

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DE BOUMERDÈS



FACULTÉ DES HYDROCARBURES ET DE LA CHIMIE



Département : Automatisation et Électrification des Procédés Industriels
Laboratoire d'Automatique Appliquée

Soutenance de Mémoire de Magister

Spécialité : Génie électrique. Option : *Automatisation des procédés industriels et traitement du signal.*

Présenté par :

CHARIF MOUSSA

Thème :

**Utilisation de Correcteurs d'Ordre Non Entier pour la Simplification de la
Résolution de Problèmes d'Optimisation Paramétrique**

Soutenu publiquement le : 15 /06/ 2005 Heur : 10 h Salle :

Devant le jury composé de :

Dr. M. ZELMAT	Pr.	Université de Boumerdes	Président
Dr A.BENHALLA.	C.C	Université de Boumerdes	Rapporteur
Dr. M.TADJINE	M.C	ENP EL-harrach	Examineur
Dr. F.LAAOUAD	MC	Université de Boumerdes	Examineur
Dr. A.KHELASSI	CC	Université de Boumerdes	Examineur

Boumerdès : 2005

REMERCIEMENTS

*Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire d'Automatique Appliquée (axe de recherche : Process Control) de la Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie de l'université de Boumerdès sous la direction de Monsieur **A. BENHALLA** chargé de cours à l'université de Boumerdès.*

Je tiens à lui exprimer ma gratitude et mes remerciements pour l'aide qu'il m'a apportée par ses conseils éclairés tout au long de ce travail qu'il soit assuré de ma sincère reconnaissance. Je tiens aussi à lui exprimer ma gratitude pour m'avoir orienter dans cet axe de recherche en me proposant ce pertinent sujet.

*Je tiens à remercier Monsieur **M. ZELMAT**, Professeur à l'université de Boumerdès, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.*

*Que Monsieur **A. TADJINE**, Maître de Conférences à E NP El_Harrach, et à Monsieur **F. LAAOUAD**, Maître de Conférences à l'université de Boumerdès, ainsi que Monsieur **A. KHELASSI**, Chargé de Cours à l'université de Boumerdès, veuillent trouver ici l'assurance de ma sincère reconnaissance pour avoir accepté de faire partie du jury.*

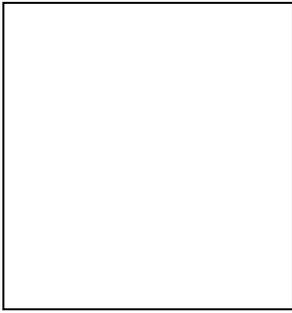
*J'exprime également ma reconnaissance à mes collègues de la post-graduation : **A. BOUREZGU, M. HOUSSOU, R. BENDIB, GHANEM** ainsi que **H. OUAGENOUNI, A. ABD ESSAMEUD, S. HAMMANI** pour l'aide et le soutien qu'ils m'ont apportés.*

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé et soutenu au long de mes études.

DEDICACES

*A Ma très chère Mère et très cher père.
A mes frères et à mes sœurs de DAJET à SAID.
En particulier :
Brahim, Farida, Djamel, Houria, Fatih ,
A la famille Mechakou , Smahi , Ouhab
A la famille Bougdal en particulier Samir
A mes amis en particulier : moh. Hakim. Hamid.
Abdelkader.*

A la mémoire des victimes du séisme
21 Mai 2003



SOMMAIRE



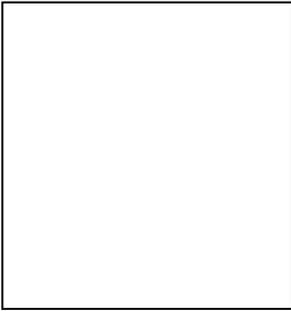
Introduction	1
Chapitre I	4
Formulation du problème d'optimisation paramétrique	
1 Introduction	4
2 Expression des spécifications temporelles	4
3 Expression des spécifications fréquentielles	5
4 Modélisation des incertitudes	6
5 Spécification d'asservissement et régulation	7
6 Position du problème d'optimisation paramétrique	9
6.1 Problème d'optimisation paramétrique	9
7 Contraintes fonctionnelles	10
8 Nature du problème d'optimisation obtenu	11
9 Critère utilisé dans les problèmes d'optimisations paramétriques	12
Conclusion	12
Chapitre II	13
Définition et approche de la dérivation d'ordre non entière	
1 Introduction	13
2 Dérivée entière	14
3 Approche intuitive de la dérivation non entière	15
4 Généralisation à l'ordre n de la dérivée d'ordre 1	17
5 Intégrale d'ordre non entier	18
6 La dérivation d'ordre non entier	19

Conclusion	22
Chapitre III	23
Approximation de l'opérateur d'ordre Non-entier	
1 Introduction	23
2 Modèle continu d'ordre entier pour systeme d'ordre non entier	25
2.1 Approximation par développement en fraction continu et interpolation ...	25
2.2 Approximation par technique d'identification	26
2.2.1 Méthode d'Oustaloup	26
2.2.2 Méthode de Chaeff's	29
3 Approximation par modèle discret	30
3.1 Discrétisation directe par transformation récursive de Tustin	30
4 Exemple d'utilisation d'un correcteur d'ordre non entier	31
4.1 Influence des différentes valeurs de l'ordre r	36
5 Robustesse de la correction d'ordre non entière	37
6 Influence du degré d'approche du correcteur	41
7 Influence des paramètres du correcteur sur les réponses temporelles	44
8 Influence du paramètre A_R du correcteur d'ordre non entier	46
Conclusion	47
Chapitre IV	48
Résultats de simulation	
Introduction	48
2 Exemple d'application	49

3	Commande par correcteur optimal	51
4	Commande par correcteur non entier	53
5	Conclusion	55
6	Le problème de la suspension du véhicule	56
6.1	Le Modèle linéaire de la suspension	56
6.2	La suspension d'ordre non entier	59
6.3	Commande par correcteur d'ordre non entier $P.I^\beta .D^\alpha$	60
7	Correcteur d'ordre non entier dépendant du modèle du procédé	61
7.1	Cas d'une suspension de véhicule	64
	Conclusion	65
	Conclusion générale	66
	ANNEXES	68

LISTE DES NOTATIONS

$f(x)$	Fonction de la variable x
w	Fréquence.
t	temps
d	perturbation.
$G(s)$	Fonction du transfert Modèle nominal du procédé.
$K(s)$	Fonction du transfert du correcteur
H	Fonction du transfert du système corrigé
b_{inf}	borne inférieur
b_{sup}	borne supérieur.
$ G(jw) $	Module de la fonction de transfert $G(s)$
$G'(s)$	Modèle incertain.
$\Delta G(s)$	Variation paramétrique du procédé $G(s)$.
u_1	Entrée de référence
u_2, d_1	Entrée de perturbation
d_2	Entrée de bruit
Y_1	La sortie
$b_m(w)$	Fonction positive de la fréquence
Ψ	Contrainte.
f^0	Critère d'optimalité à minimiser
f^j	Contraintes inégalités conventionnelles
g^j	Contraintes inégalités fonctionnelles
Φ^j	Contrainte inégalité fonctionnelle continûment différentiable
Ψ^j	Contrainte inégalité fonctionnelle non différentiable
T	Période d'échantillonnage
$D^n f(t)$	Dérivée d'ordre n de la fonction $f(t)$
R^+	Espace des nombres réels positifs
Ω_j	Ω_j : est un sous ensemble compact de R
R	Espace des nombres réels positifs
$\tilde{G}(s)$	Fonction rationnelle
$W(w)$	Fonction de pondération
η	Facteur récursif
$w(z^{-1})$	Fonction de génération
$G_r^f(s)$	Fonction de transfert du correcteur d'ordre non entier



INTRODUCTION



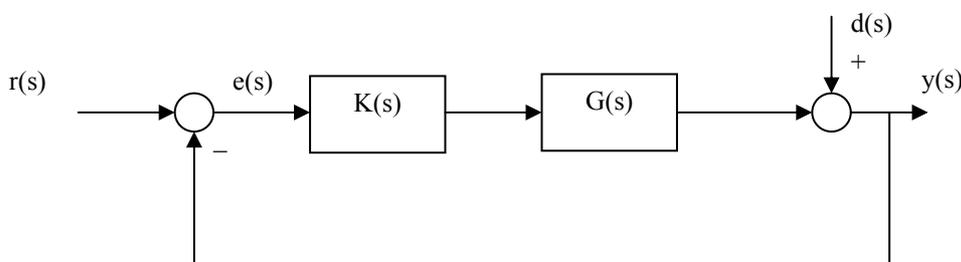
Introduction

Introduction

La synthèse des correcteurs a connu un très important développement théorique, par contre leur utilisation pratique s'avère dominée par les méthodes classiques de synthèse [Zam83]. Beaucoup de tentatives de généraliser des méthodes aux systèmes MIMO et d'établir une théorie mathématique cohérente se sont heurtées à des difficultés, ce qui est dû en partie au fait que le but recherché par une correction n'est pas clairement établi, ainsi un des objectifs des méthodes récentes est de ramener le problème de la synthèse à un problème d'optimisation bien posé.

Cette formulation du problème de synthèse doit pouvoir prendre en compte, autant que possible les contraintes que rencontre la mise en œuvre pratique d'une correction.

Considérons le système suivant :



Où $G(s)$ est un modèle linéaire d'un système physique donné invariant qu'il soit monovriable ou multivariable.

A un niveau très général le problème de la synthèse de correcteur peut être posé de la manière suivante :

Etant donné un procédé représenté par un modèle $G(s)$, l'objectif est de trouver une fonction (ou une matrice) de transfert $K(s)$, satisfaisant les trois spécifications suivantes :

- a- Stabilité :
Le système en boucle fermée doit être stable, autrement dit pour toutes entrées bornées, la sortie \mathbf{y} doit être bornée.
- b- Performances :
En ce point les performances du système doivent être acceptables, à titre d'exemple, l'erreur \mathbf{e} doit rester petite en présence de une perturbation \mathbf{d} et d'une variation de l'entrée \mathbf{r} , de plus le système doit avoir une certaine rapidité de réponse.
- c- Stabilité robuste et robustesse :
Les conditions posées en **a** et **b** doivent rester satisfaites en présence d'incertitudes sur le modèle $G(s)$ du procédé.

Dans la littérature spécialisée, on observe une tendance à énoncer ces spécifications dans une formulation mathématique précise, débouchant sur un problème d'optimisation dont les spécifications deviennent des contraintes.

La transcription précise des spécifications même à un problème d'optimisation avec des contraintes non différentiables de la forme

$$\text{Max}_{\omega \in \Omega} |H(j\omega)| \leq f(\omega) \quad \text{ou}$$

$$\text{Max}_{t \in \Omega} |h(t)| \leq g(t)$$

Cette propriété de non différentiabilité des contraintes exclut tous les algorithmes classiques basés sur des calculs de dérivées. Une version appropriée a été développée, mais elle reste difficile à programmer et sur tout nécessite des temps de calcul élevés.

Ce travail vise à tester l'utilisation de correcteur d'ordre non entier dont des propriétés observées sur un cas particulier permettraient de transformer les contraintes non différentiables en contraintes conventionnelles, ce qui autoriserait l'utilisation d'algorithmes classiques tout en

conservant la formulation du problème de synthèse dans la forme énoncée du problème d'optimisation.

Dans ce travail nous prenons en compte seulement le point **b** et point **c**, sans perdre le point **a** qui est satisfait par la structure du correcteur.

Ce mémoire comporte quatre chapitres.

Dans le chapitre I nous formulons le problème de synthèse de correcteur sous la forme d'un problème d'optimisation paramétrique. Les spécifications sont transcrites sous forme de contrainte dont certaines sont des contraintes non différentiables. Nous caractérisons ainsi la nature du problème d'optimisation obtenu et soulignons les difficultés liées à sa résolution.

Le Chapitre II est dédié à l'étude de la dérivation et de l'intégration non entière. Ces opérateurs de base entrent dans les équations différentielles décrivant les correcteurs d'ordre non entier qui doivent être étudiés dans le but de transformer le problème d'optimisation avec contraintes fonctionnelles en un problème avec contraintes conventionnelles. Si le correcteur d'ordre non entier présente les propriétés espérées, son utilisation à la place d'un correcteur d'ordre entier suffirait pour obtenir la satisfaction recherchée.

Le chapitre III est dédié aux méthodes d'approximation des modèles non entiers par des modèle d'ordre entier. Plusieurs méthodes sont passées en revue. Les approximations continues et discrètes sont considérées. Des résultats de simulation sont présentés où des propriétés du correcteur d'ordre non entier sont mises en évidence du point de vue de la sensibilité des réponses temporelles à certains paramètres du correcteur entier équivalent et du point de vue de la robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques sur le modèle du procédé.

Le chapitre IV présente des résultats de simulation sur un système oscillant et sur un système de suspension d'un véhicule. Dans ce chapitre nous continuons l'investigation des propriétés recherchées pour les correcteurs d'ordre non entier, toujours dans la perspective de simplification du problème d'optimisation avec contraintes fonctionnelles. Cette investigation porte sur les propriétés des réponses fréquentielles et temporelle des deux systèmes étudiés.

CHAPITRE

1

FORMULATION DU PROBLEME D'OPTIMISATION

*« Une personne qui n'a jamais commis
d'erreur n'a jamais tenté d'innover. »*

Albert Einstein

Chapitre I

Formulation du problème d'optimisation paramétrique

1. Introduction

Dans ce qui suit l'objectif est de formuler le problème de synthèse sous forme d'un problème d'optimisation bien posé. Cette formulation doit pouvoir prendre en charge, autant que possible, les contraintes découlant des différentes expressions des spécifications que rencontre la mise en œuvre pratique d'une correction.

2. Expression des spécifications temporelles

Il est courant de rencontrer des spécifications exprimées dans le domaine temporel. Ce sont par exemple des limitations de l'amplitude du premier Pic, temps de montée, temps d'établissement dans une réponse indicielle.

Généralement l'objectif est de définir un gabarit des réponses admissibles pour une paire d'entrée-sortie scalaire pour le cas multivariable, dans ce contexte alors il s'agira de confiner

une réponse temporelle donnée à l'intérieur de ce gabarit. La figure qui suit représente une spécification relative à une réponse indicielle.

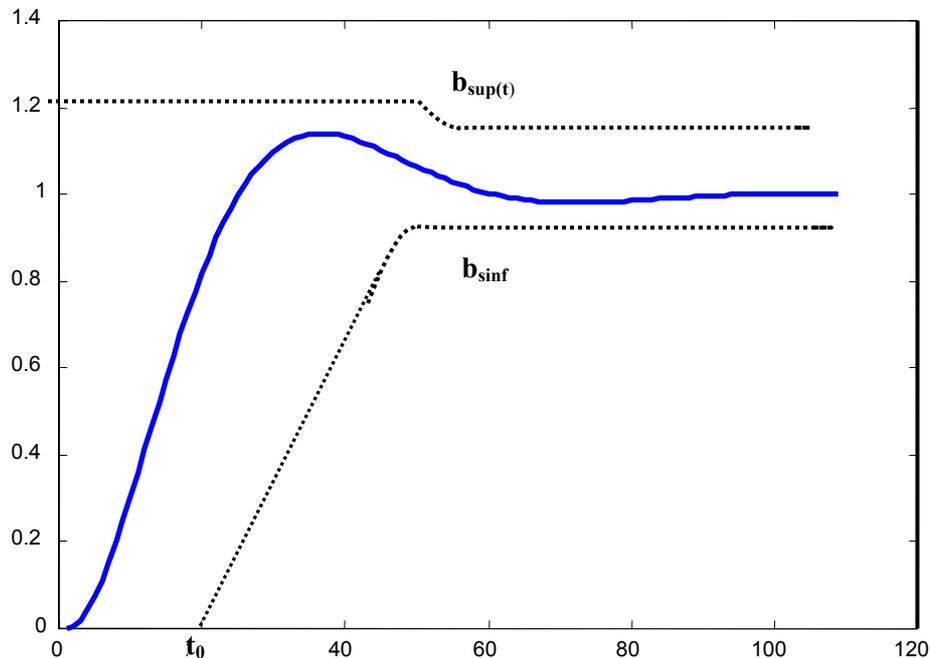


Figure (I.1) Spécification relative à une réponse indicielle

La spécification est transcrite par [Zam81].

$$\begin{aligned} 0 \leq y(t) \leq y_{\max} & \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ b_{\inf}(t) \leq y(t) \leq b_{\sup}(t) & \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

avec

$$\begin{aligned} b_{\inf}(t) &= 1 - a^t \\ b_{\sup}(t) &= 1 + a^t \quad a < 1 \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

3. Expression des spécifications fréquentielles

Ces spécifications concernent des caractéristiques des réponses fréquentielles, généralement l'objectif est de définir une limite des réponses admissibles, autrement dit :

Il s'agira de trouver une réponse fréquentielle donnée à l'intérieur de cette limite, la figure (I.2), montre une spécification relative à une représentation fréquentielle.

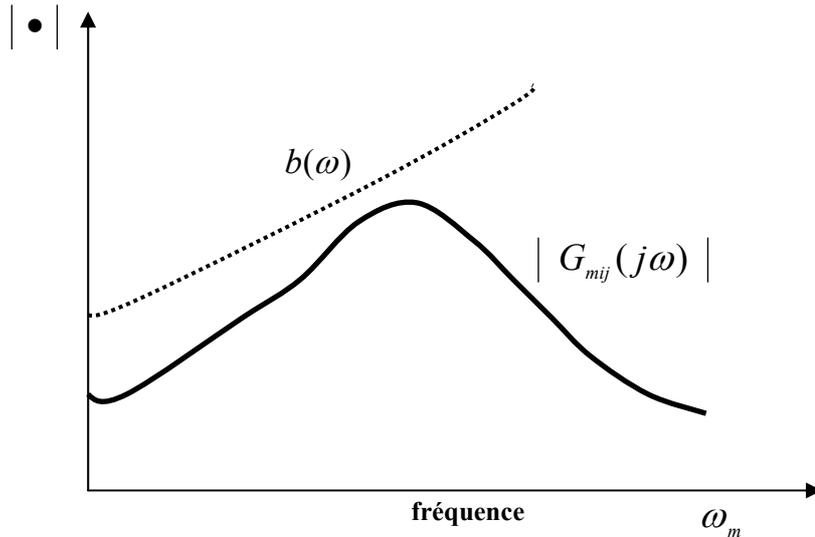


Figure (I.2) Réponse relative à une spécification fréquentielle

Cette spécification est transcrite en :

$$\text{Max}_{\omega \in \Omega} |G(j\omega)| \leq b(\omega) \quad \omega \in \Omega \quad (\text{I.3})$$

4. Modélisation des incertitudes

Il existe essentiellement deux approches pour prendre en compte, dans la synthèse, le problème de stabilité robuste [Ous91]. Les deux approches correspondent à des modélisations différentes des incertitudes sur le modèle du procédé. L'approche paramétrique suppose qu'on dispose de borne supérieure et inférieure pour chaque paramètre du modèle. Cette approche n'est pas utilisée vu la complexité qu'elle ajoute au problème d'optimisation paramétrique. De plus il est pratiquement difficile de connaître les plages d'incertitudes des paramètres. Dans la deuxième approche, dite des « Incertitudes non structurées », les incertitudes sont modélisées de la façon suivante [Ous90]:

- incertitudes additives

Le modèle incertain est $G'(s)$ tel que

$$G'(s) = G(s) + \Delta G(s)$$

Avec $G(s)$ étant le modèle nominal du procédé et $\Delta G(s)$ les variations paramétriques du modèle nominal $G(s)$ où $\Delta G(s)$ vérifie :

$$|\Delta G(s)| \leq b_a(\omega) \quad \forall \omega \geq 0 \quad (\text{I.4})$$

$b_a(\omega)$ est une fonction positive de la fréquence. Le choix d'une borne $b_a(\omega)$ définit un ensemble de modèles situés dans le voisinage du modèle nominal $G(s)$.

- Les incertitudes multiplicatives

Le modèle incertain est $G'(s)$ tel que

$$G'(s) = (I + L(s)) G(s) \quad \text{où } L(s) \text{ vérifie :}$$

$$|L(j\omega)| \leq b_m(\omega) \quad \forall \omega \geq 0 \quad (\text{I.5})$$

$b_m(\omega)$ est une fonction positive de la fréquence. Comme précédemment, le choix de $b_m(\omega)$ définira un ensemble de modèles situés dans le voisinage de $G(s)$. Typiquement $b_m(\omega)$ est faible en basse fréquence et croit jusqu'à pouvoir dépasser l'unité en haute fréquence.

5. Spécification d'asservissement et régulation

Ces spécifications peuvent être transcrites de plusieurs façons. Dans la suite on écrit une condition pour minimiser les contributions de \mathbf{u}_1 , \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 à l'erreur \mathbf{e}_1 voire figure (I.3),

où : $G(s)$ est le modèle du procédé .

$K(s)$ est le correcteur .

u_1 est une entrée de référence .

u_2, d_1 sont des entrées de perturbation .

d_2 est une entrée de bruit .

Y_1 est la sortie.

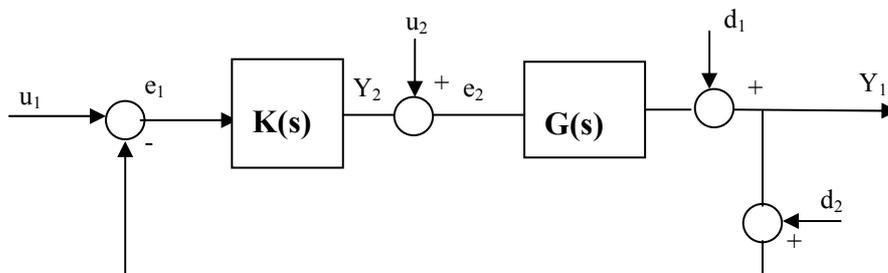


Figure (I.3)

Ceci est obtenu en imposant des bornes supérieures aux transferts :

$$H_1(G,K) \quad \text{pour l'asservissement, où } H_1 = \frac{1}{1+KG}$$

$$H_2(G,K) \quad \text{pour l'atténuation des entrées } d_1, \text{ où } H_2 = \frac{-1}{1+KG}$$

$$H_3(G,K) \quad \text{pour l'atténuation des entrées } d_2, \text{ où } H_3 = \frac{-1}{1+KG}$$

On observe que :

$$H_1(G,K) = -H_2(G,K) = -H_3(G,K) \quad \text{donc}$$

$$|H_1(G,K)| = |H_2(G,K)| = |H_3(G,K)|$$

si $b_{f1}(\omega)$, $b_{f3}(\omega)$ et $b_{f4}(\omega)$ sont des fonctions positives de la fréquence choisies comme bornes supérieure respectivement pour $|H_{11}(G,K)|$, $|H_{13}(G,K)|$ et $|H_{14}(G,K)|$ la borne $b_f(\omega)$ correspondant aux trois contraintes prises simultanément sera choisie de la façon suivante :

$$b_f(\omega) = \underset{\omega}{\text{Min}}(b_{f1}(\omega), b_{f3}(\omega), b_{f4}(\omega))$$

La condition d'asservissement et régulation s'écrit alors :

$$|H_{11}(G,K)| \leq b_f(\omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{R}^+ \quad (\text{I.6})$$

Soit : $\Psi : \mathcal{R}_{(\sigma_0)} \rightarrow \mathcal{R}^+$ définie par :

$$\Psi(K) = \underset{\omega \in \mathcal{R}_+}{\text{Sup}} \{ |H_{11}(G,K)| - b_f(\omega) \} \quad (\text{I.7})$$

La contrainte d'asservissement et régulation s'écrit [Pol89]

$$\Psi(K) \leq 0 \quad (\text{I.8})$$

6. Position du problème d'optimisation paramétrique

Dans ce qui suit l'objectif est de formuler le problème de synthèse sous forme d'un problème bien posé, cette dernière formulation doit pouvoir prendre en charge, autant que possible, les contraintes que rencontre la mise en œuvre pratique d'une correction.

6.1. Problème d'optimisation paramétrique

Le problème d'optimisation est énoncé sous le formalisme suivant :

$$\text{Min}_x \left\{ f^0(x) \ / \ f^i(x) \leq 0, \ j \in E_1; \ g^j(x, w_j) \leq 0, \ j \in E_2 \right\} \quad (\text{I.9})$$

$$\text{Où } E_1 = \{1, 2, 3, \dots, m_1\} \quad (\text{I.10})$$

$$E_2 = \{1, 2, 3, \dots, m_2\}$$

et avec

$$f^0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \ f^0(x) \quad (\text{I.11})$$

étant le critère d'optimalité à minimiser

$$f^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \ f^j(x) \leq 0 \quad (\text{I.11. b})$$

sont des contraintes inégalités conventionnelles.

Ces contraintes inégalités fonctionnelles sont représentées sous la forme générale suivante :

$$g^j(x, w_j) = \text{Max}_{w_j \in \Omega_j} \Phi^j(x, w_j) \leq 0 \quad (\text{I.12})$$

Où $\Phi^j : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est continûment différentiable.

Ω_j : est un sous ensemble compact de \mathbb{R}

w_j : - est une pulsation w si la contrainte $g^j(x, w_j) \leq 0$ est découlant d'une spécification fréquentielle .

w_j : - est la variable temps t si la contrainte $g^j(x, w_j) \leq 0$ résulte d'une spécification temporelle.

$x \in \mathbb{R}^n$: est le vecteur paramètre du correcteur.

Toutes les expressions qui découlent de spécifications interviennent dans le problème d'optimisation comme des contraintes. Le critère $f^0(x)$ ne correspond pas nécessairement à une spécification explicite du problème de synthèse. Il sera par exemple pour les systèmes SISO un critère ISE, ITAE, etc. ...

7. Contraintes fonctionnelles

Les contraintes fonctionnelles sont sous la forme :

$$\Psi^j(K) = \text{Max}_{w_j \in \Omega_j} \Phi^j(G, K) \quad (\text{I.13})$$

La nature du problème d'optimisation est déterminée par la propriété de la non différentiabilité de ces contraintes inégalités fonctionnelles.

Dans la cas pratique les contraintes fonctionnelles sont considérées en un nombre de point fini sur l'intervalle d'étude Ω_j ce qui donne alors des fonctions non différentiables en un nombre fini de points.

Les contraintes fonctionnelles ont l'allure donnée en la figure (I.4) ci-dessous :

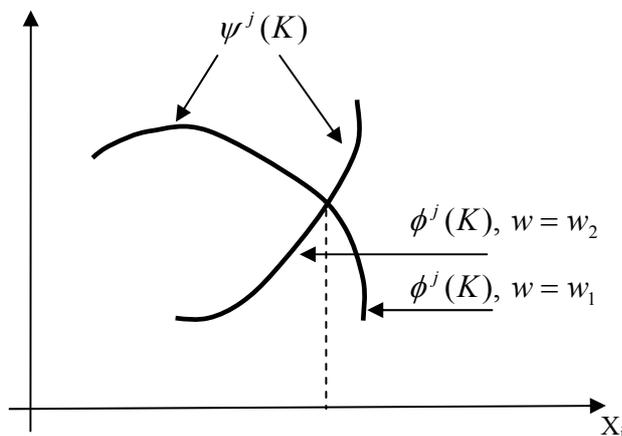


Figure (I, 4) contraintes fonctionnelles

$\psi^j(K)$ est représenté en fonction d'une composante du vecteur paramètre de K pour deux valeurs de w_j :

$$\begin{aligned} w_j &= w_1 \in \Omega_j \\ w_j &= w_2 \in \Omega_j \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

la fonction $\psi^j(K)$ correspond alors au maximum de $\phi^j(K)$ tracée pour $w_j = w_1$ et $w_j = w_2$ soit :

$$\psi^j(K) = \underset{w_0 \in \Omega_0}{\text{Max}}(\phi^j(K(w_1)), \phi^j(K(w_2))). \quad (\text{I.15})$$

Avec $\psi^j(K)$ n'est pas différentiable au point x où

$$\phi^j(K(w_1)) = \phi^j(K(w_2)) \quad (\text{I.16})$$

x_i est une composante du vecteur paramètre x , cette propriété de non différentiabilité par rapport aux paramètres du correcteur conditionnera la résolution numérique du problème.

8. Nature du problème d'optimisation obtenu

Dans le paragraphe (6) nous avons souligné que le problème d'optimisation est caractérisé par la présence de contraintes inégalités non différentiables. Dans ces contraintes interviennent des fonctions dont la forme générale est :

$$\psi^j(K) = \underset{w_0 \in \Omega_0}{\text{Max}} \phi^j(G, K). \quad (\text{I.17})$$

Ces fonctions vu leurs non différentiabilité, ne peuvent être évaluées en tout point w_j de Ω_j qui représente un sous ensemble compact de R par hypothèse. Les contraintes

$$\psi^j(K) = \underset{w_0 \in \Omega_0}{\text{Max}} \phi^j(G, K) \leq 0. \quad (\text{I.18})$$

Peuvent être alors vues comme une infinité d'inégalités.

$$\phi^j(G, K) \leq 0; \quad \forall w_j \in \Omega_j \quad \text{à satisfaire}$$

Par ailleurs, comme le vecteur paramètre est de dimension finie, on se trouve en présence d'un problème d'optimisation semi infinie non différentiable [Pol87].

La résolution du problème d'optimisation ainsi obtenu est réalisée à l'aide d'algorithmes complexes et lents. Les domaines sur lesquels sont définies les contraintes fonctionnelles sont

discrétisés afin de rendre le nombre de points où ces contraintes ne sont pas différentiables fini. Cette discrétisation est modifiée au fur et à mesure des itérations où elle devient de plus en plus fine. Un algorithme du gradient est alors modifié afin de tenir compte des points de non différentiabilité.

9. Critère utilisé dans les problèmes d'optimisations paramétriques

Les nombreux critères rencontrés dans la littérature sont choisis selon le problème particulier à résoudre, en général les problèmes étudiés n'utilisent pas de contrainte pour exprimer les spécifications, la tâche se limite à une minimisation d'un critère lié à un ou deux objectifs, qui représente une minimisation des critères classiques. [Oli86], [Gon80].

$$\int_{-j^{\infty}}^{j^{\infty}} (e_1' \cdot e_1 + k \cdot e_2' \cdot e_2) \cdot ds$$
$$\int_0^{\infty} (e_1^2 + k \cdot e_2^2) \cdot dt$$

Ceci est rendu possible par le fait qu'on s'attache à satisfaire principalement une seule spécification.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes spécifications qui peuvent être rencontrées lors de la synthèse d'une correction. Ces spécifications ont été transcrites sous forme de contraintes dans le problème d'optimisation paramétrique. Nous avons montré que le choix de ces spécifications basé sur une expression temporelle comme contraintes fonctionnelles donne un problème d'optimisation non différentiable. Nous nous proposons d'explorer l'utilisation de correcteurs d'ordre non entiers dans le but de voir s'ils présentent des propriétés qui nous permettraient de simplifier la résolution de problème d'optimisation formuler dans ce chapitre.

CHAPITRE

2

**DEFINITIONS ET
APPROCHES DE
L'OPERATEUR D'ORDRE
NON ENTIER**

Chapitre II

Définition et approches de la dérivation d'ordre non entier

1 . Introduction

La notion de la dérivée non entière date du début du 17^{ème} siècle qui reste néanmoins inégalement dans le domaine de la physique appliquée et notamment en automatique.

Dernièrement beaucoup de travaux en été consacrés à la synthèse d'un opérateur de dérivation non entière ainsi qu'à ses applications, qui concernent la théorie de la commande automatique, la reconnaissance des formes et l'extraction de contour dans le traitement d'image, par ailleurs dans le domaine de la mécanique les applications consistent à utiliser la dérivation non entière comme outil de modélisation des matériaux viscoélastiques.

Dans la théorie de commande automatique l'objectif est de déterminer le régulateur qui assure au procédé réglé les performances fixées par le concepteur, conformément à un compromis entre ses exigences et les limites physiques du procédé.

La synthèse du régulateur adapté au procédé est effectuée à partir d'un état paramétrique donné du procédé (état paramétrique nominale), une modification de cet état non accompagnée d'une reparamétrisation du régulateur (cas d'un régulateur fixe), se traduit par une désadaptation du régulateur au procédé, il en résulte une modification des performances de la commande traduisant ainsi sa sensibilité à un écart paramétrique du procédé.

Cette absence de robustesse ne permet pas de garantir les spécifications sur les performances de la commande, sachant que l'état paramétrique du procédé pour lesquelles le régulateur est dimensionné correspond rarement au véritable état paramétrique.

2. Dérivée entière

Avant d'aborder la notion de dérivation non entière, nous allons rappeler la notion de dérivée, puis montrer l'incapacité de la dérivée à caractériser certaines [Cla79], [Lub86], [Ous90], Considérons une fonction du temps $f(t)$ dont la courbe représentative est continue. La figure (II.1) représente l'interprétation de la notion de dérivée entière.

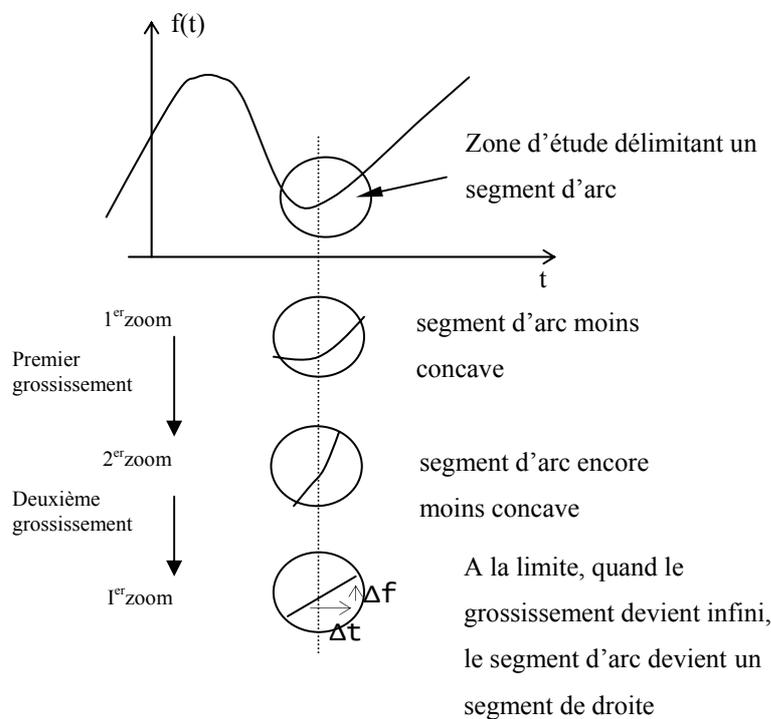


Figure II .1

Lorsque la zone d'étude fait l'objet d'un premier grossissement (1^{er}zoom). Le segment d'arc défini devient moins concave. A la suite d'un deuxième grossissement (2^{em} zoom), il devient encore moins concave. Réitérée indéfiniment cette procédure de grossissement transforme progressivement le segment d'arc en segment de droite. La pente $\Delta f / \Delta t$ qui mesure l'inclinaison du segment de droite ainsi obtenu, n'est autre que la dérivée (ou dérivée d'ordre 1) de la fonction $f(t)$ à l'instant t .

3. Approche intuitive de la dérivation non entière

Considérons maintenant une fonction $f(t)$ dont la courbe représentative des variations est une courbe brisée. Un exemple caractéristique d'une telle courbe est la courbe de Von Koch construite selon le procédé récursif de la figure (II, 2)

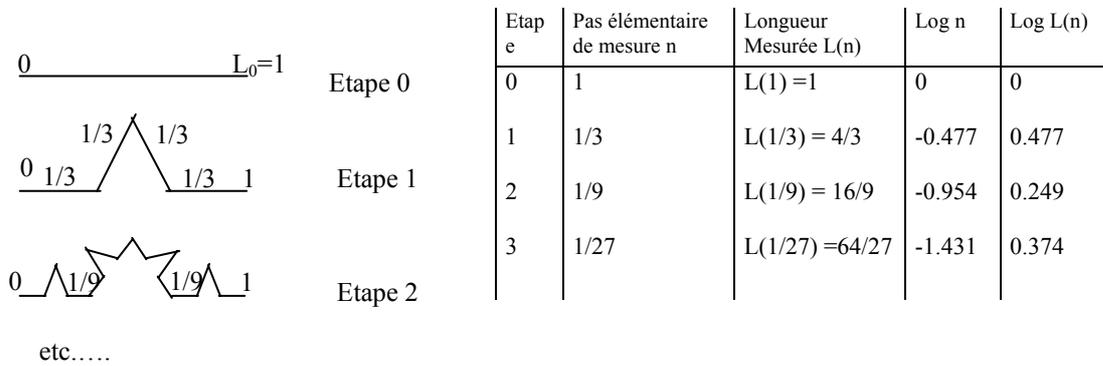


Figure (II,2) construction et dimension de la courbe de Von Koch

qui est représentée dans le domaine temporel par la figure (II.3. a)

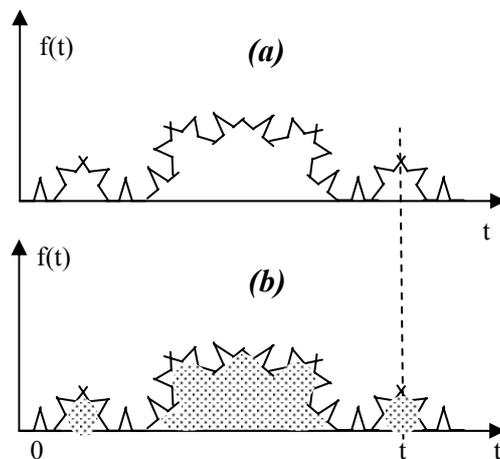


Figure.(II.,3) Dérivée d'une courbe infiniment perturbée

A l'instant t , la courbe présente deux segments de droite d'inclinaisons différentes. Comme il n'y a aucune raison de privilégier plus une inclinaison que l'autre, on dit que la dérivée à l'instant t n'est pas définie.

En revanche, l'aire sous la courbe existe comme représenté en figure (II.3.b). Autant le caractère perturbé de la courbe a beaucoup d'influence sur la dérivée, autant il n'a que peu d'influence sur l'aire sous la courbe, on montre alors que l'aire admet une limite.

On passe ainsi d'une caractérisation locale (dérivée à l'instant t), à une caractérisation globale. (Aire sous la courbe qui prend en compte le passé de la fonction).

Afin d'appréhender simplement la signification de cette aire délimitée par la courbe, il convient de considérer une courbe continue telle que celle présentée en figure (II.4)

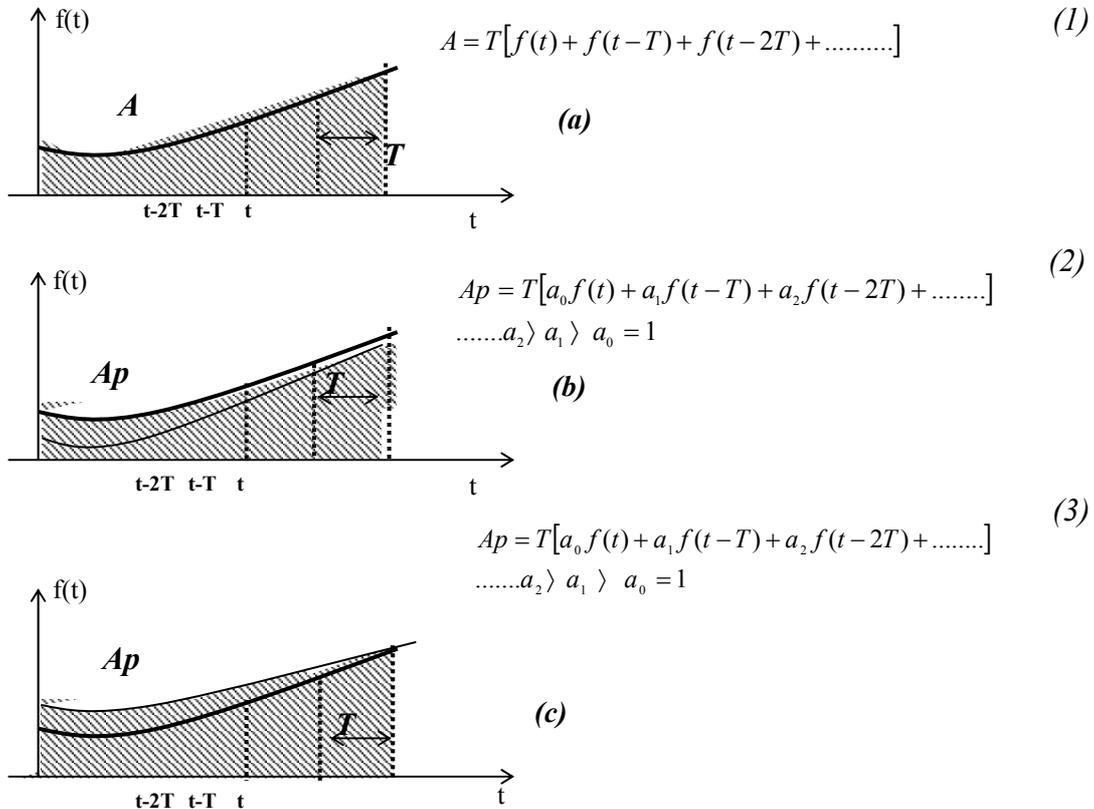


Figure (II,4) : Représentation mathématique de l'aire sous la courbe(a) et introduction de la notion de mémoire par une atténuation (b) ou une accentuation du passé(c)

Si T désigne une période d'échantillonnage suffisamment petite, la méthode des rectangles permet d'exprimer l'aire A sous la courbe par une somme algébrique; relation (1) qui représente la somme des valeurs de la fonction $f(t)$ à tous les instants du passé. La somme des échantillons du passé obtenue, est restrictive en ce sens qu'elle fait abstraction de tout notion de mémoire en prenant en compte les échantillons les plus anciens de la même manière que les plus récents. L'introduction de la notion de mémoire consiste à accorder, selon le cas, moins de poids ou plus de poids au échantillons les plus anciens. L'introduction de la notion de mémoire par une pondération des échantillons les plus anciens, s'illustre par la nouvelle aire A_p figure (II,4, b, c). Qui exprime la somme algébrique pondérée que définissent les relation (2), (3), et dont les coefficients de pondération sont, selon le cas conformes à une atténuation ou à une accentuation du passé.

Il est possible de construire arbitrairement un tableau des coefficients de pondération suivant la règle de construction correspondante (II.1).

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 \\
 a_1 &= -\frac{n}{1} \\
 a_2 &= \frac{-n(-n+1)}{1 \cdot 2} \\
 a_3 &= \frac{-n(-n+1)(-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{II, 1}$$

Par ailleurs une normalisation de l'aire pondérée A_p conformément à T^{1-n} , soit :

$$T^{1-n}A_p = \frac{1}{T^n} \left[a_0 f(t) + a_1 f(t-T) + a_2 f(t-2T) + \dots + a_n f(t-nT) \right]
 \tag{II, 2}$$

ne définit rien d'autre que la dérivée d'ordre non entier n de la fonction $f(t)$ à l'instant t . Ainsi factorisée par $1/T^n$ la somme des échantillons du passé de la fonction $f(t)$ assortie de la notion de mémoire par une pondération conforme à la formule (1) exprime la dérivée $n^{i\text{eme}}$ de $f(t)$, soit $D^n f(t)$.

4. Généralisation à l'ordre n de la dérivée d'ordre 1

Il convient en effet de remarquer que les formules (II, 1), résultent de la généralisation à l'ordre n de la dérivée d'ordre 1, si l'on juge par l'expression des coefficients de pondération à laquelle conduit le développement ci-après. Par une discrétisation du temps au pas d'échantillonnage T , soit $t = kT$, la dérivée d'ordre 1 de $f(t)$.

$$D^1 f(t) \quad \text{avec} \quad D \equiv d/dt$$

s'écrit par définition :

$$D^1 f(t) = \frac{f(kT) - f(k-1)T}{T}
 \tag{II, 3}$$

soit en introduisant l'opérateur retard q^{-1} tel que :

$$\begin{aligned}
 q^{-1} f(kT) &= f((k-1)T) \\
 D^1 f(t) &= \frac{(1-q^{-1})}{T} f(kT)
 \end{aligned}$$

le même type de calculs mené pour une dérivation a l'ordre 2 conduit à :

$$D^2 f(t) = \frac{(1-q^{-1})^2}{T^2} f(kT)$$

La généralisation à un ordre de dérivation quelconque (entier ou non entier) est immédiate.

$$D^n f(t) = \frac{(1-q^{-1})^n}{T^n} f(kT).$$

où, en développant $1-q^{-l}$ par la formule du binôme de Newton on obtient :

$$D^n f(t) = \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)}{k!} q^{-k} f(kT) . \quad \text{soit finalement, en posant :}$$

$$a_k = \frac{(-1)^k n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \quad \text{et} \quad a_0 = 1 \tag{II, 4}$$

$$D^n f(t) = \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k f(t-kT)$$

De la formule (II, 4), contrairement à la dérivée d'ordre 1 (relation (II, 3), la dérivation d'ordre non entier d'une fonction à un instant t donné prend bien en compte les valeurs de cette fonction à tous les instants du passé et ce de manière différenciée (par le jeu des coefficients de pondération). Confirmant ainsi à la fois la notion de caractérisation globale et la notion de mémoire qu'implique une telle dérivée. Il est à souligner que les coefficients de pondération sont tels que :

- Pour $n = -1$, il n'y a pas de pondération du passé.
- Pour $n > -1$, il y a une atténuation du passé (avec des coefficients de pondération qui conservent le même signe pour $-1 < n < 1$, et qui changent de signe pour $n > 1$).
- Pour $n < -1$, il y a une accentuation du passé (avec des coefficients de pondération qui conservent le même signe).

5. Intégrale d'ordre non entier.

On se basant sur l'approche de Riemann-Liouville des calculs d'ordre non entier [Pet99], la notion d'intégration d'ordre non entier α ($\alpha > 0$), est la représentation bien connue de la formule de Cauchy , qui réduit le calcul des primitives de la fonction $f(t)$ a une simple intégrale de convolution notée:

$$I^n f(t) = f_n(t) - \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad n \in N \quad (\text{II, 5})$$

Avec N représentant les nombres entiers positifs.

Ainsi cette formule peut être utiliser pour une représentation d'un nombre réel positif, en utilisant la fonction d'Euler Γ qui est notée, $(n-1)! = \Gamma(n)$, qui sera définie par :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau, \quad t > 0, \quad \alpha \in R^+ \quad (\text{II, 6})$$

où R^+ représente l'espace des nombres réels positifs.

L'introduction de la transformation de Laplace notée $L\{f(t)\} = \int_0^t e^{-st} f(t) dt = F(s)$, où $s \in C$ (L 'ensemble des nombres complexe), de l'intégrale d'ordre non entier est :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{s^\alpha} F(s) \quad \text{avec } \alpha > 0. \quad (\text{II, 7})$$

Où $F(s)$ est la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$.

5. La dérivation d'ordre non entier

La définition de la dérivation d'ordre non entier découle des définitions citées au paragraphe traitant de l'intégrale non entier d'ordre α ($\alpha > 0$), cela en remplaçant l'ordre (α) par $(-\alpha)$. En notant l'opérateur de la dérivation non entier d'ordre n D^n avec $n \in N$, on a :

En premier on note que :

$$I^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0 \quad (\text{II, 8})$$

par conséquent la dérivation D^α est donnée par la formule suivante :

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m \end{cases} \quad (\text{II, 9})$$

Avec m étant un nombre entier tel que $m - 1 < \alpha \leq m$, où $\alpha > 0$.

La deuxième définition de la dérivation d'ordre non entier, introduite par Caputo [Cap67] dans les années soixante et adoptée par Mainardi et Caputo [Mai97] dans leurs travaux sur la théorie de la viscoélasticité linéaire pour $\alpha > 0$ est donnée par :

$$D_*^\alpha f(t) = I^{m-\alpha} D^m f(t) \quad \text{avec } m-1 < \alpha < m \quad \text{telle que}$$

$$D_*^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m \end{cases} \quad (\text{II, 10})$$

Cette définition est plus restrictive que (II, 9).

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre non entier notée D^α , en connaissant la valeur initiale de l'intégrale d'ordre non entier $I^{m-\alpha}$ et de ses dérivées entières d'ordre $k = 1, 2, 3, \dots, m-1$, est définie par :

$$L\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k I^{(m-\alpha)} f(0^+) S^{m-1-k}, \quad m-1 < \alpha < m \quad (\text{II, 11})$$

Par contre la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre non entier de Caputo requière la connaissance des valeurs initiales de la fonction, ainsi que ses dérivées entières d'ordre $k = 1, 2, 3, \dots, m-1$. qui est :

$$L\{D_*^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) S^{\alpha-1-k}, \quad m-1 < \alpha \leq m. \quad (\text{II, 12})$$

K.Grünwald (1867), propose une définition de la dérivation d'ordre non entier en utilisant une nouvelle approche qui est définie par :

$${}^G D_a^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} {}_a \Delta_h^\alpha f(t)$$

$${}_a \Delta_h^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (\text{II, 13})$$

où $[x]$ représente la partie entière de x .

En même temps (1868), A.V.Letnikov, qui n'était pas au courant des travaux de Grünwald, a suggéré une approche similaire, où il a prouvé la relation suivante :

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-a}}{\Gamma(k-a-1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha-1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{m+1}(\tau) d\tau \quad (\text{II. 14})$$

Il est à noter que m peu être un nombre positif quelconque, par contre le choix de la valeur positive de m doit réaliser l'existence de l'intégrale contenu dans le second membre. Ainsi les différents choix de la valeur de m doivent être effectués de manière à ce que la dérivation d'ordre non entier soit une extension des définitions de la dérivée d'ordre entier.

On voit que la formule (II,14) de Letnikov est obtenue sous la supposition que $f(t)$ soit différentiable jusqu'à un ordre suffisant et que $f^{(k)}(a) < \infty$, $k=0, 1, \dots, m$.

D'autre part, la somme représentée dans le second membre de la formule (II, 14), est difficile à manipuler ce qui explique le travail de Letnikov [Let72], introduisant une nouvelle définition de la dérivation non entière qui peut être écrite comme suit :

$${}^L D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad (\text{II. 15})$$

($n-1 < \alpha < n$)

La définition (II, 15) n'est qu'une généralisation naturelle de la partie droite de la relation (II,14), en supposant que $f(t)$ a nécessairement un nombre continu de dérivation ayant une valeur fini a $t = a$. Dans l'intégration par partie de (II, 15) on obtient la partie droite de la formule (II, 14), ce qui montre l'équivalence entre la définition de Grünwald_Letnikov (II, 10) et la deuxième définition de Letnikov (II, 14). La fonction d'Euler Γ qui est :

$$\Gamma(t) = \int_0^t [e^{-u} u^{t-1}] du, \quad t > 0 \quad (\text{II, 16})$$

où cette fonction vérifie la relation fondamentale :

$\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)$. A titre d'exemple avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$, pour tout entier positif.

Lorsque t tend vers 0, $\Gamma(t)$ tend vers l'infini. La définition de cette fonction peut être étendue aux valeurs négatives de t par conservation de la relation précédente.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons commencé par une présentation de la dérivation d'ordre entière mettant en évidence son inaptitude à décrire les phénomènes relevant de la physique des milieux complexes. D'où l'utilisation de la dérivation d'ordre non entière que nous avons en suite introduit. Les différentes définitions de Grünwald_Letnikov et de Mainardi et Caputo régissent les équations différentielles non entier ont été présentées. Vu leur résolution qui est souvent très complexe, l'utilisation de ces outils et leurs avantages en commande automatique passe par les différentes approches que nous allons présentées dans le chapitre qui suit.

CHAPITRE

3

APPROXIMATION DE L'OPÉRATEUR D'ORDRE NON ENTIER

*« Un problème sans solution est un
problème mal posé »*

Albert Einstein

Chapitre III

Approximation de l'opérateur D'ordre non entier

1. Introduction

Récemment des travaux de recherche ont été effectués en vue d'obtenir un modèle d'approximation d'ordre entier pour les systèmes d'ordre non entier. La plupart des ces travaux ont été réalisés dans le domaine de l'électrochimie où le problème était de construire un schéma électrique représentant le processus de diffusion. D'autres auteurs ont utilisé le modèle d'ordre non entier afin de modéliser les systèmes physiques qui présentent une forte viscoélasticité.

L'application des modèles d'ordre non entier dans la commande est relativement récente comparée aux application citées plus haut. Ce n'est que dans ces deux dernières décennies que des modèles d'ordre non entier sont étudiés et utilisés [Dor94],[Pet99],[Pod99]. Dans tous ces travaux le point important est l'approximation du circuit de commande d'ordre non entier, par un circuit de commande d'ordre entier équivalent, pratiquement réalisable.

Pour $0 < \alpha < 1$, et une fonction causale $f(t)$, telle que $f(t) = 0$ pour $t < 0$, la définition de la dérivation /intégration d'ordre non entier de Riemann-Liouville [Pod99], [Vin00] est :

intégrale d'ordre non entier :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{III.1}$$

dérivation d'ordre non entier :

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \tag{III.2}$$

L'intérêt particulier de ce chapitre est l'expression de l'opérateur de Laplace pour l'intégration d'ordre non entier qui est :

$$L\{I^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \tag{III.3}$$

et pour la dérivation d'ordre non entier avec $0 < \alpha < 1$

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - [D^{\alpha-1} f(t)]_{t=0} \tag{III.4}$$

Le système de commande d'ordre non entier peut être décrit par l'équation différentielle d'ordre non entier suivante :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \tag{III.5}$$

ou par fonction de transfert continue sous la forme :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \tag{III.6}$$

L'obtention du modèle discret des systèmes d'ordre non entier, nécessite l'utilisation d'une approximation discrète de l'intégration / dérivation non entier. L'expression générale de la fonction de transfert discrète du système d'ordre non entier $G(z)$, peut être alors obtenue sous la forme :

$$G(z) = \frac{b_m (w(z^{-1}))^{\beta_m} + b_{m-1} (w(z^{-1}))^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 (w(z^{-1}))^{\beta_0}}{a_n (w(z^{-1}))^{\alpha_n} + a_{n-1} (w(z^{-1}))^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 (w(z^{-1}))^{\alpha_0}} \tag{III.7}$$

avec $(w(z^{-1}))$ est une fonction de la variable complexe (z) .

Nous allons exposer quelques techniques d'approximation dans les domaines continu et discret.

2. Modèle continu d'ordre entier pour système d'ordre non entier

L'obtention d'un modèle pour des systèmes d'ordre non entier est vue comme un problème d'approximation rationnelle pour une fonction irrationnelle. Dans la théorie de la commande un intérêt particulier est accordé à deux méthodes. La méthode de développement en fraction continue (CFE), et la méthode d'approximation rationnelle utilisée dans l'interpolation des fonctions. On abordera aussi des méthodes d'approximation rationnelle des réponses fréquentielles irrationnelles caractérisant les systèmes d'ordre non entier basées sur l'identification fréquentielle.

2.1. Approximation par développement en fraction continue et interpolation

Il est bien connu que le développement en fraction continue (CFE), est une méthode d'approximation des fonctions. L'approximation de la fonction irrationnelle $G(s)$ est exprimée par

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &\cong a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} \\ &= a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s)} \frac{b_2(s)}{a_2(s)} \frac{b_3(s)}{a_3(s)} \dots \end{aligned} \tag{III.8}$$

avec $a_i(s)$ et $b_i(s)$ fonctions rationnelles de la variable complexe s .

L'application de cette méthode nous permet de trouver la fonction $\tilde{G}(s)$ qui est une représentation rationnelle de la fonction irrationnelle $G(s)$. D'autre part la technique d'interpolation proposée pour les systèmes irrationnels donne des polynômes d'ordre supérieur. Cette technique est basée sur l'approximation d'une fonction irrationnelle $G(s)$ par une fonction rationnelle définie par le quotient de deux polynômes d'une variable complexe s :

$$\tilde{G}(s) = \frac{P_\mu(s)}{Q_\nu(s)} = \frac{P_0 + P_1s + \dots + P_\mu s}{q_0 + q_1s + \dots + q_\nu s} \tag{III.9}$$

passant par les points $(s_i, G(s_i)) ; \dots ; (s_{i+m}, G(s_{i+m}))$.

L'approximation rationnelle de la fonction $G(s) = s^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, (l'opérateur d'intégration non entier dans le domaine de Laplace), peut être obtenue par la technique de développement en fraction rationnelle telle que [Vin00],:

$$\begin{aligned} G_h(s) &= \frac{1}{(1+Ts)^\alpha} \\ G_l(s) &= \left(1 + \frac{1}{s}\right)^\alpha \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Où $G_h(s)$ représente l'approximation pour les hautes fréquences ($\omega T \gg 1$), et $G_l(s)$ l'approximation pour les basses fréquences ($\omega T \ll 1$).

2.2. Approximation par technique d'identification

L'application d'une méthode d'identification dans le domaine fréquentiel vise à obtenir une fonction rationnelle qui présente les mêmes réponses fréquentielles que celles de fonction de transfert irrationnelle, et cela par minimisation d'un critère qui est par exemple l'intégrale de l'erreur quadratique:

$$J = \int W(\omega) |G(\omega) - \tilde{G}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{III.11})$$

ou $W(\omega)$ est une fonction de pondération, $G(s)$ est la réponse fréquentielle originelle et $\tilde{G}(\omega)$ est son approximation.

2.2.1. Méthode d'Oustaloup

Cette méthode est basée sur les travaux de recherche [Ous90], [Ous91], [Ous98] qui ont démontré que l'amortissement de la relaxation de l'eau sur une digue poreuse est indépendant de la masse d'eau en mouvement.

Cette démarche a abouti à l'élaboration de l'outil mathématique décrivant ce phénomène et a permis d'en tirer des idées pour la conception d'une nouvelle stratégie de commande. D'où la concrétisation de Commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE). Le Modèle dynamique est développé [Ous83], au voisinage des fréquences transitionnelles ω_i et ω_{i+1} des cellules de rangs i et $i+1$. La figure (III.2), montre que les diagrammes asymptotiques de cette admittance.

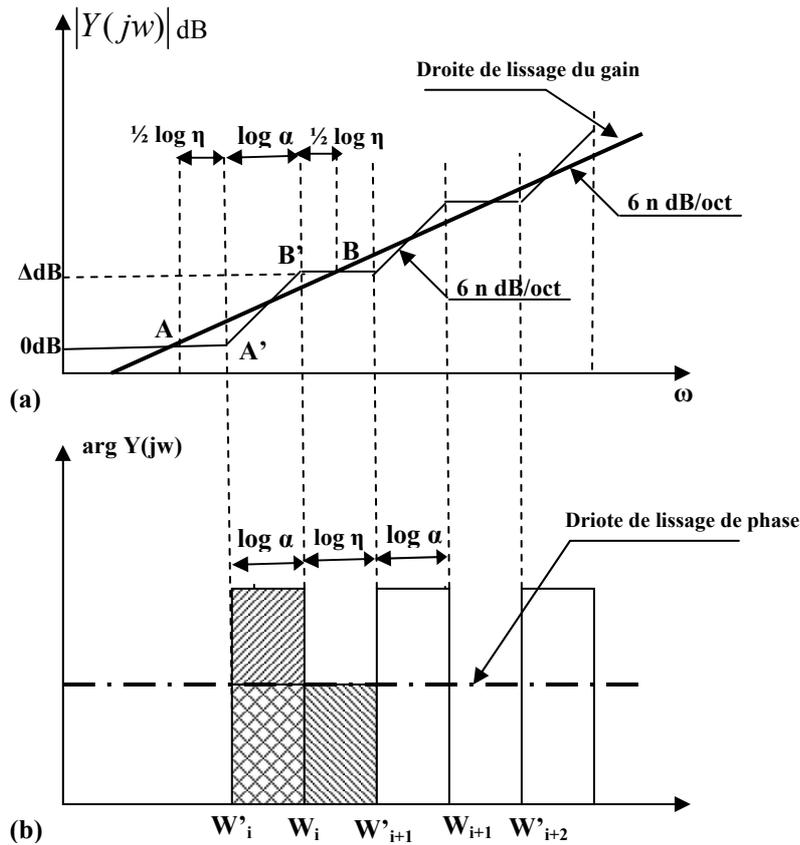


Figure.(III.2) Diagramme asymptotique d'admittance

Le lissage des « marches d'escalier » qui constituent le diagramme asymptotique du module peut être matérialisé par une droite, appelée **droit de lissage de gain**, de pente inférieure à $6n \text{ dB/oct}$, n étant compris entre 0 et 1. Les pentes des segments AB et A'B' (figure III.2a) sont respectivement données par les équations :

$$6n \text{ dB/oct} = \frac{\Delta \text{dB}}{\log \alpha + \log \eta} \tag{III.12}$$

et

$$6n \text{ dB/oct} = \frac{\Delta \text{dB}}{\log \alpha} \tag{III.13}$$

desquelles on tire, en effectuant le rapport, l'expression de l'ordre non entier n en fonction des facteurs récurrents α et η :

$$n = \frac{1}{1 + \frac{\log \eta}{\log \alpha}} \tag{III.14}$$

Le lissage des créneaux qui constituent le diagramme asymptotique de l'argument peut être matérialisé par une droite, **appelée droite de lissage de phase**, d'ordonnée inférieure à $\pi/2$, soit $n \pi/2$, n étant compris entre 0 et 1, égale à la moyenne de la variation asymptotique de l'argument.

L'identité des surfaces hachurées (figure III.2b) se traduit par l'équation :

$$n \frac{\pi}{2} (\log \alpha + \log \eta) = \frac{\pi}{2} \log \alpha \tag{III.15}$$

dont se déduit immédiatement n , soit :

$$n = \frac{1}{1 + \frac{\log \eta}{\log \alpha}} \tag{III.16}$$

Cette expression est bien identique à celle déterminée à partir du module, ω_0 désignant la fréquence de transition, c'est-à-dire la fréquence à laquelle la droite de lissage de gain coupe l'axe 0 dB.

Dans cette méthode la fonction $h(s) = s^\mu, \mu \in \mathbf{R}^+$ est approximée par une fonction

rationnelle : $\tilde{H}(s) = C \prod_{k=-n}^n \frac{1 + \frac{s}{w_k}}{1 + \frac{s}{w'_k}}$ qui est basée sur le calcul des formules suivantes [Ous91]:

$$w'_0 = \alpha^{-0.b} w_n, \quad w_0 = \alpha^{-0.b} w_u, \quad \frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \frac{w_{k+1}}{w_k} = \alpha_n > 1$$

$$\frac{w'_{k+1}}{w'_k} = n > 0, \quad \frac{w_k}{w'_k} = \alpha > 0, \quad N = \frac{\text{Log}(w_N/w_0)}{\text{Log}(\alpha_n)}, \quad \mu = \frac{\text{Log} \alpha}{\text{Log}(\alpha_n)}$$

Avec w_n étant la fréquence au gain unité et les fréquences géométriquement distribuées autour de cette dernière, $w_a = \sqrt{w_h w_b}$ tel que w_h, w_b sont respectivement les hautes et basses fréquences transitionnelles.

2.2.2 Méthode de Chaeff's

Cette méthode est très proche de la méthode d'Oustaloup. Elle est basée sur l'approximation d'une fonction de la forme :

$$H(s) = \frac{1}{(1 + s/P_r)^\alpha} \quad (\text{III.17})$$

par un quotient polynomial en s suivant :

$$\hat{H}(s) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (1 + s/Z_i)}{\prod_{i=0}^n (1 + s/P_i)} \quad (\text{III.18})$$

Les pôles et les zéros de cette approximation sont obtenu en appliquent les relations

$$P_0 = P_T \sqrt{b}, \quad P_i = P_0 (ab)^i, \quad Z_i = aP_0 (ab)^i.$$

3. Approximation par modèle discret.

La discrétisation de la dérivée d'ordre non entier $s^{\pm\alpha}$, ($\alpha \in \mathbf{R}$), par une représentation en fonction de génération $s = w(z^{-1})$ [Dor94], [Vin01], [Che03], permet de déterminer à la fois l'approximation et les coefficients représentant cette discrétisation. L'utilisation de la loi trapézoïdale ou opérateur de Tustin comme fonction de génération aboutit à la formule :

$$(w(z^{-1}))^{\pm r} = \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^{\pm r} \quad (\text{III.19})$$

La fonction de transfert résultante, d'approximation de l'opérateur d'ordre non entier est :

$$\begin{aligned} D^{\pm r}(z) &= \frac{Y(z)}{F(z)} = \left(\frac{2}{T} \right)^{\pm r} CFE \left\{ \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^{\pm r} \right\}_{p,q} \\ &= \left(\frac{2}{T} \right)^{\pm r} \frac{P_q(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})} \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Où T est la période d'échantillonnage, $CFE\{u\}$ représente la fonction résultante du développement en fraction continue de la fonction $\{u\}$, $Y(z)$ est la transformée en z de la séquence de sortie $y(nT)$, $F(z)$ quant à elle représente la transformée en z de la séquence d'entrée $f(nT)$, p, q , ordres d'approximation et P, Q , sont les polynômes de degré p, q respectivement de la variable z .

3.1. Discrétisation directe par transformation récursive de Tustin

L'intérêt majeur de l'emploi de la transformation de Tustin est de trouver une formule récursive similaire à (II.13), [Lub86][Vin00]. L'utilisation de cette transformation dans la commande, donne une fonction de transfert discrète stable avec un minimum de phase. La forme récursive de r est :

$$(w(z^{-1}))^r = \left(\frac{2}{T} \right)^r \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^r = \left(\frac{2}{T} \right)^r \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(z^{-1}, r)}{A_n(z^{-1}, -r)} \quad (\text{III.21})$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } A_0(z^{-1}, r) &= 1 \\ A_n(z^{-1}, r) &= A_{n-1}(z^{-1}, r) - C_n z^{-n} A_{n-1}(z; r) \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Et

$$C_n = \begin{cases} \frac{r}{n}, & n \text{ est impair} \\ 0, & n \text{ est pair} \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Ces approximations seront utilisées pour calculer la sortie d'un correcteur d'ordre non entier utilisé dans commande des systèmes.

4. Exemple d'utilisation d'un correcteur d'ordre non entier

Considérons le système commandé en boucle fermée à retour unitaire comme montré en figure (III.3). $G(s)$ représente la fonction de transfert du système à commander qui est un système d'ordre entier, et $G_r(s)$ est la fonction de transfert du correcteur, qui peut être de type entier $G_r^i(s)$ ou non entier $G_r^f(s)$.

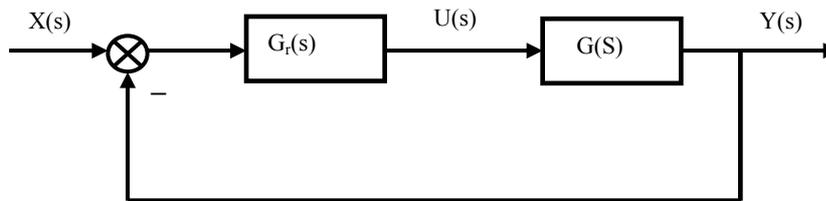


Figure.(III,3).schéma de commande retour unitaire

Le procédé d'étude est défini par la transmittance [Ous98][Ous90]:

$$G(s) = K \frac{\left(1 + \frac{s}{w_{l'1}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{w_l}\right) \left(1 + 2\zeta \frac{s}{w_n} + \frac{s^2}{w_n^2}\right)} \quad (\text{III,24})$$

Le comportement nominal du procédé est défini par :

$$K_{nom} = 50 ; w_{l'nom} = 0.01 ; w_{lnom} = 0.02 ; w_{nnom} = 1 ;$$

Les paramètres $k, w_n, w_{l'}, w_l$ sont incertains et évoluent dans les intervalles:

$$\begin{aligned} K_{nom}/2 \leq K \leq 2K_{nom} \quad , \quad w_{nnom}/1.5 \leq w_n \leq 1.5w_{nnom} \quad , \\ w'_{lnom}/2 \leq w_l \leq 2w'_{lnom} \quad , \quad w_{lnom}/2 \leq w_l \leq 2w_{lnom} \end{aligned} \quad (\text{III.24.a})$$

La figure (III, 4) illustre, dans le domaine tempore, la réponse indicielle du système pour l'état paramétrique nominal et les états paramétriques extrémaux du procédé :

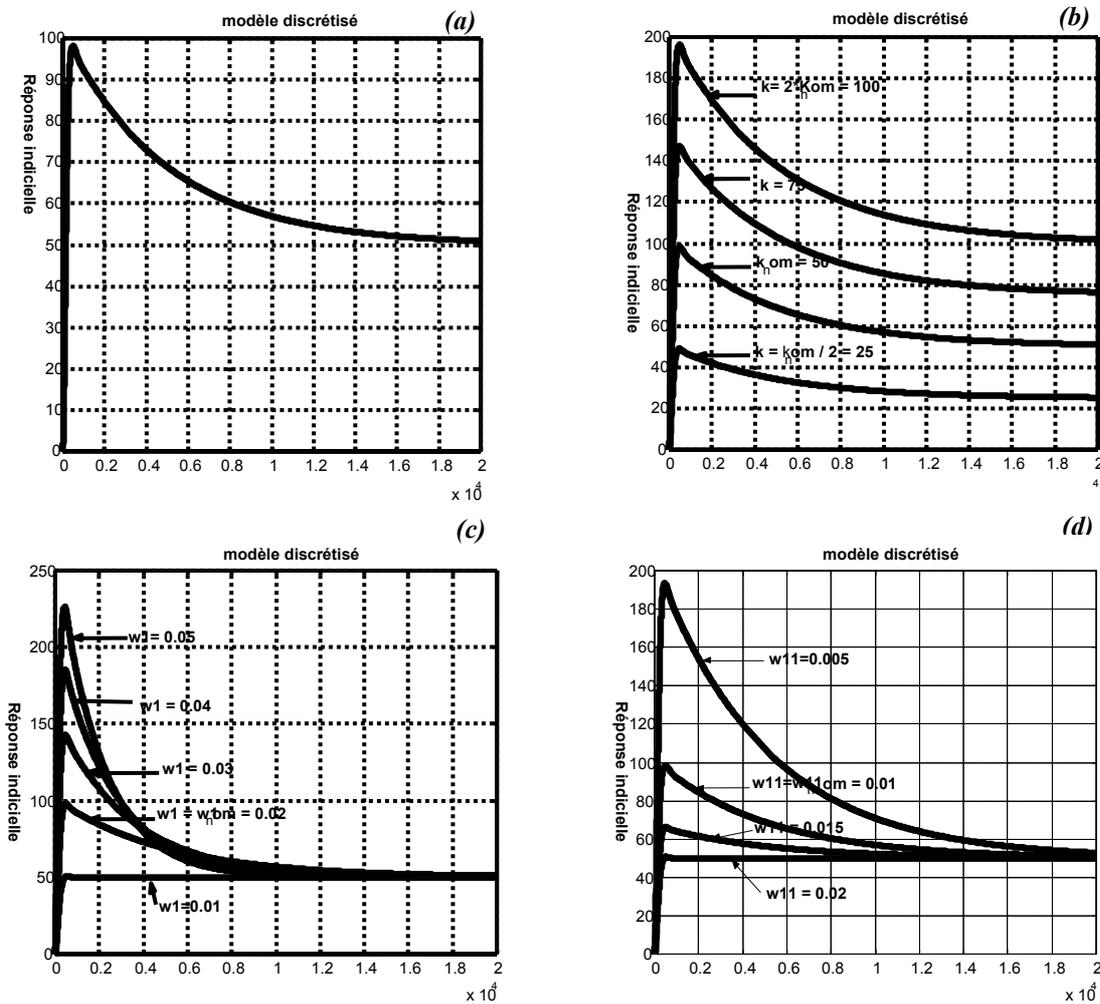


Figure.(III.4) réponses indicielles correspondent à l'état paramétrique nominal et aux états extrémaux $k, w1, w1'$ du procédé (a,b,c,d)

Pour appliquer la méthode de discrétisation il faut choisir le nombre de pôles et de zéros, appelé ordre de l'approche, pour la forme discrète d'ordre entier équivalente. En absence de méthode pour déterminer ce nombre, nous avons effectué des simulations pour des nombres allant de 3 à 11. Nous avons observé, en simulant dans chaque cas la réponse indicielle du système en boucle fermée, que pour un nombre inférieur à 7 les performances ne sont pas satisfaisantes et au delà de 8 il n'y a pas d'amélioration des performances. Nous avons donc choisi d'utiliser un degré d'approche égal à 7. La forme discrète d'ordre entier équivalente pour $G_f^d(s) = A_R S^{0.5}$ avec une période d'échantillonnage $T = 0.01 S$ et $A_R = 1$, donne le transfert équivalent suivant :

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0} \quad (\text{III, 25})$$

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	14.14	-7.017	1.515	2.525	-0.8839	-1.515	0.5051	-1.01
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	0.1071	0.1786	0.0625	0.1071	0.0357	0.0714

Il est à noter que la discrétisation directe de Tustin donne une fonction de transfert en (z) à phase minimale. La figure (III.5.a) montre les réponses indicielles de la commande par correcteur d'ordre non entier pour les états paramétriques nominal et extrémaux du procédé.

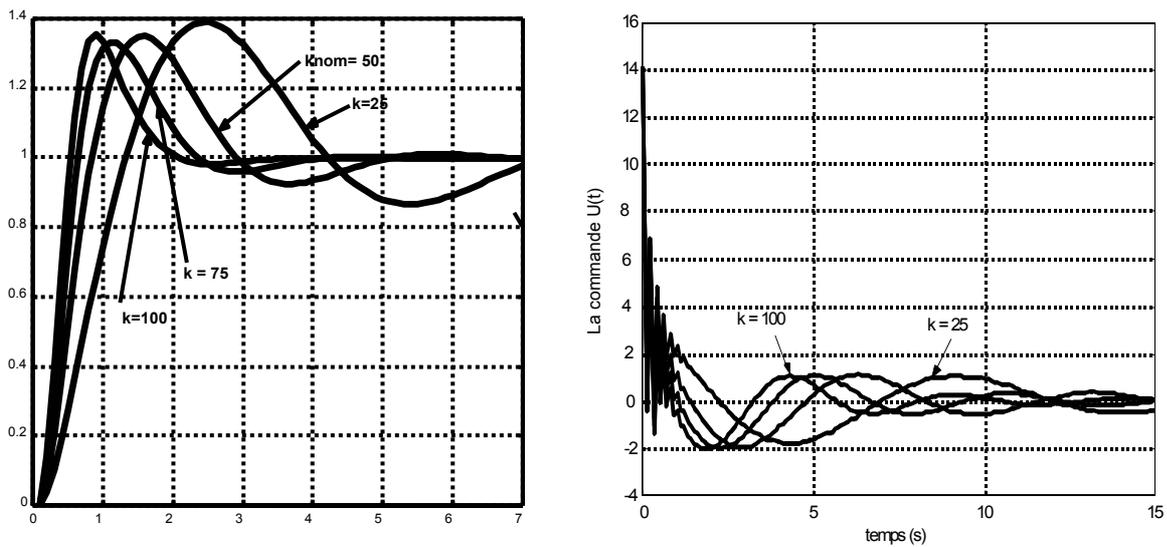


Figure.(III.5.a) Réponses indicielles et commandes correspondant aux états paramétriques nominal et extrémaux de k , du procédé commandé par du correcteur d'ordre non entier.

On observe dans les résultats de simulation de la figure (III.5.a), pour la valeur paramétrique nominale de gain du procédé qui est de $k = 50$ et pour ses valeurs extrémaux $k = 100$ et $k = 25$ que le correcteur d'ordre non entier limite la valeur du dépassement par contre le temps de réponse augmente pour $k < 50$ et diminue pour $k > 50$. Dans tous les cas la valeur du premier dépassement est sensiblement la même.

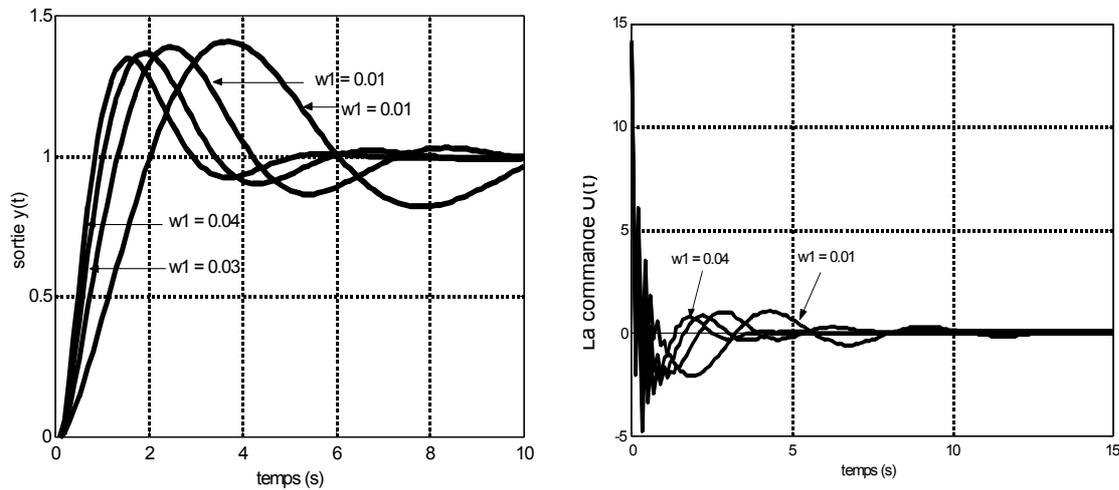


Figure.(III.5.b) Réponses indicielles et commandes correspondant aux états paramétriques nominal et extrémaux de w_1 , du procédé commandé par du correcteur d'ordre non entier.

La figure (III.5.b) représente les résultats de simulation pour des variations du paramètre w_1 du procédé pour la valeur nominal $w_1 = 0.02rad/s$ et pour les valeurs extrémaux $w_1 = 0.04 rad/s$ et $w_1 = 0.01rad/s$, on observe que pour cette plage de variation paramétrique du procédé les dépassements sont limités avec un temps de réponse qui augmente, ce qui rend le procédé plus lent.

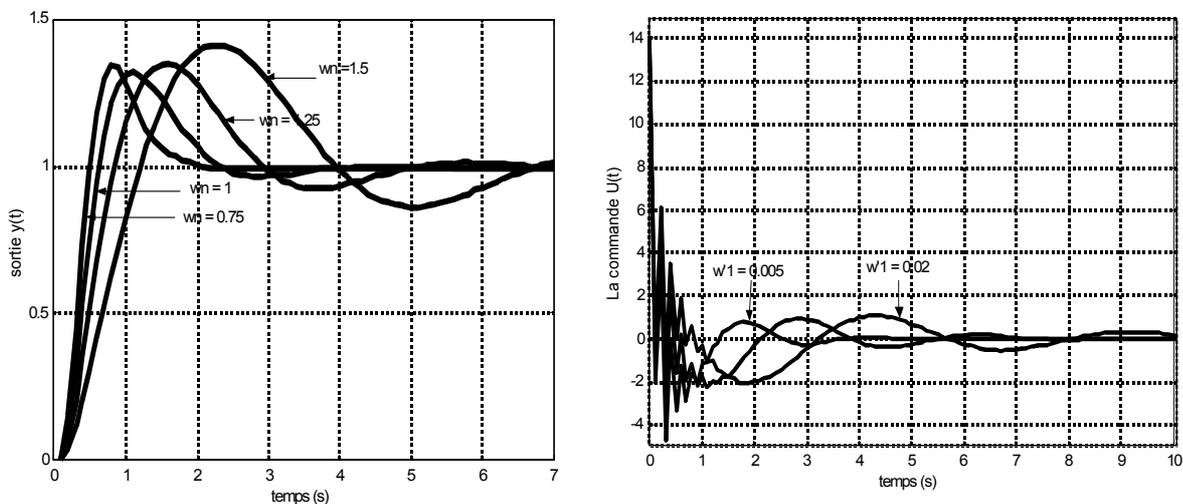


Figure.(III.5.c) Réponses indicielles et commandes correspondant aux états paramétriques nominal et extrémaux de w_n , du procédé commandé par du correcteur d'ordre non entier.

Pour les variations de la fréquence naturelle nominale du procédé $w_n = 1 rad/s$ et pour les valeur extrémaux $w_n = 0.75 rad/s$ et $w_n = 1.5 rad/s$ on observe dans les résultats de simulation de la figure (III.5.c) que le correcteur d'ordre non entier limite les dépassements, par contre le temps de réponse augmente et prend des valeurs importantes pour la valeur

extrémale de la fréquence naturelle $w_n = 1.75\text{rad/s}$. Pour l'étude d'incertitude sur w_l et w_n on observe également que le premier dépassement garde la même valeur.

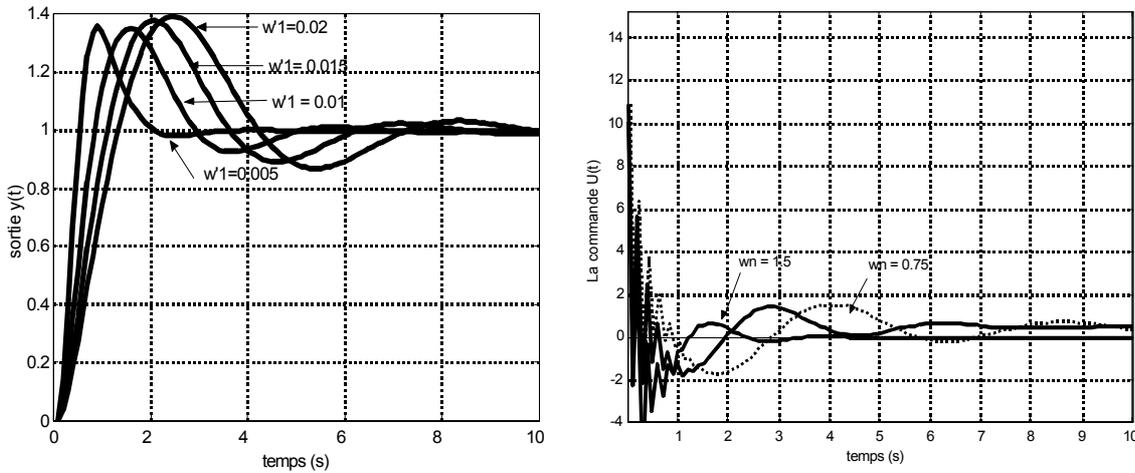


Figure.(III.5.d) Réponses indicielles et commandes correspondant aux états paramétriques nominal et extrémaux de w_1 , du procédé commandé par du correcteur d'ordre non entier.

Les résultats de simulation de la figure (III.5.d), montrent que pour les variations du paramètre w_1 qui caractérise un zéro de la fonction de transfert du procédé, le correcteur limite les valeurs des dépassements à une variation peu importante, par contre le temps de réponse augmente et prend des valeurs importantes pour les valeurs extrémaux du paramètre w_1 .

Le comportement dynamique du procédé commandé par l'équivalent du correcteur d'ordre non entier en fonction du facteur d'amortissement ζ est donné en figure (III.6). Les simulations ont été faites pour une valeur nominale $\zeta_{nom} = 0.8$ et pour des valeurs extrémaux $\zeta = 0.3$ et $\zeta = 1.2$.

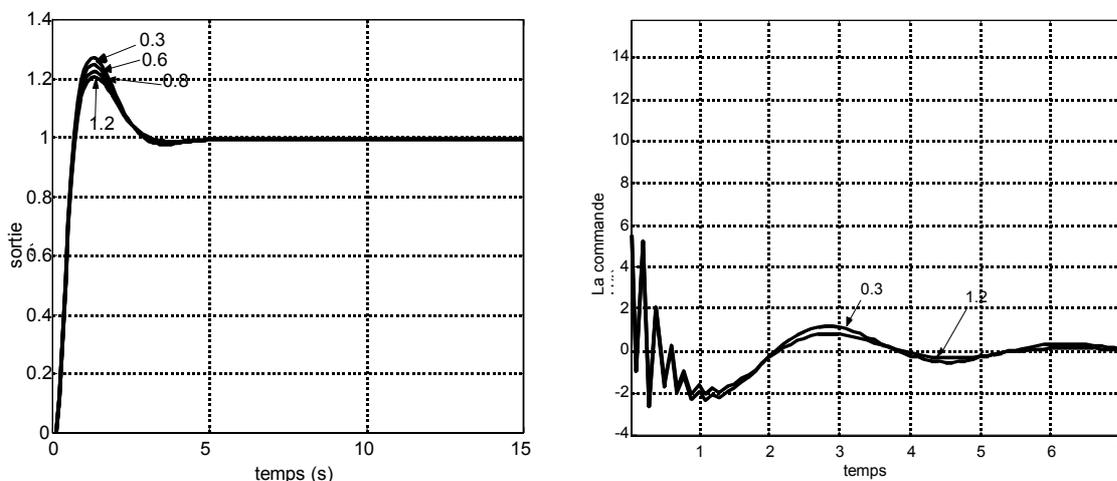


Figure.(III.6) Réponses indicielles et commandes correspondant aux états paramétriques nominal et extrémaux de ζ , du procédé commandé par du correcteur d'ordre non entier.

Les résultats de simulation donnant la réponse indicielle pour un facteur d'amortissement nominal $\zeta = 0.8$ et $\zeta = 1.2$ montrent que le système corrigé est peu sensible aux variations du facteur d'amortissement du procédé.

Les dépassements varient très peu en amplitude et se produisent sensiblement au même instant.

4.1. Influence des différentes valeurs de l'ordre r

Dans ce qui suit nous allons étudier l'effet de la valeur de r du correcteur d'ordre non entier sur la commande du procédé à paramètres incertains [Ous90]. On donne en figures (III.7, a, b) le comportement dynamique de ce système et cela pour différentes valeurs de r .

Les réponses indicielles de la figure (III.7, a) relatives aux variations du paramètre r représentant l'ordre de la dérivation non entier, pour les valeurs respectives (0.5, 0.6, 0.7, 0.8) affectent les propriétés dynamiques du système corrigé et en particulier le dépassement (premier pic). On remarque que pour $r = 0.5$ le dépassement est de 37% ce qui n'est pas acceptable pour les correction ou la précision est imposée, par contre le dépassement diminue pour des valeurs supérieures à $r = 0.5$, avec un dépassement de 6% pour une valeur de $r = 0.8$. Il est à noter que pour $r = 0.8$ la commande générée est une impulsion de départ qui prend des valeurs importants ce qui peut être inacceptable pratiquement.

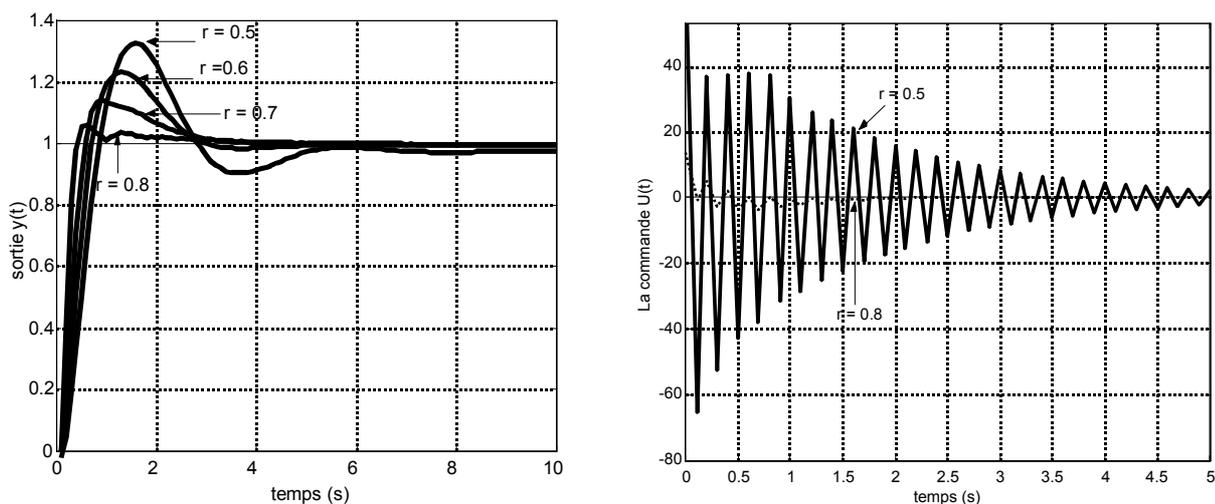


Figure (III, 7.a) Réponse indicielle représentant l'effet de l'ordre de dérivation non entier sur les propriétés dynamique du système corrigé pour des valeurs de $r = 0.5, 0.9, 0.7, 0.8$.

On observe dans les réponses indicielles de la figure (III.7, b) relatives aux variations du paramètre r représentant l'ordre de la dérivation non entier dans l'expression du correcteur, que les valeurs respectives (0.15, 0.25, 0.35, 0.45) affectent sensiblement les propriétés dynamiques du système corrigé. On observe que le système corrigé présente des oscillations lentes et de grande amplitude. Pour $r = 0.15$ le dépassement est de 72% ce qui n'est pas acceptable. La valeur du dépassement diminue lorsque r

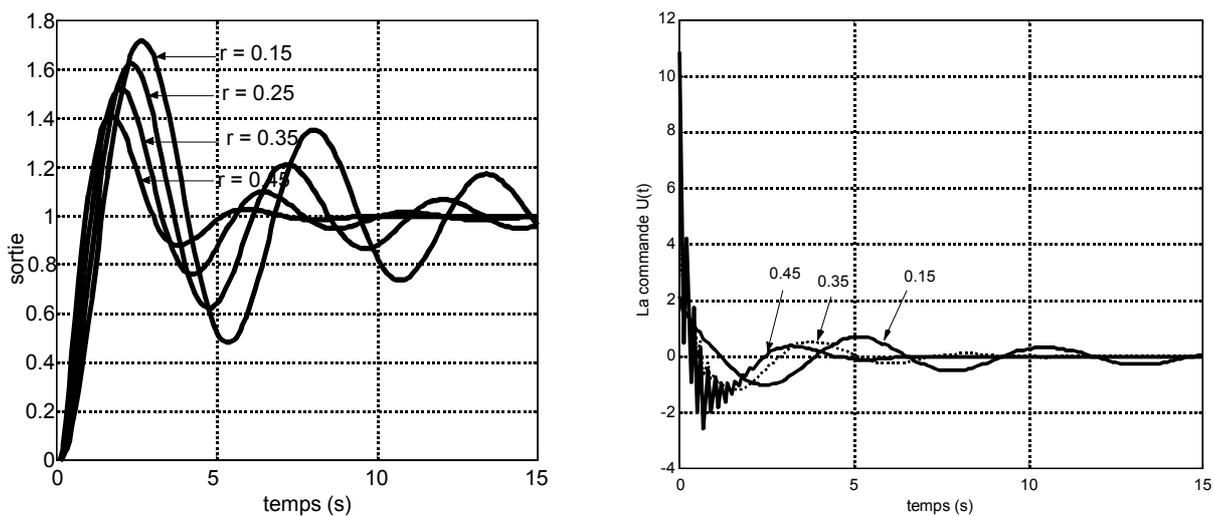


Figure (III, 7.b) Réponse indicielle représentant l'effet de l'ordre de dérivation non entier sur les propriétés dynamique du procédé pour les valeur $r = 0.15, 0.25, 0.35, 0.45$

5. Robustesse de la correction d'ordre non entier

L'idée initiale de la commande non entière résulte de la transposition en automatique de la robustesse non entier dans les gabarits fréquentiels. Dans le domaine de la commande, un objectif est en effet d'obtenir un comportement fréquentiel en boucle ouverte similaire à celui observé pour quelque, système physique [Ous90]. On doit avoir notamment.

- Un lieu de black en boucle ouverte qui dessine une droite verticale (gabarit) pour l'état paramétrique nominal du procédé figure(III.8)
- Un glissement de la droite sur elle-même lors d'une reparamétrisation du procédé (cette condition étant vérifiée lorsque la reparamétrisation conduit à des variations de gain autour de la fréquence de coupure notée w_u .

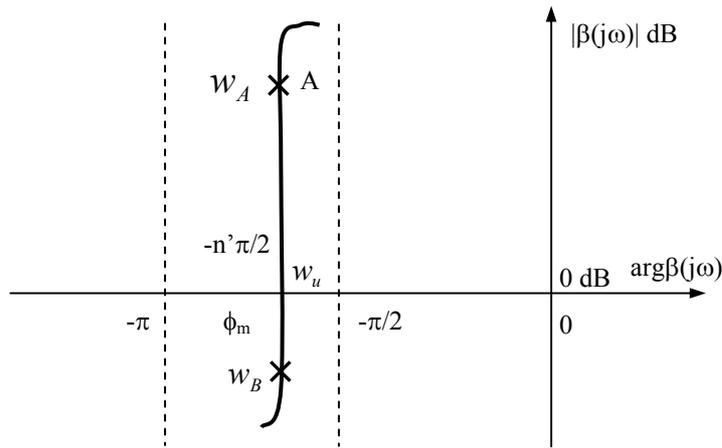


Figure (III,8) Un segment de droite vertical définit le gabarit dans le plan de black

Il est aisé de concevoir que la robustesse est d'autant meilleure que la longueur de la droite verticale **AB** est importante. Le gabarit ainsi défini glisse sur lui même lors des variations paramétriques du procédé. Compte tenu de sa forme, un tel déplacement vertical du gabarit assure la constance de la marge de phase F_m (figure (III.8)) et, par conséquent, celle de la « distance au point critique » (sachant que F_m en donne alors une mesure significative), traduisant ainsi la robustesse de l'amortissement.

Le domaine d'incertitudes du procédé est défini comme le domaine du plan de Nyquist ou de Black, qui regroupe l'ensemble des points images des réponses fréquentielles du procédé obtenues, à une fréquence donnée pour ses différents états paramétriques voir figure (IV, 9).

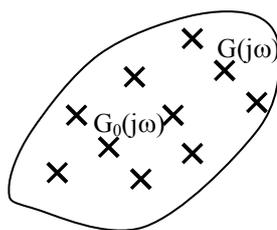
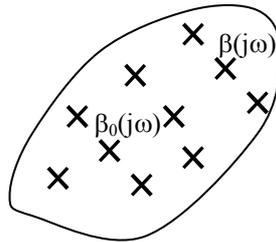


Figure (IV,9) Domaine d'incertitudes du procédé : $G_0(j\omega)$ désigne la réponse en fréquences du procédé nominal ; $G(j\omega) = G_0(j\omega) + \Delta G(j\omega)$ représente la réponse en fréquences du procédé pour un autre état paramétrique

Le domaine d'incertitudes du système en boucle ouverte est défini comme le domaine du plan de Nyquist ou du black, qui regroupe l'ensemble des points images des réponses fréquentielles donnée, pour les différents états paramétriques du procédé figure (III.10).



Figure(III,10) Domaine d'incertitudes en boucle ouverte :

$\beta_0(j\omega) = C(j\omega) G_0(j\omega)$ désigne la réponse en fréquences en boucle ouverte nominale ; $\beta(j\omega) = \beta_0(j\omega) + \Delta\beta(j\omega)$ avec $\Delta\beta(j\omega) = C(j\omega)G(j\omega)$, représente la réponse en fréquences en boucle ouverte correspondant à un état paramétrique non du nominal

Sachant que figure (III.11)

$$\beta(j\omega) = C(j\omega) G(j\omega) \tag{III.26}$$

il est possible d'écrire :

$$|\beta(j\omega)|_{dB} = |G(j\omega)|_{dB} + |C(j\omega)|_{dB} \tag{III.27}$$

et
$$\arg\beta(j\omega) = \arg G(j\omega) + \arg C(j\omega). \tag{III.28}$$

De telles relations expriment que le passage d'un point image de $G(j\omega)$ à un point image de $\beta(j\omega)$ s'effectue, pour chaque point, par les même opération de transition $|C(j\omega)|_{dB}$ et $\arg C(j\omega)$, le régulateur $C(j\omega)$ apportant le même gain et la même phase à une même fréquence ω donnée.

C'est dire que les domaines d'incertitudes de la boucle ouverte sont identiques à ceux du procédé si ce n'est que leur position est différente. Leurs positionnement relatif est en effet conforme à la relation de correspondance $\beta_0(j\omega) = C(j\omega) G_0(j\omega)$.

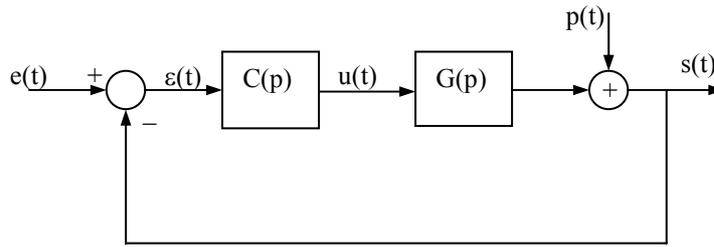


Figure (III.11). Boucle de commande élémentaire

Afin de juger la robustesse du correcteur d'ordre non entier, on se propose de soumettre le système (III.24) à des incertitudes paramétriques maximale et minimale dans les intervalles de variation (III.24.a). On observe en figures (III.12) que le correcteur d'ordre non entier compense bien les variations paramétriques du système par rapport à l'amplitude des dépassements.

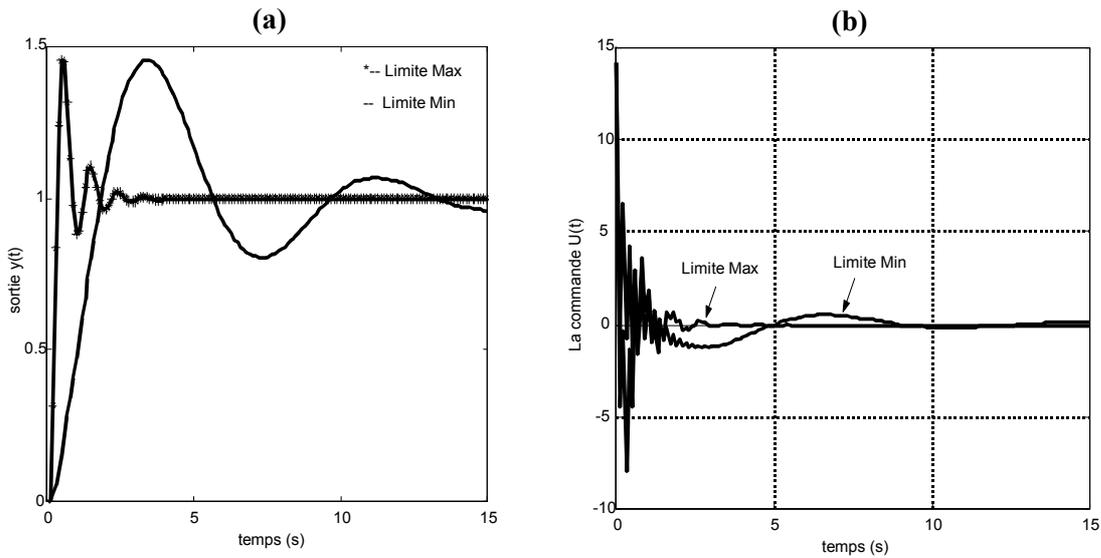


Figure (III.12) Réponses indicielles du système corrigé pour les états paramétriques extrémaux du procédé (a), et les commandes

6. Influence du degré d'approche du correcteur

Dans cette section nous allons nous intéresser à l'effet du degré d'équivalence de l'opérateur non entier. Les figures (III.13, a, b), (III.14) présentent respectivement les réponses indicielles et les tracés fréquentiels de Bode du procédé pour les approches (3, 5, 7, 9, 11).

(a)

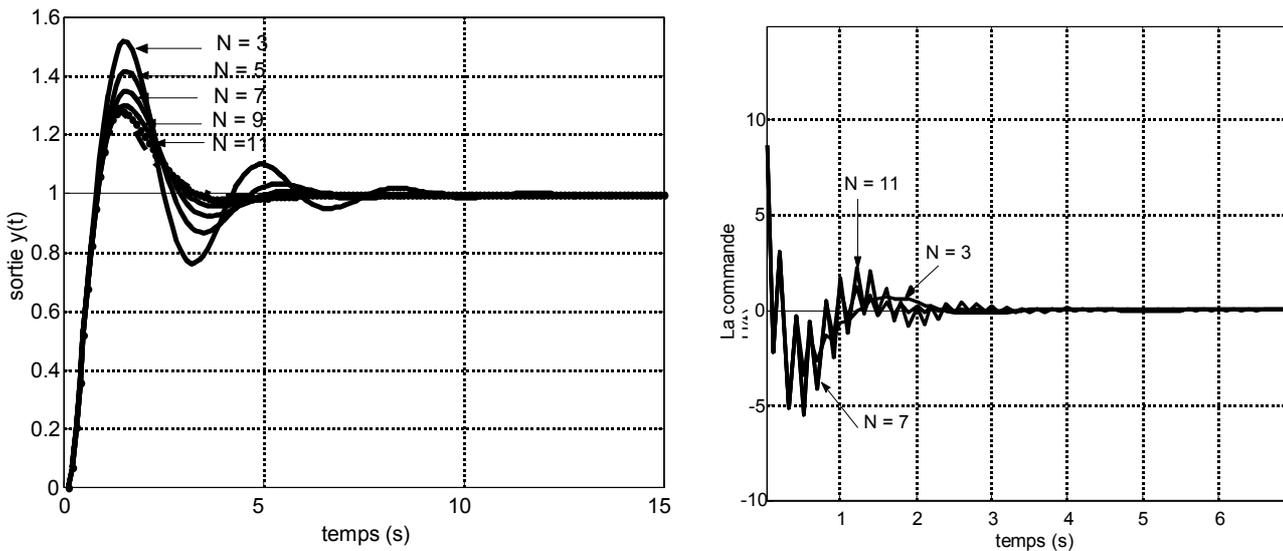


Fig. (III.13.a) Réponses indicielles pour différent ordre d'équivalence N correspondant à l'état paramétrique nominale du procédé

La figure (III.13, a) représente les réponses indicielles relatives aux valeurs de l'ordre d'approche N du correcteur non entier allant de 3 à 11. On remarque que la valeur de degré d'approche N choisi affecte les propriétés dynamiques de la correction, avec des valeurs de dépassement (premier pic) plus importantes pour un degré d'approche faible. On observe que pour $N = 3$ le dépassement est de 52% ce qui n'est pas acceptable pour les corrections où la précision est imposée. Le dépassement diminue pour le degré d'approche $N = 11$, avec une valeur de 30%. Il est donc important de bien choisir l'ordre d'approche lors de la synthèse de l'équivalent du correcteur d'ordre non entier.

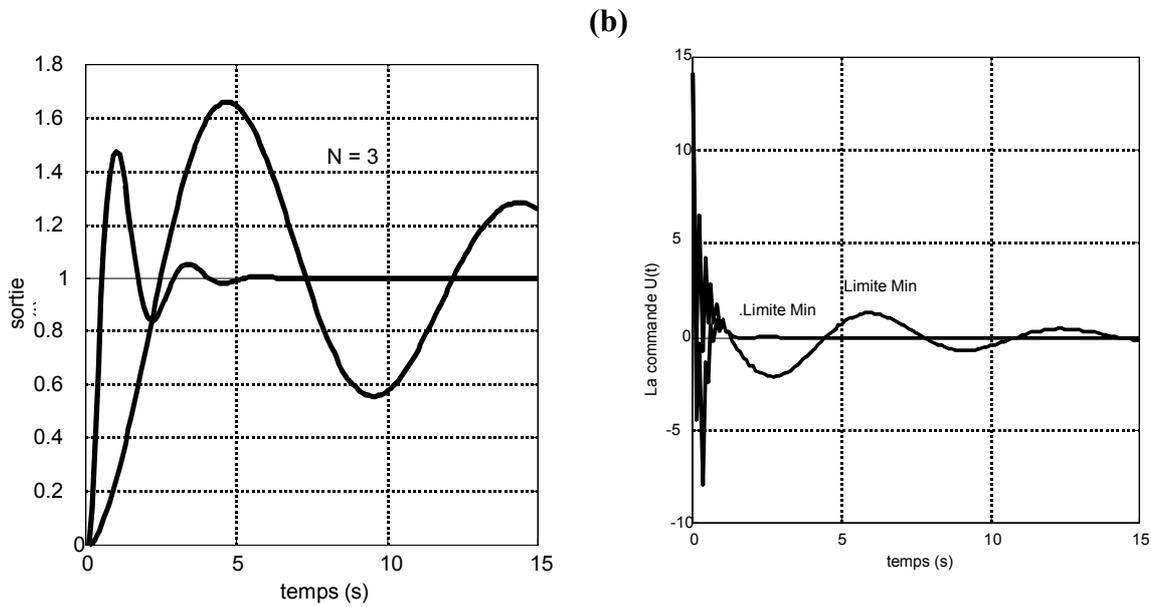


Figure. (III.13.b) Réponses indicielles correspondant aux états paramétriques extrémaux du procédé avec $N=3$

La figure (III.13.b) représente les résultats de simulation pour une correction de degré d'approche $N = 3$, pour les états paramétriques extrémaux du procédé. On observe que les dépassements prennent des valeurs importantes et significativement différentes, avec une augmentation du temps de réponse.

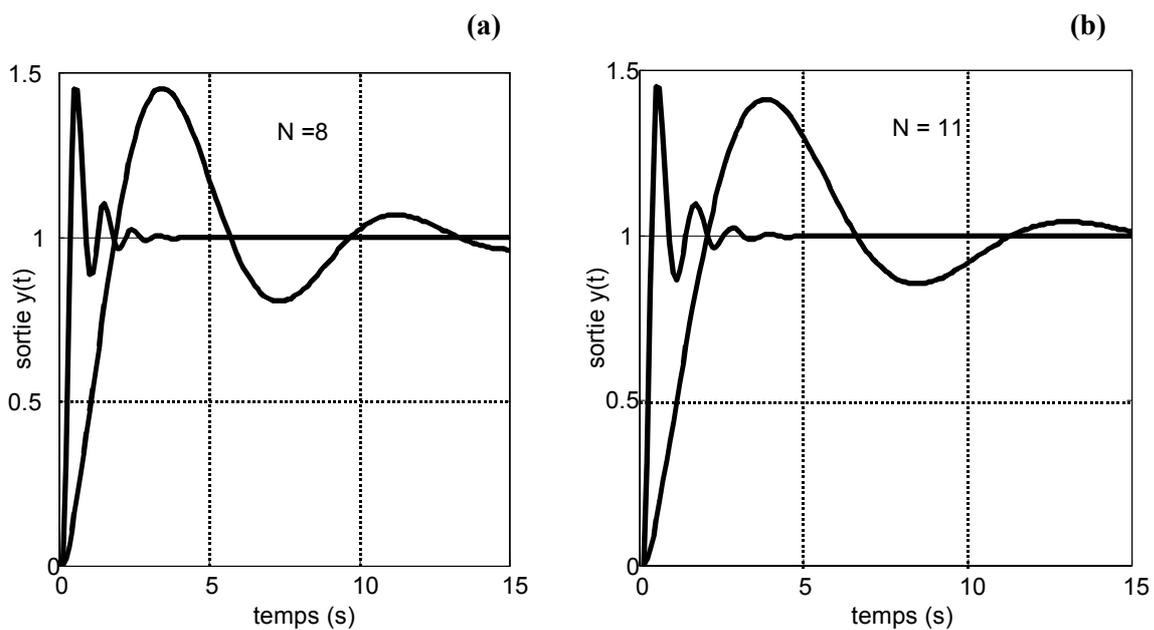


Fig. (III.13.c) Réponses indicielles correspondant aux états paramétriques extrémaux du procédé avec $N=8$ (a) et $N=11$ (b)

La figure (III.13.c) représente les résultats de simulation pour une correction avec degrés d'approche $N = 8$ et $N=11$ pour les états paramétriques extrémaux du procédé. On observe que les dépassements sont limités à une valeur presque identique, avec une augmentation du temps de réponse.

On donne en figure (III.14) les diagrammes de Bode aux degrés d'approche $N = 1, 3, 7, 9$. On observe que lorsque le degré d'approche devient important la phase présente une valeur presque constante sur un intervalle de fréquence qui s'élargit avec N . L'augmentation conserve une pente presque constante.

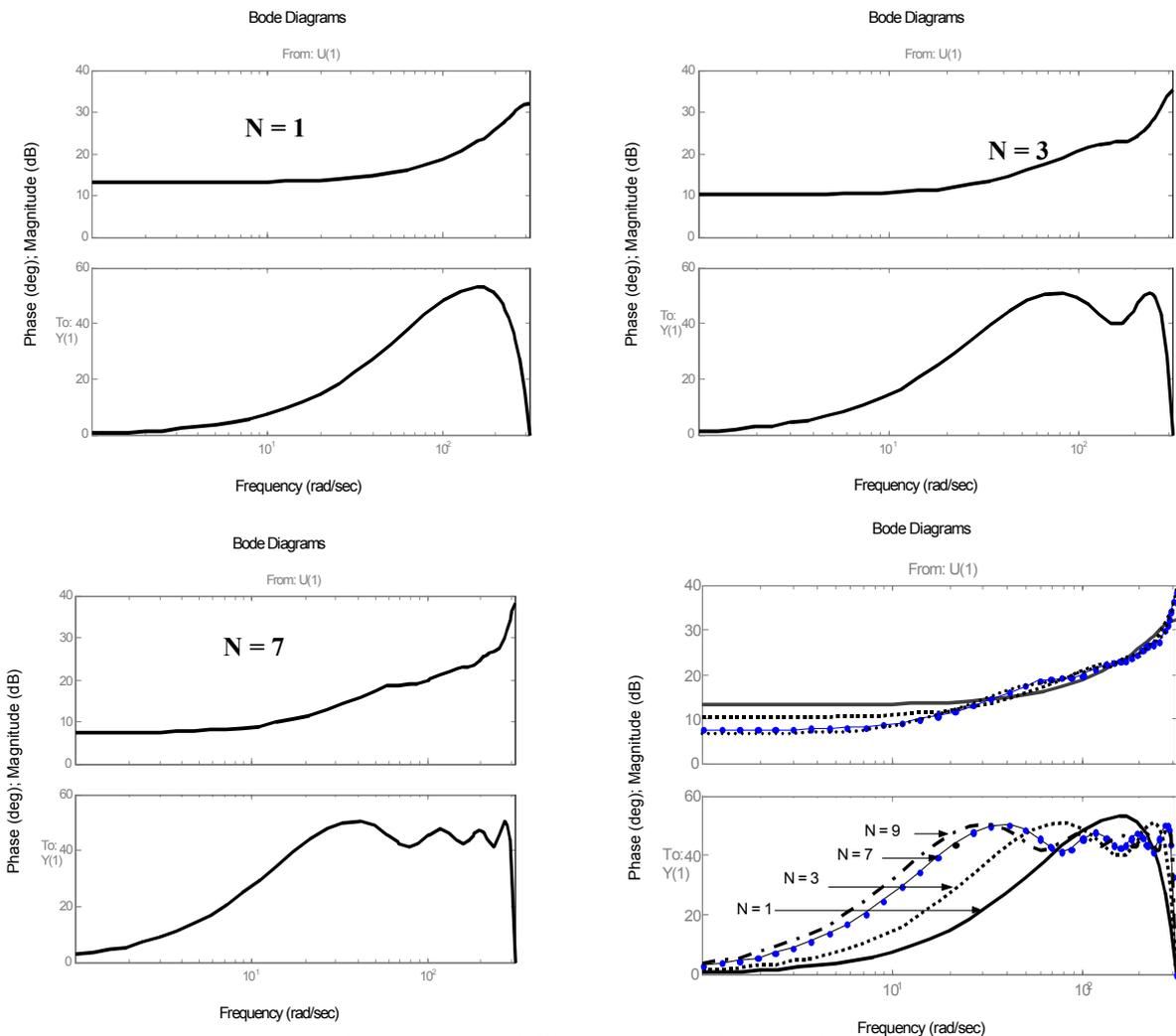


Fig. (III.14) Tracés de Bode pour différents ordres d'approche N du correcteur non entier

On conclut que plus l'ordre d'approche N du correcteur d'ordre non entier est élevée plus les amplitudes des premières dépassement sont limités. De plus ils présentent une phase presque constante.

On constate de plus que au de là de $N=7$ on se heurt à une dégradation des performances du système corrigé.

7. Influence des paramètres du correcteur sur les réponses temporelles

Dans la section précédente nous avons montré l'apport du correcteur non entier lors des variation paramétriques du système corrigé, il serait très intéressant de montrer l'effet des variations paramétriques du correcteur non entier sur le procédé nominal. On note $P_{c_{nom}}$ les paramètres nominaux du correcteur. La figure (III.15) représente les réponses indicielles du système corrigé pour des valeurs de paramètres comprises entre $P_{c_{nom}}/2 \leq P_{c_{nom}} \leq 2.P_{c_{nom}}$.

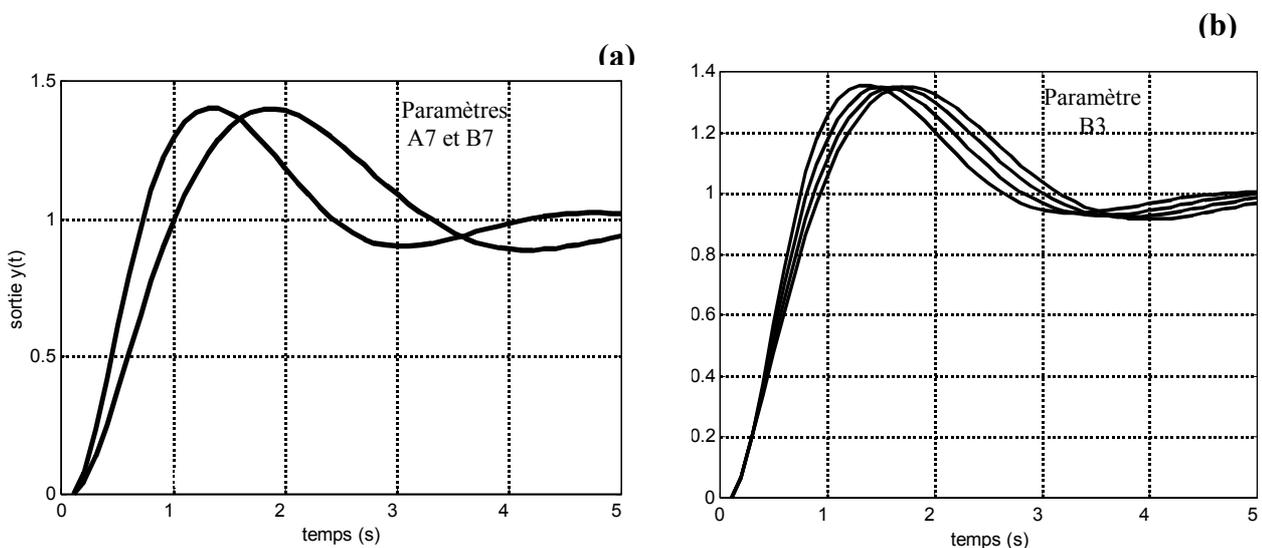


Figure (III.15) Réponses indicielles pour les valeurs nominale et extrémales des paramètres $A7$, $B7$ (a) et du paramètre $B3$ (b) du correcteur d'ordre non entier.

Les réponses indicielles représentées en figure (III.5.a) correspondent à des variations sur les paramètres $A7$ et $B7$, et celles représentées en figure (III.5.b) correspondent à des variations sur le paramètre $B3$. on observe que ces réponses indicielles exhibent des premiers dépassement qui ont pratiquement la même valeur.

Cette propriété montre que le correcteur non entier est en mesure de produire une correction telle que une contrainte fonctionnelle comme celles formulées aux chapitre précédent est naturellement satisfaite.

Il suffirait alors de simplement régler l'amplitude de ce dépassement par d'autres paramètres A_i et B_i .

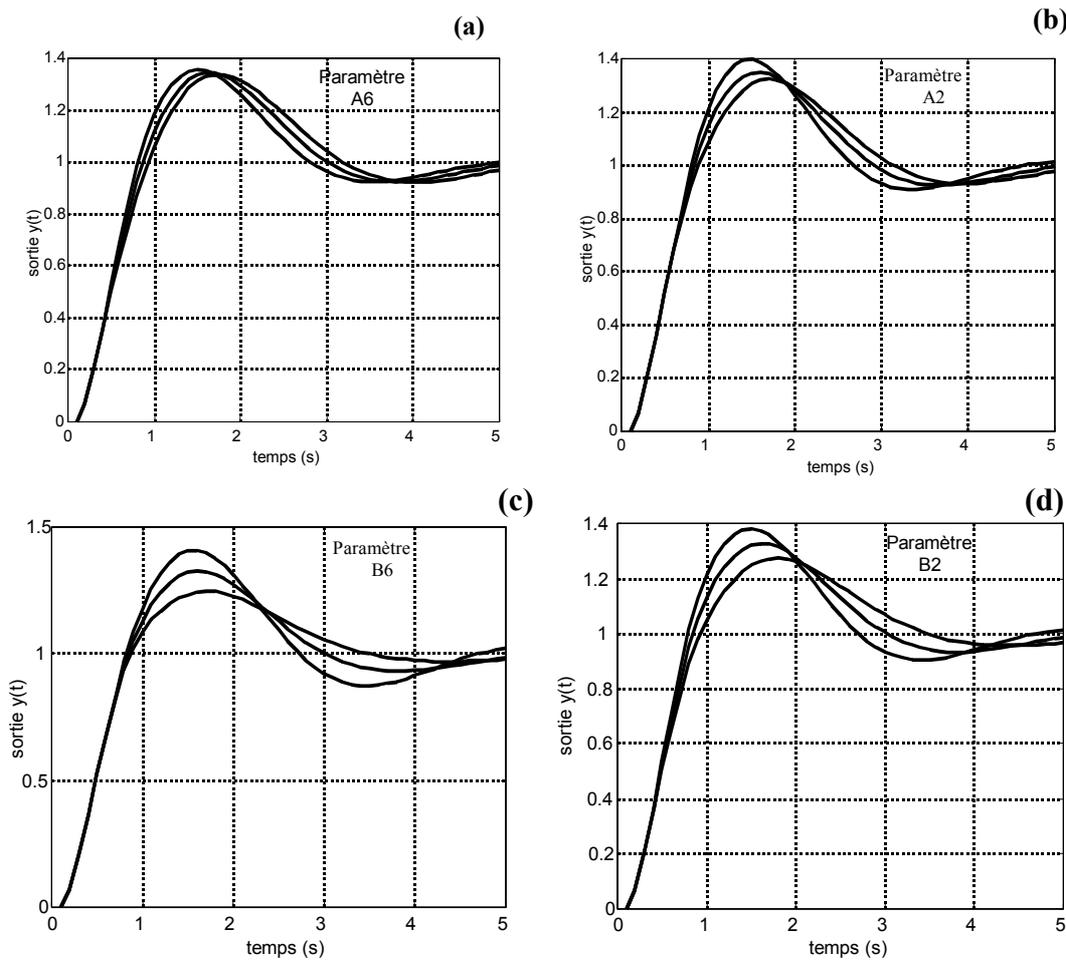


Figure.(III.16) Réponses indicielles en correction correspondant à l'états paramétriques nominaux et extrémaux des paramètres $A6(a)$, $A2(b)$, $B6(c)$ et $B2(d)$ du correcteur non entier.

La figure (III.16) représente les réponses indicielles du système corrigé pour les valeurs nominales et extrémaux des paramètres $A2$, $B2$, $A6$ et $B6$ du correcteur. On constate que la valeurs du premier dépassement est significativement affectée par ces variations.

Ainsi parmi les paramètres de la forme équivalente du correcteur d'ordre non entier certains produisent des réponses indicielles avec des premiers dépassement pratiquement identiques, est pour d'autre cette propriété n'est pas vérifiée. Cela nous permettra d'utiliser, dans la synthèse du correcteur, les premiers paramètres dans le problème d'optimisation, afin d'éliminer certains contraintes fonctionnelles exprimées dans le domaine temporel. Les autres paramètres serviront à ajuster l'amplitude du premier dépassement de façon à ce qu'elle soit inférieure à la borne supérieurs contenue dans la contrainte fonctionnelle.

8. Influence du paramètre A_R du correcteur d'ordre non entier

Dans ce qui suite nous allons étudier l'effet de du paramètre A_R de correcteur d'ordre non entier [Ous98], [Ous90].

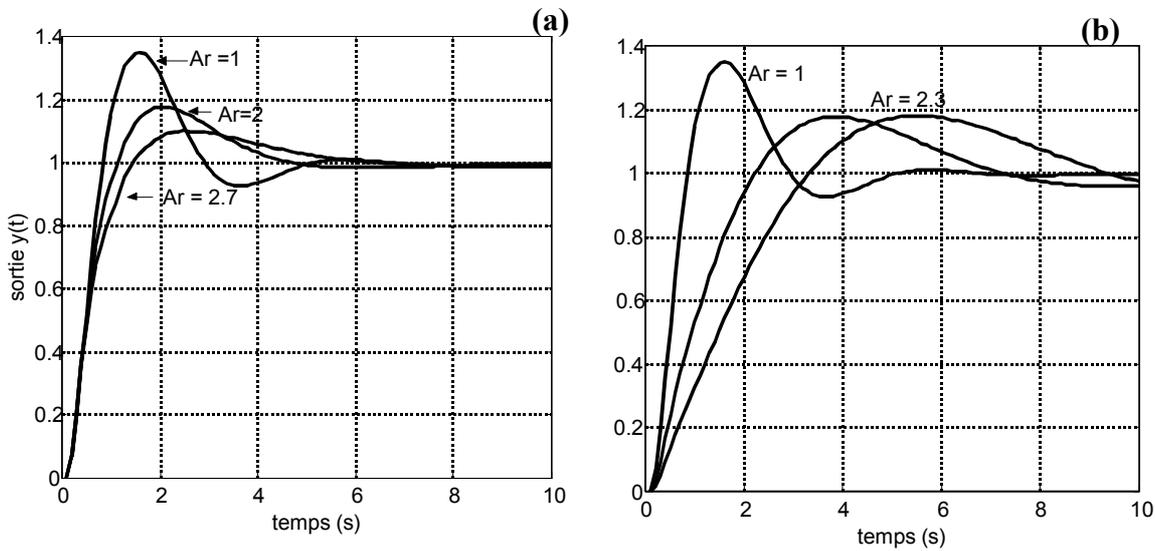


Figure (III.17) Influence du paramètre A_R sur le dépassement de la correction

La figure (III.17.a) représente le comportement dynamique du système corrigé pour différentes valeurs du paramètre A_R . Il est à noter que le paramètre A_R du correcteur d'ordre non entier, affecte les propriétés dynamiques du système corrigé et en particulier le premier dépassement. La figure (III.17.b) illustre les réponses indicielles pour $A_R = 2.3$ lors des variations paramétriques du procédé. On montre en figure (III.18) l'influence du paramètre A_R sur le dépassement, qui représente une décroissance du dépassement pour une augmentation du paramètre A_R .

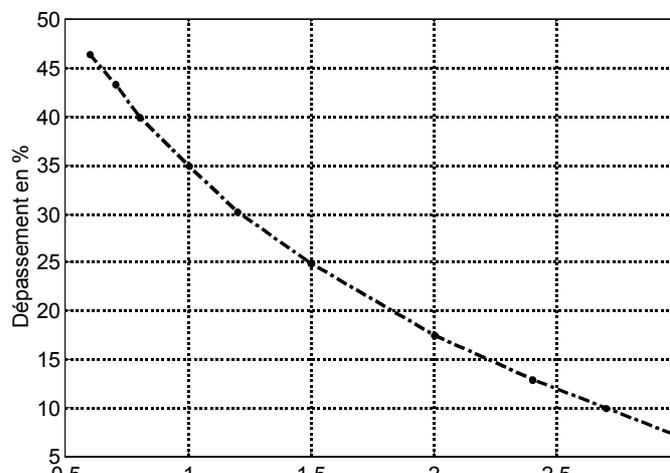


Figure (III.19) Courbe de dépassement en fonction du paramètre A_R

Conclusion

Dans ce chapitre la transformée de Tustin a été utilisée afin d'approximer une dérivation d'ordre non entier par une fonction de transfert discrète. Les propriétés dynamiques de la commande par correcteur d'ordre non entier sont intéressantes du point de vue robustesse.

Nous avons constaté que le système bouclé sur correcteur d'ordre non entier, pouvait présenter une réponse indicielle dont l'amplitude du premier dépassement reste pratiquement constante lorsqu'on fait varier certains paramètres du correcteur. Cela laisse penser que cette propriété peut être exploitée pour éliminer certaines contraintes fonctionnelles exprimées dans le domaine du temps. L'avantage de cette démarche est de simplifier le problème d'optimisation semi-infinie dont la forme générale a été donnée au chapitre précédent.

CHAPITRE

4

RESULTATS DE SIMULATION

*« La valeur de l'homme tient dans sa
capacité à donner et non dans sa capacité à
recevoir »*

Albert Einstein

Chapitre IV

RESULTATS DE SIMULATION

Introduction

La formulation du problème de détermination de correcteurs présentée précédemment au chapitre (II) s'avère très intéressante par le fait qu'elle présente une démarche systématique pour traduire et prendre en compte les divers spécifications et la disposition de la possibilité d'une résolution numérique. Cependant la présence dans le problème d'optimisation de contraintes comportant des fonctions non différentiables complique beaucoup la résolution et nécessite de recourir à des algorithmes spécifiques.

L'objectif de ce qui suit est de déterminer le correcteur optimal. Dans ce cadre on opte pour une approche qui consiste à résoudre un problème plus simple que celui présenté sans s'écarter de la formulation du problème d'optimisation (I.17). Cette démarche consiste à employer un correcteur d'ordre non entier et à exploiter les propriétés dégagées dans les contraintes fonctionnelles exprimées dans le domaine temporel.

Afin d'illustrer cette approche on présente dans la suite quelques résultats de simulation. Ces résultats ont été établis à l'aide des méthodes dont nous avons décrit les principes. Ces méthodes ont été programmées sous matlab . Les exemples ont été choisis pour illustrer les différentes notions évoquées.

2. Exemple d'application

Dans cet exemple on met en oeuvre la transcription du problème de synthèse en un problème d'optimisation sous spécification temporelle. De telles spécifications peuvent être par exemple les limitations de l'amplitude du premier pic, du temps de montée, du temps d'établissement, dans une réponse indicielle. Il s'agit d'élaborer un correcteur sur la base des spécifications liées à la limitation du premier dépassement. Le modèle nominal du procédé est [Ben92] :

$$G(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 1.2s^2 + 1.21s + 1} = \frac{N}{D} \tag{IV.1}$$

La réponse indicielle, le module et la phase de ce système sont représentés en figures (IV-1), (IV-2). On observe que le système présente un pic de résonance important et un comportement dynamique oscillatoire, qui le rend difficile à commander.

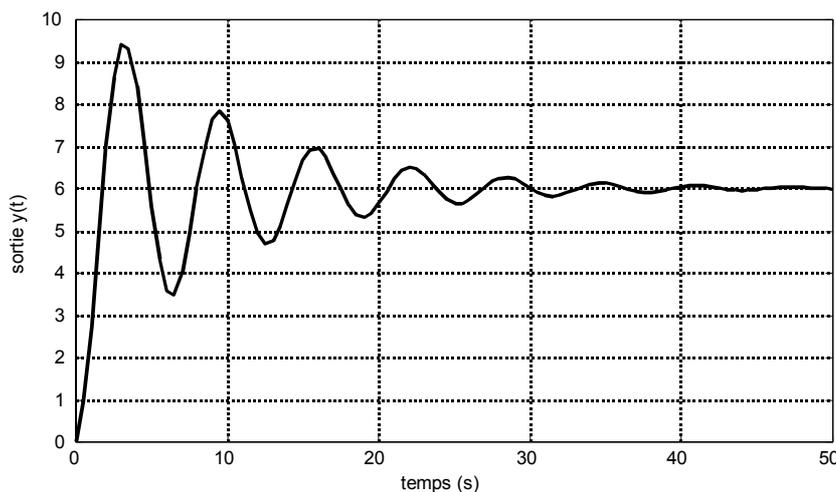


Figure (IV-1) Réponse indicielle de procédé $G(s)$ en boucle Ouverte

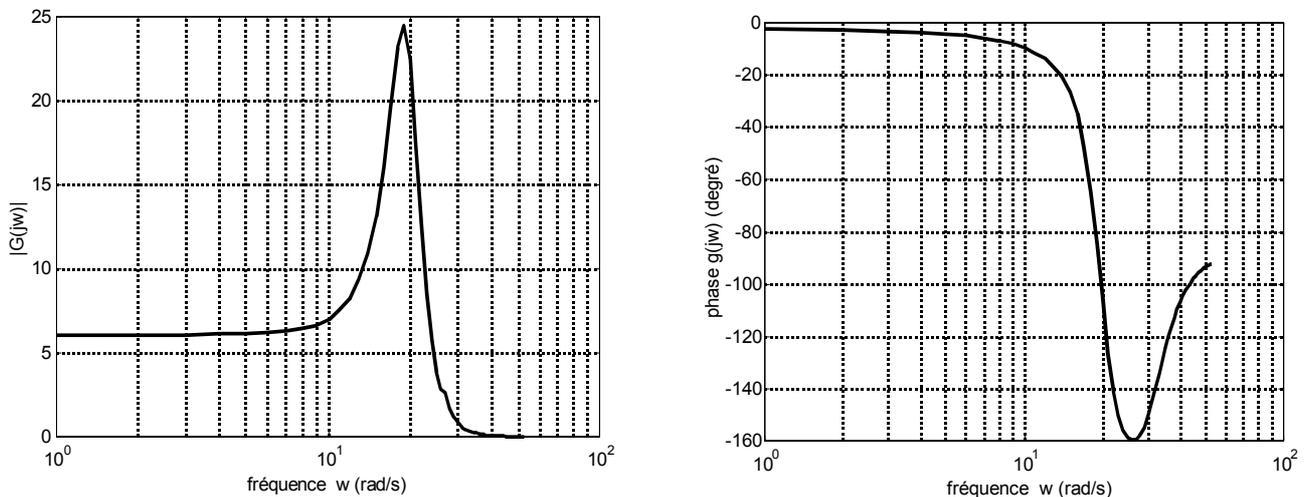


Figure (IV-2) Module et phase de du procédé $G(s)$

Les paramètres du modèle nominal du procédé notées Par_{nom} sont incertains et évoluent dans l'intervalle des variations maximales et minimales notées respectivement $Par_{max} = 3/2 Par_{nom}$ et $Par_{min} = 1/2 Par_{nom}$.

Pour corriger ce système on utilise un correcteur PI classique. Cette Structure est choisie pour assurer, d'une part une erreur statique nulle (pour une entrée en échelon unitaire) et une marge de phase $\varphi_m = 45^0$. Le correcteur est de la structure (avec pôles et zéros).suivante :

$$K(s) = \frac{1+T_n p}{T_i p} \quad \text{Avec } T_i = 0.333 \text{ et } T_n = 1.386$$

La figure (IV.3) représente la réponse indicielle du système corrigé pour des variations des paramétriques du procédé donnée par : $1/2 Par_{nom} \leq Par_{nom} \leq 3/2 Par_{nom}$, où Par_{nom} représente le vecteur des paramètres nominal du procédé.

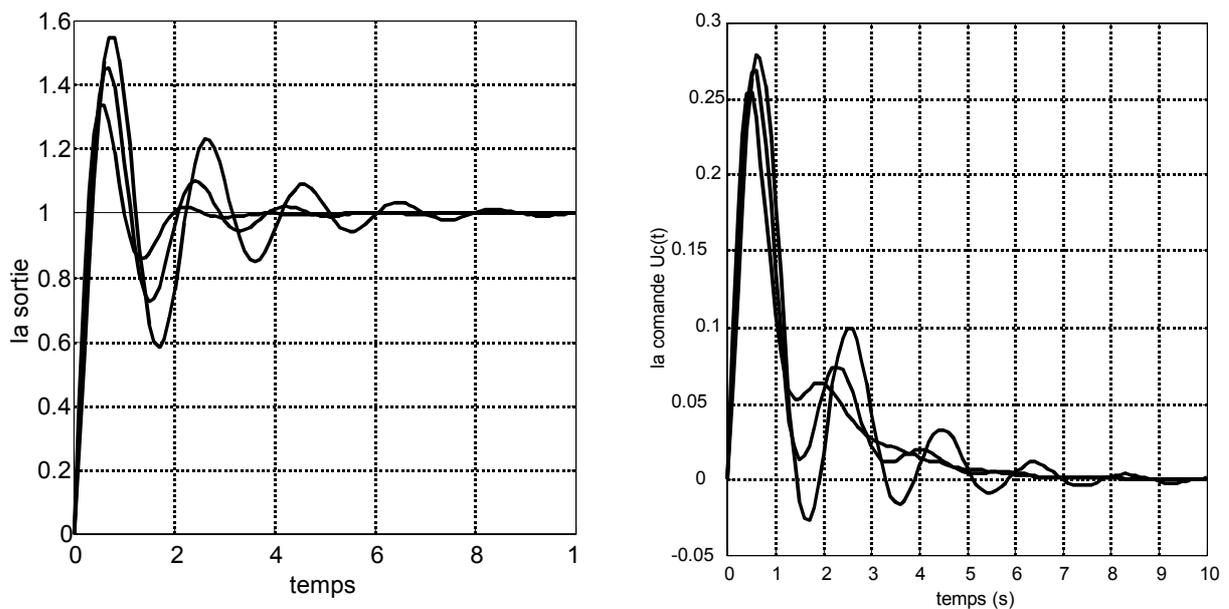


Figure (IV.3) Réponses indicielles et commandes en correction classique correspondant à l'état paramétrique extrême du procédé $G(s)$

Ces résultats de simulation de la figure précédente montrent qu'avec ce correcteur classique le premier dépassement, prend des valeurs importantes et sensiblement différentes lorsque les paramètres changent ce qui est un résultat bien connu.

3. Commande par correcteur optimal.

Dans cette partie nous soumettons notre système à des spécifications exprimées dans le domaine temporel. Ces spécifications concernent typiquement les caractéristiques des réponses temporelles, qu'on ne peut transcrire simplement dans le domaine fréquentiel.

La spécification qui caractérise les limitations de l'amplitude du premier Pic dans la réponse indicielle, en utilisant un gabarit dans lequel la réponse doit être confinée.

$$\begin{aligned} 0 \leq y(t) \leq y_{\max} & \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ b_{\inf}(t) \leq y(t) \leq b_{\sup}(t) & \quad t > t_0 \end{aligned} \quad (IV.2)$$

avec

$$\begin{aligned} b_{\inf}(t) &= 1 - a^t \\ b_{\sup}(t) &= 1 + a^t \quad a < 1 \end{aligned}$$

La contrainte issue de cette spécification est formulée comme suit

$$\begin{aligned} \text{Max}_{t \in T} \left\{ L^{-1} \left[\frac{1}{s} H(G, K) \right] (t) \right\} &\leq \bar{b}(t) \\ \text{Max}_{t \in T} \left\{ L^{-1} \left[\frac{1}{s} H(G, K) \right] (t) \right\} &\leq -\underline{b}(t) \end{aligned} \quad (IV.3)$$

où $H(G, K)$ est la fonction de transfert en boucle fermée.

Les inégalités présentées en (IV.3) sont satisfaites si on peut déterminer un correcteur K de manière que :

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s} H(G, K) \right] (t) = y_m(t), \quad \forall t \in T \quad (IV.4)$$

Où $y_m(t)$ est choisi telle que :

$$\underline{b}(t) \leq y_m(t) \leq \bar{b}(t) \quad \forall t \in T \quad (IV.5)$$

Les spécifications exprimées par (IV.3) sont satisfaites si on peut trouver un correcteur K qui permet de garder la réponse indicielle dans le gabarit. La figure (IV.4) qui suit où $T=[0, t_m]$ en donne une illustration.

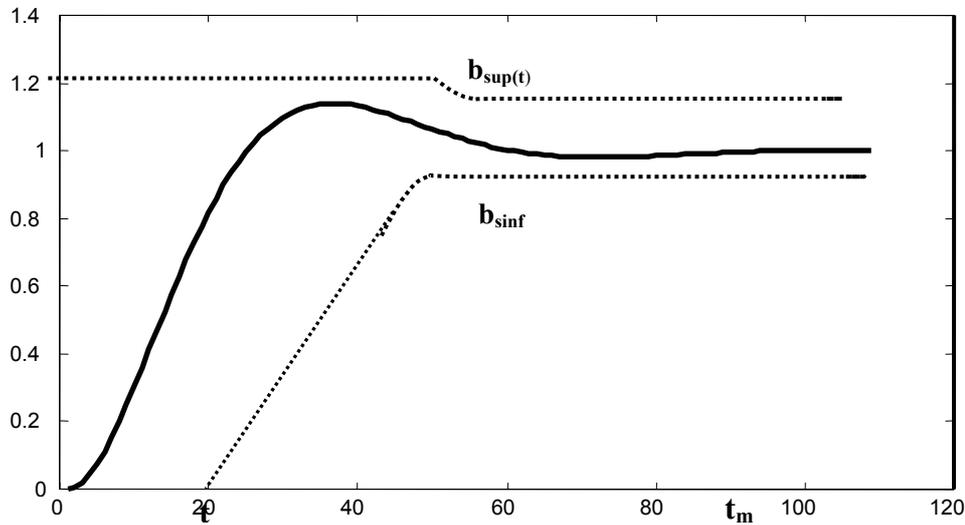


Figure (IV.4) Spécification relative à une réponse indicielle

On suppose que les spécifications liées à la limitation du premier dépassement de la réponse indicielle, indiquent une limite supérieure de 15 % de la valeur finale. Le problème de synthèse revient alors à déterminer les paramètres du correcteur en résolvant le problème d'optimisation paramétrique suivant (problème optimal)

$$\text{Min} \int_0^{\infty} e^2(t) dt \tag{IV.6}$$

$$\text{Max}_{t \in T} y(t) \leq b_{\text{sup}(t)}, \quad T = [0, t_{\text{max}}] \quad \text{avec} \quad b_{\text{sup}} = 1.15 y(\infty)$$

La résolution de ce problème donne les paramètres optimaux suivantes [Ben92]:

$$K(s) = \frac{5.68s^2 + 1.32s + 5.59}{s(s^2 + 5.25s + 21.25)} \tag{IV.7}$$

On donne en figure (IV.5) les réponses indicielles du système en boucle fermée pour le correcteur optimal (IV.7), ainsi que la commande correspondante.

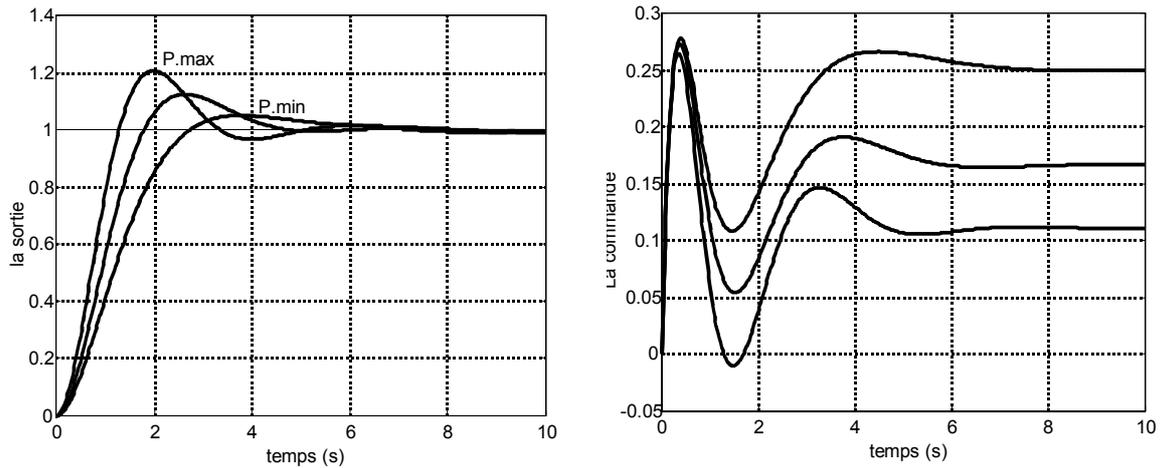


Figure (IV.5) Réponses indicielles et commandes en correction optimale correspondant à l'état paramétrique extrémale du procédé $G(s)$

4. Commande par Correcteur non entier

Afin de limiter les dépassements on se propose d'utiliser un correcteur d'ordre non entier. Cette structure est choisie pour assurer une erreur statique nulle (pour une entrée en échelon unitaire) d'une part et une robustesse aux variations d'états paramétriques du procédé.

Soit alors : $K(s) = A_R s^\alpha$ Avec $\alpha = 0.5$ et $A_R = 0.5$

L'approche d'ordre 7 de ce correcteur pour une période d'échantillonnage $T = 0.1s$ est :

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0} \quad (IV.8)$$

avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	44.72	-22.36	4.792	-7.986	2.795	-4.792	1.597	-3.194
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	0.1071	0.1786	0.0625	0.1071	0.03571	0.07143

On donne en figure (IV.6) la réponse indicielle du système en boucle fermée sur le correcteur non entier pour les états paramétriques minimal et extrémal du système.

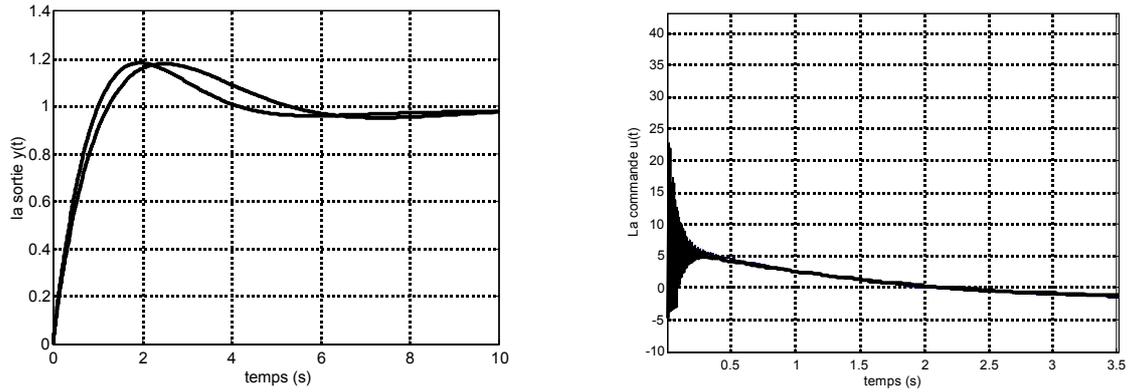


Figure (IV.6.a) Réponses indicielles du système en boucle fermée correspondant aux états extrémaux du procédé $G(s)$

On observe en figure (IV.6.a) que le correcteur satisfait à la spécification de limitation de l'amplitude du premier dépassement.

De plus, il possède la propriété de garder cette amplitude presque constante pour des variations paramétriques importantes du système commandé.

Cette amplitude du premier dépassement, de 20%, peut être jugée importante. elle peut être diminuée en modifiant les paramètres du correcteur, pour $A_R = 1.24$, $A_7 = 36.44$ et $B_7 = 0.85$ on obtient les résultats représentés en figure (IV.6.b).

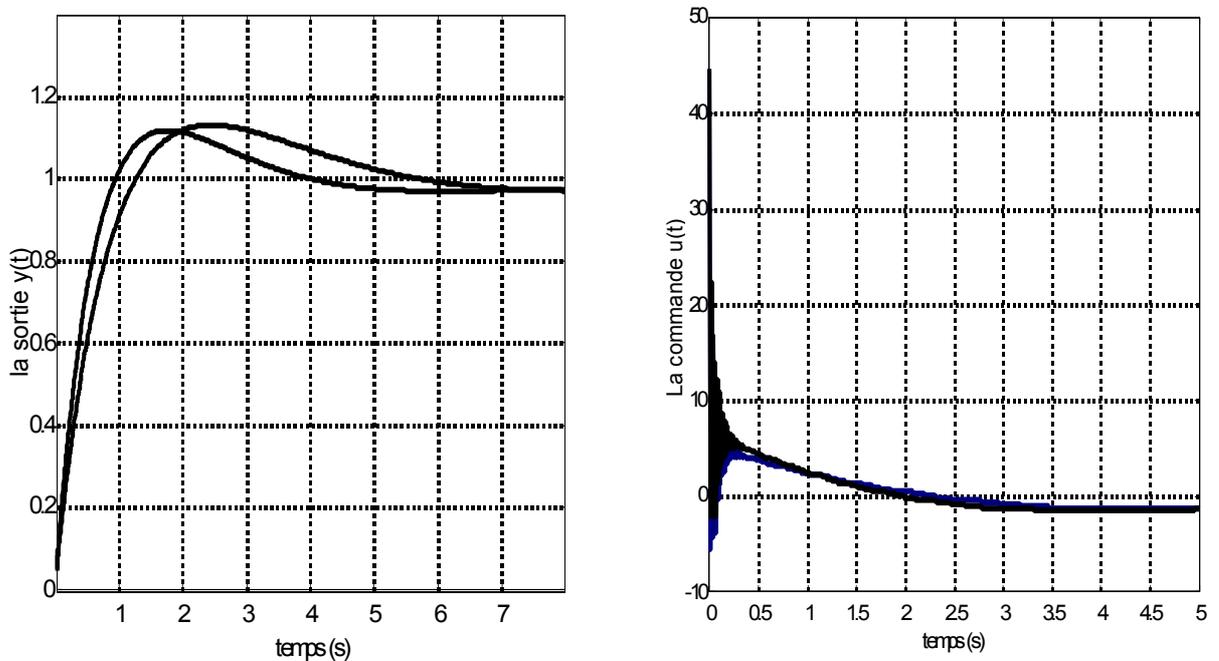


Figure (IV.6.b) Réponses indicielles et commandes du procédé $G(s)$ en reparamétrisation du correcteur correspondant à l'état paramétrique extrémale du Procédé $G(s)$

Ils montrent qu'une modification des paramètres A_R , A_7 , B_7 du correcteur satisfait la spécification relative à la limitation des dépassements imposée à une valeur de 15% pour des variations paramétriques du système.

On observe que même après cette modification des paramètres du correcteur, la propriété des amplitudes des dépassements est conservée.

Les diagrammes de Bode représentés en figure (IV.6.c) montrent que le pic de résonance prend des amplitudes très différentes lorsqu'on fait varier les paramètres du système à commander. De plus on vérifie que cette propriété est conservée lorsque ce sont les paramètres du correcteur qu'on modifie. On en constate que les spécifications exprimées dans le domaine fréquentiel sous forme de contraintes fonctionnelles pour un problème d'optimisation ne peuvent pas être éliminées par l'utilisation d'un correcteur d'ordre non entier.

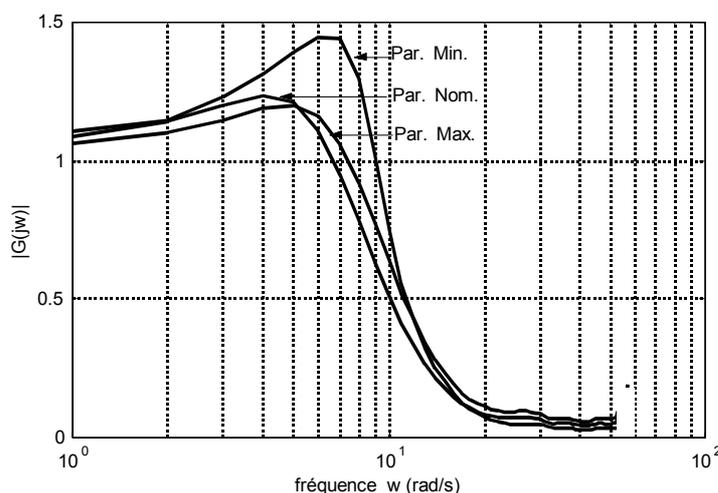


Figure (VI.6.c) : diagramme de Bode (Module) pour des variations paramétriques du Procédé $G(s)$

5. Conclusion

L'exemple étudié comporte la correction d'un système obtenue par trois méthodes différentes.

- Une méthode classique qui a produit les résultats attendus. Lorsqu'on varie les paramètres du correcteur, les réponses indicielles du système en boucle fermée montrent des premiers dépassements qui prennent des valeurs très différentes. Il en est de même si on varie les paramètres du modèle du procédé.
- Une méthode optimale (minimisation de l'intégrale de l'erreur quadratique) qui mène à un correcteur de structure différente mais produisant des réponses

indicielles du système en boucle fermée avec les mêmes propriétés que dans le cas précédent.

- Une correction basée sur un correcteur d'ordre non entier qui a montré que pour des variations paramétriques dans le procédé ou dans le correcteur, les réponses indicielles présentent la propriété recherchée. En effet, ces réponses exhibent des premiers dépassements d'amplitudes pratiquement égales. Cette propriété pourra alors être utilisée pour éliminer des contraintes fonctionnelles, exprimées dans le domaine temporel, du problème d'optimisation semi-infinie malheureusement cette propriété ne se conserve pas dans le domaine fréquentiel où les pics de résonance ont des valeurs très différentes pour les mêmes variations paramétriques

6. Le problème de la suspension du véhicule

Dans la plupart des véhicules classiques, les systèmes à suspensions passives sont composés d'un amortisseur et d'un ressort à caractéristiques fixes [Mon01]. Malgré leurs avantages certains, comme la simplicité dans leur réalisation, leurs performances restent limitées. Cette suspension doit remplir trois fonctions, par ordre décroissant d'importance:

- 1- Maintenir le véhicule en compensant son poids.
- 2- Assurer une bonne tenue de route.
- 3- Garantir un confort suffisant.

Le maintien est obtenu par un ressort.

Confort et tenue de route étant relativement antinomiques, un compromis est nécessaire, une fois le ressort fixé le compromis est essentiellement réalisé par le dispositif amortisseur dont la fonction est de dissiper l'énergie mécanique accumulée par le système suspension masse suspendue (amortissement des oscillations verticales).

6.1 Le Modèle linéaire de la suspension

Les systèmes de suspension traditionnels présentés en figure (IV.7.a) développent une force $f(t)$ fonction du déplacement relative ($Z_u(t) - Z_s(t)$) :

$$f(t) = k(Z_u(t) - Z_s(t)) + b \frac{d}{dt}(Z_u(t) - Z_s(t)) \quad (IV.9)$$

Où $Z_u(t)$ et $Z_s(t)$ représentent respectivement le déplacement vertical de la roue et du châssis. k est raideur du ressort et b le fortement visqueux du pressant.

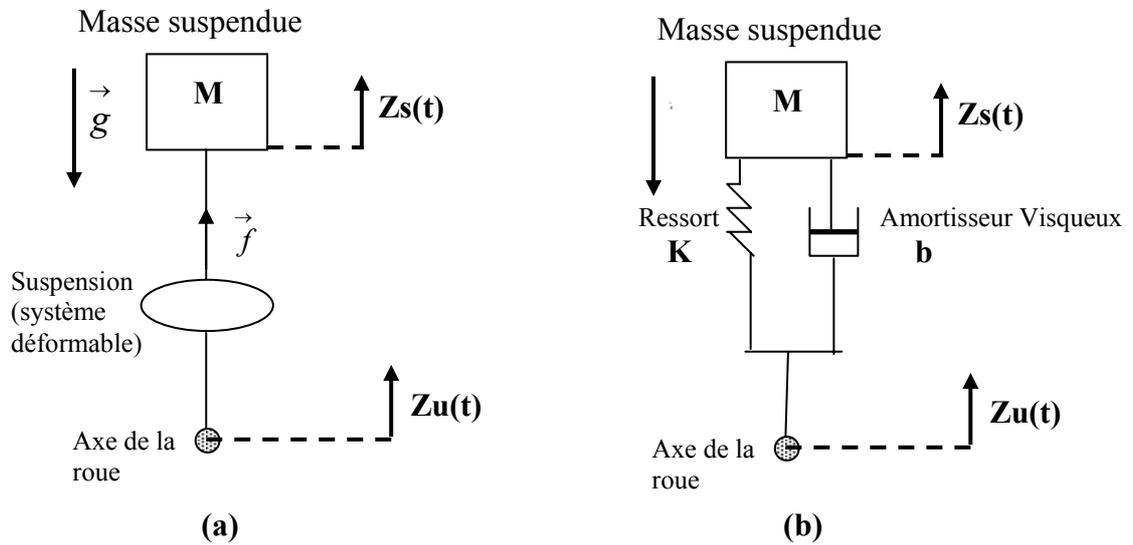


Figure (IV.7). Modèle de suspension classique (b) et non entier (a)

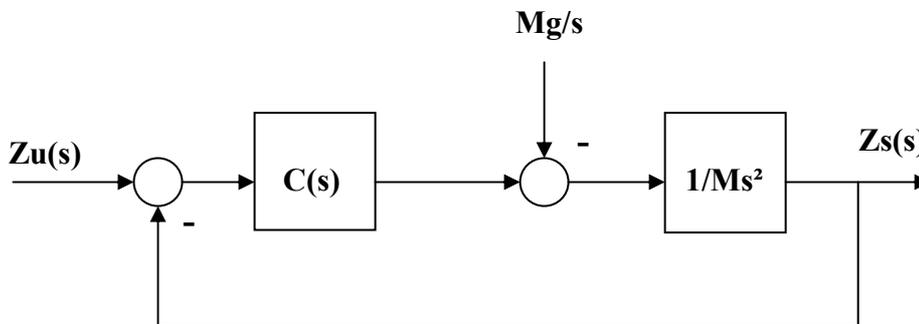


Figure (IV.8) Suspension en régime Linéaire

L'analyse de l'isolation vibratoire de la masse suspendue donne deux transmittances :

$$T(s) = \frac{Z_s(s)}{Z_u(s)} \text{ et } S(s) = \frac{Z_u(s) - Z_s(s)}{Z_u(s)} = 1 - T(s) \quad (IV.10)$$

D'où pour la suspension classique (b) :

$$T(s) = \frac{k + bs}{k + bs + Ms^2} \text{ et } S(s) = \frac{Ms^2}{k + bs + Ms^2} \quad (IV.11)$$

Et pour une suspension d'ordre non entier :

$$T(s) = \frac{C(s)}{C(s) + Ms^2} \text{ et } S(s) = \frac{Ms^2}{C(s) + Ms^2} \quad (\text{IV.12})$$

Le terme en Mg (Figure (IV.8)) est essentiel, il représente l'effet du poids que doit soutenir la suspension et constitue, du point de vue de l'automatique, une perturbation statique permanente : il s'agit essentiellement d'un problème de type « suivi de consigne et rejet de perturbation ». Le système de suspension le plus répandu est constitué, en première approximation, d'un ressort et d'un amortisseur visqueux avec réglage judicieux des constantes : $C(s) = C_0 + k s$, soit un comportement de type P.D.

Dans le cas de la suspension oléopneumatique [Des72], [Mon01], le ressort peut être choisi de raideur faible grâce à un correcteur hydraulique de hauteur, qui s'apparente à un terme intégrateur. Cette particularité des suspensions donne un comportement de type P.I.D. : $C(s) = C_0 + k s + \varepsilon \frac{1}{s}$.

La figure (IV.9) représente la réponse indicielle d'une suspension traditionnelle pour les paramètres suivant [Ous98] :

- La Masse du véhicule : $150\text{kg} \leq M \leq 300\text{kg}$
- Raideur du ressort : $k = 2500\text{N} / \text{m}$.
- Coefficient du forttement visqueux de l'amortisseur : $b = 850\text{Ns} / \text{m}$.

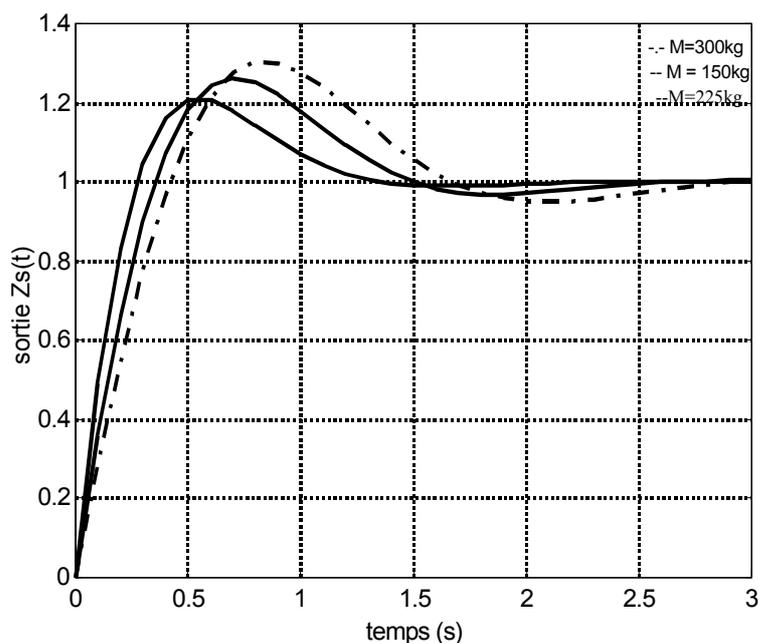


Figure (IV.9). Réponse indicielle de la suspension traditionnelle : - M=150kg, -- M=225kg, -.- M=300 kg

6.2 La suspension d'ordre non entier

La suspension d'ordre non entier s'exprime sous forme d'un compensateur invariant non rationnel (dérivation d'ordre non entier) :

$$C(s) = A_r s^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{IV.13}$$

avec $A_r = 5.5$ et $\alpha = 0.5$.

L'approche d'ordre 7 de ce correcteur pour une période d'échantillonnage $T = 0.1s$ est :

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0} \tag{IV.14}$$

avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	1.414	- 0.707	1.667	- 1.806	1.038	- 1.313	0.2778	0.5556
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	1.179	1.277	0.7342	0.9281	0.1964	0.3929

On donne en figure (IV.10) la réponse indicielle de la suspension avec le correcteur d'ordre non entier (IV.14) pour une masse M variable du véhicule.

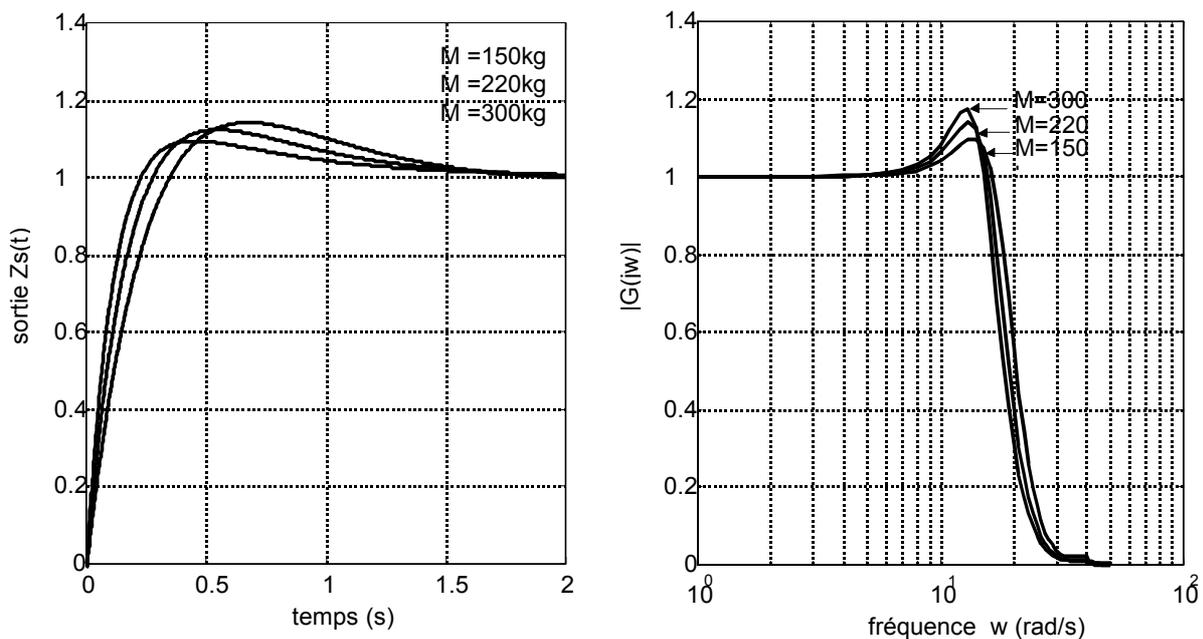


Figure (IV.10). Réponse indicielle et diagramme de Bode de la suspension d'ordre non entier : $M=150\text{kg}$, $M=225\text{kg}$, $M=300\text{kg}$

Ce type de suspension procure un confort et une tenue de route peu sensibles à la charge en diminuant les variations des valeurs des dépassements. Cependant les dépassements et les pics de résonances présentent des amplitudes différentes.

6.3 Commande par correcteur d'ordre non entier $P.I^\beta.D^\alpha$

Le correcteur d'ordre non entier proposé s'exprime sous forme d'un compensateur invariant non rationnel $P.I^\beta.D^\alpha$ (PID d'ordre non entier) :

$$C(s) = K_p + A_r I^\beta + B_r D^\alpha, \quad 0 < \alpha, \beta < 1 \tag{IV.15}$$

avec $A_r = 8.5$ et $\beta = -0.5$.
 $B_r = 5.5$ et $\alpha = 0.5$.
 $K_p = 2.3$

L'approche d'une d'ordre 7, pour une période d'échantillonnage $T = 0.1s$, des actions intégrale et dérivée est de ce correcteur est :

$$D_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

et $I_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$

Les résultats de simulation de la figure (IV.11) représentent la réponse indicielle de la suspension commandée par le correcteur d'ordre non entier (IV.15) pour une masse M variable du véhicule.

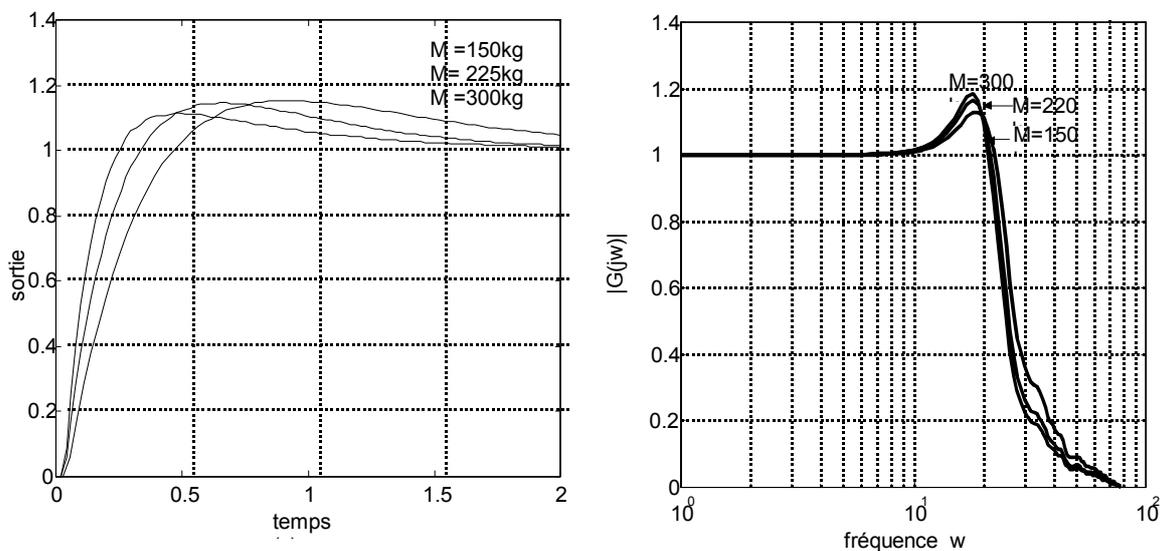


Figure (IV.11). Réponse indicielle et diagramme de Bode de la correction d'ordre non entier $P.I^\beta.D^\alpha$: $M=150kg, 225kg$ et $300kg$

Le type de correcteur d'ordre non entier $P.I^\beta.D^\alpha$ procure un confort et une tenue de route peu sensibles à la charge en limitant la valeur des dépassements. De plus les amplitudes de ces dépassements correspondant à différentes charges sont sensiblement égales. Donc dans ce cas également, l'utilisation d'un correcteur d'ordre non entier procure, pour le système en boucle fermée une propriété qui permet de simplifier le problème d'optimisation semi-infinie en permettant d'éliminer certaines contraintes fonctionnelles.

7. Correcteur d'ordre non entier dépendant du modèle du procédé

La satisfaction des spécifications temporelles et fréquentielles passe par l'utilisation de correcteur d'ordre non entier dépendant du modèle du procédé à corriger. A cet effet [Ous90],[Ous91] propose l'utilisation d'un correcteur d'ordre non entier qui permet d'avoir une transmittance en boucle ouverte fondée sur l'intégration d'ordre non entier réelle bornée en fréquence donnée par la formule suivante :

$$\beta(s) = k_b \left(\frac{\omega_b}{s} + 1 \right)^{nb} \left(\frac{\omega_u}{\omega_b} \cdot \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m \left(\frac{k_h}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^{nb} \quad (IV.16)$$

$$\text{où } k_b = \left(1 + \left(\frac{\omega_b}{\omega_u} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

$$k_h = \left(1 + \left(\frac{\omega_b}{\omega_u} \right)^2 \right)^{1/2}$$

ω_b et ω_h représentent respectivement les fréquences transitionnelles basse et haute fréquence qui sont réparties symétriquement par rapport aux fréquences extrémales ω_A et ω_B .

Cette structure doit prendre en compte d'une part les spécifications de précision aux basses fréquences et d'autre part de garantir un gabarit vertical au voisinage de la fréquence au gain unité ω_u d'autre part.

Le correcteur réel correspondant à l'expression idéale (IV.16) est défini par une transmittance d'ordre entier équivalente qui est de la forme:

$$C_N(s) = C_0 \frac{\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{\omega'_i}\right)}{\prod_{j=1}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{\omega_j}\right)} \quad (\text{IV.17})$$

dans laquelle les fréquences transitionnelles ω'_i et ω_j sont définies par les relations:

$$\frac{\omega'_{i+1}}{\omega'_i} = \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j} = \alpha\eta > 1 \quad (\text{IV.18})$$

$$\frac{\omega'_i}{\omega_j} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\omega'_{i+1}}{\omega_j} = \eta \quad (\text{IV.19})$$

$$\alpha\eta = (\omega_h \omega_b)^{1/N} \quad (\text{IV.20})$$

$$\alpha = (\alpha\eta)^m \quad \text{et} \quad \eta = (\alpha\eta)^{1-m} \quad (\text{IV.21})$$

$$\omega'_1 = \omega_b \eta^{1/2} \quad \text{et} \quad \omega_N = \omega_b \eta^{-1/2} \quad (\text{IV.23})$$

La synthèse du correcteur réel (correspondant à la forme d'ordre non entière (IV.16)), permettant la commande du procédé (IV.1).

$$G(s) = \frac{As^2 + Bs + C}{as^3 + bs^2 + cs + d} = \frac{N}{D}$$

donne les paramètres du correcteur suivants:

$$N = 4, \quad C_0 = 15.586, \quad m = 0.4667$$

$$\omega_h = 4.7 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \omega_b = 4.756 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = 2.2387, \quad \eta = 2.5119 \quad \text{et} \quad \omega_u = 115.15 \text{ rad/s}$$

La figure (IV.12), illustre les réponses indicielles et fréquentielles du système en boucle fermée sur le correcteur synthétisé pour des valeurs du paramètre $B = 4, 5, 8$.

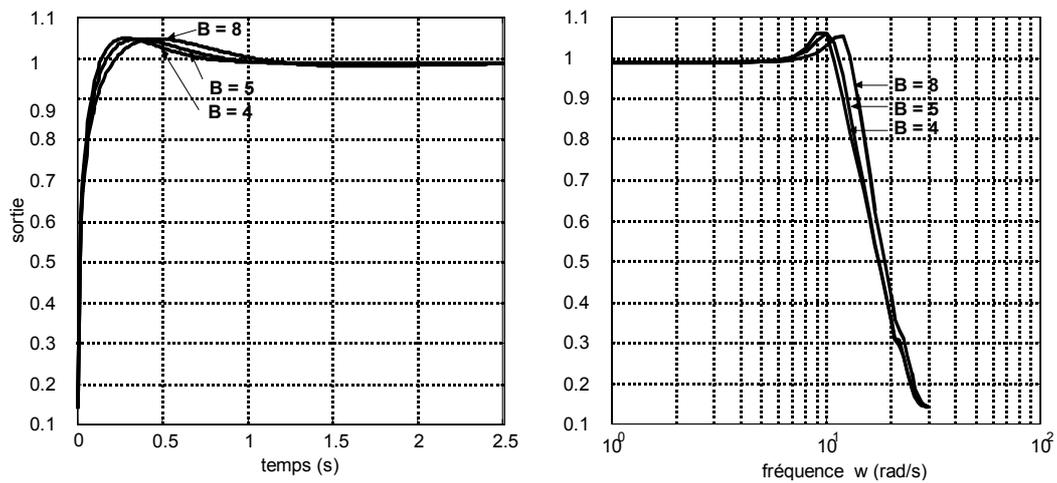


Figure (IV.12) Réponses indicielles et diagrammes de gain de la correction Pour des variations du paramètre B du procédé

Les résultats de simulation de la figure (IV.12), montrent que la spécification temporelle relative à la limitation du premier dépassement ainsi que la spécification fréquentielle relative à la limitation du pic de résonance sont satisfaites pour des variations du paramètre B du procédé. On vérifie que ces spécifications se trouvent aussi satisfaites pour des variations des paramètres b, c, d du procédé.

Par contre la forme de ce correcteur ne satisfait pas ces spécifications lors des variations des paramètres A, C, a , du procédé. Les résultats de simulation sont présentés en figure (IV.13).

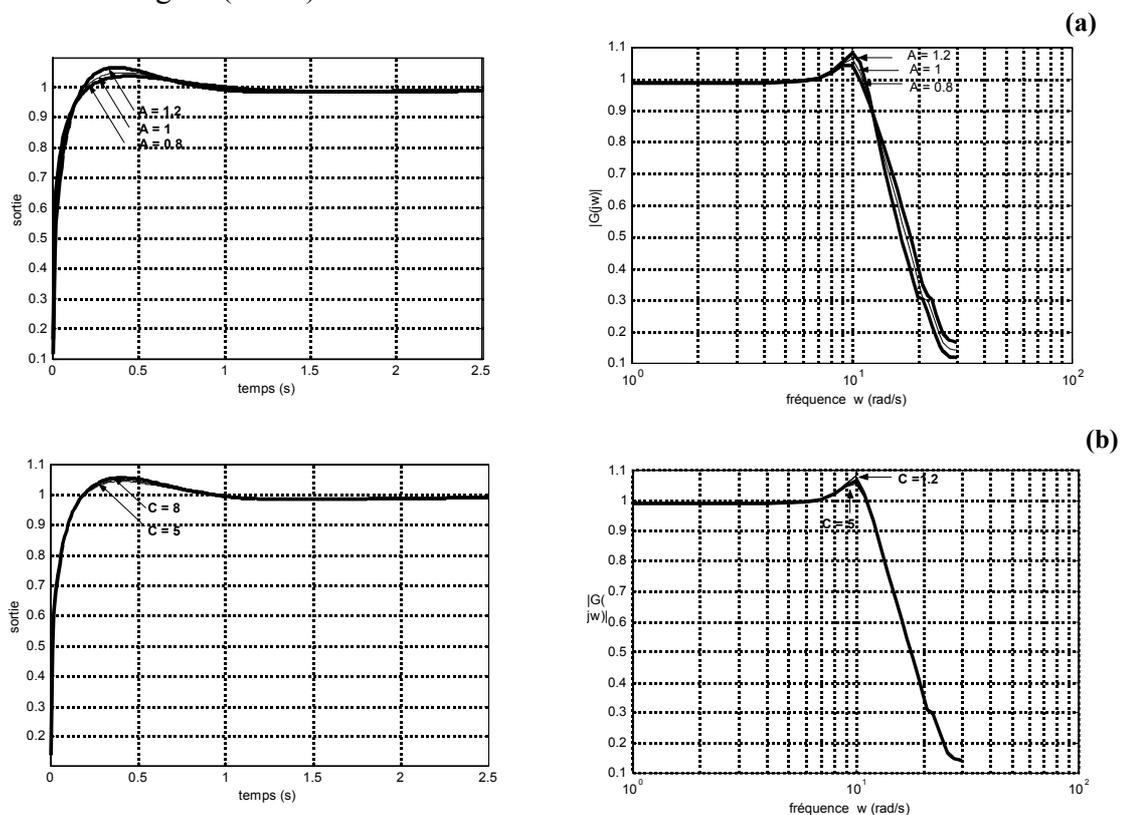


Figure (IV.13) Réponses indicielles et diagrammes de gain de la correction Pour des variation des paramètres $A(a), C(b)$ du procédé.

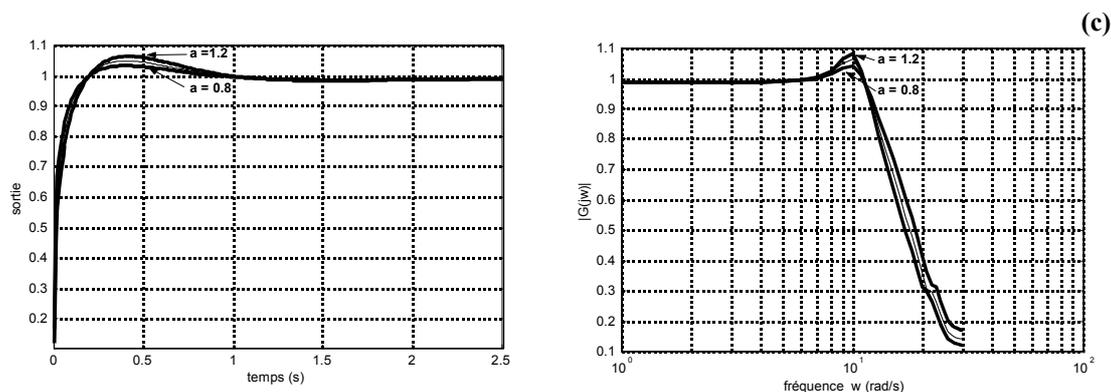


Figure (IV.13) Réponses indicielles et diagrammes de gain de la correction Pour des variation des paramètres a (c) du procédé.

La figure (IV.13) montre que pour des variations des paramètres A , C , a , du procédé la valeur du premier dépassement et la valeur du pic de résonance ne restent pas constante ce qui ne satisfait pas la spécification temporelle et fréquentielle.

7.1 Cas d'une suspension de véhicule

L'utilisation de cette approximation du correcteur d'ordre non entier dépendant de modèle du procédé pour la commande de la suspension du véhicule (figure IV.8), donne les paramètres du correcteur réel suivants:

$$N = 5, \quad C_0 = 5170, \quad m = 0.611$$

$$\omega_h = 200 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \omega_b = 0.5 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = 2.4973, \quad \eta = 1.7908 \quad \text{et} \quad \omega_u = \omega_0 = \sqrt{1/M}$$

La figure (IV.14) illustre les réponses temporelles et fréquentielle du système (suspension) corrigé.

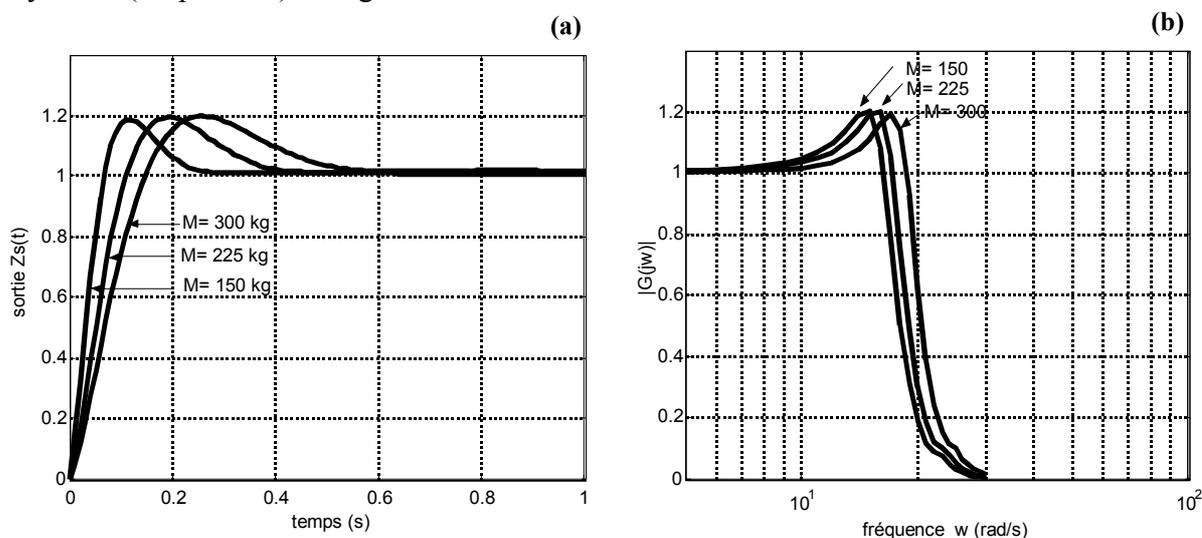


Figure (IV.14) Réponses indicielles et diagrammes de gain de la suspension pour $M = 150$, 225 et 300kg

Les résultats de simulation de la figure (IV.14.a) montrent que la valeur du dépassement est limitée à 20 % de la valeur finale lorsque la masse du véhicule varie ce qui satisfait la spécification temporelle. La limitation de la valeur du pic de résonance montré en figure (IV.14.b) satisfait également la spécification fréquentielle. Il est à noter que cette forme du correcteur d'ordre non entier dépendante du procédé présente des avantages liés aux spécifications temporelle et fréquentielle lorsque les procédés commandés sont simples et présentent des incertitudes sur un seul paramètre, ou des incertitudes sur un ensemble de paramètres. C'est le cas de la suspension où le seul paramètre qui varie est la masse du véhicule. Cependant pour des procédés complexes cette approche présente des limitations dues au choix de la fréquence ω_u caractérisant la synthèse du correcteur réel.

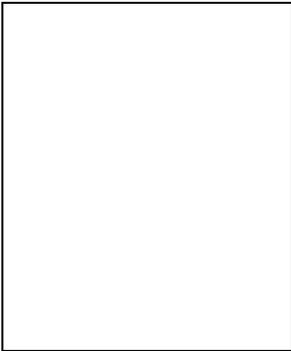
Conclusion

Dans ce chapitre nous avons voulu évaluer une correction classique, optimale et d'ordre non entier utilisée sur un exemple. Cette évaluation s'est faite sur la base de propriétés qui doivent nous permettre de simplifier le problème d'optimisation semi-infinie par élimination de contraintes fonctionnelles.

Les deux premiers types de correction peuvent produire des systèmes corrigés avec des performances acceptables mais ne présentent pas la propriété recherchée.

La correction d'ordre non entier nous permet d'obtenir des réponses indicelles avec des amplitudes de premier dépassement pratiquement constantes lorsqu'on fait varier les paramètres du correcteur ou ceux du modèle du procédé.

Nous avons vérifié que cette conservation d'une caractéristique ne se retrouve pas dans le domaine fréquentiel. Ce qui veut dire que les contraintes fonctionnelles, découlant de spécifications fréquentielles ne pourront pas être éliminées du problème d'optimisation semi infinie.



CONCLUSION GÉNÉRALE

« Le monde que nous avons créé est le résultat de notre réflexion, mais les problèmes qu'il engendre ne sauraient être résolus à ce même niveau. »

Albert Einstein

Conclusion générale

Conclusion générale

Ce travail a été consacré pour tester une hypothèse qui prend son origine dans l'observation, dans un cas particulier, du comportement des systèmes commandés par un contrôleur d'ordre non entier. Ces propriétés nous intéressent dans la mesure où, elles nous auraient permis de simplifier grandement la formulation de problèmes de synthèse. Elles auraient permis de transcrire des contraintes fonctionnelles en contraintes conventionnelles, et donc de transformer le problème d'optimisation non différentiable en un problème classique.

Dans ce mémoire nous avons d'abord spécifié la forme du problème d'optimisation avec contraintes, correspondant à un problème de synthèse. Les spécifications ont été transcrites sous forme de contraintes notamment fonctionnelles.

Ce problème d'optimisation a été caractérisé en analysant notamment la nature de ces contraintes qui peuvent découler de spécifications temporelles ou fréquentielles. Nous avons montré qu'elles sont non différentiables.

Afin de simplifier le problème d'optimisation ainsi obtenu, nous avons étudié l'utilisation d'un correcteur d'ordre non entier qui nous aurait permis de transformer les contraintes qui rendaient la résolution du problème d'optimisation complexe.

Pour cela alors nous avons étudié l'extension des notations de dérivation et d'intégration à des ordres, non entiers les transformations trouvées dans la littérature spécialisée ne permettent pas des calculs aisés. Nous avons donc recherché et étudié

les méthodes de détermination de correcteurs d'ordre entier équivalents. Plusieurs approches ont été exposées aussi bien dans le contexte discret que continu.

Ces correcteurs d'ordre entier équivalents ont été utilisés et étudiés à travers des exemples du point de vue de l'hypothèse de départ que nous avons faite et de point de vue de la robustesse. Nous avons observé que certains paramètres jouaient un rôle particulier et pouvaient être utilisés pour synthétiser un correcteur tout en permettant de formuler les contraintes fonctionnelles d'une façon classique. C'est notamment le cas pour des contraintes correspondant à des spécifications temporelles, telle que la limitation du premier dépassement.

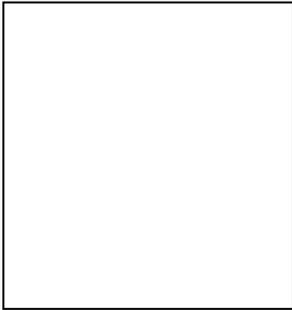
Les simulations ont été menées sur un modèle caractérisé par une forte oscillation et sur le modèle de la suspension de véhicule. Dans les deux cas nous sommes arrivés aux mêmes conclusions à savoir que

- pour les contraintes découlant de spécification temporelles, le correcteur d'ordre entier équivalents pouvaient effectivement nous permettre de transformer le problème d'optimisation non différentiable en problème classique. Cependant ce résultat est relatif à certains paramètres seulement qu'il faut identifier.
- pour les contraintes découlant de spécifications fréquentielles le résultat est négatif. Les correcteur d'ordre non entier étudiés ne présentent pas les propriétés attendues .

Il reste à tester, bien sûr des structures de contrôleurs plus complexes que celles qui ont été étudiées dans le cadre de ce travail.

De plus une étude sur la structure générale que doit prendre la fonction de transfert en boucle fermée sur un correcteur d'ordre entier doit être menée, car nous avons observé que les exemples traités dans la littérature spécialisée ont toujours une structure du correcteur dépendante de système à corriger.

En fin la spécification de stabilité n'a pas été prise en compte dans notre étude. Elle introduit, elle aussi une contrainte non différentiable et doit être étudiée dans le même contexte, ce sont là les perspectives que nous voyons pour ce modeste travail.



ANNEXES

*“Ce que l’on conçoit bien s’énonce clairement,
ce qu’on énonce clairement induit qu’on
le conçoit bien ou mieux.”*

HENRI DESROCHÉ

I. Approche du correcteur d'ordre non entier $A_R S^r$

- $r = 0.5$

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	14.144	-7.071	1.515	-2.252	0.8839	-1.515	0.5051	-1.01
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	0.1071	0.1786	0.0625	0.1071	0.03571	0.07143

- $r = 0.6$

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	24.02	-14.41	3.706	-5.299	2.171	-3.179	1.235	-2.059
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.6	0.1543	0.2206	0.09083	0.1323	0.03143	0.08571

- $r = 0.7$

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	40.81	-28.56	8.569	-10.85	5.044	-6.513	2.856	-4.081
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.7	0.21	0.026	0.1236	0.1596	0.07	0.1

-

- $r = 0.8$

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	69.31	-55.45	19.01	-21.86	11.26	-13.12	6.337	-7.922
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.8	0.2743	0.3154	0.1624	0.1893	0.09143	0.1143

- **r = 0.15**

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	2.214	-0.3321	0.02135	-0.1114	0.01235	-0.06648	0.007116	-0.07444
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.15	0.009643	0.05032	0.00557	0.03019	0.003214	0.02143

- **r = 0.25.**

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	3.761	-0.9402	0.1007	-0.319	0.05834	-0.1914	0.03358	-0.1343
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.25	0.02679	0.08482	0.01551	0.05089	0.008929	0.03571

-
-
-

- $r = 0.35$.

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0} \quad (V.1)$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	6.388	-2.236	0.3354	-0.7713	0.1947	-0.4628	0.1118	-0.3194
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.35	0.0525	0.1208	0.03048	0.07245	0.0175	0.05

- $r = 0.45$.

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	10.85	-4.883	0.9417	-1.722	0.5483	-1.033	0.3139	-0.6976
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.45	0.08679	0.1587	0.05053	0.09521	0.02893	0.06429

II. Ordre d'approche du correcteur d'ordre non entier $A_R s^r$.

- Approche d'ordre 3.

$$G_r^f(z) = \frac{A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	14.14	-7.071	1.179	-2.357
Dénominateur	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	0.08333	0.1667

-
-

- Approche d'ordre 5.

$$G_r^f(z) = \frac{A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	14.14	-7.071	1.414	-2.475	0.7071	-1.414
Dénominateur	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	0.1	0.175	0.05	0.1

- Approche d'ordre 7

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	14.144	-7.071	1.515	-2.252	0.8839	-1.515	0.5051	-1.01
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	0.1071	0.1786	0.0625	0.1071	0.03571	0.07143

- Approche d'ordre 9.

$$G_r^f(z) = \frac{A_9 z^9 + A_8 z^8 + A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_9 z^9 + B_8 z^8 + B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_9	A_8	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	14.14	-7.071	1.571	-2.553	0.9681	-1.564	0.6454	-1.094	0.3928	-0.7857
Dénominateur	B_9	B_8	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	0.111	0.181	0.0685	0.1106	0.0456	0.0774	0.0278	0.0556

-
-
-

- Approche d'ordre 11.

$$G_r(z) = \frac{A_{11} z^{11} + A_{10} z^{10} + A_9 z^9 + A_8 z^8 + A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_{11} z^{11} + B_{10} z^{10} + B_9 z^9 + B_8 z^8 + B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_7	A_6	A_5	A_4
Paramètres	14.14	-7.071	1.607	-2.571	1.018	-1.594	0.7165	-1.138
Dénominateur	B_{11}	B_{10}	B_9	B_8	B_7	B_6	B_5	B_4
Paramètres	1	0.5	0.1136	0.1818	0.0719	0.1127	0.05066	0.08049

A_3	A_2	A_1	A_0
0.5089	-0.8571	0.3214	-0.6428
B_3	B_2	B_1	B_0
0.0359	0.06061	0.2273	0.04545

III. Approche du correcteur d'ordre non entier $A_R s^r$

- Approche pour $A_R = 0.5$

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	14.14	-7.071	0.6734	-1.221	0.3967	-0.7303	0.2525	-0.5051
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	0.0476	0.0863	0.0281	0.0281	0.0179	0.0357

- Approche pour $A_R = 1.5$

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	14.14	-7.071	2.525	-3.914	1.468	-2.368	0.7576	-1.515
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	0.1786	0.2768	0.1038	0.1674	0.05357	0.1071

- Approche pour $A_R = 2$

$$G_r^f(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	14.14	-7.071	3.704	-5.387	2.155	-3.3	1.01	-2.02
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	0.2619	0.381	0.1524	0.2333	0.07143	0.1429

IV Approche du correcteur d'ordre non entier $P.A_r I^\beta .B_r D^\alpha$

- Approche pour $8.5s^{-0.5}$

$$G_r^D(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

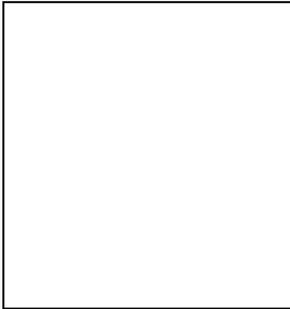
Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	14.14	-7.071	1.666	-1.805	1.0382	-1.3126	0.2778	-0.5556
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	1.178	1.276	0.7342	0.9281	0.1964	0.3929

- Approche pour $5.5s^{0.5}$

$$G_r^I(z) = \frac{A_7 z^7 + A_6 z^6 + A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_7 z^7 + B_6 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}$$

Avec les paramètres :

Numérateur	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
Paramètres	14.14	-7.071	0.9380	0.2886	-0.0412	1.164	-0.5051	1.012
Dénominateur	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
Paramètres	1	0.5	0.6633	0.2041	0.0292	0.8236	0.3571	0.7143



RÉFÉRENCES

*“Tout professeur en puissance est un facilitateur,
une personne qui met les choses sur table,
montre aux gens combien c'est excitant et merveilleux
et leur dit de se servir.”*

LÉO BUSCAGLIA

BIBLIOGRAPHIE

- [Bel01] **L.Bel, G.Oppenheim, L.Robbiano,M-C.Viano.** Synthèse fractionnaire - filtres fractionnaires, Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, N°1,Mai 2001.
- [Ben92] **A. Benhalla.** Contribution à la Détermination des Compensateurs par Optimisation Paramétrique. Thesis. Ecole Centrale de Lyon, Mars, 1992.
- [Bor90] **P. Borne.** Commande et optimisation des process . edi. Hermes, Paris, 1990
- [Bon03] **J.F. Bonnans.** Optimisation Continue: Théorie, Algorithmes et Application. INRIA, 27 novembre 2003.
- [Car97] **A.Carpinteri, F.Mainardi .** The Fractionnal Calculus In Continuum Mechanics, Springer Verlag ,Wien and New York, 1997, pp. 223-276.
- [Cap67] **M. Caputo.** Linear models of dissipation whos Q is almoste frequency independent, part II .Geophys J.R.Astr. Sac13 (1967), pp. 529 -539.
- [Cap71] **M. Caputo, F Mainardi.** Linear models of dissipation in anelastic solids; Riv. Nuovo Cimento (Ser II) 1 (1971), pp161-198.
- [Che03] **YangQuan Chen, B.M.Vinagre.** A new IIR-type Digitale Fractional Ordre Differentiator. Jornal of *Signal Processing.*, [URL:http://csois.usu.edu/people/yqchen](http://csois.usu.edu/people/yqchen) ,E-mail: yqchen@ieee.org . pp 1-8. 22 May 2003.
- [Cla79] **Claerbout, Jon F.** fundamentals of Geophysical Data Processing. Blackwell scientific Publications.1979.
- [Des72] **M. Desbois, F.Touache et J.Tourancheau ,** L'automobile, technologie professionnelle générale, tome 2: Les organes de transmission et d'utilisation, Edition Foucher, Paris 1972
- [Die97] **K. Diethelm.** An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. Jo.of Electronic transaction on numerical analysis. N°5, pp 1-6, 1997.
- [Dor00] **L.Dorcak, I.Pertras, I.Kodtial.** Modelling and analysis of fractional order regulated systems in the state space, Technical university of Kosice, pp 1-4, 2000.
- [Dor94] **L. Dorcak :** Numerical Models For The Simulation of The Fractional-order Control Systems, UEF SAV The Academy of Sciences, Inct. Of Experimental Physics, Košice, Slovak Republic.1994.
- [Doy81] **J.C.doyle, G. Stien.** Multivariable feedback design: Concepts for a classical / modern synthesis. IEEE Trans. Automat. Contr. Vol.AC26 N°1, pp4-16, 1981.

- [For00] **N.J. Ford and A. Charles Simpson**. Numerical and analytical treatment of differential equations of fractional order, TECHREPORT of The University of Manchester, 2000.
- [Gon80] **C.Gonzaga, E.Polak, R.Trahan** : An improved algorithm for optimisation problems with functional inequality constraints. IEEE Trans.Automat. Contr. Vol.AC25 N°1, pp49-54, 1980.
- [Gra87] **A.C.W. Grace, P.J Fleming**. A design environment for computer aided control system design via multiobjective optimisation. IEEE Trans. Automat. Contr. Vol.F47, pp 497-512 1987.
- [Mag98] **D. Matignon**. Stability properties for generalized fractional differential systems, ESAIM Proceedings, Vol. 5, pp 145-158, 1998.
- [Mon01] **G. Montseny**, Ordre non entier: Suspension CRONE et autre exemples, LAAS-CNRS, N° 01046, 2001.
- [Mon93] **G. Montseny, J. Audounet, B. Mbodje**. Optimal models of fractional integrators and application to systems with fading memory. LAAS. Report. N° 93286, July 1993.
- [New64] **G.C. Newton, L.A.Gould, J.F.Kaiser**. Analytical design of linear feedback controls. J.Wiley and New York,1964.
- [Let72] **A.V. Letnikov**. Treatements related to the theory of integrals of the forme $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)du$. Mat.Sb., Vol.7, 1872, PP.5-205.
- [Lub86] **Ch. Lubich** . Discretized fractional calculus. SIAMJ .Math. Anal., vol. 17,no. 3,pp. 704 –719, 1986.
- [Oli86] **P.D. Olivier** : Analytical design of linear feedback controls, IEEE Trans. Automat. Contr.Vol.AC34 N°5 pp53-54, 1986.
- [Ous83] **A. Oustaloup**. Système asservis linéaires d'ordre fractionnaire, Edition Masson, Paris, 1983.
- [Ous90] **A. Oustaloup** . Du désordre dans la nature a l'approche CRONE a travers la fractalité et la dérivation non entière, laboratoire d'automatique et de productique (LAP)-EP2026CNRS-1990
- [Ous91] **A. Oustaloup** . La commande CRONE : commande robuste d'ordre non entier ; Editions Hermes-1991.
- [Ous98] **A. Oustaloup, J. Sabatier and X. Moreal**. From Fractal robustness to the CRONE approach, ESIAM, Proceedings, N° 5, pp 177-192, 1998.

- [Pet99] **I. Petràš.** The Fractional-order Controllers : Methode for their synthesis and application. J.Of Electrical Engineering,vol.50, no, 9-10, Brastislava, pp.284-288, 1999 .
- [Pet00] **I. Petras.** Control of fractional order chua's system, Technical university of Kosice , pp1-4, 2000.
- [Pod97] **I. Podlubny.** The Laplace transforme Methode for Linear Differential Equations of The Fractional Order. Slovak Academy of Sciences. Institute of Experimental Physique. UEF-02-94, pp1-29, N°9710005V1, 30 Oct 1997 .
- [Pod99] **I. Podlubny.** Fractional-order system and $PI^{\alpha}D^{\mu}$ controllers. IEEE Transaction on automatic contr. Vol 44,No.1(1999),208-214.
- [Pod99-b] **I. Podlubny.** Fractional Differential Equations . Academie Press, San diego.1999.
- [Pod97] **I. Podlubny.** The LAPLACE transformation method for linear differential equations of the fractional order, TECHREPORT of SAS, Institute of experimental physics,1997.
- [Pol87] **E. Polak.** On the mathematical foundation of nondifferentiable optimization in engineering design. SIAM Review Vol.29 N° 1 p 21-89 1987.
- [Pol89] **E.Polak, S.E.Salcudean.** On the design of linear multivariable feedback systems via constrained nondifferentiable optimization in H^{∞} sapace. IEEE Trans.Automat. Contr. Vol.AC34 N°3 p268-276 1989.
- [Pol89-b] **E.Polak, T.L.Wuu.** On the design of stabilizing controllers via semi infinite optimisation. IEEE Trans.Automat. Contr. Vol.AC34 N°2 p196-200 1989.
- [Vin00] **B. M .Vinagre, P. Podlubny, I., Hernandez, A., Feliu, V.** Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. Fractional calculus & applied Analysis, vol. 3, on.3, pp.945-950. 2000.
- [Vin01] **B. M .Vinagre, YangQuan Chen, I. Petras.** Tow methods for direct discretization of fractional order Differentiator/ Integrator.Technical Univesity of kosice.Report , vol. 3, on.3, pp.1-14. 2001. Slovak Republic.
- [Zam81] **G. Zames.** Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations multiplicative semi norms and approximate inverses. IEEE Trans. Circuits Syst. Vol. CAS 26 N°8 p 301-320 1981.
- [Zam83] **G. Zames, B. A. Francis.** Feedback, minimax sensitivity and optimal robustness. IEEE Trans. Circuits Syst. Vol. CAS 28 N°5 p 585-600 1983.

Abstract: In automatic control the determination of the controller parameters during the design presents a major interest of the research work to develop new efficient control algorithms. In this work our interest is focused on determination of controller's parameters using optimization technique. In close loop, qualitative specifications of the process are generally well-known. The difficulty appears when these specifications are to be transcribed in a mathematical formalism suitable for the resolution methods. Classically, the specifications are used to write an optimization criterion with some constraints. But satisfactory solutions to the optimization problems are not necessarily. Satisfactory for the original control problem. This is precisely due to the fact that the transcription is not reliable or imprecise. Is interested in the most reliable transcription of specification as they are given by industrials, without major care about the possible complexity of the obtained optimization problem. Once this is accomplished, we consider the resolution of the optimization problem. The specifications, depending their nature are transcribed as conventional constraints or functional constraints, this latter have analytical properties making the obtained optimization problem a semi-infinite problem with inequality constraints. Algorithms solving such problems are complexes and take long time to converge. Our contribution is to solve this problem by trying to simplify it by exploiting the properties of fractional order controllers. Indeed, the maximum overshoots of the response of such controller are independent of their parameters, these properties permit to transform the functional constraints on conventional constraints, which allows us to use simple algorithm to obtain an optimal controller. Then, we will have only to find an equivalent integer order controller to the obtained fractional order controller.

Key words: Fractional-order controller, fractional order system, optimization system, fractional differentiate, fractional calculus