MATLAB offre des outils pour importer, manipuler et analyser des données. Vous pouvez effectuer des analyses statistiques, visualiser des données et effectuer des prétraitements de données facilement.*
- ⊚ *Calcul numérique : MATLAB excelle dans le calcul numérique. Il prend en charge un large éventail d'opérations mathématiques, notamment la manipulation de matrices, la résolution d'équations, l'interpolation, l'intégration et les équations différentielles.*
- ⊚ *Développement d'algorithmes : MATLAB vous permet de développer et d'implémenter des algorithmes de manière efficace. Vous pouvez créer des fonctions personnalisées et des scripts pour automatiser des calculs complexes et des simulations.*
- ⊚ *Visualisation : MATLAB propose des outils puissants pour la visualisation des données et des résultats. Vous pouvez créer des graphiques en 2D et 3D, des histogrammes, des graphiques de dispersion, et personnaliser leur apparence pour présenter efficacement vos résultats.*
- ⊚ *Développement d'applications : MATLAB vous permet de créer des applications autonomes avec des interfaces graphiques utilisateur (GUI). Vous pouvez construire des outils interactifs et les déployer pour les utilisateurs finaux.*

3.2 Un exemple pratique

Dans cette exemple on s'intéresse sur une compagnie d'assurance et qu'on souhaite de modéliser le comportement des sinistres automobiles pour évaluer les risques et estimer les primes d'assurance . on utilise les chaine de Markov pour étudier les transition entre différents états des sinistres ,tels que « pas de sinistre », « sinistre mineur »,et « sinistre majeur » On a l'espace d'état E=-1,0,1 et une matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.08 & 0.02 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec distribution initiale $\mu_0 = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 \end{pmatrix}$ *Donc la définition d'une fonction* $f : E \to F$ *ou* $F = \{1, 2, 3\}$ *:*

- *f(-1)=1*
- *f(0)=2*
- *f(1)=3*

Dans ce chapitre nous utiliserons toujours la matrice mentionnée dans l'exemple pratique.

3.3 Les étapes de l'algorithme

3.3.1 Définir une chaine de Markov

Soit $(X_n)_n$ *une chaine de Markov d'espace d'états E, de loi initial* μ_0*, de matrice de transition P et de distribution stationnaire . On note* μ*= Mu dans l'algorithme que nous avons les traiter.*

CM.m

```
%définir la matrice de transition d'une chaine de Markov
n=3;
for i=1:n
    for j=1:n
        P(i,j) = input('donner les valeurs de la matrice P:');
    end
end
disp(P)
%donner la loi initial de cette chaine
for i=1:n
    mu(i) = input('donner la valeurs de la loi initial mu:');
end
disp(mu)
```

FIGURE 3.2 – Définir la chaîne de Markov X_n

```
>> CM
donner les valeurs de la matrice P:0.9
donner les valeurs de la matrice P:0.08
donner les valeurs de la matrice P:0.02
donner les valeurs de la matrice P:0.6
donner les valeurs de la matrice P:0.4
donner les valeurs de la matrice P:0
donner les valeurs de la matrice P:0.3
donner les valeurs de la matrice P:0.7
donner les valeurs de la matrice P:0
    0.9000    0.0800    0.0200
    0.6000    0.4000         0
    0.3000    0.7000         0

donner la valeurs de la loi initial mu:0.095
donner la valeurs de la loi initial mu:0.04
donner la valeurs de la loi initial mu:0.01
    0.0950    0.0400    0.0100
```

FIGURE 3.3 – offigure

Exécution de la chaîne de Markov

3.3.2 Calcule de la distribution stationnaire et de la distribution limite de la chaine

Avant de calculer la distribution limite de la chaine (X_n) , il faut évidemment s'assurer qu'elle existe. Vérification de l'existence d'une distribution limite

Vérification de l'existence d'une distribution limite

```
P=[0.9 0.08 0.02;0.6 0.4 0;0.3 0.7 0]
mu=[0.95 0.04 0.01]
%vérification de l'existance d'une distribution stationnaire
for k=1:100
    Pk = P^k;
    if Pk >0
        k %lavaleur de la puissance laqualle Pk>0
        break
    end
end
disp(Pk)
if Pk>0
    disp('la chaine possede une DS')
    N=1;
else
    disp('la chaine ne possede pas une DS')
end
```

FIGURE 3.4 – Vérification de l'existence dune distribution stationnaire de la chaîne X_n

```
>> DS

P =

    0.9000    0.0800    0.0200
    0.6000    0.4000         0
    0.3000    0.7000         0


mu =

    0.9500    0.0400    0.0100


k =

     2

    0.8640    0.1180    0.0180
    0.7800    0.2080    0.0120
    0.6900    0.3040    0.0060

la chaine possede une DS
>>
```

FIGURE 3.5 – Exécution de vérification de l'existence dune distribution stationnaire de la chaîne X_n

3.3.3 Caractérisation d'une chaîne de Markov

L'irréductibilité

L'algorithme :

```
P=[0.9 0.08 0.02;0.6 0.4 0;0.3 0.7 0]
p
Z=Zeros(legth(p));
Z
for (i=1:length(p))
    for j=1:legth(p)
        if p(i,j)>0 Z(i,j)=1;
        end
    end
end
I=(eye(length(p)+Z)^(length(p)-1);
I
if I>0
    disp('la chaine de Markov est irréductible  ');
else
    disp('la chaine de Markov est réductible ');
end
```

FIGURE 3.6 – Irréductibilité de la chaîne X_n

Exécution :

```
>> IR

P =

    0.9000    0.0800    0.0200
    0.6000    0.4000         0
    0.3000    0.7000         0


Z =

     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0


I =

     6     5     3
     4     5     1
     4     4     2

la chaine de Markov est irreductible
>>
```

FIGURE 3.7 – Exécution de la Irréductibilité de la chaîne Xn

Périodicité

L'algorithme :

```
% Matrice de transition P
P = [0.9 0.08 0.02; 0.6 0.4 0; 0.3 0.7 0]
%périodique
n=10;
if ~isempty(find(diag(P)))
 disp('la chaîne de Markov est apériodique');
else
 I=P;k=0;
 for i=2:n
 I=I*P;
 if ~isempty(find(diag(I)))
 k=k+1;
 MP(k,1:length(P))=zeros(1,length(P));
 MP(k,find(diag(I))>0)=i;
 end
 end
 d=0;
 for i=1:n
 d= min(MP,[],'all');
 end
 d
 disp('la chaîne de Markov est périodique');
end
%ergodique
if P^((length(P)-1)^2+1)>0
 disp('la chaîne de Markov est ergodique');
else
 disp('la chaîne de Markov n est pas ergodique ');
end
```

FIGURE 3.8 – Périodicité et ergodicité de la chaîne Xn

Exécution :

```
>> periodique

P =

    0.9000    0.0800    0.0200
    0.6000    0.4000         0
    0.3000    0.7000         0

la cha?ne de Markov est ap?riodique
la cha?ne de Markov est ergodique
>>
```

FIGURE 3.9 – Exécution de la périodicité et ergodicité de la chaîne Xn

3.3.4 Chaîne de Markov image

Définir la fonction f

Afin de pouvoir calculer l'image d'une chaîne de Markov. nous avons besoin de définir une fonction $f : E \to F$ ***L'algorithme :***

```
P=[0.9 0.08 0.02;0.6 0.4 0;0.3 0.7 0]
mu=[0.95 0.04 0.01]
%Definir la fonction f de l'image de la chaine de Markov
E=input ('donner l ensemble de depart E:')
F=input('donner l ensemble d arrivet F:')
e=length(E);%calcul la dimension de l'ensemble E,
            %qui est égale au nombre de ses éléments
f=length(E);%calcul la dimension de l'ensemble E,
            %qui est égale au nombre de ses éléments

%determination de la nature de fonction de la fonction f
C=0;
if e<=f
    C=1
    disp('f est une fonction injective (bijective),Yn est une chaine de Markov image ')
else
    C=2
    disp('f est une fonction surjective,il faut verifier la CNS ')
end
%initialisation des valeurs de f
X=input ('donner l ensemble des antécédents Xi:')
Y=input('donner l ensemble des image Yi asoocie aux antécédent Xi:')
```

Exécution :

```
>> ICM

P =

    0.9000    0.0800    0.0200
    0.6000    0.4000         0
    0.3000    0.7000         0


mu =

    0.9500    0.0400    0.0100

donner l ensemble de depart E:[-1 0 1]

E =

    -1     0     1

donner l ensemble d arrivet F:[1 2 3]

F =

     1     2     3


e =

     3
```

```
c =

     1

f est une fonction injective (bijective),Yn est une chaine de Markov image
donner l ensemble des ant?c?dents Xi:[-1 0 1]

X =

    -1     0     1

donner l ensemble des image Yi asoocie aux ant?c?dent Xi:[1 2 3]

Y =

     1     2     3
```

FIGURE 3.10 – Exécution de la Définition de la fonction f pour une chaîne de Markov image

Si la fonction f est surjective il faut vérifier les CNS(condition nécessaire et suffisante)

L'algorithme :

```
% vérification du caractère Markovien de Yn dans le cas surjective.
if c==2
 P1=0;
 P2=0;
 H=0;
 for i=1:e
 i=1;
 c=i+1;
 if Y(1)==Y(c)
 P1=P1+P(1,i); %calcul du premier terme.
 P2=P2+P(c,i); %calcul du second terme.
 end
 end
 if P1==P2
 disp('Yn est une chaîne de Markov image.')
 H=1;
 else disp('Yn n est pas une chaîne de Markov image.')
 return
 end
end

```

FIGURE 3.11 – les condition nécessaire et suffisante pour le cas surjective

3.3.5 Matrice de transition et distribution stationnaire de chaîne de Markov image

Soit $Y_n = f(X_n)$ est une chaîne de Markov, Nous calculons sa matrice de transition et sadistribution stationnaire.

Voici l'algorithme qui permet et calcul quelque soit le cas dans lequel on se trouve :

L'algorithme :

```
% vérification du caractère Markovien de Yn dans le cas surjective.
if c==2
 P1=0;
 P2=0;
 H=0;
 for i=1:e
 i=1;
 c=i+1;
 if Y(1)==Y(c)
 P1=P1+P(1,i); %calcul du premier terme.
 P2=P2+P(c,i); %calcul du second terme.
 end
 end
 if P1==P2
 disp('Yn est une chaîne de Markov image.')
 H=1;
 else disp('Yn n est pas une chaîne de Markov image.')
 return
 end
end
```

FIGURE 3.12 – Matrice de transition et distribution stationnaire de chaîne de Markov image

Exécution :

```
>> Distribution

P =

    0.9000    0.0800    0.0200
    0.6000    0.4000         0
    0.3000    0.7000         0


mu =

    0.9500    0.0400    0.0100

donner l ensemble de depart E:[-1 0 1]

E =

    -1     0     1

donner l ensemble d arrivet F:[1 2 3]

F =

     1     2     3
```

```
e =

     3


f =

     3


c =

     1

f est une fonction injective (bijective),Yn est une chaine de Markov image
donner l ensemble des ant?c?dents Xi:[-1 0 1]

X =

    -1     0     1

donner l ensemble des image Yi asoocie aux ant?c?dent Xi:[1 2 3]

Y =

     1     2     3

dsQ =

    0.8499    0.1331    0.0170

la distribution image n' est pas stationnaire

ans =

    0.8499
    0.1331
    0.0170

>>
```

FIGURE 3.13 – Exécution de la matrice de transition et distribution stationnaire de chaîne de Markov image

3.4 Théorèmes limites pour une chaine de Markov

3.4.1 Théorème ergodique

Soit P une matrice de transition irréductible et récurrente positive, πson unique distribution stationnaire et $f\, E \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\sum_i \mid f(i) \mid \pi(i) < \infty$, alors pour toute distribution initiale π_0

On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)[]p.s \sum_{i\in E}\pi_i f(i) = E_\pi(f(X_0))$$

De plus, si X est récurrente positive de probabilité invariante π, pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ bornée[9] (Le résultat peut se généraliser à f ($\pi - intgrable$).

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \longrightarrow p.s \sum_{i\in E} \pi_i f(i) = \mathbb{E}_\pi(f(X_0)), n \to \infty.$$

Voici l'algorithme qui permet de vérifier les conditions de ce théorème pour une chaine de Markov :

L'algorithme :

```
% Matrice de transition P
P = [0.9 0.08 0.02; 0.6 0.4 0; 0.3 0.7 0]

% Calcul de la distribution stationnaire pi
[V, D] = eig(P')
pi = V(:, 1)'
pi = pi / sum(pi) % Normalisation

% Fonction f: E -> F
f = [1; 2; 3];

% Calcul de la somme sum|f(x)|pi(x)
sum_check = abs(f(1))*pi(1) + abs(f(2))*pi(2) + abs(f(3))*pi(3)

if sum_check < Inf
    disp('La somme sum|f(x)|pi(x) est finie.')

    % Étape 4: Calcul de la moyenne ergodique
    % Paramètres pour le calcul de la moyenne ergodique
    n = 1000000; % Nombre d'itérations
    x = zeros(n, 1);

    % Distribution initiale mu
    mu = [0.95; 0.04; 0.01]
```

```
        % Génération des états de la chaîne de Markov
        for k = 1:n
            if k == 1
                x(k) = randsample([1, 2, 3], 1, true, mu);
            else
                x(k) = randsample([1, 2, 3], 1, true, P(x(k-1), :));
            end
        end

        % Calcul de la moyenne ergodique
        mean_ergodic = mean(f(x))

        % Étape 5: Comparaison de la moyenne ergodique avec la valeur pi(f)
        % Calcul de la valeur pi(f)
        pi_f = f(1)*pi(1) + f(2)*pi(2) + f(3)*pi(3)

        disp(['Moyenne ergodique: '  num2str(mean_ergodic)])
        disp(['Valeur pi(f): '  num2str(pi_f)])

        % Vérification de la convergence
        if abs(mean_ergodic - pi_f) < 1e-6
            disp('La moyenne ergodique converge vers pi(f).');
        else
            disp('La moyenne ergodique ne converge pas vers pi(f).');
        end
    else
        disp('La somme sum|f(x)|pi(x) est infinie. Le théorème ergodique ne s applique pas.');
    end
```

FIGURE 3.14 – L'algorithme qui vérifie les condition de théorème ergodique pour une chaîne de Markov

Exécution :

```
>> applicationEEEE

P =

    0.9000    0.0800    0.0200
    0.6000    0.4000         0
    0.3000    0.7000         0


V =

   -0.9878   -0.6814    0.4234
   -0.1547    0.7303   -0.8163
   -0.0198   -0.0489    0.3929


D =

    1.0000         0         0
         0    0.2785         0
         0         0    0.0215
```

```
pi =

   -0.9878   -0.1547   -0.0198


pi =

    0.8499    0.1331    0.0170


sum_check =

    1.1671

La somme sum|f(x)|pi(x) est finie.

mu =

    0.9500
    0.0400
    0.0100


mean_ergodic =

    1.1673


pi_f =

    1.1671

Moyenne ergodique: 1.1673
Valeur pi(f): 1.1671
La moyenne ergodique ne converge pas vers pi(f).
>>
```

FIGURE 3.15 – Exécution de l'algorithme qui vérifie les condition de théorème ergodique pour une chaîne de Markov

3.5 Théorèmes limites pour l'image d'une chaine de Markov

3.5.1 Théorème ergodique

Soit P une matrice de transition irréductible et récurrente positive, π son unique distribution stationnaire et $f : E \to F$. Si $\sum_x \mid g(x) \mid \pi'(x) < \infty$ alors pour toute distribution initiale $\mu_(0)$ on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(Y_k) \to \sum_{k\in E} \pi'_k f(k) = E_{\pi'}(g(Y_0))$$

Si X est récurrente positive de probabilité invariante π pour toute fonction $f : E \to F$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) \to \sum_{k\in E} \pi'_k g(k) = E_{\pi'}(g(X_0)), \quad n \to \infty$$

Voici l'algorithme qui permet de vérifier les conditions de ce théorème pour une chaîne de Markov image Yn :

L'algorithme :

```
% Calcul de la distribution stationnaire transposée
[V, D] = eig(P')
pi_prime = V(:, 1)'
pi_prime = pi_prime / sum(pi_prime)
% Vérification de la somme sum_x |g(x)|pi_prime(x)
g = [f(-1) f(0) f(1)];
sum_ch = abs(g(1))*pi_prime(1) + abs(g(2))*pi_prime(2) + abs(g(3))*pi_prime(3)
if sum_g_pi < Inf
    disp('La somme sum_x |g(x)| pi_prime(x) est finie.');
    % Simulation de la chaîne de Markov
    n = 1000; % nombre d'itérations
    num_states = size(P, 1);
    X = zeros(1, n);
    X(1) = randsample(num_states, 1, true, mu);
    for k = 2:n
        X(k) = randsample(num_states, 1, true, P(X(k-1), :));
    end
    % Calcul de la moyenne ergodique
    mean_ergodic = mean(g(X))
    disp(['Moyenne ergodique: ' num2str(mean_ergodic)]);
    % Calcul de la valeur E_pi_prime (g(X_0))
    g_X0 = g(X(1))
    expected_value = g(1)*pi_prime(1) + g(2)*pi_prime(2) + g(3)*pi_prime(3)
    disp(['Valeur attendue E_pi_prime (g(X_0)): ' num2str(expected_value)]);
else
    disp('La somme sum_x |g(x)|pi_prime(x) est infinie. Le théorème ergodique ne s applique pas.');
end
```

FIGURE 3.16 – L'algorithme qui vérifie les condition de théorème ergodique pour une chaîne de Markov image

Exécution :

```
>> correctIM

V =

   -0.9878   -0.6814    0.4234
   -0.1547    0.7303   -0.8163
   -0.0198   -0.0489    0.3929


D =

    1.0000         0         0
         0    0.2785         0
         0         0    0.0215


pi_prime =

   -0.9878   -0.1547   -0.0198


pi_prime =

    0.8499    0.1331    0.0170


sum_ch =

    1.1671

La somme sum_x |g(x)| pi_prime(x) est finie.

mean_ergodic =

    1.1660

Moyenne ergodique: 1.166

g_X0 =

     1


expected_value =

    1.1671

Valeur attendue E_pi_prime (g(X_0)): 1.1671
>>
```

FIGURE 3.17 – Exécution de l'algorithme qui vérifie les condition de théorème ergodique pour une chaîne de Markov image

Conclusion général

En conclusion, le théorème limite de l'image d'une chaîne de Markov est un résultat clé qui permet de comprendre le comportement à long terme de ces processus probabilistes. Ce théorème énonce que, sous certaines conditions, l'évolution de la distribution de probabilité de la chaîne converge vers une distribution stable indépendante de la distribution initiale.

Le théorème limite de l'image d'une chaîne de Markov fournit un cadre solide pour comprendre la convergence et le comportement asymptotique de ces processus stochastiques. Son application pratique offre des perspectives précieuses pour l'analyse et la modélisation de nombreux phénomènes complexes, contribuant ainsi à l'avancement des connaissances et des applications dans divers domaines scientifiques et techniques.

Bibliographie

[1] *Bechkit Abderahmane. Processus de sauts de markov application.* Université M'Hamed BOUGARA Boumerdès*, 28/ 06 /2017.*

[2] *Jean-Jacques Ruch-Marie-Line Chabanol. ChaÎnes de markov. Master's thesis, Préparation à l'Agrégation Bordeaux 1, 2012 - 2013.*

[3] *C. Y. Chen. A markov chain model for financial time series analysis.* Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, pages 1–9, 2014.*

[4] *S. Robin E.Pommiès. Cours introduction aux chaînes de markov homogènes.* Département OMIP*, 16 juin 2004.*

[5] *Daniel Flipo. Chaînes de markov. Master's thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille U. F. R. de Mathématiques Pures et Appliquées, 2008.*

[6] *Jean-François Le Gall. Intégration.* Probabilités et Processus Aléatoires*, 2006.*

[7] *Amélie Guilbaut. Chaînes de markov cachées.* université de lille 1*, 11 mai 2018.*

[8] *J.R.Norris. Markov chains.* Cambridge Academic Press.

[9] *Ph. Barbe M.Ledoux. Probabilité.* ISBN 2-7011-2131-0*, 1998.*

[10] *TOUCHE Nassim. cours chaînes de markov à temps discrète.* niversité Abderrahmane Mira de Bejaia*, 2017 / 2018.*

[11] *MARION Adrien STURMA Thomas. Théorème central limite pour les chaînes de markov.* L3 Magistère Université Paris-Saclay*, 2021. Disponible en ligne à l'adresse https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ damien.thomine/fr/archives/Enseignement2021/TER/TCLMarkov.pdf.*

[12] *Yves.Caumel. Probabilités et processus stochastiques.* l'Springer-Verlag France*, 2011.*