

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA BOUMERDES
FACULTE DES HYDROCARBURES ET DE LA CHIMIE



Département Transport et Equipements des Hydrocarbures
Laboratoire de Génie Physique des Hydrocarbures

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Génie mécanique

Option : Thermo-fluide

Présentée par : KHELIFI TOUHAMI Mohamed Salah

THEME

**SIMULATION NUMERIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE
DANS UN BAC DE STOCKAGE DE GNL**

Soutenue publiquement le 29/01/2012 devant le jury :

| | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------------|--------------------|
| KESSAL Mohand | Professeur | UMBB(Boumerdès) | Président |
| BENBRIK Abderrahmane | Professeur | UMBB(Boumerdès) | Directeur de thèse |
| DIZENE Rabah | Professeur | USTHB(BabEzzouar) | Examineur |
| AZZI Abdelwahid | Professeur | USTHB(BabEzzouar) | Examineur |
| MOHAMEDI Kamel | Professeur | UMBB(Boumerdès) | Examineur |
| RETIEL Nouredine | Maître de Conférences | UAIBM(Mostaganem) | Examineur |

Boumerdes 2012

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ma mère et mon père

Mes frères et sœurs

Ma femme

Remerciements

Le présent travail a été effectué au sein du laboratoire de Génie Physique des Hydrocarbures (LGPH) de la faculté des Hydrocarbures et de la Chimie à l'Université M'Hamed Bougara de Boumerdès, dans le cadre d'un accord programme CMEP en partenariat avec le Laboratoire d'Etudes Thermiques (LET) de l'Ecole Supérieure Nationale de Mécanique et d'Aérotechnique (ENSMA) de Poitiers (France), sous la direction de Monsieur **Abderrahmane Benbrik**, professeur à l'UMBB (Responsable de l'accord programme côté algérien). Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour son soutien constant et ses précieux conseils et de m'avoir fait confiance pour cette longue et ambitieuse étude.

Je tiens aussi à remercier très chaleureusement, Monsieur **Denis Lemonnier** (Responsable de l'accord programme côté français) pour son accompagnement, ses orientations, ses idées et la qualité de ses conseils qui m'ont permis d'évoluer dans mon travail.

Je suis en particulier très sensible à l'honneur que m'a fait Monsieur **M. Kessal** (professeur à l'UMBB) pour avoir accepté de présider le jury d'examen de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Messieurs : **R. Dizene** (professeur à l'USTHB), **A. Azzi** (professeur à l'USTHB), **K. Mohammedi** (professeur à l'UMBB) et **N. Retiel** (Maître de conférences A à l'Université de Mostaganem) d'avoir bien voulu participer à mon jury de thèse et d'avoir examiné mon travail.

Je remercie également ceux qui ont bien voulu m'aider à la lecture de cette thèse : **A. Khelifi, M. Kecir et K. Khaldi.**

Je souhaite également témoigner toute ma sympathie à l'ensemble d'amis et collègues enseignants pour leur soutien et leur disponibilité. Je pense particulièrement à **S. Laouar, K. Sahnoune, A. Laouari...**

Que mes parents trouvent en ces lignes toute la reconnaissance qui leur est due, de m'avoir toujours encouragé dans mes choix et de m'avoir donné les moyens pour y arriver.

Sans oublier ma femme pour sa patience pendant toutes mes années de recherche ainsi que pour son encouragement quotidien.

Enfin je m'excuse auprès de mes amis et collègues et de toute personne ayant contribué de près ou de loin à ce travail de ne pouvoir tous les citer.

Résumé

Le processus d'évaporation du gaz naturel liquéfié (GNL) dans les bacs de stockage aériens est étroitement lié aux infiltrations thermiques à travers les parois. La maîtrise de ce phénomène revêt une importance particulière parce qu'il cause une perte sensible de quantité, modifie la qualité du produit et peut avoir une incidence sur la sécurité du stockage.

La plupart des études déjà abordées portent sur le calcul du taux d'évaporation par des modèles simples unidimensionnels et parfois par introduction des lois thermodynamiques au niveau de l'interface liquide-vapeur. D'autres travaux utilisent des modèles à deux phases en deux dimensions afin d'obtenir le taux d'évaporation surtout dans le cas du Rollover. Alors que très peu de travaux numériques ou expérimentaux ont été étudiés dans les réservoirs présentant un chauffage latéral des liquides cryogéniques en état de repos et non stratifié initialement.

Dans ce travail, nous étudions numériquement la convection naturelle à l'intérieur de la phase liquide stockée dans un écoulement bidimensionnel. La densité de flux de chaleur d'évaporation est évaluée par la loi de Hashemi-Wesson. L'utilisation des modèles de turbulence est extrêmement importante vu les valeurs élevées des nombres de Rayleigh correspondants aux hauteurs réelles des réservoirs dans les unités de liquéfaction du gaz.

La formulation mathématique repose sur la discrétisation des équations de quantité de mouvement et d'énergie ainsi que les équations de turbulence k-oméga à faible nombre de Reynolds avec la méthode des volumes finis en adoptant le schéma de loi de puissance. Les conditions aux limites sont basées sur le chauffage latéral par une densité de flux de chaleur constante et un changement de phase à la surface libre par une densité de flux de chaleur d'évaporation en plus d'une densité de flux convectif. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour résoudre le couplage vitesse-pression. Les équations sont résolues ligne par ligne à l'aide de l'algorithme Thomas. La méthode purement implicite a été utilisée pour l'intégration dans le temps de toutes les équations considérées. La solution est supposée être convergente lorsque le critère de convergence est satisfait.

Les résultats ont été validés numériquement dans une cavité cylindrique à faibles nombres de Rayleigh et expérimentalement dans une cavité carrée à des nombres de Rayleigh élevés. Les résultats concernant la convection naturelle dans le bac de stockage ont été présentés sous forme de contours de température et des champs de vitesse en fonction du nombre de Rayleigh variant entre 10^{12} et 10^{17} . Ces résultats montrent bien une seule recirculation principale et elle est d'autant plus accélérée que le nombre de Rayleigh est élevé.

Deux corrélations ont été obtenues pour le nombre de Nusselt moyen latéral et le nombre de Nusselt moyen de surface. Le refroidissement convectif au niveau de la surface libre tend à s'égaliser avec l'évaporation lorsque le nombre de Rayleigh est très élevé. L'évaporation est de plus en plus concentrée près des parois avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et elle tend à s'uniformiser dans le reste de la surface libre.

Mots clés : Convection naturelle, Turbulence, Méthode des volumes finis, Stockage du GNL

Abstract

The evaporation process of the liquefied natural gas (LNG) storage tanks in air is closely related to heat infiltration through the walls. Control of this phenomenon is of particular importance because it causes a significant loss of quantity and quality of the product and may affect the safety of storage.

Most of the studies already discussed have calculated the rate of evaporation by simple one-dimensional models and sometimes by introducing the laws of thermodynamics at the liquid-vapor interface. Other studies using models of two phases flow and considering it two dimensional to obtain the evaporation rate in the case of rollover. This last phenomenon was also studied taking into account a stratified LNG initially in CFD simulations. While very few numerical or experimental work were studied in tanks having a heating side of cryogenic liquids at rest and initially none stratified.

In this work, we study numerically the natural convection inside the liquid phase stored in the tank in two dimensional flows. The evaporative heat flux is evaluated by Hashemi Wesson law. The use of turbulence models is extremely important because the Rayleigh numbers become very high when they correspond to the actual heights of the reservoirs in gas liquefaction plants.

The mathematic formulation is based on the equations of momentum and energy equations and the k-omega turbulence at low Reynolds number with the finite volume method by adopting the scheme of power law. The boundary conditions are based on the lateral heating by a constant heat flux and a phase change at the free surface by evaporative heat flux and convective cooling heat flux. The SIMPLER algorithm is used to solve the velocity-pressure coupling. The equations are solved line by line using Thomas algorithm. Fully implicit method was chosen for integration in time of all the equations considered. The solution is assumed to be converged when the convergence criterion is satisfied.

The results were validated numerically in a cylindrical cavity at low Rayleigh number and experimentally in a square cavity at high Rayleigh number. The results for natural convection in the storage tank have been presented as contours of temperature and velocity fields based on the Rayleigh number ranging between 10^{12} and 10^{17} . These results clearly show a single principal recirculation and it is even more accelerated when the Rayleigh number is high.

Two correlations were obtained for the average lateral Nusselt number and average Nusselt at the surface. Convective cooling at the free surface tends to equalize with the evaporation when the Rayleigh number is very high. Evaporation is more concentrated near the walls with increasing Rayleigh number and it tends to become uniform in the rest of the free surface.

Key words: Natural convection, Turbulence, Finite volume method, LNG Storage

Sommaire

| | |
|---|--------------|
| Nomenclature | IX |
| La liste des figures | XI |
| La liste des tableaux | XIII |
| Introduction générale | 1 |
| CHAPITRE 1 : Revue Bibliographique | 5-18 |
| 1.1 Introduction | 5 |
| 1.2 Convection naturelle | 6 |
| 1.3 Travaux antérieurs | 7 |
| 1.3.1 Cavités carrées | 7 |
| 1.3.2 Cavités cylindriques | 10 |
| 1.3.3 Réservoirs de stockage | 11 |
| 1.4 Problématique | 14 |
| 1.4.1 Stockage du GNL | 14 |
| 1.4.2 Evaporation du GNL | 14 |
| CHAPITRE 2 : Formulation mathématique | 19-33 |
| 2.1 Introduction | 19 |
| 2.2 Equations de quantité de mouvement et d'énergie | 19 |
| 2.3 Modélisation de la turbulence | 23 |
| 2.3.1 Modèle $k - \varepsilon$ standard | 24 |
| 2.3.2 modèle $k - \omega$ standard | 26 |
| 2.3.3 modèle $k - \omega$ à faible nombre de Reynolds | 28 |
| 2.4 Paramètres caractéristiques et adimensionnement des équations du problème | 29 |
| 2.4.1 Paramètres caractéristiques | 29 |
| 2.4.2 Adimensionnement des équations de quantité de mouvement et d'énergie | 29 |
| 2.4.3 Adimensionnement du modèle $k - \omega$ à faible nombre de Reynolds | 30 |
| 2.5 Conditions aux limites | 32 |
| CHAPITRE 3 : Méthode numérique | 34-61 |
| 3.1 Introduction | 34 |
| 3.2 Principe de la méthode des volumes finis | 35 |
| 3.3. Application de la méthode aux équations du problème considéré | 37 |
| 3.3.1 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement | 37 |
| 3.3.2 Linéarisation du terme source | 42 |
| 3.3.3 Algorithme de résolution du couplage vitesse-pression | 44 |
| 3.3.4 Résolution du système d'équations | 50 |

| | |
|---|----------------|
| 3.3.5 Stabilité et convergence | 52 |
| 3.4 Validation du code de calcul | 56 |
| 3.4.1 Régime laminaire | 56 |
| 3.4.2 Régime turbulent | 57 |
| CHAPITRE 4 : Résultats et Discussions | 62-99 |
| 4.1. Introduction | 62 |
| 4.2 Convection naturelle en régime laminaire (cavité cylindrique) | 63 |
| 4.2.1 Influence du maillage | 63 |
| 4.2.2 Champs de vitesse et de température | 65 |
| 4.2.3 Densité du flux d'évaporation | 70 |
| 4.3 Convection naturelle en régime turbulent (bac de stockage du GNL) | 71 |
| 4.3.1 Influence du maillage | 71 |
| 4.3.2 Champs de vitesse et de température | 73 |
| 4.3.3 Paramètres de turbulence | 86 |
| 4.3.4 Nombres de Nusselt et densité du flux d'évaporation | 92 |
| Conclusions Générales | 100-102 |
| Références Bibliographiques | 103-107 |

Nomenclature

Symboles latins :

a : Diffusivité thermique, $m^2 s^{-1}$

a_t : Diffusivité thermique turbulente, $m^2 s^{-1}$

Al : Rapport d'allongement du bac

D : Diamètre du bac, m

D_m : Conductance de diffusion ($m : e, w, n, s$)

F_m : Fonction exprimant le terme inertiel ou débit d'écoulement ($m : e, w, n, s$)

g : Accélération gravitationnelle, $m s^{-2}$

Gr : Nombre de Grashof = $g \beta \Delta T_0^* H^3 / \nu^2$

H : Hauteur du bac, m

h : Coefficient d'échange par convection adimensionnel

J : Flux total (convection+diffusion)

k^* : Energie cinétique turbulente par unité de masse, $m^2 s^{-2}$

Nu_l : Nombre de Nusselt latéral adimensionnel

Nu_s : Nombre de Nusselt de surface adimensionnel

Nu_{moy} : Nombre de Nusselt moyen latéral adimensionnel = $\int_0^1 Nu_l . dz$

Pr : Nombre de Prandtl du liquide = ν / a

Pr_t : Nombre de Prandtl turbulent, ν_t / a_t

p : Pression adimensionnelle = $P^* / \rho (\nu / H)^2$

Ra : Nombre de Rayleigh = $g \beta \Delta T_0^* H^3 / \nu a$

r, z : Coordonnées adimensionnelles radiale et axiale

T : Température adimensionnelle = $T^* - T_0^* / \Delta T_0^*$

t : Temps adimensionnel = $t^* / (H^2 / \nu)$

u, v : Vitesses radiale et axiale adimensionnelles

Symboles grecs :

φ : Densité du flux de chaleur adimensionnelle

β : Coefficient d'expansion thermique = $-\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial T^*}\right)_p, K^{-1}$

ε^* : Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente par unité de masse, $m^2 s^{-3}$

ω^* : Taux de dissipation spécifique de l'énergie cinétique turbulente, s^{-1}

λ : Conductivité thermique, $W m^{-1} K^{-1}$

ΔT_0^* : Ecart de température de référence = $\varphi_l^* H / \lambda$

Δt : Pas de temps adimensionnel

Δr : Pas d'espace selon la direction radiale adimensionnel

Δz : Pas d'espace selon la direction axiale adimensionnel

ρ : Masse volumique, $Kg m^{-3}$

μ : Viscosité cinématique, $Kg m^{-1} s^{-1}$

ν : Viscosité cinématique, $m^2 s^{-1}$

ν_t : Viscosité turbulente adimensionnelle = ν_t^* / ν

Exposant

* : Variable dimensionnelle pour les variables ($\varphi, \nu, p, t, r, z, u, v, T, k, \omega, h, \nu_i$)

- : Variable moyenne

Indice

0 : Référence

c : Chaude

f : Froide

sat : Saturation

ev : Evaporation

co : Convective

l : Latérale

t : Turbulente

moy : Moyenne

s : Surface

nb : Nœuds voisins

p, e, w, n, s : Relatifs aux points du calcul Centre, Est, Ouest, Nord et Sud

Liste des figures

Chapitre 1

Figure 1.1 : Schéma du bac de stockage en présence des infiltrations thermiques et Evaporation

Chapitre 2

Figure 2.1 : Représentation graphique du domaine de calcul avec conditions aux limites

Chapitre 3

Figure 3.1 : Discrétisation d'un domaine en volumes

Figure 3.2 : Pratique n°1 utilisée pour la discrétisation d'un domaine

Figure 3.3 : Pratique n°2 utilisée pour la discrétisation d'un domaine

Figure 3.4 : Volume de contrôle à travers lequel se fait l'intégration

Figure 3.5 : volume de contrôle relatif à l'équation de continuité

Figure 3.6 : Illustration d'une grille décalée pour u et v

Figure 3.7 : Volumes de contrôle relatifs aux deux composantes de la vitesse

Figure 3.8 : Volume de contrôle correspondant à l'équation de continuité

Figure 3.9 : Variation de la vitesse axiale en fonction de r à mi-hauteur de la cavité pour un nombre de Rayleigh $Ra=10^5$ et $Pr=0,71$

Figure 3.10 : Variation de la température en fonction de r à mi-hauteur de la cavité pour un nombre de Rayleigh $Ra=10^5$ et $Pr=0,71$

Figure 3.11 : cavité testée par le code de calcul

Figure 3.12 : Variation de la vitesse verticale en fonction de x à mi hauteur de la cavité

Figure 3.13 : Variation de la température en fonction de x à mi hauteur de la cavité

Figure 3.14 : Variation du nombre de Nusselt le long de la paroi chaude en fonction de z

Figure 3.15 : Variation du nombre de Nusselt le long de la paroi froide en fonction de z

Figure 3.16 : Variation de l'énergie cinétique turbulente dimensionnelle, k^*

Chapitre 4

Figure 4.1 : Maillages utilisés pour le régime laminaire $Ra=10^3$ à 10^5 et $Pr=2$ pour $Al = 1/3$, $Al = 1/2$ et $Al = 1$

Figure 4.2 : Champs de température pour $Ra= 10^5$ et $Pr=2$ pour $Al =1/3$, $1/2$ et 1

Figure 4.3 : Champs de vitesse pour $Ra= 10^5$ et $Pr=2$ pour $Al=1/3$, $1/2$ et 1

Figure 4.4 : Variation de la vitesse maximale pour $Ra=10^3$ à 10^5 et $Al=1/3$, $1/2$ et 1

Figure 4.5 : Variation de la densité du flux d'évaporation en fonction du rayon de la cavité pour $Ra=10^3$ à 10^5 et $Al=1/3$, $1/2$ et 1

Figure 4.6 : Variation de la vitesse axiale en fonction de la position radiale à $z=0,5$ pour un nombre de Rayleigh égal à 10^{15}

Figure 4.7 : Variation de la température en fonction de la position radiale à $z=0,5$ pour un nombre de Rayleigh égal à 10^{15}

Figure 4.8a : champs de températures et de vitesses pour les nombres de Rayleigh $10^{12}, 10^{13}$

Figure 4.8b : champs de températures et de vitesses pour les nombres de Rayleigh $10^{14}, 10^{15}$

Figure 4.8c : champs de températures et de vitesses pour les nombres de Rayleigh $10^{16}, 10^{17}$

Figure 4.9a : Variation de la vitesse radiale en fonction de z à $r=0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}

Figure 4.9b : Variation de la vitesse radiale en fonction de z à $r=0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

Figure 4.9c : Variation de la vitesse radiale en fonction de z à $r=0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

Figure 4.10a : Variation de la vitesse axiale en fonction de r à $z=0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}

Figure 4.10b : Variation de la vitesse axiale en fonction de r à $z=0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

Figure 4.10c : Variation de la vitesse axiale en fonction de r à $z=0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

Figure 4.11a : Variation de la température en fonction de r à $z=0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}

Figure 4.11b : Variation de la température en fonction de r à $z=0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

Figure 4.11c : Variation de la température en fonction de r à $z=0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

Figure 4.12a : Variation de la température en fonction de z à $r=0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}

Figure 4.12b : Variation de la température en fonction de z à $r=0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

Figure 4.12c : Variation de la température en fonction de z à $r=0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

Figure 4.13a : Variation de l'énergie cinétique turbulente en fonction de r à $z=0,5$ pour les nombres de Rayleigh $10^{12}, 10^{13}$

Figure 4.13b : Variation de l'énergie cinétique turbulente en fonction de r à $z=0,5$ pour les nombres de Rayleigh $10^{14}, 10^{15}$

Figure 4.13c : Variation de l'énergie cinétique turbulente en fonction de r à $z=0,5$ pour les nombres de Rayleigh $10^{16}, 10^{17}$

Figure 4.14a : Distribution de la viscosité turbulente dans le plan $r-z$ pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}

Figure 4.14b : Distribution de la viscosité turbulente dans le plan $r-z$ pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

Figure 4.14c : Distribution de la viscosité turbulente dans le plan $r-z$ pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

Figure 4.15a : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}

Figure 4.15b : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

Figure 4.15c : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

Figure 4.16a : Variation du nombre de Nusselt local le long de la surface libre du GNL pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}

Figure 4.16b : Variation du nombre de Nusselt local le long de la surface libre du GNL Pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

Figure 4.16c : Variation du nombre de Nusselt local le long de la surface libre du GNL Pour les nombres de Rayleigh 10^{15} et 10^{16}

Figure 4.17 : Variations des logarithmes des nombres de Nusselt moyen latéral et de surface en fonction du logarithme du nombre de Rayleigh

Figure 4.18 : Variation de la densité du flux d'évaporation en fonction de r sur la surface libre du GNL pour tous les nombres de Rayleigh

Liste des tableaux

Chapitre 3

Tableau 3.1 : Expressions de la fonction $A(|P_m|)$ pour différents schémas

Tableau 3.2 : Forme linéarisée du terme source pour les différentes équations

Chapitre 4

Tableau 4.1 : Température maximale et minimale du GNL en régime laminaire pour plusieurs rapports d'allongement de la cavité

Tableau 4.2 : Température latérale, température moyenne du GNL et vitesse d'écoulement maximale

Tableau 4.3 : Nombres de Nusselt moyen et maximal le long de la paroi latérale et la surface libre ainsi que la densité du flux d'évaporation

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Au cours des dernières décennies, la consommation mondiale du gaz naturel liquéfié (GNL) a augmenté et il est prédit que cette croissance sera en progression continue, compte-tenu essentiellement de la demande croissante des grands marchés comme celui de la Chine et l'Inde. Afin d'ajuster l'offre à la demande, le stockage du GNL s'impose.

Le gaz naturel liquéfié est stocké à des pressions légèrement supérieures à la pression atmosphérique et à des températures très basses (-162°C). Dans ces conditions de stockage, le volume est diminué et le transport est facilité par rapport au stockage gazeux. En effet, le volume du liquide est d'environ 600 fois plus petit que celui du gaz stocké aux conditions normales. D'autre part, le stockage du gaz naturel comprimé (GNC) peut s'effectuer mais à des pressions très élevés de l'ordre de 24,8 MPa dans des citernes en acier.

Il existe plusieurs types de stockage du GNL: le stockage enterré, semi enterré ou aérien. Ce dernier présente certains avantages au profit d'une construction du bac plus coûteuse. Le GNL est stocké dans des bacs cylindriques à double paroi entre lesquelles est interposé un isolant (perlite) : la paroi externe, en contact avec l'air atmosphérique, est généralement construite en béton ou en acier, alors que la paroi interne (liner) qui est en contact directe avec le GNL, est fabriquée en acier à 9% de nickel. L'existence d'un isolant de 0,9 m d'épaisseur entre ces parois réduit de manière certaine la conductibilité

du bac mais ne l'annule pas, d'où la présence d'infiltrations thermiques provenant de l'extérieur (transfert de chaleur aussi minime soit-il du milieu extérieur vers le milieu intérieur), entraînant une évaporation du GNL par la convection naturelle dans le liquide. Les vapeurs ainsi obtenues à la surface libre du GNL sont évacuées vers l'extérieur par une soupape de sécurité conçue pour maintenir la pression constante à l'intérieur du bac. Afin de bien comprendre le phénomène d'évaporation dans les bacs de stockage, il est essentiel d'effectuer une étude aussi détaillée que possible de la convection naturelle.

Les objectifs poursuivis dans cette thèse sont :

- Développer des codes numériques basés sur la formulation des volumes finis pour prédire les champs de vitesse et de température pour les écoulements de convection naturelle en régime laminaire et turbulent.
- Etudier l'influence du nombre de Rayleigh sur le phénomène d'évaporation surtout en régime turbulent correspondant au stockage du GNL. Une attention particulière est portée aux variations du nombre de Nusselt.

L'étude de la convection naturelle est effectuée en considérant les conditions aux limites réelles de stockage du GNL.

- Le mouvement du liquide est généré en imposant une densité de flux de chaleur latérale.
- La densité du flux de chaleur évaporée ainsi que celle du flux de chaleur convectif sont calculées au niveau de la surface libre du liquide respectivement par une loi correspondante à l'évaporation du GNL et par une loi de Newton correspondante au refroidissement convectif.

Dans un premier temps, une simulation numérique a été faite en considérant un écoulement laminaire dans une cavité cylindrique. Les équations de Navier-Stokes

et l'équation d'énergie ont été résolues par la méthode des volumes finis. Des résultats ont été obtenus et publiés pour un nombre de Rayleigh (Ra) inférieur à 10^5 et un nombre de Prandtl (Pr) égal à 2 en fonction du rapport d'allongement (Al) de la cavité. Cette simulation a permis de donner une idée générale sur ce qui se passe dans des cavités de petites dimensions ou dans un bac de grandes dimensions soumis latéralement à une densité de flux de chaleur (infiltrations) très faible qui ne correspond pas à une situation réelle.

Dans un deuxième temps, notre étude a été étendue à un écoulement turbulent imposé par la hauteur importante du bac de stockage. Dans ce cas, les valeurs du nombre de Rayleigh sont de l'ordre de 10^{17} .

Bien que le problème soulevé dans cette thèse présente certaines difficultés concernant le choix et la convergence des modèles de turbulence, le type de maillage à utiliser, l'apparition d'un retour vers les solutions laminaires et l'absence presque totale des résultats expérimentaux dans le cas des cavités cylindriques, il constitue un travail de recherche important dans la mesure où il permet d'évaluer la densité du flux d'évaporation et par conséquent la densité du flux d'évaporation massique dans les deux cas de régimes d'écoulements.

La thèse est subdivisée en plusieurs chapitres qui se résument comme suit :

Chapitre 1 : Ce chapitre est consacré à la présentation d'une revue bibliographique concernant la convection naturelle dans des cavités carrées, cylindriques et dans des réservoirs de stockage de façon générale. Nous présentons par la suite, le problème à étudier dans ce mémoire.

Chapitre 2 : Ce chapitre fait l'objet de la présentation des équations de quantité de mouvement, d'énergie et de turbulence. Ces dernières reposent sur plusieurs modèles :

le modèle $k - \varepsilon$ standard, le modèle $k - \omega$ standard et le modèle $k - \omega$ à faible nombre de Reynolds.

Nous avons développé dans cette partie, en se basant sur l'approximation de **Boussinesq [1]**, un modèle mathématique décrivant le phénomène de convection naturelle en régime laminaire et en régime turbulent. La formulation mathématique repose sur des équations écrites en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Les équations de quantité de mouvement et d'énergie ainsi que les équations de turbulence $k - \omega$ à faible nombre de Reynolds ont été présentées. Ce chapitre fait l'objet aussi de la présentation des conditions aux limites valables au stockage du GNL et de son évaporation.

Chapitre 3: Ce chapitre porte sur l'explication détaillée de la méthode des volumes finis utilisée pour la discrétisation des équations et l'élaboration du code de calcul numérique. Nous tenons à spécifier qu'en raison de l'absence de résultats théoriques et expérimentaux liés aux cavités cylindriques de grandes dimensions, nous avons validé notre code de calcul par comparaison aux résultats numériques obtenus avec des cavités cylindriques de petites dimensions et aux résultats expérimentaux en cavité carrée.

Chapitre 4: Cette partie a été divisée en deux grandes sous parties. La première concerne l'écoulement du GNL dans une cavité cylindrique en régime laminaire alors que la seconde traite l'écoulement du GNL dans un bac de stockage en régime turbulent. Le test de maillage a été analysé dans les deux sous parties pour confirmer l'indépendance des solutions. Des résultats ont été présentés et discutés dans les deux cas où des remarques importantes ont été tirées surtout en ce qui concerne le phénomène d'évaporation.

Conclusions générales: Enfin, nous terminons cette thèse par des conclusions générales qui résument les principaux résultats obtenus.

CHAPITRE 1 : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Introduction

L'étude des transferts de chaleur par convection naturelle dans les cavités carrées et cylindriques a suscité un intérêt primordial durant ces dernières décennies. Cet intérêt est dicté par le rôle joué par de telles configurations dans de nombreuses applications industrielles dans différents domaines : le refroidissement des composants électroniques, la climatisation, les échangeurs de chaleur, les centrales thermiques, les bacs de stockage, les systèmes d'isolation, etc.

Plusieurs travaux ont été réalisés en utilisant : l'expérimentation numérique (simulation numérique) et pratique (expérience de laboratoire), ainsi que les développements analytiques.

La simulation numérique est confrontée aux problèmes de calcul et d'espace mémoire surtout lorsqu'il s'agit des dimensions tridimensionnelles et particulièrement en géométrie complexe, en présence des phénomènes physiques complexes (tels que la turbulence, les écoulements diphasiques ...). Néanmoins elle reste la méthode la moins coûteuse et la plus utilisée. L'évolution rapide des capacités des calculateurs, ces dernières années, a permis un progrès notable dans la compréhension du phénomène de convection naturelle surtout lorsqu'il s'agit des écoulements turbulents.

1.2 Convection naturelle

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluide adjacentes ; l'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement (**Kreith [2]**).

Le transfert de chaleur par convection est classifié selon la nature de l'écoulement. On distingue principalement deux modes ;

- La convection forcée intervient lorsque l'écoulement est causé par un moyen externe.
- La convection naturelle ou libre fait référence aux écoulements engendrés par les forces de flottabilité.

En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densités dues au fait que la température ne soit pas uniforme. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions à température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants descendants se produit pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre (**Body [3]**).

Pour formaliser la convection naturelle, il faut décrire le couplage des champs de température, de pression et de vitesse à partir des équations de conservation de quantité de mouvement, de la masse et d'énergie.

En 1903, à l'époque même où Rayleigh s'intéresse à la convection, Boussinesq propose une simplification de ces équations de façon à ne conserver que les ingrédients nécessaires et suffisants à la convection thermique.

Les hypothèses de Boussinesq [1] consistent à supposer que les différentes propriétés thermodynamiques et de transport du fluide sont indépendantes de la température et de la pression. Elles supposent aussi que le fluide est incompressible mais il conserve bien entendu le terme de poussée d'Archimède « le moteur de la convection » directement lié à la dilatation ou à la contraction thermique (Roche [4]).

1.3 Travaux antérieurs

1.3.1 Cavités carrées

La simulation numérique de la convection naturelle dans les cavités carrées en régime laminaire a été largement abordée. Cependant, on trouve des travaux très anciens comme celui de Batchelor [5] qui a été le premier à donner une formulation mathématique du problème. Il a donné des solutions approximatives en effectuant des calculs à la main. Il a présenté des graphes sous forme d'isothermes et de lignes de courant pour la convection naturelle à l'intérieur d'une cavité. Ostrack [6] a aussi amélioré des calculs pour un nombre de Prandtl élevé mais le nombre de Grashof a été fixé à l'unité ($Gr = Ra.Pr$) pour les fluides utilisés. D'autre part, Wilkes et Churchill [7] ainsi que Gill [8] ont donné des solutions approximatives pour les écoulements de couche limite au niveau de la cavité. La forme finale de ce problème a été définie par De Vahl Davis [9] et les résultats obtenus sont présentés pour un nombre de Rayleigh égal à 10^6 et constituent des solutions de référence.

Mallinson et De Vahl Davis [10] ont présenté des détails du calcul tridimensionnel pour les écoulements laminaires. Les calculs ont été faits pour différentes valeurs de Prandtl et de rapports d'allongement de la cavité ($Al = H/D$).

Peu de travaux ont été concentrés sur le processus de transition du régime laminaire au régime turbulent dans le cas des écoulements de convection naturelle. Jaluria et Gebhart [11] ont considéré le processus survenant au cours de la transition du régime laminaire au régime turbulent près d'une plaque verticale lorsque la surface est chauffée par un flux de chaleur uniforme.

Le premier travail introduisant le phénomène de turbulence a été celui de **Markatos et Pericleous [12]**. Ces auteurs ont utilisé le modèle turbulent $k-\varepsilon$ dans leur calcul. Ils ont performé une simulation bidimensionnelle pour un nombre de Rayleigh allant jusqu'à 10^{16} . Ils ont alors présenté des graphes incluant des isothermes, des lignes de courant et des champs de vitesse pour différentes valeurs de Rayleigh pour l'air ($Pr=0.71$). Le même modèle de turbulence a été utilisé par **Ozoe et al. [13]** pour des calculs bidimensionnels jusqu'à $Ra=10^{11}$ et $Al=2$. Ils ont présenté des résultats pour le champ d'écoulement. Des oscillations ont été rencontrées pour la fonction de courant pour des nombres de Rayleigh élevés. Ensuite des modèles de turbulence $k-\varepsilon$ ont été utilisés. On trouve aussi, le travail de **Henkes et al. [14]** qui ont effectué des calculs bidimensionnels en utilisant plusieurs versions du modèle de turbulence $k-\varepsilon$. Ces versions incluent le modèle $k-\varepsilon$ standard et les modèles $k-\varepsilon$ à faible nombre de Reynolds. Leurs résultats acquièrent l'état stationnaire non oscillant pour des nombres de Rayleigh élevés jusqu'à 10^{14} . Les simulations ont été appliquées pour l'eau et l'air. Des résultats pour le nombre de Nusselt ont été présentés. Ces derniers ont montré que les modèles à faible nombre de Reynolds possèdent une solution unique pour le même nombre de Rayleigh. Une comparaison des résultats de Nusselt avec les données expérimentales montrent la supériorité des modèles de turbulence à faible nombre de Reynolds.

Barakos et al. [15] ont utilisé le modèle $k-\varepsilon$ pour modéliser la turbulence dans une cavité carrée différentiellement chauffée. Les écoulements de convection naturelle turbulents utilisent un nombre de Rayleigh maximal égal à 10^{10} . La méthode des contrôles de volumes a été utilisée pour les équations de conservation pour les écoulements laminaire et turbulent.

D'autres modèles de turbulence ont été adoptés comme le modèle $k-\omega$ standard ou à faible nombre de Reynolds. Ce dernier modèle a été utilisé avec succès par **Peng et Davidson [16]** pour la simulation numérique des écoulements turbulents en convection naturelle. En fonction de l'analyse de la zone de transition, des solutions raisonnables ont été obtenues par le modèle $k-\omega$. Par contre, l'application du modèle $k-\varepsilon$, pour les cavités différentiellement chauffées pour des nombres de Rayleigh entre 10^{10} et 10^{12} , est confrontée à un problème dû aux solutions dépendantes du maillage au niveau de la zone de transition le long de la paroi verticale.

Toujours pour mieux simuler les écoulements surtout au niveau de la couche limite de la cavité carrée, **Liu et wen [17]** ont modélisé la turbulence avec quatre équations $k - \varepsilon - \overline{\theta^2} - \varepsilon_\theta$. Leur étude a été basée sur la non-isotropie des tensions de Reynolds et des flux de chaleurs turbulentes dans la couche limite.

Dans ce même contexte, **Choi et Kim [18]** ont mené une étude comparative sur le traitement des flux de chaleur turbulent. Trois cas ont été considérés pour ce traitement « Generalised Gradient Diffusion Hypothesis » (GGDH), « Algebraic Flux Model » (AFM) et « Differential Flux Model » (DFM). Les calculs ont été effectués pour les écoulements de convection naturelle turbulents dans une cavité rectangulaire ou carrée contenant de l'air respectivement avec $Ra = 4,3.10^{10}$ et $Ra = 1,58.10^9$. Les résultats obtenus ont été comparés avec les données expérimentales.

En dehors des travaux expérimentaux effectués dans les cavités rectangulaires comme ceux de **Cheeswright et al. [19]**, **Xin et Lequéré [20]**, **Dafa'alla et Betts [21]** et **Betts et Bokhari [22]**, on distingue les travaux expérimentaux effectués dans des cavités carrées différentiellement chauffées contenant de l'air comme celui de **Tian et Karayiannis [23]**. Ces derniers ont fixé les températures des parois chaude et froide respectivement à 50°C et 10°C donnant un nombre de Rayleigh de l'ordre de $1,58.10^9$. Les distributions de vitesse et de température ont été mesurées à différentes positions de la cavité. Les contraintes de cisaillement à la paroi et les nombres de Nusselt moyen ont été présentées. Leurs résultats peuvent être utilisés comme données Benchmark.

D'autre part, **Ampofo et Karayiannis [24]** ont présenté des résultats plus détaillés dans la même cavité que celle utilisée par [23]. Les vitesses et températures locales ont été mesurées à différentes positions de la cavité et les quantités moyennes et fluctuantes ont été présentées, de même que le nombre de Nusselt moyen, l'énergie cinétique ainsi que le taux de dissipation. Les tests ont été faits avec une forte précision. Cependant, les résultats obtenus peuvent former des données Benchmark et seront très bénéfiques pour la validation des codes CFD.

1.3.2 Cavités cylindriques

Les résultats expérimentaux sont très rares concernant l'étude de la convection naturelle dans les cavités cylindriques à l'exception du travail d'**Evans et al. [25]**. Ces derniers ont considéré une cavité cylindrique partiellement remplie par un liquide et chauffée latéralement aux parois. Une plage de nombre de Prandtl allant de 2 à 8 et un rapport d'allongement entre 1 et 3 ont été utilisés. Le nombre de Grashof varie entre 10^3 et 10^{11} balayant ainsi le régime laminaire et turbulent. Lorsque l'écoulement est instationnaire, les auteurs ont noté une bonne concordance entre les résultats obtenus analytiquement et expérimentalement

Par ailleurs, les travaux numériques disponibles dans la littérature concernent essentiellement la convection naturelle en régime laminaire. **Lemembre et Petit [26]** ont traité une cavité cylindrique contenant un liquide chauffé latéralement et refroidi uniformément par sa surface libre. Plusieurs liquides ont été testés en faisant varier le nombre de Prandtl, le nombre de Rayleigh étant inférieur à 10^5 . Les équations de fonction de courant et de vorticité sont r solv es par la technique des différences finies. Les valeurs de Nusselt latérale et de surface ont été calculées et comparées aux corrélations déjà reportées dans la littérature.

Benkhelifa et al. [27] ont présenté une étude numérique de la convection naturelle en régime laminaire et permanent dans une cuve cylindrique contenant de l'eau. Cette cavité de rapport d'allongement égal à 1 est chauffée au niveau des parois latérales et de la paroi supérieure mais refroidie par le bas. L'influence du nombre de Rayleigh sur le transfert thermique et sur le champ dynamique a été analys e en utilisant la méthode des volumes finis et l'algorithme SIMPLER.

Khelifi Touhami et al. [28] ont reconsidéré le même problème et avec la même méthode numérique que [26] pour une cavité cylindrique mais en utilisant dans ce cas du GNL avec des conditions aux limites différentes. Les résultats numériques obtenus ont été analysés pour des nombres de Rayleigh allant de 10^3 à 10^5 en fonction du rapport d'allongement de la cavité.

Dans le cas d'un régime turbulent, on trouve en particulier le travail de **Papanicolaou et Blessiotis [29]** qui ont étudié numériquement la convection naturelle instationnaire dans une cavité cylindrique contenant de l'eau. Celle-ci est chauffée latéralement par un flux constant. Le régime turbulent a été étudié pour des nombres de Rayleigh élevés allant jusqu'à 10^{15} . Ces auteurs ont testé plusieurs modèles de turbulence $k - \epsilon$ à faible

nombre de Reynolds. Ils ont étudié le développement de la stratification au cours du temps.

1.3.3 Réservoirs de stockage

La plupart des études présentes sur le stockage des liquides dans des réservoirs concernent principalement l'eau, de par son abondance. Plusieurs travaux ont été publiés dans ce domaine comme celui d'**Oliveski et al. [30]**. Ces études portent sur le stockage de l'eau dans un réservoir vertical durant un processus de refroidissement. Dans la première étape de leur investigation, ces auteurs ont comparé la distribution verticale de la température obtenue expérimentalement et numériquement. Ensuite, ils ont étudié l'influence du volume du réservoir, de son rapport d'allongement et de l'épaisseur de l'isolation sur le transfert de chaleur. La technique implicite en volumes finis avec un maillage uniforme a été adoptée dans le domaine liquide pour évaluer les champs de vitesse et de température.

Barzegar et Dehgan [31] ont étudié numériquement le transfert de chaleur entre le liquide de l'échangeur et le liquide interne au réservoir. Ils ont utilisé la méthode des volumes finis et l'algorithme SIMPLER pour le couplage entre les équations de mouvement et celle de l'énergie. Le modèle $k-\omega$ à faible nombre de Reynolds a été adopté. Cette étude porte également sur le comportement thermique instationnaire dans le réservoir de stockage et le processus de formation de la stratification.

Lorsqu'un réservoir est rempli de deux types de GNL dont l'un est préalablement stocké dans le réservoir et l'autre est récemment chargé, leurs masses volumiques sont différentes à cause de l'effet d'évaporation. Une stratification au niveau du liquide peut se produire. Après un chauffage latéral, les couches du liquide ainsi formées sont balancées dans le réservoir suivi d'une libération soudaine de grandes quantités de gaz d'évaporation ou BOG (Boil Off Gas). Ce phénomène appelé Rollover s'accompagne d'une augmentation rapide et non maîtrisée de la pression qui peut endommager parfois le réservoir. Depuis l'incident qui s'est déroulé en 1971 en Italie à la Spezia terminal méthanier, les chercheurs commençaient à s'intéresser à ce problème surprenant en employant soit des manipulations expérimentales ou des simulations numériques.

Pham et al. [32] ont étudié le phénomène de double diffusion dans le GNL stratifié initialement dans une cavité carrée chauffée latéralement et par la base. Les équations de fonction de courant, de vorticité et de turbulence $k - \varepsilon$ à faible nombre de Reynolds ont été résolues par la méthode des différences finies, basée sur un schéma ADI. Les résultats sous forme de champs de température et de concentration ont été obtenus pour un nombre de Grashof thermique $Gr_{th} \leq 10^{14}$ et un nombre de Grashof massique $|Gr_m| \leq 10^{15}$.

Bate et Morrison [33] ont modélisé la stratification du liquide GNL depuis sa formation jusqu'à sa rupture dans le réservoir de stockage. L'expérience a montré que cette évolution est composée de deux phases : une phase stable, où l'interface séparant les deux couches de GNL, stationnaire et une deuxième phase instable caractérisée par une migration d'interface résultant du phénomène de Rollover. Des modèles mathématiques ont été développés pour les deux phases. Pour la première phase une solution paramétrique a été employée, alors qu'une solution numérique a été développée pour la seconde.

Koyama [34] a étudié numériquement les différentes procédures de remplissage d'un réservoir contenant du GNL à différentes densités. Son but a été principalement orienté vers l'amélioration de la sécurité et la réduction des coûts. Il a obtenu des résultats numériques qui concordent bien avec ceux mesurés. Dans le cas d'un petit réservoir, l'étude montre que la différence initiale de densité et le taux de remplissage affectent la densité finale qui dépend directement du mode de stratification.

Les réservoirs de stockages sont de plus en plus isolés thermiquement en fonction du liquide stocké. Le liquide cryogénique nécessite une isolation très poussée comme l'hydrogène, l'oxygène, l'azote et le GNL. Cette isolation n'est jamais parfaite, les infiltrations thermiques provoquent des évaporations au niveau de la surface libre des liquides se trouvant à l'intérieur du réservoir. Les vapeurs de saturation sont maintenues à pression légèrement supérieure à la pression atmosphérique. Afin d'assurer ce contrôle de pression, une vanne de sûreté est placée sur le toit du bac. Une augmentation de pression au dessus de la pression de design implique un dégagement d'une quantité significative de gaz dangereux pour l'environnement.

Dans le but de minimiser ces pertes de vapeurs de GNL provoquant automatiquement des pertes en quantité du liquide, les chercheurs ont mené plusieurs tests sur le chauffage latéral des parois comme le travail d'**Aszodi et al. [35]**.

Ces auteurs ont mesuré les températures ainsi que les fractions de vide dans le liquide ce qui rend leurs résultats expérimentaux très intéressants.

Plusieurs travaux ont fait leur apparition ces derniers temps. **Jazayeri et Hasanzadeh Khoei [36]** ont étudié la croissance de la circulation naturelle et la stratification thermique dans les réservoirs de stockage de l'oxygène et de l'azote due aux transferts de chaleur provenant de l'environnement par un modèle mathématique. Le modèle 2D est considéré pour le calcul de la convection naturelle dans le domaine liquide en plus de l'utilisation d'un modèle thermodynamique pour estimer le taux de vapeur, une balance d'énergie étant appliquée à l'interface liquide-vapeur. **Khurana et al. [37]** ont fait une étude de la convection naturelle dans un réservoir de stockage d'hydrogène. La turbulence est étudiée entre $Ra = 1,2 \cdot 10^{12}$ et $Ra = 6 \cdot 10^{16}$. Le paramètre de stratification a été montré dans deux types de configuration de la paroi interne lisse et celle présentant des nervures. Ils ont montré que la paroi nervurée offre une réduction de la stratification et une diminution d'évaporation et que le processus de stratification se développe plus lentement dans le réservoir à paroi interne nervurée que celui présentant une paroi interne lisse.

Pour le stockage du gaz naturel liquéfié (GNL), on distingue d'une part le travail de **Chen et al. [38]** qui ont développé un modèle thermodynamique et de transfert de chaleur pour analyser les différents mécanismes de la chaleur ajoutée au GNL. Les propriétés et la composition du GNL ont été simulées. Les auteurs proposent d'utiliser des générateurs électriques ou des condenseurs afin de diminuer la pression dans le réservoir et d'éliminer les pertes par évaporation de cet hydrocarbure.

D'autre part, le travail de **Kim et al. [39]** repose sur un modèle dynamique hybride composé par des états dynamiques continus pour estimer le taux d'évaporation. Ces chercheurs se basent sur la compréhension du transfert d'énergie et de masse entre des couches stratifiées de GNL dans le réservoir de stockage en utilisant des états dynamiques discrets pour décrire la procédure opérationnelle du taux d'évaporation qu'il faut prévoir pour les compresseurs (BOG).

1.4. Problématique

1.4.1 Stockage du GNL

Le stockage d'énergie est indispensable à l'adaptation des rythmes de production à ceux de la consommation d'énergie : les stockages de gaz naturel liquéfié (GNL) en sont une application. Ces grands réservoirs de stockage de forme cylindrique [figure 1.1], dont la capacité peut atteindre 200 000 m³ peuvent présenter des configurations instables du fluide stocké vu l'existence du phénomène d'évaporation qui change la qualité du produit et diminue sa quantité. Le taux d'évaporation à la surface libre du GNL dans le réservoir de stockage dépend surtout des infiltrations thermiques à travers sa paroi latérale. Le GNL étant composé de plusieurs espèces chimiques, l'évaporation sélective ainsi que les mélanges successifs du GNL peuvent provoquer des stratifications. En effet, le GNL est stocké aux environs de 113 K à pression atmosphérique. Une densité de flux thermique très faibles de l'ordre de 10 W/m² est admise naturellement à travers la paroi latérale du réservoir qui n'est jamais adiabatique malgré son isolation thermique très poussée. Ces infiltrations engendrent des écoulements de convection naturelle. Ces dernières ont tendance à déstabiliser la stratification jusqu'à un rapide mélange des couches, mélange que l'on rend responsable de l'accélération de l'évaporation en surface libre, c'est-à-dire pertes de masse et d'énergie (**Lemembre [40]**). Depuis plusieurs années, à cause du nombre croissant de stockage de GNL à travers le monde, la recherche d'une minimisation de ces taux d'évaporation est devenue un intérêt fondamental et pratique pour les chercheurs. Notre objectif essentiel est d'étudier numériquement la convection naturelle dans le bac de stockage et d'évaluer par la suite la densité du flux d'évaporation.

1.4.2 Evaporation du GNL

Le phénomène d'évaporation a fait l'objet de nombreuses recherches au niveau de la surface libre d'un liquide. Ce phénomène est mal connu et les résultats obtenus sont souvent avant tout empiriques et difficilement généralisables. Son étude est très complexe et déborde largement le cadre de cette thèse. En particulier, l'évaporation à la surface libre du GNL est tout aussi mal connue. Rappelons que le GNL est un liquide multi-constituant stocké aux environs de 113 K à pression atmosphérique, c'est-à-dire

sous des conditions voisines du point d'ébullition (111,7 K sous la pression atmosphérique pour le méthane pur, son constituant majoritaire).

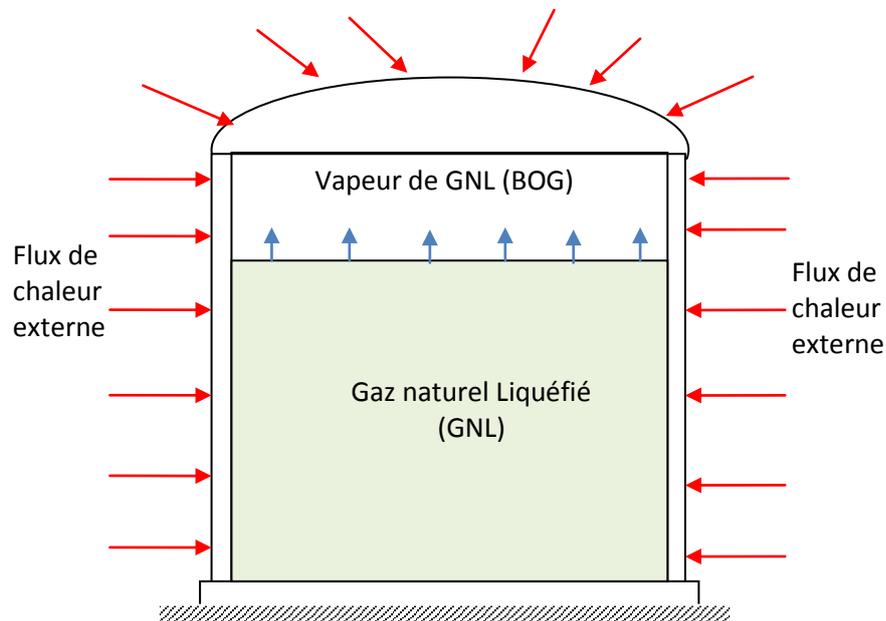


Figure 1.1 : Schéma du bac de stockage en présence des infiltrations thermiques et évaporation

Ce point d'ébullition augmente quand les composants les plus légers s'évaporent (le méthane et l'azote s'évaporent en premier lieu). L'évaporation peut être vue ici comme étant essentiellement, un processus de distillation. Par ailleurs, la composition de la phase gazeuse va évidemment surtout évoluer en teneur de méthane.

Enfin, le bilan thermique à la surface libre est difficilement calculable. Celui-ci implique probablement, en plus du transfert lié à la vaporisation, des transferts de chaleur sensible par rayonnement de surface et convection en phase gazeuse.

- **Le modèle d'Hashemi-Wesson.**

Dans le cadre des réservoirs de GNL, **Hashemi et Wesson [41]** ont proposé une description du phénomène d'évaporation. Afin d'étudier la réponse de la phase liquide aux changements de pression dans la phase gazeuse, ils ont développé un modèle que nous présentons par la suite.

L'idée de base du modèle est d'assujettir l'évaporation à un état de sursaturation du liquide en dessous de la surface libre, c'est-à-dire à une température supérieure à la température de saturation de la surface libre.

Les auteurs considèrent que la chaleur nécessaire à la vaporisation est fournie de manière continue par le volume de liquide sous la surface. Ce transfert thermique a pour moteur la différence de température entre le volume de liquide et la surface. Les auteurs précisent que cette chaleur peut provenir de l'extérieur par l'intermédiaire des parois de contact avec le liquide. Elle peut également être prélevée sur la chaleur sensible du liquide, ce qui abaisse progressivement sa température, réduisant ainsi l'écart positif de température entre le volume de liquide et la surface, et donc le taux d'évaporation.

Pour familiariser ces idées, les auteurs [41] partent de la corrélation donnant le nombre de Nusselt pour une couche fluide horizontale comprise entre une surface inférieure chauffée et une surface supérieure refroidie :

$$\left(Nu^* = C.Ra^{1/3} \right)_{strate} \quad (1.1)$$

$()_{strate}$: Equation entre parenthèses appliquée à la strate liquide du GNL

où Nu^* désigne le nombre de Nusselt $\varphi_{ev}^* e^* / \lambda \Delta T^*$ et Ra le nombre de Rayleigh égal à $g \beta \Delta T^* e^{*3} / \nu$. L'écart ΔT^* est la différence de température entre les deux surfaces horizontales distantes d'une épaisseur e^* . Dans le cas de deux surfaces rigides, la constante C vaut 0,069 d'après **Dropkin et Somerscales** [42]. Si la surface supérieure est une surface libre, C vaut 0,13 d'après **Jacob** [43]. On déduit l'expression de la densité de flux thermique :

$$\varphi_{ev}^* = C \lambda \left(\frac{g \beta}{\nu} \right)^{1/3} \Delta T^{*4/3} \quad (1.2)$$

Les auteurs affirment que la densité du flux d'évaporation φ_{ev}^* est indépendante de l'épaisseur e^* . La densité de flux massique d'évaporation \dot{m}^* s'obtient en divisant φ_{ev}^* par la chaleur latente de vaporisation L^* :

$$\dot{m}^* = \frac{C \lambda}{L^*} \left(\frac{g \beta}{\nu} \right)^{1/3} \Delta T^{*4/3} \quad (1.3)$$

Les auteurs [41] interprètent aussi les conséquences des variations de pression dans la phase gazeuse de la manière suivante : si cette pression baisse brusquement, la température de saturation à l'interface liquide vapeur chute immédiatement, augmentant ainsi l'écart de température entre la surface et le volume de liquide. Le flux thermique partant du liquide est donc plus élevé, accroissant dès lors le taux d'évaporation.

Les auteurs admettent que le taux d'évaporation peut s'écrire avec l'équation (1.3) en remplaçant l'écart de température ΔT^* par l'écart de température ΔT_B^* entre le volume du liquide et la surface. Ils posent $\Delta T_B^* = \Delta T^* / 2$ car ils affirment que ΔT_B^* est au moins aussi grand que la moitié de ΔT^* :

$$\dot{m}^* = \frac{C_1 \cdot \lambda}{L} \left(\frac{g\beta}{av} \right)^{1/3} \Delta T_B^{*4/3} \quad (1.4)$$

$C_1 = 2^{4/3} C$. En prenant $C_1 = 0,13$ et les propriétés physiques de l'eau, les résultats expérimentaux d'évaporation d'eau sont en bon accord avec ceux calculés par l'expression de la densité du flux massique. Ne disposant pas de données expérimentales sur le méthane, les auteurs utilisent un calage de la constante C_1 à partir des données expérimentales de l'eau et considèrent que la constante C_1 ainsi déterminée peut être utilisée pour le GNL. Les propriétés de l'eau et du GNL étant suffisamment proches.

Lemembre [40] a donné un ordre de grandeur sur les pertes du GNL par évaporation en s'appuyant sur l'exemple présenté par [41] ; cependant un stockage dont la pression est constante perd en régime permanent environ 184,8g/hm² de méthane.

- **Le modèle d'Hashemi-Wesson modifié**

Dans la simulation numérique du Rollover de GNL faite par [40], le modèle d' Hashemi-Wesson [41] a été modifié en choisissant un autre écart de température. L'utilisation de cet écart a donné de meilleurs résultats dans les calculs faits par Petit [44] lors de sa modélisation de l'incident de La Spezia. Cet écart de température est calculé par la formule suivante :

$$\Delta T_{SL}^* = T_{SL}^* - T_{sat}^* \quad (1.5)$$

où T_{sat}^* est la température de saturation du GNL et T_{SL}^* la température moyenne d'une tranche liquide adjacente à la surface libre. Cette tranche a une épaisseur égale à 1% de la hauteur totale de remplissage, c'est-à-dire $H/100$. Cette démarche consiste à faire l'hypothèse implicite que l'évaporation est contrôlée par une fine tranche liquide sous la surface, présentant ainsi une analogie avec le modèle du film dans le quel on postule qu'un transfert de soluté à une interface est un flux de diffusion à travers une couche limite massique sous la surface libre.

Remarquons que la démarche retenue est très proche de la façon dont est traitée l'évaporation dans la modélisation de **Germeless [45]** : dans celle-ci en effet, le bilan d'énergie effectué sur la dernière couche adjacente à la surface libre fait intervenir le modèle de [41], avec comme écart de température la température de la couche moins la température de saturation du méthane. Une autre adaptation importante est de considérer la formule d'évaporation donnée par [41] encore valable en local. Nous posons donc :

$$\varphi_{ev}^*(r^*, t^*) = 0,13\lambda \left(\frac{g\beta}{av} \right) \Delta T_{SL}^{*4/3}(r^*, t^*) \quad (1.6)$$

$$\dot{m}^*(r^*, t^*) = \frac{\varphi_{ev}^*(r^*, t^*)}{L^*} \quad (1.7)$$

$$\Delta T_{SL}^*(r^*, t^*) = T_{SL}^*(r^*, t^*) - T_{sat}^*(r^*, t^*) \quad (1.8)$$

La chaleur latente du méthane est donnée par la formule développée dans l'article de **Yaws et al. [46]** :

$$L^*(r^*, t^*) = 9,712 \cdot 10^4 \left(190,7 - T_{sat}^*(r^*, t^*) \right)^{0,38} \quad (1.9)$$

La température de saturation est calculée à l'aide des relations empiriques issues du Service d'Etudes Cryogéniques de GDF-Nantes et obtenues du rapport présenté par **Petit et Pham [47]**.

CHAPITRE 2 : FORMULATION MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 2

FORMULATION MATHÉMATIQUE

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons en premier lieu les équations de quantité de mouvement (Navier-Stokes), l'équation d'énergie et quelques modèles de turbulence existants dans la littérature surtout les différents modèles $k-\omega$ standard et à faible nombre de Reynolds. Nous exposerons par la suite les équations appliquées dans ce problème en introduisant les paramètres adimensionnels. Les équations de turbulence $k-\omega$ à faible nombre de Reynolds sont aussi adimensionnées avec une certaine modification apportée au modèle de la littérature.

2.2 Equations de quantité de mouvement et d'énergie

Un fluide en mouvement suit les lois de conservation de masse, de mouvement et d'énergie. Dans un système cartésien, les équations de conservation pour une seule espèce de fluide newtonien sont présentées comme suit :

La conservation de la masse est exprimée par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (2.1)$$

L'équation de conservation de mouvement peut être dérivée à partir de la 2^{ème} loi de Newton.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)}_{\text{Terme instationnaire}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)}_{\text{Convection}} = \underbrace{\rho g_i}_{\text{Flottabilité}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{Gradient de pression}} - \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}_{\text{Diffusion}} \quad (2.2)$$

où g_i : Accélération de la pesanteur p : Pression statique

τ_{ij} : Tension des contraintes visqueuses qui est exprimée en fonction des gradients de vitesse par :

$$\tau_{ij} = -\mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2.3)$$

où μ : Viscosité dynamique du fluide δ_{ij} : Fonction delta de Kronecker

La 1^{ère} loi de la thermodynamique décrit la conservation d'énergie (**Yuan [48]**) :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)}_{\text{Terme instationnaire}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j h)}_{\text{Convection}} = \underbrace{-\frac{\partial q_j}{\partial x_j}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right)}_{\text{Effet de compressibilité}} \quad (2.4)$$

où h : Enthalpie du fluide

q_j : Flux de chaleur par conduction qui est exprimé en fonction du gradient de température en utilisant la loi de Fourier :

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.5)$$

où λ : Coefficient de conductivité thermique du fluide T : Température du fluide

L'état thermodynamique d'un fluide est déterminé par deux propriétés physiques ($P-V, P-T, T-V$). La troisième propriété est reliée aux deux propriétés indépendantes.

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = k_i dp - \beta dT \quad (2.6)$$

$$\rho dh = (1 - \beta T) dp + \rho c_p dT \quad (2.7)$$

où c_p : Chaleur spécifique à pression constante.

k_t , β sont les coefficients de compressibilité isotherme et le coefficient d'expansion thermique.

$$k_t = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T, \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2.8)$$

Les propriétés du fluide (μ, λ, c_p) peuvent être dépendantes de l'état thermodynamique.

Les équations (2.1)-(2.8) sont des équations suffisantes pour gouverner le mouvement du fluide newtonien pour une seule espèce.

Pour le gaz idéal, la masse volumique est reliée à la pression et à la température par la loi suivante :

$$\rho = \frac{pM}{RT} \quad (2.9)$$

où $R = 8,314 \text{ J / K.mol}$ et M : masse molaire du gaz

A partir de cette équation d'état, nous pouvons avoir les valeurs de k_t, β et h :

$$k_t = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{T}, \quad h = c_p T \quad (2.10)$$

Puisque le nombre d'Eckert $\frac{u^2}{c_p T}$ est petit en convection naturelle, le terme de dissipation

dans l'équation (2.4) est négligeable. Par ailleurs, la convection naturelle de l'air peut être considérée comme un écoulement incompressible et le terme de compressibilité est aussi négligeable dans la même équation. L'équation (2.4) peut être réécrite alors sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.11)$$

où Pr étant le nombre de Prandtl du fluide :

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad (2.12)$$

Les équations (2.1), (2.2), (2.9) et (2.11) forment les équations de mouvement et de conservation d'énergie pour des gaz parfaits, dans le cas où la dissipation et la compressibilité sont négligeables.

Ces équations sont aussi valables pour les liquides incompressibles en écoulement laminaire. Récemment elles ont été utilisées pour résoudre les écoulements turbulents en résolvant la turbulence sur des mailles très fines et avec des pas de temps très petits. Cette méthode est appelée simulation numérique directe (DNS) de la turbulence (**Nieuwstadt [49]**). Elle a été utilisée avec succès par **Paolucci [50]** et par **Lin et Armfield [51]** pour simuler la convection naturelle dans les cavités.

Les deux principaux avantages de la DNS sont l'utilisation des équations de mouvement sans avoir recours aux modèles de turbulence ainsi qu'aux détails de résultats obtenus afin de comprendre le comportement de la turbulence. Cependant, la méthode DNS nécessite un temps de calcul très élevé et un espace mémoire important.

L'une des approches utilisées pour réduire le temps de calcul et l'espace mémoire est la simulation à des grandes échelles (LES), où les petites échelles sont filtrées du mouvement instationnaire et modélisées par des modèles simples. La méthode LES nécessite la résolution de l'instationnaire en tridimensionnel pour les grandes échelles du champ d'écoulement turbulent. La méthode a été utilisée par plusieurs auteurs comme **Peng et Davidson [52]** pour simuler l'écoulement turbulent en convection naturelle dans une cavité carrée.

Les équations de Reynolds obtenues à partir des équations de Navier-Stokes moyennées dans le temps sont souvent utilisées pour résoudre les écoulements turbulents.

2.3 Modélisation de la turbulence

Pour les écoulements turbulents, la variable instationnaire ϕ peut être remplacée par $\rho, u_i, p, T, k, \varepsilon$ ou ω . Cette variable peut être décomposée en une composante moyenne, $\bar{\phi}$, et une composante fluctuante, ϕ' , par la méthode du temps-moyen.

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (2.13)$$

avec :

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta T} \int_t^{t+\Delta T} \phi dt \quad (2.14)$$

où l'intervalle de temps, ΔT , est long comparé à l'échelle de temps des fluctuations turbulentes mais suffisant pour capturer l'écoulement instationnaire moyen.

Ainsi, après la décomposition substituée, les équations régissant sont moyennées dans le temps. Si les fluctuations de la masse volumique sont négligées, le résultat est le suivant:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) = 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{u}_i) = \bar{\rho} g_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{2}{3} \mu \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \overline{u'_j u'_i}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{T}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \overline{u'_j T'}) \quad (2.17)$$

En conséquence dans la méthode de Reynolds, deux termes ont été introduits : le flux du moment turbulent ou tension de Reynolds, $-\overline{\rho u'_i u'_j}$, et le flux de chaleur turbulent, $-\overline{\rho u'_j T'}$. Ces termes doivent être liés aux quantités connues par le modèle de turbulence afin que la fermeture du système d'équations soit possible.

2.3.1 Modèle $k-\varepsilon$ standard

Il existe plusieurs modèles de turbulence dont le modèle $k-\varepsilon$ standard proposé par **Launder et Spalding [53]**. Dans celui-ci, les tensions de Reynolds sont reliées au taux de déformation moyen à travers l'introduction de la viscosité turbulente :

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(k + \nu_t \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.18)$$

$$-\overline{u_j T'} = \frac{\nu_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \quad (2.19)$$

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad k = \overline{u_i u_i} / 2, \quad \varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad (2.20)$$

Les équations de k et ε peuvent être dérivées à partir des équations de Navier-Stokes en utilisant le temps moyen et certaines hypothèses.

Dans la simulation numérique de la convection naturelle, l'approximation de Boussinesq [1] est très utilisée. Cette approximation traite les propriétés (ρ, μ, Pr) comme constantes à l'exception de la masse volumique en terme de flottabilité qui est simulée par :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.21)$$

où ρ_0 et β sont respectivement la masse volumique et le coefficient d'expansion thermique à la température de référence. Cette dernière est généralement prise égale à la température ambiante en convection naturelle externe ou égale à une température moyenne en cavité close.

Tenant compte de cette approximation, les équations de Navier-Stokes suivi des équations du modèle de turbulence $k-\varepsilon$ peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -g_i \beta (T - T_0) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{v}{\text{Pr}} + \frac{v_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \varepsilon + P_k + G_k \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon_1} P_k - c_{\varepsilon_2} \varepsilon + c_{\varepsilon_3} G_k) \quad (2.26)$$

avec :

$$v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad , \quad P_k = v_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad , \quad G_k = -g_i \beta \frac{v_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.27)$$

Pour des raisons de simplicité, les barres indiquant les valeurs moyennées des variables ont été omises. Dans les équations de quantité de mouvement, le terme $\frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i}$ est ignoré et la pression P est modifiée. Ce qui donne :

$$P = p - \rho_0 g_i x_i \quad (2.28)$$

Les coefficients du modèle de turbulence $k - \varepsilon$ standard sont listés comme suit :

$$\begin{aligned} c_\mu &= 0,09; \quad c_{\varepsilon_1} = 1,44; \quad c_{\varepsilon_2} = 1,92; \\ \sigma_k &= 1; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3; \quad \text{Pr}_t = 0,9 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si les coefficients $c_\mu, c_{\varepsilon_1}, c_{\varepsilon_2}, c_{\varepsilon_3}$ sont pris comme des fonctions du nombre de Reynolds local pour modéliser la turbulence près de la paroi, ce modèle est appelé « modèle $k - \varepsilon$ à faible nombre de Reynolds ».

Actuellement $\sigma_k, \sigma_\varepsilon, \text{Pr}_t$ ne sont pas constantes, par exemple, Pr_t dépend du type d'écoulement (écoulement de paroi ou écoulement libre), du nombre de Reynolds (ou nombre de Rayleigh pour la convection naturelle), du nombre de Prandtl moléculaire et de la position.

Le coefficient c_{ε_3} n'est pas constante, **Henkes [54]** a suggéré de prendre la valeur de c_{ε_3} entre 0 et 1 en fonction de la composante verticale de la vitesse, v , et de la composante horizontale de la vitesse, u , comme suit :

$$c_{\varepsilon_3} = \tanh \left| \frac{v}{u} \right| \quad (2.30)$$

Dans la couche limite verticale, $v \gg u$ et $c_{\varepsilon_3} \approx 1$; par contre, en couche limite horizontale $u \gg v$ alors $c_{\varepsilon_3} \approx 0$.

2.3.2 Modèle $k - \omega$ standard

Le modèle $k - \omega$ standard est un modèle de turbulence à deux équations donné par **Wilcox [55]**:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \beta^* \omega k + P_k \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\gamma \omega}{k} P - \beta \omega^2 \quad (2.32)$$

Les constantes sont données ainsi après avoir posé :

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad (2.33)$$

$$\sigma_k = 0,5 \quad , \quad \sigma_\omega = 0,5 \quad , \quad \beta^* = 0,09 \quad , \quad \beta = 3/40 \quad , \quad \gamma = 5/9 \quad (2.34)$$

D'autres constantes ont été adoptées par le modèle **Wilcox [56]** et sont données ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_k &= 0,5; \quad \sigma_\omega = 0,5; \quad \beta_0^* = 0,09; \quad \beta_0 = 9/125; \\ \beta &= \beta_0 f_\beta; \quad \beta^* = \beta_0^* f_{\beta^*}; \quad \gamma = 5/9 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$f_\beta = \frac{1+70\chi_\omega}{1+80\chi_\omega}; \quad \chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{ij}S_{ki}}{(\beta_0^*\omega)^3} \right|; \quad \chi_k = \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.36)$$

$$f_{\beta^*} = 1 \quad (\text{Si } \chi_k \leq 0) \quad ; \quad f_{\beta^*} = \frac{1+680\chi_k^2}{1+400\chi_k^2} \quad (\text{Si } \chi_k > 0) \quad (2.37)$$

Actuellement, on dispose d'un modèle plus récent qui est celui de **Wilcox [57]** où on introduit un autre terme dans l'équation du taux de dissipation spécifique de l'énergie cinétique turbulente. Les équations de turbulence sont alors réécrites de la manière suivante :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \beta^* \omega k + P_k \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\gamma \omega}{k} P - \beta \omega^2 + \frac{\delta_d}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (2.39)$$

$$\nu_t = \frac{k}{\hat{\omega}}; \quad \hat{\omega} = \max \left[\omega, C_{lin} \sqrt{\frac{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}{\beta^*}} \right]; \quad \bar{S}_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} S_{ij} \quad (2.40)$$

Pour ce modèle, on peut choisir les conditions aux limites pour une paroi lisse :

$$k_{paroi} = 0; \quad \omega_{paroi} = \frac{6\nu_{paroi}}{\beta_0 d^2} \quad (2.41)$$

et pour une paroi légèrement rugueuse :

$$\omega_{paroi} = \frac{4000\nu_{paroi}}{k_3^2} \quad (2.42)$$

Les constantes utilisées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_k &= 0,5; \quad \sigma_\omega = 0,5; \quad \beta^* = 0,09; \quad \beta_0 = 0,0708; \\ \beta &= \beta_0 f_\beta; \quad \gamma = 13/25; \quad C_{lin} = 7/8 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$f_\beta = \frac{1+85\chi_\omega}{1+100\chi_\omega}; \quad \chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{ij} S_{ij}''}{(\beta^* \omega)^3} \right|; \quad S_{ij}'' = S_{ki} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial x_m}; \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.44)$$

$$\delta_d = 0 \left(Si \quad \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \leq 0 \right); \quad \delta_d = \frac{1}{8} \left(Si \quad \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} > 0 \right) \quad (2.45)$$

2.3.3 Modèle $k-\omega$ à faible nombre de Reynolds

Le modèle $k-\omega$ à faible nombre de Reynolds a été élaboré par **Wilcox [58]**. Ce modèle repose toujours sur les deux équations de turbulence en introduisant des termes de correction qui tiennent compte de la présence des parois. Ces termes permettent aussi de donner une meilleure prédiction des résultats expérimentaux surtout dans ces endroits, c'est-à-dire au niveau de la couche limite sans avoir recours à l'introduction des fonctions de paroi.

Dans ce modèle on utilise les mêmes équations que le modèle standard donné aux équations (2.32) et (2.33) en modifiant les expressions de β^* , β et γ et en ajoutant l'expression de α^* pour le calcul de la viscosité turbulente. Les constantes de ce modèle sont aussi présentées.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - c_k \beta^* \omega k + P_k \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + c_1 \frac{\gamma \omega}{k} P_k - c_2 \beta \omega^2 \quad (2.47)$$

$$\alpha^* = c_\mu \frac{0,025 + \frac{R_t}{6}}{1 + \frac{R_t}{6}}; \quad \gamma = c_\omega \frac{0,1 + \frac{R_t}{2,7}}{1 + \frac{R_t}{2,7}} \alpha^{*-1}; \quad \beta^* = c_k \frac{0,278 + \left(\frac{R_t}{8}\right)^4}{1 + \left(\frac{R_t}{8}\right)^4} \quad (2.48)$$

$$\nu_t = \alpha^* \frac{k}{\omega}; \quad R_t = \frac{k}{\nu \omega} \quad (2.49)$$

Les constantes de ce modèle sont données ainsi :

$$c_1 = 0,56; \quad c_2 = 0,075; \quad c_\mu = 1; \quad c_k = 0,09; \quad c_\omega = 13/25; \quad \sigma_k = 2; \quad \sigma_\omega = 2 \quad (2.50)$$

Les équations de conservation incluant la continuité, les équations de quantité de mouvement et d'énergie ainsi que les équations de turbulence sont écrites en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Cette écriture combinée permet d'avoir un programme valable pour une configuration carrée (utilisée pour la validation avec les solutions Benchmark) et une configuration cylindrique (bac de stockage de GNL).

2.4 Paramètres caractéristiques et adimensionnement des équations du problème

2.4.1 Paramètres caractéristiques

L'écoulement de convection naturelle est considéré pour la phase liquide. La hauteur de cette dernière est prise comme longueur de référence et les variables adimensionnelles sont introduites de la façon suivante :

$$r = r^* / H, \quad z = z^* / H, \quad u = u^* H / \nu, \quad v = v^* H / \nu; \quad t = t^* \nu / H^2$$

$$p = \frac{H^2 p^*}{\rho \nu^2}, \quad T = \frac{T^* - T_0^*}{\Delta T_0^*} \left(\Delta T_0^* = \frac{\phi_l^* H}{\lambda} \right); \quad k = \frac{H^2 k^*}{\nu^2}, \quad \varepsilon = \frac{H^4 \varepsilon^*}{\nu^3}, \quad \nu_t = \frac{\nu_t^*}{\nu} \quad (2.51)$$

Remarque : $T = \frac{T^* - T_c^*}{\Delta T_0^*}$ avec : $\Delta T_0^* = T_h^* - T_c^*$ dans le cas de la validation avec les résultats expérimentaux de référence (Benchmark).

2.4.2 Adimensionnement des équations de quantité de mouvement et d'énergie

- Equation de continuité

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial(r^\alpha u)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.52)$$

Le coefficient α permet de changer le type de coordonnées. Cependant, lorsque $\alpha = 1$, toutes les équations seront transformées en coordonnées cylindriques alors que si $\alpha = 0$, on obtiendra facilement des équations avec des coordonnées cartésiennes. Cette procédure a été très bénéfique lors de l'écriture des programmes.

- Equations de quantité de mouvement

Suivant l'axe des x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial(r^\alpha uu)}{\partial r} + \frac{\partial(uv)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\alpha (1 + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial z} \right]$$

$$-2(1 + \nu_t) \alpha \frac{u}{r^2} + S_u \quad (2.53)$$

Suivant l'axe des y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial(r^\alpha v u)}{\partial r} + \frac{\partial(vv)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\alpha (1+v_t) \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1+v_t) \frac{\partial v}{\partial z} \right] + GrT + S_v \quad (2.54)$$

$$S_u = \frac{\partial}{\partial z} \left((1+v_t) \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\alpha (1+v_t) \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.55)$$

$$S_v = \frac{\partial}{\partial z} \left((1+v_t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\alpha (1+v_t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.56)$$

- **Equation d'énergie**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial(r^\alpha u T)}{\partial r} + \frac{\partial(vT)}{\partial z} = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\alpha \left(\frac{1}{Pr} + \frac{v_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{Pr} + \frac{v_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (2.57)$$

2.4.3 Adimensionnement du modèle $k - \omega$ à faible nombre de Reynolds

Le modèle $k - \omega$ à faible nombre de Reynolds présenté par **Wilcox [58]** et a été utilisé par plusieurs auteurs, tels Barzegar et Dehghan **[31]**, par exemple. Nous l'avons adopté aussi dans ce travail mais avec une petite modification. Cette dernière a été inspirée du travail de Peng et Davidson **[16]**.

Ces auteurs ont introduit une modification au modèle de turbulence PDH (Peng, Davidson et Hølemberg). Notons aussi que le modèle PDH diffère du modèle WX seulement par un terme ajouté à l'équation du taux de dissipation spécifique.

Cette nouvelle modification réside dans l'introduction d'une fonction d'oscillation notée f_g dans le terme S_k . Cette approche a été utilisée pour la première fois par **[16]** dans le cas du modèle PDH et le modèle ainsi obtenu est appelé **(PDH+D)**.

Ces auteurs ont noté dans leur article que cette fonction pourrait être ajoutée au modèle WX ainsi qu'aux modèles $k - \varepsilon$ à faible nombre de Reynolds en transformant l'équation de ε à l'équation de ω et en utilisant la relation de $\varepsilon \approx k\omega$. Dans la présente étude nous avons utilisé l'application précédente qui constitue à notre sens une remarque très importante. Nous avons alors introduit cette modification au modèle de **[58]** noté WX et nous l'avons appelé modèle **(WX +D)**.

• **Equation de l'énergie cinétique turbulente, k**

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial(r^\alpha uk)}{\partial r} + \frac{\partial(vk)}{\partial z} = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\alpha \left(1 + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial k}{\partial z} \right] + S_k \quad (2.58)$$

• **Equation du taux de dissipation spécifique, ω**

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial(r^\alpha u\omega)}{\partial r} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial z} = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\alpha \left(1 + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] + S_\omega \quad (2.59)$$

Les termes sources sont composés par plusieurs parties :

$$S_k = P_{k'} + S_{k'} - \pi_{k'}; \quad S_\omega = P_{\omega'} + S_{\omega'} - \pi_{\omega'} \quad (2.60)$$

$$P_{k'} = v_t \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2\alpha \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]; \quad P_{\omega'} = c_1 f_1 \left(\frac{\omega}{k} \right) P_{k'} \quad (2.61)$$

$$S_{k'} = -f_g \frac{v_t}{\sigma_T} Gr \frac{\partial T}{\partial z}; \quad S_{\omega'} = -c_3 Gr \frac{\omega}{k} \frac{v_t}{\sigma_T} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.62)$$

$$\pi_{k'} = c_k f_k \omega k; \quad \pi_{\omega'} = -c_2 \omega^2 \quad (2.63)$$

$$f_g = \left[1 - \exp \left[\left(\frac{-R_t}{12} \right)^3 \right] \right] \left[1 + \frac{10}{R_t^{3,25}} \right]; \quad R_t = k / \omega \quad (2.64)$$

$$f_\mu = \frac{0,025 + \frac{R_t}{6}}{1 + \frac{R_t}{6}}; \quad f_1 = \frac{0,1 + \frac{R_t}{2,7}}{1 + \frac{R_t}{2,7}} f_\mu^{-1}; \quad f_k = \frac{0,278 + \left(\frac{R_t}{8} \right)^4}{1 + \left(\frac{R_t}{8} \right)^4} \quad (2.65)$$

La viscosité turbulente est déterminée par la formule suivante :

$$v_t = C_\mu f_\mu \frac{k}{\omega} \quad (2.66)$$

Les constantes du modèle de turbulence $k-\omega$ à faible nombre de Reynolds sont données ainsi :

$$c_{1\varepsilon} = 0,56, \quad c_{2\varepsilon} = 0,075; \quad c_3 = 0; \quad c_\mu = 1; \quad c_k = 0,09; \quad \sigma_k = 2; \quad \sigma_\omega = 2; \quad \sigma_T = 0,9 \quad (2.67)$$

2.5 Conditions aux limites

- Sur toutes les parois solides :

$$u = v = k = 0; \quad \omega_1 = \left(\frac{c_\mu^{3/4} k_1^{3/2}}{0,41 \cdot y_1} \right) / (c_k k_1) \quad (2.68)$$

y_1 : est la distance du 1^{er} nœud de la maille à partir de la paroi.

ω_1 : est la valeur de ω obtenu au 1^{er} nœud du maillage à partir de la paroi en fonction de k_1 calculé.

- Sur la paroi verticale chauffée ($r = \frac{1}{2Al} = 0,5$):

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{H \varphi_l^*}{\lambda \Delta T_0^*} = 1 \quad (2.69)$$

- Sur la paroi horizontale adiabatique ($z = 0$):

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (2.70)$$

- Sur l'axe de symétrie ($r = 0$) :

$$u = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \quad (2.71)$$

- Sur la surface libre du liquide, il ya évaporation+refroidissement ($z = 1$):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=1} = -\frac{H \varphi_{ev}^*}{\lambda \Delta T_0^*} + \frac{H \varphi_{co}^*}{\lambda \Delta T_0^*} = \frac{\varphi_{co}^* - \varphi_{ev}^*}{\varphi_l^*} = \varphi_{co} - \varphi_{ev}; \quad \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad v = 0 \quad (2.72)$$

La densité du flux d'évaporation est donnée par [41] :

$$Si \ T^*(r^*, t) > T_{sat}^* \rightarrow \phi_{ev}^* = C \lambda \left(\frac{g \beta}{a \nu} \right)^{1/3} (T^*(r^*, t) - T_{sat}^*)^{4/3} \quad avec \ C = 0,13 \quad (2.73)$$

$$Si \ T^*(r^*, t) \leq T_{sat}^* \rightarrow \phi_{ev}^* = 0$$

La densité de flux d'évaporation est écrite en fonction du nombre de Rayleigh. Après un certain réarrangement des équations (2.74), on obtient :

$$\begin{aligned} Si \ T(r, t) > 0 &\rightarrow \varphi_{ev} = 0,13 Ra^{1/3} (T - T_{sat})^{4/3} \\ Si \ T(r, t) \leq 0 &\rightarrow \varphi_{ev} = 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

La densité du flux convectif est calculée par la loi de Newton :

$$\varphi_{co} = h.(T - T_{sat}) \quad (2.75)$$

Le bilan thermique dans la phase liquide GNL est donné de la façon suivante :

$$2\pi h \int_0^{0,5} (T - T_{sat})rdr + 2\pi \int_0^{0,5} \varphi_{ev}rdr = 2\pi RH\varphi_l \quad (2.76)$$

A partir de ce bilan, le coefficient de convection de la chaleur est calculé au cours de l'exécution du programme par la formule suivante :

$$h = \frac{0,5}{\int_0^{0,5} (T - T_{sat})rdr + \int_0^{0,5} \varphi_{ev}rdr} \quad (2.77)$$

Dans ce travail, on considère une température de saturation qui ne dépend pas de la position au niveau de la surface libre. Cette température est une référence prise égale à 0 dans toutes nos simulations numériques.

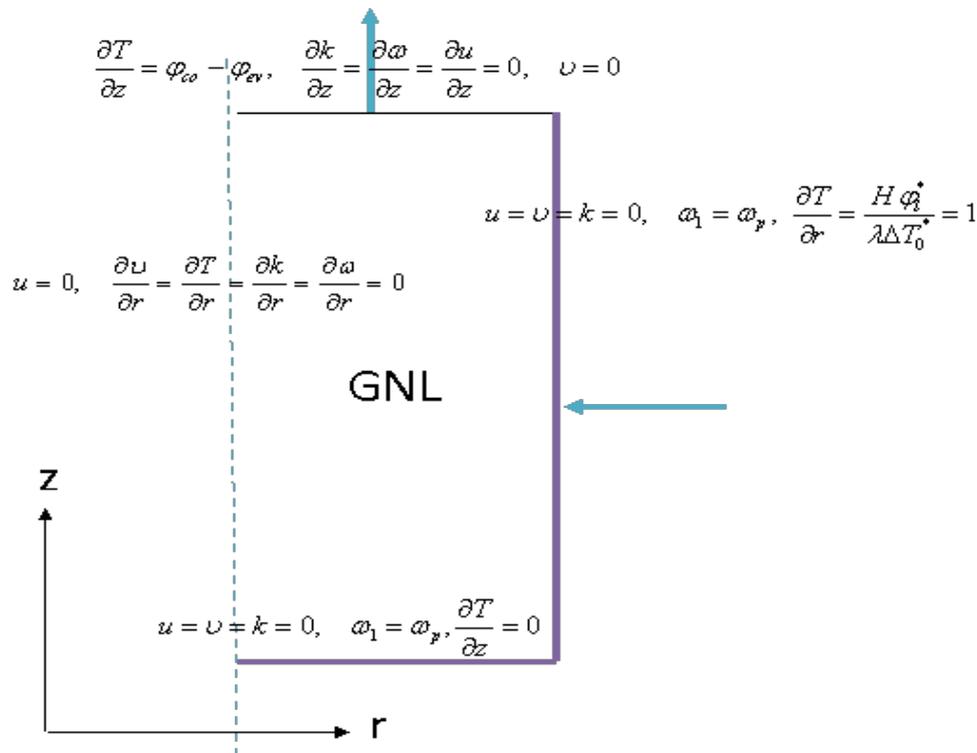


Figure 2.1 : Représentation graphique du domaine de calcul avec conditions aux limites

CHAPITRE 3 : METHODE NUMERIQUE

CHAPITRE 3

METHODE NUMERIQUE

3.1 Introduction

Les équations de conservation régissant le phénomène de la convection naturelle ou mixte sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques et couplées. En raison de leur complexité, ces équations sont résolues à l'aide des techniques numériques. Plusieurs méthodes sont disponibles dans la littérature. On peut citer à titre d'exemple :

- La méthode des différences finies,
- La méthode des éléments finis,
- La méthode des volumes finis.

Pour résoudre le système d'équations présenté dans le chapitre précédent, nous avons choisi la procédure des volumes finis développée par **Patankar [59]** et modifiée par **Versteeg Malalasekera [60]**. Cette technique a été utilisée avec succès par plusieurs chercheurs. Elle est basée sur une approche de type volume de contrôle, qui reste simple à comprendre et à interpréter physiquement. Sa qualité principale est la réduction des instabilités numériques des schémas aux grandes valeurs du nombre de Rayleigh.

3.2 Principe de la méthode des volumes finis

Dans son ensemble, la méthode des volumes finis consiste à définir à l'intérieur du domaine de calcul une grille de points appelés nœuds. Chaque nœud se trouve entouré par un volume élémentaire sur lequel on va intégrer les équations aux dérivées partielles [figure 3.1]. Pour deux points voisins, les volumes de contrôle respectifs doivent posséder un côté commun. Il s'ensuit que la réunion de tous les volumes de contrôle couvre l'ensemble du domaine de calcul.

Cette propriété fondamentale va permettre la mise en évidence des propriétés de conservation des flux locaux et globaux.

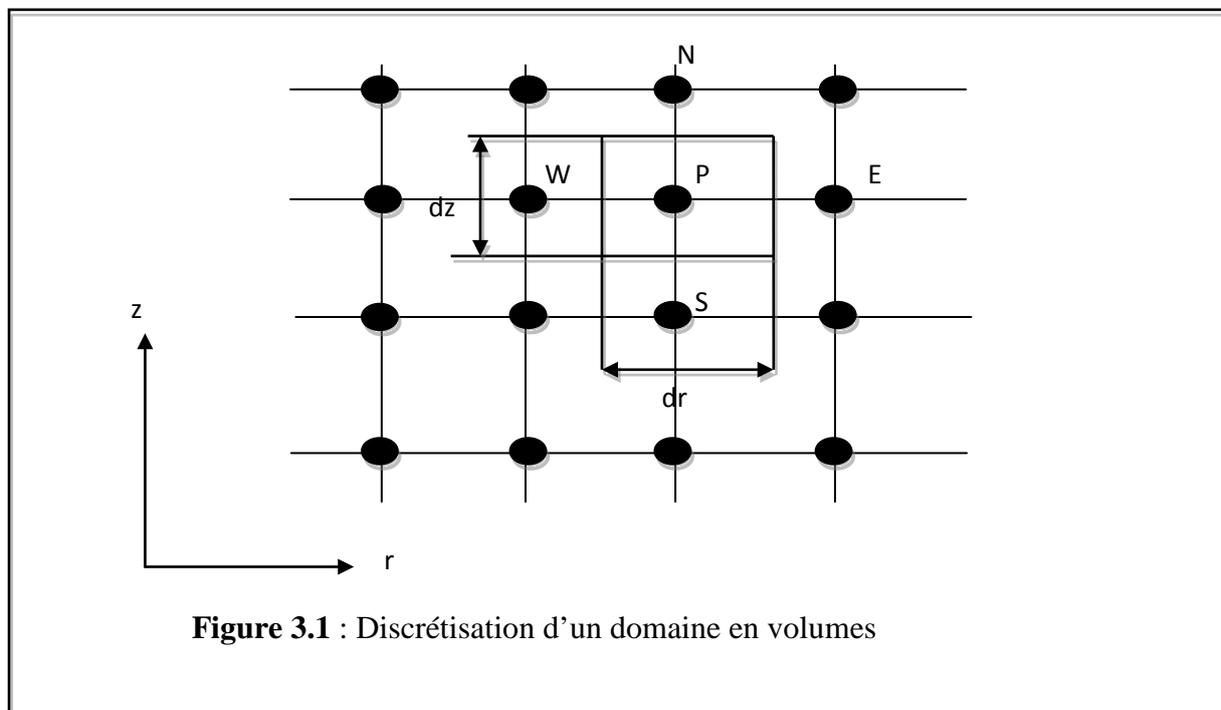


Figure 3.1 : Discretisation d'un domaine en volumes

Il existe deux méthodes pratiques pour placer le réseau de points ou maillage et leurs volumes de contrôle associés :

- La première consiste à définir d'abord la grille de points, puis placer les faces des volumes à mi-distance de deux nœuds consécutifs [figure 3.2].
- Dans la deuxième méthode, on commence par la définition des volumes de contrôle, puis on place les nœuds associés aux centres des volumes [figure 3.3].

Ces deux pratiques sont identiques dans le cas d'un maillage uniforme.

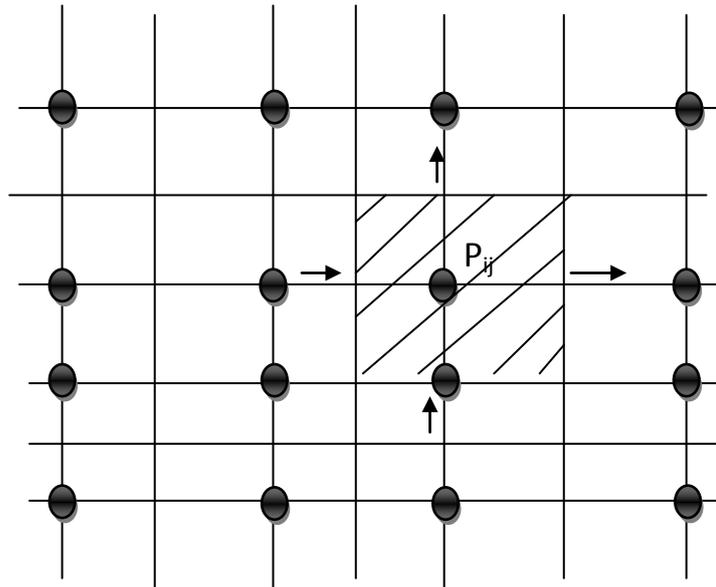


Figure 3.2 : Pratique n°1 utilisée pour la discrétisation d'un domaine

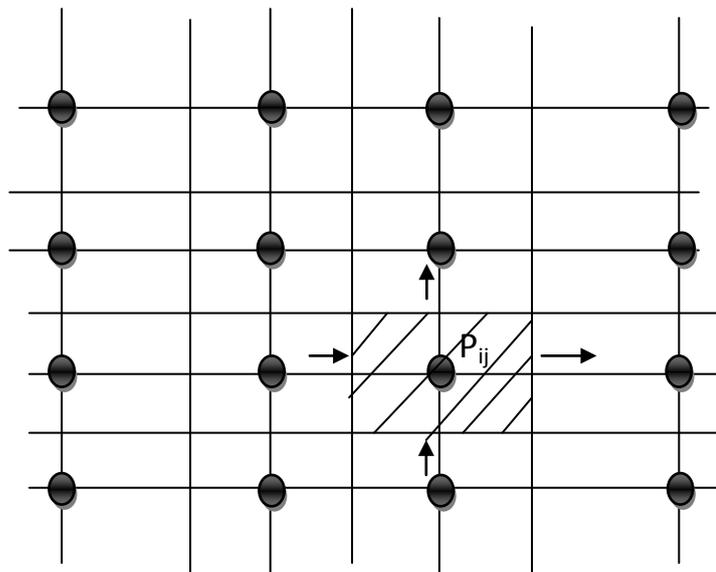


Figure 3.3 : Pratique n°2 utilisée pour la discrétisation d'un domaine

3.3. Application aux équations du problème considéré

3.3.1 Discrétisation des équations de quantité de mouvement

Nous allons maintenant nous intéresser à la discrétisation des équations de transport.

Soit la forme générale des équations gouvernantes définies par :

$$r^j \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left[r^j u \phi - r^j \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + r^j \frac{\partial}{\partial z} \left[v \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = r^j S_\phi \quad (3.1)$$

Pour un écoulement axisymétrique $j=1$ et pour un écoulement plan bidimensionnel $j=0$

Pour simplifier l'écriture, nous introduisons les paramètres suivants :

$$J_r = \left[r^j u \phi - r^j \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]; \quad J_z = \left[v \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \quad (3.2)$$

Les équations s'écrivent alors de la manière suivante :

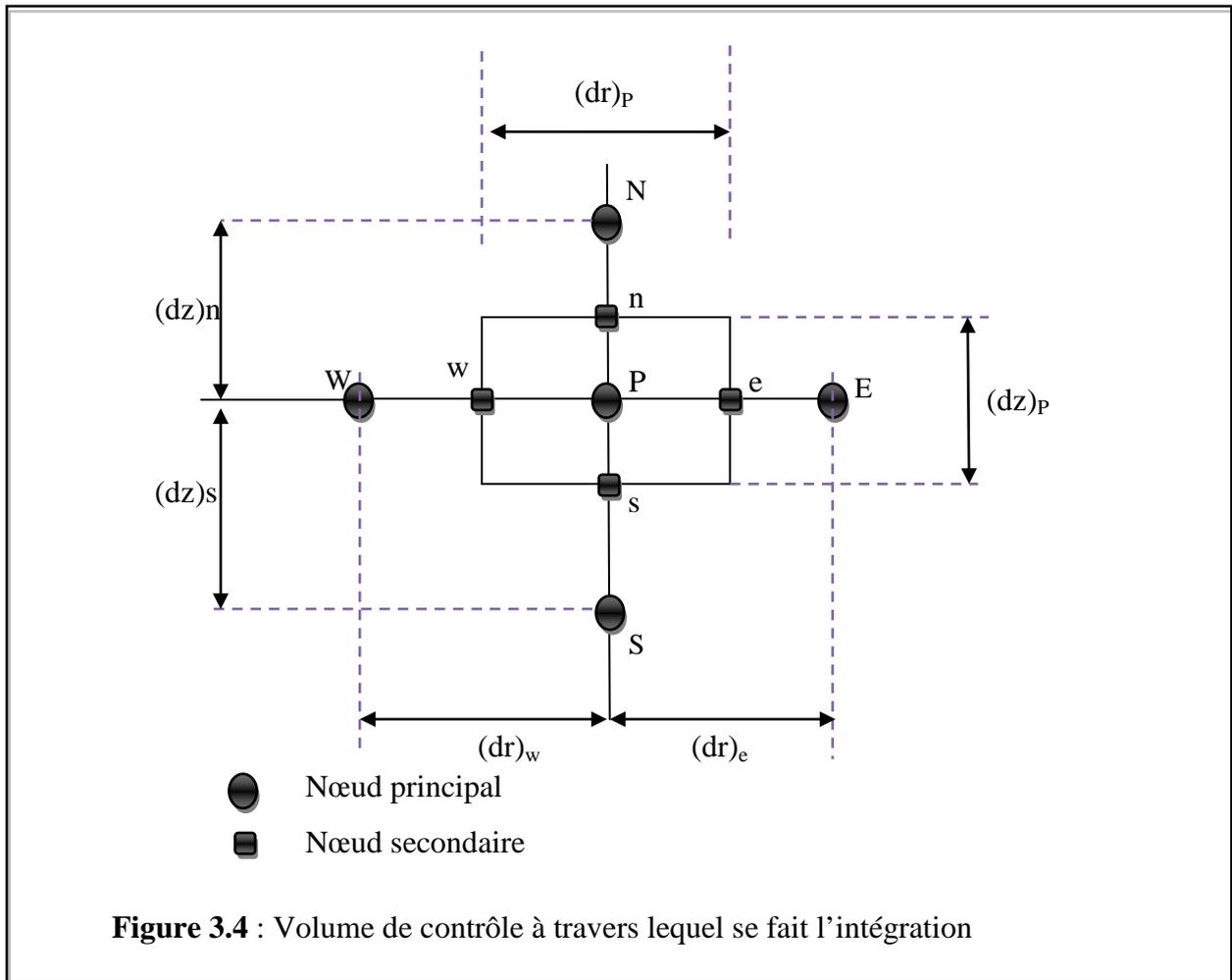
$$r^j \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + r^j \frac{\partial J_z}{\partial z} = r^j S_\phi \quad (3.3)$$

Nous allons l'intégrer à travers le volume de contrôle décrit sur la figure 3.4 et par rapport au temps t .

$$\int_{s_w}^n \int_{t1}^e \int_{t2}^e r^j \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dr dz + \int_{t1}^{t2} \int_{s_w}^n \int_{t2}^e \frac{\partial}{\partial r} J_r dr dz dt + \int_{t1}^{t2} \int_{t2}^e \int_{s_w}^n r^j \frac{\partial}{\partial z} J_z dz dr dt = \int_{t1}^{t2} \int_{t2}^e \int_{s_w}^n r^j S_\phi dv dt \quad (3.4)$$

Pour pouvoir intégrer cette équation, on doit faire des suppositions :

- A un instant donné, la température est uniforme à travers le volume de contrôle.
- Pour un r donné (valable pour un z donné), le flux est uniforme le long de la face correspondante.
- On considère un schéma complètement implicite en vue d'assurer une stabilité du schéma de progression dans le temps.



L'intégration du terme source $\int_V r^j S_\phi dV$ est obtenue en supposant S_ϕ est uniforme sur le volume de contrôle, il est approximé par la forme linéaire suivante :

$$\overline{S_\phi} = \int_V r^j S_\phi dV \cong S_p \phi + S_c \quad (3.5)$$

Après intégration de l'équation (3.4), on aboutit à :

$$\left[(\phi)_p - (\phi)_p^0 \right] \Delta r \Delta z r_m + \int_s^n (J_{re} - J_{rw}) dz \Delta t + \int_w^e (J_{zn} - J_{zs}) r dr \Delta t = r^j S_\phi \Delta V \Delta t \quad (3.6)$$

Soit :

$$\left[(\phi)_p - (\phi)_p^0 \right] \frac{\Delta V}{\Delta t} + [J_e - J_w] + [J_n - J_s] = r^j S_\phi \Delta V \quad (3.7)$$

avec :

ΔV : Volume entourant le nœud P ($\Delta V = \Delta z \Delta r r_m$), $\Delta \theta = 1$.

$(\phi)_p^0$: Valeur au temps t

$(\phi)_p$: Valeur au temps $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} J_e &= \int_s^n J_{re} dz = \left[ru\phi - r\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_e \Delta z; & J_w &= \int_s^n J_{rw} dz = \left[ru\phi - r\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_w \Delta z; \\ J_n &= \int_w^e J_{zn} dr = \left[v\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_n \Delta r.r_m; & J_s &= \int_w^e J_{zs} dr = \left[v\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_s \Delta r.r_m \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$r_m = \frac{r_e + r_w}{2} \text{ : (rayon moyen)}$$

Généralement les termes sources dans les équations discrétisées pour les différentes variables ne prennent pas la forme linéaire de l'équation (3.5), ils ont besoin d'être réarrangés pour avoir la forme désirée.

Les dérivées premières de la variable ϕ se résument après discrétisation à des simples différences des valeurs de ϕ au niveau des nœuds :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta r_e} & \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_w &= \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta r_w} \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_n &= \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta z_n} & \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_s &= \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta z_s} \end{aligned} \quad (3.9)$$

En utilisant les notations F , D et J représentant respectivement les termes de convection, de diffusion et de flux total et définis par :

Les termes D_m ($m = e, w, n, s$) et F_m ($m = e, w, n, s$) sont donnés par :

$$D_e = \Gamma_{\phi_e} \frac{\Delta z.r_e^j}{(\delta r)_e}; \quad D_w = \Gamma_{\phi_w} \frac{\Delta z.r_w^j}{(\delta r)_w}; \quad D_n = \Gamma_{\phi_n} \frac{\Delta z.r_n^j}{(\delta r)_n}; \quad D_s = \Gamma_{\phi_s} \frac{\Delta z.r_s^j}{(\delta r)_s} \quad (3.10)$$

$$F_e = u_e \Delta z.r_e^j; \quad F_w = u_w \Delta z.r_w^j; \quad F_n = v_n \Delta r.r_n^j; \quad F_s = v_s \Delta r.r_s^j \quad (3.11)$$

Alors que les termes P_m ($m = e, w, n, s$), rapport de transfert par convection au transfert par diffusion, ne sont autres que :

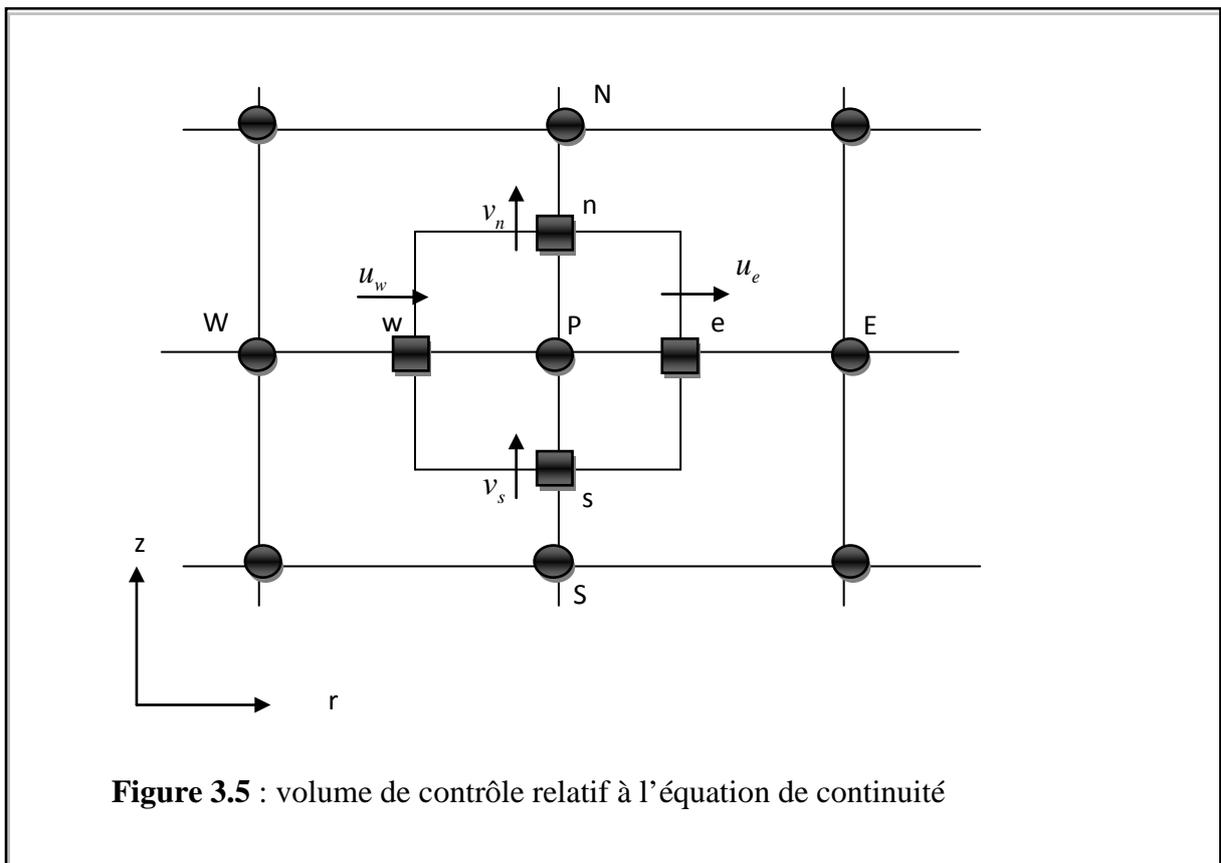
$$P_e = \frac{F_e}{D_e}; P_w = \frac{F_w}{D_w}; P_n = \frac{F_n}{D_n}; P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (3.12)$$

En remplaçant ϕ par 1 et S_ϕ par 0 dans l'équation (3.1), on obtient l'équation de continuité. Son intégration sur le même volume de contrôle [figure 3.5] donne :

$$[F_e - F_w] + [F_n - F_s] = 0 \quad (3.13)$$

Multiplions par ϕ_p , elle devient :

$$[F_e - F_w]\phi_p + [F_n - F_s]\phi_p = 0 \quad (3.14)$$



Soustrayant l'équation (3.14) de l'équation (3.7) on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[(\phi)_p - (\phi)_p^0 \right] \frac{\Delta V}{\Delta t} + \left[(J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_p) \right] \\ & + \left[(J_n - F_n \phi_p) - (J_s - F_s \phi_p) \right] = r^j S_\phi \Delta V \Delta t \end{aligned} \quad (3.15)$$

En remplaçant les différents termes constituant l'équation (3.7) par les expressions correspondantes et en soustrayant l'équation (3.14) de l'équation (3.7), nous obtenons l'équation suivante :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (3.16)$$

ou encore :

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (3.17)$$

où l'indice nb désigne un nœud voisin avec :

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\|; & a_W &= D_w A(|P_w|) + \|\+F_w, 0\| \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\|; & a_S &= D_s A(|P_s|) + \|\+F_s, 0\| \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$b = S_c + \frac{\Delta V}{\Delta t} \phi_p^0 \quad (3.19)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S - S_p \Delta V + \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (3.20)$$

Les coefficients a_M ($M = E, W, N, S$) représentent l'influence de la convection et de la diffusion aux différentes faces du volume de contrôle. En termes de débit massique F_m et de conductance thermique D_m ($m = e, w, n, s$).

Après avoir donné la formulation généralisée de ϕ , nous nous intéressons maintenant aux divers schémas représentant les termes de la convection et de la diffusion.

- **Schémas d'interpolation**

Dans le tableau 3.1, nous avons regroupé les expressions de la fonction $A(|P_m|)$ relatives aux différents schémas d'approximations.

Dans la présente étude, nous allons utiliser le schéma de la loi de puissance car nous pensons qu'elle approche mieux la solution exacte.

Tableau 3.1 : Expressions de la fonction $A(|P_m|)$ pour différents schémas

| Schéma | Expression de $A(P_m)$ |
|---------------------|-----------------------------------|
| Centré | $1 - 0.5 P_m $ |
| Upwind | 1 |
| Hybride | $\ 0, 1 - 0.5 P_m \ $ |
| Loi de puissance | $\ 0, (1 - 0.1 P_m)^5\ $ |
| Exponentiel (exact) | $\frac{ P_m }{[\exp(P_m) - 1]}$ |

3.3.2 Linéarisation du terme source

D'une manière générale, les termes sources sont dont la plupart du temps non linéaires et dépendant de la variable ϕ . La méthode des volumes finis nécessite une linéarisation des termes sources puisque les méthodes utilisées pour la résolution des équations sont celles de l'algèbre linéaire.

Le terme source $\overline{S_\phi}(\phi = T, u, v, \dots)$ est linéarisé sous la forme :

$$\overline{S_\phi} = S_c + S_p \phi_p \quad (3.21)$$

Tout en spécifiant les valeurs de S_c et S_p qui peuvent être elles-mêmes fonction de ϕ .

A titre d'exemple, on considère le terme source correspondant à l'équation de quantité de mouvement suivant r :

soit :

$$\overline{S_u} = -\frac{\partial P}{\partial r} - u \frac{\Gamma_\phi}{r^2} \quad (3.22)$$

alors :

$$S_c = -\frac{\partial P}{\partial r}, S_p = -\frac{\Gamma_\phi}{r^2} \quad (3.23)$$

d'où :

$$\overline{S_u} = S_c + S_p u_p \quad (3.24)$$

En ce qui concerne les expressions de S_c et S_p relatives aux autres équations, elles sont rapportées dans le tableau 3.2.

Tableau 3.2 : Forme linéarisée du terme source pour les différentes équations

| Equation | Expressions de S_c et S_p | |
|------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| | S_c | S_p |
| de continuité | 0 | 0 |
| de quantité de mouvement suivant r | $-\frac{\partial P}{\partial r}$ | $-\frac{\Gamma_\phi}{r^2}$ |
| de quantité de mouvement suivant z | $-\frac{\partial P}{\partial z} + cT$ | 0 |
| d'énergie | 0 | 0 |
| k | $P_{k'} + S_{k'}$ | $\pi_{k'} / k$ |
| ω | $P_{\omega'} + S_{\omega'}$ | $\pi_{\omega'} / \omega$ |

3.3.3 Algorithmes de résolution du couplage vitesse-pression

Le traitement des équations de quantité de mouvement est similaire à celui de l'équation d'énergie. La seule différence réside dans le choix de la grille. On montre que si on calcule les variables u et v sur la même grille utilisée pour le calcul des variables T, P etc., on aboutira à une solution non réaliste [59].

Pour remédier à ce problème, on adopte un maillage 'décalé' afin d'évaluer le champ de vitesse et dont les nœuds sont localisés sur les faces des volumes de contrôle de la grille principale [figure 3.6]. Chaque composante de la vitesse est décalée suivant sa propre direction [figure 3.7]. L'intégration des deux équations de quantité de mouvement suivant les axes r et z , où ϕ dans l'équation générale correspond respectivement aux variables u et v , entraîne le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} a_e u_e &= \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b + (P_p - P_E) A_e \quad (a) \\ a_n v_n &= \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b + (P_p - P_N) A_n \quad (b) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$(P_p - P_E) A_e$: Force de pression agissant sur la face verticale (perpendiculaire à l'axe r) du volume de contrôle de la composante de vitesse u [figure 3.7.a]

$(P_p - P_N) A_n$: Force de pression agissant sur la face horizontale (perpendiculaire à l'axe z) du volume de contrôle de la composante de vitesse v [figure 3.7.b]

A_e et A_n : surfaces sur lesquelles agissent ces forces.

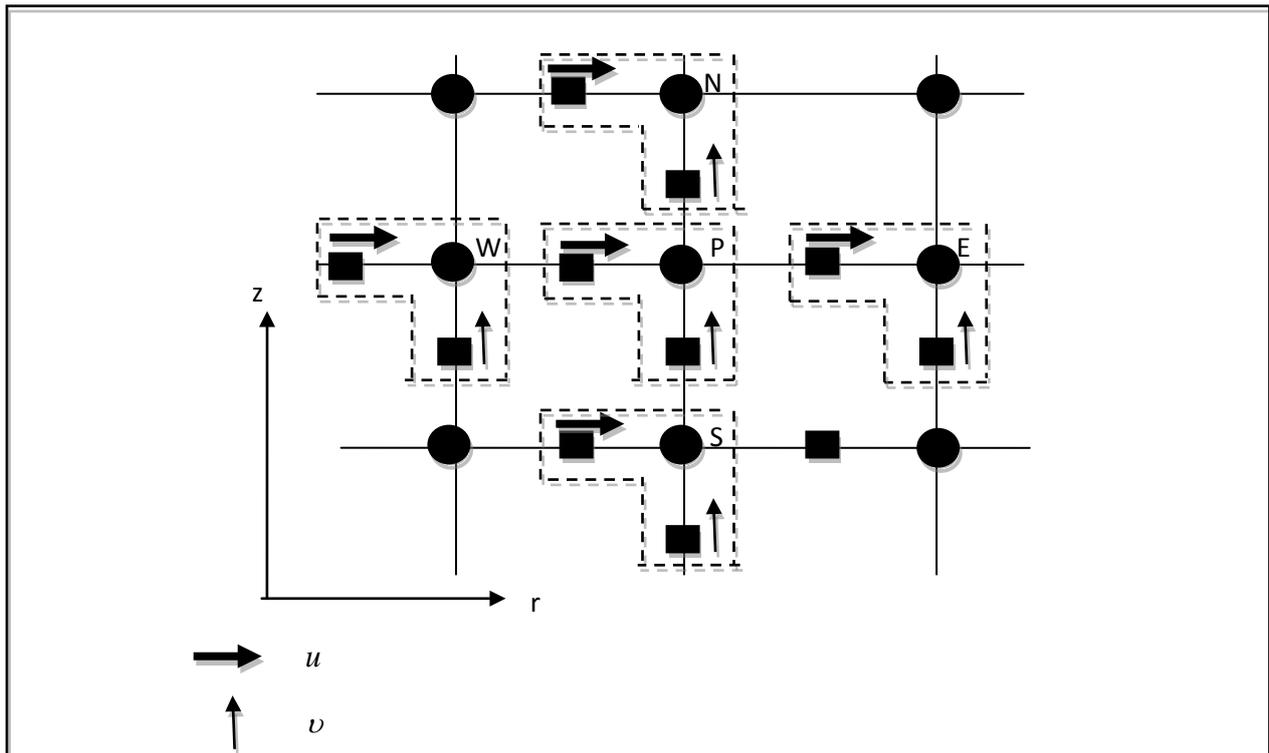
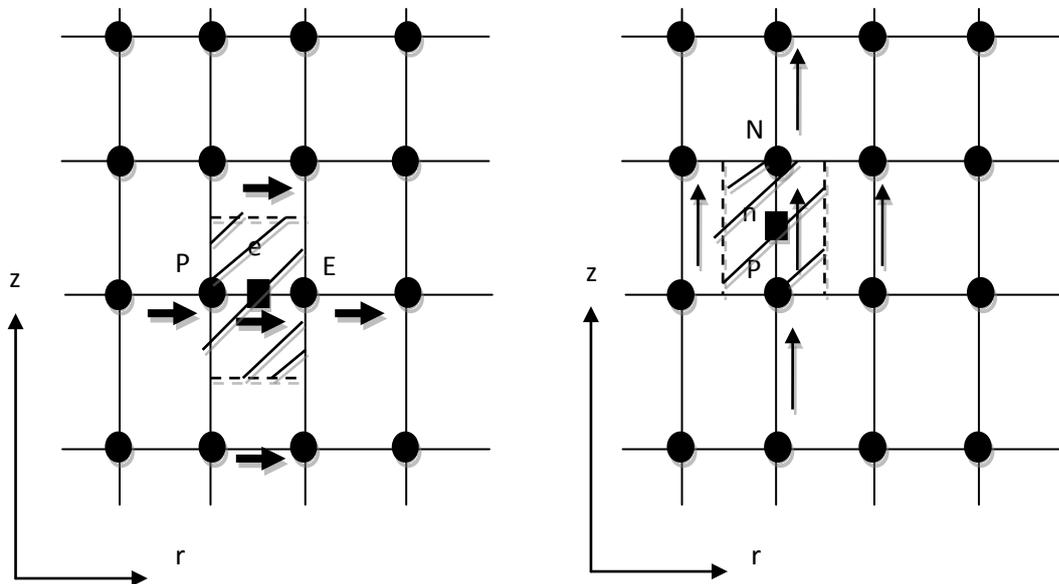


Figure 3.6 : Illustration d'une grille décalée pour u et v



a) Volume de contrôle correspondant à u

b) Volume de contrôle correspondant à v

Figure 3.7 : Volumes de contrôle relatifs aux deux composantes de la vitesse

- **Algorithme SIMPLE**

- **Introduction**

Les équations de quantité de mouvement sont couplées entre elles par l'intermédiaire du champ de pression (voir le système d'équations (3.25)). Cette difficulté de couplage vitesse pression vient de l'absence d'équations explicites qui gouvernent le champ de pression. Pour cette raison, on utilise des méthodes indirectes dont la plus répandue est l'algorithme « SIMPLE ».

1. On se donne un champ de pression estimé de départ P^* ,
2. On déduit un champ de vitesse correspondant \overline{V}^* . Comme ce champ \overline{V}^* peut ne pas satisfaire l'équation de continuité, la pression P^* nécessite ainsi d'être corrigée et par conséquent \overline{V}^* de manière à ce que l'équation de continuité soit satisfaite.

Ceci étant l'objet de l'algorithme « SIMPLE »

- **Equation de correction de la vitesse**

Soit P' la correction de la pression, u' et v' les fluctuations des composantes de vitesse u et v . Ainsi, les champs corrigés de pression et de vitesse peuvent s'écrire comme suit :

$$P = P^* + P' \quad (a); \quad u = u^* + u' \quad (b); \quad v = v^* + v' \quad (c) \quad (3.26)$$

Pour un champ de vitesse \overline{V}^* résultant d'un champ de pression P^* le système d'équations (3.17) s'écrit :

$$\begin{aligned} a_e u_e^* &= \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + b + (P_p^* - P_E^*) A_e \quad (a) \\ a_n v_n^* &= \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + b + (P_p^* - P_N^*) A_n \quad (b) \end{aligned} \quad (3.27)$$

En soustrayant l'équation (3.25.a) de l'équation (3.27.a), on aboutit à :

$$a_e u_e - a_e u_e^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} - \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + (P_p - P_E) A_e - (P_p^* - P_E^*) A_e \quad (3.28)$$

D'après l'équation (3.26.b), l'équation précédente peut s'écrire :

$$a_e u'_e = \sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} + (P'_p - P'_E) A_e \quad (3.29)$$

En négligeant le terme $\sum_{nb} a_{nb} u'_{nb}$, l'équation (3.29) se réduit à :

$$a_e u'_e = (P'_p - P'_E) A_e \quad (3.30)$$

d'où :

$$u'_e = (P'_p - P'_E) d_e \quad (3.31)$$

avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}$$

L'équation (3.31) s'appelle « formule de correction de la vitesse ». De la même manière, on obtient celle relative à la composante v . Ainsi, les équations de correction de u et v aux mailles e et n [figure 3.7a et 3.7b] se réduisent à :

$$\begin{aligned} u_e &= u_e^* + (P'_p - P'_E) d_e \\ v_e &= v_e^* + (P'_p - P'_N) d_n \end{aligned} \quad (3.32)$$

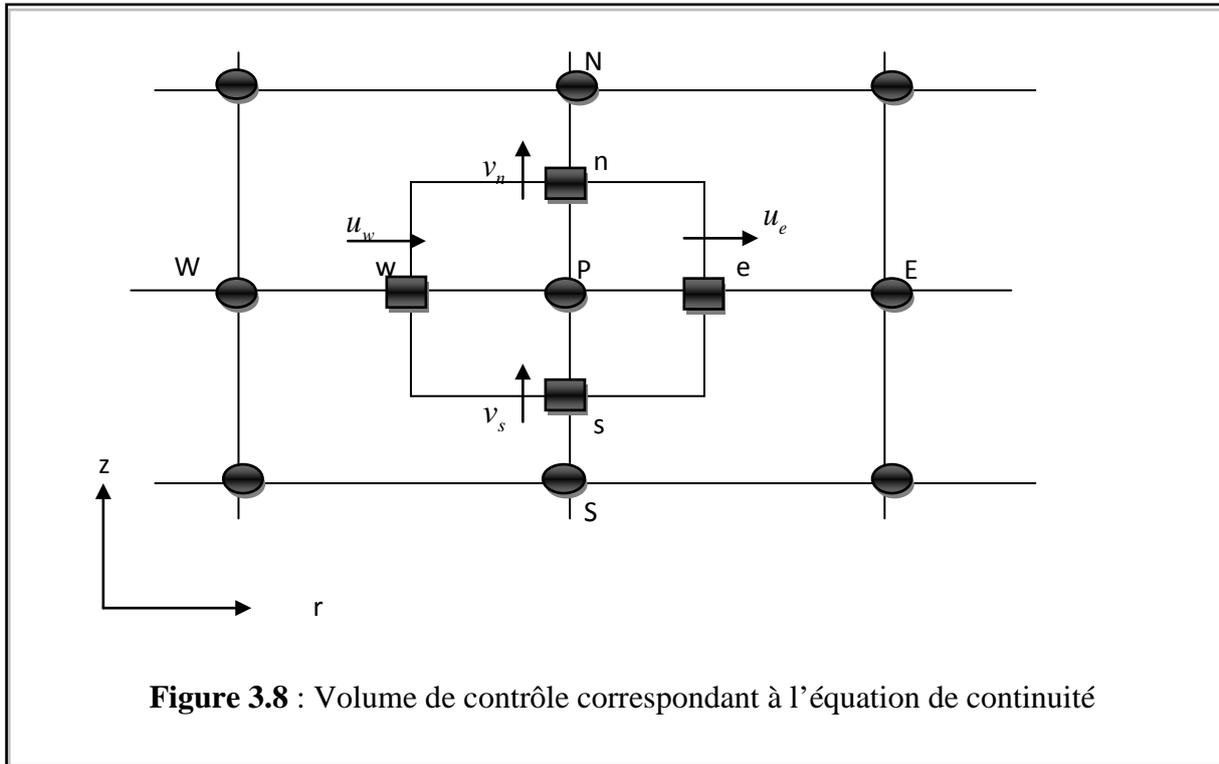
Il est à noter que le même raisonnement sera suivi pour les vitesses u_w et v_s .

- **Equation de correction de la pression**

Maintenant, on considère l'équation de continuité (remplacer ϕ par 1 et S_ϕ par 0 dans l'équation (3.1)) que nous allons intégrer à travers le volume de contrôle représenté sur la figure 3.8.

Après intégration on obtient :

$$\left[(ur)_e - (ur)_w \right] \Delta z + \left[(v)_n - (v)_s \right] \Delta r.r_m = 0 \quad (3.33)$$



En remplaçant dans l'équation (3.33) les vitesses u_e, u_w, v_n et v_s par leurs expressions données dans l'équation (3.32), on aboutit à l'équation de correction de la pression :

$$a_p P'_p = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad (3.34)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_E &= d_e \Delta z r_e; \quad a_W = d_w \Delta z r_w; \quad a_N = d_n \Delta r r_m; \quad a_S = d_s \Delta r r_m; \\ b &= \left[(u^* r)_w - (u^* r)_e \right] \Delta z + \left[(v^*)_s - (v^*)_n \right] \Delta r r_m \end{aligned} \quad (3.35)$$

• **Séquences des opérations de l'algorithme « SIMPLE »**

Après avoir exposé la méthode de discrétisation des différentes équations et le principe de base de l'algorithme « SIMPLE », on peut résumer l'ensemble des calculs qui interviennent dans la résolution des équations mentionnées précédemment comme suit :

1. Introduction des caractéristiques physiques et géométriques du domaine à étudier et construction de la grille décalée pour le champ de vitesse
2. Introduction d'un champ de pression P^* estimé de départ

3. Calcul du champ de vitesse \overline{V}^* en résolvant les équations de quantités de mouvement (3.25)
4. Résolution de l'équation de la pression (Equation (3.34))
5. Calcul du champ de pression corrigée P en additionnant P' à P^* (Equation (3.26.a))
6. Calcul du champ de vitesse corrigé \overline{V}^* en utilisant la correction de pression P' (Equations (3.32))
7. Résolution des équations discrétisées pour les autres variables (T, k, ω)
8. Prendre la pression P comme étant un nouvel estimé P^* et reprendre l'exécution à l'étape 3 tout en répétant la procédure jusqu'à ce que la convergence soit atteinte.

- **Algorithme SIMPLER**

Une version améliorée de SIMPLE est l'algorithme de SIMPLER qui signifie SIMPLE révisée [59] et [60].

1. On écrit d'abord l'équation des quantités de mouvement sous la forme suivante :

$$\hat{u}_e = \frac{\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b}{a_e}; \quad \hat{v}_n = \frac{\sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b}{a_n} \quad (3.36)$$

2. On résout l'équation de la continuité avec la pression de l'itération précédente :

$$P^* = P \quad (3.37)$$

$$a_p P_p^* = a_E P_E^* + a_W P_W^* + a_N P_N^* + a_S P_S^* + b \quad (3.38)$$

$$a_E = d_e \Delta z r_e; \quad a_W = d_W \Delta z r_W; \quad a_N = d_n \Delta r r_m; \quad a_S = d_s \Delta r r_m; \\ b = [(\hat{u}r)_w - (\hat{u}r)_e] \Delta z + [(\hat{v})_s - (\hat{v})_n] \Delta r r_m \quad (3.39)$$

3. On résout les équations de base en intégrant les gradients de pression :

$$\begin{aligned} a_e u_e^* &= \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + b + (P_p^* - P_E^*) A_e \\ a_n v_n^* &= \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + b + (P_p^* - P_N^*) A_n \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ici la pression n'est pas corrigée comme dans l'algorithme SIMPLE mais en utilisant une seconde fois l'équation de continuité :

$$a_p P_p = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} a_E &= d_e \Delta z r_e; \quad a_W = d_W \Delta z r_W; \quad a_N = d_n \Delta r r_m; \quad a_S = d_s \Delta r r_m; \\ b &= \left[(u^* r)_w - (u^* r)_e \right] \Delta z + \left[(v^*)_s - (v^*)_n \right] \Delta r r_m \end{aligned} \quad (3.42)$$

1. On corrige les vitesses en ajoutant les gradients de la pression de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_e &= u_e^* + (P_e - P_p) d_e \\ v_n &= v_n^* + (P_p - P_N) d_n \end{aligned} \quad (3.43)$$

On passe au calcul de toutes les autres équations (énergie, énergie cinétique turbulente et taux de dissipation spécifique de k)

2. On prend finalement la pression P comme étant un nouvel estimé P^* et on reprend l'exécution de la première étape, tout en répétant la procédure jusqu'à ce que la convergence soit atteinte.

3.3.4 Résolution du système d'équations

Le système d'équations (3.16), obtenu après discrétisation de l'équation (3.1), est non linéaire. Pour le résoudre, on fait appel à des méthodes itératives où les coefficients des équations sont considérés comme connus à chaque itération.

Parmi ces méthodes itératives, on distingue la méthode de résolution ligne par ligne

- **Présentation de la méthode**

A l'itération $k+1$, le système (3.26) peut s'écrire :

$$a_p \phi_p^{(k+1)} = b + a_E \phi_E^{(k)} + a_W \phi_W^{(k)} + a_N \phi_N^{(k)} + a_S \phi_S^{(k)} \quad (3.44)$$

Ensuite on passe aux autres lignes en appliquant les équations générales suivantes :

$$\gamma_i' = \frac{\gamma_i}{\beta_i - \alpha_i \gamma_{i-1}'}, \quad \lambda_i' = \frac{\lambda_i - \alpha_i \lambda_{i-1}'}{\beta_i - \alpha_i \gamma_{i-1}'} \quad (3.48)$$

La détermination des valeurs ϕ_i est assurée par un calcul ascendant de ϕ_N jusqu'à la première valeur de ϕ_1 en utilisant les équations suivantes :

$$\phi_N = \lambda_N', \quad \phi_i = \lambda_i' - \phi_{i+1} \gamma_i' \quad (3.49)$$

Cette méthode permet donc l'obtention des solutions de nos variables sur chaque nœud du maillage. Le passage s'effectue par itérations successives ligne par ligne jusqu'à avoir toutes les solutions de la variable sur le maillage considéré.

3.3.5 Stabilité et convergence

- **Règles de base de la convergence de la méthode**

La forme algébrique finale des équations discrétisées est :

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (3.50)$$

En vue d'assurer la convergence, il est nécessaire de respecter les quatre règles de base suivantes :

1° Règle : Compatibilité aux frontières des volumes de contrôle

Lorsqu'une face est commune à deux volumes de contrôle adjacents, le flux qui les traverse doit être représenté par la même expression dans les équations discrétisées pour chacun des deux volumes de contrôle.

2° Règle : coefficients positifs

La valeur de la variable ϕ en un point donné est influencée par les valeurs de ϕ aux nœuds voisins. Dans les mêmes conditions, l'augmentation de la valeur de ϕ en un point doit provoquer une augmentation de ϕ aux nœuds voisins. Pour cela, les coefficients a_p et a_M doivent tous avoir le même signe (positif ou négatif).

3° Règle : Linéarisation des termes sources

Dans l'équation (3.20), les coefficients a_M sont positifs, les coefficients a_p peuvent devenir négatifs à travers les termes S_p entraînant ainsi des instabilités numériques. Pour cette raison, les termes S_p doivent être négatifs ou nuls.

4° Règle : Somme des coefficients voisins

Les équations différentielles gouvernantes contiennent uniquement les dérivées de la variable dépendante ϕ . Si on considère une constante arbitraire c , alors la fonction $\phi + c$ vérifie aussi les équations différentielles. Cette propriété est aussi valable pour les équations discrétisées. Ceci conduit à :

$$a_p = \sum_{nb} a_{nb} \quad (3.51)$$

- **Technique de sous relaxation**

Parmi les méthodes de résolution des systèmes d'équations, on distingue les méthodes itératives. Ces dernières sont généralement plus utilisées pour :

- des systèmes de grandes tailles
- des systèmes dont les équations algébriques sont à caractère non linéaire et couplé.

Dans cette catégorie de méthodes, on utilise la technique de relaxation pour contrôler la convergence du processus itératif (ralentir ou accélérer la convergence).

Soit l'équation de la variable ϕ :

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (3.52)$$

Ou encore :

$$\phi_p = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} \quad (3.53)$$

A l'itération $(k+1)$, on peut écrire :

$$\phi_p^{(k+1)} = \phi_p^{(k)} + \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb}^{(k+1)} + b}{a_p} - \phi_p^{(k)} \right] \quad (3.54)$$

$\phi^{(k)}$: Valeur de ϕ à l'itération (k)

$\phi^{(k+1)}$: Valeur de ϕ à l'itération $(k+1)$

La quantité entre crochets dans l'équation (3.54) représente la variation de ϕ produite par une itération ou tout simplement le résidu.

La technique de relaxation cherche à diminuer les résidus d'une première approximation puisque ces résidus sont nuls pour la solution exacte, ce qui revient à introduire un facteur de relaxation α_ϕ .

$$\phi_p^{(k+1)} = \phi_p^{(k)} + \alpha_\phi \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb}^{(k+1)} + b}{a_p} - \phi_p^{(k)} \right] \quad (3.55)$$

Ou bien :

$$\frac{a_p}{\alpha_\phi} \phi_p^{(k+1)} = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb}^{(k+1)} + b + (1 - \alpha_\phi) \frac{a_p}{\alpha_\phi} \phi_p^{(k)} \quad (3.56)$$

En pratique, α_ϕ est défini tel que $0 < \alpha_\phi < 2$. Si $\alpha_\phi > 2$ le processus diverge souvent :

Deux cas sont généralement rencontrés :

- $1 < \alpha_\phi < 2$ on est en présence d'une sur relaxation.
- $0 < \alpha_\phi < 1$ il s'agit d'une sous relaxation.

La technique de sous relaxation est très conseillée pour les problèmes non linéaires afin d'éviter la divergence. Dans notre cas, les variables u, v, T, k et ω sont sous relaxées de la même façon que l'équation (3.55).

- **Critère de convergence**

On dit qu'un processus itératif a atteint la convergence qui veut dire approcher au mieux la solution stable du système d'équations en un nombre optimal d'itérations, lorsque les itérations ultérieures ne produisent aucun changement significatif dans les valeurs des variables dépendantes ϕ . Pratiquement, on exprime cette convergence par un test d'arrêt du processus itératif appelé aussi « critère de convergence » qui dépend de la nature du problème et des objectifs du calcul.

Un critère approprié est celui qui porte sur les résidus de quantité de mouvement, de la température, et des quantités de turbulence k et ω . Ces résidus sont définis par :

$$R_\phi = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b - a_p \phi_p \quad (3.57)$$

Evidemment, quand l'équation discrétisée est satisfaite, R_ϕ tendra vers zéro.

Mathématiquement, on traduit cela par l'inégalité suivante :

$$\max(R_\phi) < \varepsilon_\phi \quad (3.58)$$

ε_ϕ : Valeur infiniment petite caractérisant l'erreur sur la solution obtenue.

Un deuxième critère de convergence est basé sur l'observation de l'évolution des variables calculées aux points du maillage :

Soit ϕ_p^{n+1} et ϕ_p^n les valeurs de ϕ au temps $n+1$ et n entre deux itérations successives. On définit la condition par :

$$\max\left(\frac{\phi_p^{(n+1)} - \phi_p^{(n)}}{\phi_p^{(n+1)}}\right) < \varepsilon_\phi \quad (3.59)$$

3.4 Validation du code de calcul

La validation du code de calcul a été faite dans deux cas différents : le premier concerne l'écoulement de l'air en régime laminaire alors que la seconde partie traite l'écoulement de l'air dans des cavités carrées en régime turbulent vu la difficulté d'avoir des résultats expérimentaux en coordonnées cylindriques.

3.4.1 Régime laminaire

La validation du code de calcul a été testée par les résultats numériques obtenus par Lemembre et Petit [26]. Ces résultats concernent une cavité de petites dimensions où le nombre de Rayleigh ne dépassant pas 10^5 et le nombre de Prandtl égal à 0,7 [figure 3.9]. Les deux travaux comparés diffèrent par la méthode numérique utilisée. Ces auteurs ont utilisé les différences finies pour la discrétisation de leurs équations vorticité-fonction de courant et un schéma ADI alors que ce travail repose sur l'utilisation des volumes finies associé à l'algorithme SIMPLER. Les résultats obtenus pour la vitesse concordent très bien même en utilisant deux maillages différents, uniformes et non uniformes, avec ceux calculés par les auteurs considérés.

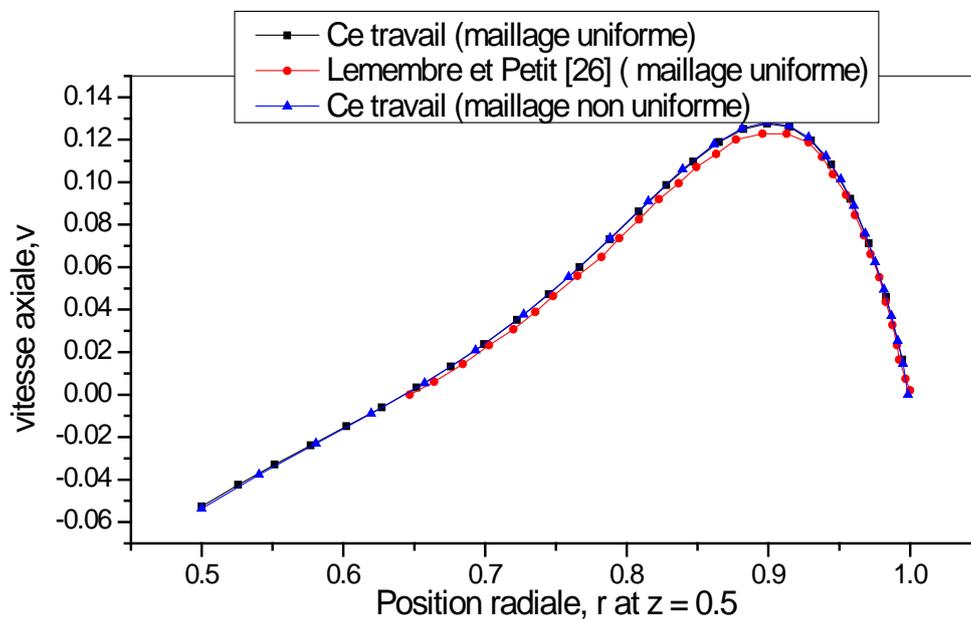


Figure 3.9 : Variation de la vitesse axiale en fonction de r à mi-hauteur de la cavité pour un nombre de Rayleigh $Ra=10^5$ et $Pr=0,71$

En ce qui concerne la variation de la température près de l'axe et à mi-hauteur de la cavité [figure 3.10], nous remarquons une légère différence envers la valeur calculée de cette variable mais l'allure est en parfaite concordance; cela peut être dû aux méthodes numériques différentes entre les deux travaux.

On note d'autre part que l'utilisation de la même méthode numérique, et en utilisant les mêmes équations, a fourni une parfaite concordance [61].

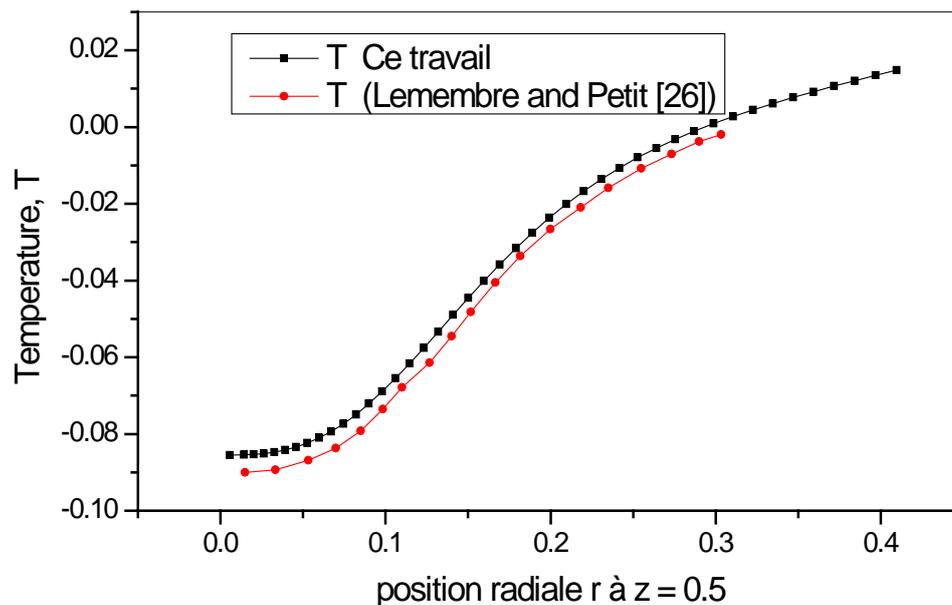


Figure 3.10: Variation de la température en fonction de r à mi-hauteur de la cavité pour un nombre de Rayleigh $Ra=10^5$ et $Pr=0,71$

3.4.2 Régime turbulent

L'utilisation des résultats expérimentaux comme référence est un bon outil pour la validation surtout lors du choix du modèle de turbulence. Dans cette partie, nous avons fait des comparaisons avec des résultats expérimentaux obtenus dans une cavité carrée différentiellement chauffée et contenant de l'air représentée sur la figure 3.11. Ampofo et Karayianis [24] ont pu faire des expériences sur l'écoulement de l'air, suite aux phénomènes de convection naturelle où le nombre de Rayleigh est fixé à $1,58.10^9$ et le nombre de Prandtl est égal à 0,71.

Les parois chaudes et froides sont isothermes à 50 et 10°C et la cavité possède des dimensions 0,75 m de hauteur 0,75 m de largeur et 1,5 m de profondeur.

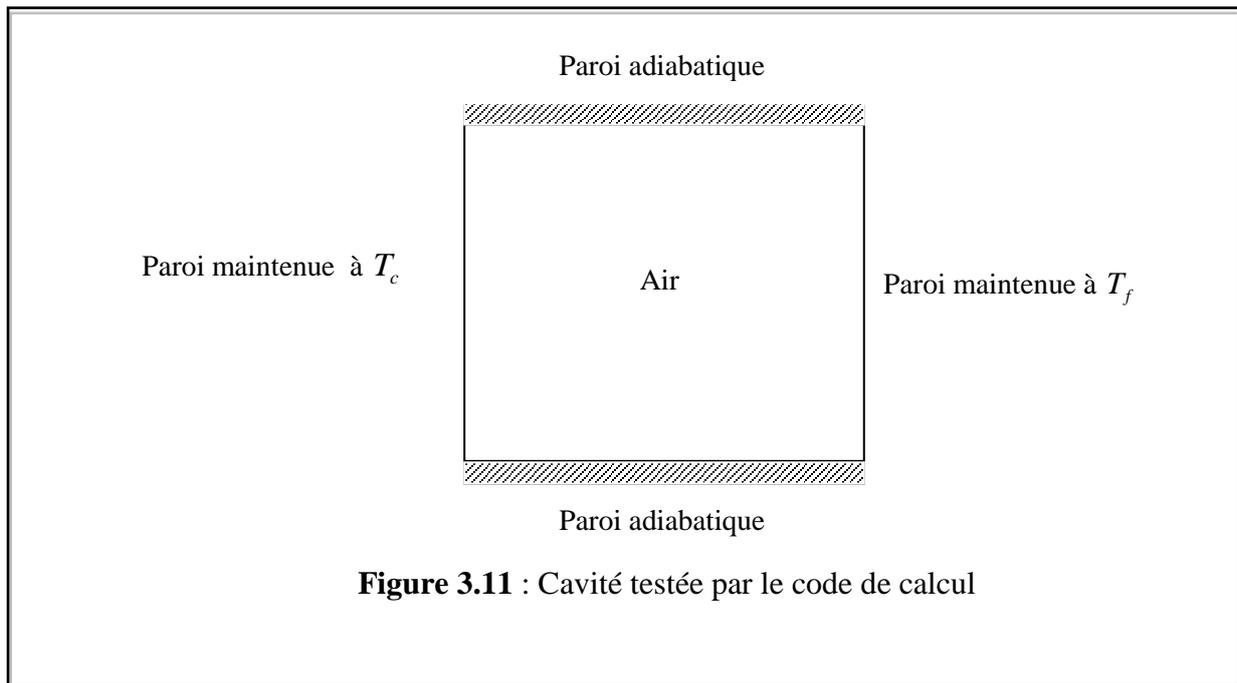


Figure 3.11 : Cavité testée par le code de calcul

Les solutions obtenues par ces auteurs nous ont fourni beaucoup d'informations sur les quantités moyennes et fluctuantes. De plus, leurs résultats ont été donnés sous formes de tableaux de valeurs et qui constituent des solutions Benchmark.

Ces résultats sont très intéressants pour la validation de notre code de calcul. Nous avons essayé dans la suite de ce travail de présenter certains profils numériques comparés directement avec les profils expérimentaux pour la vitesse verticale, la température, le nombre de Nusselt le long de la paroi chaude et le long de la paroi froide et finalement l'énergie cinétique turbulente.

Nous présentons alors, les variations de la vitesse verticale et de la température à mi-hauteur de la cavité. Les valeurs de la vitesse sont confondues avec celles expérimentales [figure 3.12]. Par ailleurs, les valeurs de la température représentées sur la figure 3.13 montrent une bonne concordance avec celles expérimentales. Ces dernières sont légèrement supérieures à celles calculées numériquement au milieu de la cavité.

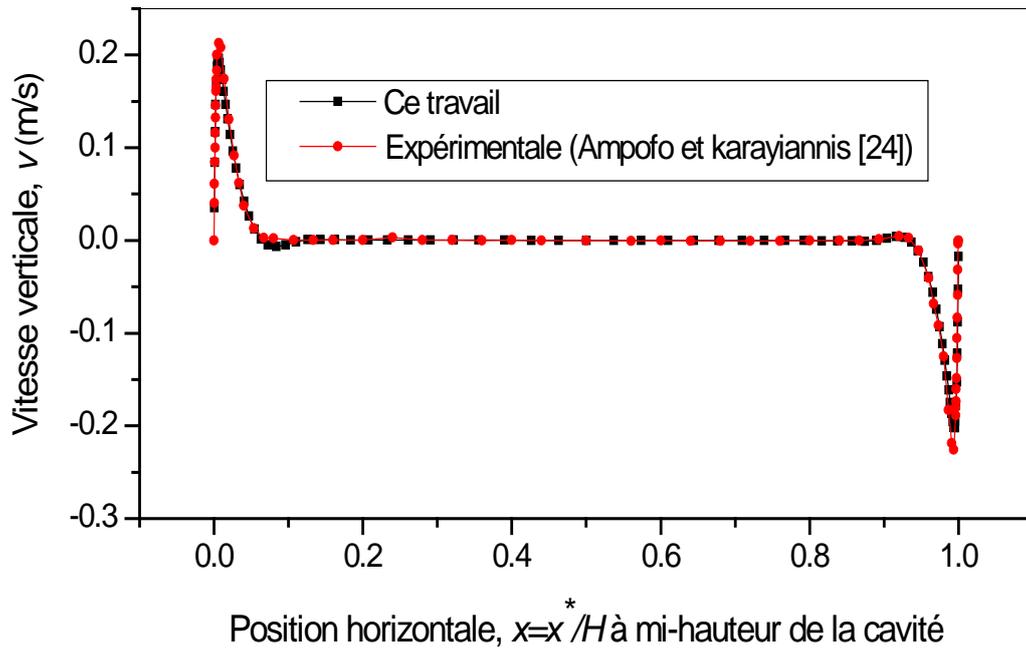
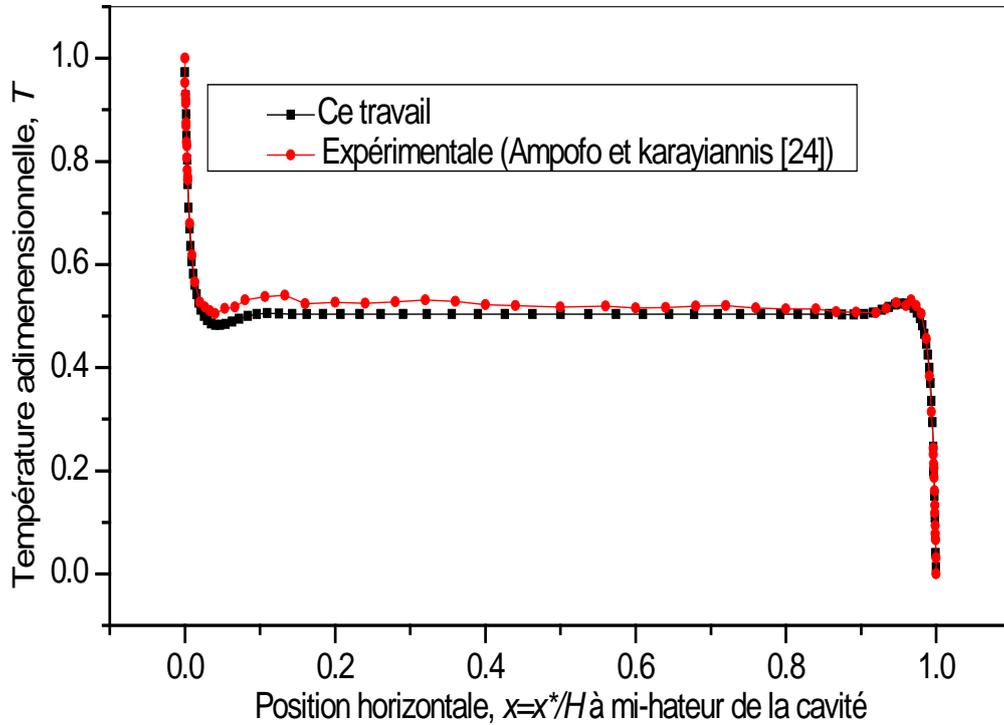


Figure 3.12 : Variation de la vitesse verticale en fonction de x à mi-hauteur de la cavité



Fig

ure 3.13 : Variation de la température en fonction de x à mi-hauteur de la cavité

Le nombre de Nusselt local est calculé par la même formule utilisée par [24] le long de la paroi chaude [figure 3.14] et le long de la paroi froide [figure 3.15].

Dans les deux figures ci-dessous, nous enregistrons des valeurs maximales très proches des parois horizontales (au niveau de la base coté chaud et au niveau du sommet coté froid) de l'ordre de 220. Cette valeur n'a pas été mesurée expérimentalement mais on note une très bonne concordance des autres positions verticales.

Une concordance a été également remarquée pour les valeurs de l'énergie cinétique turbulente où nous montrons une certaine sous-estimation des valeurs maximales obtenues expérimentalement [figure 3.16] près de la paroi chaude. Des résultats plus anciens ont été obtenus par [62] en utilisant le modèle k-epsilon standard et ont permis d'obtenir des valeurs encore plus petites mais de même ordre de grandeur que celles obtenues par Peng et Davidson [52] en utilisant la méthode LES.

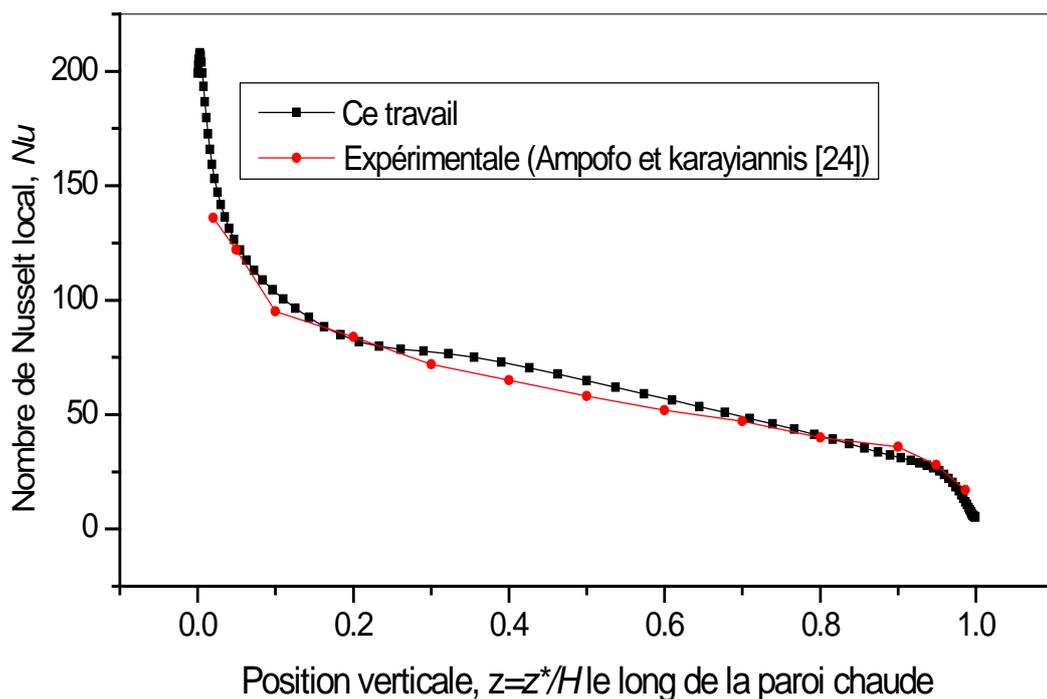


Figure 3.14 : Variation du nombre de Nusselt le long de la paroi chaude en fonction de z

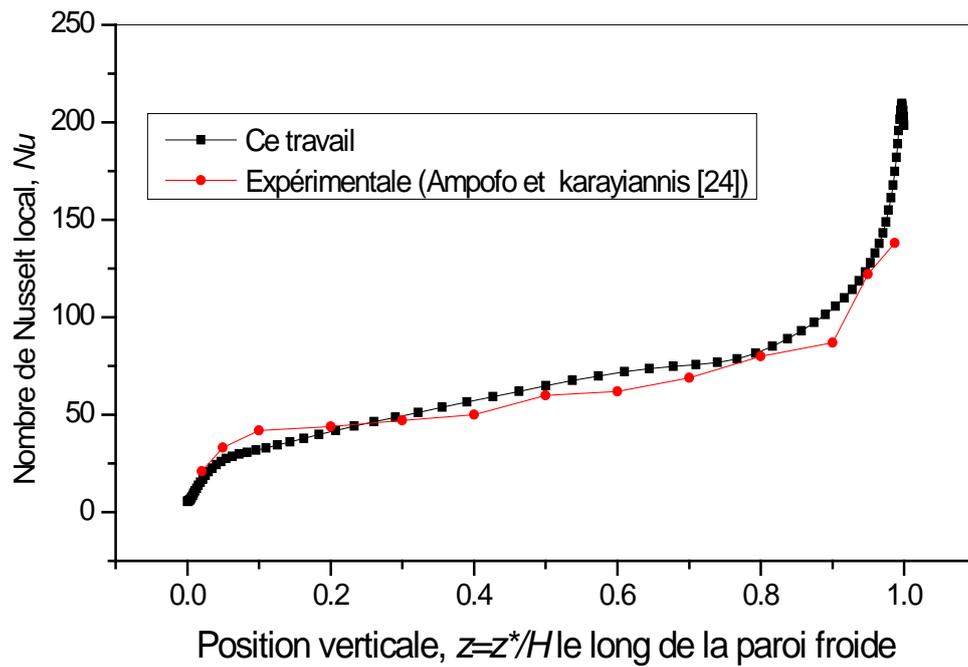


Figure 3.15 : Variation du nombre de Nusselt le long de la paroi froide en fonction de z

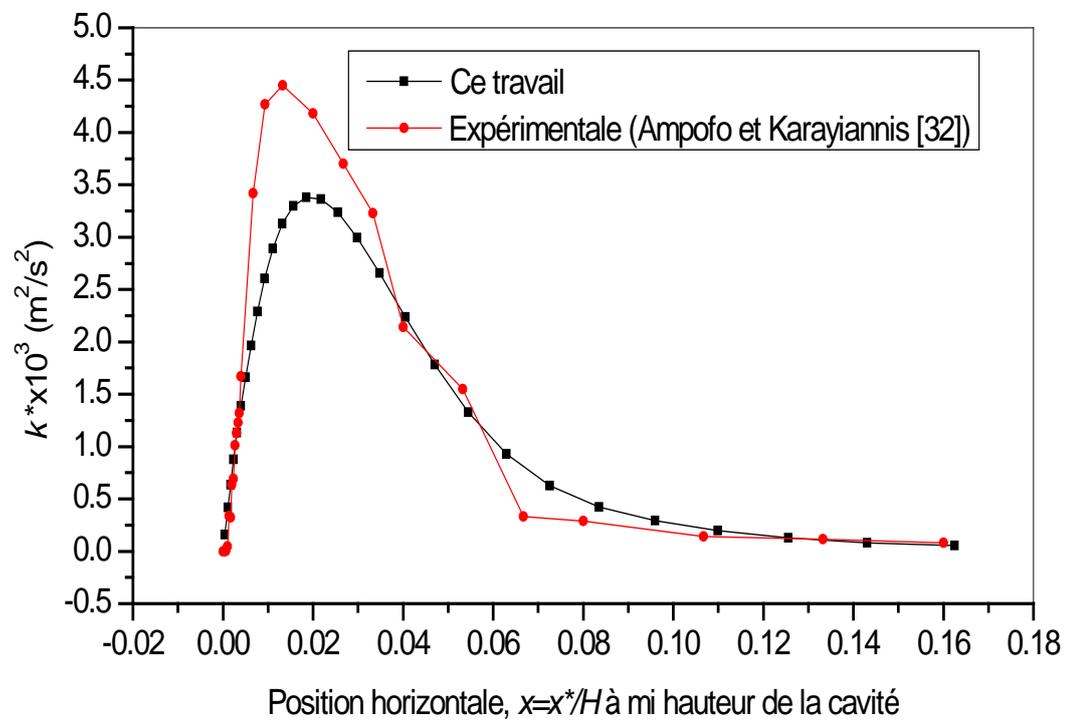


Figure 3.16 : Variation de l'énergie cinétique turbulente dimensionnelle, k^*

CHAPITRE 4 : RESULTATS ET DISCUSSIONS

CHAPITRE 4

RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.1 Introduction

Les résultats obtenus pour la simulation numérique de la convection naturelle du GNL sont divisés en deux grandes parties : la première concerne l'écoulement du GNL en régime laminaire dans une cavité de petites dimensions alors que la seconde traite l'écoulement du GNL en régime turbulent dans le bac de stockage.

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats de simulation de la manière suivante :

- Pour le cas du régime laminaire, nous présentons les champs de vitesse et de température ainsi que la variation de la densité du flux d'évaporation en fonction du nombre de Rayleigh.
- Pour le cas du régime turbulent, en plus des champs de vitesse, de température et des flux d'évaporation représentés en fonction du nombre de Rayleigh, nous introduisons deux nouvelles corrélations liées à l'étude. Ces corrélations peuvent servir de formules de calcul du nombre de Nusselt moyen le long de la paroi latérale et le long de la surface libre du GNL.

4.2 Convection naturelle en régime laminaire (cavité cylindrique)

Après validation du code de calcul pour le cas de la convection naturelle en régime laminaire dans une cavité cylindrique rempli d'air, nous passons à la simulation en présence du GNL pour des nombres de Rayleigh allant de 10^3 à 10^5 en fonction du rapport d'allongement. Les conditions aux limites appliquées, réelles, sont les conditions de stockage du GNL. Ce travail a fait l'objet d'une publication [28].

4.2.1 Influence du maillage

Le maillage utilisé est raffiné près des parois avec un nombre de nœuds variable de 40×40 , 60×60 et 80×80 . Ces maillages ont été testés pour un rapport d'allongement égal à $\frac{1}{2}$. Nous avons constaté que la solution est indépendante du maillage au-delà du cas de 60×60 .

Pour les autres types de rapport d'allongements, Nous avons choisi un maillage de 60×120 pour $Al = 1$ et un maillage de 120×40 pour $Al = 1/3$. Les figures 4.1 permettent de montrer les maillages utilisés pour tous les rapports d'allongements.

Le raffinement utilisé est basé sur l'utilisation d'une fonction hyperbolique dans l'équation (4.1) ou en utilisant des suites géométriques conçues de telle manière à retrouver les vraies dimensions de la cavité étudiée.

$$x(i) = 0,5 \left[1 + \frac{\tanh[cr(xr-1)]}{\tanh(cr)} \right] \quad z(i) = 0,5 \left[1 + \frac{\tanh[cz(xz-1)]}{\tanh(cz)} \right] \quad (4.1)$$

avec : $1 \leq i \leq m+1$ et $xr = 2(i-1)/m$ et $1 \leq j \leq n+1$ et $xz = 2(j-1)/n$

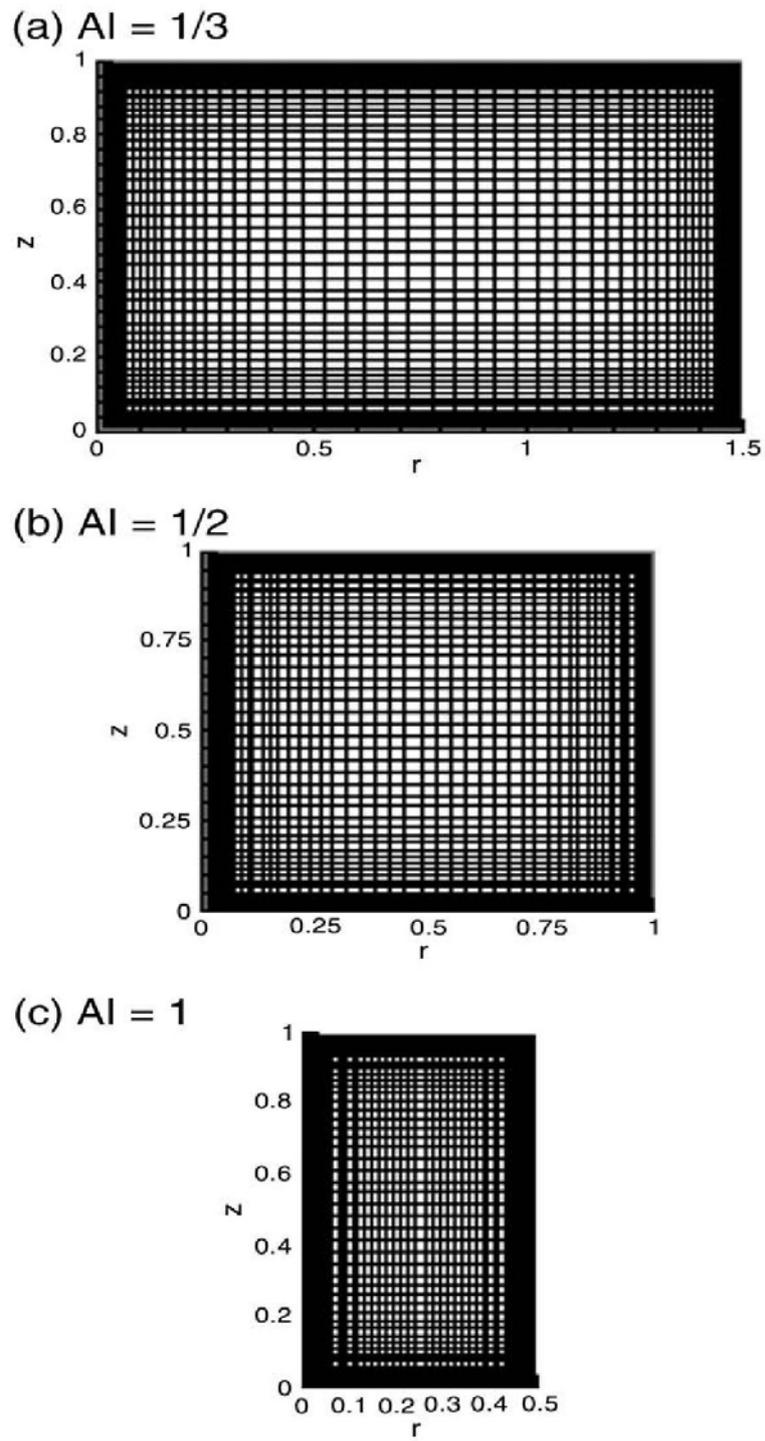


Figure 4.1 : Maillages utilisés pour le régime laminaire $Ra = 10^3$ à 10^5 et $Pr = 2$ pour $Al = 1/3$, $Al=1/2$ et $Al=1$

4.2.2 Champs de vitesse et de température

Les figures 4.2 a, b et c visualisent les contours de la température pour les 03 rapports d'allongements qui correspondent au nombre de Rayleigh égal à 10^5 .

Ces contours montrent bien l'existence d'une paroi chaude à partir de laquelle se créent des mouvements convectifs du fluide chaud qui se refroidit par évaporation à la surface libre puis revient au centre de la cavité pour descendre vers le bas. Cette recirculation est représentée pour les trois rapports d'allongement de la cavité sur les figures 4.3 a, b et c.

Les températures maximales sont localisées près de la paroi latérale. Sous l'effet du mouvement convectif les bouffées chaudes du liquide sont envoyées vers la surface libre. Les contours sont courbés près de la surface à cause de l'existence d'une interface où s'effectue l'évaporation. Cette interface a pour rôle de limiter l'augmentation de la température au-delà de celle de saturation. Les bouffées chaudes du GNL sont ensuite refroidies et envoyées vers le bas au centre de la cavité. C'est ainsi que les contours de valeurs plus basses sont localisés au niveau de l'axe de la cavité.

Dans le tableau 4.1, nous avons rassemblé les valeurs des températures maximale et minimale enregistrées dans la cavité cylindrique pour $Ra = 10^5$ et $Al = 1/3, 1/2, 1$.

Ces valeurs évoluent avec la variation du rapport d'allongement de la cavité, en raison du rapprochement de l'axe de la cavité par rapport à la paroi de chauffage latérale. Les mouvements convectifs du fluide, générés près de la paroi, permettent alors un mélange plus facile.

Ces températures varient en sens inverse avec le nombre de Rayleigh [28], comme le

montre l'expression : $\Delta T_0^* = \varphi_l H / \lambda$.

Cette différence de température de référence est fonction de la hauteur de la cavité qui impose la valeur du nombre de Rayleigh (la densité du flux latéral et la conductivité thermique étant constantes).

Tableau 4.1 : Température maximale et minimale du GNL en régime laminaire pour plusieurs rapports d'allongement de la cavité

| $Ra = 10^5$ | $Al = 1/3$ | $Al = 1/2$ | $Al = 1$ |
|-------------|------------|------------|----------|
| T_{\max} | 0,61 | 0,75 | 1,25 |
| T_{\min} | 0,15 | 0,23 | 0,48 |

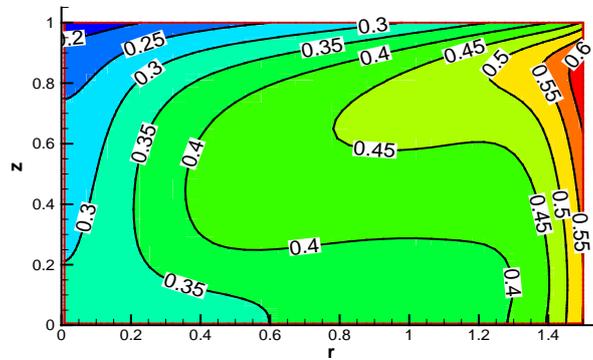
La formule suivante permet de calculer la température moyenne :

$$T_{\text{moy}} = 8Al^2 \int_0^1 \int_0^{1/(2Al)} Tr dr dz \quad (4.2)$$

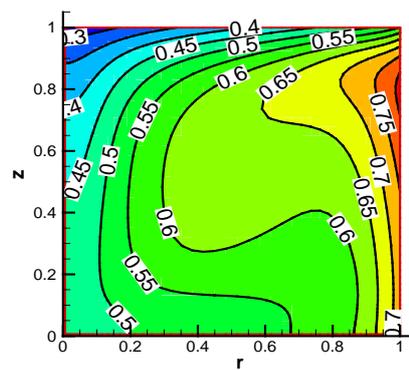
Cette température moyenne est calculée dans le volume du liquide dans la cavité cylindrique. Nous obtenons la valeur de 0,96 pour un rapport d'allongement égal à l'unité ($Al = 1$) ; alors qu'elle n'est que de 0,38 pour $Al = 1/3$. D'autre part, nous avons noté aussi que la température moyenne chute dans le cas d'une augmentation du nombre de Rayleigh pour n'importe quelle valeur du rapport d'allongement.

Sur les figures 4.3 a, b et c, nous confirmons l'existence d'une seule recirculation du GNL caractérisée par son centre qui est d'autant plus proche de la paroi au fur et à mesure que le rapport d'allongement est plus petit. Ceci justifie bien que le mélange s'effectue d'une façon meilleure dans le cas où le rapport d'allongement est plus grand. Les vitesses sont plus importantes sur l'axe pour $Al = 1$.

(a)



(b)



(c)

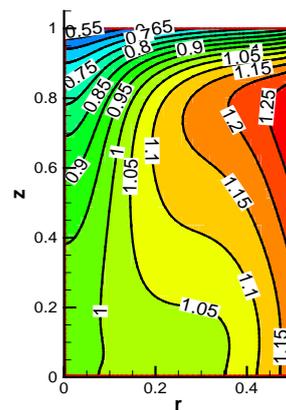


Figure 4.2 : Champs de température pour $Ra = 10^5$ et $Pr = 2$ pour $Al = 1/3, 1/2$ et 1

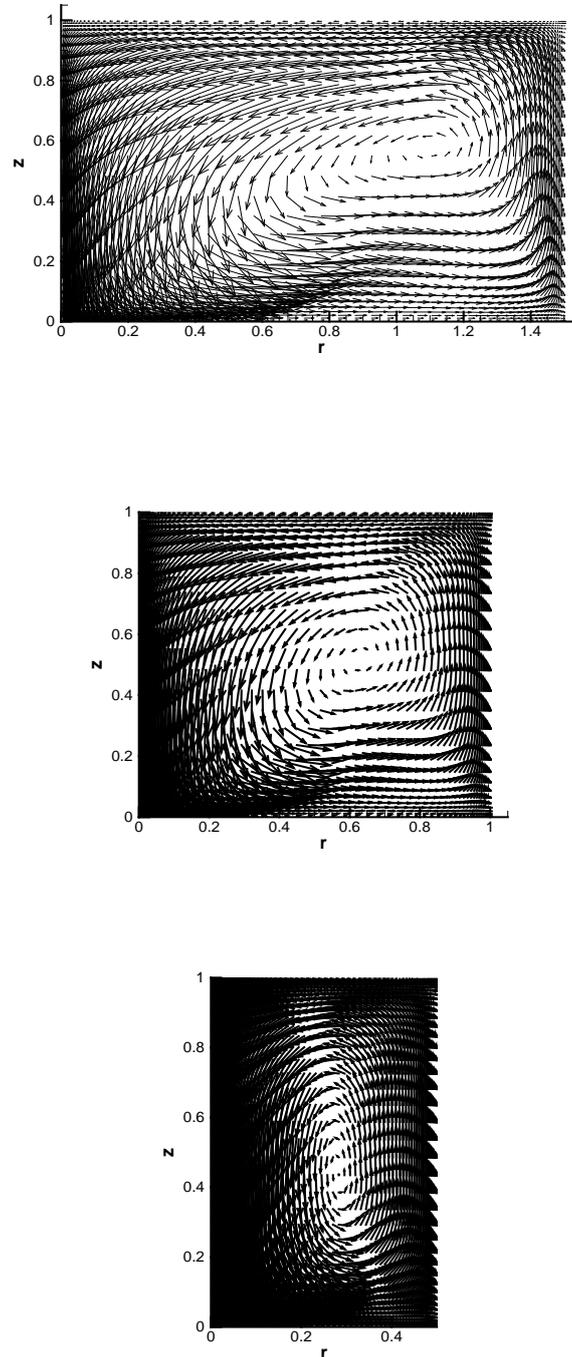


Figure 4.3 : Champs de vitesse pour $Ra = 10^5$ et $Pr = 2$ pour $Al = 1/3, 1/2$ et 1

Nous présentons sur la figure 4.4 la variation de la vitesse maximale en fonction du nombre de Rayleigh pour les rapports d'allongements considérés. Nous constatons que pour $Al = 1$ et $Al = 1/2$ les courbes sont très proches. Les valeurs de ces vitesses se superposent pour $Ra = 10^5$. Pour $Al = 1/3$, plus le nombre de Rayleigh est élevé, plus les valeurs de la vitesse maximale sont faibles par rapport aux autres rapports d'allongement de la cavité. Notons toutefois que ces courbes relient seulement les points où le nombre de Rayleigh est considéré. Pour plus de précision, les nombres de Rayleigh surtout entre 10^4 et 10^{15} doivent être traités en simulation numérique.

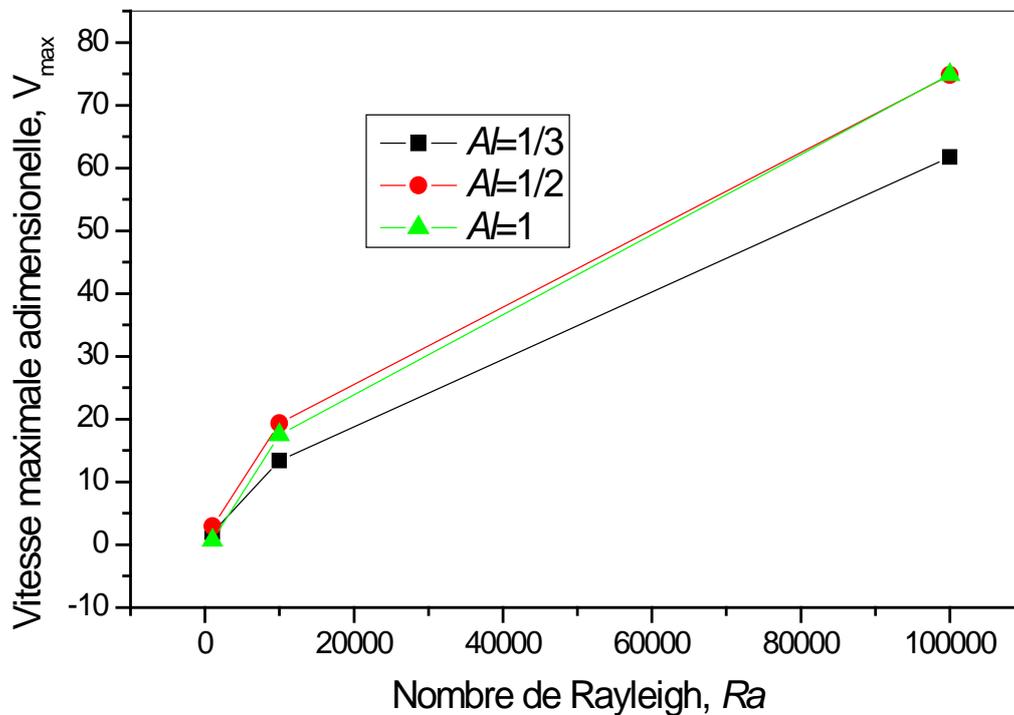


Figure 4.4 : Variation de la vitesse maximale pour $Ra = 10^3$ à 10^5 et $Al = 1/3, 1/2$ et 1

4.2.3 Densité du flux d'évaporation

La densité du flux d'évaporation, calculée par la loi de Hashemi-Wesson, permet de confirmer que la distribution de l'évaporation au niveau de la surface libre du GNL est non uniforme sur la figure 4.5. Cette distribution réelle fausse tous les calculs obtenus auparavant par d'autres auteurs qui imposent une densité de flux d'évaporation constante. En régime laminaire, une évaporation plus importante est enregistrée près des parois pour tous les nombres de Rayleigh et pour tous les rapports d'allongements utilisés. En fixant le rapport d'allongement, l'augmentation du nombre de Rayleigh engendre une évaporation plus intense près des parois au profit d'une diminution de celle-ci au niveau du centre de la surface libre. Cette variation réciproque permet de maintenir une densité de flux d'évaporation moyenne constante et par conséquent une conservation du bilan thermique dans toute la cavité.

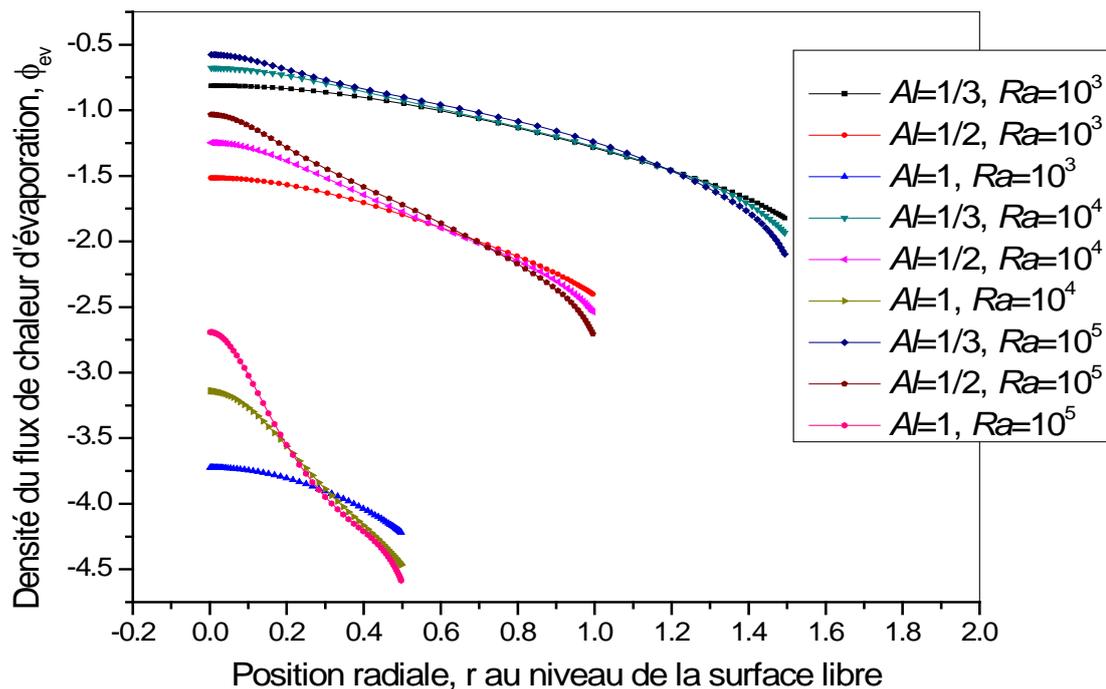


Figure 4.5 : Variation de la densité du flux d'évaporation en fonction du rayon de la cavité pour $Ra = 10^3$ à 10^5 et $Al = 1/3, 1/2$ et 1

4.3 Convection naturelle en régime turbulent (bac de stockage du GNL)

4.3.1 Influence du maillage

Le maillage utilisé dans ce travail est un maillage non uniforme, raffiné près des parois et près de l'axe afin d'avoir le maximum d'informations et d'éviter les problèmes d'instabilités qui provoquent l'explosion du schéma numérique.

Pour le cas laminaire, nous n'avons pas eu de problèmes de calcul en utilisant le maillage à pas constant. Mais toutefois le maillage raffiné donne une meilleure précision des résultats numériques.

Pour le cas turbulent, le maillage raffiné a été indispensable bien qu'il exige des moyens de calcul plus puissants. Nous avons commencé par un test de raffinement utilisant la fonction tangente hyperbolique [équation (4.1)]. Avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, le nombre de nœuds devient de plus en plus contraignant. Ce qui provoque un accroissement des coefficients de raffinement c_r et c_z .

A cet effet, nous avons testé les maillages de 80x80, 100x100, 120x120 et 140x140. Les résultats montrent que les solutions sont indépendantes du maillage pour les nombres de Rayleigh allant de 10^{12} jusqu'à 10^{14} alors que pour 10^{15} les variations commencent à apparaître (figures 4.6 et 4.7). La figure 4.6 montre, par exemple, que les valeurs de la vitesse axiale qui correspondent à $Ra = 10^{15}$ deviennent indépendantes du maillage pour un nombre de nœuds supérieur à 120x120.

Cette même remarque a été reproduite pour la figure 4.7, qui montre la variation de la température à mi hauteur de la cavité ($z = 0,5$) en fonction de r pour $Ra=10^{15}$.

En conclusion, les résultats des maillages 120x120 et 140x140 ont été exploités dans la suite de ce travail.

Pour les nombres de Rayleigh supérieur à 10^{15} , le maillage 120x120 ne donne pas de bonne prédiction des solutions numériques. Nous avons adopté un maillage de 140x140 pour $Ra = 10^{16}$ et un maillage de 160x160 pour $Ra = 10^{17}$. Les valeurs des coefficients de raffinement c_r et c_z [équation (4.1)] ont été fixés à 2 pour $Ra \leq 10^{15}$ et 2,5 $Ra > 10^{15}$.

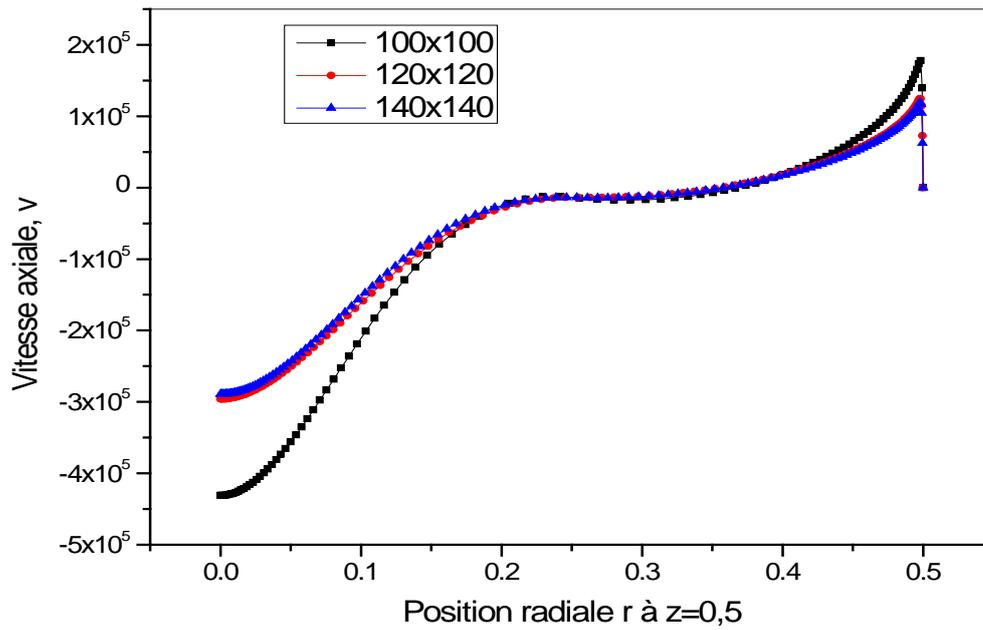


Figure 4.6 : Variation de la vitesse axiale en fonction de la position radiale à $z = 0,5$ pour un nombre de Rayleigh égal à 10^{15}

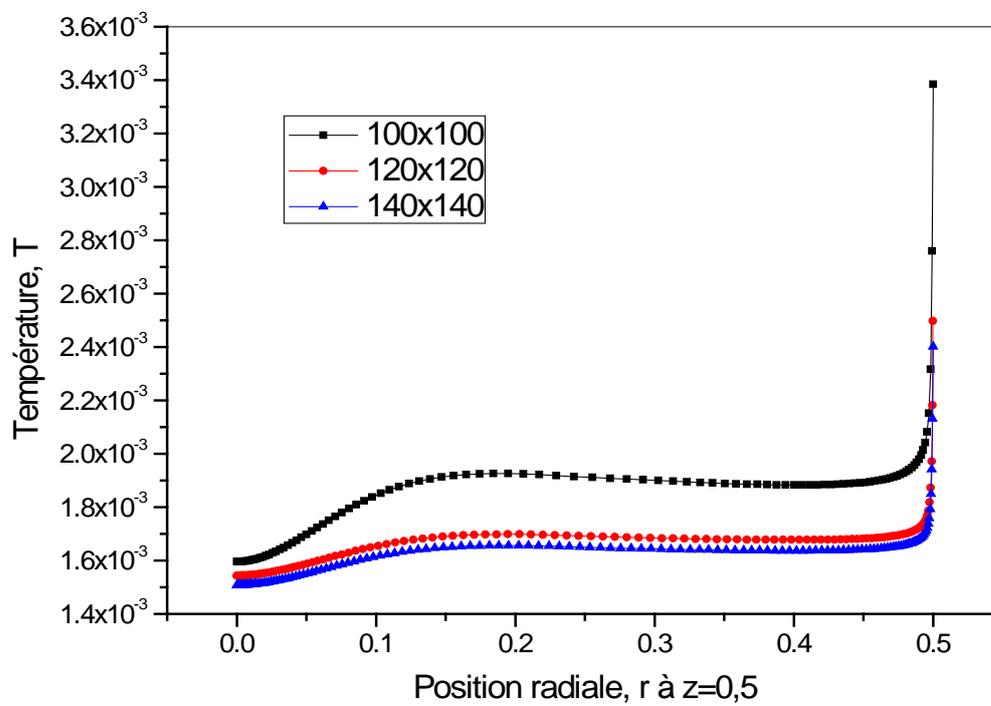


Figure 4.7 : Variation de la température en fonction de la position radiale à $z = 0,5$ pour un nombre de Rayleigh égal à 10^{15}

4.3.2 Champs de vitesse et de température

Nous avons présenté sur les figures 4.8 a, b et c les champs de températures et de vitesses afin d'étudier l'influence du nombre de Rayleigh. Ces figures se distinguent par la valeur de ce nombre.

Nous remarquons généralement sur les figures 4.8 a, b et c que les isothermes ayant de basses températures font leur apparition avec l'augmentation du nombre de Rayleigh au niveau de la zone centrale supérieure du bac de stockage. Toujours avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, ces isothermes ont tendance à aller vers le bas, suite à la recirculation rapide de l'écoulement du GNL.

De plus, les isothermes à hautes températures n'atteignent pas les profondeurs du bac, et inversement si le Rayleigh est plus faible, ces isothermes atteignent le bas du bac. Ce qui est évident puisque les grandes valeurs de Rayleigh impliquent des hauteurs de bac importantes. Par conséquent, les basses températures sont conservées au bas de la paroi latérale.

Il convient de noter que suite à l'imposition de la condition de surface libre du GNL (changement de phase et refroidissement convectif), les températures restent voisines de 0 (température de saturation nulle en valeur adimensionnelle).

Durant toutes les simulations numériques développées, nous n'avons enregistré qu'une seule recirculation dans le domaine de calcul pour tous les cas étudiés. Par contre, au centre nous observons une partie sous forme d'ellipse renfermant les vitesses les plus faibles du bac de stockage. A la périphérie de celle-ci les vitesses sont plus importantes surtout près de la paroi et l'axe du bac.

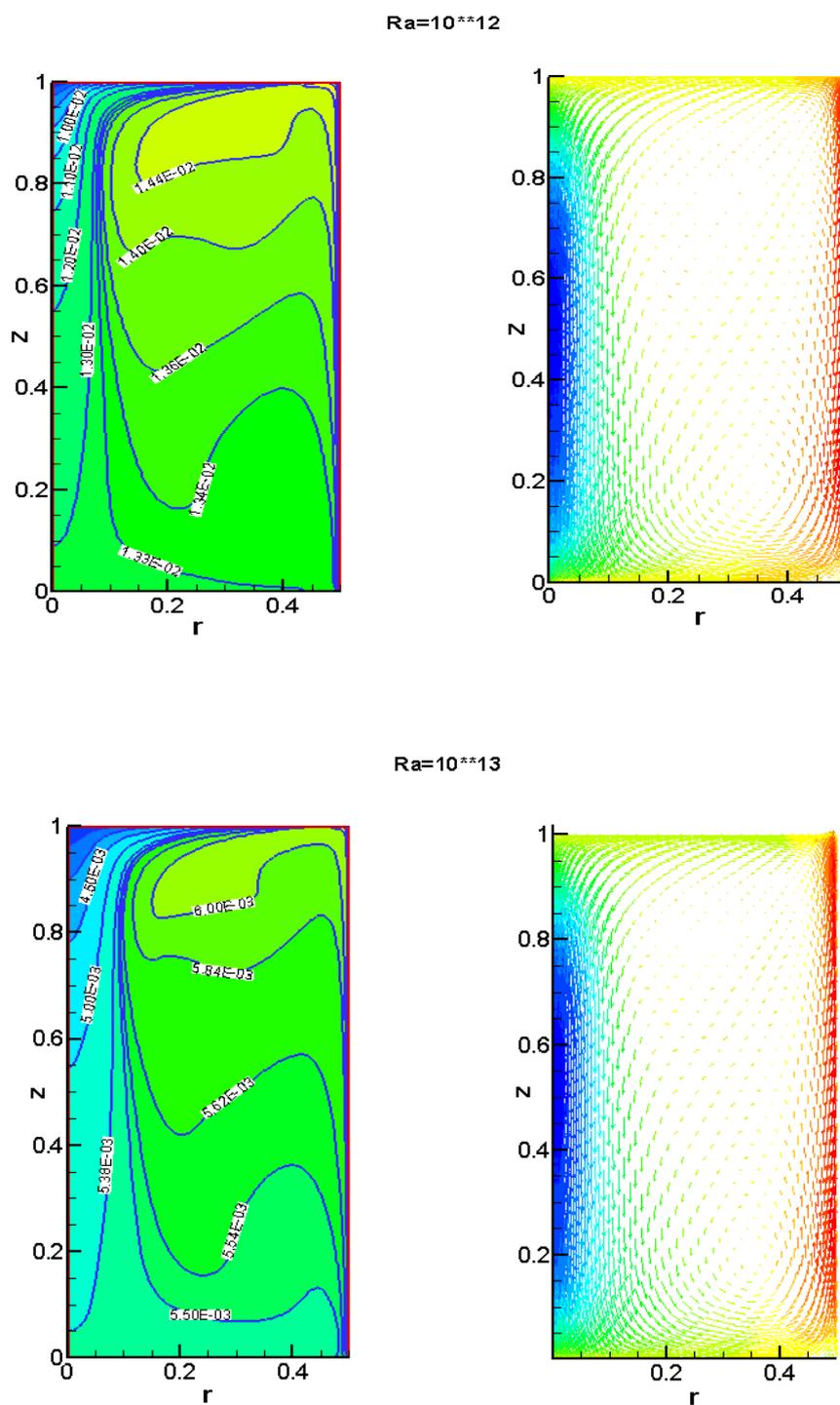


Figure 4.8a : Champs de températures et de vitesses pour les nombres de Rayleigh $10^{12}, 10^{13}$

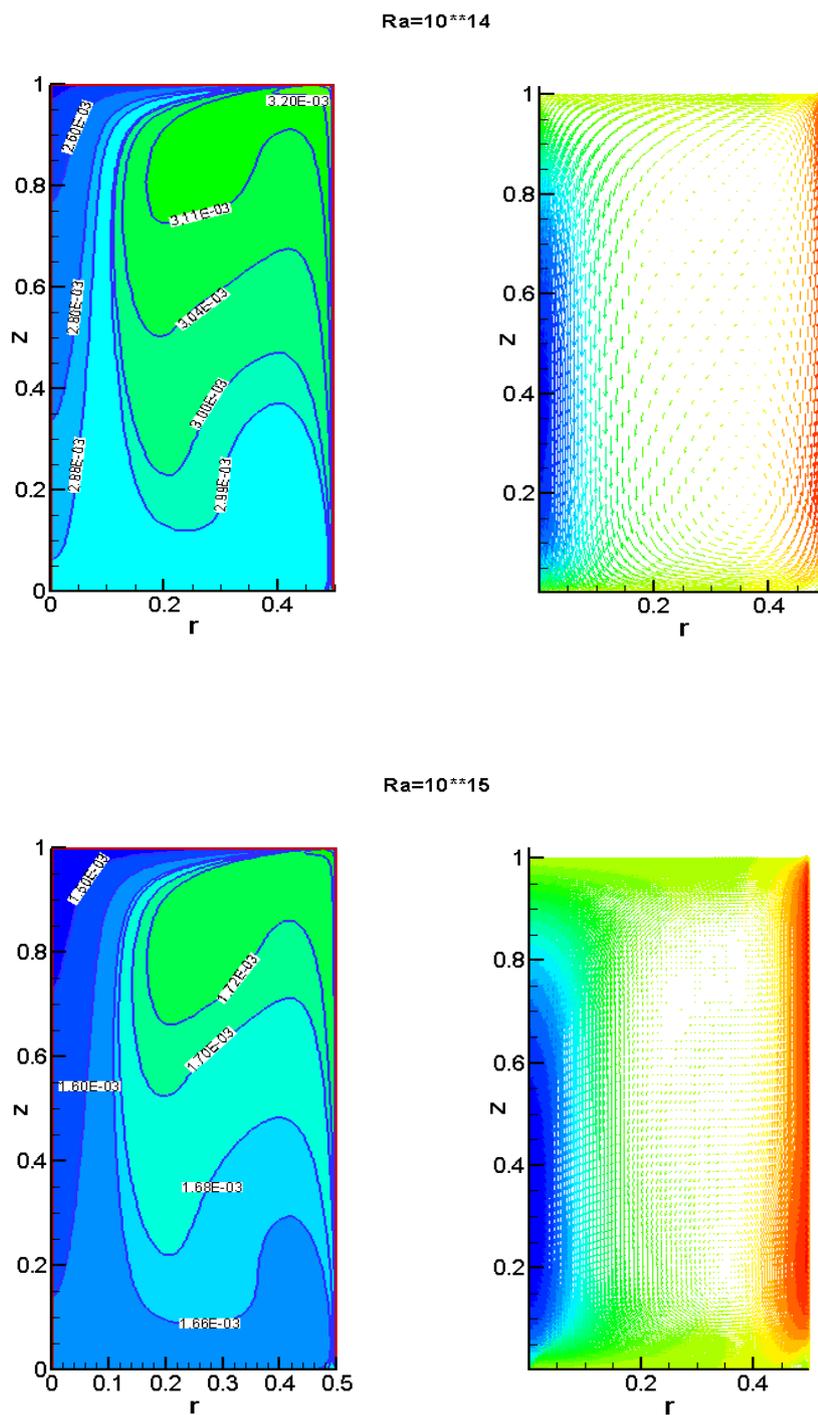


Figure 4.8b : Champs de températures et de vitesses pour les nombres de Rayleigh $10^{14}, 10^{15}$

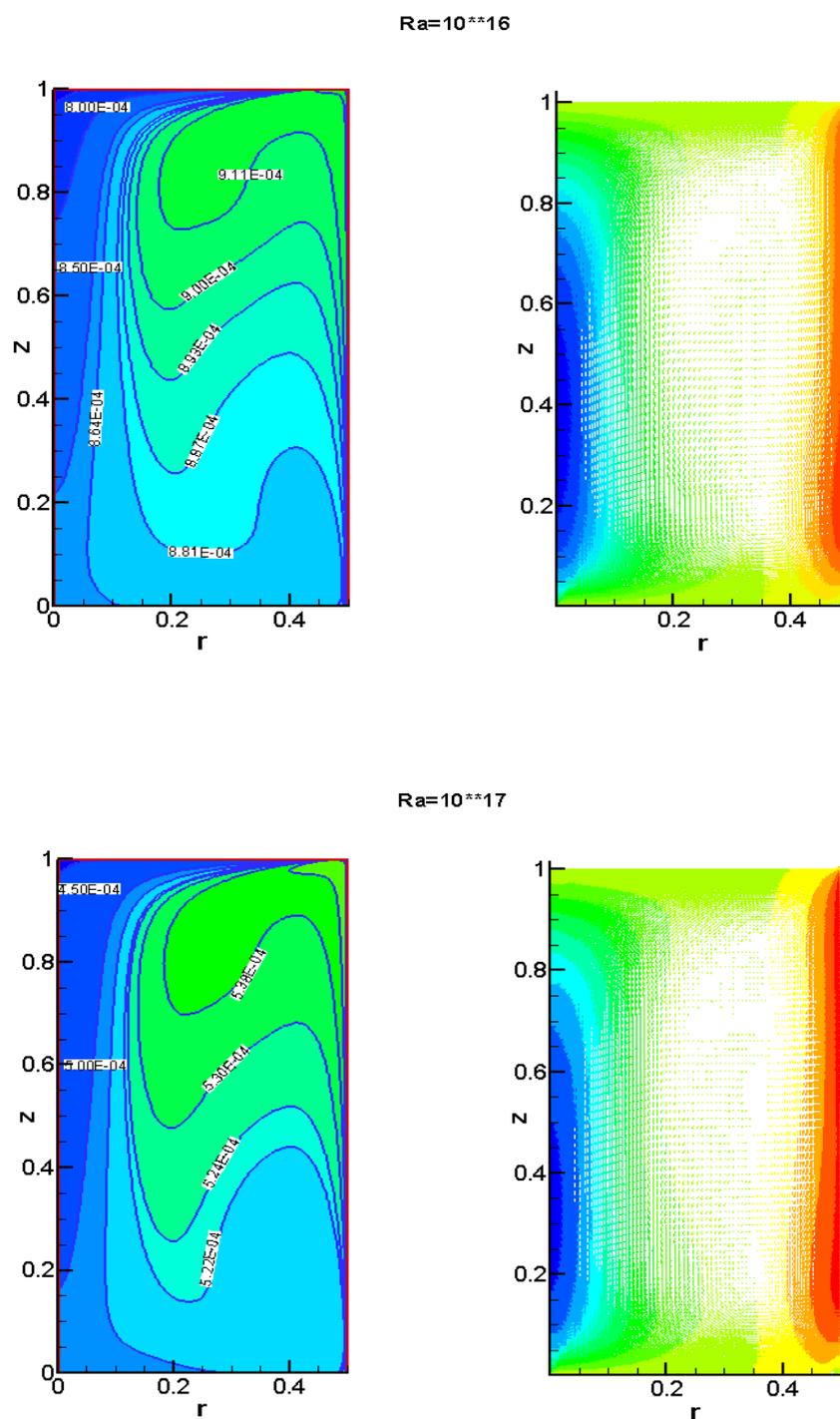


Figure 4.8c : Champs de températures et de vitesses pour les nombres de Rayleigh $10^{16}, 10^{17}$

Pour plus de détails concernant le champ de vitesse, nous présentons les variations des vitesses radiales et axiales avec le nombre de Rayleigh. La vitesse radiale u est représentée sur le plan vertical en $r = 0,25$ et $0 \leq z \leq 1$ dans les figures 4.9 a, b et c. Alors que la vitesse axiale v est représentée sur le plan horizontal en $z = 0,5$ et $0 \leq r \leq 0,5$ dans la figure 4.10 a, b etc.

Sur les figures 4.9 a, b et c, nous remarquons que les vitesses radiales u sont positives en bas du bac et dirigées vers la paroi latérale alors qu'elles sont négatives en haut de la cavité et dirigées vers l'axe central du bac.

Les courbes concernant la vitesse radiale présentent presque la même allure pour tous les nombres de Rayleigh sauf que sa valeur est d'autant plus grande que le nombre de Rayleigh est plus grand. D'autre part, on enregistre des vitesses radiales très faibles et proches de 0 au centre de la recirculation du liquide.

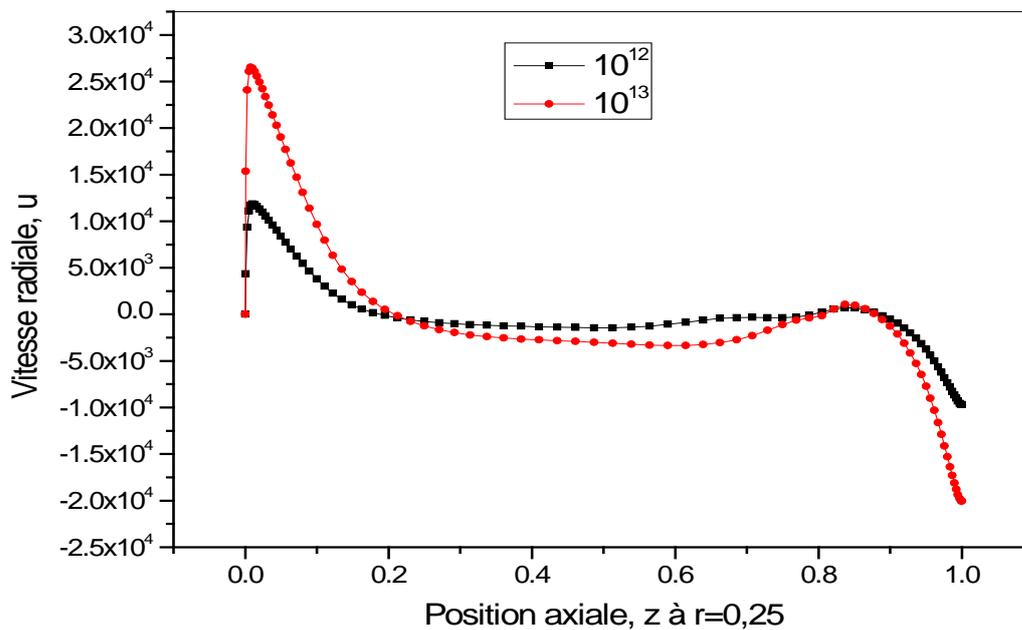
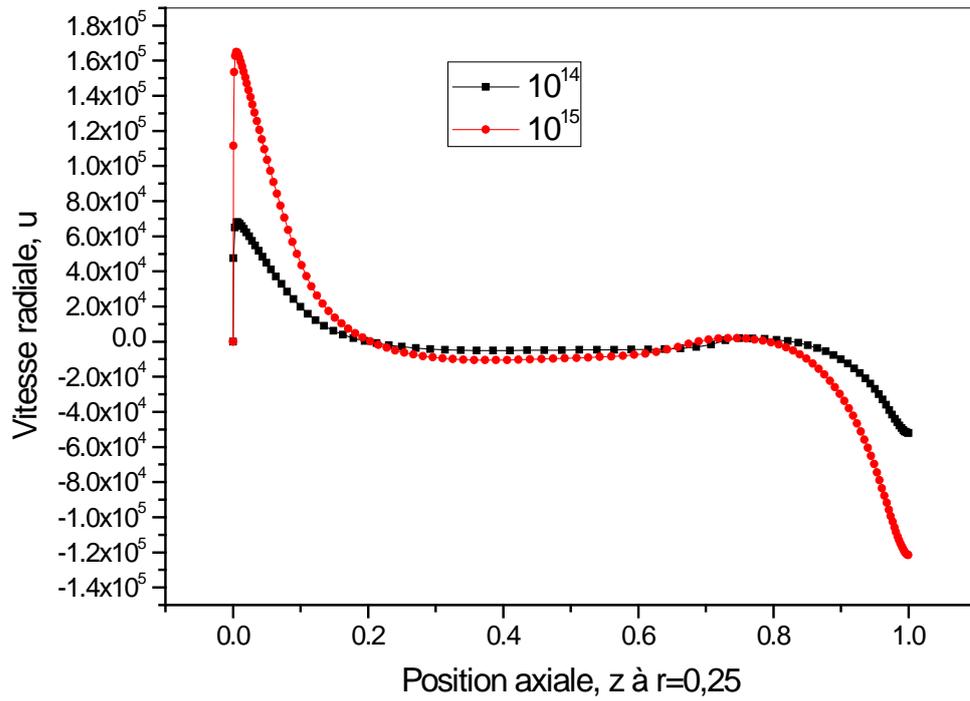
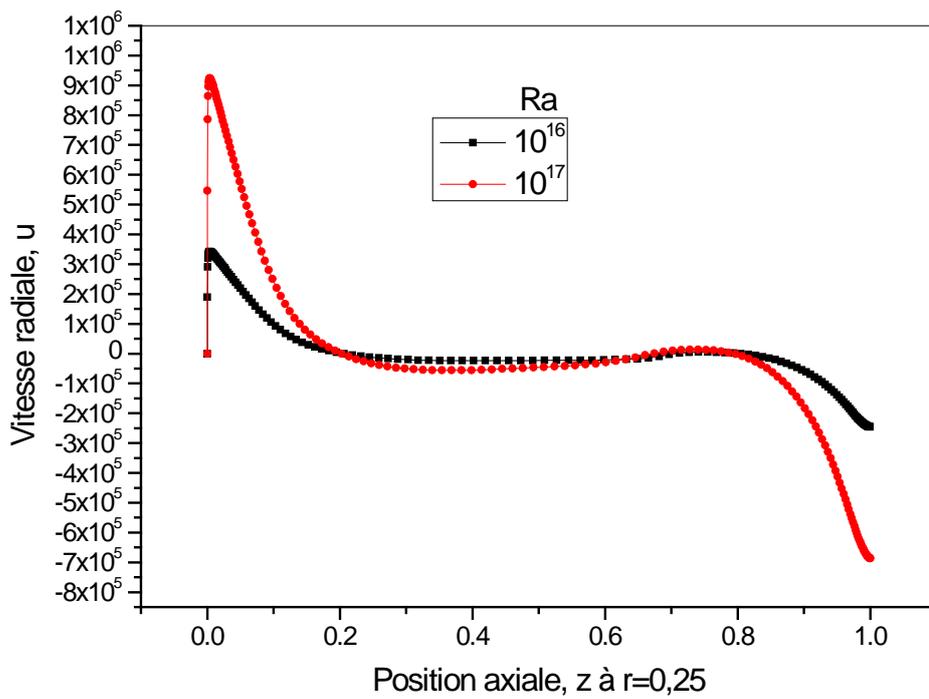


Figure 4.9a : Variation de la vitesse radiale en fonction de z à $r = 0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}



F

figure 4.9b : Variation de la vitesse radiale en fonction de z à $r = 0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}



Fig

ure 4.9c : Variation de la vitesse radiale en fonction de z à $r = 0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

La distribution de la vitesse axiale v est montrée sur les figures 4.10 a, b et c et séparée de la même façon que les figures 4.9 a, b et c en fonction du nombre de Rayleigh.

Les remarques les plus importantes que nous pouvons tirer à partir de ces figures qui représentent la variation de la vitesse axiale v en $z=0,5$ et $0 \leq r \leq 0,5$ sont les suivantes :

- Le centre de recirculation montre toujours des vitesses très proches de 0 alors que les vitesses axiales sont plus importantes ailleurs. Elles sont positives près de la paroi vu l'existence d'un chauffage latéral à flux constant et elles sont négatives près de l'axe et montrent une chute verticale vers le bas du bac.
- Avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, nous remarquons des valeurs de vitesses axiales de plus en plus importantes en valeur absolue près des parois et près de l'axe du bac. Ceci permet de montrer que la recirculation du GNL devient de plus en plus accélérée lorsque le nombre de Rayleigh augmente.

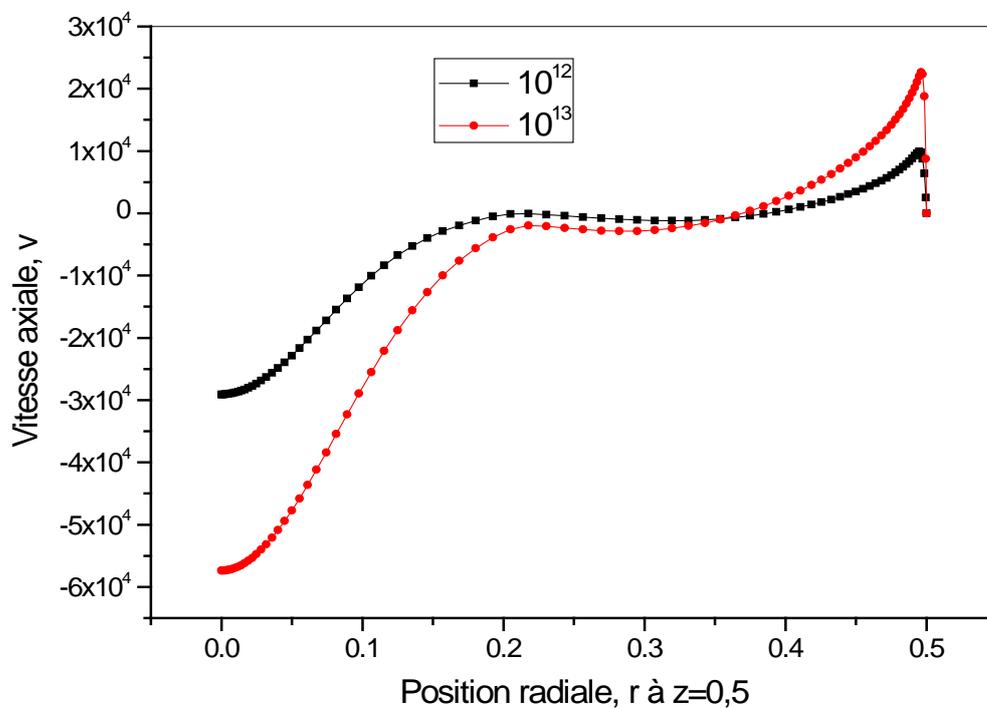
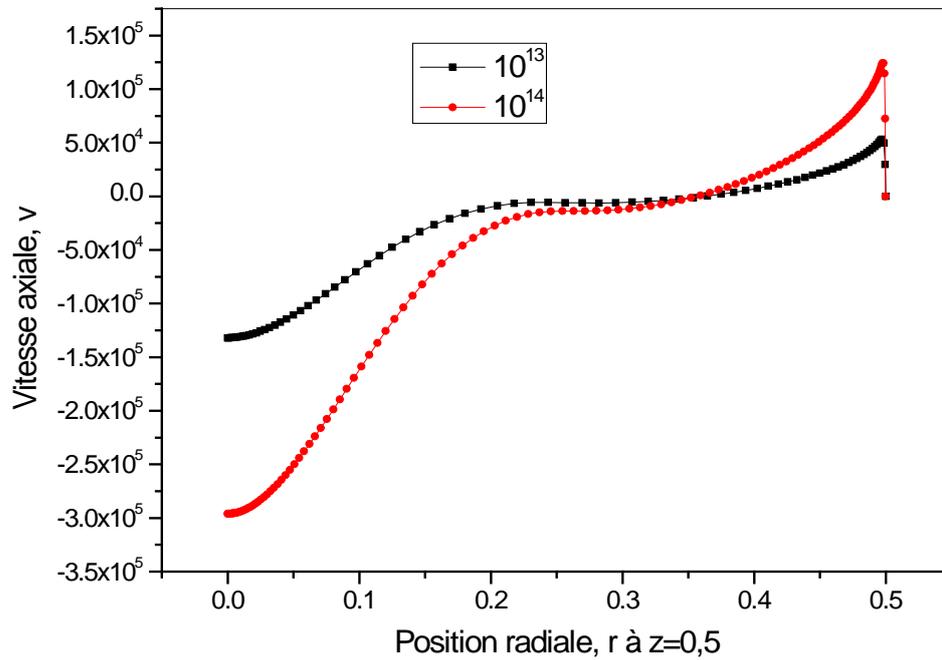


Figure 4.10a : Variation de la vitesse axiale en fonction de r à $z = 0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et

10^{13}



Fig

ure 4.10b : Variation de la vitesse axiale en fonction de r à $z = 0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

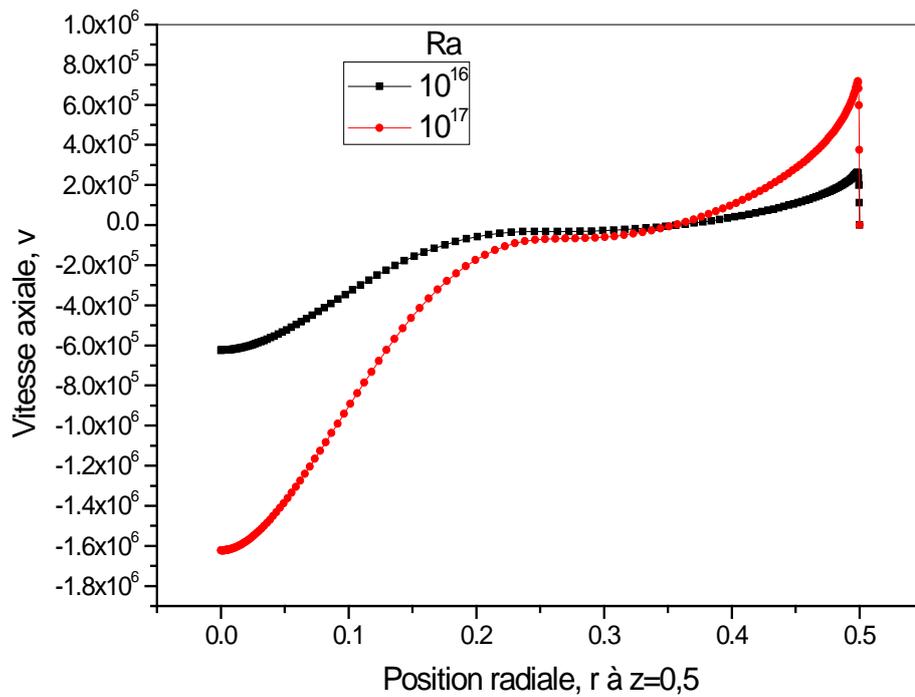


Figure 4.10c : Variation de la vitesse axiale en fonction de r à $z = 0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

Afin de montrer l'effet du couplage vitesse-température, nous présentons la distribution de la température aux mêmes positions du bac déjà choisies pour les composantes de la vitesse sur les figures 4.11 a, b et c à mi-hauteur de la cavité en fonction de r pour différents nombres de Rayleigh.

Nous remarquons l'existence d'une grande variation de la température au niveau de la couche limite suivant la position radiale et pour tous les nombres de Rayleigh imposés à cause du chauffage latéral. Par contre, nous enregistrons des valeurs de la température presque constantes en allant vers le centre du bac montrant une dominance du transfert de chaleur par conduction ; ensuite elles décroissent légèrement près de l'axe du bac à cause du jet froid provenant de la surface libre.

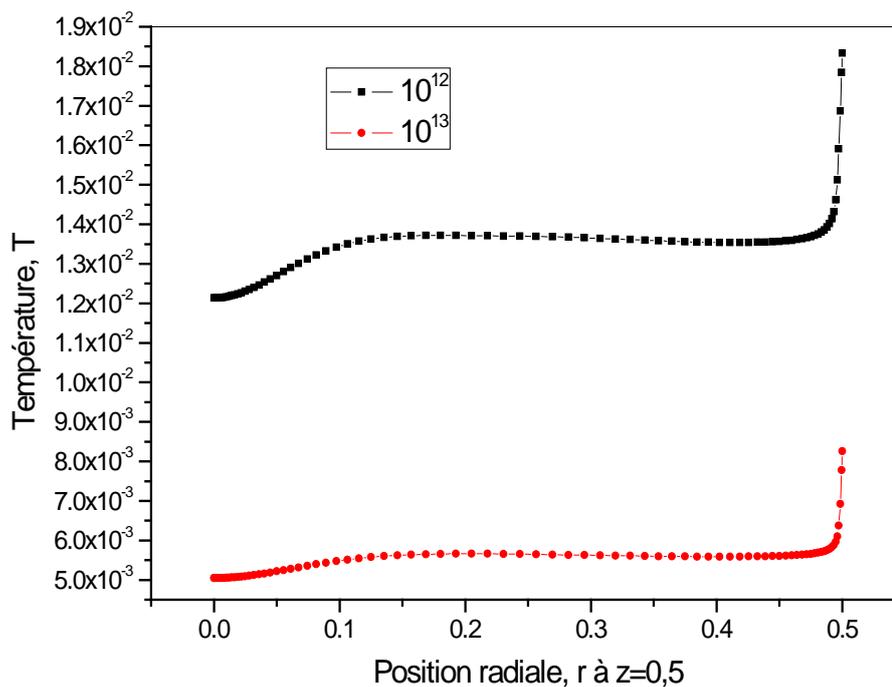


Figure 4.11a : Variation de la température en fonction de r à $z = 0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}

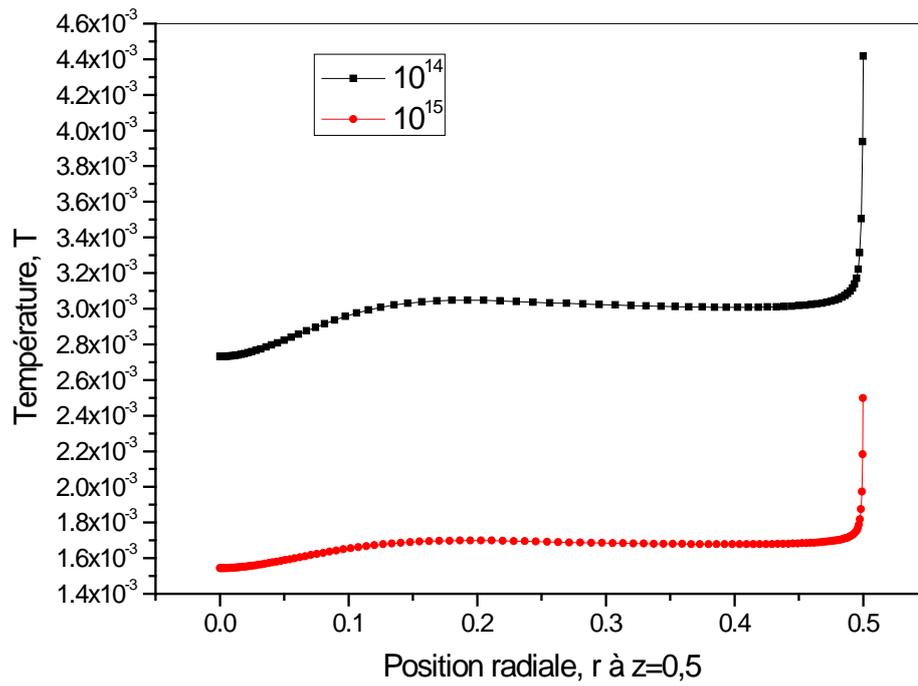


Figure 4.11b : Variation de la température en fonction de r à $z = 0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

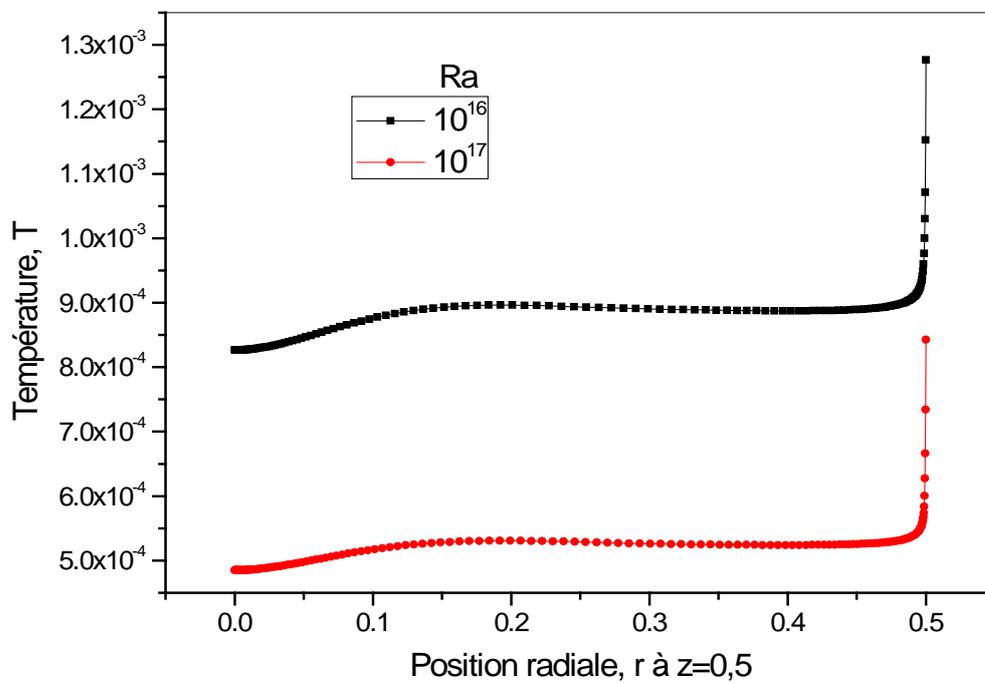


Figure 4.11c : Variation de la température en fonction de r à $z = 0,5$ pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

Sur les figures 4.12 a, b et c, nous représentons la variation de la température en fonction de z à la position radiale fixée en $r = 0,25$. Nous constatons que la température augmente d'une valeur minimale (qui dépend du nombre de Rayleigh) située en $z = 1$ vers une température maximale située à environ $z = 0,9$, puis les températures chutent en allant vers la base du bac de stockage à cause du jet plus froid provenant du bas de l'axe central et dirigé vers la paroi latérale.

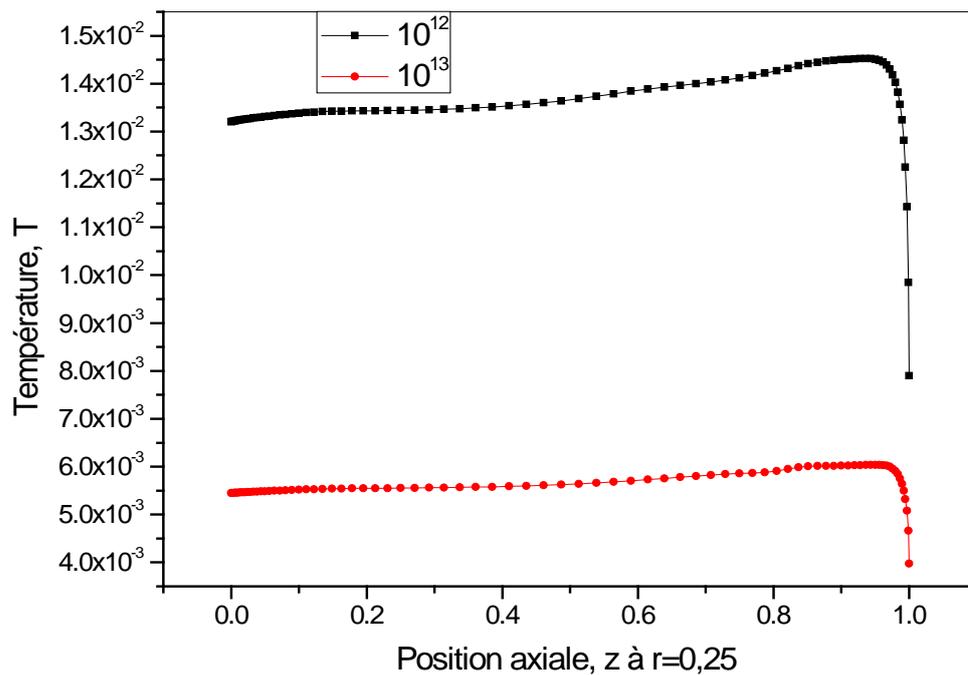


Figure 4.12a : Variation de la température en fonction de z à $r = 0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}

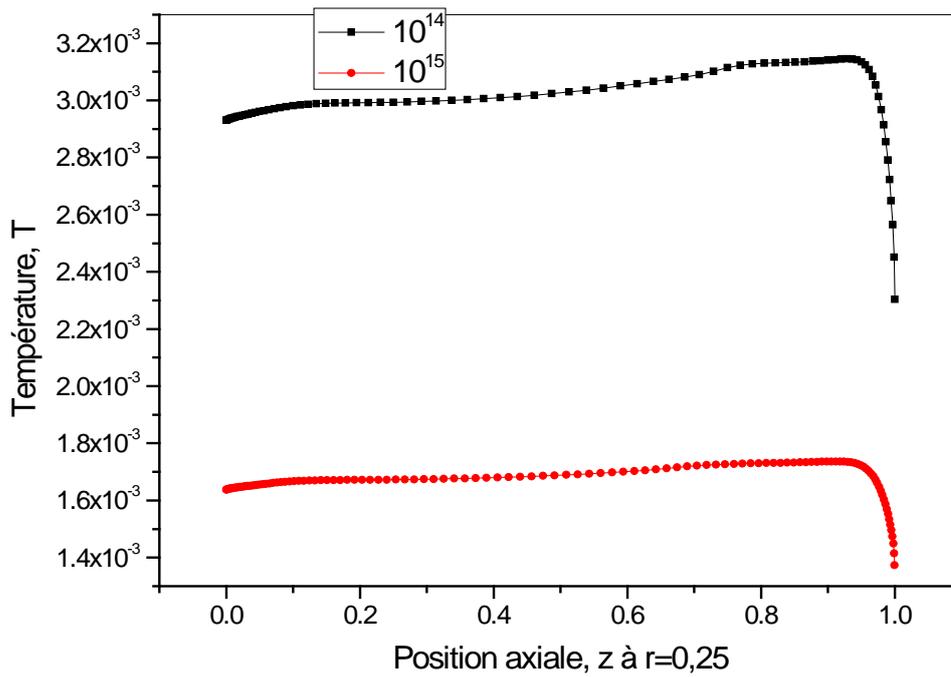


Figure 4.12b : Variation de la température en fonction de z à $r = 0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

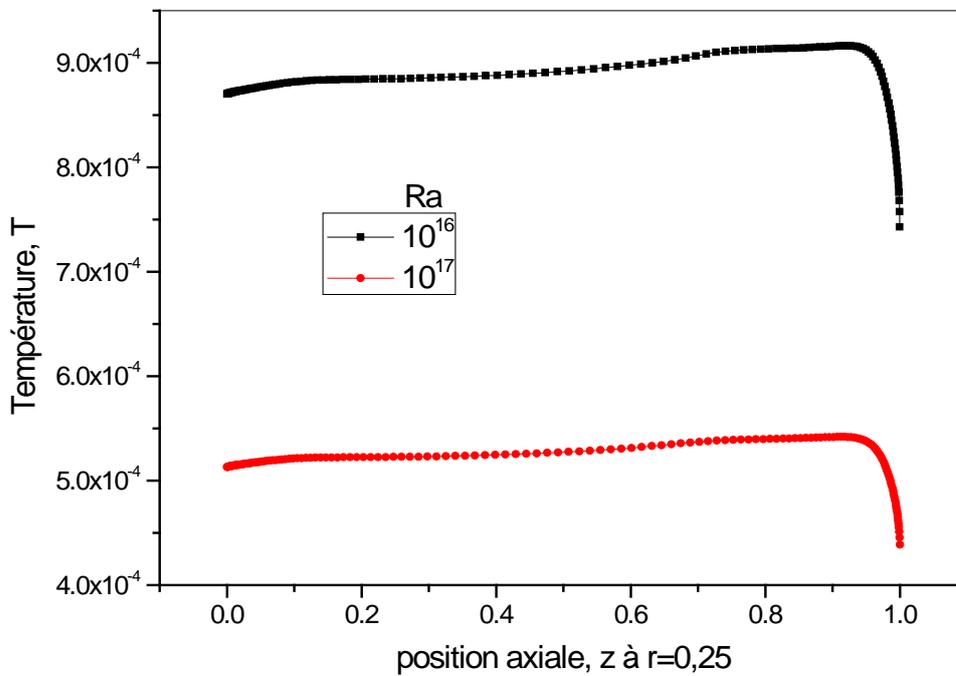


Figure 4.12c : Variation de la température en fonction de z à $r = 0,25$ pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

Dans le tableau 4.2, nous avons présenté les valeurs de la température latérale, la température moyenne et la vitesse maximale pour tous les nombres de Rayleigh étudiés. La vitesse maximale d'écoulement augmente au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh est élevé.

Nous remarquons une décroissance de la température latérale moyenne et de la température moyenne dans le domaine de calcul avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

La température moyenne est calculée par l'équation (4.2) ; alors que la valeur de la température moyenne latérale est calculée par l'équation suivante :

$$T_{l,moy} = \int_0^1 T_z dz \quad (4.3)$$

La vitesse maximale est donnée par la formule suivante :

$$V_{\max} = \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)_{\max} \quad (4.4)$$

Tableau 4.2 : Représentation des valeurs de la température latérale, de la température moyenne du GNL et de la vitesse d'écoulement maximale

| Ra | 10 ¹² | 10 ¹³ | 10 ¹⁴ | 10 ¹⁵ | 10 ¹⁶ | 10 ¹⁷ |
|-------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $T_{l,moy}$ | 1,75.10 ⁻² | 7,60.10 ⁻³ | 3,85.10 ⁻³ | 2,13.10 ⁻³ | 1,14.10 ⁻³ | 7,13.10 ⁻⁴ |
| T_{moy} | 1,37.10 ⁻² | 5,65.10 ⁻³ | 3,02.10 ⁻³ | 1,68.10 ⁻³ | 8,91.10 ⁻⁴ | 5,27.10 ⁻⁴ |
| V_{\max} | 2,93.10 ⁴ | 5,79.10 ⁴ | 1,33.10 ⁵ | 3,02.10 ⁵ | 6,29.10 ⁵ | 1,66.10 ⁶ |

4.3.3 Paramètres de turbulence

L'utilisation du modèle $k-\omega$ à faible nombre de Reynolds associé aux conditions aux limites appliquées dans ce cas a permis d'éviter le problème de retour vers le régime laminaire où il persistait lors de l'utilisation des modèles $k-\varepsilon$ à faible nombre de Reynolds. De plus une bonne prédiction du point de transition dans la couche limite vis-à-vis de celui de l'expérience a été obtenue avec ce modèle dans une cavité carrée différentiellement chauffée. Par conséquent, de meilleures valeurs des paramètres de turbulence près de la paroi cylindrique sont attendues.

Sur les figures 4.13 a, b et c, nous représentons l'énergie cinétique turbulente k à mi-hauteur ($z = 0,5$ et $0 \leq r \leq 0,5$) du bac de stockage toujours avec un rapport d'allongement égal à l'unité. Il est évident qu'au niveau de la paroi $k = 0$ (donnée de départ : condition de paroi). Nous enregistrons une augmentation de k jusqu'à une valeur maximale près de la paroi latérale puis une décroissance dans la zone où les vitesses sont très faibles (zone elliptique). Le minimum de k est situé à proximité du centre de l'ellipse puis commence à augmenter d'une manière linéaire pour tous les nombres de Rayleigh jusqu'au pic suivant près de l'axe central du bac où la valeur de k la plus élevée a été enregistrée à mi-hauteur du bac pour tous les nombres de Rayleigh. Notons aussi que la valeur de l'énergie cinétique turbulente maximale est d'environ 3 à 5 fois supérieure en passant d'un nombre de Rayleigh à un autre.

Du point de vue physique, ce comportement est réel et s'explique par le niveau de turbulence qui est étroitement liée avec la dynamique de l'écoulement. Plus la vitesse est grande, plus k est grand et ceci est bien visible dans les bacs à grandes hauteurs (nombre de Rayleigh élevé). De plus, la valeur de k au premier pic (près des parois) tend à augmenter relativement à celle du 2^{ème} pic (près de l'axe) avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

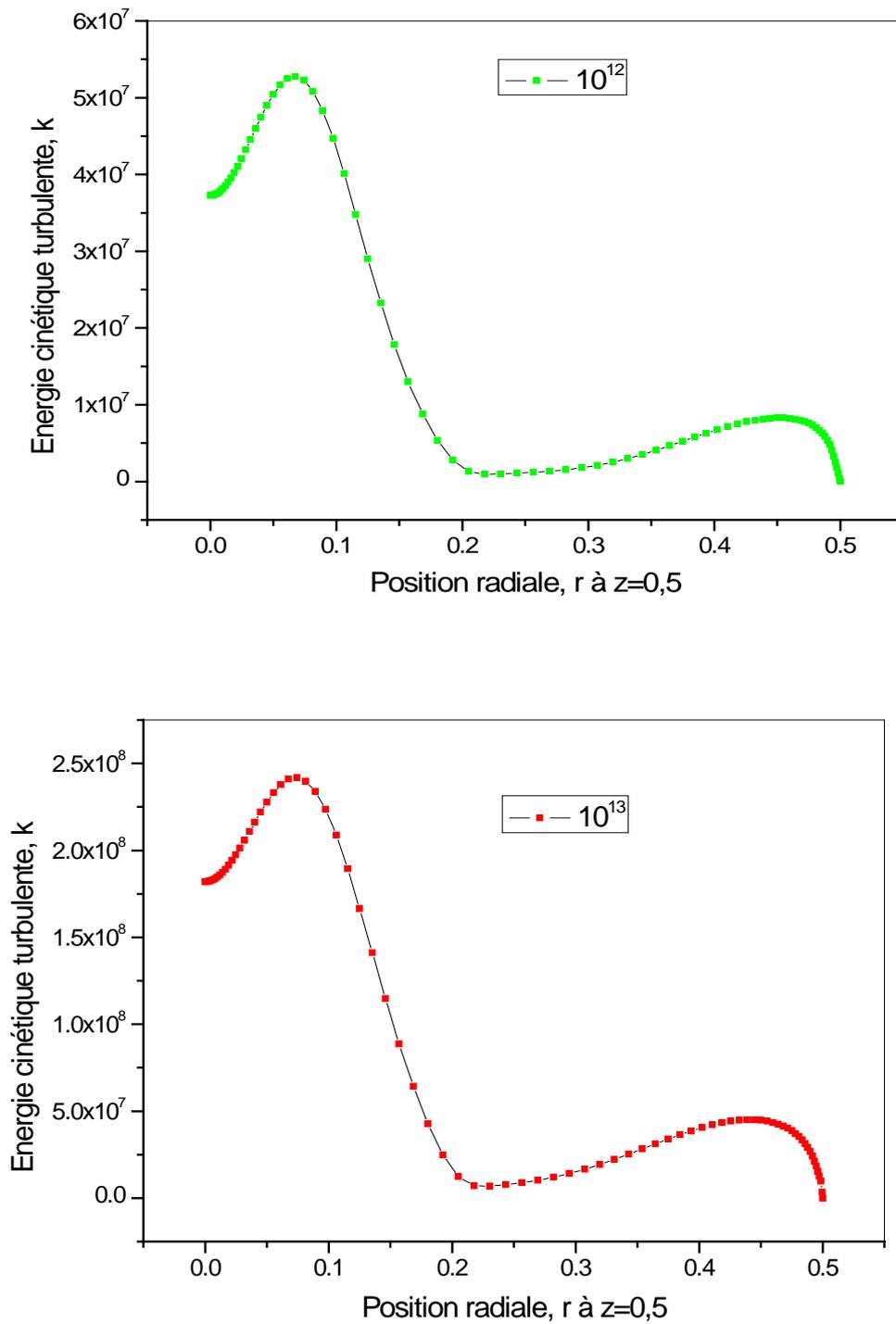


Figure 4.13a : Variation de l'énergie cinétique turbulente en fonction de r à z=0,5 pour les nombres de Rayleigh $10^{12}, 10^{13}$

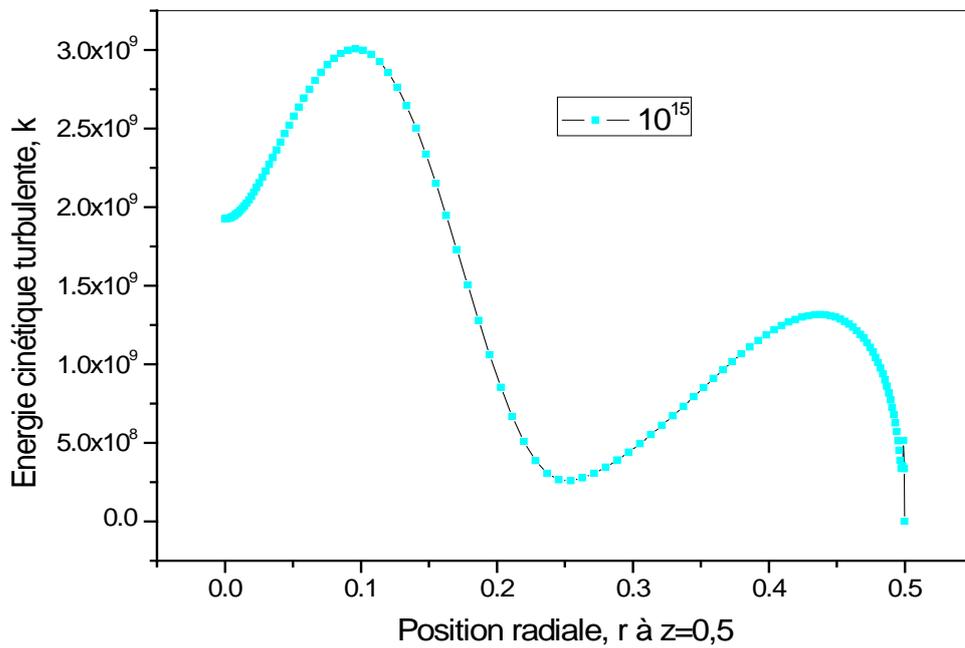
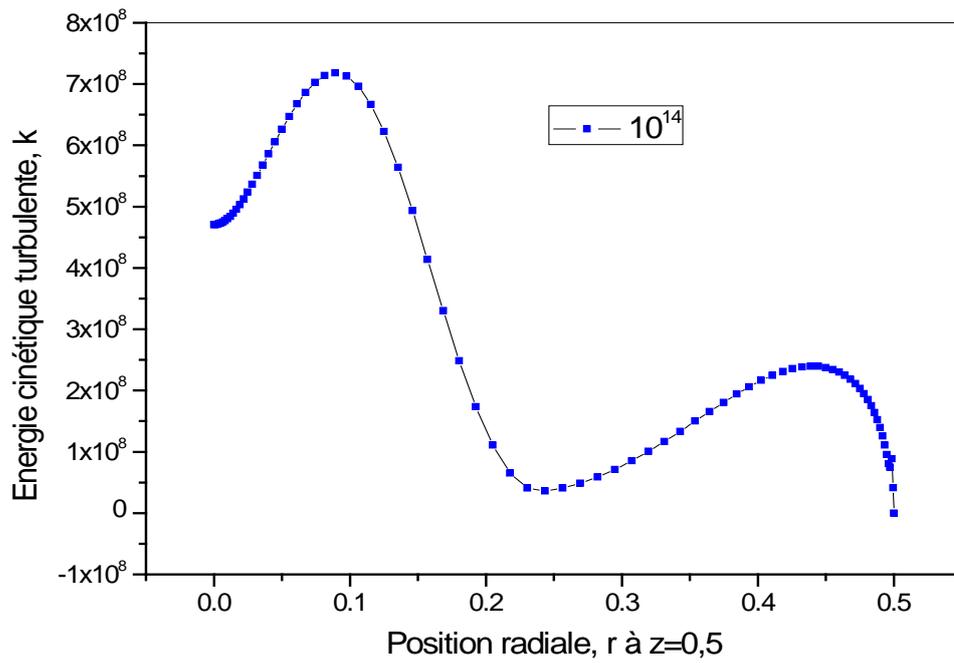


Figure 4.13b : Variation de l'énergie cinétique turbulente en fonction de r à $z = 0,5$ pour les nombres de Rayleigh $10^{14}, 10^{15}$

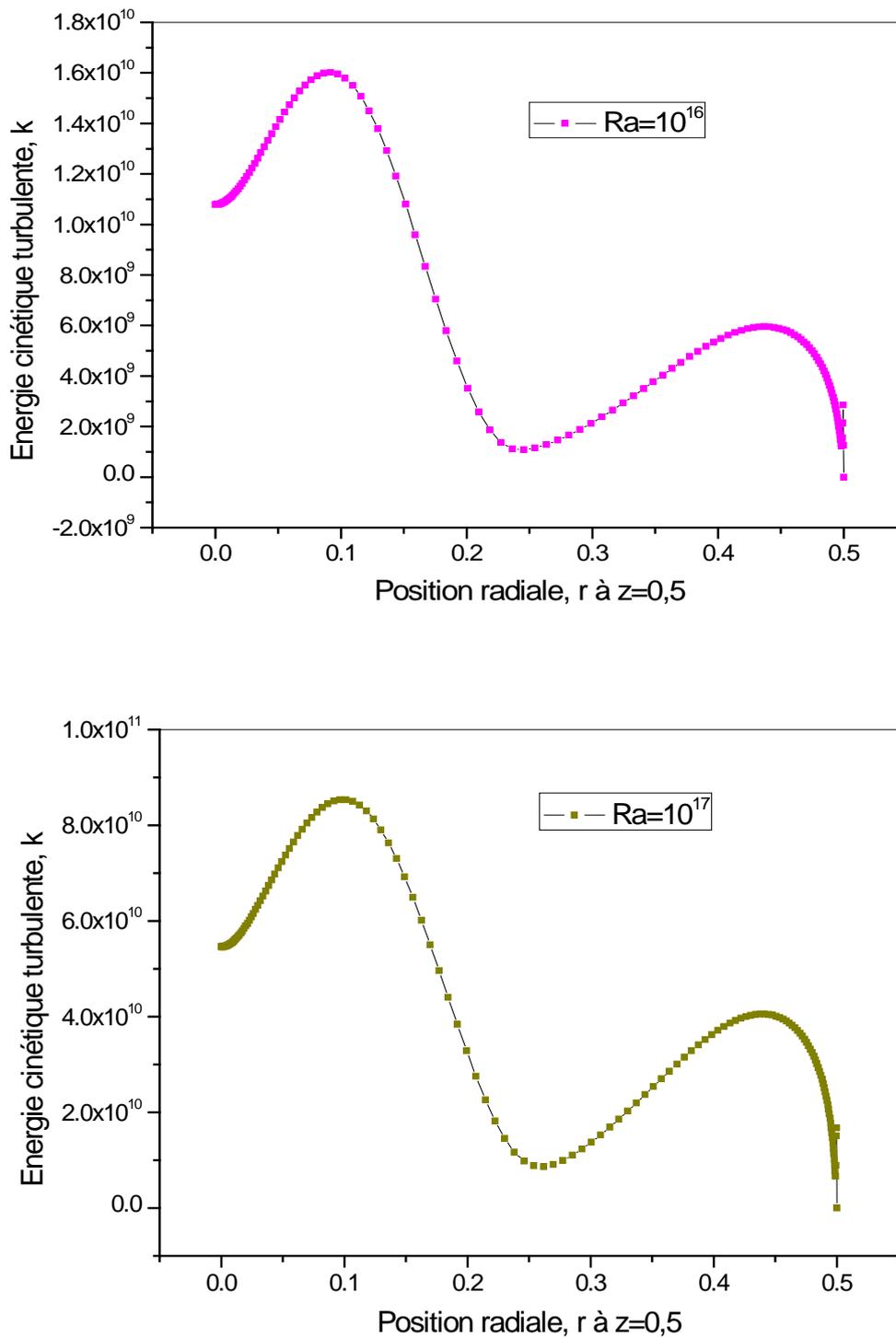


Figure 4.13c : Variation de l'énergie cinétique turbulente en fonction de r à z = 0,5 pour les nombres de Rayleigh $10^{16}, 10^{17}$

Sur les figures 4.14 a, b et c, la théorie d'existence de la turbulence en présence d'un obstacle au cours d'un écoulement est confirmée dans notre cas, surtout au fond central du bac où les jets de recirculation provenant de toutes les positions angulaires coïncident à ce même endroit. Ce phénomène peut être illustré d'une manière plus rigoureuse par une étude tridimensionnelle. Cette zone de choc est aussi une zone de turbulence pour tous les cas du nombre de Rayleigh. De plus, les valeurs de la viscosité turbulente sont de plus en plus importantes avec l'augmentation du nombre de Rayleigh surtout dans cette zone du choc où se concentrent les valeurs maximales dans le bac de stockage et qui sont aux environs 130, 300, 600, 1300, 3000 et 7000 correspondant respectivement aux valeurs du nombre de Rayleigh 10^{12} , 10^{13} , 10^{14} , 10^{15} , 10^{16} , 10^{17} . Par contre, les valeurs minimales se trouvent au niveau des masses de liquides ascendantes et près de la paroi. Ces valeurs commencent à augmenter avec le déplacement loin de la paroi jusqu'au centre de la cavité, où se rencontrent les jets de liquide dirigés vers le bas ou première zone de choc (au niveau du centre de la surface libre), ensuite ces valeurs décroissent légèrement en allant vers la base du bac de stockage. Puis ces valeurs commencent à diminuer en s'approchant de la paroi latérale où l'écoulement est plus ordonné.

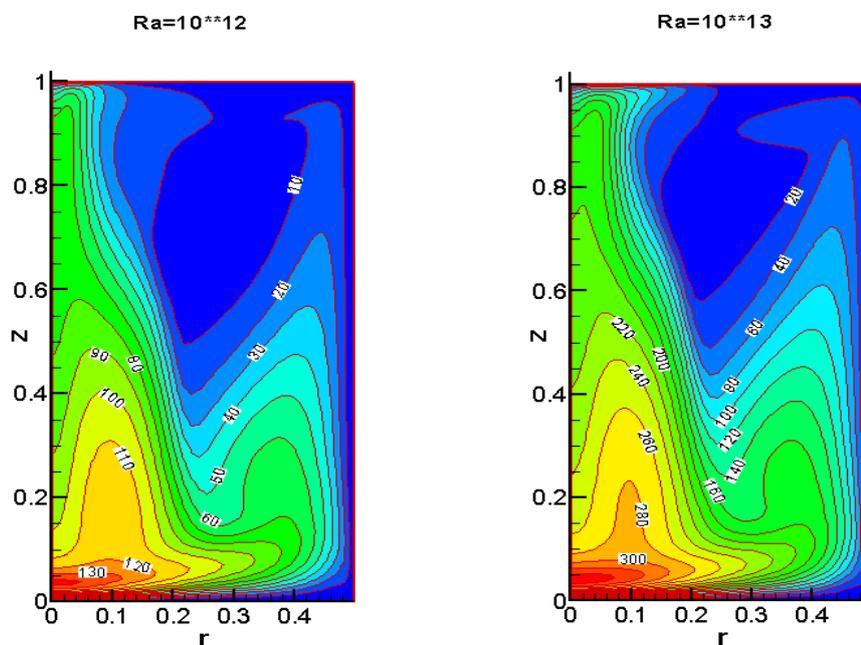


Figure 4.14a : Distribution de la viscosité turbulente dans le plan r-z pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}

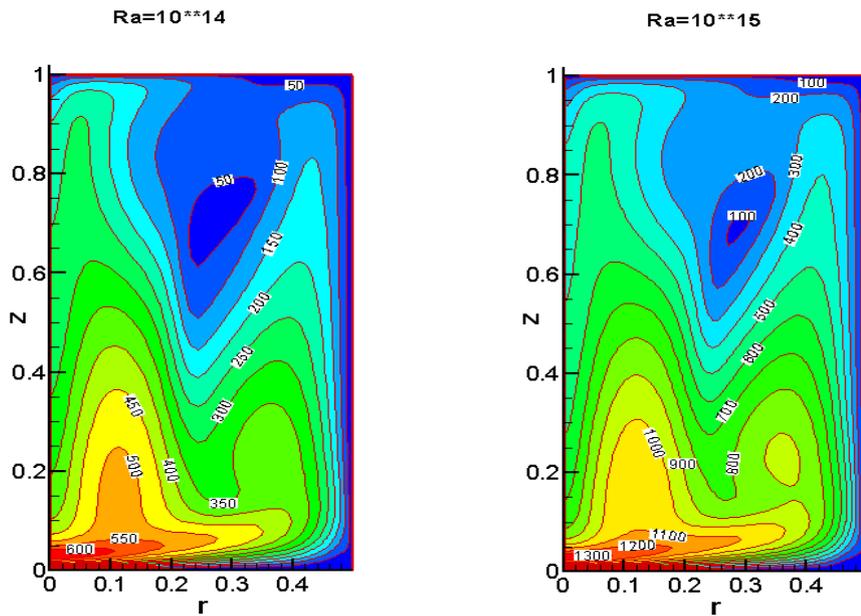


Figure 4.14b : Distribution de la viscosité turbulente dans le plan r-z pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

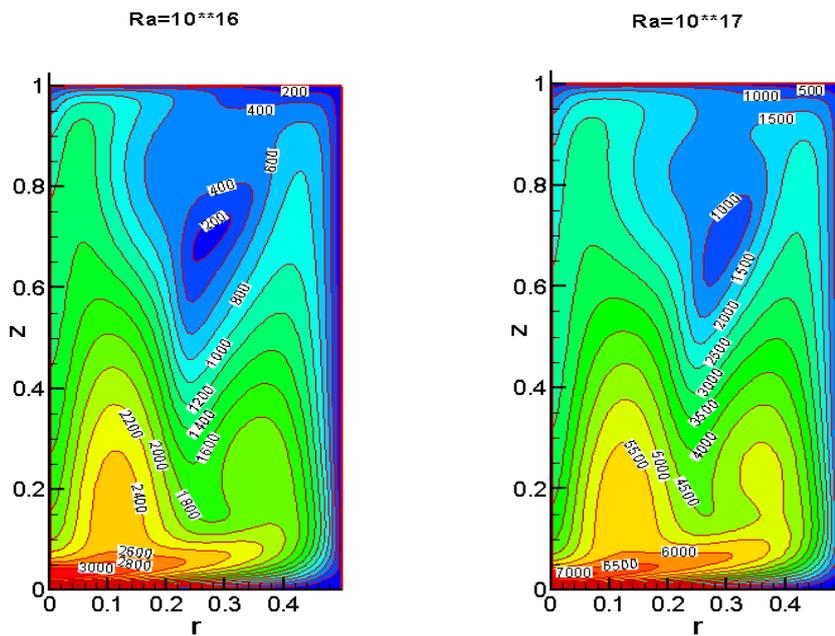


Figure 4.14c : Distribution de la viscosité turbulente dans le plan r-z pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

4.3.4 Nombres de Nusselt et densité du flux d'évaporation

Les nombres de Nusselt locaux latéral et de surface sont calculés par les formules suivantes :

$$Nu_l = \frac{\varphi_l}{\frac{\lambda}{H}(T^* - T_0^*)} = \frac{\varphi_l H / \lambda}{T^* - T_0^*} = \frac{\Delta T_0^*}{T^* - T_0^*} = \frac{1}{T_l} \quad (4.5)$$

$$Nu_s = \frac{\varphi_s}{\frac{\lambda}{H}(T^* - T_0^*)} = \frac{\varphi_s H / \lambda}{T^* - T_0^*} = \frac{\Delta T_0^*}{T^* - T_0^*} = \frac{1}{T_s} \quad (4.6)$$

Les valeurs des nombres de Nusselt moyen le long de la paroi latérale et le long de la surface libre sont calculées par intégration des valeurs locales des nombres de Nusselt de la façon suivante :

$$Nu_{l,moy} = \int_0^{Al} Nu_l dz \quad (4.7)$$

$$Nu_{s,moy} = 8Al^2 \int_0^{1/(2Al)} Nu_s r dr \quad (4.8)$$

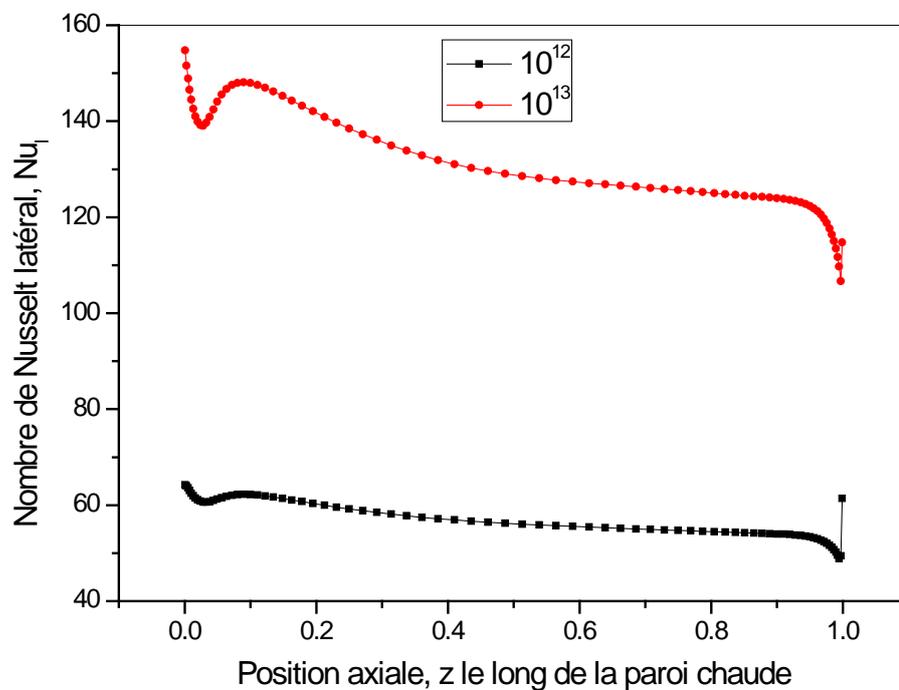
La densité du flux de chaleur d'évaporation moyenne est calculée par intégration des densités de flux de chaleur d'évaporation locales le long de la surface libre par la formule suivante :

$$\varphi_{ev,moy} = 8Al^2 \int_0^{1/(2Al)} \varphi_{ev} r dr \quad (4.9)$$

Notons qu'en plus de la densité de flux d'évaporation moyenne, nous pouvons déduire facilement la densité du flux de chaleur moyenne dû au refroidissement convectif à l'aide du bilan thermique globale au niveau du bac de stockage du GNL.

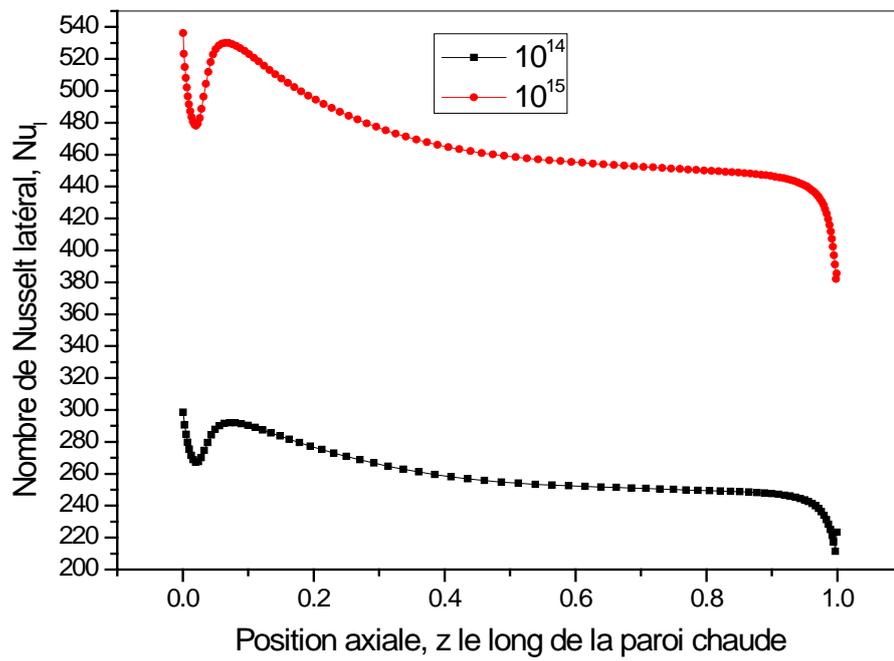
Sur les figures 4.15 a, b et c, nous représentons le nombre de Nusselt latéral ($r = 0,5$) en fonction de la hauteur du bac.

La remarque que nous pouvons déduire à partir des figures 4.15 a, b et c est que les valeurs maximales du nombre de Nusselt latéral sont situées en bas de la paroi latérale et qui décroissent en allant vers le haut en passant par un pic. Ce dernier montre un passage par une zone de transition au niveau de la couche limite. Ensuite les valeurs de Nusselt augmentent pour retrouver une valeur proche de celle de la base. Cette variation donne une forme de V pour toutes les courbes reliées aux nombres de Rayleigh. Après les valeurs tendent à chuter jusqu'à un minimum juste près de la surface libre à cause des températures élevées qui chutent encore au niveau de l'interface qui guide le phénomène d'évaporation.



Fig

ure 4.15a : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}



Figure

re 4.15b : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

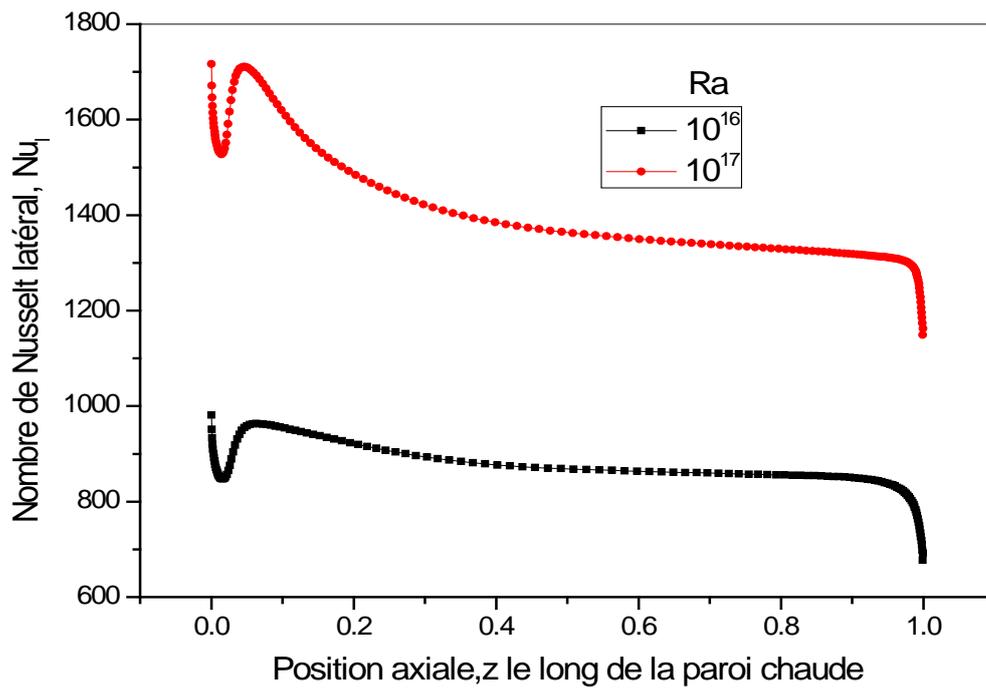


Figure 4.15c : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude pour les nombres de Rayleigh 10^{16} et 10^{17}

Dans le tableau 4.3, nous présentons les valeurs du Nusselt moyen et maximal le long de la paroi et le long de la surface libre du GNL pour tous les nombres de Rayleigh. Nous exposons de même la densité du flux d'évaporation moyenne.

Les nombres de Nusselt moyen et maximal le long de la paroi chaude et le long de la surface libre varient dans le même sens que le nombre de Rayleigh.

Concernant la valeur de la densité du flux d'évaporation moyenne, nous remarquons une décroissance en valeur absolue de cette variable avec le nombre de Rayleigh.

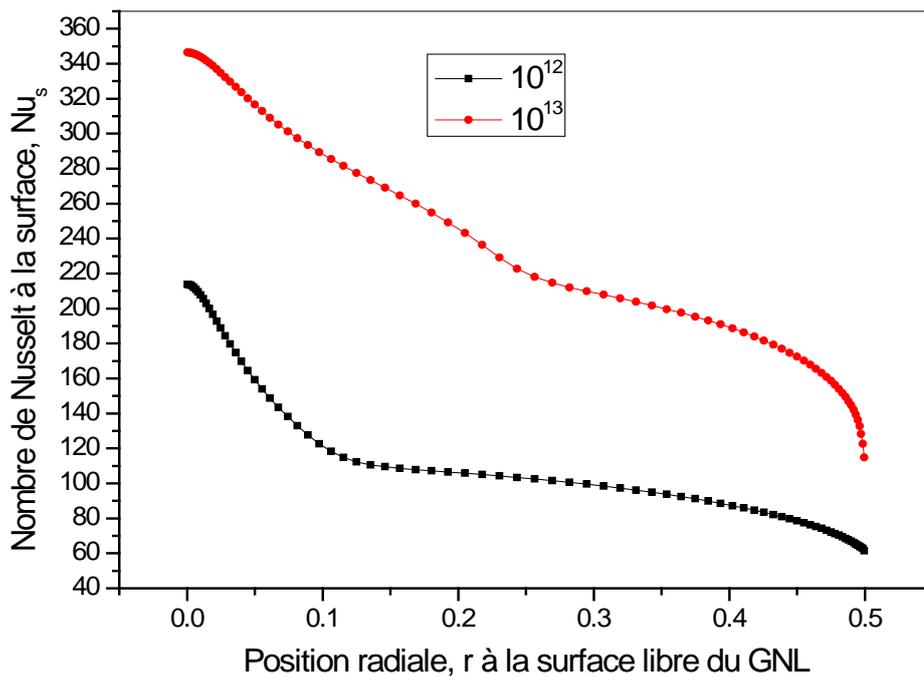
Tableau 4.3 : Nombres de Nusselt moyen et maximal le long de la paroi latérale et la surface libre ainsi que la densité du flux d'évaporation

| Ra | 10^{12} | 10^{13} | 10^{14} | 10^{15} | 10^{16} | 10^{17} |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $Nu_{l,moy}$ | 56,82 | 131,46 | 259,55 | 467,88 | 878,95 | 1406,77 |
| $Nu_{l,max}$ | 64,22 | 154,77 | 298,49 | 536,07 | 981,26 | 1716,19 |
| $Nu_{s,moy}$ | 93,37 | 204,38 | 380,52 | 688,29 | 1256,52 | 2229,13 |

| | | | | | | |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|
| $Nu_{s,max}$ | 213,68 | 346,34 | 428,52 | 712,48 | 1360,82 | 2262,37 |
| $\varphi_{ev,moy}$ | -3,20 | -2,45 | -2,22 | -2,14 | -2,08 | -2,07 |

Nous représentons les variations du nombre de Nusselt de surface pour tous les nombres de Rayleigh imposés sur les figures 4.16 a, b et c en fonction de la position radiale.

Nous observons en général que le nombre de Nusselt est maximal au centre et minimal près de la paroi et que la décroissance de sa valeur tend à diminuer avec l'augmentation du nombre de Rayleigh jusqu'à une disparition presque complète dans le cas du plus haut nombre de Rayleigh et on aura plutôt une droite horizontale qui décroît brusquement à l'approche de la paroi vers une valeur minimale.



F

figure 4.16a : Variation du nombre de Nusselt local le long de la surface libre du GNL pour les nombres de Rayleigh 10^{12} et 10^{13}

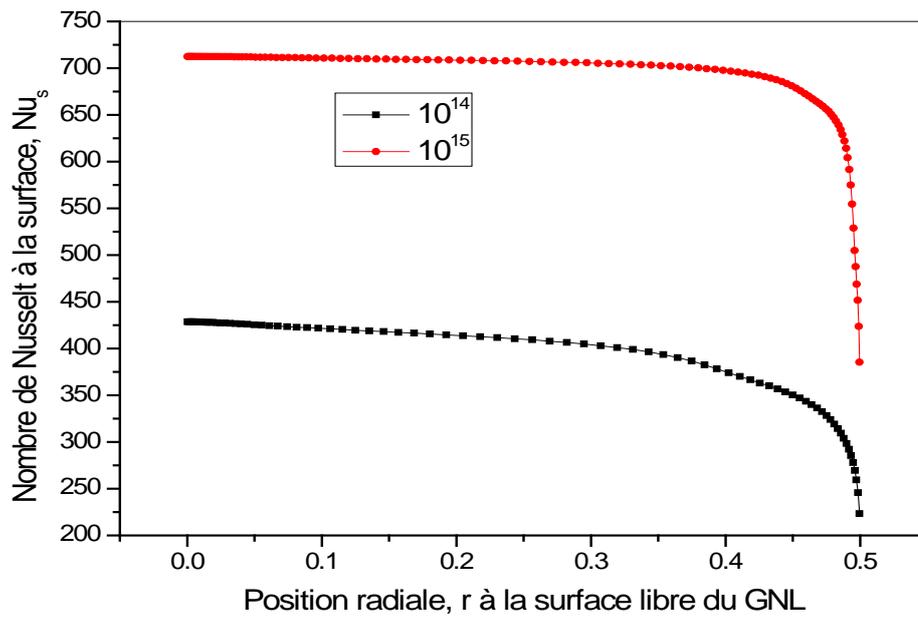


Figure 4.16b : Variation du nombre de Nusselt local le long de la surface libre du GNL pour les nombres de Rayleigh 10^{14} et 10^{15}

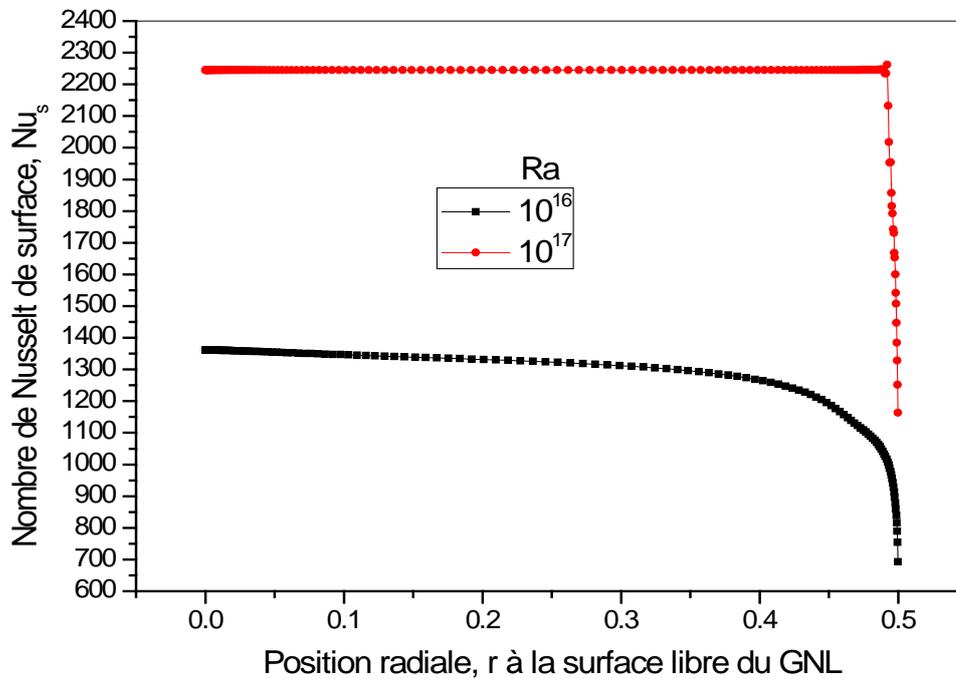


Figure 4.16c : Variation du nombre de Nusselt local le long de la surface libre du GNL pour les nombres de Rayleigh 10^{15} et 10^{16}

Sur la figure 4.17, nous représentons les variations logarithmiques correspondantes simultanément aux nombres de Nusselt latéral et celui de surface par rapport aux nombres de Rayleigh dans le but de tirer des corrélations de la forme :

$$Nu = a.Ra^b \quad (4.10)$$

Dans la littérature, l'exposant b est de l'ordre de 0,33 pour des nombres de Rayleigh inférieur à 10^{12} . Cette valeur a été vérifiée par ce travail en trouvant $b = 0,326$.

Par la suite, nous cherchons à trouver les valeurs de ces exposants en utilisant les droites présentées sur la figure 4.17 dans le cas du bac de stockage du GNL.

Nous remarquons qu'au-delà du Nombre de Rayleigh 10^{13} les pentes des deux droites représentées sont presque constantes et possèdent des pentes inférieures à 0,33

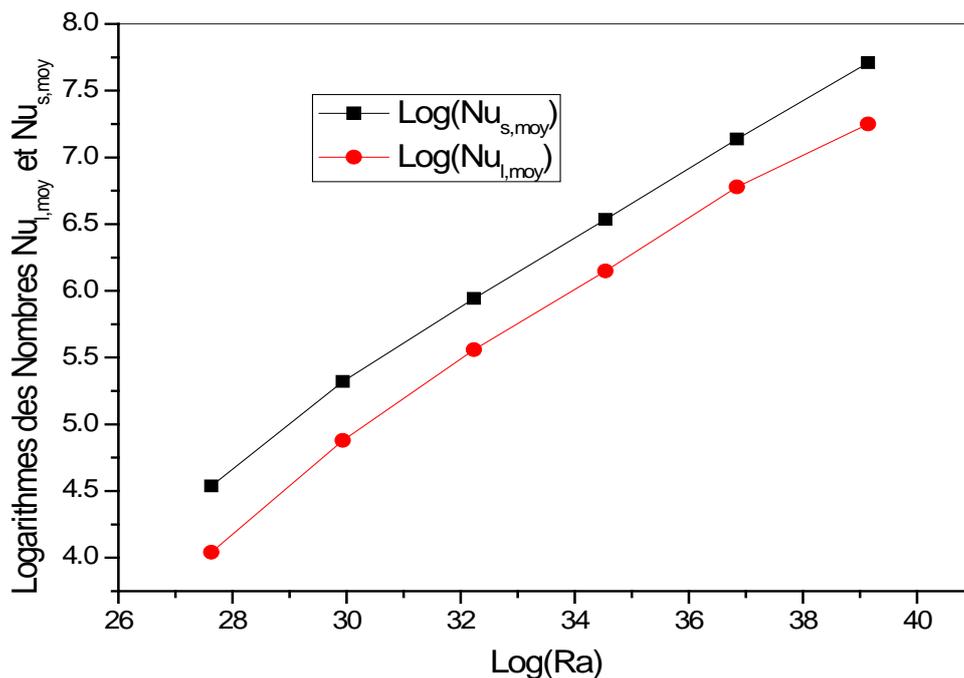


Figure 4.17 : Variations des logarithmes des nombres de Nusselt moyen latéral et de surface en fonction du logarithme du nombre de Rayleigh

Les corrélations obtenues donnent des valeurs de Nusselt légèrement supérieures à celles obtenues pour $Ra=10^{17}$ et non valable pour $Ra=10^{12}$. Ces corrélations se présentent ainsi :

- 1) Corrélation du nombre de Nusselt latéral Nu_l en fonction du nombre de Rayleigh valable entre 10^{13} et 10^{16}

$$Nu_l = 0,03491.Ra^{0,2750} \quad (4.11)$$

- 2) Corrélation du nombre de Nusselt de surface Nu_s en fonction du nombre de Rayleigh valable entre 10^{13} et 10^{17}

$$Nu_s = 0,07809.Ra^{0,2629} \quad (4.12)$$

La densité du flux de chaleur d'évaporation a été présentée le long de la surface libre en fonction du rayon du bac ($z=1$ et $0 \leq r \leq 0,5$) pour montrer la non uniformité de l'évaporation en fonction du nombre de Rayleigh sur la figure **4.18**.

Les courbes ainsi présentées justifient que l'évaporation est maximale près des parois latérales, alors qu'elle se minimise au centre de la surface libre en régime turbulent.

Plus le nombre de Rayleigh est important, plus l'évaporation augmente en valeur absolue radialement du centre de la surface vers les parois latérales sauf pour des nombres de Rayleigh supérieur à 10^{14} où l'évaporation est presque constante sauf près des parois.

Remarquons que la densité de flux massique d'évaporation obtenue par l'équation (1.7) donnera la même distribution que celles des densités de flux de chaleur d'évaporation lorsqu'on considère une température de saturation constante. Ceux-ci confirment aussi que la densité du flux massique d'évaporation locale est plus importante près des parois alors qu'elle est faible au centre du bac de stockage.

La remarque la plus importante est que l'évaporation dans le cas laminaire est dominante par rapport au refroidissement convectif. Alors qu'en régime turbulent, ce refroidissement devient de plus en plus important avec l'augmentation du nombre de Rayleigh jusqu'à ce qu'il représente environ les 50% du flux total libéré.

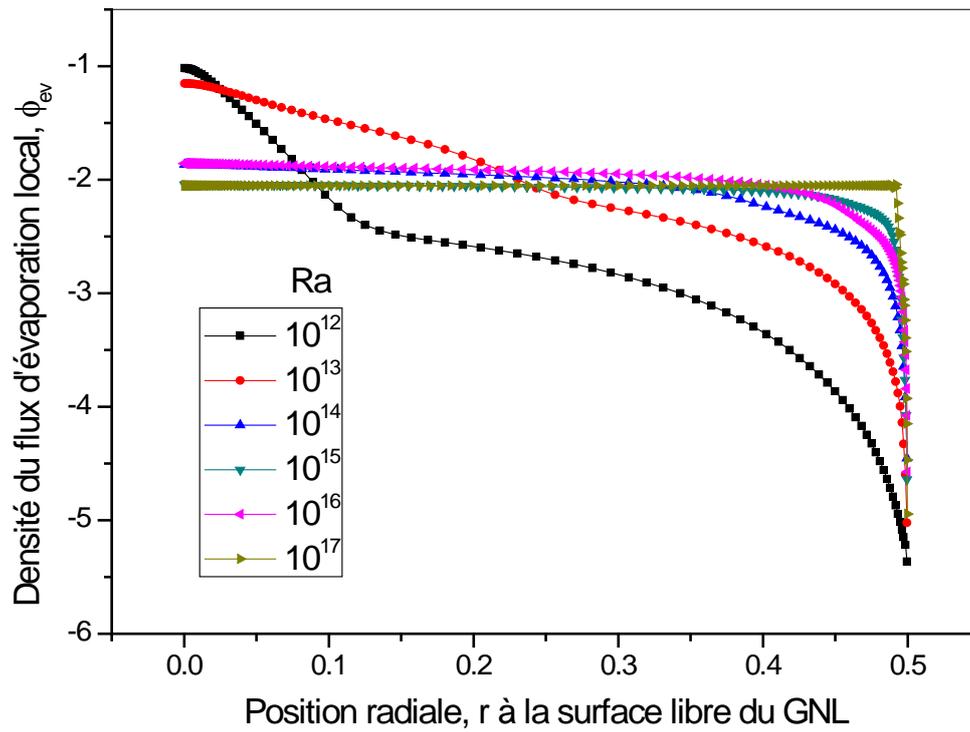


Figure 4.18 : Variation de la densité du flux d'évaporation en fonction de r sur la surface libre du GNL pour tous les nombres de Rayleigh

CONCLUSIONS GENERALES

CONCLUSIONS GENERALES

Dans ce mémoire, nous avons étudié numériquement l'influence de la convection naturelle sur les densités du flux de chaleur d'évaporation et les densités du flux de chaleur convectif au niveau de la surface libre du gaz naturel liquéfié (GNL). Les écoulements dus essentiellement aux densités des flux de chauffage latéral ont été étudiés en régime laminaire dans une cavité cylindrique à faible nombre de Rayleigh puis en régime turbulent dans un bac de stockage à un nombre de Rayleigh élevé.

En se basant sur l'approximation de Boussinesq, nous avons développé un modèle mathématique décrivant le phénomène de convection naturelle en régime laminaire ensuite en régime turbulent. La formulation mathématique repose sur des équations écrites en coordonnées cartésiennes et cylindriques. La discrétisation des équations de quantité de mouvement et d'énergie ainsi que les équations de turbulence k-oméga à faible nombre de Reynolds a été effectuée avec la méthode des volumes finis en adoptant le schéma de loi de puissance. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour résoudre le couplage vitesse-pression. Les équations sont résolues ligne par ligne par l'algorithme Thomas. La méthode purement implicite a été utilisée pour l'intégration dans le temps de toutes les équations considérées. La solution est supposée convergente lorsque le critère de convergence est satisfait.

Notre code de calcul a été validé par comparaison avec les travaux antérieurs numériques lorsqu'il s'agit de petites cavités où le nombre de Rayleigh ne dépasse pas 10^5 , et expérimentaux lorsqu'il s'agit de grandes cavités où le nombre de Rayleigh est égal à $1.58 \cdot 10^9$.

Les résultats de simulation de la convection naturelle dans une cavité cylindrique contenant du GNL ont été donnés dans le cas d'un écoulement laminaire avec des nombres de Rayleigh allant de 10^3 jusqu'à 10^5 avec des rapports d'allongements variables ($Al=1/3$, $1/2$ et 1). Alors que dans l'écoulement turbulent, nous avons présenté des résultats pour des nombres de Rayleigh élevés variant entre 10^{12} et 10^{17} afin de considérer des hauteurs réelles du bac de stockage de GNL.

Les principaux effets de la convection naturelle sont résumés comme suit :

En régime laminaire :

- La vitesse de recirculation du fluide est faible et la vitesse maximale est inférieure à 80 pour $Ra=10^5$.
- Une seule recirculation a été enregistrée pour tous les rapports d'allongements et tous les nombres de Rayleigh spécifiés dans ce cas.
- Les températures sont plus élevées lorsque le rapport d'allongement est élevé et, par conséquent, le mélange obtenu est meilleur. Les températures varient dans le sens inverse du nombre de Rayleigh.
- La densité du flux d'évaporation est non uniforme. L'évaporation est maximale près des parois, alors qu'elle est minimale au centre de la cavité.
- Le flux d'évaporation total est le même que le flux latéral.

En régime turbulent :

- La vitesse de recirculation du fluide est d'autant plus importante que la valeur de Rayleigh est élevée.
- De la même façon que le régime laminaire, une seule recirculation a été observée pour toutes les valeurs du nombre de Rayleigh étudiées ; c'est-à-dire de 10^{12} à 10^{17} pour un rapport d'allongement fixe et égal à l'unité.
- Les températures moyennes et latérales diminuent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.
- Les valeurs du nombre de Nusselt moyen latéral et du nombre de Nusselt moyen de surface varient avec le nombre de Rayleigh. A cet effet, deux corrélations ont été obtenues.

- Le nombre de Nusselt latéral est maximal à la base et minimal au sommet alors que le nombre de Nusselt de surface est maximal au centre de la surface libre et minimal près des parois du bac de stockage.
- Le flux d'évaporation total est inférieur au flux latéral suite à l'existence d'un flux de refroidissement convectif qui est de plus en plus important avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.
- L'évaporation s'uniformise pour le nombre de Rayleigh les plus élevés 10^{16} et 10^{17} et s'égalise en valeur avec le refroidissement convectif.

En perspective, nous pouvons envisager de traiter les points suivants :

- Faire une étude paramétrique pour évaluer l'influence d'autres paramètres comme le rapport d'allongement aux nombres de Rayleigh très élevés.
- Etudier le mélange réel du GNL en introduisant les équations pour toutes les espèces chimiques.
- Etudier le phénomène du Rollover dans le bac de stockage du GNL.
- Mettre une densité du flux latéral variable en fonction du temps ce qui impose par la suite une étude instationnaire.
- Enfin, tenir compte de l'effet tridimensionnel dû au rayonnement solaire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références Bibliographiques :

- [1] J. Boussinesq, *Théorie Analytique de la Chaleur*, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, (1903)
- [2] F. Kreith, Traduction de B. Khodja, *Transmission de la chaleur et thermodynamique*, Ed. Masson, 1967.
- [3] C. Body, *les échangeurs de chaleur par convection (1^{ère} partie)*, Ed. Bordas/Mouton, Paris, 1968.
- [4] P.E. Roche, *convection thermique turbulente en cellule de Rayleigh-Bénard*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, France, 2001.
- [5] G. K. Batchelor, *Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures*, *Q. Appl. Math*, 12, 209-233 (1955)
- [6] J. Ostrach, *Completely confined natural convection*, *Developments in Mechanics*, Proc. Tenth Midwestern Mechanics conf., vol 4, Johnson, Chicago, IL, pp53-81 (1967)
- [7] J. O. Wilkes and S. W. Churchill, *The finite-difference computation of natural convection in a rectangular enclosure*, *AIChE J.*, 12, 161-166 (1966)
- [8] A. E. Gill, *The boundary-layer regime for convection in a rectangular cavity*, *J. Fluid Mech.*, 25, 515-536 (1966)
- [9] G. De Vahl Davis, *Natural convection of air in a square cavity, a bench-mark numerical solution*, *Int. J. numer. Methods Fluids*, 3, 249-264 (1983)
- [10] G. D. Mallinson and G. De Vahl Davis, *Three-dimensional natural convection in a box: a numerical study*, *J. Fluid Mech.*, 83, 1-31 (1977).
- [11] Y. Jaluria and B. Gebhart, *on transition mechanisms in vertical natural convection flow*, *J. Fluid Mech.*, 66, 309-337 (1974).
- [12] N. C. Markatos and K. A. Pericleous, *Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity*. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 27, 775-772, (1984).
- [13] H. Ozoe, A. Mouri, M. Ohmuro, S. W. Churchill and N. Lior, *Numerical calculations of laminar and turbulent natural convection in water in rectangular channels heated and cooled isothermally on the opposing vertical walls*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28, 125-138 (1985).

- [14] R.A.W.M. Henkes, F.F. van der Vlugt and C.J. Hoogendoorn , Natural convection flow in a square cavity calculated with low Reynolds number turbulence models, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34, 1543-1557 (1991)
- [15] G. Barakos, E. Mitsoulis and D. Assimacopoulos, Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions, *Int. J. Numer. Methods fluids*, vol. 18, 695-719 (1994)
- [16] S.H. Peng, L. Davidson, Computation of turbulent buoyant flows in enclosures with low-Reynolds-number $k - \omega$ models, *Int. J. Heat and Fluid Flow* 20 172-184 (1999)
- [17] F. Liu, J.X. Wen, Development and validation of an advanced turbulence model for buoyancy driven flows in enclosures, *Int. J. Heat Mass Transfer* 42 3967-3981, (1999)
- [18] S.K. Choi, S. O. Kim, Treatment of turbulent heat fluxes with the elliptic-blending second-moment closure for turbulent natural convection flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* 51 2377-2388 (2008)
- [19] R. Cheesewright, K.J. King, S. Ziai, Experimental data for the validation of computer codes for the prediction of two dimensional buoyant cavity flows, In: *ASME Winter Annual Meeting*, HTD- 60, pp. 75-81. (1986)
- [20] S. Xin and P. Le Quéré, Turbulent natural convection in differentially heated cavity of aspect ratio 4: comparison of direct numerical simulations and k-e solutions, *Proc. Seminar 22 of EUROtherm*. Delft, the Netherlands, pp. 165-182., (1992)
- [21] Dafa'Alla, A.A., Betts, P.L., Experimental study of turbulent natural convection in a tall cavity, *Exptl, Heat Transfer* 9, 165-194, (1996)
- [22] P.L. Betts, I. H. Bokhari, Experiments on turbulent natural convection in an enclosed tall cavity, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 21 675-683 (2000)
- [23] Y.S. Tian, T.G. Karayiannis, Low turbulence natural convection in an air filled square cavity Part I: thermal and fluid flow fields, *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 849-866 (2000)
- [24] F. Ampofo, T.G. Karayiannis, Experimental benchmark data for turbulent natural convection in an air filled square cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer* 46 3551-3572, (2003)
- [25] L.B. Evans, R.C. Reid, E.M. Drake, Transient natural convection in vertical cylinder. *AiChE J.* 14 (2), 251-259 (1968)
- [26] A. Lemembre, J.P. Petit, Laminar natural convection in a laterally heated and upper cooled vertical cylindrical enclosure, *Int. J. Heat Mass transfer* 41 (16) 2437-2454, (1995)

- [27] Benkhelifa .A, M.A. Harhad, M. Belhamel, Etude Numérique de la convection naturelle dans une cuve cylindrique, Rev. Energ. Ren: valorisation 37-41 (1999)
- [28] M.S Khelifi Touhami, A. Benbrik, D. Lemonnier, D. Blay, Laminar natural convection flow in a cylindrical cavity application to the storage of LNG, Journal of petroleum science and engineering, volume 71, issues 3-4, Pages 126-132 (2010)
- [29] E. Papanicolaou, V. Blessiotis, Transient natural convection in a cylindrical enclosure at high Rayleigh Numbers, Int. J. Heat Mass Transfer, 45 1425-144 (2002)
- [30] R.C. Oliveski, A. Krenzinger, and H.A. Vielmo, cooling of cylindrical vertical tanks submitted to natural internal convection, Int. J. Heat Mass Transfer 45, 1425-1444 (2003)
- [31] A. Barzegar and A.A. Dehghan (2009), Transient thermal behavior of a vertical solar storage tank with a mantle heat exchanger during no-flow operation, Journal of applied Fluid Mechanics, vol.2, No. 1, pp. 55-69, 2009
- [32] C.T. Pham, S. Hartmann and J.P. Petit, Simultaneous heat and mass transfer in unsteady turbulent natural convection application to liquefied natural gas storage, 10th International Heat Conference Brighton (UK) 14-18, (1994)
- [33] S. Bate and D.S. Morrison, Modeling the behavior of stratified liquid natural gas in storage tanks: a study of the rollover phenomenon, Int. J. Heat Mass Transfer, volume 40, issue 8, pages 1875-1884 (1997)
- [34] K. Koyama, CFD Simulation on LNG Storage Tank to Improve Safety and Reduce Cost, Asia Simulation Conference 2006 (JSST 2006), 2006, pp. 39-43.
- [35] Aszodi A, E.Krepper, H.M. Prasser, Experimental and numerical investigation of one and two phase natural convection in storage tanks, Heat and Mass Transfer 36 497-504 (2000)
- [36] S. A. Jazayeri and E. M. Hasanzadeh Khoei, Numerical comparison of thermal stratification due natural convection in densified Lo₂ and LN₂ tanks, American journal of applied sciences 5 (12): 1773-1779 (2008)
- [37] T. K. Khurana, B.V.S.S.S.Prasad, K. Ramamrthi, S. Srinivasa Murthy, Thermal stratification in ribbed liquid hydrogen storage tanks, International Journal of Hydrogen Energy 31 2299-2309 (2006)
- [38] Chen Q.S, J. Wegrzyn, V Prasad, Analysis of temperature and pressure changes in liquefied natural gas (LNG) cryogenic tanks, Cryogenics 44 701-709 (2004)

- [39] H. Kim, M.W. Shin, E.S. Yoon, Optimization of operating procedure of LNG storage facilities using rigorous BOR model, Proceeding of the 17th world congress the international federation of automatic control Seoul, Korea. July 6-11., 10923-10926, (2008)
- [40] A. Lemembre, Evolution par convection naturelle d'une stratification formée de deux couches liquides dans un réservoir cylindrique, laboratoire d'énergétique moléculaire et macroscopique, combustion (EM2C) du CNRS et de l'ECP, thèse de doctorat, (1999)
- [41] H. T. Hashemi and H. R. Wesson, Cut LNG storage costs, Hydrocarbon Processing, August 1971, pp. 246-249.
- [42] Dropkin and Somerscales, ASME Series C. J. Heat Transfer, 86, (1964)
- [43] M. Jacob, Heat Transfer, Vol.1, 8th Edition, John Wiley&Sons, (1962)
- [44] J.P. Petit, Physical modeling of the AMETHYSTE 1.0 Code, Rapport contrat C.N.R.S.-G.D.F., 1995
- [45] A.E. Germeless, A model for LNG tank Rollover, Adv, in Cryo. Eng., 21:326, (1975)
- [46] C. L. Yaws, H.C. Yang and W. A. Cawley, Predict enthalpy of vaporization, Hydrocarbon Processing, 69:87, 1990.
- [47] J.P. Petit et C.T.Pharm, Etude thermo hydraulique des réservoirs de stockage de GNL. Contract C.N.R.S.-G.D.F., 421146, rapport final, (1995)
- [48] X. Yuan, Wall functions for numerical simulation of natural convection along vertical surfaces, Doctorat thesis, Swiss federal Institute of technology, Zurich, (1995)
- [49] F.T.M Nieuwstadt , Direct and large-eddy simulation of free convection, Proc. 9th Int. Heat Transfer Conf Jerusalem, vol. 1, pp. 37-47, (1990)
- [50] S. Paolucci, Direct numerical simulation of two-dimensional turbulent natural convection in an enclosed cavity. Journal of Fluid Mechanics 215, 229-262, (1990)
- [51] W.Lin, S.W. Armfield, Direct simulation of natural convection in a vertical circular cylinder, Int J Heat Mass Transfer; 42:4117-30, (1999)
- [52] S.H. Peng, L. Davidson, Large eddy simulation of turbulent buoyant flow in a confined cavity, Int. J. Heat Fluid Flow 22 323-331, (2001)
- [53] B.E. Launder and D.B. Spalding, The numerical computation of turbulent flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 3, pp. 269-289, (1974)

- [54] R.A.W. M. Henkes, Natural convection boundary layer, PhD Thesis Delft University Netherlands, (1990)
- [55] D.C. Wilcox, Reassessment for the scale equation for advanced turbulence models, AIAA journal, vol.26, N°.11, pp.1299-1310, (1988)
- [56] D.C. Wilcox, Turbulence modeling for CFD, 1st edition, DCW industries, Inc, la Canada CA, (1993)
- [57] D.C. Wilcox, Turbulence modeling for CFD, 2st edition, DCW industries, Inc, la Canada CA, (1998)
- [58] D.C. Wilcox, Turbulence modeling for CFD, 3^{ème} edition, DCW industries, Inc, la Canada CA, (2006)
- [59] S.V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, New York: McGraw-Hill, (1980)
- [60] H.K. Versteegh, W. Malalasekera, An introduction to computational fluid dynamics: The Finite Volume Method. Harlow, England, Longman Scientific& Technical, (1995)
- [61] M.S. Khelifi Touhami, A Benbrik, D. Lemonnier, D. Blay, Convection naturelle en régime laminaire dans une cavité cylindrique. Application au stockage du GNL, 12^{èmes} Journées Internationales de Thermiques, Tanger, Maroc du 15 au 17 novembre 2005
- [62] M.S. Khelifi Touhami, Etude de la convection naturelle turbulente dans une cavité carrée, the 4th International Symposium on hydrocarbons and chemistry, (2008)

ANNEXES

Annexe 1

1. Détermination de la densité du flux d'évaporation (équation (1.2))

$$\left(Nu^* = C.Ra^{1/3} \right)_{strate}$$

$$Nu_s^* \Big|_{strate} = \varphi_{ev}^* e^* / \lambda \Delta T^* \quad Ra \Big|_{strate} = g \beta \Delta T^* e^{*3} / a \nu$$

En remplaçant les valeurs de Nusselt et du Rayleigh on obtient l'équation (1.2) :

$$\varphi_{ev}^* = C \lambda \left(\frac{g \beta}{a \nu} \right)^{1/3} \Delta T^{*4/3}$$

Les auteurs affirment que la densité du flux d'évaporation φ_{ev}^* est indépendante de l'épaisseur e^* . La densité de flux massique d'évaporation \dot{m}^* s'obtient en divisant φ_{ev}^* par la chaleur latente de vaporisation L^* ce qui donne l'équation (1.3) :

$$\dot{m}^* = \frac{C \cdot \lambda}{L^*} \left(\frac{g \beta}{a \nu} \right)^{1/3} \Delta T^{*4/3}$$

2. Adimensionnement de la loi de Hashemi – Wesson (équation 2.74)

$$\begin{aligned} \varphi_{ev}^* &= C \lambda \left(\frac{g \beta}{a \nu} \right)^{1/3} \Delta T^{*4/3} = C \lambda \left(\frac{g \beta}{a \nu} \Delta T_0^* \right)^{1/3} (T - T_0)^{4/3} \Delta T_0^* \\ &= C \lambda \left(\frac{g \beta}{a \nu} \Delta T_0^* \right)^{1/3} (T - T_0)^{4/3} \Delta T_0^* = C \lambda \left(\frac{g \beta}{a \nu} \Delta T_0^* \right)^{1/3} (T - T_0)^{4/3} \left(\frac{\varphi_l H}{\lambda} \right) \\ &= C \left(\frac{g \beta}{a \nu} \Delta T_0^* H^3 \right)^{1/3} (T - T_0)^{4/3} (\varphi_l) = C Ra^{1/3} (T - T_0)^{4/3} \varphi_l \end{aligned}$$

Alors on obtient la valeur de la densité du flux d'évaporation adimensionnelle par la formule suivante :

$$\varphi_{ev} = C Ra^{1/3} (T - T_0)^{4/3}$$

Annexe 2

Algorithme SIMPLER

