

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'hamed Bougara
Faculté Des Sciences



Mémoire de **MASTER**
En : Mathématiques
Spécialité : Modélisation Stochastique et Statistique

THÈME

**ANALYSE STATISTIQUE DES PROCESSUS
ALPHA STABLES**

Présenté par :
HADDOUCHE Hanane
KENDEL Khaoula

Soutenue publiquement, le 06/07/2023, devant le jury composé de :

M.	FERRANI Y	MCB	à UMBB	Président
M.	IMAKHLAF A	MCB	à UMBB	Examineur
Mme.	CHEMERIK H	MAA	à UMBB	Encadreur

Remerciements

Nous souhaitons tout d'abord exprimer notre gratitude à Allah pour nous avoir donné la force, la foi et la patience pour achever ce mémoire. La réalisation de ce travail a été rendue possible grâce à l'aide précieuse de nombreuses personnes, à qui nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance.

Tout d'abord, nous aimerions remercier sincèrement **Madame H.CHEMERIK** pour sa patience et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire. Sa lecture attentive et ses corrections ont été d'une grande importance, sans lesquelles ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Nous désirons aussi remercier **Monsieur Y.FERRANI** pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider ce jury.

Nous remercions également **Monsieur A IMAKHLAF** pour avoir accepté d'évaluer ce travail et participer à ce jury.

Nous adressons aussi nos sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques, nous ont guidés tout au long de nos années d'études universitaires.

Enfin, nous exprimons notre gratitude envers nos familles, nos amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de ce travail. Leurs prières, leurs encouragements et leur soutien nous ont permis de poursuivre et de mener à bien ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail à

Ma chère maman Mon cher papa

Mes soeurs et Mon cher frère

Ahlem, Nour el houda et Islam.

J'adresse également mes salutations à toutes

ma famille et tous les personnes qui ont contribué

à mon parcours académique et personnel.

Hanane

Table des matières

Table des figures	i
Liste des tableaux	ii
Introduction Générale	1
1 Lois α-stables	3
1.1 Lois stables univariées	3
1.1.1 Fonctions caractéristiques	4
1.1.2 Variables aléatoires stables symétriques	6
1.1.3 Densité de probabilité	6
1.1.4 Propriétés des lois α stables	12
1.1.5 Estimation des paramètres	14
1.1.6 Algorithme de simulation	17
1.1.7 Statistique des lois symétriques α -stables	19
1.2 Lois stables multivariées	20
1.2.1 Mesure de dépendance	22
2 Processus de diffusion α-stables	26
2.1 Processus stochastiques	26
2.2 Processus de Lévy	26
2.3 Processus stable	27
2.4 Mouvement α -stable	28
2.5 Intégrale stochastique α -stable	29
2.6 Équations différentielles stochastiques (EDS) α -stables	30
2.7 Modèle d'évaluation des options	31
2.7.1 Les options	31
2.7.2 Modèle de Black et Scholes	32
2.7.3 Le modèle α -stable	33

3 Simulations	34
3.1 Simulation d'une loi α -stable	34
3.1.1 Cas asymétrique	34
3.1.2 Cas symétrique	35
3.2 Simulation d'un mouvement α -stable	36
3.3 Simulation des équations différentielles stochastiques α -stables	37
3.3.1 Schéma d'Euler-Maruyama	37
3.3.2 Schéma de Milstein	38
3.4 Simulation des options européennes	40
3.4.1 Simulation du modèle de Black et Scholes	40
3.4.2 Simulation de Black et Scholes α -stable	46
Conclusion Générale	50
Bibliographie	51

Table des figures

1.1	Densités des lois stables de paramètres $\alpha \in \{0.5, 1, 2\}$, $\beta \in \{1, 0, 0\}$, $\gamma \in \{1, 1, 1\}$, $\mu = 0$	8
1.2	Densités des lois stables symétriques $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.5, 2\}$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ et $\mu = 0$	9
1.3	Densité des lois stables de paramètres $\alpha \in \{0.25, 0.75, 1, 1.25, 2\}$, $\beta=0.6$, $\mu=0$ et $\gamma=1$	9
1.4	Densité des lois stables de paramètres $\alpha=1$, $\beta \in \{-1, -0.2, 0.2, 0.6, 1\}$, $\gamma=1$ et $\mu=0$	10
1.5	Densité des lois stables de paramètres $\alpha=1$, $\beta=0.2$, $\gamma \in \{1, 1.5, 2, 2.5, 4\}$ et $\mu=0$	10
1.6	Densité des lois stables de paramètres $\alpha=1$, $\beta=0.2$, $\gamma=1$, et $\mu \in \{0, 0.3, 0.8, 1.3\}$	11
1.7	Test graphique 1, sur l'échantillon de 900 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour $\alpha = 1$	19
1.8	Test graphique 1, sur l'échantillon de 900 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour $\alpha = 1.5$	20
3.1	La trajectoire de mouvement α -stable.	37
3.2	Schéma de Milstein et solution exacte de l'EDS α stable pour $\alpha = 0.8$	39
3.3	Schéma d'Euler et solution exacte de l'EDS α stable pour $\alpha = 1.6$	40
3.4	Trajectoire de Black&Scholes.	41
3.5	Graphe de simulation du call avec différentes valeurs de K	43
3.6	Prix de put en fonction du prix de sous-jacent	44
3.7	Graphe de prix d'option d'achat en fonction de α	48

Liste des tableaux

3.1	Les prix des options donnés par la formule $B&S$ et leurs prix simulés par le modèle 2-EDS	46
3.2	Les prix d'option d'achat selon l'indice de stabilité α	47

Introduction Générale

Depuis fort longtemps, la loi gaussienne s'est imposée à l'attention des observateurs et des techniciens dans les disciplines les plus diverses : statistique, physique, biologie... En statistique, cette loi est largement utilisée. Ses propriétés, comme la stabilité, le fait que deux paramètres (moyenne et variance) suffisent à la caractériser ou bien encore le théorème de la limite centrale fait que cette loi s'adapte bien à de nombreuses situations. Malheureusement, la loi normale échoue à décrire l'évidence empirique dans les marchés financiers. Une alternative possible est d'introduire les lois α stables. Ces lois ont entre autres la propriété d'autoriser des queues de distribution plus épaisses que la loi normale et permettent ainsi une meilleure prise en compte des événements les moins probables. Les lois stables ont été généralisées aussi au cas multivarié ou elles peuvent être utiles pour exprimer des dépendances très complexes.

En finance, les lois α -stables sont souvent utilisées pour modéliser les fluctuations des actifs financiers tels que les actions, les devises, les matières premières, etc. Elles sont particulièrement utiles pour modéliser les queues lourdes et les événements extrêmes qui sont fréquents dans les marchés financiers.

L'objectif de cette étude est de mettre en évidence l'utilité des lois stables pour la modélisation financière en fournissant les outils mathématiques nécessaires à leur étude.

Ce travail est présenté en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous traitons les lois stables, nous donnons plusieurs définitions et caractéristiques des lois univariées et nous abordons le problème du test d'une variance finie ou infinie ainsi que l'estimation des paramètres caractérisant ces lois. Dans le cas multivarié, nous traitons particulièrement certaines quantités, la covariation, le coefficient de covariation et la codifférence sont introduites ainsi que leurs propriétés.

Le deuxième chapitre est consacré aux processus stochastiques solutions d'équations différentielles stochastiques α -stables (α EDS) connu sous le nom de processus de diffusion α -stables. Nous introduisons la construction de l'intégrale stochastique d'Itô qui permet

de donner un sens à la différentielle d'un mouvement α -stable, notion importante sur laquelle repose la théorie des α EDS. Ensuite, nous proposons un modèle simple d'évaluation des options dans le cas où l'actif sous-jacent satisfait une α EDS. A la fin du chapitre, nous donnons de brefs rappels sur la théorie des options en particulier les options européennes et le modèle de Black-Scholes (B&S). Dans ce contexte, nous considérons un modèle d'évaluation d'un call européenne où le processus des prix vérifie une α EDS.

Dans le dernier chapitre, nous présentons les méthodes et graphes de simulation, nous étudions numériquement la solution d'une α EDS selon les deux schémas Euler et Milstein puis nous calculons la valeur de l'option avec les modèles étudiés B&S et α EDS. Toute la simulation se fera avec le logiciel Matlab.

Chapitre 1

Lois α -stables

Les lois stables forment une famille de lois de probabilité très importantes dans le domaine des mathématiques. La théorie générale des distributions stables a été initiée par Paul Lévy en 1924, en trouvant les transformées de Fourier de toutes les distributions strictement stables. Une approche nouvelle de toute la théorie a été développée avec la découverte des lois infiniment divisibles en 1937. A partir de ses travaux les lois α -stables se sont progressivement vulgarisées.

Dans les années 60, un nouveau modèle de variation des prix repose sur des lois qui s'inspirent des « Lois de Pareto ». Ce sont les « lois α -stables » ou lois à queue lourde. Les domaines d'application de ces lois sont entre autres la finance, les télécommunications, internet...

Plusieurs livres sont consacrés à ces lois, en 1986 Zolotarev a étudié les lois alpha-stables dans le contexte univarié et Samorodnitsky et Taqqu (1994) ont étudié de manière approfondie beaucoup de propriétés de ces lois dans le cas univarié comme dans le cas multivarié.

1.1 Lois stables univariées

Il existe plusieurs façons de caractériser une loi α -stable, nous présentons dans cette section quatre définitions équivalentes des distributions stables .

Définition 1.1. Une variable aléatoire (v.a) X est dite stable si et seulement si pour tout réels positifs C_1 et C_2 , il existe un réel positif a et un réel b , tel que

$$C_1X_1 + C_2X_2 \stackrel{d}{=} aX + b$$

Où X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X .
et où « $\stackrel{d}{=}$ » symbolise l'égalité en distribution. Si $b = 0$, on dit que X est strictement

stable.

Définition 1.2. Une variable aléatoire X est dite stable si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel positive a_k et un réel positive b_k tel que

$$X_1 + \dots + X_k \stackrel{d}{=} a_k X + b_k \quad (1.1)$$

Où X_1, \dots, X_k sont des v.a indépendantes de même loi que X .

L'orsque $b_k = 0$, X est dite strictement stable.

Remarque 1.1. Il existe une constante réelle α , $0 < \alpha \leq 2$, tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k = k^{1/\alpha}$$

Le réel α est unique et ne dépend que de la v.a X , d'où la nomination " α -stable".

Définition 1.3. (propriété de stabilité)

La distribution d'une v.a X est stable si pour toute suite $C_k, k \in \mathbb{N}^*$ et toute famille X_1, X_2, \dots, X_k i.i.d (indépendante et identiquement distribués) de même loi que X , il existe $a_k > 0$ et b_k deux réels ,tel que

$$C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_k X_k \stackrel{d}{=} a_k X + b_k \quad (1.2)$$

Définition 1.4. Une variable aléatoire X est appelée stable s'il existe une suite des nombres réels positifs a_k et une suite des nombres réels b_k , tel que

$$\frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_k) - b_k}{a_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d} X.$$

Où $\ll \xrightarrow{d} \gg$ symbolise la convergence en distribution.

1.1.1 Fonctions caractéristiques

Les lois stables sont couramment définies à partir de leurs fonctions caractéristiques. Il existe dans la littérature plusieurs paramétrisations des distributions α -stables. La plus connue est celle décrite par Samorodnitsky and Taqqu. Cependant, la plus utilisée semble être celle définie par Zolotarev.

Définition 1.5. (SAMORODNITSKY ET TAQQU)

Une variables aléatoire X est dite α -stable, notée $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$, si sa fonction caractéristique s'écrit sous la forme :

$$\Psi_{S_\alpha(\beta,\gamma,\mu)}(t) = \begin{cases} \exp(it\mu - |\gamma t|^\alpha [1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sign}(t)]) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp(it\mu - |\gamma t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(t) \log|t|]) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

avec les contraintes pour les paramètres $\alpha \in]0; 2]$, $\beta \in [-1; 1]$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et sign la fonction signe.

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

On peut interpréter les 4 paramètres précédents de la manière suivante :

α est appelé l'exposant caractéristique ou indice de stabilité. Il permet de caractériser la queue de la distribution. Par exemple, plus α est proche de 2 et plus la probabilité d'observer des valeurs de la variable aléatoire loin de la position centrale est faible et inversement.

β correspond au paramètre d'asymétrie (appelé skewness). Si $\beta = 1$, la distribution est dite totalement asymétrique à droite. De même, la distribution est dite totalement asymétrique à gauche si $\beta = -1$.

γ désigne le paramètre de dispersion. Il permet de mesurer la dispersion de la loi autour du paramètre μ .

μ est appelé le paramètre de position. Il permet de positionner la loi suivant l'axe des abscisses.

Exemple 1

Dans le cas où $\beta = 0$ et $\alpha = 1$ l'équation (1.3) est égale à

$$\Psi_{S_\alpha(\beta,\gamma,\mu)}(t) = \exp(i\mu t - |t\gamma|)$$

qui coïncide avec la fonction caractéristique d'une distribution de Cauchy avec des paramètres μ et γ .

Exemple 2

Si $\beta = 0$ et $\alpha = 2$ on a

$$\Psi_{S_\alpha(\beta,\gamma,\mu)}(t) = \exp(i\mu t - (\gamma t)^2).$$

qui coïncide avec la fonction caractéristique d'une distribution normale avec moyenne μ et variance γ^2 .

Définition 1.6. (ZOLOTAREV)

Une variable aléatoire X est dite stable, notée $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$ si sa fonction caractéristique

s'écrit :

$$\varphi_{S_\alpha(\beta,\gamma,\mu)}(t) = \begin{cases} \exp(it\mu - |\gamma t|^\alpha [1 + i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \operatorname{sgn}(t)(|t|^{1-\alpha} - 1)]) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp(it\mu - |\gamma t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \log|t|]) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

Remarque 1.2. *La paramétrisation proposée par Samorod-nitsky et Taqqu n'offre pas la continuité de la fonction caractéristique aux points où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, alors que celle de Zolotarev est continue par rapport à tous les paramètres.*

Théorème 1.1. *(Théorème de limite centrale généralisé)*

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. Il existe une suite $a_k > 0$ et une suite $b_k \in \mathbb{R}$ tels que la quantité :

$$\frac{(X_1 + \dots + X_k)}{a_k} + b_k \quad (1.5)$$

converge en loi vers une loi stable.

Définition 1.7. (LEVY-KHINCHIN)

Si X a une distribution stable, alors sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\Phi_{S_\alpha(\beta,\gamma,\mu)}(t) = \begin{cases} \exp\left(i\mu t - \gamma|t| \left[1 + \frac{2}{\pi} i\beta \operatorname{sign}(t) \log|t|\right]\right) & \text{si } \alpha = 1 \\ \exp\left(i\mu t - \gamma^\alpha |t|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right]\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

1.1.2 Variables aléatoires stables symétriques

Nous poursuivons la description de la loi stable dans le cas où les paramètres β et μ sont nuls, on appelle alors cette loi, loi symétrique par rapport à β et μ que nous noterons $X \sim S_\alpha S$ pour indiquer que X suit une loi stable symétrique.

Proposition 1

Une v.a stable $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$ est symétrique si $\beta = \mu = 0$. X est symétrique par rapport à μ si $\beta = 0$. La notation $S_\alpha S$ (symétrique α -stable) signifie que $X \sim S_\alpha(0, \gamma, 0)$.

D'après la définition (1.6) et la proposition 1, on voit que si X est $S_\alpha S$, alors sa fonction caractéristique s'écrit sous la forme suivante

$$\Phi_X(t) = \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha)$$

1.1.3 Densité de probabilité

Pour la plupart des lois connues, nous avons une forme explicite de la densité (Normale, Cauchy, Gamma,...). Pour la loi α -stable, nous n'avons que la forme explicite de la fonction caractéristique. A l'aide de la transformée inverse de la fonction caractéristique, donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \Phi_x(t) dt \quad (1.7)$$

Nous pouvons obtenir la densité d'une loi α -stable symétrique sous la forme d'une intégrale comme suivant :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha) \cos[xt + \beta t^\alpha \omega(t, \alpha)] dt$$

où

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

La forme explicite de la densité de probabilité de lois α -stables n'existe que dans les trois cas importants suivants :

La loi de Gauss $S_2(0, \gamma, \mu)$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{4\gamma^2}\right).$$

La loi de Cauchy $S_1(0, \gamma, \mu)$ de densité

$$f(x) = \frac{2\gamma}{\pi((x - \mu)^2 + 4\gamma^2)}.$$

La loi de Lévy $S_{\frac{1}{2}}(1, \gamma, \mu)$ de densité

$$f(x) = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (x - \mu)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x - \mu)}\right) \mathbf{1}_{(\mu, +\infty)}(x).$$

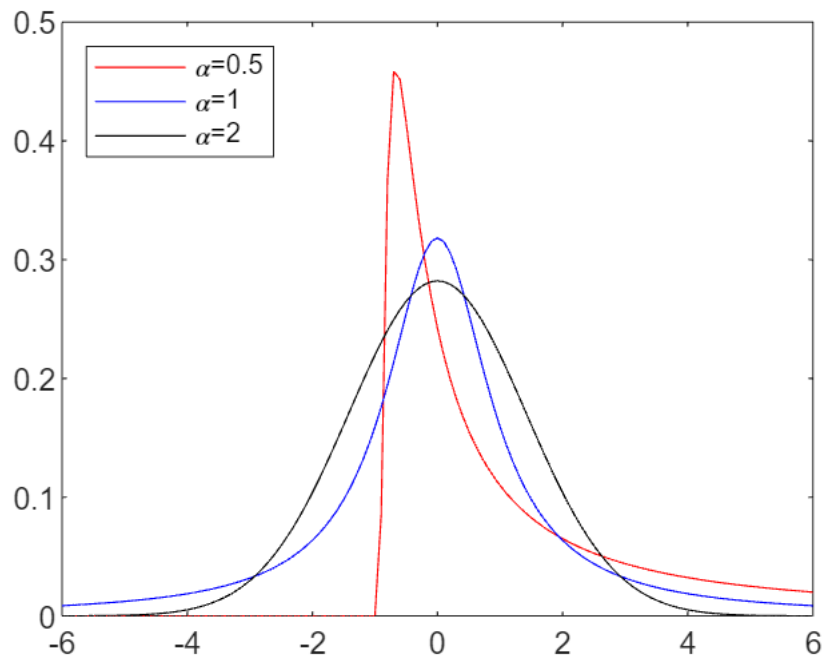


Figure 1.1: Densités des lois stables de paramètres $\alpha \in \{0.5, 1, 2\}$, $\beta \in \{1, 0, 0\}$, $\gamma \in \{1, 1, 1\}$, $\mu = 0$

Remarquons que

le graphe la densité d'une distribution de Lévy de paramètres ($\alpha = \frac{1}{2}$) est forcément asymétrique et présente des queues lourdes.

le graphe de la densité d'une distribution de Cauchy ($\alpha = 1$) est symétrique et présente une courbe en forme de cloche, mais les queues sont plus lourdes que la densité de distribution de loi Normale.

le graphe de la distribution de loi Normale ($\alpha = 2$) est symétrique et présente une courbe en forme de cloche.

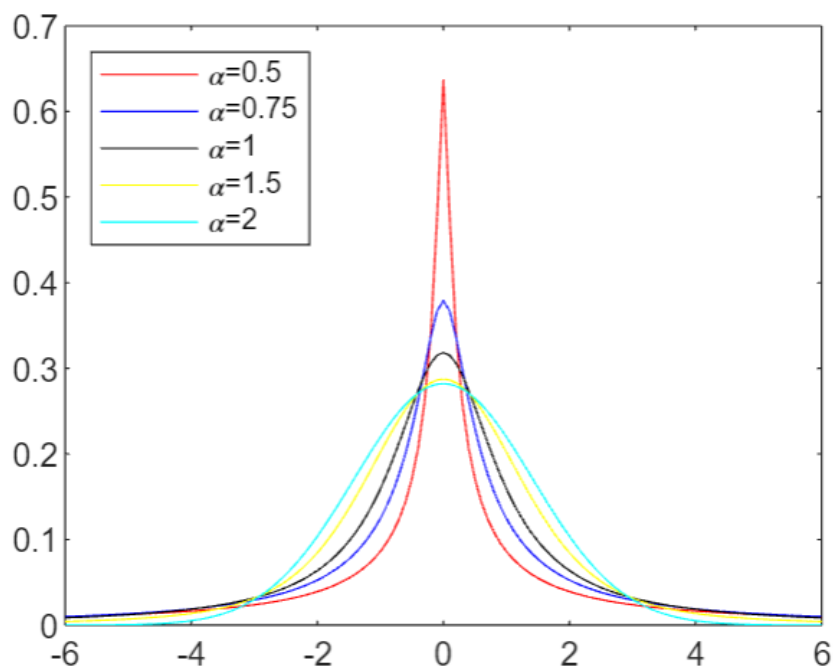


Figure 1.2: Densités des lois stables symétriques $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.5, 2\}$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ et $\mu = 0$.

1.1.3.1 Influence des paramètres sur la représentation de la densité de probabilité

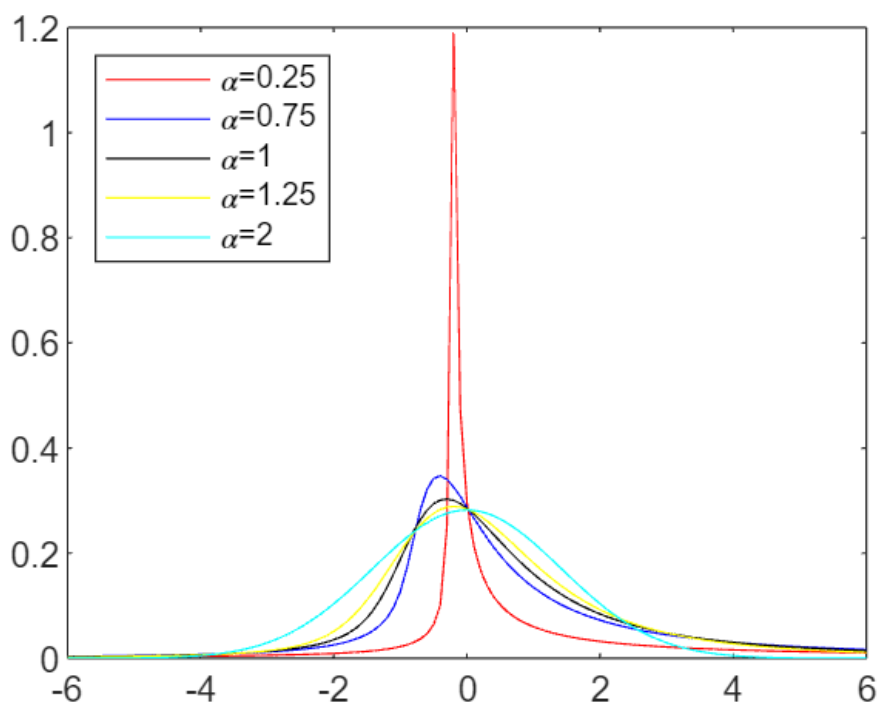


Figure 1.3: Densité des lois stables de paramètres $\alpha \in \{0.25, 0.75, 1, 1.25, 2\}$, $\beta=0.6$, $\mu=0$ et $\gamma=1$.

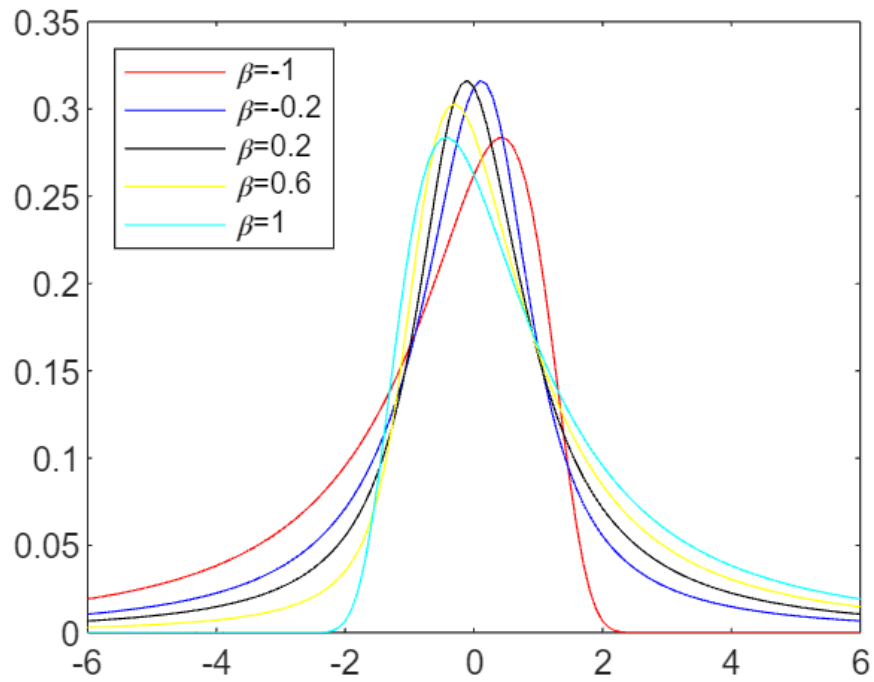


Figure 1.4: Densité des lois stables de paramètres $\alpha=1$, $\beta \in \{-1, -0.2, 0.2, 0.6, 1\}$, $\gamma=1$ et $\mu=0$.

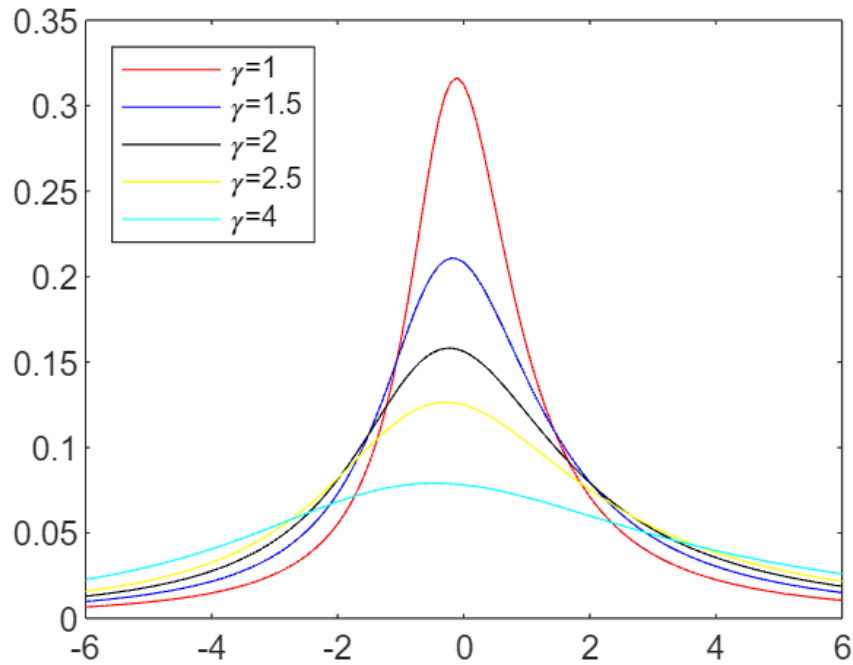


Figure 1.5: Densité des lois stables de paramètres $\alpha=1$, $\beta=0.2$, $\gamma \in \{1, 1.5, 2, 2.5, 4\}$ et $\mu=0$.

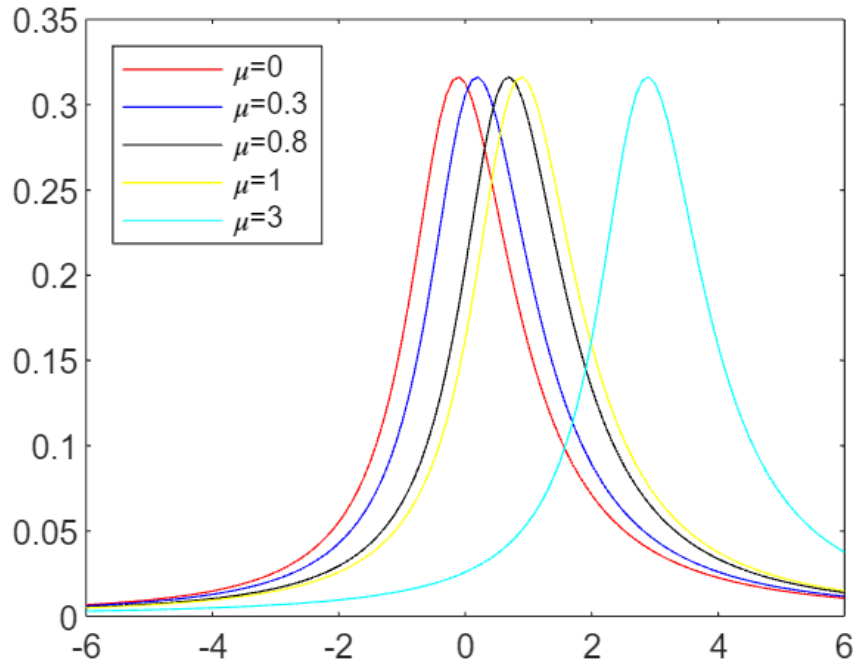


Figure 1.6: Densité des lois stables de paramètres $\alpha=1$, $\beta=0.2$, $\gamma=1$, et $\mu \in \{0, 0.3, 0.8, 1.3\}$.

Interprétation

On remarque que chaque paramètre influe de manière différente sur la représentation de la densité de probabilité d'une loi α -stable.

- Si α est petit la courbe est plus pointue et a des queues de distribution épaisse.
Si $\alpha = 2$ la distribution est celle de la loi Normale. voir Figure 1.3.
- Quand β vaut zéro alors la distribution est symétrique.
On remarque la symétrie à droite pour $\beta = 1$ et à gauche $\beta = -1$.
Lorsque β est positif (resp.négatif), la queue de distribution est plus épaisse à droite (resp.à gauche). (Figure 1.4)
- Si γ tend vers 0 la courbe de densité est plus pointue et à densité de probabilité grand (Figure 1.5).
Plus γ est grand, plus les données sont volatiles.
- μ permet de translater la distribution sur l'axe des abscisses.
Lorsque μ est positif (resp négatif), la courbe décale vers la droite (resp vers la gauche) (Voir Figure 1.6).

1.1.4 Propriétés des lois α stables

1.1.4.1 Stabilité

Propriété 1

Pour $\alpha \neq 1$, nous avons l'équivalence suivante

$$X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \mu) \Leftrightarrow Y = \frac{X - \mu}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}} \sim S_\alpha(\beta, 1, 0).$$

Preuve de propriété 1

Tout d'abord, remarquons que

$$\begin{aligned} \Phi_{mX+p}(t) &= \mathbb{E} \left[e^{it(mX+p)} \right] \\ &= e^{itp} \Phi_X(mt) \end{aligned}$$

Condition nécessaire

prenons $m = \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}$ et $p = -\frac{\mu}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}$ Nous avons alors

$$\begin{aligned} \Phi_Y(t) &= \exp\left(-\frac{it\mu}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \Phi_X\left(\frac{t}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{it\mu}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \exp\left(\frac{it\mu}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}} - \gamma \left|\frac{t}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sign}\left(\frac{t}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right]\right) \end{aligned}$$

Or $\operatorname{sign}\left(\frac{t}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = \operatorname{sign}(t)$ car $\gamma > 0$ donc

$$\Phi_Y(t) = \exp\left[-|t|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right]\right]$$

qui est bien la forme de la fonction caractéristique d'une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$.

Condition suffisante : la démonstration est similaire à la condition nécessaire en prenant $m = \gamma^{\frac{1}{\alpha}}$ et $p = \mu$.

1.1.4.2 Queues Lourdes

Définition 1.8. La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle (v.a.r) est dite à queue lourde d'indice α s'il existe un nombre $\alpha \in]0, 2[$ et une fonction h à variation lente, c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(bx)}{h(x)} = 1$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$P(X > x) = x^{-\alpha} h(x)$$

Propriété 2

Soit X une v.a.r $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$, on a les deux résultats suivants :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha P(X > t) = \gamma C(\alpha) \frac{1 + \beta}{2},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha P(X < -t) = \gamma C(\alpha) \frac{1 - \beta}{2}$$

tel que

$$C(\alpha) = \left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x \, dx \right)^{-1}$$

1.1.4.3 Calcul des moments

Propriété 3

Si X suit une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$, et $p \in \mathbb{N}$; les moments d'ordre p sont :

1. si $\alpha = 2$, $\forall p$, $E|X|^p < \infty$.
2. si $0 < \alpha < 2$, $\begin{cases} \forall 0 \leq p < \alpha, & E|X|^p < +\infty. \\ \forall p \geq \alpha, & E|X|^p = +\infty. \end{cases}$

Remarque 1.3. 1. Si $\alpha < 2$, la variance d'une loi α -stable est infinie. Dès que $\alpha < 1$, c'est la moyenne qui devient infinie.

2. Si $\alpha > 1$, la moyenne d'une loi α -stable est égale à μ .

Exemple

Nous avons simulé 900 réalisations de loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α , $\beta = 0$, $\gamma = 1$ et $\mu = 0$. Le tableau ci dessous représente la moyenne et la variance empirique des 900 réalisations.

Les résultats du tableau confirment que lorsque α décroît vers 0, la variance explose et lorsque α devient plus petit que 1, c'est la moyenne qui va exploser.

α	0.1	0.5	1.5	2
Moyenne	55.9972	25.07	-0.3086	-0.1440
Variance	2238600	719250	241.629	151.554

1.1.5 Estimation des paramètres

Il existe quatre grandes familles d'estimateurs dont découlent plusieurs méthodes fondées sur :

- les quantiles.
- la fonction caractéristique.
- le maximum de vraisemblance .
- les moindres carrés.

Dans cette section, nous allons présenter deux méthodes permettant d'estimer les paramètres des distributions α -stables.

1.1.5.1 Méthode des moments

Cette méthode est basée sur une transformation de la fonction caractéristique. Pour tout α ,

$$\begin{aligned} |\Phi(t)| &= \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha) \\ \log|\Phi(t)| &= -\gamma^\alpha |t|^\alpha \end{aligned}$$

Pour $\alpha \neq 1$:

On prend deux valeurs non nulles t_1 et t_2 , avec $t_1 \neq t_2$

$$\log|\Phi(t_j)| = -\gamma^\alpha |t_j|^\alpha$$

Pour $j = 1, 2$, on résoud le système d'équation de α et γ , en remplaçant $\Phi(t)$ par $\hat{\Phi}(t)$.
telque $\hat{\Phi}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp\{itX_j\}$. On arrive à

$$\hat{\alpha} = \frac{\log \frac{\log|\hat{\Phi}(t_1)|}{\log|\hat{\Phi}(t_2)|}}{\log \frac{|t_1|}{|t_2|}}. \quad (1.8)$$

$$\log \hat{\gamma} = \frac{\log(-\log|\hat{\Phi}(t_1)|) \log|t_1| - \log(-\log|\hat{\Phi}(t_2)|) \log|t_2|}{\log \frac{\log\hat{\Phi}(t_1)}{\log\hat{\Phi}(t_2)}} \quad (1.9)$$

Pour l'estimation de β et μ on considère $\mu(t) = \text{Im}(\log\Phi(t))$.

où Im est l'imaginaire de la log fonction caractéristique.

Alors $\mu(t) = \mu t - \gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \text{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}$.

On prend deux valeurs non nulles de $t_3 \neq t_4$ il vient

$$\frac{\mu_j}{t_j} = \mu - \left(\gamma^\alpha |t_j|^{\alpha-1} \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right) \beta.$$

Pour $j = 3, 4$

$$\hat{\Phi}(t) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \cos(tx_i) \right) + i \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sin(tx_i) \right)$$

Alors

$$\tan \hat{\mu}(t) = \frac{\sum_{i=1}^k \cos(tx_i)}{\sum_{i=1}^k \sin(tx_i)}$$

Donc

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{\hat{\mu}(t_4)}{t_4} - \frac{\hat{\mu}(t_3)}{t_3}}{\left[t_4^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \right] \hat{\gamma}^{\hat{\alpha}} \tan \frac{\hat{\alpha}\pi}{2}} \quad (1.10)$$

$$\hat{\mu} = \frac{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{\mu}(t_3)}{t_3} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{\mu}(t_4)}{t_4}}{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}} \quad (1.11)$$

quand $\alpha = 1$ est plus simple, en suivant le même raisonnement, on arrive aux résultats suivants :

$$\hat{\gamma} = -\frac{\log|\hat{\Phi}(t_1)|}{|t_1|} \quad (1.12)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{\hat{\mu}(t_3)}{t_3} - \frac{\hat{\mu}(t_4)}{t_4}}{\frac{2}{\pi} \hat{\gamma} \log \left| \frac{t_4}{t_3} \right|} \quad (1.13)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\log|t_4| \frac{\hat{\mu}(t_3)}{t_3} - \log|t_3| \frac{\hat{\mu}(t_4)}{t_4}}{\log \left| \frac{t_4}{t_3} \right|} \quad (1.14)$$

1.1.5.2 Méthode de McCulloch

Fama et Roll ont proposé une méthode basée sur les quantiles empiriques pour l'estimation des paramètres α et γ des lois symétriques stables, lorsque $1 < \alpha \leq 2$. La méthode de Fama et Roll est simple à implémenter, mais elle a le désavantage que les estimateurs soit biaisés, pour cette raison, McCulloch a généralisé cette méthode en utilisant les quantiles empiriques.

Soit F la fonction de répartition d'une v.a stable $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$, et soit x_p le quantile d'ordre p , c'est-à-dire $F(x_p) = p$ et \hat{x}_p le quantile empirique correspondant. Pour éviter une fausse asymétrie, l'échantillon doit être ordonné de façon croissante en posant $\hat{x}_{q(i)} = x_i$, où $q(i) = \frac{2i-1}{2k}$.

Puis, on effectue une interpolation linéaire pour obtenir \hat{x}_p à partir de $\hat{x}_{q(i)}$ et $\hat{x}_{q(i+1)}$ où $q(i) \leq p \leq q(i+1)$. L'estimateur obtenu \hat{x}_p est un estimateur convergent de x_p .

McCulloch définit

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \frac{x_{0.95} - x_{0.05}}{x_{0.75} - x_{0.25}} \\ v_\beta &= \frac{x_{0.95} + x_{0.05} - 2x_{0.5}}{x_{0.95} - x_{0.05}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

et montre que ces indices ne dépendent pas de γ ni de μ . De plus ils sont respectivement des fonctions décroissante et croissante de α et β . Cette relation peut s'inverser, donc les paramètres α et β peuvent être vus comme des fonctions de v_α et v_β , soit :

$$\alpha = g_1(v_\alpha, v_\beta), \quad \beta = g_2(v_\alpha, v_\beta)$$

McCulloch construit ensuite deux nouveaux indices :

$$\begin{aligned} v_\gamma &= \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{\gamma} \\ v_\xi &= \frac{\xi - x_{0.5}}{\gamma} \end{aligned}$$

Où $\xi = \begin{cases} \mu + \beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \mu & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$

On peut démontrer que v_ξ et v_γ dépendent seulement de α et β c'est-à-dire : $v_\xi = g_3(\alpha, \beta)$ $v_\gamma = g_4(\alpha, \beta)$

Si les fonctions g_i , pour $i = 1, 2, 3, 4$, sont connues, alors l'algorithme d'estimation des quatre paramètres peut être défini comme ci-dessous.

1. Ordonner l'échantillon.
2. Calculer les quantiles empiriques $\hat{x}_{0.05}$, $\hat{x}_{0.25}$, $\hat{x}_{0.5}$, $\hat{x}_{0.75}$ et $\hat{x}_{0.95}$.
3. Estimer les indices v_α et v_β :

$$\begin{aligned} \hat{v}_\alpha &= \frac{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}} \\ \hat{v}_\beta &= \frac{\hat{x}_{0.95} + \hat{x}_{0.05} - \hat{x}_{0.5}}{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}} \end{aligned}$$

4. Estimer α et β :

$$\hat{\alpha} = g_1(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta), \quad \hat{\beta} = g_2(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta)$$

5. Estimer γ :

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{g_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

6. Estimer ξ :

$$\hat{\xi} = \hat{x}_{0.5} + \hat{\gamma} g_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

7. Estimer μ :

$$\hat{\mu} = \hat{x}_i - \hat{\beta} \hat{\gamma} \tan \frac{\pi \hat{\alpha}}{2}$$

Comme \hat{x}_p est un estimateur convergent et asymptotiquement de loi normale de x_p , et que les fonctions g_i sont continues, alors les estimateurs des paramètres sont convergents et asymptotiquement de loi normale.

1.1.6 Algorithme de simulation

Pour simuler les lois stables, il existe un algorithme développé par Chambers et al (1976). Celui-ci permet de générer une loi $S_\alpha(\beta, 1, 0)$. Pour obtenir une loi $S_\alpha(\beta, \mu, \gamma)$; il suffit de faire un changement de variables.

Première étape

Elle consiste à générer une loi U uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et une loi Q exponentielle de paramètre 1. Pour cela, il faut d'abord générer deux variables aléatoires réels. uniformes sur $]0; 1[$ (notées U_1 et U_2), Puis en utilisant le changement de variables suivant

$$U = \pi U_1 - \frac{\pi}{2}$$

$$Q = -\log(1 - U_2)$$

Deuxième étape

Elle consiste à calculer différentes quantités (en fonction de U et de Q).

$$\epsilon = 1 - \alpha$$

$$a = \tan\left(\frac{U}{2}\right)$$

$$b = \tan\left(\frac{\epsilon U}{2}\right)$$

$$\tau = -\epsilon \tan(\alpha U_0)$$

$$B = \frac{b}{\frac{\epsilon U}{2}}$$

$$Z = \frac{\cos(\epsilon U - \tan(\alpha U_0) \sin(\epsilon U)}{Q \cos U}$$

$$d = \frac{Z^{1-\epsilon} - 1}{\epsilon}$$

Troisième étape

Elle consiste à générer une loi Y stable $S_\alpha(\beta, 1, 0)$. Pour obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante :

Proposition

Soit U une loi uniforme $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et Q une loi Exponentielle de paramètre 1. On pose

$$Y = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{\pi}{2} + \beta U \right) \tan(U) - \beta \log\left(\frac{\frac{\pi}{2} Q \cos(U)}{\frac{\pi}{2} + \beta U}\right) \right) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{\sin(\alpha(U-U_0))}{\cos(U)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos(U-\alpha(U-U_0))}{Q} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (1.16)$$

tel que :

$$U_0 = -\frac{\pi\beta}{2} \frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha}$$

alors la v.a.r Y suit une loi $S_\alpha(\beta, 1, 0)$.

Exemples Dans le cas où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, nous avons

$$Y = \tan U$$

formule connue, qui permet de simuler une loi de Cauchy.

cas $S_\alpha S$

$$Y = \frac{\sin(\alpha U)}{(\cos U)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)U)}{Q} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

cas $\alpha = 2$

$$Y = \frac{\sin(2U)}{\sqrt{\cos U}} \left(\frac{\cos U}{Q} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$Y = 2\sqrt{Q} \sin U.$$

1.1.7 Statistique des lois symétriques α -stables

1.1.7.1 Tests sur la variance

Nous allons présenter deux méthodes pour tester les paramètres d'une loi $S\alpha S$, afin de voir si on est en présence d'une loi à variance infinie ou non.

Test graphique 1 Ce premier test est très simple et se décompose en 2 étapes :

1. Calculer la variance empirique (s_n^2) pour différentes valeurs de n

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

où $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

2. Tracer le graphique (n, s_n^2) .

Exemple Nous avons repris les simulations sur 900 réalisations de loi $S\alpha S$ avec deux valeurs de α , $\alpha \in \{1, 1.5\}$. Les graphiques des figures 1.7 et 1.8 représentent le test graphique 1, on remarque que le cas $\alpha = 1$ fait converger la variance et pour $\alpha = 1.5$ il y a divergence.

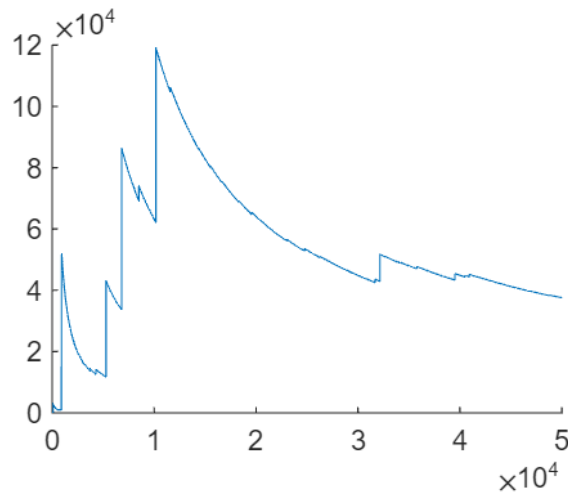


Figure 1.7: Test graphique 1, sur l'échantillon de 900 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour $\alpha = 1$.

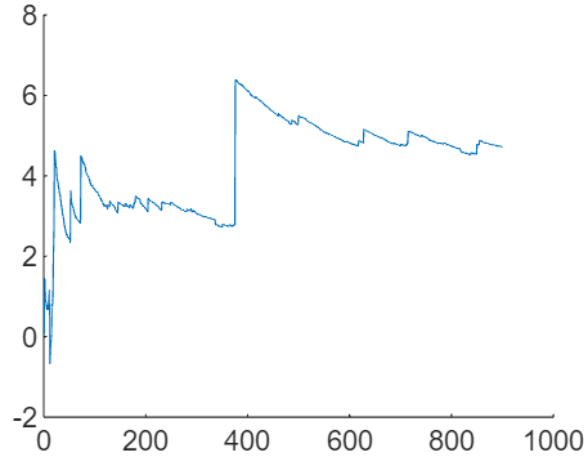


Figure 1.8: Test graphique 1, sur l'échantillon de 900 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour $\alpha = 1.5$.

Test graphique 2

Ce deuxième test est basé sur le fait que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \mathbb{P}(|X| > t) = \gamma C(\alpha)$$

Donc en $+\infty$, $\frac{d \log \mathbb{P}(|X| > t)}{d \log t}$ est équivalent à α , Là aussi, 2 étapes sont nécessaires :

1. Fixer t et calculer la quantité $g(t) = \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{|X_i| > t} \right)$. Où $\mathbb{1}$ la fonction indicatrice.
2. Tracer le graphique $(\log(t), g(t))$ et voir si la pente devient finie à partir d'une certaine valeur de t .

1.2 Lois stables multivariées

Définition 1.9. Le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est α -stable si pour tout k et pour tout vecteur $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ de même loi que X , il existe $a_k > 0$ et $D^{(k)}$ tels que :

$$X^{(1)} + \dots + X^{(k)} \stackrel{d}{=} a_k X + D^{(k)}.$$

Lorsque $D^{(k)}$ est le vecteur nul, on parle de loi strictement stable.

Remarque 1.4. *a. L'égalité en distribution des vecteurs précédents entraîne l'égalité en distribution de chaque composante, c'est-à-dire :*

$$X_j^{(1)} + \dots + X_j^{(k)} \stackrel{d}{=} a_k X_j + D_j^{(k)}.$$

b. Une conséquence de la proposition suivante est que le paramètre a_k joue le même rôle que dans le cas univarié. Il existe alors une constante α , $0 < \alpha \leq 2$, telle que $a_k = k^{\frac{1}{\alpha}}$.

1.2.0.1 Fonction caractéristique

Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire α -stable dans \mathbb{R}^d et soit

$$\Phi_X(t) = \Phi_X(t_1, \dots, t_d) = E \exp\{i \langle t, X \rangle\} = E \left[\exp\left\{i \sum_{k=1}^d t_k X_k\right\} \right]$$

sa fonction caractéristique.

Théorème 1.2. X suit une loi α -stable multivariée, $0 < \alpha < 2$, si et seulement si il existe une mesure finie Γ sur le sphère unité $S_d \in \mathbb{R}^d (S_d = \{s, \|s\| = 1\})$ et un vecteur de “décalage” $\mu^0 \in \mathbb{R}^d$ telle que :

$$\Phi_X(t) = \exp\{i(t, \mu^0) - \int_{S_d} |(t, s)|^\alpha (1 - i \operatorname{sign}((t, s)) W(\alpha, s, t)) \Gamma(ds)\}, t \in \mathbb{R}^d$$

où $(., .)$ représente le produit scalaire et

$$W(\alpha, s, t) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{-2}{\pi} \log |(t, s)| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Le couple (Γ, μ^0) est unique.

La mesure Γ est appelé mesure spectrale du vecteur α -stable X . Elle contient d’information relative aux paramètres d’échelle et aux paramètres d’assymétrie.

Exemple

Supposons que $d = 1$. Alors, $S_1 = \{-1, 1\}$ et la mesure spectrale Γ sera con centrée sur ce deux points. Si $\alpha \neq 1$, $\Phi_X(t)$ devient

$$\Phi_X(t) = \exp\{it\mu^0 - |t|^\alpha [\Gamma(1) + \Gamma(-1) - i \operatorname{sign}(t) (\Gamma(1) - \Gamma(-1)) \tan \frac{\pi\alpha}{2}]\}.$$

est la fonction caractéristique d’une v.a $X \sim S_{\alpha, \beta}(\mu, \gamma)$

de paramètres

$$\gamma = (\Gamma(1) + \Gamma(-1))^{\frac{1}{\alpha}}$$

,

$$\beta = \frac{\Gamma(1) - \Gamma(-1)}{\Gamma(1) + \Gamma(-1)}$$

$$\mu = \mu^0$$

Le paramètre β est égal à zéro si Γ est symétrique sur S_d , i.e. $\Gamma(A) = \Gamma(-A)$ pour tout ensemble de Borel A de S_d .

Le théorème suivant est relatif aux vecteurs strictement stables symétriques.

Théorème 1.3. *Soit X un vecteur α -stable, on a les résultats suivants.*

- 1- *Si toute combinaison linéaire des composantes de X a une distribution strictement stable, alors X est un vecteur strictement stable.*
- 2- *Si toute combinaison linéaire des composantes de X a une distribution symétrique α -stable, alors X est un vecteur $S\alpha S$.*
- 3- *Si toute combinaison linéaire des composantes de X a une distribution α -stable, où $\alpha \geq 1$, alors X est un vecteur α -stable.*

1.2.1 Mesure de dépendance

La mesure de dépendance d'un vecteur aléatoire gaussien ($\alpha = 2$) est complètement spécifiée par la fonction d'autocovariance. Une telle simple description n'est pas possible lorsque $\alpha < 2$ car la covariance est infinie. Les notions de covariation, le coefficient de covariation et de codifférence (quand $0 < \alpha \leq 2$) définissent des mesures naturelles de la dépendance lorsqu'on s'intéresse à des distributions multivariées à queues très épaisses comme les lois stables multivariées.

1.2.1.1 Covariation

La notion de covariation peut remplacer la covariance lorsque $1 < \alpha \leq 2$. Dans ce paragraphe, nous citons quelques propriétés utiles de la covariation.

Définition 1.10. Soient (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$ bivarié avec α strictement supérieur à 1, la covariation de X_1 sur X_2 est la quantité :

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S^1} x_1 x_2^{\langle \alpha-1 \rangle} \Gamma d(x)$$

où

$$a^{\langle v \rangle} = \text{sign}(a) |a|^v$$

Définition 1.11. Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, et soit $\gamma(\theta_1, \theta_2)$ le paramètre d'échelle

d'une variable aléatoire Y telle que $Y = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2$. ou θ_1 et θ_2 sont deux nombres réels.

$$[X_1, X_2]_\alpha = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \gamma^\alpha(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=0, \theta_2=1}.$$

Propriétés

A présent nous donnons quelques propriétés de la covariation.

1. $[X_1, X_2]_2 = \frac{Cov(X_1, X_2)}{2}$.
2. Si X et Y sont deux v.a.r indépendantes alors,

$$[X, Y]_\alpha = 0.$$

3. La covariation n'est pas additive en général sur son argument, i.e pour (X_1, X_2, X_3) conjointement $S_\alpha S$, $[X_1, X_2 + X_3]_\alpha \neq [X_1, X_2]_\alpha + [X_1, X_3]_\alpha$
4. la covariation induit une norme $|||_\alpha$ sur l'espace lineaire S_α des variables aléatoires conjointement $S_\alpha S$ ($\alpha > 1$). La norme $|||_\alpha$ est définie pour tout $X_{1\alpha}$ par $\|X_1\|_\alpha = ([X_1, X_2]_\alpha)^\frac{1}{\alpha} = \gamma_{X_1}$, Où γ_{X_1} est le paramètre d'échelle de X_1 .

1.2.1.2 Coefficient de covariation

Soit (X, Y) un vecteur $S_\alpha S$ où α est strictement supérieur à 1.

$$\{X, Y\}_\alpha = \frac{[X, Y]_\alpha}{[Y, Y]_\alpha}$$

où $[X, Y]_\alpha$ est la covariation entre X et Y .

Propriété

Le coefficient de covariation entre X et Y n'est pas symétrique et n'est pas borné.

Preuve

Prenons par exemple, $X = aY$; avec $a \neq \pm 1$, il est aisé de voir que :

$$[X, Y]_\alpha = \frac{[aY, Y]_\alpha}{[Y, Y]_\alpha}$$

$$[Y, X]_\alpha = \frac{[Y, aY]_\alpha}{[aY, aY]_\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

et donc que $\{X, Y\}_\alpha \neq \{Y, X\}_\alpha$. La symétrie n'est donc pas vérifiée. Gardons le même exemple qu'au-dessus, on a vu que $\{X, Y\}_\alpha = a$. Le coefficient de covariation n'est donc pas borné.

1.2.1.3 Codifférence

Pour toute cette partie, nous supposons que $0 < \alpha \leq 2$. La codifférence fait partie des quantités qui permettent de mesurer la dépendance entre deux v.a.r α -stables symétriques.

Définition 1.12. La codifférence entre X et Y est la quantité

$$\tau_{X,Y} = \|X\|_\alpha^\alpha + \|Y\|_\alpha^\alpha - \|X - Y\|_\alpha^\alpha$$

Propriétés

1. Comme le coefficient de covariation, dans le cas où α est égal à 2, la codifférence est liée à la covariance.

$$\tau_{X,Y} = Cov(X, Y)$$

2. De plus, la codifférence est symétrique $\tau_{X,Y} = \tau_{Y,X}$.

3. les X, Y sont indépendantes $\Leftrightarrow \tau_{X,Y} = 0$.

Preuve

1. On a

$$[X, Y]_2 = \frac{1}{2}Cov(X, Y)$$

et

$$\|X\|_\alpha^\alpha = [X, X]_\alpha$$

Ceci entraîne que

$$\|X\|_2^2 = [X, X]_2 = \frac{1}{2}Cov(X, X)$$

$$\|X\|_2^2 = \frac{1}{2}V(X)$$

et donc

$$\tau_{X,Y} = \frac{1}{2}Var(X) + \frac{1}{2}Var(Y) - \frac{1}{2}Var(X - Y)$$

Or

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$$

ce qui donne le résultat souhaité soit

$$\tau_{X,Y} = \text{Cov}(X, Y)$$

2. Pour la symétrie, il suffit de montrer que

$$\|X - Y\|_\alpha^\alpha = \|Y - X\|_\alpha^\alpha$$

Or on a vu que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme et donc que quelle que soit X v.a.r $S\alpha S$, on a

$$\|X\|_\alpha = \|-X\|_\alpha$$

Il suffit d'appliquer ce résultat à la v.a.r $X - Y$ pour démontrer la symétrie.

$$\begin{aligned} \|aX\|_\alpha &= |a| \|X\|_\alpha \\ &= |a| \|X\|_\alpha. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Processus de diffusion α -stables

L'utilisation des lois α -stables en finance offre de nouvelles perspectives pour modéliser les phénomènes financiers complexes et capturer les comportements extrêmes observés sur les marchés. Elle permet une meilleure compréhension et gestion des risques financiers, tout en ouvrant de nouvelles voies de recherche dans ce domaine passionnant.

2.1 Processus stochastiques

Soit un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , un espace mesurable (E, ξ) et un ensemble T .

Définition 2.1. On appelle processus stochastique, ou processus aléatoire, une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires à valeurs dans E . Autrement dit, pour tout $t \in T$, l'application $w \mapsto X_t(w)$ est une application mesurable de (Ω, \mathcal{F}) dans (E, ξ) .

On appelle E l'espace d'états du processus, et T représente l'ensemble des temps possibles.

Définition 2.2. Lorsque $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{Z}$ on dit que $(X_t)_{t \in T}$ est un processus à temps discret. Lorsque $T = \mathbb{R}$ ou intervalle de \mathbb{R} , on parle de processus à temps continu.

2.2 Processus de Lévy

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique défini sur un espace de probabilité complet (Ω, \mathcal{F}, P) , muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$.

Définition 2.3. On dit que X est un processus de Lévy (issu de 0) si :

1. $X_0 = 0$ presque sûrement,
2. X est à accroissements indépendants et stationnaires,

3. X est stochastiquement continu : pour tout $\epsilon > 0$ et $t \geq 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0.$$

Définition 2.4. Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^p est un processus de Lévy si sa fonction caractéristique s'écrit sous la forme suivante :

$$E[\exp(i(\lambda, X(t)))] = \exp(-t\Phi(\lambda)) \quad (2.1)$$

Où

$$\Phi(\lambda) = i(\lambda, \sigma^0) + \frac{1}{2}Q(\lambda) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \exp(i(\lambda, x)) + I(\lambda, x) \mathbb{1}_{|x| \leq 1}) v \, dx$$

Q est une forme quadratique définie positive (elle représente la partie brownienne) et $v(dx)$ est la mesure de Lévy de X_t , i.e. une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d - \{0\}$ vérifiant

$$\int (1 + |x|^2)v(dx) < \infty$$

Cette dernière représentation est connue sous le nom de Lévy-Kchintchine

2.3 Processus stable

Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ est appelé processus stable à valeurs dans \mathbb{R}^p , si

1. $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy à valeurs dans \mathbb{R}^p
2. Pour tout $a > 0$ il existe $b > 0$ et $c \in \mathbb{R}^p$ telle que

$$\{X_{at} : t \in [0, \infty)\} \stackrel{d}{=} \{bX_t + tc : t \geq 0\}$$

$(X_t)_{t \geq 0}$ est appelé processus strictement stable à valeurs dans \mathbb{R}^p , s'il est un processus de Lévy telle que pour tout $a > 0$ il existe $b > 0$ vérifiant

$$\{X(at) : t \in [0, \infty)\} \stackrel{d}{=} \{bX(t) : t \geq 0\} \quad (\text{Propriété d'auto-similarité})$$

Formes canoniques

- Première forme canonique : la fonction caractéristique d'un processus α -stable, $\alpha \in (0, 2)$; peut s'écrire sous la forme

$$E[\exp(i(\lambda, X(t)))] = \exp\left\{t \left[\int_{s_d} \int_0^\infty [\exp(ir(sx)) - 1 - i \frac{r(s, x)}{1+r^2}] \frac{dr}{r^{1+\alpha}} \sigma(ds) + i(\lambda, \sigma^0) \right] \right\} \quad (2.2)$$

— Deuxième forme canonique :

Soit $0 < \alpha < 2$. Si X_t est un processus α -stable à valeurs dans \mathbb{R} , alors il existe une mesure finie Γ sur S_p et $\sigma^0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$E[\exp(i(\lambda, X_t))] = \exp\left\{t \left[i(\lambda, \sigma^0) - \int_{s_d} |(\lambda, s)|^\alpha (1 - i \operatorname{sign}((\lambda, s))) W(\alpha, s, \lambda) \Gamma(ds) \right]\right\} \quad (2.3)$$

Où

$$W(\alpha, s, \lambda) = \begin{cases} \tan \frac{\pi \alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log |(\lambda, s)| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Remarque 2.1. Si $p = 1$, (2.2) peut s'écrire sous la forme

$$E[\exp(i \lambda X(t))] = \exp[t[i\sigma\lambda |\gamma|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sign}(\lambda)) W(\alpha, \lambda)]], \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Où $\gamma > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\beta \in [-1, 1]$ et

$$W(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \tan \frac{\pi \alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log | \langle \lambda, s \rangle | & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

2.4 Mouvement α -stable

Définition 2.5. Un processus stochastique $\{L_\alpha(t) : t \in [0, \infty)\}$ est appelé mouvement α -stable (standard) (ou mouvement α -stable de Lévy) si :

1. $L_\alpha(0) = 0$ p.s.
2. $L_\alpha(t)$ est à accroissements indépendants et stationnaires.
3. $L_\alpha(t) - L_\alpha(s) \sim S_{(\alpha, \beta)}(0, (t-s))^{\frac{1}{\alpha}}$ pour tout $0 \leq s < t < \infty$.

Notons que lorsque $\alpha = 2$, $M_2(t) = \sqrt{2} B(t)$ où $\{B(t) : t \in [0, \infty)\}$ est un mouvement brownien standard.

Les mouvements α -stables sont $S\alpha S$ si $\beta = 0$.

2.5 Intégrale stochastique α -stable

Soit $(L_\alpha(t))_{t \geq 0}$ un mouvement α -stable avec $1 < \alpha < 2$. Nous rappelons dans ce paragraphe la construction de l'intégrale stochastique $\int X dL_\alpha$ pour une classe des processus à valeurs réelles $X(t, w)$ \mathcal{F}_t -adapté.

Soit \mathbf{L}^α l'espace de tous les processus, $X = \{X(t, w)\}_{t \geq 0}$ sur $\Omega \times [0, \infty)$, adaptés à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ et telle que pour tout $T > 0$:

$$\|X\|_{\mathbf{L}^\alpha} = \left[E \left[\int_0^T |X(s, w)|^\alpha ds \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} < \infty \quad (2.5)$$

De la même manière, nous définissons $L_{p,s}^\alpha$ la famille de tous les processus X sur $\Omega \times [0, +\infty)$ \mathcal{F}_t -adaptés telle que pour tout $T > 0$,

$$\int_0^T |X_s|^\alpha ds < \infty \quad p.s \quad (2.6)$$

Λ^α représente l'ensemble de tous les processus $X(t)_{t \geq 0}$. \mathcal{F}_t -adaptés à trajectoires dans $D[0, \infty)$ telle que pour tout $T > 0$ la norme faible L^α est finie, i.e :

$$\left(\sup_{\lambda > 0} \lambda^\alpha P\{\sup_{t \leq T} |X(t)| > \lambda\} \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty \quad (2.7)$$

ζ désigne la classe de toutes les fonctions $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont des combinaisons linéaires des fonctions indicatrices. $X \in \zeta$ peut être exprimé de la forme :

$$X(t, w) = \Phi_0(w) \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i(w) \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (2.8)$$

où $\{t_n\}_n^\infty$ est une suite des nombres réels avec $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, et ϕ_n est \mathcal{F}_n mesurable. L'intégral $\int X dL_\alpha$ est construit à travers les étapes suivantes :

1. Construction de $\int X dL_\alpha$ quand $X \in \zeta$

Lorsque $X \in \zeta$, l'intégrale $\int X dL_\alpha$ est définie comme suit :

$$\int_0^t X dL_\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi_i(L_\alpha(t_{i+1}) - L_\alpha(t_i)) + \Phi(L_\alpha(t) - L_\alpha(t_n)) \quad si \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}$$

et

$$\int_0^t X dL_\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi_i(L_\alpha(t \wedge t_{i+1}) - L_\alpha(t \wedge t_i)) \quad si \quad 0 \leq t \leq \infty \quad (2.9)$$

2. Extension au cas où $X \in \mathbf{L}^\alpha$:

Le théorème suivant, permet d'étendre la construction de $\int X dL_\alpha$ de $X \in \zeta$ à $X \in \mathbf{L}^\alpha$. Il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telle que pour tout processus simple $X \in \mathbf{L}^\alpha$ et tout $T > 0$

$$c_1 E \left[\int_0^t |X|^\alpha ds \right] \leq \sup_{\lambda > 0} \lambda^\alpha P \left\{ \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t X dL_\alpha \right| > \lambda \right\} \quad (2.10)$$

L'application $X \rightarrow \int X dL_\alpha$ peut être étendue à un plongement isomorphe de L_α dans \wedge^α pour chaque $X \in L_\alpha$ il existe un processus stochastique dans \wedge^α , noté $\int_0^t X dL_\alpha, t \geq 0$ vérifiant (2.9) et qui coïncide avec l'intégrale stochastique (2.10) pour $X \in \epsilon$.

3. Extension au cas où $X \in L_{p.s}^\alpha$

Pour chaque, $X \in L_{p.s}^\alpha$, on définit les temps d'arrêt par :

$$\tau_n = \inf \left\{ t, \int_0^t |X|^\alpha ds \geq n \right\} \wedge n$$

$n \in \mathbb{R}^{+*}$ de telle sorte que τ_n croit vers ∞ p.s

Pour $X \in L_{p.s}^\alpha$, il est possible de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{1}_{(\tau_n \geq s)} X \in \mathbf{L}^\alpha$. D'un autre côté, nous avons :

$$\int_0^{t \wedge \tau_n} X dL_\alpha = \int_0^t \mathbb{1}_{(\tau_n \leq s)} dL_\alpha$$

Pour $X \in L_{p.s}^\alpha$, le processus $\{\int_0^t X dL_\alpha, t > 0\}$ est bien défini et admet presque toutes les trajectoires dans $D[0, \infty]$. Il sera appelé intégrale de X par rapport à L_α .

2.6 Équations différentielles stochastiques (EDS) α -stables

Définition 2.8. Nous considérons les équations de type Itô exprimées sous la forme suivante :

$$X_t = A + \int_0^t \mu'(X_s, s) ds + \int_0^t c(X_s, s) dL_\alpha s. \quad (2.11)$$

$$\mu : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$c : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

A : est une variable aléatoire stable.

\mathcal{F}_0 -mesurable, $\{L_\alpha(t) : t > 0\}$ est un mouvement \mathcal{F}_t - α -stable symétrique avec

$1 < \alpha < 2$.

Nous appellons (2.11) une Equation Différentielle Stochastique par rapport à un mouve-

ment α -stable (α -EDS). La solution de (2.11) est appelée diffusion.

Définition 2.9. la solution de l'équation (2.11) est un processus stochastique \mathcal{F}_t adapté vérifiant :

1. Pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t \mu'(X_s, s) ds$ et $\int_0^t c(X_s, s) dL_\alpha s$ sont bien définies

$$\int_0^t |\mu'(s, X_s)| ds < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^t |c(s, X_s)|^\alpha ds < \infty \quad p.s$$

2. $\{X_t\}_{t>0}$ vérifie (2.11);

$$\forall t \geq 0 \quad P.p.s \quad X_t = A + \int_0^t \mu'(X_s, s) ds + \int_0^t c(X_s, s) dW_\alpha s.$$

Remarque 2.2. 1. L' α -EDS (2.11) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \mu'(t, X_s)dt + c(t, X_s)dL_\alpha(t) \\ X_0 = A \end{cases}$$

2. Les α -EDS sont des cas particuliers d'équations différentielles stochastiques plus générales par rapport à des semimartingales, i.e. des équations de la forme

$$X_t = A + \int_0^t f(X_s) dY_s \tag{2.12}$$

où $\{Y_t\}$ est un processus semimartingale.

L'existence et l'unicité de la solution de (2.12), provient des théorèmes généraux sur l'existence de solutions d'EDS par rapport à des semi martingales.

2.7 Modèle d'évaluation des options

2.7.1 Les options

Une option est un contrat qui confère à son titulaire le droit, mais non l'obligation, d'acheter ou de Vendre une certaine quantité de l'actif sous-jacent à un prix convenu à l'avance une période de temps donnée. En contre partie, l'acheteur verse immédiatement au vendeur une prime (le prix de l'option).

On distingue deux types d'options : options d'achat (Call) et options de vente (Put)

Call est un contrat qui donne à son détenteur le droit d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à un prix prédéterminé pendant une période donnée.

Put est un contrat qui donne à son détenteur le droit de vendre une certaine quantité

d'un actif sous-jacent à un prix prédéterminé pendant une période donnée.

Il existe deux types d'option, option américaine qui peuvent être exercées tout moment et l'option européenne sont exerçable uniquement à l'échéance définie dans le contrat.

On s'intéresse à l'option européenne dans ce chapitre en utilisent ces notions

- S_0 est le cours actuel de l'actif sous-jacent, peut être une action, une obligation, une devise...

- Le prix d'exercice (strike) K de l'option est un prix prédéterminé auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

- T est une date d'échéance qui limite la durée de vie de l'option.

- Le taux d'intérêt sans risque que les investisseurs peuvent obtenir sans prendre de risque. La volatilité de prix de l'actif (σ) est la mesure de la variation des prix de cet actif sur le marché.

2.7.2 Modèle de Black et Scholes

Soit un actif risqué de prix $X(t)$ à la date t , et le prix de l'action $S(t)$ à l'instant t , l'évolution du cours de l'actif sans risque et de l'action est régi par l'équations différentielles stochastiques suivantes

$$dX_t = rX_t dt, \quad (2.13)$$

$$dS_t = \mu' S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.14)$$

Où W est un processus brownien standard dans l'espace $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$

et $\mu' > r$ le taux de rendement attendu sur l'actif risqué S .

La solution de l'équation ordinaire (2.13) est $X_t = X_0 \exp(rt)$, pour tout $t > 0$.

La solution de l'équation (2.14) est

$$S_t = S_0 \exp(\mu't + W_t - \frac{\sigma^2}{2}t).$$

Dans ce modèle la valeur d'une option à l'instant d'expiration T est :

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\}.$$

2.7.3 Le modèle α -stable

Considérons un actif sans risque X_t à l'instant t , et une action de prix S_t à la date t . On suppose que la dynamique de prix de ces actifs est décrite par les équations différentielles suivantes.

$$dS_t = \mu' S_t dt + \sigma S_t dL_\alpha(t), \quad (2.15)$$

avec la condition initiale $S_0 = s_0$, où s_0 est une constante donnée.

L'équation (2.15) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$S_t = S_0 + \mu' \int_0^t S_s ds + \gamma \int_0^t S_s dL_\alpha(s)$$

Remarque 2.3. Dans le cas où $\alpha = 2$, $L_2(t) = \sqrt{2}W(t)$ et $\gamma = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, on retrouve le modèle de Black Sholes.

Considérons maintenant une option d'achat européenne de prix d'exercice K , de maturité T dont l'actif sous jacent est solution d'une α EDS. Le prix C_t de l'option à l'instant t est définie par

$$C_t = E^*[e^{-r(T-t)} \max\{S(T) - K, 0\} / \mathcal{F}_t] \quad (2.16)$$

où E^* est l'esperance sous une probabilité P^* risque neutre. i.e une probabilité équivalente à la probabilité objective P sous laquelle le processus des prix actualisés est une martingale.

Chapitre 3

Simulations

3.1 Simulation d'une loi α -stable

3.1.1 Cas asymétrique

La simulation se fait en quatre étapes :

1^{ère} étape : générer une variable aléatoire U de distribution uniforme $U \sim U[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2^{ème} étape : générer une variable aléatoire Q de distribution exponentielle de paramètre 1 indépendante de U .

3^{ème} étape : calculer la variable Y

Si $\alpha \neq 1$

$$Y = V_{\alpha,\beta} \frac{\sin(\alpha(U + C_{\alpha,\beta}))}{(\cos(U))^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{\cos(U - \alpha(U + C_{\alpha,\beta}))}{Q} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Où

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{\arctan(\beta \tan(\frac{\alpha\pi}{2}))}{1 - |1 - \alpha|}$$

et

$$V_{\alpha,\beta} = \left[\cos \left(\arctan(\beta \tan(\frac{\alpha\pi}{2})) \right) \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Si $\alpha = 1$

$$Y = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta U \right) \tan(U) - \beta \log \left(\frac{Q \cos(U)}{\frac{\pi}{2} + \beta U} \right) \right]$$

4^{ème} étape : poser

$$X = \begin{cases} \gamma^{\frac{1}{\alpha}} Y + \mu & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \gamma Y + \frac{2}{\pi} \beta \mu \log(\gamma) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour générer une v.a de loi $S_{\alpha}(\beta, \gamma, \mu)$ à partir de cet algorithme il suffit de générer une v.a de loi $S_{\alpha}(\beta, 0, 1)$ puis la multiplier par γ et d'ajouter μ .

Ce programme présente la simulation de la loi α -stable. Cas asymétrique.

```
function X=alpha_stable(a1,b,k)
% on donne les valeurs de a1,b et k
U=-(pi/2).*rand(k,1)+(pi/2);
Q=exprnd(1,k,1);
B=atan(b*tan(pi*a1/2))/(1-fix(1-a1));
s=(1+b^2*tan((pi*a1/2)^2)^-1/a1;
if a1~=1
    Y=s*(sin(a1*(U+B))./cos(U).^(1/a1)).*((cos(U-a1*(a1+B)))./Q).^((1-a1)/a1);
else
    Y=(2/pi).*((pi/2+b*U).*tan(U)-b.*log(Q.*cos(U))./(pi/2+b.*U));
end
for i=1:k
    if rand<0.5
        X(i)=-Y(i);
    else
        X(i)=Y(i);
    end
end
```

3.1.2 Cas symétrique

Pour une variable aléatoire symétrique $Y \sim S_\alpha(0, 1, 0)$; alors l'algorithme se réduit en trois étapes.

1^{ère} étape : générer une variable aléatoire U de distribution uniforme $U[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2^{ème} étape : générer une variable aléatoire $Q \sim U(0, 1)$.

3^{ème} étape : calculer Y par :

$$X = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha U)}{\cos(U)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)U)}{-\log Q} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\sin(\alpha U)}{\cos(U)} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour générer une variable aléatoire α -stable symétrique $S_\alpha(0, \gamma, \mu)$ à partir de cet algorithme il suffit de générer une variable aléatoire de la loi $S_\alpha(0, 1, 0)$, puis la multiplier par γ et d'ajouter μ :

```
function s=alpha_stable_sym(alpha,k)
%on donne alpha 'alpha=' et le nombre d'echantillon k
U=(-pi/2)+(pi*(rand(k,1)));
Q=rand(k,1);
alphabis=(1-alpha)./alpha
X1=(sin(alpha.*U))./(cos(U).*(1/alpha))
X2=(cos((1-alpha).*U)./(-log(Q))).*alphabis
s=X1.*X2
end
```

3.2 Simulation d'un mouvement α -stable

Discrétisation du temps

Pour simuler le mouvement alpha-stable qui est un processus à temps continu, il faut d'abord discrétiser le temps. Il s'agit de repartir l'intervalle $[0, T]$ en N périodes égales. Soit Δt la longueur d'une période de temps tel que $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Nous simulerons le mouvement stable au temps $0, t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$

La propriété d'indépendance de la définition du mouvement stable implique que :

$$\{ L_{\alpha, n}^{\Delta t} - L_{\alpha, (n-1)}^{\Delta t}, n \in \mathbb{N} \}$$

est une suite de v.a iid de loi $S_{\alpha}(\beta, 0, (t - s)^{\frac{1}{\alpha}})$

Pour simuler une trajectoire du mouvement stable jusqu'à l'instant $[T = (\Delta t N)]$, il suffit de générer N v.a qui sont i.i.d de loi α -stable

$$L_{\alpha}(0) = 0$$

$$L_{\alpha, n}^{\Delta t} = L_{\alpha, (n-1)}^{\Delta t} + (\Delta t)^{\frac{1}{\alpha}} Z_n, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}$$

```

%mouvement brownien alpha stable
al=0.5; %alpha
b=0.2; %beta
T=1;
n=10000;
dt=T/n;
t=0:dt:T;
dl=zeros(1,n);
L=zeros(1,n);
dl(1)=((dt)^(1/al))* alpha_stable(al,b,n);
L(1)=dl(1);
for i=2:n
    dl(i)=((dt)^(1/al)).*alpha_stable(al,b,n);
    L(i)=L(i-1)+dl(i);
end
plot(0:dt:T,[0,L])

```

La figure suivante représente la trajectoire de mouvement α -stable pour $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 1$ et $\mu = 0$ de $n = 10000$ simulations.

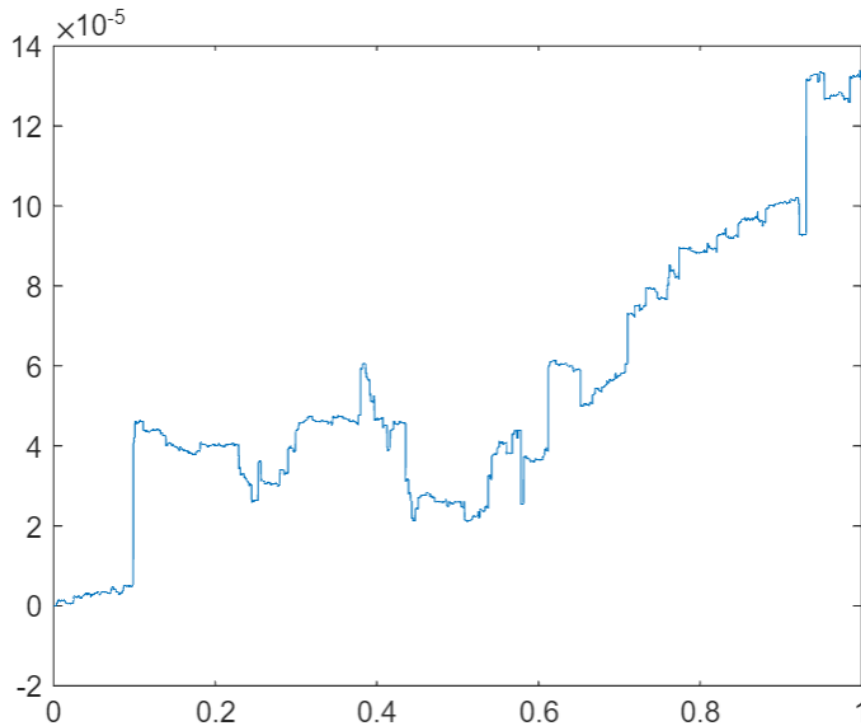


Figure 3.1: La trajectoire de mouvement α -stable.

3.3 Simulation des équations différentielles stochastiques α -stables

Il s'agit d'approcher numériquement la solution de l'équation différentielle stochastique α -stable

$$dX_t = \mu'(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dL_\alpha^t \quad (3.1)$$

Supposons que la solution du problème (3.1) sur l'intervalle $[0, T]$ est un processus α -stable $\{X(t); t \in [0, T]\}$ à trajectoires continues, vérifiant pour tout $t \in [0, T]$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu'(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dL_\alpha^s \quad (3.2)$$

Pour approcher cette solution, on utilise deux méthodes de simulation Schéma d'Euler-Maruyama et Shéma de Milstein.

3.3.1 Schéma d'Euler-Maruyama

Cette méthode consiste à calculer une approximation de $X(t)$ sur une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$.

Soit $X(t)_{0 \leq t \leq T}$ le processus de diffusion α -stable solution de (3.1).

Fixons un pas de temps $t > 0$, et notons τ_i la suite des instants de discrétisation.

$$\tau_i = j\Delta t; \quad j \geq 0$$

Soit (ΔL_j) la suite des incréments de la discrétisation correspondante du mouvement stable $\{L_{\alpha t} ; t \geq 0\}$:

$$\Delta L_{\alpha}^{\tau_{j+1}} - L_{\alpha}^{\tau_j} \quad j \geq 0$$

Le schéma d'Euler-Maruyama est donnée par :

$$X_{j+1} = X_j + \mu'(X_j, t_j) \Delta t + \sigma(X_j, t_j) (\Delta L^j) \quad (3.3)$$

Par définition du mouvement stable, la suite (ΔL^j) est une suite de vecteur aléatoire indépendants et de même loi. Chacune des coordonnées de ΔL_{α}^j suit la $S_{\alpha}(\beta, 0, (t-s)^{\frac{1}{\alpha}})$ pour tout $0 \leq s < t < \infty$. Donc le schéma d'Euler-Maruyama devient :

$$X_{j+1} = X_j + \mu'(X_j, t_j) \Delta t + \sigma(X_j, t_j) (\Delta t)^{\frac{1}{\alpha}} Z_j \quad (3.4)$$

Où Z sont des variables i.i.d de loi $S_{\alpha}(\beta, 0, (t-s)^{\frac{1}{\alpha}})$.

À titre d'exemple on applique le schéma d'Euler-Maruyama sur le mouvement stable

$$\begin{cases} dX_t = \mu' X_t dt = \sigma X_t dL_{\alpha}^t. \\ X_0 = 1. \end{cases}$$

Où μ' et σ sont des réels constants, par identification avec l'équation (3.4) ,

$$\mu'(X_j, t_j) \Delta t = cX_t \quad \text{et} \quad \sigma(X_j, t_j) \Delta t = sX_t.$$

La solution analytique ou explicite de ce problème est connue :

$$X(t) = X(0) \exp\left(\left(\mu' - \frac{s^2}{2}\right)t\right) + sL_{\alpha}(t).$$

3.3.2 Schéma de Milstein

On propose une approximation du second ordre qui utilise à nouveau le calcul stochastique différentiel.

le schéma itératif est le suivant

$$X_{j+1} = X_j + \mu'(X_j, t_j)\Delta t + \sigma(X_j, t_j)(L_{\alpha}^{\tau_{j+1}} + L_{\alpha}^{\tau_j}) + \frac{1}{2} \sigma(X_j, t_j) \frac{\partial \sigma}{\partial X}(X_j, t_j) [(L_{\alpha}^{\tau_{j+1}} + L_{\alpha}^{\tau_j})^2 - \Delta t]$$

Où $j = 1, 2, \dots, n$ tel que $n \in \mathbb{N}$

Le programme de simulation de méthode d'Euler-Maruyama et Milstein est le suivant, pour 100 itératif de $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.6$, $\mu = 0.5$, $\gamma = 0.5$ et $T = 1$ ans.

```
T=1;
n=100;
dt=T/n;
mu=0.5;
a1=0.8;
k=1;
b=0.6;
t=[0:dt:T];
sigma=0.5;
Xe(1)=1;
Xu(1)=1;
Xm(1)=1;
for i=1:n
    dL=((dt)^(1/a1))*alpha_stable(a1,b,n);
    Xe(i+1)=Xe(i)*exp((mu-0.5*sigma^2)*dt+sigma*dL); %exact
    Xu(i+1)=Xu(i)+mu*Xu(i)*dt+sigma*Xu(i)*dL; %euler
    %Xm(i+1)=Xm(i)+mu*Xm(i)*dt+sigma*dL*Xm(i)+0.5*sigma^2*dL(i)*(dL^2-dt);% milsten
end
hold on
plot([0:dt:T],Xe,'b')
plot([0:dt:T],Xu,'g')
%plot([0:dt:T],Xm,'r')
hold off
```

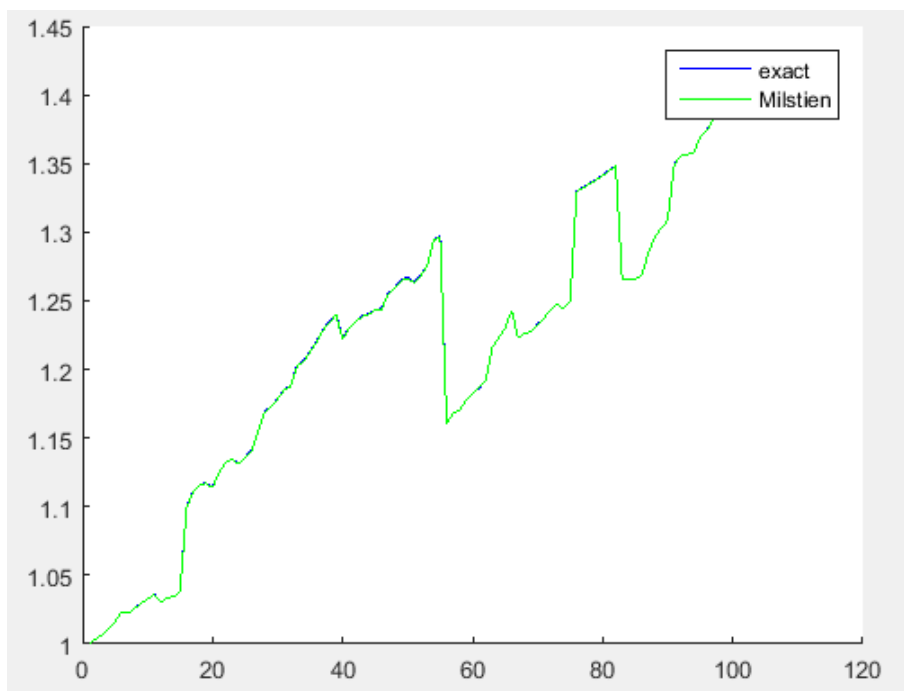


Figure 3.2: Schéma de Milstein et solution exacte de l'EDS α stable pour $\alpha = 0.8$

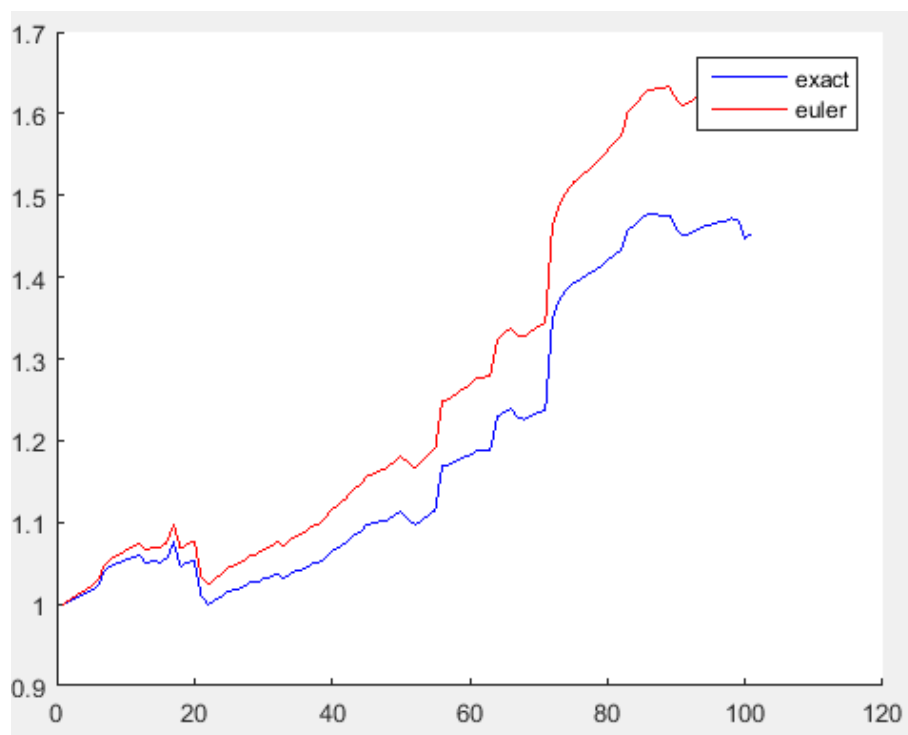


Figure 3.3: Schéma d'Euler et solution exacte de l'EDS α stable pour $\alpha = 1.6$

3.4 Simulation des options européennes

3.4.1 Simulation du modèle de Black et Scholes

Nous voulons simuler la solution de l'équation de Black-Scholes (le mouvement brownien géométrique) :

$$dX_t = \mu' X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

Avec la solution explicite :

$$X_t = X_0 \exp \left[\left(\mu' - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]$$

Le programme de simulation est le suivant :

```

%simulation de la trajectoire de black-scholes
rng('default');
mu=1;
sigma=0.3;
s0=100;
T=1;
n=10000;
dt=T/n;
dw=sqrt(dt)*randn(1,n);
w=mbstandard(dt,dw); % l'appel de fct de mouvement brownien
st=s0*exp((mu-0.5*sigma^2)*([dt:dt:T])+sigma*w);
plot(0:dt:T,[s0,st],'b')

```

La figure 3.4 représente la simulation de Black et Scholes de 10000 simulations pour les paramètres $\mu' = 1$, $\sigma = 0.3$ et l'actif de sous-jacent $S_0 = 100$.

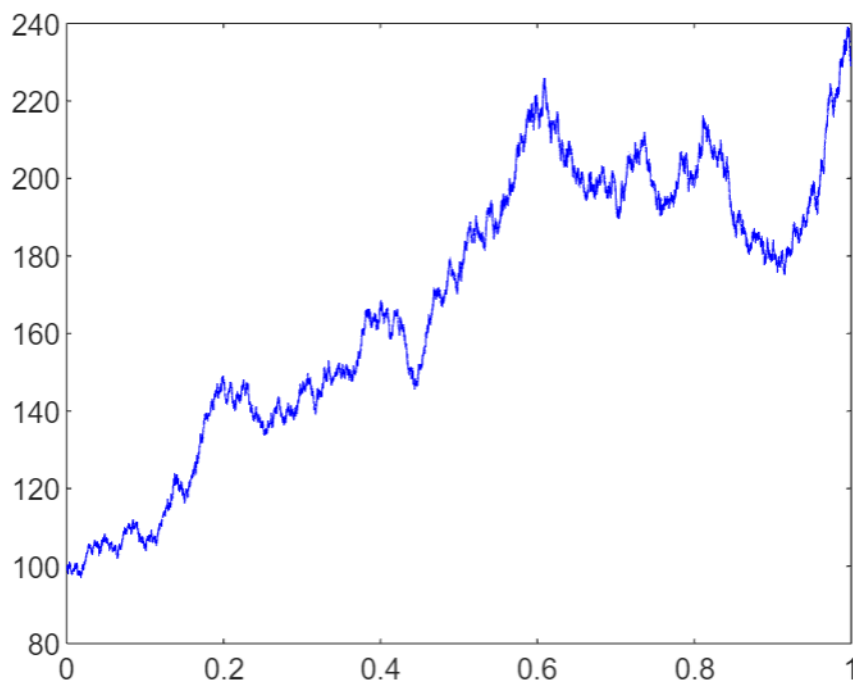


Figure 3.4: Trajectoire de Black&Scholes.

Simulation du prix d'un call

La solution de l'équation d'un call de prix du sous-jacent S_t de strike K et de maturité T est :

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - K \exp(-r(T-t)) N(d_2) \quad (3.5)$$

Où $d_1 = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

$N(\cdot)$ est la distribution cumulative de la loi normale.

Le programme suivant représente la simulation du prix d'achat européen.


```

S0=100;%prix initial du sous -jacent
K=70; % prix d'exercice d'option
T=1; % echéance de l'option
sigma=0.2;
r=0.05;
div=0; % le taux dividendes
d1=(log(S0/K)+(r-div)*T)/(sigma*sqrt(T))+sigma*sqrt(T)/2
d2=d1-sigma*sqrt(T)
rep=S0*exp(-div*T)*normcdf(d1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2) %prix de call

```

Pour $S_0 = 100$, $K = 70$, $T = 1$ ans, $\sigma = 0.2$, $\mu = 1$ et $r = 0.05$. On obtient :
 $C_{BS} = 33.5401$

Où C_{BS} désigne le prix du call européenne du modèle de Black & Scholes.

Simulation de l'option d'achat avec différentes valeurs de prix d'exercice K de l'option

On veut voir l'influence de K sur le prix de l'option call avec $n = 101$, $\sigma = 0.1$, $S_0 = 100$, $T = 10$ et $r = 0.06$

```

S0=100;%Prix initial du sous_jacent
T=1; %Temps jusqu'à l'expiration de l'option
r=0.06; %Taux d'intérêt sans risque
sigma=0.1; %Volatilité du sous_jacent
div=0; %Taux de dividende
K=linspace(50,150,101); %Création d'un vecteur de prix d'exercice
d1=(log(S0./K)+(r-div+sigma.^2/2)*T)./(sigma.*sqrt(T));
d2=d1-sigma.*sqrt(T);
Call=S0.*exp(-div.*T).*normcdf(d1)-K.*exp(-r.*T).*normcdf(d2);
plot(K, Call);
xlabel('Prix d'exercice de l'option');
ylabel('Prix de l'option');
title('Prix de l'option d'achat en fonction du prix d'exercice');

```

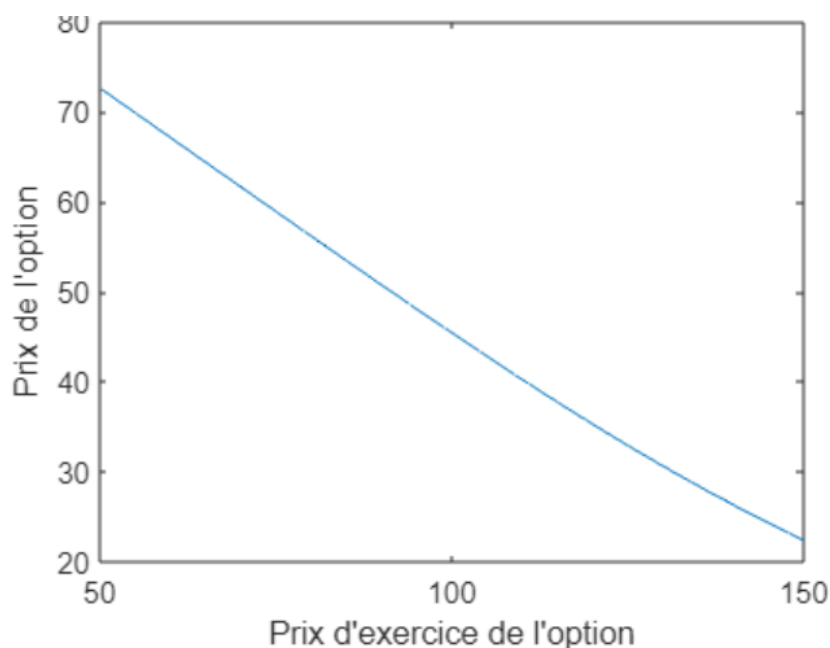


Figure 3.5: Graphe de simulation du call avec différentes valeurs de K

Simulation du prix d'un put

La solution de l'équation d'un put de prix du sous-jacent S_t de strike K et de maturité T est :

$$P(t, S_t) = K N(-d_2) - S_t \exp(-r(T)) N(-d_1)$$

Où d_1 et d_2 donnés précédemment.

$N(\cdot)$ est la distribution cumulative de la loi normale.

Le programme suivant représente la simulation du prix de vente européen.

```

S0=100; %prix initial du sous -jacent
K=70; % prix d'exercice d'option
T=1; % échéance de l'option
%paramètres initiaux
sigma=0.2;
r=0.05;
div=0; % le taux dividendes
%calcul des di
d1=(log(S0/K)+(r-div)*T)/sigma*sqrt(T)+sigma*sqrt(T)/2
d2=d1-sigma*sqrt(T)
rep=K*exp(-r*T)*normcdf(-d2)-S0*exp(-div*T)*normcdf(-d1)% le prix du put

```

Pour $S_0 = 100$, $K = 70$, $T = 1$ ans, $\sigma = 0.2$ et $r = 0.05$. On obtient $P_{BS} = 6.9040$
Où P_{BS} désigne le prix du put européen du modèle de Black-Scholes.

Simulation de l'option de vente avec différentes valeurs de prix de sous-jacent S_0 de l'option

```

%Saisir les paramètres d'entrée
S0 = 100; %Prix initial du sous-jacent
K = 100; %Prix d'exercice de l'option
T = 1; %Temps jusqu'à l'expiration de l'option
sigma = 0.2; %Volatilité
r = 0.05; %Taux d'intérêt sans risque
div = 0.0; %Taux de dividendes

%Calculer les valeurs de l'option de vente pour différentes valeurs du prix initial du sous-jacent
S0 = linspace(50, 150, 100); %Vecteur de valeurs du prix initial du sous-jacent
d1 = (log(S0./K) + (r - div + sigma.^2/2)*T) ./ (sigma .* sqrt(T));
d2 = d1 - sigma .* sqrt(T);
Put = K.*exp(-r.*T).*normcdf(-d2)-K.*exp(-div.*T).*normcdf(-d1);

%Tracer le graphique correspondant
plot(S0, Put);
xlabel('Prix initial du sous-jacent');
ylabel('Prix de l'option de vente européenne');
title('Prix de l'option de vente européenne en fonction du prix initial du sous-jacent');

```

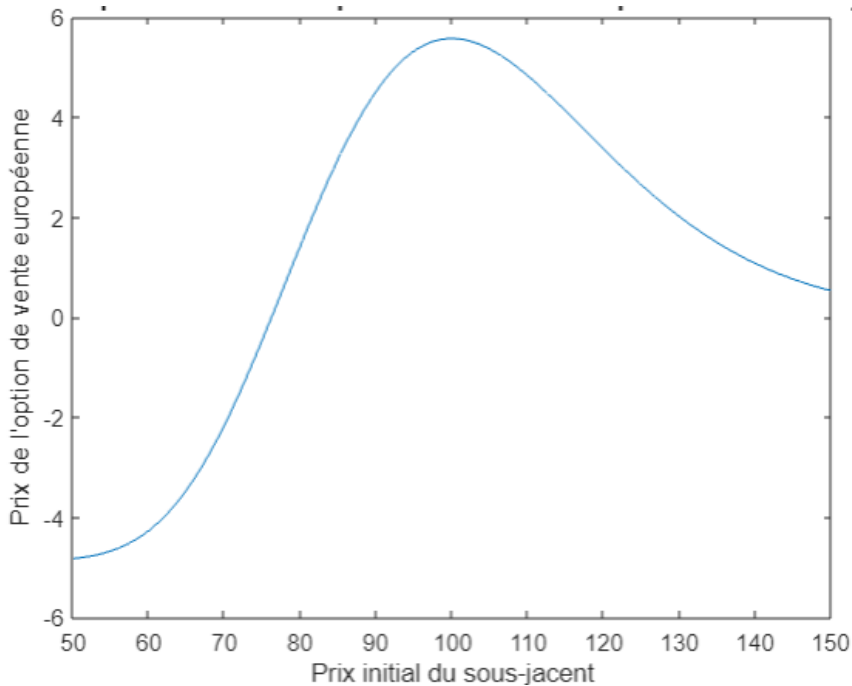


Figure 3.6: Prix de put en fonction du prix de sous-jacent

Intervalle de confiance

Considérons une v.a X de loi uniforme sur $]a, b[$, la méthode de Monte carlo consiste à approcher une intégrale I de fonction f définie sur l'intervalle $]a, b[$, tel que :

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad \text{avec} \quad I = (b - a)E[f(x)]$$

La valeur numérique de $E[f(x)]$ est souvent difficile à obtenir. C'est pour cela qu'on l'estime par la méthode de Monte Carlo. L'espérance $I = E[f(x)]$ est approximé par la

moyenne arithmétique $\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$. Où N échantillon de la v.a X_i
 La loi forte des grands nombres. Si (X_i) est une suite de v.a i.i.d intégrable. Alors

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = E[f(x)]$$

le théorème central limite. Si $f(x)$ est de variance finie, alors

$$\lim \frac{\sqrt{n}}{\sigma} [\hat{I}_n - I] \sim N(0, 1)$$

Donc, après n simulations, cette approximation permet d'obtenir un intervalle de confiance de la forme

$$IC = \left[\hat{I}_n - \sqrt{\frac{Var(f(x))}{n}} U_{1-\frac{\alpha}{2}}, \hat{I}_n + \sqrt{\frac{Var(f(x))}{n}} U_{1-\frac{\alpha}{2}} \right].$$

$U_{1-\frac{\alpha}{2}}$ désigne le quantile de la loi normale centrée réduite de niveau $\frac{\alpha}{2}$.

Le programme de simulation est le suivant :

```

%Mc valorisation d'une option d'achat par la Méthode de Monte carlo
%S0: valeur initiale du sous-jacent
%K: le prix d'exercice
%r:taux d'intert sans risque annuel
%sigma:la volatilité
%T:temps avant l'échéance,en années
%n:le nombre de trajectoires simulées
clear all;
rng('default')
n=input('donner la valeur n=');
%*****Paramètres initial values *****
S0=50; K=55; T=1; r=0.05; sigma=0.2; dt=T/n;
%*****La formule de Black&Sholes*****
d1=(log(S0/K)+(r)*T)/(sigma*sqrt(T)+sigma*sqrt(T)/2);
d2=d1-sigma*sqrt(T);
CallTH=S0*normcdf(d1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2);
%*****Simulation du mouvement brownien géométrique*****
S=S0*exp((r-0.5*sigma^2)*T+sigma*sqrt(T)*randn(1,n));
%*****calcul de la valeur actualisée du "payoff" de l'option*****
payoff=exp(-r*T)*max(S-K*ones(1,n),zeros(1,n));
CallSIM=mean(payoff);
%*****Calcul de l'intervalle de confiance de niveau 95*****
Inf=CallSIM-1.96*(std(payoff)./sqrt(n));
Sup=CallSIM+1.96*(std(payoff)./sqrt(n));
IC=[Inf,Sup];
    
```

Le tableau suivant représente les intervalles de confiance à 95% obtenus, en fonction de n nombres de simulation, lorsque $S_0 = 50$, $K = 55$, $r = 0.05$, $\gamma = 0.2$, $T = 1$ ans.

n	$CallTH$	$CallSIM$	IC (intervalle de confiance)
100	3.0189	4.4229	[2.7380 ; 6.1078]
250	3.0189	3.2689	[2.4079 ; 4.1299]
100000	3.0189	3.0019	[2.9660 ; 3.0377]
1000000	3.0189	3.0223	[3.0109 ; 3.0337]

3.4.2 Simulation de Black et Scholes α -stable

Considérons des options d'achat avec divers prix d'exercice K , de maturité $T=1$. Le taux d'intérêt r est choisi égale à 5%, la volatilité de l'actif sous-jacent σ vaut 20% et $\alpha = 2$, ceci correspond à un paramètre d'échelle $\gamma = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = 14.14\%$.

Le tableau (3.1) donne les valeurs des options d'achat calculées par la formule de Black Scholes et leurs prix simulés par le modèle 2-EDS. Il montre que les prix des options donnés par B&S sont proches de leurs prix simulés par le modèle 2-EDS et les erreurs absolues d'approximation commises par le modèle 2-EDS par rapport aux valeurs obtenues en utilisant le modèle de Black Scholes sont minimales.

S_0	K	B&S	2-EDS	$ \epsilon $
40	45	2.86	2.75	0.0081
50	52	5.43	5.4	0.002
60	63	6.23	6.19	0.003
70	73	7.51	7.5	0.001

Table 3.1: Les prix des options donnés par la formule B&S et leurs prix simulés par le modèle 2-EDS

Évolution du prix de l'option selon l'indice de stabilité α

Il est intéressant de voir comment varie la valeur d'un call lorsqu'on fait varier l'indice de stabilité α .

Prenons par exemple un call avec un prix d'exercice $K = 100$, $\sigma = 0.2$, $\gamma = 14.14\%$, $r = 0.05$, $S_0 = 100$, $\mu' = 1000$, $n = 100$ et α varie de 0.5 jusqu'à 2.

```

% Paramètres du modèle
S0 = 100; % prix initial de l'actif sous-jacent
K = 100; % prix d'exercice de l'option
r = 0.05; % taux d'intérêt sans risque
sigma = 0.2; % volatilité de l'actif sous-jacent
T = 1; % durée de l'option en années
N = 100; % nombre de jours de négociation dans une année
dt = T/N; % pas de temps
M = 1000; % nombre de simulations de Monte Carlo
alpha = 0.5:0.01:2; % plage d'indices de stabilité alpha

% Calcul des prix d'options pour chaque valeur d'alpha
for i = 1:length(alpha)
    a = alpha(i)
    b = 1;
    d1 = (log(S0/K) + (r + (sigma^2)/(2*a))*T)/(sigma*sqrt(T/a));
    d2 = d1 - sigma*sqrt(T/a);
    CallPrice(i) = S0*normcdf(d1) - K*exp(-r*(T/a))*normcdf(d2)
end

% Tracer de la courbe de prix d'options en fonction de l'indice de stabilité alpha
plot(alpha, CallPrice);
xlabel('Indice de stabilité alpha');
ylabel('Prix de l'option d'achat européenne');

```

En exécutant le programme, on obtient les valeurs de l'option données dans le tableau suivant

α	prix de l'option
2	6.80
1.9	7.02
1.8	7.36
1.7	7.53
1.6	7.82
1.5	8.14
1.4	8.5
1.3	8.9
1.2	9.34
1.1	9.9
1	10.45
0.9	11.14
0.8	11.99
0.7	13
0.6	14.29
0.5	15.97

Tableau 3.2: Les prix d'option d'achat selon l'indice de stabilité α

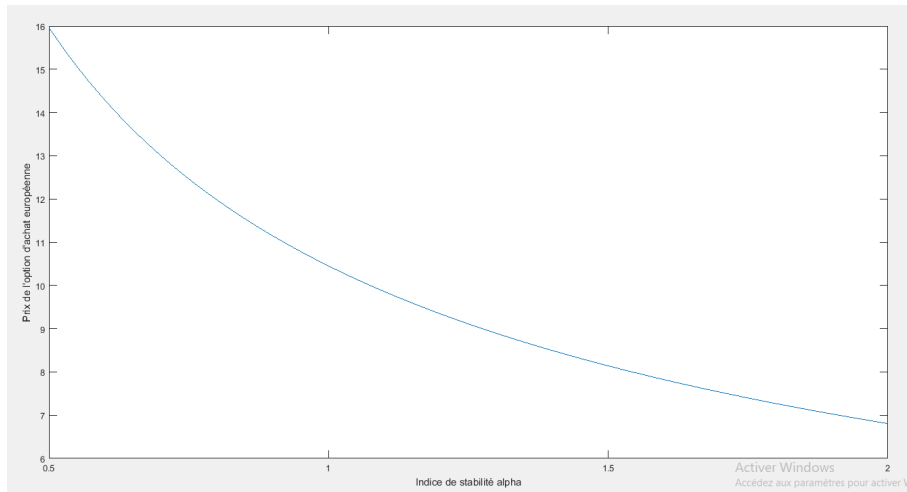


Figure 3.7: Graphe de prix d'option d'achat en fonction de α

Le tableau 3.2 ainsi que la figure 3.12 montrent que la valeur simulée de call augmente lorsque α décroît de 2 à 0. Ceci signifie que le modèle 2-EDS sous-évalue l'option.

Facteurs influençant le prix de l'option européenne

Influence du prix d'exercice K

On fixe les paramètres $S_0 = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$ ans, $\alpha = 0.5$, et on varie le prix d'exercice K .

K	50	55	60	100
Prix de call	5.2253	3.0200	1.6237	0.0024

Plus le prix d'exercice est élevé, plus la valeur de l'option d'achat est faible.

Influence de la maturité T de l'option

On fixe les paramètres $S_0 = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $K = 55$, $\alpha = 0.5$ et on varie prix le T , on obtient

T ans	1	5	10	50
Prix de call	3.02	12.2731	20.6117	45.8074

Plus la maturité de l'option est élevée, plus la valeur de l'option d'achat est élevée.

Influence du prix de l'actif sous-jacent S_0

On fixe les paramètres $K = 55$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$, $\alpha = 0.5$ et on varie le S_0 , on obtient

S_0	50	70	100	150
Prix de call	3.02	18.073	47.6847	97.6824

Plus le prix de l'actif sous-jacent S_0 est élevée, plus la valeur de l'option d'achat est élevée.

Influence du taux d'intérêt sans risque r

On fixe les paramètres $S_0 = 50$, $K = 55$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$, $\alpha = 0.5$ et on varie le taux d'intérêt, on obtient

r	5	10	50	90
Prix de call	3.02	4.0915	16.7057	27.6387

Plus le taux d'intérêt r est élevé, plus la valeur du call est élevée.

Influence de la volatilité du prix de l'option

On fixe les paramètres $S_0 = 50$, $r = 0.05$, $K = 55$, $T = 1$, $\alpha = 0.5$ et on varie la volatilité σ .

volatilité	10	40	50	90
Prix de call	1.0870	7.0021	8.9812	16.6291

Plus la volatilité de l'actif sous-jacent est élevée, plus il y a des chances que la valeur du call soit élevée.

Conclusion Générale

Ce travail de mémoire nous a permis de se familiariser avec les notions des lois α stables qui sont caractérisées par quatre paramètres. Le paramètre α , compris entre 0 et 2, représente l'exposant caractéristique des lois stables. Lorsque celui-ci est strictement inférieur à 2, la variance de la loi stable est infinie.

Nous avons étudié numériquement la solution des α EDS selon deux schémas d'approximation Euler et Milstein. Cette dernière méthode améliore les instabilités numériques par rapport à Euler.

Nous avons proposé un modèle simple en temps continu d'évaluation des options européennes dont le sous-jacent évolue selon une équation différentielle stochastique gouvernée par un mouvement α stable. Nous avons montré à partir de simulations des prix des options que le modèle Black Sholes qui correspond au modèle de 2-EDS sous quote (sous évalué) l'option.

Le travail abordé dans ce mémoire donne la possibilité à plusieurs perspectives Dans le domaine des séries chronologiques, il serait intéressant d'étudier les processus ARMA (auto regressive moving average) avec innovations stables.

Il serait intéressant aussi d'utiliser les processus fractionnaires stables pour introduire les processus des variations des prix des actifs financiers.

Bibliographie

- [1] Aleksand Janicki and Aleksander Weron. Simulation and chaotic behavior of alpha-stable stochastic processes, volume 178. CRC Press, 1993.
- [2] Alexander Alvarez and Pablo Olivares. Méthodes d'estimation pour des lois stables avec des applications en finance. Journal de la société française de statistique, 146(4) :23–54, 2005.
- [3] Anthony Fiche. Distributions alpha-stable pour la caractérisation de phénomènes aléatoires observés par des capteurs placés dans un environnement maritime. PhD thesis, Université de Bretagne occidentale-Brest, 2012.
- [4] B Wade Brorsen and Seung Ryong Yang. Maximum likelihood estimates of symmetric stable distribution parameters. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 19(4) :1459–1464, 1990.
- [5] Djabrane YAHIA, Fatah BENATIA, and Sonia TOUBA. Les lois α -stables comme modele pour les series financieres. 2012.
- [6] Eugene F Fama and Richard Roll. Parameter estimates for symmetric stable distributions. Journal of the American statistical association, 66(334) :331–338, 1971.
- [7] F Soltani and Zoubeida Messali. Performances des détecteurs distribués cfar dans un clutter alpha-stable basés sur des méthodes de prétraitement. 2017.
- [8] Ioannis A Koutrouvelis. Regression-type estimation of the parameters of stable laws. Journal of the American statistical association, 75(372) :918–928, 1980.
- [9] Ioannis A Koutrouvelis. An iterative procedure for the estimation of the parameters of stable laws : An iterative procedure for the estimation. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 10(1) :17–28, 1981.
- [10] J Huston McCulloch. Simple consistent estimators of stable distribution parameters. Communications in statistics-simulation and computation, 15(4) :1109–1136, 1986.
- [11] John P Nolan. Numerical calculation of stable densities and distribution functions. Communications in statistics. Stochastic models, 13(4) :759–774, 1997.

- [12] Ludovic d'Estampes. *Traitement statistique des processus alpha-stables : mesures de dépendance et identification des ar stables. test séquentiels tronqués.* 2003.
- [13] Nouha Jaoua. *Estimation bayésienne non paramétrique de systèmes dynamiques en présence de bruits alpha-stables.* 2013.
- [14] René Garcia, Eric Renault, and David Veredas. *Estimation of stable distributions by indirect inference.* *Journal of Econometrics*, 161(2) :325–337, 2011.
- [15] Lotfi Belkacem. *Processus stables et applications en finance : CAPM, risque, choix des portefeuilles, évaluation des options dans un marché "[alpha]-stable".* *PhD thesis, Paris 9, 1996.*
- [16] Ludovic d'Estampes. *Traitement statistique des processus alpha-stables : mesures de dépendance et identification des ar stables. Test séquentiels tronqués.* *PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse-INPT, 2003.*
- [17] Souhir AGGAB and Zineb BEN AROUBA. *Estimation des paramètres d'un bruit alpha-stable à partir d'un signal reçu bpsk.* 2016.
- [18] *Valorisation d'options théorie-simulation.* 2017.
- [19] S James Press. *Estimation in univariate and multivariate stable distributions.* *Journal of the American statistical association*, 67(340) :842–846, 1972.
- [20] Rhodes Rémi. *Processus de lévy et calcul stochastique.* Université Paris-Dauphine, 2010.

[1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [?] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17]
[18]
[19] [20]