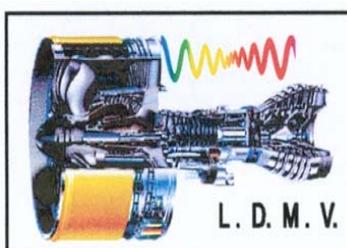


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'hamed BOUGARA Boumerdes



Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département : Maintenance Industrielle
Laboratoire: Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique



Mémoire de Magister
Filière : Génie Mécanique
Option : Dynamique des Turbomachines

Thème :

Analyse des milieux fissurés axisymétriques par les équations intégrales de frontière

Présenté par : SETTET Ahmed Tidjani

Soutenu le : 13-06- 2007

Devant le jury composé de :

| | | | | |
|------|----------------------|------------|--------------------|--------------|
| MM. | A. NOUR | Professeur | USTHB | Président |
| | S. RECHAK | Professeur | ENP | Rapporteur |
| | B. NECIB | Professeur | U.M.M. Constantine | Examineur |
| | M. BOUAZIZ | M.C | ENP. | Examineur |
| | M.O. SI-CHAIB | M.C | UMB. Boumerdes | Examineur |
| MME. | A. AIT.SAADA | C.C | UMB. Boumerdes | Examinatrice |

Année universitaire 2006/2007

Remerciements

Chaque travail que l'homme effectue est un voyage et une aventure pleins de surprises.

C'est un épilogue qui ouvre à l'homme les portes de l'inconnu sur le chemin qu'il poursuit tout le long de sa vie.

Je remercie Dieu de nous avoir donné la vie, la santé, le courage et la volonté d'entreprendre ce voyage et d'en apprécier le fruit de l'effort consenti.

*Ce mémoire a été pour moi une occasion de rencontrer des gens que j'ai appris à connaître et dont j'apprécie les qualités. Parmi eux, **Mr. RECHAK Saïd** et tous les professeurs du laboratoire de **dynamique des moteurs et vibroacoustique** que je tiens à remercier pour m'avoir confié l'étude de ce projet. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude pour l'aide ainsi que pour le soutien qu'ils m'ont assuré tout le long de ce travail.*

Je remercie tous ceux qui m'ont assisté de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements aux membres du jury pour la patience dont ils feront preuve à mon égard, ainsi que l'intérêt qu'ils accorderont à ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents et grands parents, ainsi qu'à ma tante.

Je le dédie également à mes frères et à ma sœur.

Sans oublier tous mes amis, et en particulier Mahmoud Chihab.

Sommaire

Sommaire

Nomenclature

Introduction générale

| | |
|---|---|
| I. Généralités..... | 1 |
| II. Vue d'ensemble de l'évolution et du développement de la méthode | 3 |
| III. Description des chapitres | 6 |

Chapitre I Méthode des Eléments Frontières (BEM) (The Boundary Element Method)

| | |
|---|-----------|
| Introduction..... | 8 |
| I.1 Élasticité linéaire isotrope ou élasticité classique..... | 8 |
| I.1.1 Équation de Navier-Stokes | 10 |
| I.1.2 Problèmes stationnaires | 10 |
| I.1.3 Elasticité plane | 11 |
| I.2 Différentes approches numériques de la mécanique continue | 11 |
| I.2.1 L'approche par la méthode des différences finies (FDM) | 12 |
| I.2.2 L'approche par la méthode des éléments finis (FEM)..... | 12 |
| I.2.3 L'approche par la méthode éléments de frontières (BEM) | 13 |
| I.3 Éléments isoparamétriques et intégration numérique (Approximation par éléments frontières)..... | 15 |
| I.3.1 Définition de la géométrie des éléments | 16 |
| I.3.1.a Nœuds géométriques | 16 |
| I.3.1.b Règles de partition du domaine en éléments..... | 16 |
| I.3.1.c Formes d'éléments classiques | 17 |
| I.3.1.c-1 Éléments à une dimension..... | 18 |
| I.3.1.c-2 Éléments à deux dimensions..... | 18 |
| Éléments triangulaires..... | 18 |
| Éléments quadrilatéraux..... | 18 |
| I.3.1.c-3 Éléments à trois dimensions..... | 18 |
| Éléments tétraédriques | 18 |
| Éléments hexaédriques..... | 19 |
| Éléments prismatiques..... | 19 |
| I.3.2 Éléments de références | 19 |
| I.3.3 Fonctions de forme et transformation de coordonnées | 21 |
| I.3.4 Stratégie d'intégration..... | 23 |
| I.3.4 -a Intégrales de surface | 26 |
| I.3.4 -b Intégration numérique pour un élément | 26 |
| I.3.4 -c Formules de quadrature de Newton-Cotes | 27 |
| I.3.4 -d Formules de quadrature de Gauss..... | 28 |
| I.3.4 -e Intégration numérique pour un domaine rectangulaire et un prisme droit | 29 |
| I.3.4 -f Intégrale elliptique | 30 |
| I.3.4 -g Ordre de précision de l'intégration numérique | 30 |
| I.3.4 -h Ordre de précision minimale de l'intégration pour assurer la convergence | 31 |
| I.3.4 -i Ordre de précision de l'intégration pour conserver l'ordre de convergence | 31 |
| I.4 Problème potentiel en deux dimensions en BEM..... | 32 |
| I.4.1 Formulation analytique | 33 |
| I.5 Méthode des Éléments frontières en élasticité 2D..... | 37 |
| I.5.1 Solutions élémentaires | 37 |
| I.5.2 Équations différentielles de Navier stocks (déplacement)..... | 39 |
| I.5.3 Solution fondamentale | 42 |
| I.5.4 Equation intégrale de frontière (BIE)..... | 45 |
| Conclusion..... | 47 |
| Chapitre II Développement d'éléments axisymétriques et leur introduction dans la formulation de la BEM | |
| Introduction..... | 48 |
| II.1 Formulation du problème potentiel axisymétrique | 48 |
| II.2 Equation intégrale frontière pour le problème potentiel axisymétrique | 49 |
| II.3 Points situés sur l'axe des z | 52 |
| II.4 Exécution (Implémentation) numérique | 53 |
| II.5 Formulation élastostatique axisymétrique..... | 53 |
| II.6 Equation intégrale frontière pour les problèmes élastostatiques axisymétriques (BIE)..... | 53 |
| II.7 Solutions élémentaires du problème élastostatique axisymétrique..... | 54 |
| Conclusion..... | 59 |

Chapitre III Implémentation numérique

| | |
|--|----|
| Introduction..... | 60 |
| III.1 Implémentation numérique de la BEM en élasticité | 60 |
| Étape 1 : Division de la frontière dans des éléments | 61 |
| Étape 2 : Intégration numérique des solutions élémentaires..... | 64 |
| Étape 3 : Application des conditions de frontière | 68 |
| Étape 4 : Résolution | 68 |
| III.2 Implémentation numérique de l'élément axisymétrique | 68 |
| III.3 Programmation de l'analyse des milieux axisymétriques par la méthode des éléments frontières(BEM)..... | 70 |
| Conclusion..... | 71 |

Chapitre IV Implémentation numérique des fissures dans les milieux axisymétriques

| | |
|---|------------|
| Introduction | 72 |
| IV.1. Représentation de la fissuration..... | 72 |
| IV.1.1. La mécanique de l'endommagement | 73 |
| IV.1.2. La mécanique élastique linéaire de rupture | 73 |
| IV.2. Modes fondamentaux de la rupture et facteurs d'intensité de contrainte | 75 |
| Mode I (Mode d'ouverture) | 76 |
| Mode II (Mode de glissement)..... | 77 |
| Mode III (Mode de déchirement) | 77 |
| IV.3 Propagation des fissures..... | 78 |
| IV.3.1 Initiation..... | 79 |
| IV.3.2 Propagation..... | 79 |
| IV.3.3 Ruine | 79 |
| IV.4 Calcul du facteur d'intensité de contrainte..... | 80 |
| IV.4.a Méthodes d'extrapolation de déplacement et d'effort | 80 |
| IV.4.b Méthodes de pente de déplacement et de contrainte..... | 81 |
| IV.4.c Méthodes d'énergie..... | 81 |
| IV.5 Eléments de singularité..... | 82 |
| IV.6 Résultat et interprétation..... | 86 |
| IV.6.1 Exemple d'un problème axisymétrique (cylindre) | 86 |
| IV.6.1.1 Introduction des données et conditions aux frontières..... | 86 |
| a- Conditions concernant le déplacement | 87 |
| b- Conditions concernant les contraintes..... | 86 |
| IV.6.1.2 Résultats | 88 |
| IV.6.1.2.a Déplacement de la frontière..... | 88 |
| IV.6.1.2.b Traction à la frontière | 89 |
| IV.6.1.2.c Contraintes à la frontière..... | 90 |
| IV.6.1.2.d déplacements internes..... | 90 |
| IV.6.1.2.e Contraintes internes | 90 |
| IV.6.2 Exemple d'un problème axisymétrique | 96 |
| IV.6.2.1 Introduction des données et conditions aux frontières..... | 98 |
| a- Conditions concernant le déplacement | 98 |
| b- Conditions concernant les contraintes | 99 |
| IV.6.2.2 Résultats | 99 |
| IV.6.2.2.a Déplacement de la frontière..... | 100 |
| IV.6.2.2.b Traction à la frontière | 101 |
| IV.6.2.2.c Contraintes à la frontière..... | 102 |
| IV.6.2.2.d déplacements internes..... | 102 |
| IV.6.1.2.e Contraintes internes | 102 |
| IV.6.3 Exemples de rupture..... | 104 |
| Fissure semi elliptique dans un cylindre..... | 104 |
| Interprétation et conclusion..... | 105 |
| Conclusion générale..... | 106 |

Nomenclature

Nomenclature

| | |
|---------------------------------|---|
| A | : La surface du domaine de la solution en deux dimensions et en problèmes axisymétriques. |
| $[A]$ | : Matrice de solution, issue de l'équation intégrale multipliée par les inconnues $[\phi]$ ou $[u]$. |
| $[B]$ | : Matrice de solution, issue de l'équation intégrale multipliée par $[x]$ ou $[t]$. |
| e_i | : Vecteur unitaire dans le repère cartésien. |
| E | : Module de Young |
| f_i ou F_i | : Vecteur de force. |
| G | : Nombre total des points Gaussiens. |
| G_i | : Vecteur de Galerkin. |
| J | : Le Jacobéen. |
| $K_1(p, Q)$ | : La première solution élémentaire. |
| $K_2(p, Q)$ | : La seconde solution élémentaire. |
| H, N ou $L_c(\eta_1, \eta_2)$ | : Fonctions de formes ou Géométriques tridimensionnelles. |
| L ou ∇^2 ou Δ | : Opérateur de Laplace. |
| m | : Vecteur tangentiel pour des problèmes bidimensionnels axisymétriques. |
| n | : Vecteur unitaire normal sortant. |
| $N_c(\xi)$ ou $L_c(\xi)$ | : Fonctions de formes quadratiques bidimensionnelles. |
| $N_c(\xi_1, \xi_2)$ | : Fonctions de formes quadratiques tridimensionnelles. |
| p | : Le point source à l'intérieur du domaine (charge). |
| p | : Le point source sur la frontière (charge). |
| q | : Le point courant à l'intérieur du domaine (champ). |
| Q | : Le point courant sur la frontière (champ). |
| r_Q, θ_Q, z_Q | : Coordonnées cylindriques pour le point courant Q . |
| $r(p, Q)$ | : La distance euclidienne entre la source ponctuelle p et le point courant Q . |
| R_p, θ_p, Z_p | : Coordonnées cylindriques pour le point source p . |
| t_i | : Vecteur de contrainte (traction). |
| T_{ij} | : Vecteur de traction en tenseur. |
| u_i | : Vecteur de déplacement. |
| u_n | : Composante normale du déplacement. |
| $U_{ij}(p, Q)$ | : Vecteur de déplacement en tenseur. |
| w_g | : Fonction de poids dans la quadrature gaussienne ordinaire. |
| w_{gi} | : Fonction de poids dans la quadrature gaussienne logarithmique. |
| $[x]$ | : Vecteur contenant les inconnus. |
| x_Q, y_Q, z_Q | : Coordonnées cartésiennes pour le point courant Q . |

| | |
|---------------------------|--|
| X_p, Y_p, Z_p | : Coordonnées cartésiennes pour le point source p . |
| α | : Angle. |
| Γ ou E | : Surface ou frontière dans des problèmes bidimensionnels et axisymétriques. |
| δ_{ij} | : Symbole de Kronecker ($\delta_{ij}=1$ si $i=j$ et $\delta_{ij}=0$ si $i \neq j$) |
| ϵ_{eq} | : Tenseur déformation équivalent. |
| ϵ_{ij} | : Tenseur déformation en notation indicielle. |
| ϵ_{rr} | : Déformation radiale dans les problèmes axisymétriques. |
| ϵ_{rz} | : Déformation engendrée par le cisaillement dans les problèmes axisymétriques. |
| ϵ_{zz} | : Tenseur déformation axiale. |
| $\epsilon_{\theta\theta}$ | : Déformation angulaire dans les problèmes axisymétriques. |
| λ | : Coefficient de Lamé. |
| $\lambda(p, Q)$ | : Solution fondamentale. |
| μ | : Coefficient de Lamé. |
| ν | : Coefficient de Poisson. |
| ξ | : Coordonnée locale dans les problèmes bidimensionnels et axisymétriques. |
| ξ_1, ξ_2 | : Coordonnées locales dans les problèmes tridimensionnels. |
| ξ_g | : Coordonnée gaussienne dans la quadrature gaussienne ordinaire. |
| ξ_{gl} | : Coordonnée gaussienne dans la quadrature gaussienne logarithmique. |
| ρ | : Masse volumique (densité). |
| σ_{ij} | : Matrice de contrainte en notation indicielle. |
| σ_n | : Contrainte normale. |
| σ_{rr} | : Contrainte radiale. |
| σ_{rz} | : Contrainte de cisaillement dans les problèmes axisymétriques. |
| σ_t | : Contrainte tangentielle. |
| σ_{zz} | : Contrainte axiale. |
| ϕ | : Fonction. |

Introduction générale

Introduction générale

I. Généralités

L'être humain a toujours cherché à améliorer sa condition de vie et donc son confort. Ceci l'a amené à réaliser des projets de plus en plus ambitieux, complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Sans techniques numériques, il serait presque impossible de résoudre analytiquement des problèmes pratiques, avec un degré raisonnable d'exactitude.

Les hommes de sciences ont depuis des siècles tenté de mettre en équation le comportement de la matière. Les modélisations s'appuient sur la représentation des phénomènes de déformation à l'aide de champs vectoriels et de tenseurs. Ceux-ci décrivent la déformation de l'objet ainsi que les contraintes internes qu'il subit. Des lois du comportement viennent ensuite lier les contraintes et la déformation qui en résulte.

En mécanique, la plupart des techniques numériques sont basées sur des méthodes de résolution d'équations différentielles qui dépendent de manière intrinsèque de la qualité des résultats fournis par les simulations. Il est donc indispensable à posteriori de disposer d'estimateurs d'erreur fiables, de manière à contrôler l'erreur de discrétisation, et de pouvoir contrôler les erreurs en adaptant le maillage afin d'éviter des résultats aberrants.

En divisant un corps en un grand nombre de plus en plus petits éléments, il est possible d'obtenir une rationalisation des valeurs des variables, des efforts et des déplacements dans le corps. On parle alors de maillage. On peut le comparer à une structure métallique où les éléments constitutifs se répètent à un nombre fini. Si nous appliquons une contrainte à un élément dont nous pouvons calculer la réaction, nous pouvons étendre le calcul à l'ensemble de la structure [7].

Plus le nombre de ces éléments est grand, plus la taille de ces éléments est petite. La solution numérique devient plus précise, alors que la contrainte du temps de calcul peut devenir prohibitive.

Parmi les diverses techniques et tendances de calculs numériques les plus utilisées en mécanique nous pouvons citer : la Méthode des Eléments Finis (FEM), la Méthode des Eléments Finis Etendus (X-FEM), la Méthode des Différences Finies (FDM), la Méthode des éléments Frontières dite aussi Boundary Elements Methods (BEM) etc. Cette dernière est l'une des méthodes numériques les plus utilisées de nos jours pour résoudre ce type d'équations [16].

La Méthode des Eléments Finis (FEM) et la Méthode des éléments Frontières (BEM) se différencient car [8]:

1. En sachant que la construction d'une maille d'objet, surtout en 3D, est un exercice long et complexe, la FEM nécessite la construction d'une maille entière du domaine étudié alors que la BEM se suffit d'une maille de la frontière du domaine étudié, ce qui avantage cette dernière étant donnée la simplification de la maille à construire.
2. Dans beaucoup de cas, le domaine à étudier n'est pas délimité (infini), ce qui privilégie l'utilisation de la BEM.
3. L'application de la FEM génère une matrice de rigidité symétrique, ce qui n'est pas le cas de la BEM dont la matrice de rigidité obtenue en fin de calcul n'est pas symétrique.
4. En FEM, la fonction intégrale est régulière alors qu'elle est singulière en BEM, d'où la difficulté d'évaluation avec exactitude, ce qui nous amène à rechercher des approches alternatives.
5. La FEM est un outil bien maîtrisé actuellement, tant du point de vue recherche et développement que du point de vue utilisation dans l'industrie. C'est une méthode robuste qui a fait ses preuves. Par contre elle trouve des limites dans les nouveaux enjeux et défis d'aujourd'hui et de demain, étant donné que l'accent est mis dans la recherche, sur l'introduction de plus de physique dans les solutions numériques que l'on souhaite traiter. Même si le champ d'application de la FEM est incontestablement plus vaste que celui de la BEM, cette dernière occupe une position dominante par sa supériorité dans certaines applications.

Le travail objet de ce document porte sur le traitement des milieux axisymétriques par la BEM.

Nous disons qu'un solide est *axisymétrique* si la forme du corps est symétrique de révolution, et que le chargement et les conditions aux limites sont aussi de révolution autour de son axe.

Dans ce cas, la solution est aussi axisymétrique. Nous utilisons un système de coordonnées cylindriques, voire sphériques autour de l'axe de symétrie.

Le problème de la distribution des contraintes dans les corps à symétrie de révolution (solides «axisymétriques») soumis à un chargement ayant la même symétrie est très important en pratique. Le problème théorique est analogue à celui des contraintes planes ou des déformations planes car il est, ici encore, bidimensionnel. Pour des raisons de symétrie, les deux composantes du déplacement dans toute section plane contenant l'axe de symétrie définissent complètement le champ des déformations et donc des contraintes.

Le volume associé à un «élément» est désormais celui d'un corps de révolution et toutes les intégrations doivent s'y rapporter.

Dans les problèmes d'élasticité plane, le travail interne est associé aux deux composantes de la déformation dans le plan, la composante normale de la contrainte n'intervenant jamais, soit parce qu'elle est elle même nulle, soit parce que la composante correspondante du déplacement est nulle.

En symétrie de révolution, la composante radiale du déplacement produit automatiquement une déformation tangentielle et comme la contrainte correspondante est sûrement différente de zéro, il faut faire intervenir une quatrième composante des déformations et des contraintes. C'est là que réside la différence essentielle de la symétrie de révolution.

Pour résoudre ces problèmes, nous pouvons utiliser la formulation en contraintes ou la formulation en déplacements.

II. Vue d'ensemble de l'évolution et du développement de la méthode

Dès 1903, Fredholm a employé des équations intégrales discrétisées dans les problèmes potentiels qui ont formé la base pour le développement de l'approche **indirecte**. Cette approche emploie des fonctions où des sources factices de densité qui n'ont aucune signification physique, mais peuvent être employées pour calculer des quantités physiques telles que des déplacements et des efforts. Une équation intégrale reliant des valeurs limites des déplacements et des tractions a été établie par Somigliana en 1886[3]. Les formes de l'identité de Somigliana constituent la colonne vertébrale de la formulation **directe** (celle décrite dans ce document).

Dans plusieurs écrits sur le développement la théorie potentielle ou d'élasticité, des équations intégrales ont été mises en évidence par d'éminents mathématiciens tels que Kellogg [1929], Muskhelishvili [1953], Mikhlin [1957] et Kupradze [1965][4]. Les formulations intégrales, ont cependant été résolues par des procédures analytiques qui ont limité leur application à des problèmes simples. Jusqu'aux années 60, il n'y avait aucun travail important développé pour illustrer la gamme des problèmes qui peuvent être résolus par les équations intégrales, ni pour le rôle qu'elles peuvent jouer dans les calculs numériques.

Dés le début des années 60, l'évolution informatique à travers le développement fulgurant de calculateurs numériques puissants et rapides, a permis un développement extraordinaire des méthodes numériques de calcul. C'est ainsi que la mise en œuvre de la FEM a démontré qu'un éventail de problèmes complexes de technologie peuvent être résolus en utilisant l'ordinateur avec une exactitude impressionnante.

La percée principale dans la résolution d'intégrales de frontière est venue en 1963 où deux documents ont été publiés par Jaswon et Symm [1963][5]. Leur approche s'est basée sur la discrétisation des équations intégrales appliquées aux problèmes potentiels bidimensionnels régis par l'équation de Laplace. Les éléments ont été décrits en termes de points nodaux et les intégrations étaient exécutées en utilisant la règle de Simpson, excepté quelques intégrales singulières qui ont été intégrées analytiquement. L'approche de Jaswon et de Symm peut être classifiée comme « **semi-directe** », parce que les fonctions employées pour formuler le problème ne sont pas factices et peuvent être différenciées ou intégrées pour calculer des quantités physiques [16].

D'autres approches semblables d'équations intégrales ont été adoptées par [4]:

- Jaswon et Ponter [1963] pour des problèmes de torsion impliquant des axes avec différentes sections transversales régulières.
- Hess et Smith [1967] pour des problèmes potentiels d'écoulement autour de formes arbitraires.
- Harrington [1969] pour des problèmes bidimensionnels d'électrotechnique.

La première publication sur l'approche directe de l'emploi des déplacements et des tractions dans une équation intégrale applicable au-dessus de la frontière, a été éditée par

Rizzo en 1967[5]. Le travail de Rizzo était très original parce que c'était le premier qui a exploité l'analogie forte entre la théorie potentielle et la théorie classique d'élasticité pour concevoir une approche numérique pour résoudre le problème. La règle de Simpson a été employée pour tout sauf pour les intégrales singulières [4,5].

La poursuite de l'approche directe d'équation intégrale aux problèmes tridimensionnels par Cruse [1969] a suivi une formulation très semblable, néanmoins la surface de Rizzo a été discrétisée dans les éléments triangulaires plats avec les déplacements et les contraintes constantes appliquées au-dessus de chaque élément. Le travail de Cruse a été suivi par deux publications pour introduire l'application tridimensionnelle et sa comparaison avec la FEM (Cruse [1973]). Il a employé des éléments plus évolués en permettant aux variables de changer linéairement au-dessus de chaque élément (Cruse [1974])[6].

Pendant cette période du développement (de 1967 à 1972), les formulations d'équations intégrales ont été poursuivies pour inclure des problèmes non homogènes contenant des inclusions (Rizzo et Shippy [1968]), des problèmes élastodynamiques (Cruse [1968] et Cruse et Rizzo [1968]), élastoplasticité (Swedlow et Cruse [1971]), des matériaux anisotropes (Cruse et Swedlow [1971]) et mécanique tridimensionnelle de rupture (Cruse et Van Buren [1971] et Cruse [1972]). Ces publications étaient cruciales parce qu'elles ont fourni la base à d'autres développements et démontré que l'approche était une technique numérique très puissante [4].

Plusieurs algorithmes et méthodes numériques de modélisation étaient employés dans des formulations de la FEM, telles que le concept des éléments évolués, en employant des fonctions quadratiques de forme. Ces éléments ont été employés par Lachat [1975] et plus tard améliorés pour la première fois par Lachat et Watson [1975, 1976], et d'autres auteurs, tels que Cruse et Wilson [1978] et Tan et Fenner [1978, 1979]. Les éléments quadratiques isoparamétriques ont permis à la géométrie et aux variables de changer quadratiquement au-dessus de chaque élément, et ont démontré leur efficacité à la résolution des problèmes tridimensionnels. En raison de leur précision dans les problèmes pratiques, des éléments quadratiques isoparamétriques sont adoptés dans ce document [4-7].

Depuis les années 70 l'approche de l'équation intégrale de frontière a continué à se développer rapidement et a été poursuivie pour inclure une panoplie de problèmes en mécanique, comprenant des applications non linéaires.

Initialement, la formulation d'équations intégrales frontières portait la dénomination de Boundary Integral Equation (BEI), qui a été intronisée Méthodes d'éléments frontières ou Boundary element method (BEM) [4].

Les publications et les chercheurs signalés dans ce document ne représente qu'une faible partie de la bibliographie des travaux menés dans ce domaine.

III. Description des chapitres

Ce document décrit l'étude des éléments axisymétriques par les éléments frontières (Boundary Elements Methods BEM), à savoir :

Chapitre I

Ce chapitre est une introduction à la *Méthode Des Eléments Frontières (BEM) (The Boundary Element Method)*. Ce chapitre est composé de cinq parties :

- **La première partie** : décrit brièvement la loi de comportement de Hooke ainsi que l'équation de Navier-Stokes. Nous les y avons réécrits de façon simplifiée en élasticité plane ce qui nous a permis d'aboutir à l'équation de Poisson.
- **La deuxième partie** : cite les différentes approches numériques de la mécanique continue.
- **La troisième partie** : décrit les éléments isoparamétriques, l'interpolation numérique, les fonctions de formes ainsi que l'intégration numérique (Approximation par éléments frontières).
- **La quatrième partie** : présente la mise en œuvre de la BEM dans le cadre de l'étude d'un problème potentiel en deux dimensions.
- **La cinquième et dernière partie**: présente à la mise en œuvre de la BEM en élasticité pour les problèmes en deux dimensions.

Chapitre II

Le deuxième chapitre est consacré au développement des éléments axisymétriques et leur introduction dans la formulation BEM.

Chapitre III

Le troisième chapitre décrit l'implémentation numérique ainsi que la description des problèmes traités (application numérique à une plaque métallique sollicitée par des contraintes et sur un élément axisymétrique).

Chapitre IV

Ce chapitre est consacré à l'implémentation numérique des fissures dans les milieux axisymétriques et à l'interprétation des résultats.

Conclusion

La conclusion fait état de l'apport de ce travail et des possibilités d'avenir.

Chapitre I

La Méthode Des Eléments Frontières (BEM)

(The Boundary Element Method)

Introduction

Nature, forme, structure, consistance, comportement, etc., sont d'une importance capitale dans le choix des matériaux destinés à des fabrications de toutes sortes et pour de multiples usages. En effet, les notions de solidité et de résistance constituent des préoccupations constantes. Des actions de différentes formes et natures donnent naissance à des réactions de diverses formes et natures. Des caractérisations ayant trait à la rigidité, la souplesse, la dureté, la mollesse, la fragilité, la ductilité, etc., sont établies, avec pour préoccupation première, la sécurité à l'usage des hommes et des biens. Dans le langage courant, qui dit mécanique, dit machines, moteurs, véhicules, organes, etc., c'est à dire tout ce qui produit et transmet du mouvement, de la force, de l'énergie, etc. Ces activités produisent des déformations des matériaux utilisés. Les déformations élastiques sont des déformations réversibles. Le matériau retourne partiellement ou totalement à son état initial. Son étude relève du domaine de la mécanique des milieux continus (MMC) et de la mécanique des solides. L'utilisation de la méthode des éléments frontières pour l'analyse des problèmes statiques et dynamiques nécessite la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire.

Dans ce chapitre une brève analyse de ces équations de base présente les relations entre contrainte et déformation dans le cas général tridimensionnel.

Du cas général dérive le cas particulier de l'élasticité plane (état plan de déformation, état plan de contrainte, problèmes axisymétriques)

I.1 Elasticité linéaire isotrope ou élasticité classique

Nous nous plaçons ici dans le cadre des petits déplacements et des petites vitesses [5], de sorte que l'on puisse linéariser les équations.

Les déformations d'un objet sont mesurées à partir d'une position initiale, qui est généralement la position de repos de l'objet, situation dans laquelle aucune force n'est appliquée à ce dernier [1].

Nous définissons alors le champ vectoriel *déplacement*, généralement noté \mathbf{u} , qui est simplement pour chaque point le vecteur reliant sa position au repos à sa position actuelle dans la configuration déformée [2-3].

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (I.1)$$

Nous avons :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (I.2)$$

Vitesse et accélération sont liées par :

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad , \quad a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (I.3)$$

La loi de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \{v\}) = 0 \quad (I.4)$$

Celle de la conservation de la quantité de mouvement, en présence des forces extérieures s'écrit :

$$\rho \{a\} = \text{div} [\sigma] + \rho \{f\} \quad (I.5)$$

La théorie de l'élasticité linéaire se situe :

- d'une part dans le cadre de la description des solides lentement déformables, (cet dernière est souvent trop générale et peut être simplifiée), et,
- d'autre part nous supposons que la **loi de comportement élastique** reliant le tenseur des contraintes à celui des déformations est **linéaire**. Lorsque le solide élastique a un comportement **isotrope**, (c'est-à-dire qu'il a le même comportement dans toutes les directions car il ne privilégie aucune direction de l'espace, c'est très souvent le cas, sauf pour des matériaux fibreux à direction privilégiée, comme le bois ou les muscles ...etc.), nous obtenons **la loi de comportement de Hooke [1-2]:**

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) \quad (I.6)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij}=1$ si $i=j$ et $\delta_{ij}=0$ si $i \neq j$).

E et ν dans la pratique, sont le module d'Young et coefficient de Poisson qui sont connus expérimentalement pour un matériau homogène donné et nous déduisons les coefficients de Lamé [3-5]:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (I.7)$$

I.1.1 Equation de Navier-Stokes

Les équations précédentes décrivent la théorie de l'élasticité. L'équation de Navier s'écrit sous les formes suivantes [3] :

$$(\mu + \lambda) \overline{\text{grad}}(\text{div} \{u\}) + \mu \text{div} (\overline{\text{grad}} \{u\}) + \rho \{f\} = \rho \{a\} \quad (I.8)$$

Ou :

$$(\mu + \lambda) \nabla(\text{div} \{u\}) + \mu \Delta \{u\} + \rho \{f\} = \rho \{a\}$$

Ou encore :

$$(\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right) + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned} (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + \rho f_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + \rho f_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + \rho f_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (I.9)$$

I.1.2 Problèmes stationnaires

Le terme stationnaire n'a pas la même signification en mécanique des fluides et en mécanique des solides. Dans le premier cas, le mot stationnaire ne signifie pas absence de mouvement mais indépendance de la vitesse par rapport au temps. Dans le second cas l'inconnue cinématique est le déplacement et le mot stationnaire signifie équilibre statique: on est alors en **élastostatique** (ce qui est une vue de l'esprit puisqu'un déplacement s'effectue dans un laps de temps ou en mouvement suffisamment lent pour que chaque configuration puisse être considérée comme en équilibre); on parle alors d'élasticité quasi-statique [4]. De

toutes les façons, le terme d'accélération disparaît et le système (I.5) qui traduit la conservation de la quantité de mouvement est réduit à:

$$\operatorname{div} \sigma + \rho f = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0 \quad (\text{I.10})$$

I.1.3 Elasticité plane

Il s'agit de situations particulières où le domaine d'études est invariant par translation le long de e_3 et le champ de déplacement recherché est de la forme $u(y) = u(y_1, y_2)e_3$.

Dans ce cas les seules composantes non nulles de ε et σ sont :

$$2 \varepsilon_{\alpha 3} = u_{,\alpha} \quad , \quad \sigma_{\alpha 3} = 2 \mu \varepsilon_{\alpha 3} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (\text{I.11})$$

D'où :

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad , \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

De la loi de comportement de Hooke on a [1-2]:

$$\sigma_{13} = 2 \mu \varepsilon_{13} \quad , \quad \sigma_{23} = 2 \mu \varepsilon_{23}$$

Nous obtenons l'équation de Navier simplifiée [3-4] :

$$\mu \Delta \{u\} + \rho \{f\} = 0$$

D'où :

$$\Delta \{u\} + b = 0 \quad y \in \Omega \quad (\text{I.12})$$

C'est l'équation de Poisson appliquée à un domaine borné tridimensionnel Ω , d'inconnue u nommée potentiel.

Pour $b=0$, nous avons l'équation de Laplace :

$$\Delta \{u\} = 0 \quad (\text{I.13})$$

Dans ce qui va suivre nous allons appliquer la méthode des éléments de frontières à des problèmes régis par l'équation de Poisson ou de Laplace.

I.2 Différentes approches numériques de la mécanique continue

Nous pouvons classifier les méthodes numériques de mécanique continue en trois approches : différence finie (FDM), élément fini (FEM) et élément de frontière (BEM) [16].

Nous allons en donner une courte description de chaque approche ci-dessous :

La figure I.1 nous permet de voir la différence entre les approches numériques.

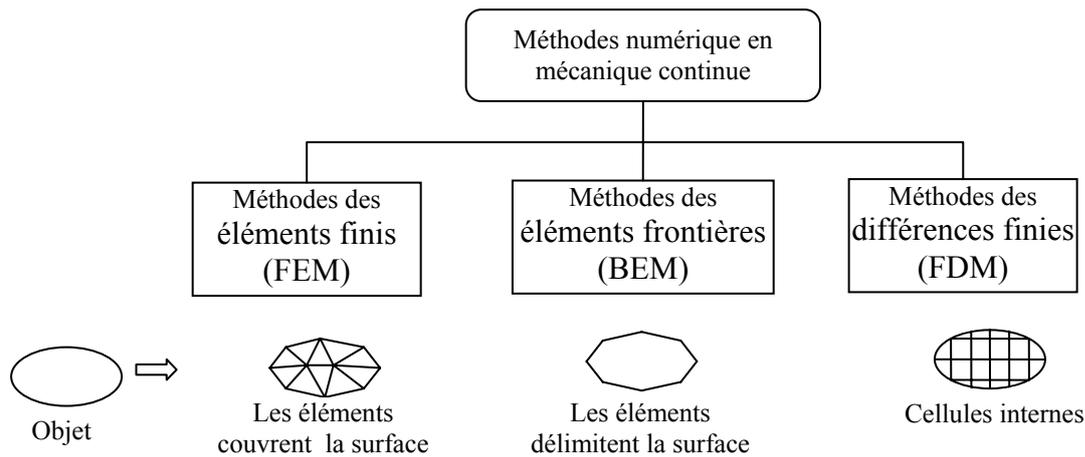


Figure I.1 Classification des méthodes numériques en mécanique continue

I.2.1 L'approche par la méthode des différences finies (FDM)

Dans cette méthode, les équations partielles sont écrites en termes d'équations différentielles. Par conséquent, pour un domaine bidimensionnel, une grille de cellules est placée à l'intérieur du domaine. On y applique l'approximation différentielle à chaque point intérieur. Ceci nous permet d'obtenir un système d'équations algébriques linéaires qui permet d'obtenir une solution unique en satisfaisant les conditions réelles. L'approche de la méthode des différences finies est la plus simple des trois approches. Elle est relativement facile à programmer. Son principal inconvénient est un problème pratique d'application de la méthode des différences finies, car elle n'est pas appropriée aux problèmes que posent les corps à géométries irrégulières. Il est en outre difficile de changer la taille des cellules et donc de changer rapidement de variables, telles que des problèmes de concentration d'effort. De nos jours, les méthodes des différences finies sont appréciées pour des problèmes de transfert thermique et de flux de fluide, plutôt que pour des problèmes d'analyse [4].

I.2.2 L'approche par la méthode des éléments finis (FEM)

Dans cette approche, le domaine entier est divisé en petits éléments en nombre fini d'où l'appellation « éléments finis ». Au-dessus de chaque élément, le comportement est décrit par des équations différentielles. Tous ces petits éléments sont assemblés. En prenant en considération les conditions de continuité et d'équilibre entre les éléments voisins, ainsi que les conditions de frontières du problème réel, une solution unique du système global peut être obtenue par des équations algébriques linéaires. La FEM est très appropriée aux problèmes pratiques de technologie à géométries complexes. Pour améliorer sensiblement les calculs,

nous devons augmenter le nombre composant le maillage. Pour illustrer l'approche de la FEM, les étapes sont récapitulées comme suit [7] :

- 1. Diviser le domaine en petits éléments en nombre fini. Ces éléments peuvent être triangulaires ou quadrilatéraux (pour des problèmes bidimensionnels), ou tétraédriques, ou hexaédriques, voire prismatiques (pour des problèmes tridimensionnels).
- 2. Mettre le problème en équation.
- 3. Mettre en œuvre l'implémentation numérique de la méthode des éléments finis.
- 4. Assembler le système d'équations pour une solution globale du domaine.
- 5. Appliquer les conditions aux limites.
- 6. Résoudre le système global des équations linéaires pour déterminer les déplacements à chaque point nodal.

I.2.3. L'approche par la méthode des éléments de frontière (BEM)

Dans cette approche, la frontière qui délimite le domaine est divisée en un nombre fini de petits segments d'où l'appellation d'éléments de frontière. Les équations induites sont transformées en identités intégrales (**BIM**). Un système d'équations algébriques linéaires émerge, ce qui nous permet d'obtenir une solution unique. La méthode peut être facilement adaptée aux problèmes géométriquement complexes [15].

Dans ce qui suit il est utile de récapituler les étapes essentielles qui forment cette approche [3]:

- 1. Diviser en petits segments la frontière qui délimite le domaine.
- 2. Formuler le problème et écrire les équations qui en découlent, en utilisant les fonctions de forme pour décrire la géométrie et les variables au-dessus de chaque élément. Ces fonctions de forme peuvent être linéaires, quadratiques ou autres, puisque les intégrations analytiques ne sont pas adéquates à l'intégration des fonctions complexes, pour une efficacité, rapidité et simplification des calculs.
- 3. Rechercher la solution fondamentale, applicable à n'importe quelle géométrie et basée sur l'application d'une charge ponctuelle à un milieu infini (appelée la solution de Kelvin). La solution fondamentale est de l'ordre de $1/r$, r est la distance physique entre le point d'application de la charge p appelé point de charge ou point source et n'importe quel autre point sur la frontière Q appelé point du champ ou point courant. L'intégration numérique est

effectuée en utilisant la technique de quadrature de gauss. Les réarrangements spécifiques sont nécessaires pour intégrer les limites singulières quand les points nodaux sont très près les uns des autres, ou le point de départ de la lecture p coïncide avec le point Q de la frontière. C'est parce que la solution fondamentale contient des limites de l'ordre $(1/r)$. En additionnant les intégrales au-dessus de chaque élément, toute l'intégrale extérieure peut être évaluée. La solution se présente sous forme matricielle. Le procédé d'intégration avec le point de départ de lecture p balaye tous les points placés sur la frontière.

-4. Employer le théorème de réciprocité du travail ou théorème de Maxwell-Betti, qui énonce que si on considère deux états d'équilibre d'un même système (a) et (b), le travail des efforts extérieurs réels dans un champ de déplacement virtuel est égal au travail des efforts extérieurs virtuels dans le champ de déplacement réel autrement dit, le travail d'un système de forces $F_p^{(a)}$ dans le déplacement produit par le système de forces $F_p^{(b)}$ est égal au travail du système de forces $F_p^{(b)}$ dans le déplacement produit par le système de forces $F_p^{(a)}$.

Nous obtiendrons l'équation suivante [4] :

$$\sum_p F_p^{(a)} u_p^{(b)} = \sum_p F_p^{(b)} u_p^{(a)} \quad (I.14)$$

Où p est un point quelconque du domaine avec une force appliquée F . Si les forces externes sont confinées à l'extérieur de (s), alors l'équation intégrale peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_s t_i^{(a)} u_i^{(b)} ds = \int_s t_i^{(b)} u_i^{(a)} ds \quad (I.15)$$

Où $i = 1, 2, 3$ (correspond aux coordonnées cartésiennes x, y, z) et le vecteur de traction est défini par $t_i = \sigma_{ij} n_j$, avec n_j qui représente la normale d'unité à l'extérieur de la surface.

-5. Choisir le système (a) pour définir la solution fondamentale qui est connue et le système (b) pour définir le problème réel qui est inconnu. Le résultat en est une équation intégrale de frontière reliant les déplacements et les contraintes sur la frontière.

Le point source p est d'abord placé au point 1 qui représente un ensemble d'équations reliant toutes les variables de N sur la frontière, puis le point source p est placé au point 2, rapportant un autre ensemble d'équations, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les ensembles de N équations soient formés. Le système résultant des équations linéaires est de la forme suivante [5]:

$$[A]\{u\} = [B]\{t\} \quad (I.16)$$

-6. Appliquer les conditions limites et, en réarrangeant le système d'équations, nous aurons un rapport linéaire entre le déplacement et la contrainte (tel qu'une force appliquée a un ressort). En réarrangeant les équations linéaires telles que toutes les variables inconnues soient du côté gauche et toutes variables connues soient du côté droit [3-6]:

$$[A]\{x\} = \{f\} \quad (\text{I.17})$$

-7. Résoudre le système global des équations linéaires. La matrice $[A]$ est antisymétrique et tous ses coefficients sont différents de 0.

-8. D'autres informations additionnelles à déterminer, peuvent être incluses dans le calcul, tel que des valeurs de déplacements et de tractions (ou efforts) aux points internes.

I.3 Eléments isoparamétriques et intégration numérique (Approximation par éléments frontières)

Nous allons traiter des techniques d'approximation grâce auxquelles nous pouvons remplacer un système continu par un système discrétisé équivalent.

Nous commençons par décrire l'approximation nodale d'une fonction sur un domaine Δ , pour introduire ensuite la notion d'approximation nodale par sous-domaine sur la frontière. Pour cela nous présentons la technique de segmentation d'un domaine en éléments de frontières. Les concepts de transformation géométrique et d'éléments de référence simplifient la construction des fonctions d'interpolation pour des éléments de formes compliquées [21]. Chaque nouvel élément de la famille est caractérisé par un nombre toujours croissant de nœuds et donc une amélioration de la précision. La tendance est de développer de nouvelles approches de manière à réduire le nombre d'éléments nécessaires à l'obtention d'une bonne solution.

Pour qu'un petit nombre d'éléments représente une géométrie relativement complexe, analogue aux problèmes réels et non académiques, des éléments de forme simple, triangulaires ou rectangulaires, ne suffisent plus. Aussi ce chapitre est-il consacré au problème de la déformation de ces formes simples en d'autres formes plus générales.

Nous développons ensuite la technique générale de construction des fonctions d'interpolation sur un élément de référence. La transformation d'un élément de référence en élément réel est caractérisée par la matrice jacobéenne [5].

I.3.1 Définition de la géométrie des éléments

I.3.1.a Nœuds géométriques

Nous choisissons un ensemble de n points, sur le domaine Δe , qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points, appelés nœuds géométriques, peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation. Puis nous remplaçons le domaine Δe par un ensemble d'éléments E_e de formes relativement simples. Chaque élément E_e doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à cet élément, c'est-à-dire qui sont situés sur E_e et sur sa frontière [7].

I.3.1.b Règles de partition du domaine en éléments

La partition du domaine Δe en éléments E_e doit respecter les deux règles suivantes [8]:

-a) Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments.

Les frontières entre éléments peuvent être des points, des courbes ou des surfaces :

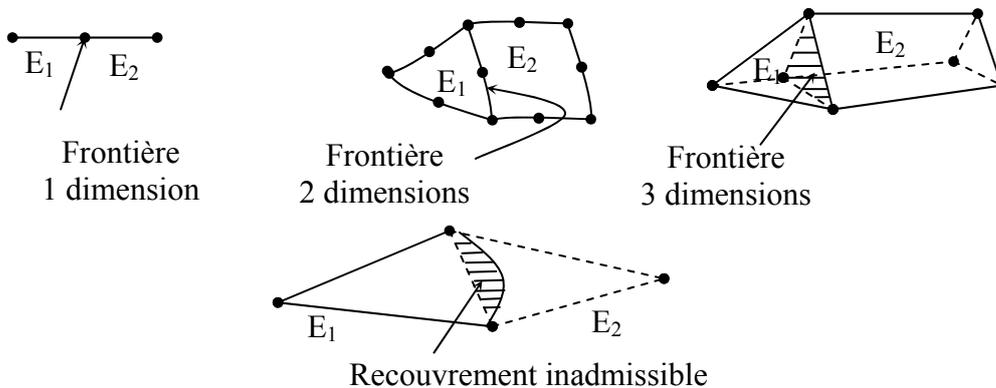


Figure I.2 : le recouvrement exclut entre les éléments

-b) L'ensemble de tous les éléments E_e doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné Δe . Les « trous » entre éléments sont exclus.

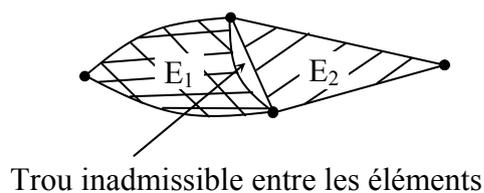


Figure I.3: Cavité exclue entre deux éléments

Lorsque la frontière du domaine Δ est constituée par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur est inévitable. Cette erreur est appelée erreur de discrétisation géométrique. Elle peut être réduite en diminuant la taille des éléments, ou en utilisant des éléments à frontières plus complexes:

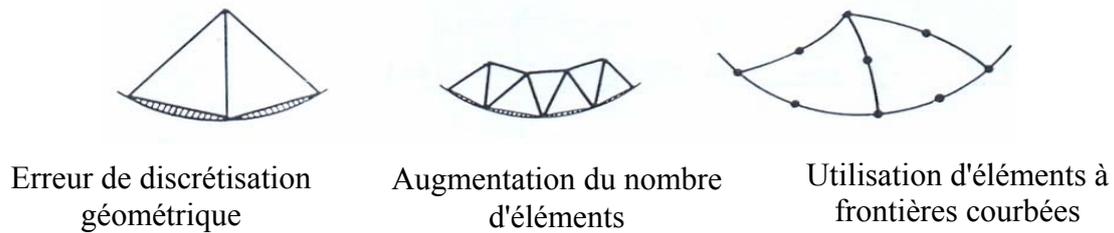


Figure I.4

Les deux règles précédentes sont respectées si les éléments sont construits de la manière suivante :

- Chaque élément est défini de manière unique à partir des coordonnées des nœuds géométriques situés sur cet élément. Le plus souvent ces nœuds géométriques sont situés sur les frontières de l'élément et sont communs à plusieurs éléments.

- La frontière d'un élément à deux ou trois dimensions est formée par un ensemble de courbes ou de surfaces. Chaque portion de frontière doit être définie de manière unique à partir des coordonnées des seuls nœuds géométriques situés sur cette portion de frontière. Ainsi les portions de frontière communes à deux éléments sont définies de manière identique pour l'un ou l'autre élément.

I.3.1.c Formes d'élément classiques

Nous présentons maintenant les formes de quelques éléments classiques correspondant à des domaines à une, deux ou trois dimensions. Chaque élément est identifié par un nom précisant sa forme ainsi que par le type de courbe ou de surface qui en forme la frontière. De plus nous donnons le nombre de nœuds géométriques nécessaires pour définir l'élément [8].

I.3.1.c-1 Eléments à une dimension

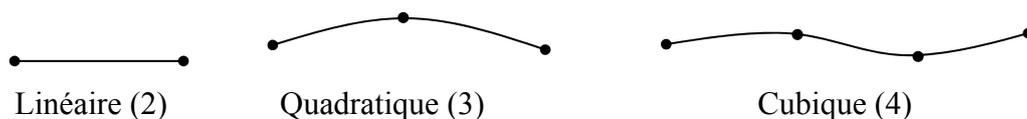


Figure I.5 Eléments à une dimension

I.3.1.c-2 Eléments à deux dimensions

Ce sont des triangles ou quadrilatères dont les côtés sont des courbes polynomiales du 1^{er}, 2^e ou 3^e degré.

• Eléments triangulaires:



Figure I.6 Eléments triangulaires

• Eléments quadrilatéraux :

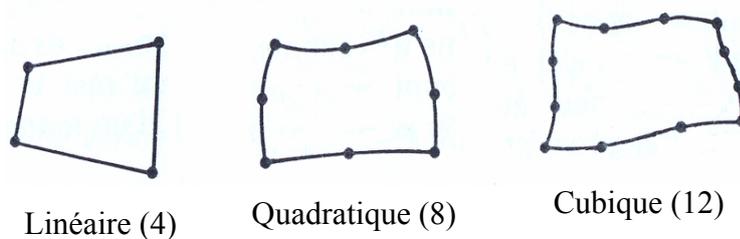


Figure I.7 Eléments quadrilatéraux

I.3.1.c-3 Eléments à trois dimensions

Ce sont des tétraèdres, hexaèdres ou prismes dont les faces sont des surfaces polynomiales du 1^{er}, 2^e ou 3^e degré.

• Eléments tétraédriques :

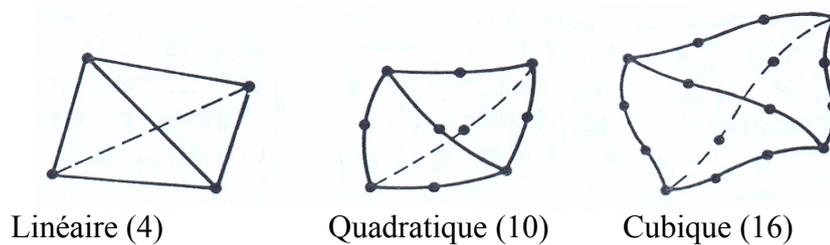


Figure I.8 Eléments tétraédriques

•Eléments hexaédriques

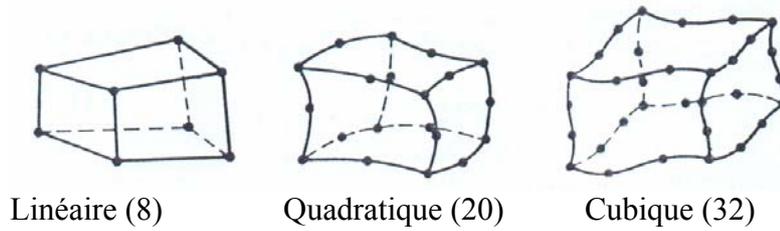


Figure I.9 Eléments hexaédriques

•Eléments prismatiques

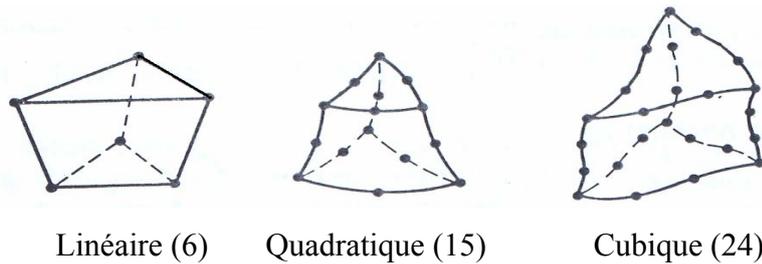
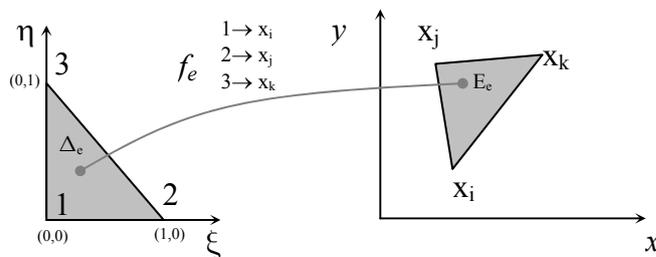


Figure I.10 Eléments prismatiques

I.3.2 Eléments de références

Soulignons qu'un même élément de référence Δ_e (par exemple un triangle à 3 nœuds) se transforme en éléments réels E_e de même type (triangles à 3 nœuds) par des transformations f_e différentes:

Pour simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'élément de référence. Un élément de référence Δ_e est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel E_e par une transformation géométrique Δ_e . Prenons le cas d'un triangle [8]:



Élément de référence Élément de frontière ou élément réel E_e

Figure I.11 Élément de référence Δ_e et élément de frontière E_e

Les éléments "uni", "bi" ou tridimensionnels seront transformés en éléments courbes selon le schéma présenté sur les figures I.11, I.12 et I.13.

Sur ces figures, nous montrons que les coordonnées ξ, η, ζ (ou L_1, L_2, L_3, L_4 peuvent être transformées en un nouvel ensemble de coordonnées curvilignes dans un système cartésien de coordonnées x, y et z .

Les éléments bidimensionnels peuvent être transformés, non seulement en d'autres éléments bidimensionnels courbes, mais encore en éléments tridimensionnels comme sur la figure I.12 où des éléments plats sont déformés dans l'espace à trois dimensions.

Cette méthode s'applique de manière générale, à condition qu'il existe une application bijective entre coordonnées cartésiennes et curvilignes, c'est-à-dire que les relations de transformation puissent s'écrire sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \text{ ou } f \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.18})$$

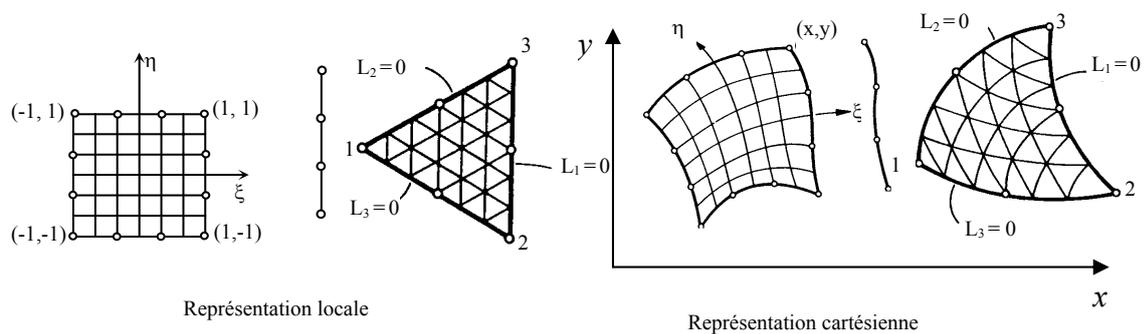


Figure I.12 Transformation bidimensionnelle de certains éléments

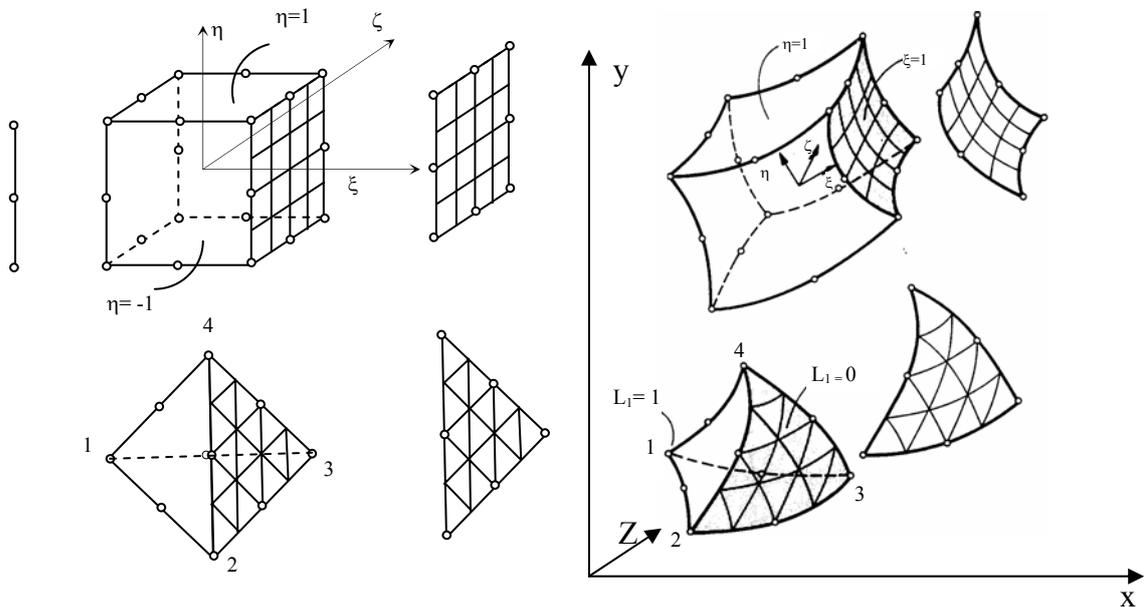


Figure I.13 Transformation tridimensionnelle de certains éléments

Une fois de telles relations entre coordonnées déterminées, les fonctions de forme sont écrites dans un système de coordonnées locales, puis par transformation adéquate, les propriétés de l'élément sont établies dans le système de référence global.

I.3.3 Fonctions de forme et transformation de coordonnées

Appelée aussi dans certain document fonction de transformation, c'est une méthode très simple pour déterminer les formules de transformation des coordonnées. Elle consiste à utiliser les fonctions de forme « standard » déjà calculées pour représenter les variations de la fonction inconnue. L'idée d'utiliser des fonctions de forme de l'élément pour en déduire les coordonnées curvilignes, dans le contexte de la méthode des éléments frontières ou finis, semble avoir été introduite pour la première fois par **Taig**. Cette première application utilisait les fonctions de base linéaires dans un quadrilatère. **Irons** a généralisé leurs utilisations à d'autres types d'éléments [3-7,8].

Pour chaque élément nous écrivons:

$$x = N'_1 x_1 + N'_2 x_2 + N'_3 x_3 + \dots = N' \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = N' x \quad (\text{I.19})$$

$$y = N'_1 y_1 + N'_2 y_2 + N'_3 y_3 + \dots = N' \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = N' y \quad (\text{I.20})$$

$$z = N'_1 z_1 + N'_2 z_2 + N'_3 z_3 + \dots = N' \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = N' z \quad (\text{I.21})$$

Où les N' sont des fonctions de forme. Ce sont habituellement des polynômes appelés fonctions de transformation géométrique exprimée dans un système de coordonnées locales. Nous obtenons alors immédiatement une relation de la forme recherchée. De plus, les points de coordonnées x_1, y_1, z_1 , se retrouvent aux points appropriés de la frontière de l'élément car, d'après leurs définitions générales, nous savons que les fonctions de forme prennent la valeur 1 au nœud associé et la valeur 0 en tout autre nœud. Ces points constituent donc les nœuds à priori.

A tout système de coordonnées locales correspondra un système global de coordonnées cartésiennes et en général un seul. Cependant nous verrons que des cas de non-unicité peuvent se produire, parfois avec des distorsions violentes.

Remarque:

- Les éléments de référence sont parfois appelés éléments parents ou réels [5].
- La transformation géométrique f peut être interprétée comme un simple changement de variables $x \rightarrow \xi$.
- ξ peut également être considéré comme un système de coordonnées locales lié à chaque élément.
- Les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolation engendrés sont confondus d'où l'appellation d'éléments isoparamétriques. Les fonctions de transformation géométrique $N'(\xi)$ et les fonctions d'interpolation $N(\xi)$ sur l'élément de référence ont les mêmes propriétés. Les fonctions d'interpolation définissent la géométrie et les grandeurs inconnues. De tels éléments sont appelés isoparamétriques.
- Chaque élément est engendré de façon unique.

I.3.4 Stratégie d'intégration

La stratégie d'intégration est également un facteur important dans la qualité des résultats. Il existe deux stratégies : l'une pour les intégrales singulières et l'autre pour les intégrales régulières. Ces stratégies diffèrent en fonction du type d'élément.

Nous remarquerons que, concernant les calculs 3D, les quadrangles offrent beaucoup plus de points d'intégration en particulier dans le cas de l'intégration régulière. Ainsi, de ce point de vue il est conseillé d'utiliser ce type d'élément [3-6].

Nous remarquerons également que le nombre de points d'intégration à prendre en compte pour les intégrations singulières dépend de la méthode de régularisation utilisée. Une méthode régularisée nécessite moins de points qu'une méthode non régularisée.

Nous aurons besoin de certaines transformations pour les calculs intégraux. Pour arriver à nos fins nous aurons besoin de :

- Premièrement : déterminer les dérivées globales en fonction des dérivées locales, étant donnée que, N_i est exprimée en fonction de coordonnées curvilignes locales.

- Deuxièmement : exprimer en fonction des coordonnées locales, l'élément de volume ou de surface sur lequel l'intégration s'effectue, en modifiant de manière appropriée les bornes d'intégration.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f[x(\xi)] J(\xi) d\xi \quad \text{Avec } J(\xi) = \frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi} \quad (\text{I.22})$$

Pour une intégrale en deux dimensions la transformation sera :

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{I.23})$$

Avec :

$$\begin{aligned} J(\xi, \eta) &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

Considérons, par exemple, le triplet de coordonnées locales ξ, η, ζ et le triplet correspondant de coordonnées globales x, y, z . Selon les règles usuelles de calcul des dérivées partielles nous écrivons en particulier la dérivée par rapport à ξ :

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (\text{I.25})$$

En faisant le même calcul pour les dérivées relatives aux deux autres coordonnées et en écrivant le résultat sous forme matricielle, nous obtenons:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{I.26})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{I.27.a}) \quad \text{Avec} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{I.27.b})$$

Dans l'expression ci-dessus, le membre de gauche peut être calculé, car les fonctions N_i ont été exprimées en fonction de coordonnées locales. De plus, comme nous disposons de formules explicites donnant x, y, z en fonction de coordonnées curvilignes [équations : (I.19), (I.20) et (I.21)], nous pouvons écrire explicitement la matrice J en fonction de coordonnées locales. Cette matrice s'appelle la matrice jacobéenne.

Pour retrouver les dérivées par rapport au système de coordonnées globales, nous inversons J et nous écrivons:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (\text{I.28})$$

En utilisant pour définir la transformation de coordonnées les fonctions de forme N (qui, comme nous l'avons vu, ne seront identiques aux fonctions de forme élémentaires que dans le cas d'éléments isoparamétriques) nous obtenons [8]:

$$J = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (\text{I.29})$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{I.30})$$

Afin d'effectuer la transformation des variables et du domaine d'intégration, nous utiliserons une méthode de calcul classique qui fait intervenir le déterminant de J. En particulier, selon cette méthode, l'élément de volume s'écrit:

$$dx \, dy \, dz = \det J \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

Ce type de transformation est valable quel que soit le nombre de coordonnées utilisées.

Supposons que nous puissions trouver l'inverse de J, le calcul des propriétés de l'élément se ramène alors à un calcul d'intégrales du type :

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f[x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)] J(\xi, \eta, \zeta) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (\text{I.31})$$

Les coordonnées curvilignes forment un système direct orthonormé. En effet l'intégrale est alors calculée dans un prisme droit et non dans un domaine déformé de forme compliquée, ce qui nous donne des limites simples d'intégration. De même, dans le cas de problèmes à une ou deux dimensions, nous obtenons des intégrales simples ou doubles avec des bornes d'intégration simples.

Le déterminant de la matrice jacobéenne est simplement dénommé « le jacobéen » dans la littérature. Il est souvent écrit sous la forme:

$$\det J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \quad (I.32)$$

I.3.4 -a Intégrales de surface

Des intégrales de surface apparaissent fréquemment en élasticité et dans d'autres domaines d'application.

$$A = \int f(x, y) ds \quad (I.33)$$

En général, l'élément d'intégration ds se trouvera sur une surface où, l'une des coordonnées que nous pouvons désigner par ξ , est constante.

La méthode la plus pratique pour calculer l'expression ci-dessus est de considérer ds comme un vecteur orienté selon la normale à la surface. Dans le cas de problèmes à trois dimensions, nous l'écrivons sous la forme d'un produit vectoriel:

$$ds = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\xi d\eta \quad (I.34)$$

Et, après substitution, nous intégrerons le domaine $-1 \leq \xi \leq 1$ et $-1 \leq \eta \leq 1$.

Dans le cas de problèmes à deux dimensions, nous obtenons un élément d'arc ds qui s'écrit simplement:

$$ds = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} d\xi \quad (I.35)$$

I.3.4 -b Intégration numérique pour un élément unidimensionnel

Nous allons voir que pour une étude d'un problème relativement simple de contrainte axisymétrique (symétrie de révolution), l'intégration exacte des coefficients des matrices élémentaires peut se révéler compliquée. Pour des éléments déformés plus complexes, que nous envisageons maintenant, l'intégration numérique s'impose.

Pour calculer numériquement l'intégrale d'une fonction, nous pouvons procéder de différentes manières [4-8].

I.3.4 –c Formules de quadrature de Newton-Cotes

Dans la méthode la plus directe, les points où la fonction doit être calculée sont définis à priori (habituellement ils sont équirépartis); nous faisons passer un polynôme par les valeurs de la fonction en ces points et nous l'intégrons avec exactitude (**Fig I.14**) [8].

Comme « n » valeurs de la fonction sont nécessaires pour définir un polynôme de degré n - 1, l'erreur sera de l'ordre $O(h^n)$ où h est la taille de l'élément. Nous obtenons ainsi les formules de quadrature classiques de Newton-Cotes:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \\
 &= \sum_1^n H_i f(\xi_i)
 \end{aligned}
 \tag{I.36}$$

Pour l'intervalle d'intégration [- 1, + 1] représenté sur les (**Fig I.12 et Fig I.13**) et par exemple, pour n = 2, nous obtenons la formule des trapèzes:

$$I = f(-1) + f(1)
 \tag{I.37}$$

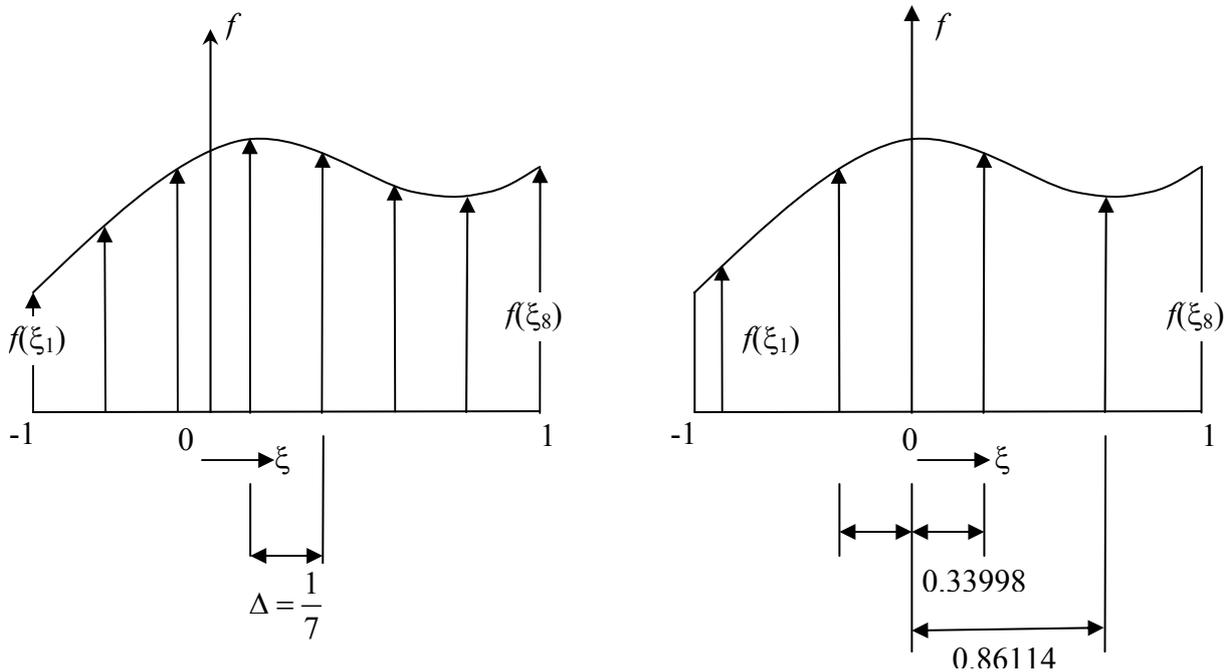


Figure I.14 : Formule de quadrature de **Newton-Cotes** en(a) et de **Gauss** en (b)

Les deux formules intègrent exactement tout polynôme de degré inférieur ou égal à cette erreur d'ordre $O(h^8)$.

Pour n=3, la méthode Simpson, ou règle des tiers donne:

$$I = \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(1)] \quad (\text{I.38})$$

Pour n=4

$$I = \frac{1}{4} [f(-1) + 3f(-\frac{1}{3}) + 3f(\frac{1}{3}) + f(1)] \quad (\text{I.39})$$

Remarque : Les termes « quadrature » et « intégration numérique » sont synonymes.

I.3.4 –d Formules de quadrature de Gauss

Si au lieu de fixer à priori la position des points d'interpolation, nous les considérons comme des inconnues qui doivent être déterminées afin d'obtenir la meilleure précision possible, nous pourrions accroître la précision obtenue pour un nombre donné de points d'interpolation.

En effet, considérons à nouveau l'expression:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \\ &= \sum_1^n H_i f(\xi_i) \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

et supposons que nous désirons encore obtenir une représentation polynomiale; il est facile de voir qu'avec n points nous aurons 2 n inconnues (H_i et ξ_i) et que nous pourrions définir un polynôme de degré $2n - 1$ et l'intégrer avec exactitude (**Fig I.14(b)**) L'erreur obtenue sera alors d'ordre $O(h^{2n})$.

Le système d'équations est difficile à résoudre, mais nous pouvons montrer, par des calculs mathématiques, que la solution peut en être obtenue explicitement à l'aide des polynômes de **Legendre**. C'est pourquoi cette méthode, dans ce cas particulier, est souvent connue sous le nom de formule de quadrature de **Gauss-Legendre** [8, 20].

Nous présentons dans le tableau 1 (Annexe A) les abscisses et les coefficients de pondération des formules d'intégration de Gauss.

Dans le cas de la méthode des éléments frontières, des calculs complexes sont nécessaires pour déterminer les valeurs de f, fonction à intégrer. C'est pourquoi, la méthode de Gauss, qui nécessite le plus petit nombre d'évaluations de f, est parfaitement adaptée à ce cas. Nous l'utiliserons donc exclusivement [8].

D'autres expressions sont possibles pour le calcul d'intégrales du type :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 w(\xi) f(\xi) d\xi \\
 &= \sum_1^n H_i f(\xi_i)
 \end{aligned}
 \tag{I.41}$$

Ou

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{g=1}^G f(\xi_g) w_g$$

Pour deux variables indépendantes

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{m=1}^{G_m} \sum_{n=1}^{G_n} f(\xi_m, \xi_n) w_n w_m$$

Dans le cas de formes données de $w(\xi)$, l'intégrale à évaluer avec exactitude jusqu'à ce qu'on atteigne un ordre de précision pour le développement polynomiale de $f(\xi)$.

I.3.4 –e Intégration numérique pour un domaine rectangulaire et un prisme droit

La méthode la plus simple de calcul de l'intégrale est:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta
 \tag{I.42}$$

Elle consiste à évaluer tout d'abord l'intégrale intérieure avec η constant, soit:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j, \eta) \\
 &= \psi(\eta)
 \end{aligned}
 \tag{I.43}$$

En calculant de la même manière l'intégrale extérieure, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 \psi(\eta) d\eta \\
 &= \sum_{i=1}^n H_i \psi(\eta_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n H_i \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j, \eta_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\xi_j, \eta_i)
 \end{aligned}
 \tag{I.44}$$

De même, dans le cas d'un prisme droit, nous avons:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \\
 &= \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_i H_j H_m f(\xi_i, \eta_j, \zeta_m)
 \end{aligned}
 \tag{I.45}$$

Dans les expressions précédentes, le nombre de points d'intégration est supposé le même dans chaque direction. Cela n'est évidemment pas nécessaire et il est parfois avantageux d'utiliser des nombres différents de points dans chaque direction d'intégration.

I.3.4 -f Intégrale elliptique

Certaines des fonctions contiennent une limite singulière de la forme $1/r$ avec $r=0$, ce qui constitue une forme indéterminée. Ce genre d'intégrale ne peut pas être évalué avec exactitude en utilisant la quadrature gaussienne ordinaire de l'équation. Même si un grand nombre de points gaussiens sont employés pour de telles intégrales, il y a cependant, une forme logarithmique appropriée de quadrature gaussienne comme suit:

$$\int_0^1 f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta = \sum_{g_l=1}^{G_l} f(\eta_{g_l}) w_{g_l}
 \tag{I.46}$$

Où G_l est le nombre global de l'ensemble des points d'intégrations logarithmiques gaussiens avec η_{g_l} et w_{g_l} sont respectivement les coordonnées logarithmiques gaussiennes et les fonctions de poids. A noter que les limites d'intégration de 0 à 1, exigent une transformation linéaire aux limites -1 à +1. L'utilisation des arrangements gaussiens d'intégration est répandue dans des programmes machine en raison de leur polyvalence et précision. Le livre de Stroud et Secrest [1966] fournit une liste très complète de formules, de coordonnées et de fonctions gaussiennes de poids. L'annexe A montre une liste d'une gamme de coordonnées et de fonctions gaussiennes de poids (jusqu'à 20 chiffres précis) ce qui est suffisant pour les buts de notre travail [32].

I.3.4 -g Ordre de précision de l'intégration numérique

Lorsque nous utilisons l'intégration numérique, une erreur supplémentaire est introduite dans les calculs et le premier réflexe consiste à la réduire autant que possible. Évidemment, le coût de l'intégration numérique peut alors devenir très important, et de fait, dans les anciens programmes de calculs, l'intégration numérique des caractéristiques des éléments consommait un temps de calcul comparable à la résolution du système linéaire.

Il est donc important de déterminer:

-> 1 ◀ La précision de l'intégration numérique minimale conduisant à la convergence.

-> 2 ◀ La précision de l'intégration numérique nécessaire à la conservation de l'ordre de convergence obtenu dans le cas d'une intégration exacte.

Il est parfois pénalisant d'utiliser des intégrations numériques d'ordre de précision plus élevé que celui de la condition ▶ 2 ◀ En effet, il n'est pas rare que les erreurs dues à la discrétisation soient compensées par les erreurs dues à l'intégration numérique [15].

I.3.4 –h Ordre de précision minimale de l'intégration pour assurer la convergence

Dans les problèmes où une fonction d'énergie (ou des intégrales équivalentes de type Galerkin) est à la base de la définition de l'approximation, la convergence ne se produit qu'à condition que toutes les dérivées d'ordre m soient exactement représentées. Dans le cas présent, pour $m = 1$, apparait la nécessité de l'intégration exacte des valeurs constantes de G

dans les intégrales de la forme $\int_V f dV$. Ainsi le volume de l'élément $\int_V dV$ doit être calculé

avec précision pour que la convergence soit assurée. Dans le cas de coordonnées curvilignes,

l'expression $\int_V \det|J| d\zeta d\eta d\xi$ doit être intégrée avec précision.

Cependant, même cette simple condition est parfois trop restrictive et nous remarquons qu'il y

a convergence de l'approximation si l'intégrale $\int_V d\zeta d\eta d\xi$ est correctement approchée. En

fait, une précision de l'intégration numérique d'ordre $O(h)$ suffit à la convergence. Nous verrons qu'un ordre de précision aussi faible peut aussi être un mauvais choix pratique dans le traitement de problèmes axisymétriques.

I.3.4 –i Ordre de précision de l'intégration pour conserver l'ordre de convergence

Dans le cas général, l'approximation par éléments frontières de l'énergie ainsi que d'autres formes intégrales dans les approximations de type Galerkin, est à $2(p - m)$ près, où p est le degré du polynôme et m l'ordre maximal des dérivées intervenant dans les expressions concernées.

Donc, dès lors que l'intégration approchée est de l'ordre $2(p - m)$, elle entraînera une erreur d'ordre inférieur à $O(h^{2(p-m)+1})$. Dans le cas de coordonnées curvilignes, si h représente la dimension de l'élément, la même règle s'applique. Pour des problèmes de classe C_0 (c'est-à-dire dans le cas où $m = 1$), les formules d'intégration doivent être telles que l'erreur soit de:

- $o(h)$, pour des éléments linéaires avec $p = 1$;

- $o(h^3)$, pour des éléments quadratiques avec $p = 2$;

- $o(h^5)$, pour des éléments cubiques avec $p = 3$.

Nous utiliserons plus tard ces résultats dans notre application [6-8].

Remarque

Dans notre cas nous utilisons des éléments à une ou deux dimensions, car le maillage sera effectué sur la frontière. S'il est volumique il sera effectué sur la surface. S'il est surfacique il sera effectué sur le bord de la surface.

Le résultat final d'une approximation par éléments frontières dans le cas de problèmes linéaires est un système d'équations du type $Kx + F = 0$, dans lesquels les conditions aux limites doivent être prises en considération et qui donnent, après résolution, une solution approchée du problème physique réel. La solution est unique, la matrice K du système doit être non singulière. Nous avons supposé à priori qu'il en était ainsi en cas d'intégration exacte et, en général, cela est bien vérifié. Lorsque nous utilisons des formules d'intégration numérique d'ordre de précision trop faible, la matrice peut devenir singulière, ce qui rend le choix de l'ordre parfois inadapté. S'il est facile de montrer comment une matrice K peut devenir singulière dans certaines circonstances, il est plus difficile de prouver le contraire.

En cas d'intégration numérique, nous substituons les intégrales par des sommes pondérées de relations linéaires entre les paramètres nodaux x . Ces relations linéaires indépendantes constituent la base unique à partir de laquelle la matrice K est construite [3-6].

I.4 Problème potentiel en deux dimensions en BEM

Les problèmes potentiels dans le contexte de ce document sont des problèmes qui sont régis par une équation qui satisfait l'équation de Poisson ou de Laplace ((I.12) et (I.13)). Les exemples de problèmes potentiels sont : le flux d'un fluide idéal, torsion des barres, diffusion et conduction équilibrée de la chaleur, etc. La recherche sur des problèmes potentiels, ou sur n'importe quel autre problème régi par l'équation de Laplace ou de Poisson subit le même traitement. L'étude de cette partie du chapitre est primordiale, car la formulation analytique et numérique des problèmes potentiels suit la même démarche que la problématique de l'élasticité, étant donné qu'il est beaucoup plus facile de saisir la formulation en raison du nombre plus petit de variables utilisées [32].

I.4.1 Formulation analytique

Les équations représentant l'équation de Laplace et l'équation de Poisson en deux dimensions peuvent être écrites dans l'ordre suivant [3-6 ; 32]:

$$\Delta \{u\} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \{u\} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{I.47})$$

$$\Delta \{u\} + b = 0 \quad (\text{I.48})$$

∇^2 est l'opérateur de Laplace, u est la fonction potentielle, x et y représentent les axes de coordonnées cartésiennes. Il est à noter que le côté droit de l'équation de Poisson est différent de zéro à la différence de l'équation de Laplace.

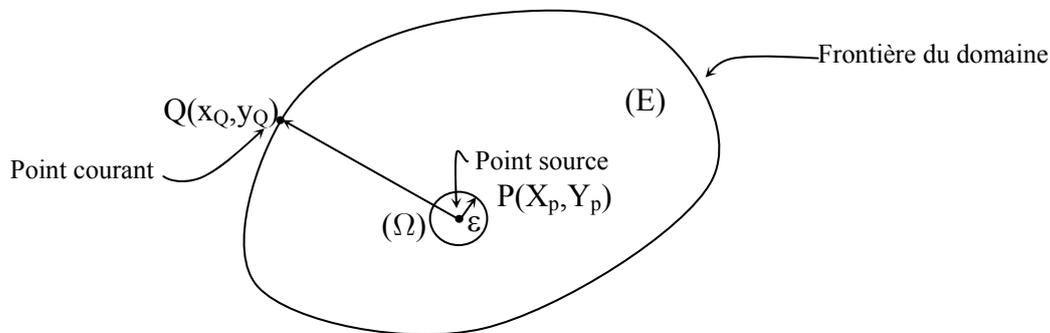


Figure I.15 : Domaine d'étude en 2D

Pour pouvoir résoudre toute équation, nous devons trouver la fonction complémentaire et l'intégrale particulière. La solution fondamentale peut être considérée comme une forme de fonction complémentaire qui satisfait l'équation (I.47). Pour arriver à la solution unique réelle d'un problème particulier, nous devons prendre en considération des données physiques pour arriver à la solution. Considérons la précédente condition remplie. La figure I.15 montre le domaine arbitraire où la solution est cherchée. Dans ce domaine de solution, supposons qu'il y a un point intérieur p , habituellement appelé le point source ou charge, de coordonnées X_p et Y_p , et considérons n'importe quel point sur la frontière Q , habituellement appelé le point courant ou champ, avec comme coordonnées x_Q et y_Q . L'utilisation des majuscules pour les coordonnées indique un point fixe, tandis que les minuscules indiquent la séparation des variables [4-5].

La solution fondamentale de l'équation de Laplace qui est basée sur la solution tridimensionnelle d'un potentiel ou d'une source concentrée au point p , peut être facilement vérifiée comme suit :

$$\lambda(p, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \quad (\text{I.49})$$

Où $r(p, Q)$ est la distance euclidienne entre la source ponctuelle p et le point courant Q :

$$r = |r| = |y - x| \quad (\text{I.50})$$

$$r(p, Q) = \sqrt{(X_p - x_Q)^2 + (Y_p - y_Q)^2} \quad (\text{I.51})$$

A noter que la constante $1/2\pi$ est associée à la force du potentiel au point p , mais peut être considérée arbitraire dans le cas des hypothèses actuelles. A noter également que la solution fondamentale est singulière, car elle devient infinie pendant que la distance r approche de zéro (p coïncide avec Q). Cette singularité sera traitée plus tard.

Le principe d'une formulation d'éléments de frontières est de diminuer d'une dimension le problème. L'approche la plus simple à employer est la deuxième identité de Green. Dans ce théorème, nous admettons l'existence de deux fonctions mathématiques continues u et λ . Ces fonctions mathématiques ne sont pas choisies arbitrairement; u est le potentiel inconnu (température, déplacement) à un point quelconque, alors que λ est la solution fondamentale connue de l'équation de Laplace. L'application de la deuxième identité de Green à la transformation des deux fonctions permet de passer d'une intégrale surfacique dA en une intégrale curviligne dE . Nous obtenons :

$$\int_A (u \Delta \lambda - \lambda \Delta u) dA = \int_E \left(u \frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \right) dE \quad (\text{I.52})$$

Où n est la normale unitaire extérieure, $\partial/\partial n$ est la dérivée dans la direction de la normale extérieure. La fonction potentielle u , satisfait à la condition $\Delta u = 0$ dans chaque point du domaine, car les problèmes potentiels doivent par définition satisfaire à l'équation de Laplace.

La solution fondamentale λ , satisfait à la condition $\Delta \lambda = 0$ partout sur le domaine excepté au point p lui-même où elle est singulière. Pour traiter cette singularité, nous pouvons entourer le point p par un cercle très petit du rayon ε (voir fig.I.15) et examiner la solution

dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. En excluant ce petit cercle, la nouvelle surface est $A - A\varepsilon$ et la nouvelle frontière devient $E + E\varepsilon$, et l'équation (I.52) devient :

$$\int_{A-A\varepsilon} (u \Delta\lambda - \lambda \Delta u) dA = \int_{E+E\varepsilon} \left(u \frac{\partial\lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \right) dE \quad (I.53)$$

Dans la surface $A - A\varepsilon$, partout sur le domaine, Δu et $\Delta\lambda$ égalent 0, ce qui permet de transformer l'intégrale extérieure ($E - E\varepsilon$) en deux intégrales extérieures à savoir :

$$0 = \int_E \left(u \frac{\partial\lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \right) dE + \int_{E\varepsilon} \left(u \frac{\partial\lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \right) dE \quad (I.54)$$

Pour évaluer l'intégrale $E\varepsilon$ dans l'équation ci-dessus, il est commode d'employer un angle α en sens inverse des aiguilles d'une montre, qui permet la mesure de l'axe x des abscisses au point p, et remplacer $E\varepsilon$ par le produit $\varepsilon d\alpha$. La substitution suivante peut également être employée :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial n} = \frac{\partial\lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{r} (-1) = \frac{1}{2\pi r} \quad (I.55)$$

Dans l'intégrale $E\varepsilon$ nous prenons la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans le domaine de variation de α de 0 à 2π la deuxième intégrale de l'équation (1.54) devient :

$$\begin{aligned} \int_{E\varepsilon} \left(u \frac{\partial\lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \right) dE &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[u \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) - \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right] \varepsilon d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[u - (\varepsilon \ln \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} (2\pi u) \\ &= u \end{aligned} \quad (I.56)$$

En substituant ce résultat dans l'équation. (I.54) et en réarrangeant les termes résultants, nous obtiendrons l'équation suivante :

$$u(p) + \int_E K_1(p, Q) u(Q) dE(Q) = \int_E K_2(p, Q) \frac{\partial u(Q)}{\partial n} dE(Q) \quad (I.57)$$

L'équation ci-dessus s'appelle **équation intégrale de frontière (BIE)** et elle forme le point de départ pour la formulation numérique, à savoir :

$$K_1(p, Q) = \frac{\partial \lambda(p, Q)}{\partial n} \quad (I.58)$$

$$K_2(p, Q) = \lambda(p, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \quad (I.59)$$

K_1 et K_2 constituent la solution fondamentale

Pour que l'équation intégrale frontière soit appliquée uniquement sur la frontière, nous devons déplacer le point de départ de lecture intérieure p qui devient P à la frontière, et qui a comme conséquence l'équation suivante :

$$C(P) u(P) + \int_E K_1(P, Q) u(Q) dE(Q) = \int_E K_2(P, Q) \frac{\partial u(Q)}{\partial n} dE(Q) \quad (I.60)$$

La fonction $C(P)$ peut être calculée en entourant le point P de frontière par un petit cercle de rayon ε et en prenant chaque limite dans l'équation (I.60) pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cependant, nous montrerons plus tard que la limite $C(P)$ ne doit pas être calculée explicitement. Elle peut être obtenue indirectement en utilisant quelques considérations physiques. Maintenant, examinons la signification physique de l'équation BIE (I.60). C'est une équation intégrale qui relie les variables de frontières du problème réel que nous essayons de résoudre (u et $\frac{\partial u}{\partial n}$), en une solution fondamentale qui est applicable à n'importe quel point du domaine et de n'importe quelle forme K_1 et K_2 (solutions fondamentales). Ce ci nous permet de relier des variables réelles aux solutions fondamentales théoriques, ce qui est aussi valable pour les problèmes élastostatiques.

Etablissons l'impacte d'un potentiel concentré à charge ponctuelle à un point donné p , sur n'importe quel autre point Q , à moins que p coïncide avec Q , et la solution devient singulière. Pour calculer la première solution $K_1(p, Q)$, la fonction $\lambda(p, Q) = K_2(p, Q)$ est différenciée de la normale d'unité au point Q :

$$\frac{\partial \lambda(p, Q)}{\partial n} = \frac{\partial \lambda}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial r} \left[\frac{\partial r}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial n} \right) + \frac{\partial r}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial n} \right) \right] \quad (I.61)$$

Là où les dérivées des coordonnées x et y respecte la normale unitaire extérieure n , nous avons :

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n} ; \quad n_y = \frac{\partial y}{\partial n} \quad (I.62)$$

et

$$\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x} = \frac{x_Q - X_p}{r(p, Q)} ; \quad \frac{\partial r(p, Q)}{\partial y} = \frac{y_Q - Y_p}{r(p, Q)}$$

Finalement nous avons :

$$K_1(p, Q) = \frac{-1}{2\pi r^2(p, Q)} \left[(x_Q - X_p) n_x + (y_Q - Y_p) n_y \right] \quad (I.63)$$

I.5 Méthode des Eléments frontières en élasticité 2D

L'analyse numérique de l'élasticité par la méthode des éléments de frontières nécessite la mise en œuvre d'outils de calcul de plus en plus puissants et performants. Dans ce qui va suivre, nous aurons à déterminer les qualités de la méthode en tant que technique de discrétisation mais aussi ses limites [4].

Cette partie du chapitre sera consacrée au traitement des problèmes par la mise en œuvre des équations de Laplace ou de Poisson. Nous pouvons citer à titre d'exemples les problèmes potentiels de flux d'un fluide, de torsion des barres, de diffusion et de conduction de la chaleur équilibrée, etc. Bien que cette partie de ce chapitre va porter sur des problèmes d'élasticité mécanique (le cas d'une plaque sous sollicitations). N'importe quel autre problème régi par l'équation de Laplace ou celle de Poisson peut être traité de la même manière.

I.5.1 Solutions élémentaires

Nous tenterons dans ce qui va suivre de donner un éclairage plus étendu sur la BEM, pour mieux apprécier les parties précédentes du chapitre.

En effet, il y a beaucoup de dispositifs communs entre les formulations potentielles et élastostatiques, en particulier au sujet de la manière où la frontière est discrétisée en éléments, ce qui permet leur intégration numérique. L'ensemble de ces intégrations aboutit à l'équation linéaire, qui reste à résoudre. Les problèmes d'élastostatique, sont cependant plus complexes car le nombre de variables est de quatre, puisque constitués par le déplacement des deux composants x et y et leurs contraintes, alors que les problèmes potentiels n'ont que deux variables qui représentent le potentiel [3-6].

Dans la littérature, il y a beaucoup de variétés dans la formulation de la BEM pour des problèmes élastostatiques. Il existe des approches directes, semi-directes et indirectes.

La différence principale entre ces approches est que les formulations directes emploient des quantités physiques réelles comme variables, tandis que les formulations indirectes utilisent des quantités factices.

Les ingénieurs trouvent les formulations directes plus faciles à appliquer parce qu'elles sont dérivées des équations de l'élasticité et de la loi de Hooke.

En outre, en 1977, Cruse a établi l'existence de l'unicité des solutions [6].

En outre, la preuve de l'existence et de l'unicité des solutions n'est pas énoncée ici parce que ces dernières sont maintenant bien établies (Cruse [1977]).

Toutes les solutions bidimensionnelles sont des approximations de solutions tridimensionnelles. Bien que la dérivation est par rapport aux deux directions x et y , la direction z n'est pas ignorée. Deux hypothèses sont faites à propos de l'épaisseur [4, 6]:

1- Effort plan: utilisé pour les géométries minces, où l'effort à travers l'épaisseur est négligé c'est-à-dire $\sigma_{zz} = 0$.

2- Contrainte plane : utilisée pour les géométries très épaisses, où la contrainte à travers l'épaisseur est négligée, alors que l'effort est différent de zéro c'est-à-dire $\varepsilon_{zz}=0$ alors que $\sigma_{zz}=cte$), ce qui fait que z tend ∞ .

Les variables utilisées dans les formulations sont :

u_x, u_y : Déplacements le long des axes x et y .

t_x, t_y : Effort de tractions dans les directions de x et de y .

σ_{xx}, σ_{yy} : Contraintes directes dans les directions de x et de y .

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$: Déformations directes dans les directions de x et de y .

$\sigma_{xy}, \varepsilon_{xy}$: Contraintes directes et de cisaillement.

σ_{zz} : Contraintes directes à travers l'épaisseur qui doit être nulle pour les contraintes planes et constantes pour les déformations planes.

ε_{zz} : La déformation directe à travers l'épaisseur doit être nulle pour les contraintes planes et constante pour les déformation plane.

I.5.2 Équations différentielles de Navier stocks

Pour arriver à une équation dans la quelle les déplacements sont pris comme variables, nous devons prendre en considération:

1. La loi de conservation de la masse.
2. La loi de Hooke (équations de contrainte-tension).
3. Les définitions du champ vectoriel du déplacement.

En considérant une petite section de dimension différentielle ∂x et ∂y , les équations d'équilibre d'effort s'écrivent comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y &= 0 \end{aligned} \tag{I.64}$$

En notation indicielle, elle s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \tag{I.65}$$

f_x et f_y sont les composants du vecteur force.

Les composants du champ vectoriel de déplacement sont définis comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

Avec

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} ; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} ; \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \tag{I.66}$$

En notation indicielle (I.66) s'écrit :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{I.67}$$

Il est à noter que, dans la définition de ε_{xy} , le facteur $\frac{1}{2}$ est sans importance et est parfois omis dans quelques manuels. Le rapports entre la contrainte et la déformation, selon la loi de

Hooke s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} + \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} + \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}(\sigma_{zz} + \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{xy}
 \end{aligned} \tag{I.68}$$

E : Représente le module de Young,

ν : Le coefficient de Poisson-Young

μ : est le module de cisaillement, défini comme suit :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{I.69}$$

Le remplacement de ($\varepsilon_{zz} = 0$) dans l'équation (I.68) donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)\sigma_{xx} + \left(\frac{-\nu(1+\nu)}{E}\right)\sigma_{yy} \\
 \varepsilon_{yy} &= \left(\frac{-\nu(1+\nu)}{E}\right)\sigma_{xx} + \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)\sigma_{yy} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{xy}
 \end{aligned} \tag{I.70}$$

Le remplacement de ($\sigma_{zz} = 0$) dans l'équation (I.68) pour la contrainte plane donne le résultat suivant:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \left(\frac{1}{E}\right)\sigma_{xx} + \left(\frac{-\nu}{E}\right)\sigma_{yy} \\
 \varepsilon_{yy} &= \left(\frac{-\nu}{E}\right)\sigma_{xx} + \left(\frac{1}{E}\right)\sigma_{yy} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{xy}
 \end{aligned} \tag{I.71}$$

En généralisant la loi de Hooke aux équations (I.68), pour réunir la contrainte et la déformation pour les efforts plans en employant de nouvelles propriétés nous aurons:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \left(\frac{1-\nu'^2}{E'} \right) \sigma_{xx} + \left(\frac{-\nu'(1+\nu')}{E'} \right) \sigma_{yy} \\ \varepsilon_{yy} &= \left(\frac{-\nu'(1+\nu')}{E'} \right) \sigma_{xx} + \left(\frac{1-\nu'^2}{E'} \right) \sigma_{yy} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2\mu'} \sigma_{xy}\end{aligned}\tag{I.72}$$

Avec :

$$E' = E ; \quad \nu' = \nu ; \quad \mu' = \mu ; \quad (\text{déformation plane}) \tag{I.73}$$

$$E' = \frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2} ; \quad \nu' = \frac{\nu}{1+\nu} ; \quad \mu' = \mu ; \quad (\text{Contrainte plane})$$

Les équations (I.72) peuvent être réarrangées tels que les efforts soient du côté gauche. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy}\end{aligned}\tag{I.74}$$

En notation indicielle nous aurons :

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{I.75}$$

Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij}=1$ si $i=j$ et $\delta_{ij}=0$ $i \neq j$)

En substituant l'équation (I.66) dans les équations (I.74), nous obtiendrons les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\ \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{I.76}$$

En notation indicielle nous aurons :

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (I.77)$$

Finalement pour obtenir les équations de déplacement, nous substituons les équations ci-dessus dans les équations d'équilibre (I.64), comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) &= -\frac{f_x}{\mu} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) &= -\frac{f_y}{\mu} \end{aligned} \quad (I.78)$$

En notation indicielle nous aurons:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = -\frac{f_i}{\mu} \quad (I.79)$$

Les équations de déplacement ci-dessus s'appellent équations de Navier et peuvent être résolues par une fonction complémentaire et une intégrale particulière. Par conséquent, nous cherchons la solution fondamentale aux équations de Navier. Elles peuvent être résolues de la même manière que l'équation de Laplace.

I.5.3 Solution fondamentale

Les équations de Navier peuvent être transformées en équations bi-harmoniques pour lesquelles des solutions existent, par la substitution suivante :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial y^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial x \partial y} \right) \\ u_y &= \frac{\partial^2 G_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 G_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (I.80)$$

En notation indicielle, nous aurons:

$$u_i = \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_j \partial y_j} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 G_j}{\partial x_i \partial y_j} \quad (I.81)$$

Le vecteur G s'appelle vecteur de Galerkin, ce qui nous donne les équations bi-harmoniques suivantes [4]:

$$\begin{aligned} \nabla^4 G_x &= \nabla^2 (\nabla^2 G_x) = -\frac{f_x}{\mu} \\ \nabla^4 G_y &= \nabla^2 (\nabla^2 G_y) = -\frac{f_y}{\mu} \end{aligned} \quad (I.82)$$

Là, ∇^2 est l'opérateur de Laplace. Les solutions fondamentales pour ces équations sont étroitement liées à la solution de l'équation de Laplace. La lecture des données du domaine de solution se fait comme suit : le point de départ p de coordonnées X_p et Y_p et le point de champ Q sur la frontière de coordonnées x_Q et y_Q . Les majuscules indiquent les coordonnées fixes tandis que les lettres minuscules indiquent des coordonnées mobiles. La solution fondamentale est basée sur la solution classique tridimensionnelle d'une force ponctuelle dans un milieu infini appelée solution de Kelvin. Nous pouvons facilement vérifier que les solutions satisfont les équations bi-harmoniques (I.82) comme suit:

$$G_x = G_y = \frac{1}{8\pi\mu} r^2(p, Q) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \quad (I.83)$$

Où $r(p, Q)$ est la distance euclidienne entre la source ponctuelle p et le point courant Q , défini par:

$$r = |r| = |p - Q|$$

$$r = \sqrt{(X_p - x_Q)^2 + (Y_p - y_Q)^2}$$

En remplaçant G_x et G_y dans l'équation (I.80), nous obtenons, pour le vecteur de déplacement en notation indicielle l'expression suivante:

$$u_i = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left((3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right) \quad (I.84)$$

Il est commode d'écrire le vecteur de déplacement comme suit :

$$u_i = U_{ij}(p, Q) e_j \quad (I.85)$$

D'où $U_{ij}(p, Q)$ s'écrit :

$$u_{xx}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left((3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r} \right] + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right)$$

$$u_{xy}(p, Q) = u_{yx}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \quad (I.86)$$

$$u_{yy}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left((3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r} \right] + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right)$$

En notation indicielle, nous aurons:

$$U_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left((3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right) \quad (I.87)$$

Les fonctions ci-dessus s'appellent éléments de déplacement, où le premier indice se rapporte à la direction du déplacement du point de la frontière Q provoqué par une charge unitaire intérieure p dont la direction est donnée par le deuxième indice.

Le vecteur de contrainte résultant de la solution fondamentale peut être dérivé et substitué dans l'équation de la loi de Hooke (I.68).

En notation indicielle, nous obtenons [4]:

$$t_i = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p,Q)} \left(\frac{\partial r(p,Q)}{\partial n} \right) \left((1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_j} \right) + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(p,Q)} \left[\frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_i} n_j \right] \quad (I.88)$$

Il est commode de diviser les composantes du vecteur de traction comme suit :

$$T_{xx}(p,Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \left((1-2\nu) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right)$$

$$T_{xy}(p,Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial y} n_x - \frac{\partial r}{\partial x} n_y \right)^2 \right) \quad (I.89)$$

$$T_{yx}(p,Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial y} n_x - \frac{\partial r}{\partial x} n_y \right)^2 \right)$$

$$T_{yy}(p,Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \left((1-2\nu) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right)$$

En notation indicielle, nous obtenons:

$$T_{ij}(p,Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p,Q)} \left(\frac{\partial r(p,Q)}{\partial n} \right) \left((1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_j} \right) + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(p,Q)} \left(\frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_i} n_j \right) \quad (I.90)$$

La dérivée de la normale $\frac{\partial r}{\partial n}$ est obtenue de la manière suivante :

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (I.91)$$

Les composants de la normale unitaire externe dans les directions de x et de y (n_x et n_y) sont définis par:

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad n_y = \frac{\partial y}{\partial n} \quad (I.92)$$

Les dérivées de la distance r (p, Q) sont données par :

$$\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x} = \frac{x_Q - X_p}{r(p, Q)}, \quad \frac{\partial r(p, Q)}{\partial y} = \frac{y_Q - Y_p}{r(p, Q)} \quad (I.93)$$

I.5.4 Equation intégrale de frontière (BIE)

Le théorème réciproque de travail de BETTI et l'identité de SOMIGLIANA, pour les déplacements, peuvent être employés pour dériver une équation intégrale pour les déplacements à un point intérieur p, occasionnés par les tractions et les déplacements au point Q sur frontière de la surface. En l'absence de contrainte, cette équation intégrale de frontière (BIE) s'écrit comme suit [3-6]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_x(p) \\ u_y(p) \end{bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{xx}(p, Q) & T_{xy}(p, Q) \\ T_{yx}(p, Q) & T_{yy}(p, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} d\Gamma(Q) \\ = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{xx}(p, Q) & U_{xy}(p, Q) \\ U_{yx}(p, Q) & U_{yy}(p, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix} d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (I.94)$$

En utilisant la notation indicielle, les deux équations ci-dessus peuvent être exprimées comme suit :

$$u_i(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}(p, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(p, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (I.95)$$

La solution fondamentale représentée par les éléments U_{ij} et T_{ij} , établit l'influence, (répercussion ou impact) par une force concentrée sur n'importe quel point intérieure p sur n'importe qu'elle point de la frontière Q. A moins que p coïncide avec Q et la relation devient singulière. Cette solution fondamentale est valable pour n'importe quel problème élastostatique indépendamment de sa géométrie.

L'équation intégrale de frontière BIE (I.94) relie efficacement deux problèmes distincts : le premier est la solution fondamentale d'une charge ponctuelle représentée par les éléments U_{ij} et T_{ij} et le second est le problème que nous essayons de résoudre représenté par les variables inconnues u_j et t_j .

L'équation intégrale de frontière, pour les efforts appliqués en un point p, peut être obtenue en la différenciant pour les déplacements au point p et en la substituant dans les équations de la loi du Hooke (I.5.5) et dont l'écriture en notation indicielle est :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(p) + \int_{\Gamma} \left(\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial T_{mk}(p, Q)}{\partial x_m} + \mu \left(\frac{\partial T_{ik}(p, Q)}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{jk}(p, Q)}{\partial x_i} \right) \right) u_k(Q) d\Gamma(Q) \\ = \left(\int_{\Gamma} U_{ij}(p, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) + \mu \left(\frac{\partial U_{ik}(p, Q)}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{jk}(p, Q)}{\partial x_i} \right) \right) t_k(Q) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (I.96)$$

Ceci peut nous permettre d'exprimer en termes de nouveaux éléments de troisième ordre S_{kij} et D_{kij} comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(p) \\ \sigma_{xy}(p) \\ \sigma_{yy}(p) \end{bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} S_{1xx}(p, Q) & S_{2xx}(p, Q) \\ S_{1xy}(p, Q) & S_{2xy}(p, Q) \\ S_{1yy}(p, Q) & S_{2yy}(p, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} d\Gamma(Q) \\ = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} D_{1xx}(p, Q) & D_{2xx}(p, Q) \\ D_{1xy}(p, Q) & D_{2xy}(p, Q) \\ D_{1yy}(p, Q) & D_{2yy}(p, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix} d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (I.97)$$

En notation indicielle nous obtenons:

$$\sigma_{ij}(p) + \int_{\Gamma} S_{kij}(p, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} D_{kij}(p, Q) t_k(Q) d\Gamma(Q) \quad (I.98)$$

Les tenseurs de troisième ordre S_{kij} et D_{kij} peuvent être définis comme suit :

$$\begin{aligned} S_{kij}(p, Q) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \right) n_i \left[2\nu \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (1-2\nu) \delta_{jk} \right] \\ + \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \right) n_j \left[2\nu \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (1-2\nu) \delta_{ik} \right] \\ + \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \right) n_k \left[2(1-2\nu) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} + (1-4\nu) \delta_{ij} \right] \\ + \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \left[2(1-2\nu) \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \nu \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \right. \\ \left. - 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \end{aligned} \quad (I.99)$$

$$D_{kij}(p, Q) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r}\right) \left[(1-2\nu) \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (\text{I.100})$$

Conclusion

La Méthode des Eléments frontières est une méthode prometteuse dans la conception et l'optimisation des structures complexes et l'établissement d'un modèle numérique de base. Cette phase de modélisation est essentielle pour une compréhension du comportement du système sous différentes sollicitations, et suppose le recours à un outil d'analyse numérique performant et maîtrisable dans le futur. Dans ce chapitre nous avons exposé le fondement de la méthode des éléments frontières.

Chapitre II

*Développement d'éléments axisymétriques
et leur introduction dans la formulation
de la BEM*

Introduction

Le problème de la distribution des contraintes dans les corps à symétrie de révolution (solides « axisymétriques ») soumis à un chargement ayant la même symétrie est très important en pratique. Le problème théorique est analogue à celui des contraintes planes ou des déformations planes car il est, ici encore, bidimensionnel. Pour des raisons de symétrie, les deux composantes du déplacement dans toute section plane contenant l'axe de symétrie définissent complètement le champ des déformations et donc des contraintes.

Dans les coordonnées cylindriques, l'axe z est l'axe de révolution et constitue la composante axiale. r et θ sont respectivement les composantes radiale et angulaire. Toutes les charges sont uniformément réparties sur le périmètre du cylindre (charges de contours). Un grand nombre de structures, pièces et organes mécaniques (axes de roues, poulie, engrenage, arbres de transmission, joints mécaniques...etc.) sont axisymétriques. Certaines pièces de révolutions peuvent présenter quelques particularités telles que perçage, rainurages etc., peuvent être approchées raisonnablement comme axisymétriques. Quelques géométries peuvent ne pas être sous sollicitations axisymétriques. Pour de tels problèmes, un traitement spécial est nécessaire. Il y a deux approches de formulations axisymétriques [4]:

- La première est de dériver dès le début les solutions fondamentales axisymétriques basées sur des charges de contours en opposition aux charges ponctuelles,
- La seconde est de prendre les solutions tridimensionnelles et de les intégrer.

Les deux approches mènent à des solutions identiques et ont été étudiées en détail pour des problèmes de potentiel, élastostatiques, thermoplastiques et centrifuges par Becker [1986].

II.1 Formulation du problème potentiel axisymétrique

Pour pouvoir réduire d'une dimension, la solution tridimensionnelle passe d'abord des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées cylindriques (r, θ, z). Nous intégrons analytiquement par rapport θ , pour écrire les solutions élémentaires en fonction des composants radiaux et axiaux [3-4].

En coordonnées cylindriques, l'équation de Laplace s'écrit comme suit [4]:

$$\nabla^2 \phi_{3D} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Pour éviter la confusion entre les solutions axisymétriques et tridimensionnelles, nous utilisons les annotations « axi » et « 3D » pour les désigner. Dans les problèmes

axisymétriques, toutes les variables sont constantes par rapport à θ . Par conséquent, toutes les différentiations par rapport à θ sont nulles :

$$\nabla^2 \phi_{axi} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.2})$$

Considérons une solution arbitraire axisymétrique du domaine, (figure II.1), avec un point source intérieur p (R_p, θ_p, z_p) et un point courant Q (R_Q, θ_Q, z_Q). Les majuscules indiquent les coordonnées fixes (point source) tandis que les lettres minuscules indiquent les coordonnées variables (point courant). Le point Q change de position sur la frontière.

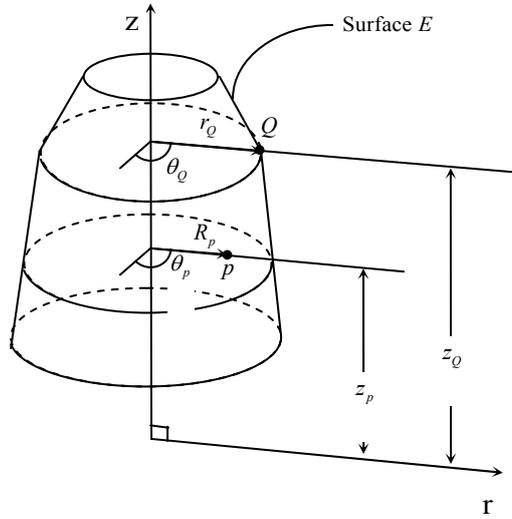


Figure II .1 Corps axisymétrique

II.2 Equation intégrale frontière pour le problème potentiel Axisymétrique

L'équation intégrale frontière BIE en trois dimensions s'écrit [3]:

$$\phi_{3D}(p) + \int_E \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \lambda_{3D}(p, Q)}{\partial n} \phi_{3D}(Q) \right] r_Q d\theta dE(Q) = \int_E \int_0^{2\pi} \lambda_{3D}(p, Q) \left[\frac{\partial \phi_{3D}(Q)}{\partial n} \right] r_Q d\theta dE(Q) \quad (\text{II.3})$$

$$dS(Q) = r_Q d\theta dE(Q) \quad (\text{II.4})$$

L'intégrale frontière BIE pour des problèmes potentiels axisymétriques s'écrit de la manière suivante :

$$\phi_{axi}(p) + 2\pi \int_E k_{1axi}(p, Q) \phi_{axi}(Q) r_Q dE(Q) = 2\pi \int_E k_{2axi}(p, Q) \frac{\partial \phi_{axi}(Q)}{\partial n} r_Q dE(Q) \quad (\text{II.5})$$

k_1 et k_2 sont les solutions élémentaires axisymétriques définies par:

$$k_{1axi}(p, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \lambda_{3D}(p, Q)}{\partial n} d\theta_Q \quad (\text{II.6})$$

$$k_{2axi}(p, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_{3D}(p, Q) d\theta_Q \quad (II.7)$$

La solution fondamentale axisymétrique, $\lambda_{axi}(p, Q)$ est basée sur un potentiel placé au point p, par opposition au potentiel du point dans la solution tridimensionnelle. Elle peut être dérivée de la solution fondamentale tridimensionnelle comme suit :

$$\lambda_{axi}(p, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_{3D}(p, Q) d\theta_Q \quad (II.8)$$

Pour dériver la solution fondamentale axisymétrique, les solutions fondamentales tridimensionnelles sont intégrées autour de la direction angulaire, c'est à dire de 0 à 2π , ce qui nous permet d'obtenir la solution liée aux potentiels appliquée au point P. Les directions 1, 2 et 3 correspondent aux directions cartésiennes x, y et z.

Nous prenons $\theta_p = 0$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} X_p &= R_p \cos \theta_p = R_p & x_Q &= r_Q \cos \theta_Q \\ Y_p &= R_p \sin \theta_p = 0 & y_Q &= R_p \sin \theta_p \\ Z_p &= Z_p & z_Q &= z_Q \end{aligned} \quad (II.9)$$

D'où :

$$\lambda_{3D}(p, Q) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \quad (II.10)$$

$r(p, Q)$ est la distance entre p et Q. Nous remplaçons (II.9) dans (II.10) nous aurons :

$$\lambda_{3D}(p, Q) = \frac{1}{4\pi} \left[(R_p - r_Q)^2 + (Z_p - z_Q)^2 - 4R_p r_Q \cos^2 \left(\frac{\theta_Q}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (II.11)$$

En substituant $\theta_Q = \pi - 2\alpha$ et λ_{3D} dans l'équation (II.8), nous aurons:

$$\lambda_{axi}(p, Q) = \frac{1}{8\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left[(R_p - r_Q)^2 + (Z_p - z_Q)^2 - 4R_p r_Q \sin^2 \alpha \right]^{-\frac{1}{2}} (-2) d\alpha \quad (II.12)$$

Nous prenons :

$$m = \frac{2\sqrt{R_p r_Q}}{C} \quad (II.13.a)$$

Et
$$C = \sqrt{(R_p + r_Q)^2 + (Z_p + z_Q)^2} \quad (II.13.b)$$

Nous avons :

$$\lambda_{axi}(p, Q) = \frac{1}{2\pi^2 C} \int_0^{2\pi} (1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{-1/2} d\alpha \quad (\text{II.14})$$

Par définition, l'intégrale elliptique s'écrit :

$$K(m, \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha \quad (\text{II.15.a})$$

$$E(m, \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \quad (\text{II.15.b})$$

Où :

- m est le module,
- K (m, n/2) est l'intégrale elliptique de la première espèce,
- E (m, n/2) est l'intégrale elliptique de la deuxième espèce.

Plusieurs tables et algorithmes numériques de calcul intégral elliptique existent dans la littérature (Erdelyi [1953], Byrd et Friedman [1971]).

Les intégrales elliptiques sont habituellement exprimées en série :

$$K(m, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 m^4 + \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^2 m^6 + \dots \right] \quad (\text{II.15.c})$$

$$E(m, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m^2}{1} + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 \frac{m^4}{3} + \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^2 \frac{m^6}{5} + \dots \right] \quad (\text{II.15.d})$$

La solution fondamentale peut être exprimée comme suit :

$$\lambda_{axi}(p, Q) = \frac{1}{2\pi^2 C} K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{II.16})$$

La constante de multiplication ($1/2\pi^2$) est associée à la force du potentiel au point source P.

La constante de la solution fondamentale est une grandeur choisie arbitrairement, parce qu'elle multiplie les deux solutions élémentaires et n'affecte pas la BIE. Les solutions élémentaires potentielles axisymétriques se calculent comme suit [4] :

$$k_{1axi}(p, Q) = \frac{\partial \lambda_{axi}(p, Q)}{\partial n} \quad (\text{II.17})$$

$$k_{2axi}(p, Q) = \lambda_{axi}(p, Q) = \frac{1}{2\pi^2 C} K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{II.18})$$

La différentiation concernant la direction normale s'écrit :

$$\frac{\partial \lambda_{axi}(p, Q)}{\partial n} = \frac{\partial \lambda_{axi}(p, Q)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial \lambda_{axi}(p, Q)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \quad (\text{II.19})$$

Avec :

$$n_r = \frac{\partial r}{\partial n}; \quad n_z = \frac{\partial z}{\partial n} \quad (\text{II.20})$$

Nous avons :

$$\frac{\partial K\left(m, \frac{\pi}{2}\right)}{\partial r_Q} = \frac{\partial K\left(m, \frac{\pi}{2}\right)}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial r_Q}; \quad \frac{\partial K\left(m, \frac{\pi}{2}\right)}{\partial z_Q} = \frac{\partial K\left(m, \frac{\pi}{2}\right)}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial z_Q} \quad (\text{II.21})$$

L'expression finale pour la première solution potentielle est donnée par:

$$k_{1axi}(p, Q) = \frac{1}{2\pi^2 r_Q C} n_r K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{R_p^2 + r_Q^2 + (Z_p + z_Q)^2}{2\pi^2 r_Q C D} n_r E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2(Z_p + z_Q)}{2\pi^2 C D} n_z E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{II.22})$$

Où

$$D = (R_p - r_Q)^2 + (Z_p - z_Q)^2 \quad (\text{II.23})$$

II.3 Points situés sur l'axe des z

Concernant les problèmes axisymétriques, il reste à répondre à une question importante qui reste posée : comment trouver les solutions élémentaires quand le point p se situe sur l'axe z, c'est-à-dire $R_p = 0$. Il est à noter que l'axe z n'est pas explicitement impliqué avec les autres éléments de frontière, pour des raisons d'axisymétrie. Il se trouve que le point de départ peut tomber sur l'axe z. C'est le cas du cylindre plein. À première vue, les solutions élémentaire axisymétriques peuvent sembler singuliers quand $R_p \rightarrow 0$, mais la substitution de la limite de ce dernier dans le paramètre m, l'annule, tel que $K(m, \pi/2) = \pi/2$ et $E(m, \pi/2) = \pi/2$. Les solutions potentielles sur l'axe de z deviennent **[3,6]** :

$$[K_{1axi}(p, Q)]_{R_p=0} = \frac{r_Q n_r - (Z_p - z_Q) n_z}{2\pi [r_Q^2 + (Z_p - z_Q)^2]^{3/2}} \quad (\text{II.24})$$

$$[K_{2axi}(p, Q)]_{R_p=0} = \frac{-1}{2\pi [r_Q^2 + (Z_p - z_Q)^2]^{1/2}} \quad (\text{II.25})$$

II.4 Implémentation numérique

L'exécution numérique des solutions potentielles axisymétriques est très semblable à celle des problèmes bidimensionnels, parce que le problème est formulé dans deux directions seulement : radiales et axiales. Les intégrales elliptiques peuvent être exprimées comme une série limitée avec une singularité logarithmique, ce qui rend la forme de la singularité aux solutions axisymétriques semblables à celle des solutions bidimensionnelles. Par conséquent, les mêmes arrangements d'intégration peuvent être employés, y compris ceux pour les limites diagonales [3,4].

II.5 Formulation élastostatique axisymétrique

Commençons par définir les variables impliquées dans la formulation axisymétrique :

u_r, u_z = Déplacements dans les directions radiales et axiales.

t_r, t_z = Tractions dans les directions radiales et axiales.

σ_{rr}, σ_{zz} = Contraintes dans les directions radiales et axiales.

$\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}$ = Déformations dans les directions radiales et axiales.

$\sigma_{rz}, \varepsilon_{rz}$ = Unique contrainte de cisaillement axisymétrique et de déformation.

$\sigma_{\theta\theta}$ = Contrainte (toujours constante).

$\varepsilon_{\theta\theta}$ = Déformation = (u_r / r) .

II.6 Equation intégrale frontière pour les problèmes élastostatiques axisymétriques BIE

L'équation du problème tridimensionnel en élastostatique axisymétrique, peut être transformée en BIE axisymétrique d'abord en transformant les coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques et puis en intégrant chaque terme et en respectant l'orientation circulaire et en changeant l'intégrale surfacique ds en intégrale curviligne dE en utilisant l'équation $dS = r_Q d\theta_Q dE(Q)$ [3-6].

Le déplacement et le vecteur de contrainte, avec $(\theta_p = 0)$, peuvent être écrits comme suit :

$$\begin{aligned}
 u_x(p) &= u_r(p) \cos \theta_p = u_r(p); & u_y(p) &= u_r(p) \sin \theta_p = 0; & u_z(p) &= u_z(p) \\
 t_x(p) &= t_r(p) \cos \theta_p = t_r(p); & t_y(p) &= t_r(p) \sin \theta_p = 0; & t_z(p) &= t_z(p) \\
 u_x(Q) &= u_r(p) \cos \theta_Q; & u_y(p) &= u_r(p) \sin \theta_Q; & u_z(Q) &= u_z(Q) \\
 t_x(Q) &= t_r(p) \cos \theta_Q; & t_y(p) &= t_r(p) \sin \theta_Q; & t_z(Q) &= t_z(Q)
 \end{aligned} \tag{II.26}$$

Par conséquent, l'équation tridimensionnelle BIE devient :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_r(p) \\ 0 \\ u_z(p) \end{bmatrix} + \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} T_{xx}(p,Q) & T_{xy}(p,Q) & T_{xz}(p,Q) \\ T_{yx}(p,Q) & T_{yy}(p,Q) & T_{yz}(p,Q) \\ T_{zx}(p,Q) & T_{zy}(p,Q) & T_{zz}(p,Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(Q) \cos \theta_Q \\ u_r(Q) \sin \theta_Q \\ u_z(Q) \end{bmatrix} r_Q d\theta_Q d\Gamma(Q) = \\
 = \int_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} U_{xx}(p,Q) & U_{xy}(p,Q) & U_{xz}(p,Q) \\ U_{yx}(p,Q) & U_{yy}(p,Q) & U_{yz}(p,Q) \\ U_{zx}(p,Q) & U_{zy}(p,Q) & U_{zz}(p,Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(Q) \cos \theta_Q \\ t_r(Q) \sin \theta_Q \\ t_z(Q) \end{bmatrix} r_Q d\theta_Q d\Gamma(Q)
 \end{aligned} \tag{II.27}$$

Ainsi, nous pouvons écrire une forme entièrement axisymétrique de la BIE comme suit:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_r(p) \\ u_z(p) \end{bmatrix} + 2\pi \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{rr}(p,Q) & T_{rz}(p,Q) \\ T_{zr}(p,Q) & T_{zz}(p,Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(p) \\ u_z(p) \end{bmatrix} r_Q d\Gamma(Q) \\
 = 2\pi \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{rr}(p,Q) & U_{rz}(p,Q) \\ U_{zr}(p,Q) & U_{zz}(p,Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(p) \\ u_z(p) \end{bmatrix} r_Q d\Gamma(Q)
 \end{aligned} \tag{II.28}$$

II.7 Solutions élémentaires du problème élastostatique axisymétrique

En élastostatique axisymétrique les solutions élémentaires de déplacement dans la formulation tridimensionnelle peuvent être exprimées en notation indicielle comme suit [3-4]:

$$U_{ij}(p,Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{1}{r(p,Q)} \right] \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p,Q)}{\partial x_j} \right] \tag{II.29}$$

$r(p, Q)$ est la distance entre les points p et Q . Les solutions élémentaires axisymétriques de déplacement peuvent donc être écrites en termes tridimensionnels comme suit :

$$\begin{aligned}
 U_{rr}(p, Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U_{xx}(p, Q) \cos \theta_Q + U_{yy}(p, Q) \sin \theta_Q] d\theta_Q \\
 U_{rz}(p, Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{xz}(p, Q) d\theta(Q) \\
 U_{zr}(p, Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U_{zx}(p, Q) \cos \theta_Q + U_{zy}(p, Q) \sin \theta_Q] d\theta_Q \\
 U_{zz}(p, Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{zz}(p, Q) d\theta_Q
 \end{aligned} \tag{II.30}$$

Comme dans la formulation potentielle, les solutions élémentaires tridimensionnelles sont transformées en composants cylindriques en utilisant les rapports des équations (II.9) et de la substitution $\theta_Q = \pi - 2\alpha$, comme suit :

$$\begin{aligned}
 U_{rr}(p, Q) &= 2A \int_0^{2\pi} \left[\frac{(3-4\nu)(1-2\cos^2 \alpha)}{C(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} + \frac{(R_p - r_Q)^2(1-2\cos^2 \alpha) - 4R_p r_Q \cos^2 \alpha}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] d\alpha \\
 U_{rz}(p, Q) &= 2A \int_0^{2\pi} \left[\frac{(R_p - r_Q + 2r_Q \cos^2 \alpha)(Z_p - z_Q)}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] d\alpha \\
 U_{zr}(p, Q) &= 2A \int_0^{2\pi} \left[\frac{(R_p - r_Q - 2r_Q \cos^2 \alpha)(Z_p - z_Q)}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] d\alpha \\
 U_{zz}(p, Q) &= 2A \int_0^{2\pi} \left[\frac{3-4\nu}{C(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} + \frac{(Z_p - z_Q)^2}{C^3(1-m^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] d\alpha
 \end{aligned} \tag{II.31}$$

Là où C est défini par l'équation (II.13.b), A est défini par :

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu(1-\nu)} \tag{II.32}$$

Les intégrales qui contiennent le paramètre $(1-m^2 \sin^2 \alpha)$ peuvent être transformées en intégrales elliptiques de première et deuxième sorte. Par conséquent, les solutions élémentaires de déplacement sont exprimées en termes d'intégrales elliptiques comme suit :

$$\begin{aligned}
 U_{rr}(p, Q) &= \frac{A}{R_p r_Q C} \left[(3-4\nu)(R_p^2 - r_Q^2)^2 + 4(1-\nu)(Z_p - z_Q)^2 \right] K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \\
 &+ \frac{A}{R_p r_Q C} \left[-C^2(3-4\nu) - \frac{(Z_p - z_Q)^2 \left[R_p^2 + r_Q^2 + (Z_p - z_Q)^2 \right]}{D} \right] E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \\
 U_{rz}(p, Q) &= \frac{A(Z_p - z_Q)}{R_p C} \left[K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{r_Q^2 - R_p^2 + (Z_p - z_Q)^2}{D} E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 U_{zr}(p, Q) &= \frac{A(Z_p - z_Q)}{r_Q C} \left[-K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{R_p^2 - r_Q^2 + (Z_p - z_Q)^2}{D} E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 U_{zz}(p, Q) &= \frac{2A}{C} \left[(3-4\nu)K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(Z_p - z_Q)^2}{D} E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{II.33}$$

D est défini par l'équation (II.23). Les solutions élémentaires axisymétriques de contrainte peuvent de la même manière être extraites des solutions élémentaires tridimensionnelles de contrainte. Cependant, en raison de la complexité des solutions élémentaires tridimensionnelles de contrainte, ceci impliquera une quantité considérable de manipulations algébriques avant qu'ils puissent être exprimés dans des intégrales elliptiques. Une approche beaucoup plus facile est d'employer les relations de contrainte-déplacement la loi de Hooke pour exprimer les solutions élémentaires de contrainte directement en termes de solutions élémentaires axisymétriques.

Nous aurons [3] :

$$\begin{aligned}
 T_{rr}(p, Q) &= 2\mu n_r \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \right) \left(\frac{U_{rr}}{r} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} \right) \right] + \mu n_z \left[\frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} \right] \\
 T_{rz}(p, Q) &= \mu n_r \left[\frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} \right] + 2\mu n_z \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \right) \left(\frac{U_{rr}}{r} + \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} \right) \right] \\
 T_{zr}(p, Q) &= 2\mu n_r \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \right) \left(\frac{U_{zr}}{r} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} \right) \right] + \mu n_z \left[\frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right] \\
 T_{zz}(p, Q) &= \mu n_r \left[\frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right] + 2\mu n_z \left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \right) \left(\frac{U_{zr}}{r} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{II.34}$$

Les solutions élémentaires axisymétriques de traction peuvent alors être exprimées en termes d'intégrales elliptiques en les substituant dans les équations (II.33), nous aurons :

$$\begin{aligned}
 T_{rr}(p, Q) &= 2\mu [T_1 n_r + T_2 n_z] \\
 T_{rz}(p, Q) &= 2\mu [T_3 n_r + T_4 n_z] \\
 T_{zr}(p, Q) &= 2\mu [T_5 n_r + T_6 n_z] \\
 T_{zz}(p, Q) &= 2\mu [T_7 n_r + T_8 n_z]
 \end{aligned} \tag{II.35}$$

Les expressions de T_1 jusqu'à T_8 sont exprimées par :

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{A}{R_p r_Q^2 C} \left[2\nu M - \frac{3}{2} N + \frac{BF(Z_p - z_Q)^2}{2DC^2} \right] K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \\
 &+ \frac{A}{R_p r_Q^2 C} \left(\frac{-2\nu}{D} [R_p^2 S + (Z_p - z_Q)^2 V + r_Q^4] + \frac{3}{D} [R_p^2 F + (Z_p - z_Q)^2 M] \right. \\
 &\left. - \frac{2B^2 F}{D^2 C^2} (Z_p - z_Q)^2 \right) E\left(m, \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{II.36}$$

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \frac{A(Z_p - z_Q)}{R_p r_Q C D} \left[D(2\nu - 3) + \frac{B}{C^2} (Z_p - z_Q)^2 \right] K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \\
 &+ \frac{A(Z_p - z_Q)}{R_p r_Q C D} \left[3(Z_p - z_Q)^2 - B(2\nu - 3) - \frac{4B}{D C^2} (Z_p - z_Q)^2 \right] E\left(m, \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{II.37}$$

$$T_3 = T_2 \tag{II.38}$$

$$\begin{aligned}
 T_4 &= \frac{A}{R_p C D} \left[-D(1 - 2\nu) + \frac{H}{C^2} (Z_p - z_Q)^2 \right] K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \\
 &+ \frac{A}{R_p C D} \left[-(Z_p - z_Q)^2 - H(1 - 2\nu) - \frac{8 F R_p^2}{D C^2} (Z_p - z_Q)^2 \right] E\left(m, \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{II.39}$$

$$\begin{aligned}
 T_5 &= \frac{A(Z_p - z_Q)}{C D} \left[\frac{D}{r_Q^2} + \frac{2}{C^2} (Z_p - z_Q)^2 \right] K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \\
 &+ \frac{A(Z_p - z_Q)}{C D} \left[4(1 + \nu) - \frac{B}{r_Q^2} - \frac{8 B}{D C^2} (Z_p - z_Q)^2 \right] E\left(m, \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{II.40}$$

$$T_6 = \frac{A}{r_Q C D} \left[-D(1-2\nu) - \frac{F}{C^2} (Z_p - z_Q)^2 \right] K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{r_Q C D} \left[-3(Z_p - z_Q)^2 + F(1-2\nu) - \frac{4BF}{D C^2} (Z_p - z_Q)^2 \right] E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{II.41})$$

$$T_7 = T_6 \quad (\text{II.42})$$

$$T_8 = \frac{2A(Z_p - z_Q)}{C D} \left[-\frac{1}{C^2} (Z_p - z_Q)^2 \right] K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2A(Z_p - z_Q)}{C D} \left[(1-2\nu) + \frac{4B}{D C^2} (Z_p - z_Q)^2 \right] E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{II.43})$$

Les constantes A, B, C, D, E, F, H, M, N, S et V d sont définies comme suit:

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \quad (\text{II.44.a})$$

$$B = R_p^2 + r_Q^2 + (Z_p - z_Q)^2 \quad (\text{II.44.b})$$

$$C = \sqrt{(R_p + r_Q)^2 + (Z_p - z_Q)^2} \quad (\text{II.44.c})$$

$$F = R_p^2 - r_Q^2 + (Z_p - z_Q)^2 \quad (\text{II.44.d})$$

$$H = r_Q^2 - R_p^2 + (Z_p - z_Q)^2 \quad (\text{II.44.e})$$

$$M = 2R_p^2 + r_Q^2 + 2(Z_p - z_Q)^2 \quad (\text{II.44.f})$$

$$N = 2R_p^2 + 3(Z_p - z_Q)^2 \quad (\text{II.44.g})$$

$$S = 2R_p^2 - 3r_Q^2 + 4(Z_p - z_Q)^2 \quad (\text{II.44.h})$$

$$S = -3r_Q^2 + 2(Z_p - z_Q)^2 \quad (\text{II.44.i})$$

Le déplacement et les solutions élémentaires de traction doivent converger vers des valeurs finies $R_p \rightarrow 0$, c'est-à-dire quand le point p est placé sur l'axe z. En remplaçant $R_p = 0$ nous aurons les expressions suivantes pour les solutions élémentaires de déplacement:

$$[U_{rr}(p, Q)]_{R_p=0} = [U_{rz}(p, Q)]_{R_p=0} = 0 \quad (\text{II.45.a})$$

$$[U_{zr}(p, Q)]_{R_p=0} = \frac{-\pi A r_Q (Z_p - z_Q)}{C^3} \quad (\text{II.45.b})$$

$$[U_{zz}(p, Q)]_{R_p=0} = \frac{\pi A}{C} \left[(3-4\nu) + \frac{(Z_p - z_Q)^2}{C^2} \right] \quad (\text{II.45.c})$$

Il en est de même des solutions élémentaires de traction sur l'axe z qui s'écrivent comme suit:

$$[T_{rr}(p, Q)]_{R_p=0} = [T_{rz}(p, Q)]_{R_p=0} = 0 \quad (\text{II.46.a})$$

$$[T_{zr}(p, Q)]_{R_p=0} = \frac{2\mu\pi A (Z_p - z_Q)}{C^3} \left[2(1+\nu) + \frac{3(Z_p - z_Q)^2}{C^2} \right] n_r - \frac{2\mu\pi A r_Q}{C^3} \left[(1-2\nu) + \frac{3(Z_p - z_Q)^2}{C^2} \right] n_z \quad (\text{II.46.b})$$

$$[T_{zz}(p, Q)]_{R_p=0} = -\frac{2\mu\pi A r_Q}{C^3} \left[(1-2\nu) + \frac{3(Z_p - z_Q)^2}{C^2} \right] n_r + \frac{2\mu\pi A (Z_p - z_Q)}{C^3} \left[(1-2\nu) + \frac{3(Z_p - z_Q)^2}{C^2} \right] n_z \quad (\text{II.46.c})$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit la méthode des éléments axisymétriques et leur introduction dans la formulation de la BEM. Nous avons présenté les équations intégrales sur des domaines à symétrie de révolution.

Pour évaluer les intégrales singulières, nous avons fixé notre choix sur une approche utilisant la technique de quadrature de Gauss ou Gauss Squared. Nous allons établir des règles de quadrature afin d'évaluer correctement tous les termes de la matrice.

Chapitre III

Implémentation numérique

Introduction

Pour l'implémentation ou la résolution numérique des problèmes élastostatiques qui sont très semblables à ceux des problèmes potentiels, il faut respecter un cheminement bien déterminé pour arriver à des résultats cohérents.

Cette étape consiste à résoudre numériquement l'équation intégrale de frontière (BIE). La courbe de frontière est divisée en éléments et chaque élément est défini par des points nodaux. A supposer que nous avons N points nodaux sur la frontière. Chaque nœud est défini par quatre variables, u_x , u_y , t_x et t_y , donnant un total de variables $4N$. Le nombre d'équations devant être égal à celui des inconnues, n'importe quel problème avec une solution unique doit avoir seulement la moitié des variables à déterminer pour chaque point nodal. Par conséquent, un point nodal particulier doit avoir deux inconnues à déterminer.

L'exécution numérique est réalisée en utilisant l'environnement MATLAB 7.0 pour la réalisation des programmes[18].

III.1 Implémentation numérique de la BEM en élasticité

La méthode des éléments de frontière est une méthode qui permet de discrétiser une formulation intégrale pour conduire à un système d'équations algébriques qui fournissent une solution approchée au problème [3-5].

Les étapes essentielles de mise en œuvre numérique de la méthode des éléments frontières sont représentées par le schéma synoptique ci dessous:

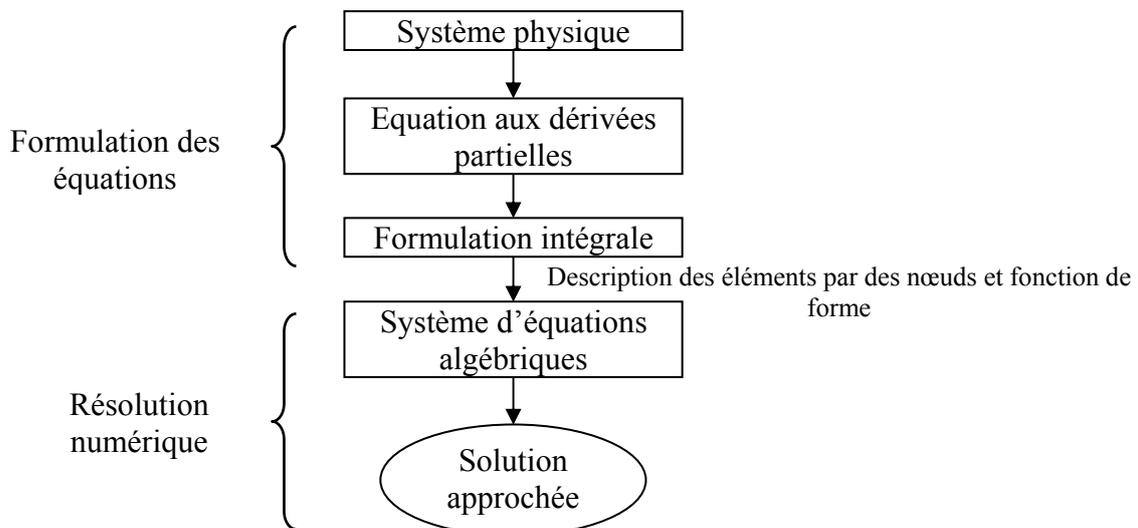


Figure III.1 : Transformation des équations d'un système physique.

La programmation consiste à :

- Étape 1 : Division de la frontière en éléments qui consiste à : [3-6]

- Décrire et délimiter graphiquement le domaine.

- Introduire les coordonnées des points P de frontière et p internes.

La frontière du domaine de solution est divisée en éléments liés dont le nombre est choisi de manière à augmenter la précision sans allonger de manière inconsidérée le temps de calcul.

Les éléments peuvent être linéaires, quadratiques, cubiques, voire développés. Il est en outre possible que la variation de la géométrie soit différente de celle des variables tel que, la description linéaire de la géométrie avec la variation quadratique du déplacement [3].

Les éléments isoparamétriques utilisent le même ordre de variation aussi bien pour la géométrie que pour les inconnues (Annexe A).

Les figures ci après montrent la construction d'un système algébrique linéaire.

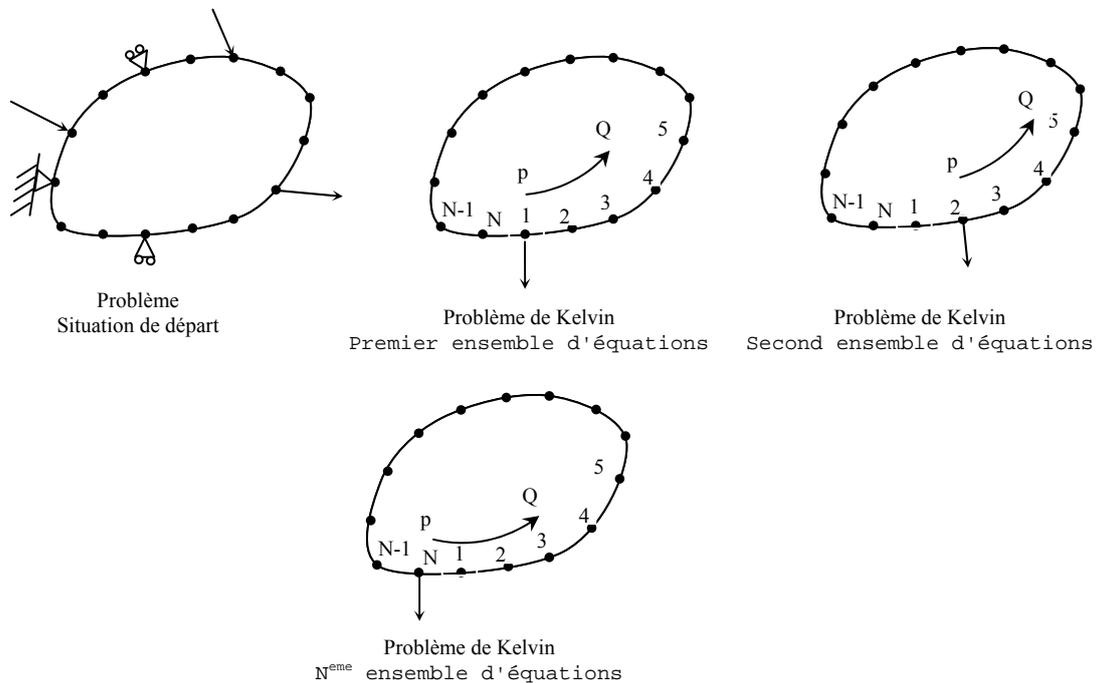


Figure III.2 Construction d'un système algébrique linéaire

Nous prenons l'exemple d'un élément à trois nœuds, nous aurons :

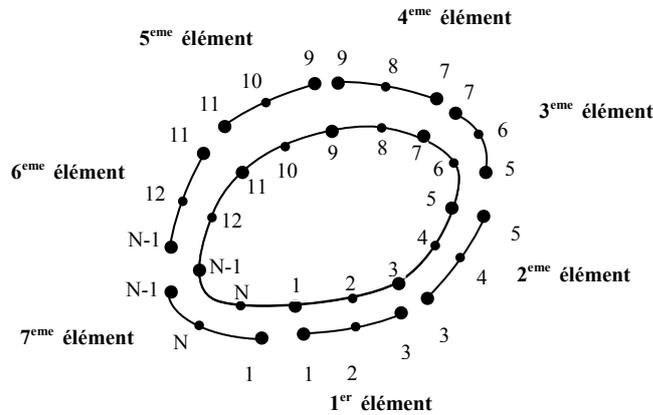


Figure III.3 Division de la frontière en éléments

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------------|--|-------|-------|---|-------|-------|---|-------|-------|---|-------|-------|----|----------|----------|-----|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|
| La numérotation globale (Nœuds) | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ... N-1 N | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Coordonnées | $x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12} \dots x_{N-1} \ x_N$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6 \ y_7 \ y_8 \ y_9 \ y_{10} \ y_{11} \ y_{12} \dots y_{N-1} \ y_N$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Élément | 1 | | 2 | | | 3 | | | 4 | | | 5 | | | 6 | | | N/2=7 | | | |
| Numérotation Locale | 1 | x_1 | y_1 | 3 | x_3 | y_3 | 5 | x_5 | y_5 | 7 | x_7 | y_7 | 9 | x_9 | y_9 | 11 | x_{11} | y_{11} | N-1 | x_{N-1} | y_{N-1} |
| | 2 | x_2 | y_2 | 4 | x_4 | y_4 | 6 | x_6 | y_6 | 8 | x_8 | y_8 | 10 | x_{10} | y_{10} | 12 | x_{12} | y_{12} | N | x_N | y_N |
| | 3 | x_3 | y_3 | 5 | x_5 | y_5 | 7 | x_7 | y_7 | 9 | x_9 | y_9 | 11 | x_{11} | y_{11} | N-1 | x_{N-1} | y_{N-1} | 1 | x_1 | y_1 |

Figure III.4 Tableau des connections

$$x(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) \ x_c = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 \tag{III.1}$$

$$y(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) \ y_c = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3$$

La fonction de forme quadratique doit satisfaire les deux conditions suivantes:

- 1- $N_c(\xi) = 1 \rightarrow$ au point c .
- 2- $N_c(\xi) = 0 \rightarrow$ aux autres points.

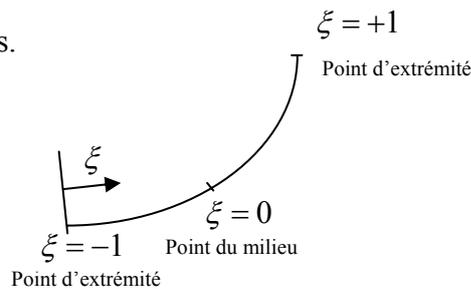


Figure III.5 Élément quadratique (isoparamétrique)

Avec :

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -\frac{\xi}{2}(1-\xi) \\ N_2(\xi) &= (1+\xi)(1-\xi) \\ N_3(\xi) &= \frac{\xi}{2}(1+\xi) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Nous obtiendrons :

$$N_1(-1) = 1, \quad N_2(-1) = 0, \quad N_3(-1) = 0 \Rightarrow u(-1) = \sum_{c=1}^3 N_c(-1) u_c = u_1$$

$$N_1(0) = 0, \quad N_2(0) = 1, \quad N_3(0) = 0 \Rightarrow u(0) = \sum_{c=1}^3 N_c(0) u_c = u_2$$

$$(\text{III.3}) \quad N_1(+1) = 0, \quad N_2(+1) = 0, \quad N_3(+1) = 1 \Rightarrow u(+1) = \sum_{c=1}^3 N_c(+1) u_c = u_3$$

$$x(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) x_c = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 + N_3(\xi)x_3$$

$$y(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) y_c = N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 + N_3(\xi)y_3$$

Puisque les éléments sont isoparamétriques, les fonctions de forme et les fonctions d'interpolation sont similaires. Pour le problème élastostatique 2D ce qui nous donne:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) u_c = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 + N_3(\xi)u_3 \\ u(\xi) &= \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_c = N_1(\xi) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 + N_2(\xi) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_2 + N_3(\xi) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_3 \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

D'où :

$$\begin{aligned} u_x(\xi) &= \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) (u_x)_c \\ &= N_1(\xi)(u_x)_1 + N_2(\xi)(u_x)_2 + N_3(\xi)(u_x)_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y(\xi) &= \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) (u_y)_c \\ &= N_1(\xi)(u_y)_1 + N_2(\xi)(u_y)_2 + N_3(\xi)(u_y)_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_x(\xi) &= \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) (t_x)_c \\ &= N_1(\xi)(t_x)_1 + N_2(\xi)(t_x)_2 + N_3(\xi)(t_x)_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_y(\xi) &= \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) (t_y)_c \\
 &= N_1(\xi)(t_y)_1 + N_2(\xi)(t_y)_2 + N_3(\xi)(t_y)_3
 \end{aligned}$$

•Étape 2 : Intégration numérique des solutions élémentaires

Dans cette étape, l'étude se poursuit par la mise en œuvre du changement de repères (x, y) qui consiste dans la transformation géométrique, voir interpolation isoparamétrique, dans un nouveau système de coordonnées locales (ξ, η) tel que traité dans le chapitre I.3. Cette transformation permet l'intégration numérique pour calculer la matrice globale [3-6]. La courbe de frontière est maintenant divisée en éléments et l'intégration numérique est effectuée au-dessus de chaque élément en utilisant les coordonnées locales. En raison de la transformation de la variable de la courbe E de frontière, pour la coordonnée intrinsèque ξ , nous devons calculer le Jacobéen de la transformation $J(\xi)$:

$$J(\xi) = \frac{dE}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2} \quad (\text{III.5})$$

Afin de déterminer les composantes de la normale unitaire extérieure, nous définissons le vecteur unitaire tangentiel m , comme suit :

$$m = \frac{m_x}{|m|} e_x + \frac{m_y}{|m|} e_y \quad (\text{III.6})$$

Le module du vecteur m est donné par :

$$m = \sqrt{(m_x)^2 + (m_y)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2} \quad (\text{III.7})$$

Le vecteur tangentiel s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 m_x &= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] \\
 m_y &= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right]
 \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Considérons maintenant le vecteur unitaire e_z dans la direction de z , (normal plan bidimensionnel). Le vecteur normal est donc égal à:

$$\begin{aligned}
n &= m \times e_z \\
&= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] & \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] e_x - \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] e_y
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Par conséquent, les composantes de la normale unitaire extérieure sont donnés par :

$$\begin{aligned}
n_x &= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] \\
n_y &= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right]
\end{aligned} \tag{III.10}$$

Le différentiel des coordonnées $x(\xi)$ et $y(\xi)$ donne respectivement :

$$\begin{aligned}
\frac{dx(\xi)}{d\xi} &= \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} x_1 + \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} x_2 + \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} x_3 \\
\frac{dy(\xi)}{d\xi} &= \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} y_1 + \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} y_2 + \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} y_3
\end{aligned} \tag{III.11}$$

Les fonctions de forme sont données par :

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1(\xi)}{d\xi} &= \xi - \frac{1}{2} \\
\frac{dN_2(\xi)}{d\xi} &= -2\xi \\
\frac{dN_3(\xi)}{d\xi} &= \xi + \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{III.12}$$

Nous pouvons les écrire en coordonnées locales comme suit:

$$\begin{aligned}
C(P) u(P) + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 u(Q) \int_{-1}^{+1} K_1(P, Q) N_c(\xi) J(\xi) d\xi \\
= \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \frac{\partial u(Q)}{\partial n} \int_{-1}^{+1} K_2(P, Q) N_c(\xi) J(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{III.13}$$

Où M est le nombre total d'éléments. Les fonctions intégrales peuvent être rassemblées dans les matrices $A_{m,c}$ et $B_{m,c}$ comme suit :

$$C(P) u(P) + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 u(Q) A_{m,c}(p, Q) = \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \frac{\partial u(Q)}{\partial n} B_{m,c}(p, Q) \tag{III.14}$$

Ceci a pour conséquence un ensemble d'équations algébriques linéaires :

$$[A]\{u\} = [B]\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\} \quad (\text{III.15})$$

Les matrices [A] et [B] contiennent les intégrales des solutions élémentaires K_1 et K_2 respectivement A_{mb} et B_{mc} . Dans le cas où la solution fondamentale est d'une singularité due à des solutions élémentaires contenant des limites de l'ordre $1/r$, $1/\eta$ ou $\ln(1/\eta)$, pour $\eta \rightarrow 0$ la singularité doit être réduite. Puisque les solutions dépendent de la distance entre P et Q, nous examinons maintenant les trois possibilités des positions de P et Q. P et Q dans différents éléments de quadratures gaussiennes standards peuvent être facilement appliqués aux problèmes parce qu'ils ne sont pas singuliers. Dans ce cas là :

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{g=1}^G f(\xi_g) w_g \quad (\text{III.16})$$

Où G est le nombre total des points et x_g coordonnée gaussienne qui sont associés à la fonction poids.

P et Q sont dans le même élément mais il diffèrent ($Q \neq P$). Les intégrales peuvent être évaluées en utilisant la quadrature gaussienne standard.

Jusqu'ici, la matrice de rigidité est symétrique, par contre les matrices [A] et [B] sont asymétriques.

Dans le cas où P et Q sont dans le même élément et $P = Q$, les quadratures gaussiennes standards ne peuvent pas être employées. Nous utilisons la deuxième solution élémentaire, K_2 . La singularité est due à la forme $\ln(1/\eta)$ pour $\eta \rightarrow 0$. Cette forme d'intégrale peut être calculée en employant un arrangement logarithmique spécial de quadrature gaussien, donné par :

$$\int_0^{+1} f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta = \sum_{g_1=1}^{G_1} f(\eta_{g_1}) w_{g_1} \quad (\text{III.17})$$

Où G est le nombre de points d'intégration logarithmique gaussienne, η_{g_1} est la coordonnée gaussienne et w_{g_1} est la fonction poids. A noter que les limites de l'intégration sont maintenant de 0 à 1 au lieu de -1 à 1. Cet intervalle est utilisé dans les intégrales frontières BIE. Une transformation linéaire simple peut être employée pour transformer la variable intégrale de ξ vers η de la manière suivante :

1. Si P est le premier nœud de l'élément : $\eta = .5(1 + \xi)$
2. Si P est le deuxième nœud de l'élément, celui-ci est divisé en deux sous-éléments, pour l'intervalle $-1 < \xi < 0$ nous avons $\eta = -\xi$ et pour l'intervalle $0 < \xi < 1$ nous avons $\eta = \xi$.

3. Si P est le troisième nœud de l'élément, $\eta = 0.5(1 - \xi)$

Examinons de manière approfondie la deuxième solution. Quand P et Q sont sur le même point, nous pouvons la diviser en deux parties distinctes : une partie logarithmique et une partie non-logarithmique. Par conséquent, seulement la partie logarithmique est intégrée par la quadrature gaussienne logarithmique spéciale, tandis que la partie non-logarithmique est intégrée en utilisant la quadrature gaussienne standard. Cependant, il y a une manière d'éviter cette séparation dans la solution singulière et non singulière en divisant la solution par $\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^{+1} f(\eta) d\eta &= \int_0^{+1} \left[\frac{f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)} \right] d\eta \\ &= \int_0^{+1} h(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta \\ &= \sum_{g_l=1}^{G_l} h(\eta_{g_l}) w_{g_l} \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Le côté droit de l'équation ci-dessus respecte les exigences de la forme de l'équation de quadrature logarithmique gaussienne. Cette dernière approche est beaucoup plus simple pour programmer et est légèrement moins précise que l'ancienne approche qui consiste à séparer la solution élémentaire en singulières et non singulières.

Remarque :

La première solution K_1 contient des limites de l'ordre $(1/\eta)$ avec $\eta \rightarrow 0$. Par conséquent, nous ne pouvons plus employer la technique gaussienne de quadrature, même si un nombre très grand de points gaussiens sont utilisés. Mathématiquement, de telles solutions singulières exigent un traitement particulier (voir, le Theocaris et Iokimidis [1977], Heise [1975]).

Pour le problème élastostatique 2D l'équation intégrale de frontière s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_{xx}(P) & C_{xy}(P) \\ C_{yx}(P) & C_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \left(\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} T_{xx}(P,Q) & T_{xy}(P,Q) \\ T_{yx}(P,Q) & T_{yy}(P,Q) \end{bmatrix} N_c(\xi) J(\xi) d\xi \right) \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} \\ = + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \left(\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} U_{xx}(P,Q) & U_{xy}(P,Q) \\ U_{yx}(P,Q) & U_{yy}(P,Q) \end{bmatrix} N_c(\xi) J(\xi) d\xi \right) \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Où M est le nombre total d'éléments, et nous aurons l'équation résultante, en fonction de $[A]$ et $[B]$, suivante:

$$\begin{bmatrix} C_{xx}(P) & C_{xy}(P) \\ C_{yx}(P) & C_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

Ce qui nous donne une équation de la forme :

$$\begin{bmatrix} [A]_{11} & [A]_{12} & [A]_{13} & \cdots \\ [A]_{21} & [A]_{22} & [A]_{23} & \cdots \\ [A]_{31} & [A]_{32} & [A]_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u]_1 \\ [u]_2 \\ [u]_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B]_{11} & [B]_{12} & [B]_{13} & \cdots \\ [B]_{21} & [B]_{22} & [B]_{23} & \cdots \\ [B]_{31} & [B]_{32} & [B]_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [t]_1 \\ [t]_2 \\ [t]_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Où

$$[A]\{u\} = [B]\{t\} \quad (\text{III.22})$$

Étape 3 : Application des conditions de frontière

Après avoir calculé tous les éléments constituant les matrices [A] et [B], introduisons les conditions aux limites pour pouvoir résoudre le système [3-6].

Étape 4 : Résolution

Finalement nous aurons le système suivant d'équations linéaires :

$$[K]\{u\} = \{t\} \quad (\text{III.23})$$

La résolution du système $[A]\{x\} = \{b\}$ consiste à trouver le vecteur x vérifiant le système.

Parfois les inconnues sont au niveau du vecteur $\{x\}$ et $\{b\}$, à condition que le nombre d'inconnues ne dépasse pas le nombre d'équations engendrées par le système.

Les méthodes classiques (Cramer) deviennent très lentes d'exécution dès que le nombre d'inconnues dépasse 4. Lorsque le nombre d'inconnues dépasse 100, les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi sont efficaces.

Dans notre cas, la programmation fera usage de la méthode de Gauss-Seidel.

III.2 Implémentation numérique de l'élément axisymétrique en BEM

L'exécution numérique des solutions élémentaires élastostatiques axisymétriques est semblable à celle des problèmes bidimensionnels [3-6], parce que le problème est formulé dans deux directions seulement. Les intégrales elliptiques peuvent être exprimées comme séries limitées avec une singularité logarithmique, ce qui rend les **solutions élémentaires axisymétriques semblables à celles des solutions élémentaires bidimensionnelles.**

Pour la formulation bidimensionnelle, les coefficients dans la direction z , (A_{rz} et A_{zz}), peuvent être écrits comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{rz} \\ A_{zz} \end{bmatrix}_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \pm \begin{bmatrix} A_{rz} \\ A_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{III.24})$$

Où i et j sont des compteurs pour les lignes et les colonnes, N est le nombre de points nodaux. Les seuls coefficients qui ne sont pas déterminés sont les coefficients diagonaux A_{rz} et A_{zz} qui s'expriment comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{rr} \\ A_{zr} \end{bmatrix}_{ii} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}_i = - \begin{bmatrix} A_{rz} \\ A_{zz} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} u_z \\ u_r \end{bmatrix}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{rz} \\ A_{zr} & A_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}_j \\ + \sum_{j=1}^N \begin{bmatrix} B_{rr} & B_{rz} \\ B_{zr} & B_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} t_r \\ t_z \end{bmatrix}_j \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{III.25})$$

Les équations du coté droit ci-dessous sont déterminées, en arrangeant l'équation et en calculant les déplacements correspondants.

Des contraintes peuvent être employées, en posant comme condition, l'applicabilité à n'importe quelle géométrie, exemples [4]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 1; \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (\text{III.26})$$

Ces états d'effort sont équivalents aux conditions d'efforts plans (bidimensionnels). En utilisant la définition des contraintes de traction et la loi de Hooke, la contrainte de traction peut être déterminée comme suit :

$$t_r = n_r; \quad t_z = 0 \\ u_r = \left(\frac{1-\nu}{E} \right) r; \quad u_z = \left(\frac{-2\nu}{E} \right) z \quad (\text{III.27})$$

En les remplaçant dans l'équation (III.25), les limites diagonales de la matrice $[A]$ dans la direction radiale A_{rz} et A_{zz} , peuvent être explicitement déterminées comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{rr} \\ A_{zr} \end{bmatrix}_{ii} \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\nu}{E} \right) r \\ \left(\frac{-2\nu}{E} \right) z \end{bmatrix}_i = - \begin{bmatrix} A_{rz} \\ A_{zz} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \left(\frac{-2\nu}{E} \right) z \\ \left(\frac{1-\nu}{E} \right) r \end{bmatrix}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{rz} \\ A_{zr} & A_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\nu}{E} \right) r \\ \left(\frac{-2\nu}{E} \right) z \end{bmatrix}_j \\ + \sum_{j=1}^N \begin{bmatrix} B_{rr} & B_{rz} \\ B_{zr} & B_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} n_r \\ 0 \end{bmatrix}_j \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{III.28})$$

Il faut noter, que si le point de départ de lecture p est sur l'axe z , u_r devient nulle et le calcul de la diagonale devient impossible (équation III.28). Heureusement, qu'il n'y a aucun besoin de calculer ces limites diagonales quand p est sur l'axe z , parce que le déplacement radial à l'axe z doit être nul pour tous les problèmes axisymétriques. Par conséquent, il n'y a aucun besoin d'inclure ces équations particulières dans le système global des équations algébriques linéaires. Les efforts de frontière peuvent être calculés à partir des tractions et des déplacements calculés comme décrit précédemment dans la formulation numérique bidimensionnelle. La seule différence entre les problèmes bidimensionnels et les problèmes axisymétriques, réside dans la contrainte angulaire qui est différente de zéro et doit être introduite dans les expressions pour des efforts locaux. Définissant les directions locales (1) et (2), respectivement comme directions tangentielles et normales, les efforts axisymétriques locaux peuvent être déterminés comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) + \left(\frac{\nu}{1-\nu^2} \right) t_2 \\ \sigma_{22} &= t_2 \\ \sigma_{12} &= t_1 \\ \sigma_{\theta\theta} &= E \varepsilon_{\theta\theta} + \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})\end{aligned}\tag{III.29}$$

où $\sigma_{\theta\theta}$ et $\varepsilon_{\theta\theta}$ sont respectivement la contrainte angulaire et la déformation.

III.3 Programmation de l'analyse des milieux axisymétriques par la méthode des éléments frontières (BEM)

La programmation a été effectuée sous l'environnement MATLAB 7.0 car ce dernier présente divers avantages. Le logiciel **MATLAB** constitue un système interactif et convivial de calcul numérique et de visualisation graphique. Destiné au départ aux ingénieurs et aux scientifiques, cet outil intègre des centaines (voir des milliers, selon les versions et les modules autour du noyau Matlab) de fonctions mathématiques et d'analyse numérique (calcul matriciel, traitement de signal, traitement d'images, visualisations graphiques, réseaux de neurones, etc.).

Le programme élaboré est joint en Annexe B.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons élaboré la programmation de la méthode des éléments frontières. La principale caractéristique de ce programme réside dans sa capacité à résoudre des systèmes d'équations représentant des problèmes axisymétriques, ainsi que des problèmes élastostatiques à deux dimensions, en utilisant les éléments quadratiques isoparamétriques. Il se compose d'un programme principal qui fait appel à des sous-programmes dont chacun exécute une tâche bien définie. Il représente une excellente plateforme pour la suite de notre travail.

Chapitre IV

*Implémentation numérique des fissures dans
les milieux axisymétriques*

Introduction

La fissuration (petite crevasse, légère fente) d'une pièce mécanique peut s'interpréter avant tout comme une interruption de la continuité de la matière. Elle constitue un point faible qui peut provoquer une rupture. Elle peut se produire après une grande déformation, le plus souvent après une instabilité plastique qui résulte de la présence de deux effets opposés qui sont : la réduction de la section d'une part et, le durcissement du matériau par écrouissage d'autre part.

L'étude des efforts au voisinage des entailles est d'une grande importance car en déterminant la durée de vie à la fatigue d'une pièce, nous pouvons prédire la naissance, voire découvrir la présence de fissures. Ces dernières peuvent réduire la vie des structures.

Hormis les processus de corrosion chimique des matériaux et des structures, il existe plusieurs processus mécaniques de rupture tel que : le flambage, la rupture ductile par surcharge etc.

Ces processus de rupture peuvent être couplés aux processus chimiques tel un matériau soumis à des contraintes résiduelles d'origine thermique ou chimique.

La fissuration peut résulter de l'existence de défauts de fabrication comme des inclusions ou des vides dans le matériau ou encore des zones d'endommagement à partir desquels des fissures naissent puis se propageront pour parvenir à une taille où la structure atteint la ruine [34].

IV.1. Représentation de la fissuration:

Il y a principalement deux modèles pour représenter la fissuration des structures: la mécanique de l'endommagement et la mécanique élastique linéaire de rupture [4].

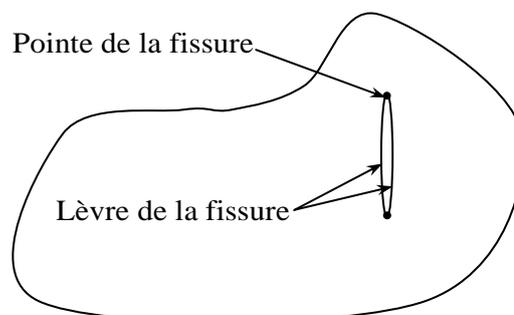


Figure IV.1 Présentation d'une fissure

IV.1.1. La mécanique de l'endommagement :

Selon la mécanique de l'endommagement, les défauts comme les microfissures et la propagation de celles ci sont prises en compte de manière continue par le biais de variables d'endommagement. Celles-ci sont des variables internes qui représentent l'état du matériau. Ainsi, une partie du matériau contenant des défauts possède des variables d'endommagement de valeur élevée, qui donnent une dégradation des propriétés. Dans un modèle simple, la relation entre les contraintes et les déformations ε en présence d'endommagements devient :

$$\sigma = (1 - D) E \varepsilon \quad (\text{IV.1})$$

Où: E est le module de Young et D est la variable d'endommagement variant entre 0 et 1 pour laquelle il reste à établir un modèle d'évolution.

La mécanique de l'endommagement est appropriée pour représenter l'initiation de la fissuration à partir de microfissures mais aussi d'autres modes de dégradation comme le fluage, par exemple.

IV.1.2. La mécanique élastique linéaire de rupture

Les théories de mécanique de rupture supposent que le matériel contient une fissure avec des contraintes infinies à son bout. Cependant, dans la pratique, de telles contraintes infinies ne se produisent pas. Il ya une zone plastique crée autour du bout de la fissure. Les théories élastiques linéaires de la mécanique de rupture supposent que la taille de cette zone plastique est petite comparée à d'autres dimensions de fissures. En 1921 et 1924, Griffith a essayé de décrire la rupture fragile en employant les calculs d'effort d'Inglis [1913] d'un trou elliptique sous le chargement de contraintes. Il a dérivé une expression de contrainte critique, pour caractériser l'évolution de la fissure, à savoir:

$$\sigma_c \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi}} \quad (\text{IV.2})$$

Où a est la longueur de la fissure, γ est l'énergie extérieure spécifique et E est le module de Young. Le côté droit de l'équation contient seulement des constantes matérielles. Griffith a déclaré que la limite $\sigma_c a^{1/2}$ devrait être une propriété matérielle intrinsèque. Il a vérifié ceci par ses expériences sur la rupture du verre dur. Cependant, la théorie de Griffith souffre de ses limites car elle ne s'applique qu'aux fissures sous chargement normal et que différentes configurations de fissures et charges appliquées ne sont pas prises en considération. Par contre Irwin [1957] a examiné de manière

approfondie l'état de l'effort dans la proximité immédiate du bout de la fissure (à la différence de l'approche de l'énergie de Griffith). Il a proposé trois modes de rupture basés sur le mouvement relatif aux aspects de la fissure, tel que indiqué par la Fig V .4, en utilisant l'analyse des variables complexes de Westergaard [1939] et les expressions de séries dérivées d'Irwin pour les efforts et les déplacements à proximité du bout de la fissure. Les expressions ci dessous excluent des limites d'ordre supérieur de r (où r est le rayon ou la distance du bout de la fissure). r est considéré très petit par rapport à d'autres dimensions de la fissure [26-32-34].

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\alpha}{2} \left(-2 - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \right) \right] \quad (IV.3)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\alpha}{2} \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \right] \quad (IV.4)$$

$$\sigma_{33} = \frac{3 - \nu - k(1 + \nu)}{4\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (IV.5)$$

$$\sigma_{23} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_{III} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (IV.6)$$

$$\sigma_{13} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi r}} K_{III} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (IV.7)$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{2\pi r}}{8\pi\mu} \left[K_I \left((2k - 1) \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} \right) + K_{II} \left((2k + 3) \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} \right) \right] \quad (IV.8)$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{2\pi r}}{8\pi\mu} \left[K_I \left((2k + 1) \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3\alpha}{2} \right) + K_{II} \left((3 - 2k) \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2} \right) \right] \quad (IV.9)$$

$$u_3 = \frac{2\sqrt{2\pi r}}{\pi\mu} K_{III} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (IV.10)$$

Les directions locales 1 et 2 se rapportent respectivement aux directions tangentielles et normales, alors que la direction 3 se rapporte à la normale x/y (Figure IV .2).

La mécanique de la rupture suppose l'existence d'une ou de plusieurs macro fissures présentes de part et d'autre dans le matériau. Les déplacements, les déformations et les contraintes sont discontinus. La mécanique de la rupture peut s'appliquer soit :

- En conception et en dimensionnement après une analyse d'endommagement qui prédit une zone d'endommagement qui permet de modéliser la fissure.
- En production si une fissure est décelée dans une structure en service pour évaluer la durée de vie résiduelle de celle-ci.

Les fissures sont les nouvelles frontières internes. On appelle *lèvres de la fissure* les deux surfaces qui forment la nouvelle frontière. Les lèvres sont reliées par une courbe appelée le *front de la fissure*. Cette courbe est **ouverte** pour une fissure **débouchante** et fermée pour une fissure **interne**. Dans une analyse ramenée à deux dimensions, les lèvres sont assimilées à deux courbes (deux segments de droite dans le cas le plus simple) et le front est assimilé à un simple point pour une fissure débouchante et à deux points pour une fissure interne. On parle aussi de *pointe(s) de la fissure*. Notons que dans la majorité des travaux de recherche, les chercheurs s'intéressent beaucoup au cas bidimensionnel. Récemment, en application numérique, il y a eu un certain nombre de travaux ayant eu pour objectif de simuler la propagation de fissures quelconques à trois dimensions, ce qui est le défi majeur de ces dernières années en mécanique de la rupture [40].

IV.2. Modes fondamentaux de la rupture et facteurs d'intensité de contrainte

Nous nous intéressons au champ de contrainte au voisinage du front de la fissure. Ces contraintes dépendent de la longueur de la fissure, des forces appliquées et de la configuration géométrique. Dans l'hypothèse d'un matériau élastique, les contraintes sont infinies au front de la fissure. Irwin [1957], en s'appuyant sur les travaux du pionnier Griffith [1920], a montré que les contraintes au voisinage du front de la fissure peuvent s'exprimer sous la forme:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\alpha) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\alpha) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\alpha) + \sigma_{ij}^0 + o(\sqrt{r}) \quad (IV.11)$$

Où r et α sont les coordonnées polaires locales:

Les fonctions f_{ij} sont des fonctions connues et σ_{ij}^0 sont les contraintes finies au front de la fissure. Les trois grandeurs importantes de l'équation (IV.11) sont K_I , K_{II} et K_{III} . Ce sont les facteurs d'intensité de contrainte qui correspondent aux trois modes de base de déplacement relatif aux lèvres de la fissure. Ils dépendent de la longueur de la fissure, de la géométrie et des charges appliquées. Ils déterminent à eux seuls les champs asymptotiques des contraintes et des déplacements. Pour cette raison, ce sont ces facteurs qui interviendront dans les critères de fissuration [40].

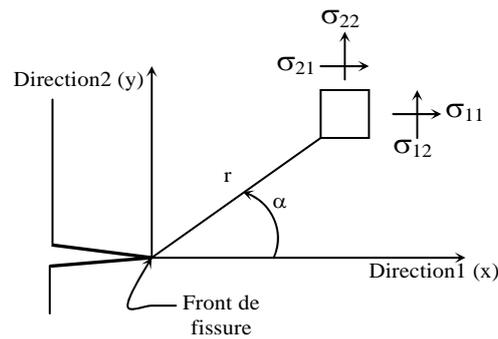


Figure IV.2 schéma d'une fissure

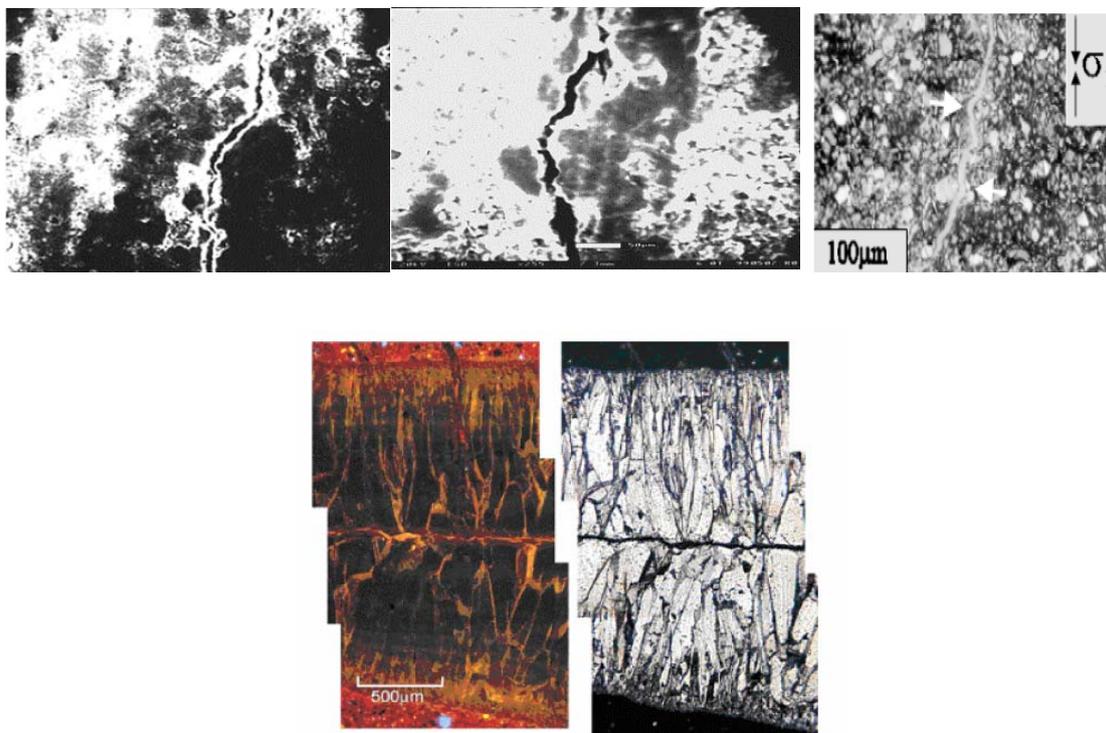


Figure IV.3 Observation des fissures par microscope électronique (ANDRA(1999)/Bounenni(2002) /Scotchman(2002)

Les trois modes fondamentaux sont:

Mode I (Mode d'ouverture) :

Dans ce cas, les lèvres de la fissure s'écartent l'une de l'autre selon la direction y qui apparaît lors d'un chargement σ_y . Le facteur d'intensité de contrainte du mode I est défini par:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2 \pi r} \sigma_{yy}(r, 0, 0) \quad (\text{IV.12})$$

En cas de compression, il ne peut être négatif car cela signifierait que les lèvres se pénètrent et il faut alors tenir compte du contact entre les lèvres.

Mode II (Mode de glissement)

Dans ce cas, les lèvres glissent l'une sur l'autre selon la direction perpendiculaire au front de fissure x , qui apparaît lors d'un cisaillement τ_{xy} . Le facteur d'intensité de contrainte du mode II est défini par:

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2 \pi r} \tau_{yx}(r, 0, 0) \quad (IV.13)$$

Mode III (Mode de déchirement)

Dans ce cas, les lèvres se déplacent l'une par rapport à l'autre selon la direction parallèle au front de la fissure z qui apparaît lors d'un cisaillement τ_{yz} . Le facteur d'intensité de contrainte du mode III est défini par:

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2 \pi r} \tau_{yz}(r, 0, 0) \quad (IV.14)$$

La superposition de ces 3 modes est suffisante pour décrire le cas le plus général de déplacement des lèvres de la fissure.

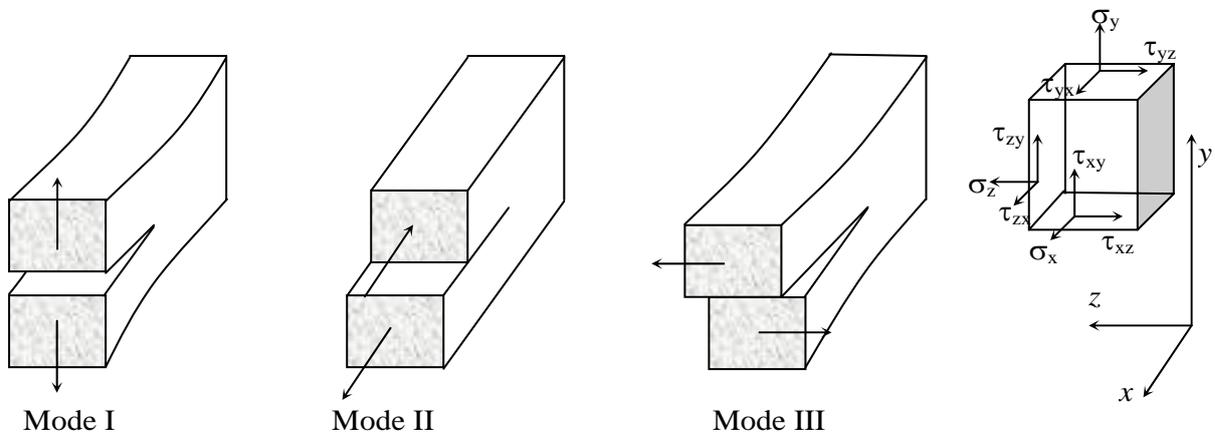


Figure IV.4 Les trois modes fondamentaux de rupture

Où α est l'angle mesuré du plan de la progression de la fissure dans le sens inverse des aiguilles d'une montre **Fig IV.2**. Le paramètre k se définit comme suit :

$$k = 3 - 4\nu \quad (\text{Déplacements plans}) \quad (IV.15)$$

$$k = \frac{3 - \nu}{3 + \nu} \quad (\text{Contraintes planes}) \quad (IV.16)$$

Les efforts au bout de la fissure sont proportionnels à $r^{-1/2}$ tandis que les déplacements sont proportionnels à $r^{1/2}$. G est un autre paramètre qui est défini comme le taux de

dissipation d'énergie de contrainte pour un changement par accroissement de la longueur de la fissure. Il s'écrit comme suit :

$$G = \frac{\partial U}{\partial a} \quad (\text{IV.17})$$

Où U est l'énergie de contrainte stockée par l'application des forces externes. Irwin a également identifié un rapport simple entre le taux de dissipation d'énergie G, la contrainte et le facteur d'intensité de contrainte en employant des travaux virtuels, ce qui donne :

$$G_I = \frac{k+1}{8\mu} (K_I)^2 \quad (\text{IV.18})$$

$$G_{II} = \frac{k+1}{8\mu} (K_{II})^2 \quad (\text{IV.19})$$

$$G_{III} = \frac{k+1}{8\mu} (K_{III})^2 \quad (\text{IV.20})$$

Où G_I , G_{II} et G_{III} , sont respectivement les taux de dissipation de l'énergie de contrainte pour les modes I, II et III. Par conséquent, comme cité précédemment, la rupture peut être prévue en comparant la valeur K pour une géométrie donnée de la fissure et des charges externes appliquées avec la valeur critique K_c de K. Elle représente le seuil de la rupture. Cette valeur est déterminée par l'essai expérimental. Le comportement à proximité des fissures axisymétriques est identique à celui des contraintes planes bidimensionnelles. Cependant, dans les problèmes tridimensionnels, la fissure n'est plus un point mais une ligne. Dans la pratique, nous supposons que la plupart des fissures tridimensionnelles peuvent être traitées en tant que fissures planes avec la singularité de $r^{-1/2}$. L'idée du facteur K_c est très semblable au concept d'effort de fléchissement. Le rendement se produit seulement si l'effort excède l'effort de fléchissement, indépendamment de la géométrie ou des charges externes appliquées. Par conséquent, l'effort de fléchissement (comme la dureté de rupture K_c) est une propriété matérielle.

IV.3 Propagation des fissures

Comme dans la section précédente, nous considérons un corps élastique linéaire, homogène et isotrope, qui subit de petites déformations et de petits déplacements.

Dans cette partie, nous nous limitons au cas bidimensionnel où la fissure présente dans le corps est représentée par une courbe. Pour cette étude, nous plaçons un repère dont

l'origine se trouve sur la pointe de la fissure. L'axe x suit le prolongement de la fissure dans un système plan de coordonnées xy .

La propagation des fissures dans un matériau est l'une des formes de fatigue. Elle se rapporte à la fissuration lente sous des conditions de chargement cyclique où les effets dynamiques sont négligés. La fissuration par fatigue se déroule généralement en trois phases [41].

IV.3.1 Initiation:

A partir de défauts comme des vides ou des inclusions, se forment des micro-fissures qui finissent par se rejoindre pour former une ou plusieurs macro-fissures dominantes (faisceau).

IV.3.2 Propagation:

Sous l'effet de la charge alternée entre σ_{\min} et σ_{\max} cette ou ces quelques macro fissures se propagent.

IV.3.3 Ruine

Quand une des fissures atteint une taille telle que, le facteur d'intensité de contrainte K_{max} correspondant à la charge maximale σ_{\max} de valeur K_c , défini comme **facteur d'intensité de contrainte caractéristique** du matériau appelée **ténacité**, cette fissure se propage rapidement en quelques cycles. Quand K_c atteint une valeur critique, la rupture se produit rapidement. Cette valeur de K_c prend la dénomination de seuil de la rupture des matériaux. Elle est indépendante des propriétés, de la géométrie ou des charges appliquées. La théorie de rupture n'a pas évolué depuis Inglis [1913] qui a utilisé des considérations énergétiques et des solutions d'effort jusqu'à Griffith [1921, 1924] qui a décrit la rupture. En 1957, Irwin a défini le facteur d'intensité de contrainte pour caractériser les fissures en utilisant l'analyse de variable complexe de Westergaard [1939], pour dériver des expressions d'efforts et des déplacements à proximité de la fissure. Des techniques analytiques, impliquant habituellement des équations mathématiques très poussées, ont été développées pour une variété de configurations communes de la fissure notamment par Sneddon [1946], Lowengrub [1966] et Rice [1968]. Ces solutions analytiques sont habituellement limitées aux géométries et aux conditions de charge relativement simples, et exigent une bonne connaissance des mathématiques. Cependant, les procédures expérimentales, sont essentielles pour déterminer la valeur critique de K (essai destructif). Cette méthode reste prohibitive à

travers le temps et les moyens à mettre en œuvre pour déterminer le facteur K pour une série de formes de fissures. Le facteur d'intensité de contrainte ne devrait pas être confondu avec le facteur de concentration d'effort qui est la valeur de l'effort d'une entaille ou d'un trou divisé par l'effort appliqué. Le facteur d'intensité de contrainte n'est pas une valeur d'effort en tant que tel, mais une mesure. Elle s'amorce là où on peut connaître sa longueur critique quand elle commence à se propager [4].

IV.4 Calcul du facteur d'intensité de contrainte

La valeur du facteur d'intensité de contrainte joue un rôle fondamental dans la prévision, d'une éventuelle propagation d'une fissure. Les résultats expérimentaux et analytiques existent pour plusieurs géométries de la fissure. Les méthodes analytiques incluent des fonctions complexes d'effort (collocation de frontière). Certaines des procédures numériques qui ont été à l'origine développées pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte en utilisant la méthode FEM sont directement applicables dans la BEM. Ces méthodes incluent des techniques d'extrapolation de la prolongation virtuelle de la fissure. Trois méthodes numériques sont décrites ci après [4]:

IV.4.a Méthodes d'extrapolation de déplacement et d'effort

Dans cette approche, les expressions de bout de la fissure de déplacement et d'effort sont employées pour calculer K_I . Substitutions a par π dans l'équation [4], (IV.9) nous aurons :

$$u_n = \frac{1-\nu}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_I \quad (\text{IV.21})$$

Où u_n est le déplacement normal d'ouverture de la face de la fissure. Le réarrangement :

$$K_I = \frac{E\sqrt{2\pi}}{4(1-\nu^2)} \left[\frac{u_n}{\sqrt{r}} \right]_{r \rightarrow 0} \quad (\text{IV.22})$$

Cette expression est strictement valable quand r tend vers 0. Une fois la ligne droite est extrapolée quand $r=0$ nous obtenons une valeur de K_I dans l'équation (IV.22).

De même, nous pouvons employer les expressions de K_I en termes d'efforts dans l'équation (IV.8) pour obtenir une autre expression de K_I au bout de la fissure où $\alpha = 0$, en termes d'effort normal, soit :

$$\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_I \quad (\text{IV.23})$$

En réarrangeant l'équation ci-dessus nous pouvons obtenir une expression explicite pour K_I en termes de quantité $(\sigma_n r^{1/2})$, ce qui donne:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \left[\sigma_n \sqrt{r} \right]_{r \rightarrow 0} \quad (IV.24)$$

Les méthodes d'extrapolation ont été employées pour la première fois par Watwood [1969] et par Chan [1970], dans l'analyse de configurations bidimensionnelles de fissures par la FEM. Ils ont constaté que la courbe devient linéaire à une certaine distance du bout de la fissure. Plus la maille autour du bout de la fissure est fine, plus la ligne droite est étroite. Il s'agit d'extrapoler la ligne quand $r = 0$.

IV.4.b Méthodes de pente de déplacement et de contrainte

Ces méthodes sont semblables à la précédente. Dans cette méthode une ligne droite est tracée, et sa pente est proportionnelle au facteur d'intensité de contrainte. Plutôt que d'extrapoler la ligne pour la valeur $r = 0$, nous pouvons tracer le déplacement u_n par rapport $r^{1/2}$ pour obtenir une ligne droite de pente proportionnelle à K_I , (IV.21) devient:

$$u_n = \frac{1-\nu}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_I \sqrt{r} \quad (IV.25)$$

Il est plus facile de tracer une ligne droite passant par ces points parce que la ligne passe par l'origine ($u_n = 0$ à $r = 0$). L'équation de contrainte (IV.23) peut être reformulée comme suit :

$$\frac{1}{\sigma_n} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{K_I} \right) \sqrt{r} \quad (IV.26)$$

La ligne droite dont la pente est proportionnelle à $1/K_I$ représente $1/\sigma_n$ en fonction de $r^{1/2}$. Elle passe par l'origine puisque σ_n tend vers l'infini pour $r=0$.

L'étude de Becker et Parker [1987] avait pour but d'utiliser les méthodes décrites auparavant pour calculer K_I . En faisant varier les tailles et les géométries de la fissure, ils ont conclu que la méthode d'extrapolation du déplacement est la méthode la plus fiable pour calculer K_I pour n'importe quelle taille de la fissure [4].

IV.4.c Méthodes d'énergie

Les méthodes d'énergie sont basées sur le calcul numérique du taux d'énergie dissipé par une contrainte, où G est défini par l'équation (IV.17). Le facteur d'intensité de contrainte peut alors être obtenu à partir du rapport des équations (IV.18)

à (IV.20). Le différentiel de l'énergie de contrainte de la longueur de la fissure peut être exprimé par la formule suivante:

$$G_I = \frac{\Delta U}{\Delta a} \quad (IV.27)$$

$$G_I = \frac{U_2 - U_1}{a_2 - a_1}$$

Où U_1 et U_2 sont les énergies de contrainte liées aux longueurs a_1 et a_2 de la fissure. Cette approximation n'est valable que si la différence entre les deux longueurs de la fissure est très petite. En pratique, deux traitements de phase ou plus sont exécutés pour le même problème relatif à une fissure malgré que la variation de la longueur soit faible (négligeable). Le principal avantage des méthodes d'énergie est que le champ de contraintes au bout de la fissure apporte une contribution relativement petite à toute l'énergie de contrainte du corps fissuré. Par conséquent, des mailles plus simples peuvent être employées car cette méthode est faiblement dépendantes des efforts et des déplacements localisés au bout de la fissure, comme démontré par Watwood [1969]. Cependant, l'inconvénient de cette méthode est l'incertitude relative au choix de la taille appropriée de l'incrément de la fissure Δa à employer dans la différentiation numérique de l'équation IV.27. En outre, le CPU (*central processing unit*) ou (*Unité centrale de traitement*) consomme plus de temps parce que des itérations supplémentaires sont nécessaires. Une autre approche d'énergie indépendante du pas de calcul à l'intérieur du domaine de la solution, est utilisée pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte. Rice [1968] a formulé *J-contour intégral* comme suit:

$$J = \int_{\Gamma^*} \left(W dx_2 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS^* \right) \quad (IV.27)$$

Où Γ^* est le pas du chemin de la fissure à l'intérieur du domaine de solution dans le plan, dS^* est la distance différentielle du pas et W est la densité d'énergie de contrainte. *J-intégral* est égal au taux de dissipation de l'énergie de contrainte, G .

Elle est considérée comme méthode précise et fiable pour calculer K_I . Ces problèmes bidimensionnels sont traités par Hayes et Chan [1970]. Le comportement des efforts près des fissures, dans des milieux axisymétriques, est identique à celui des contraintes planes (Broberg [1976] et Bergkvist [1977]) [4].

IV.5 Eléments de singularité

En traitant des problèmes de rupture, la difficulté essentielle résulte de l'effort infini présent au bout de la fissure. La nature de la singularité au bout de la fissure est connue, d'où l'intérêt d'utiliser des éléments quadratiques isoparamétriques. Ils sont identiques à ceux des éléments de la FEM, mais avec une dimensionnalité réduite. Tan et Fenner [1978], Becker et Fenner [1985], ont démontré que ces éléments sont très fiables, respectivement dans des problèmes bidimensionnels, tridimensionnels et axisymétriques en mécanique de rupture. Nous considérons un élément quadratique isoparamétrique avec un nœud au bout de la fissure (Fig. IV.5) [4]. Le paramètre intrinsèque (ξ) est employé dans les fonctions de forme comme traité auparavant, ce qui donne :

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) x_c \\ y(\xi) &= \sum_{c=1}^3 N_c(\xi) y_c \end{aligned} \tag{IV.28}$$

La fonction quadratique $N_c(\xi)$ a été décrite dans les chapitres précédents. ρ est défini comme paramètre local qui mesure la distance du bout de la fissure à son origine pour $\rho=0$, et au troisième nœud de l'élément pour $\rho=L$. Nous cherchons la position de α du deuxième nœud qui n'est plus un point médian, et qui engendrera une singularité d'effort ou de contrainte de l'ordre $\rho^{-1/2}$ au bout de la fissure.

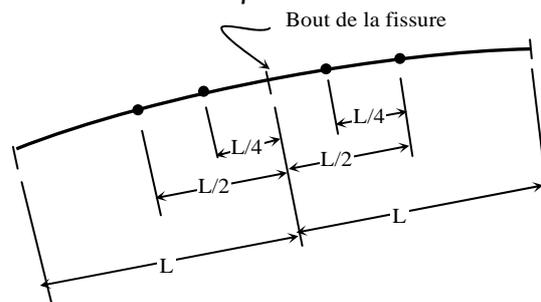


Figure IV.5-a Élément de singularité pour les problèmes bidimensionnels et axisymétrique

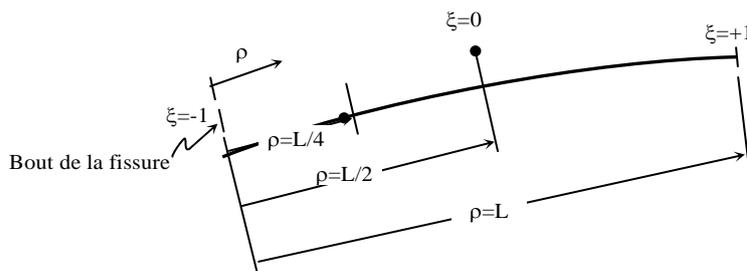


Figure IV.5-b Le point 1/4 paramètre de singularité de l'élément

En utilisant les fonctions de forme quadratique, nous pouvons définir ρ en fonction de ξ comme suit :

$$\rho = \frac{-\xi}{2}(1+\xi) \cdot 0 + (1-\xi^2)\alpha L + \frac{\xi}{2}(1+\xi)L \quad (\text{IV.29})$$

Pour $L=1$ nous pouvons simplifier l'équation comme suit :

$$\rho = (1-\xi^2)\alpha + \frac{\xi}{2}(1+\xi) \quad (\text{IV.30})$$

C'est une équation quadratique dont le paramètre ξ peut être déterminé comme suit :

$$\xi = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8(\alpha-\rho)(1-2\alpha)}}{2(1-2\alpha)} \quad (\text{IV.31})$$

Le différentiel de ρ en respectant ξ peut être facilement calculé à partir de l'équation (IV.30) comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = (1-2\alpha)\xi + \frac{1}{2} \quad (\text{IV.32})$$

Substitutions ξ dans l'équation (V.31)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \sqrt{1-8(\alpha-\rho)(1-2\alpha)} \quad (\text{IV.33})$$

Puisque l'effort est proportionnel à la contrainte, celle ci doit être infinie au bout de la fissure. La contrainte dans la direction de l'élément peut être écrite comme suit :

$$\text{contrainte} = \frac{\partial u_\rho(\xi)}{\partial \rho} = \frac{\partial u_\rho(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \quad (\text{IV.34})$$

La Substitution de l'équation (IV.32) dans l'équation (IV.34) donne:

$$\text{contrainte} = \frac{\partial u_\rho(\xi)}{\partial \xi} \left(\frac{1}{(1-2\alpha)\xi + \frac{1}{2}} \right) \quad (\text{IV.35})$$

Cette dernière tend vers l'infini si :

$$(1-2\alpha)\xi + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{C'est-à-dire} \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\xi} + 1 \right) \quad (\text{IV.36})$$

Au bout de la fissure $\xi=-1$. La valeur de α pour que la contrainte soit infinie est :

$$\alpha = \frac{1}{4} \quad (\text{IV.37})$$

Par conséquent, en plaçant le deuxième nœud de l'élément quadratique isoparamétrique en position 1/4 (près du bout de la fissure), les efforts et les contraintes deviennent infinies au bout de la fissure. Cependant, pour améliorer la précision de ces éléments, les efforts et les contraintes doivent montrer une singularité de l'ordre $\rho^{-1/2}$. Ceci est automatiquement réalisé par le positionnement (1/4) du deuxième nœud. En utilisant les fonctions quadratiques de forme, le déplacement le long de la direction de l'élément peut être écrit comme suit :

$$u_{\rho}(\xi) = \frac{-\xi}{2}(1-\xi)u_1 + (1+\xi)(1-\xi)u_2 + \frac{\xi}{2}(1-\xi)u_3 \quad (\text{IV.38})$$

D'où :

$$\frac{\partial u_{\rho}(\xi)}{\partial \xi} = \left(\xi - \frac{1}{2}\right)u_1 + (-2 - \xi)u_2 + \frac{\xi}{2}\left(\xi + \frac{1}{2}\right)u_3 \quad (\text{IV.39})$$

La Substitution de $\alpha=1/4$ dans l'équation (IV.31), donne :

$$\xi = 2\sqrt{\rho} - 1 \quad (\text{IV.40})$$

La Substitution de cette valeur de ξ et l'équation différentielle (IV.39) dans l'équation (IV.35), donnent:

$$\text{contrainte} = \left(2 - \frac{3}{2\sqrt{\rho}}\right)u_1 + \left(\frac{2}{\sqrt{\rho}} - 4\right)u_2 + \left(2 - \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\right)u_3 \quad (\text{IV.41})$$

Cette équation démontre clairement qu'au bout de la fissure, lorsque ρ tend vers 0, $\rho^{-1/2}$ est singulière. Ceci signifie que les nœuds de l'élément satisfont les solutions classiques pour le déplacement et l'effort au bout de la fissure. Un autre avantage important en employant ces éléments, est qu'ils peuvent être facilement mis en application dans un langage machine sans programmation additionnelle parce qu'ils se suffisent du remplacement du point médian de l'élément quadratique dans la position 1/4.

IV.6 Résultat et interprétation

IV.6.1 Exemple d'un problème axisymétrique (cylindre)

Il concerne un cylindre à paroi épaisse, pressurisé, de rayon intérieur R_1 et de rayon externe R_2 . La pression est appliquée sur la paroi interne du cylindre. Nous considérons que le cylindre est assez long pour que des états plans de contrainte soient applicables. Les valeurs numériques utilisées dans cet exemple sont $R_1 = 3.0$, $R_2 = 6.0$, $P_1 = 1.0$ avec les propriétés du matériau $E = 1.0$ et $\nu = 0.3$. Les solutions numériques de ce problème sont.

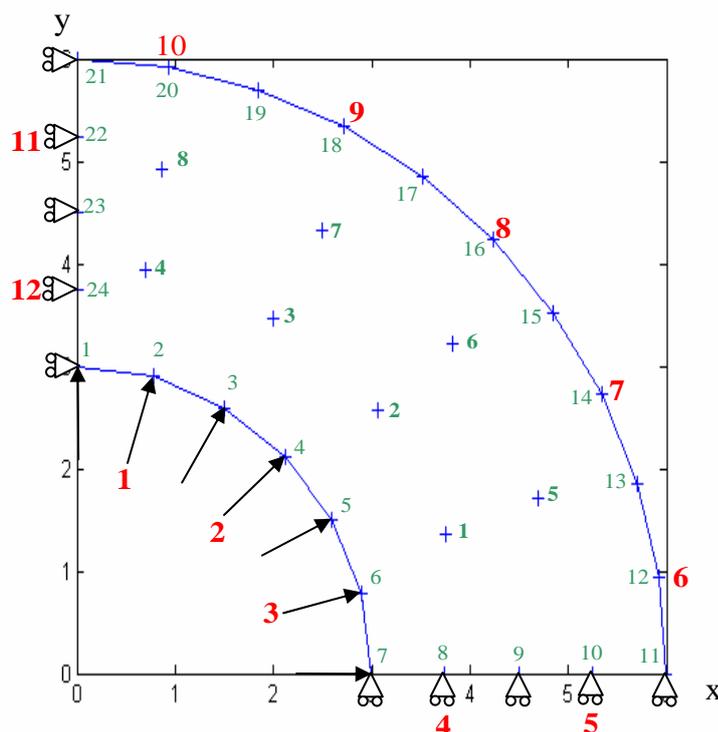


Figure IV .1 Corps axisymétrique
(Un cylindre à paroi épaisse, pressurisé)

IV.6.1.1 Introduction des données et conditions aux frontières

Les coordonnées des nœuds :

| noeuds | X | Y | noeuds | X | Y |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 0 | 2.9970 | 13 | 5.7006 | 1.8522 |
| 2 | 0.7757 | 2.8949 | 14 | 5.3407 | 2.7212 |
| 3 | 1.4985 | 2.5955 | 15 | 4.8492 | 3.5232 |
| 4 | 2.1192 | 2.1192 | 16 | 4.2384 | 4.2383 |
| 5 | 2.5955 | 1.4985 | 17 | 3.5232 | 4.8492 |
| 6 | 2.8949 | 0.7757 | 18 | 2.7212 | 5.3407 |
| 7 | 2.9970 | 0 | 19 | 1.8522 | 5.7006 |
| 8 | 3.7462 | 0 | 20 | 0.9377 | 5.9202 |
| 9 | 4.4955 | 0 | 21 | 0 | 5.9940 |
| 10 | 5.2447 | 0 | 22 | 0 | 5.2447 |
| 11 | 5.9940 | 0 | 23 | 0 | 4.4955 |
| 12 | 5.9202 | 0.9377 | 24 | 0 | 3.7462 |

Points internes

| point | X | Y |
|-------|--------|--------|
| 1 | 3.7588 | 1.3681 |
| 2 | 3.0642 | 2.5712 |
| 3 | 2.0000 | 3.4641 |
| 4 | 0.6946 | 3.9392 |
| 5 | 4.6985 | 1.7101 |
| 6 | 3.8302 | 3.2139 |
| 7 | 2.5000 | 4.3301 |
| 8 | 0.8682 | 4.9240 |

Table connectivité

| éléments | Noeud1 | Noeud2 | Noeud3 |
|----------|--------|--------|--------|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 5 | 6 | 7 |
| 4 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 11 | 12 | 13 |
| 7 | 13 | 14 | 15 |
| 8 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 19 | 20 | 21 |
| 11 | 21 | 22 | 23 |
| 12 | 23 | 24 | 1 |

a- Conditions concernant le déplacement :

| Elément | Dépl1 | Dépl2 | Dépl2 | Dépl3 |
|---------|-------|-------|-------|-------|
| 4 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 1 | 0 | 0 | 0 |

b- Conditions concernant les contraintes :

| Elément | Cont(XX) | Cont(YY) | Cont(XY) |
|---------|----------|----------|----------|
| 1 | -1 | -1 | 0 |
| 0 | -1 | -1 | 0 |
| 0 | -1 | -1 | 0 |
| 2 | -1 | -1 | 0 |
| 0 | -1 | -1 | 0 |
| 0 | -1 | -1 | 0 |
| 3 | -1 | -1 | 0 |
| 0 | -1 | -1 | 0 |
| 0 | -1 | -1 | 0 |

IV.6.1.2 Résultats

Table connectivité pour les X

| éléments | Noeud1 | Noeud2 | Noeud3 |
|----------|--------|--------|--------|
| 1 | 0 | 0.7765 | 1.5000 |
| 2 | 1.5000 | 2.1213 | 2.5981 |
| 3 | 2.5981 | 2.8978 | 3.0000 |
| 4 | 3.0000 | 3.7500 | 4.5000 |
| 5 | 4.5000 | 5.2500 | 6.0000 |
| 6 | 6.0000 | 5.9261 | 5.7063 |
| 7 | 5.7063 | 5.3460 | 4.8541 |
| 8 | 4.8541 | 4.2426 | 3.5267 |
| 9 | 3.5267 | 2.7239 | 1.8541 |
| 10 | 1.8541 | 0.9386 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 |

Table connectivité pour les Y

| éléments | Noeud1 | Noeud2 | Noeud3 |
|----------|--------|--------|--------|
| 1 | 3.0000 | 2.8978 | 2.5981 |
| 2 | 2.5981 | 2.1213 | 1.5000 |
| 3 | 1.5000 | 0.7765 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0.9386 | 1.8541 |
| 7 | 1.8541 | 2.7239 | 3.5267 |
| 8 | 3.5267 | 4.2425 | 4.8541 |
| 9 | 4.8541 | 5.3460 | 5.7063 |
| 10 | 5.7063 | 5.9261 | 6.0000 |
| 11 | 6.0000 | 5.2500 | 4.5000 |
| 12 | 4.5000 | 3.7500 | 3.0000 |

IV.6.1.2.a Déplacement de la frontière

| Noeuds | Coord X | Coord Y | Depla X | Depla Y | Normal Dépla | Tang Dépla |
|--------|---------|---------|---------|---------|--------------|------------|
| 1 | 0 | 2,997 | 0 | 5,7116 | 0 | -5,7116 |
| 2 | 0,77568 | 2,8949 | 1,4776 | 5,5172 | -5,7116 | -0,0005496 |
| 3 | 1,4985 | 2,5955 | 2,8553 | 4,9461 | -5,7111 | -0,025757 |
| 4 | 2,1192 | 2,1192 | 4,0387 | 4,0387 | -5,7115 | 1,43E-06 |
| 5 | 2,5955 | 1,4985 | 4,9461 | 2,8553 | -5,7111 | -0,024375 |
| 6 | 2,8949 | 0,77568 | 5,5172 | 1,4776 | -5,7116 | 5,52E-04 |
| 7 | 2,997 | 0 | 5,7116 | 0 | 0 | 5,7116 |
| 8 | 3,7462 | 0 | 4,8009 | 0 | 0 | 4,80E+00 |
| 9 | 4,4955 | 0 | 4,2401 | 0 | 0 | 4,2401 |
| 10 | 5,2447 | 0 | 3,8761 | 0 | 0 | 3,88E+00 |
| 11 | 5,994 | 0 | 3,6346 | 0 | 3,6346 | -0,0036352 |
| 12 | 5,9202 | 0,93767 | 3,5893 | 0,56849 | 3,6341 | -7,27E-05 |
| 13 | 5,7006 | 1,8522 | 3,4563 | 1,1229 | 3,6342 | -0,0038164 |
| 14 | 5,3407 | 2,7212 | 3,2382 | 1,6497 | 3,6342 | -5,23E-05 |
| 15 | 4,8492 | 3,5232 | 2,9402 | 2,1361 | 3,6342 | -0,0043782 |
| 16 | 4,2384 | 4,2383 | 2,5698 | 2,5697 | 3,6342 | -4,79E-05 |
| 17 | 3,5232 | 4,8492 | 2,1361 | 2,9402 | 3,6342 | -0,0037181 |
| 18 | 2,7212 | 5,3407 | 1,6498 | 3,2382 | 3,6342 | 5,07E-05 |
| 19 | 1,8522 | 5,7006 | 1,1229 | 3,4563 | 3,6342 | -0,0033198 |
| 20 | 0,93766 | 5,9202 | 0,56848 | 3,5893 | 3,6341 | 8,01E-05 |
| 21 | 0 | 5,994 | 0 | 3,6346 | 0 | -3,6346 |
| 22 | 0 | 5,2447 | 0 | 3,876 | 0 | -3,876 |
| 23 | 0 | 4,4955 | 0 | 4,2401 | 0 | -4,2401 |
| 24 | 0 | 3,7462 | 0 | 4,8009 | 0 | -4,8009 |

IV.6.1.2.b Traction à la frontière

| Elém | Noeuds | Contrainte /X | Contrainte /Y | Normal / Contrainte | Tangent / Contrainte | Angle / Normal |
|------|--------|---------------|---------------|---------------------|----------------------|----------------|
| 1 | 1 | 0,0042925 | 0,99899 | -0,999 | 0 | 269,48 |
| 0 | 2 | 0,25854 | 0,99553 | -0,999 | 0 | 254,75 |
| 0 | 3 | 0,49575 | 0,86731 | -0,999 | 0 | 240,01 |
| 2 | 3 | 0,50335 | 0,86293 | -0,999 | 0 | 239,5 |
| 0 | 4 | 0,7064 | 0,7064 | -0,999 | 0 | 224,78 |
| 0 | 5 | 0,86293 | 0,50335 | -0,999 | 0 | 2,10E+02 |
| 3 | 5 | 0,86731 | 0,49575 | -0,999 | 0 | 209,54 |
| 0 | 6 | 0,96496 | 0,25854 | -0,999 | 0 | 1,95E+02 |
| 0 | 7 | 0,99899 | 0,0042924 | -0,999 | 0 | 180,07 |
| 4 | 7 | 0 | -1,6422 | 1,6422 | 0 | 2,70E+02 |
| 0 | 8 | 0 | -1,1935 | 1,1935 | 0 | 269,73 |
| 0 | 9 | 0 | -0,91561 | 0,91561 | 0 | 2,70E+02 |
| 5 | 9 | 0 | -0,91561 | -0,091561 | 0 | 269,73 |
| 0 | 10 | 0 | -0,77032 | -0,077032 | 0 | 2,70E+02 |
| 0 | 11 | 0 | -0,6621 | -0,06621 | 0 | 269,73 |
| 6 | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,057249 |
| 0 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8,9922 |
| 0 | 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 17,927 |
| 7 | 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18,039 |
| 0 | 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 26,972 |
| 0 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 35,904 |
| 8 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 36,032 |
| 0 | 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 44,955 |
| 0 | 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 53,876 |
| 9 | 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 54,006 |
| 0 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 62,938 |
| 0 | 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 71,871 |
| 10 | 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 71,983 |
| 0 | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 80,918 |
| 0 | 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 89,853 |
| 11 | 21 | -0,6621 | 0 | 0,6621 | 0 | 179,82 |
| 0 | 22 | -0,77032 | 0 | 0,77032 | 0 | 179,82 |
| 0 | 23 | -0,91561 | 0 | 0,91561 | 0 | 179,82 |
| 12 | 23 | -0,91561 | 0 | 0,91561 | 0 | 179,82 |
| 0 | 24 | -1,1935 | 0 | 1,1935 | 0 | 179,82 |
| 0 | 1 | -1,6422 | 0 | 1,6422 | 0 | 179,82 |

IV.6.1.2.c Contraintes à la frontière

| Noeud | Contrainte XX | Contrainte YY | Contrainte XY | Contrainte ZZ | Von-MISES |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------|
| 1 | 1,6523 | -0,94289 | -0,0057183 | 0,21285 | 2,252 |
| 2 | 1,4854 | -0,82065 | -0,66564 | 0,19942 | 2,3098 |
| 3 | 0,99868 | -0,33288 | -1,1535 | 0,19974 | 2,3107 |
| 4 | 0,33263 | 0,33263 | -1,3317 | 0,19958 | 2,3103 |
| 5 | -0,33288 | 0,99868 | -1,1535 | 0,19974 | 2,3107 |
| 6 | -0,82065 | 1,4854 | -0,66564 | 0,19942 | 2,3098 |
| 7 | -0,94289 | 1,6523 | -0,0057181 | 0,21285 | 2,252 |
| 8 | -0,56658 | 1,1935 | 0 | 0,18807 | 1,5294 |
| 9 | -0,20187 | 0,91561 | 0 | -141,26 | 0,97824 |
| 10 | -0,11346 | 0,77032 | 0 | 0,19705 | 0,77656 |
| 11 | 0,0097828 | 0,66388 | -0,00033289 | 0,2021 | 0,58227 |
| 12 | 0,016291 | 0,64924 | -0,10285 | 0,19966 | 0,59154 |
| 13 | 0,063556 | 0,60192 | -0,19558 | 0,19964 | 0,59148 |
| 14 | 0,13719 | 0,52847 | -0,26926 | 0,1997 | 0,59166 |
| 15 | 0,23002 | 0,43563 | -0,31655 | 0,1997 | 0,59165 |
| 16 | 0,33285 | 0,33285 | -0,33285 | 0,19971 | 0,59168 |
| 17 | 0,43562 | 0,23004 | -0,31656 | 0,1997 | 0,59166 |
| 18 | 0,52847 | 0,13719 | -0,26926 | 0,1997 | 0,59166 |
| 19 | 0,60192 | 0,063555 | -0,19558 | 0,19964 | 0,59149 |
| 20 | 0,64924 | 0,016291 | -0,10285 | 0,19966 | 0,59154 |
| 21 | 0,66388 | 0,0097826 | -0,00033272 | 0,2021 | 0,58226 |
| 22 | 0,77032 | -0,11346 | 0 | 0,19705 | 0,77656 |
| 23 | 0,91561 | -0,20187 | 0 | 0,21413 | 0,97824 |
| 24 | 1,1935 | -0,56658 | 0 | 0,18807 | 1,5294 |

IV.6.1.2.d déplacements internes

| Points | Coord X | Coord Y | Dépla X | Dépla Y | Résultantes |
|--------|---------|---------|---------|---------|-------------|
| 1 | 3,755 | 1,3667 | 4,3133 | 1,5671 | 4,5891 |
| 2 | 3,0611 | 2,5686 | 3,5137 | 2,9516 | 4,5889 |
| 3 | 1,998 | 3,4606 | 2,2917 | 3,9694 | 4,5835 |
| 4 | 0,69391 | 3,9353 | 0,78921 | 4,518 | 4,5864 |
| 5 | 4,6938 | 1,7084 | 3,7397 | 1,3621 | 3,98 |
| 6 | 3,8264 | 3,2107 | 3,0498 | 2,56 | 3,9818 |
| 7 | 2,4975 | 4,3258 | 1,992 | 3,4473 | 3,9815 |
| 8 | 0,86733 | 4,9191 | 0,69251 | 3,916 | 3,9767 |

V.6.1.2.e Contraintes internes

| Points | Contrainte XX | Contrainte YY | Contrainte XY | Contrainte ZZ | Von- MISES |
|--------|------------------|------------------|------------------|------------------|---------------|
| 1 | -0,2622 | 0,92318 | -0,48071 | 0,19829 | 1,3284 |
| 2 | 0,21125 | 0,45011 | -0,75363 | 0,19841 | 1,3282 |
| 3 | 0,70513 | -35,952 | -0,64174 | 0,20076 | 1,2905 |
| 4 | 1,1141 | -0,4321 | -0,25902 | 0,20461 | 1,4188 |
| 5 | -0,040929 | 0,70609 | -0,30502 | 0,19955 | 0,84578 |
| 6 | 0,24639 | 0,42116 | -0,46359 | 0,20027 | 0,82793 |
| 7 | 0,57688 | 0,090251 | -0,40347 | 0,20014 | 0,8269 |
| 8 | 0,79406 | -0,13133 | -0,1468 | 0,19882 | 0,85116 |

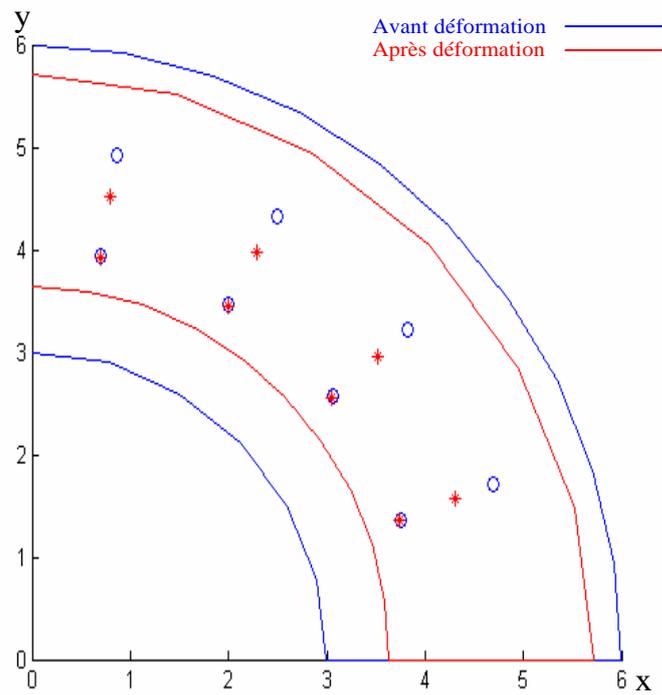


Figure IV .2 Un cylindre à paroi épaisse, pressurisé (Avant et après déformation)

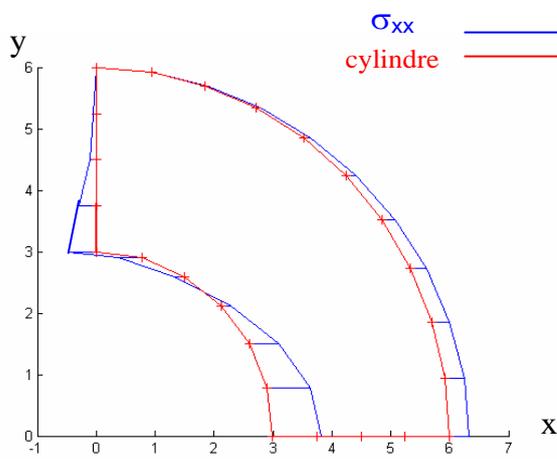


Figure IV.2.a Contrainte / XX
 σ_{xx}

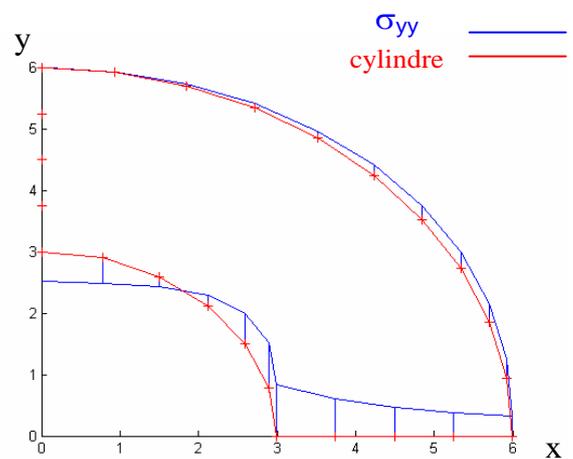


Figure IV.2.b Contrainte / YY
 σ_{yy}

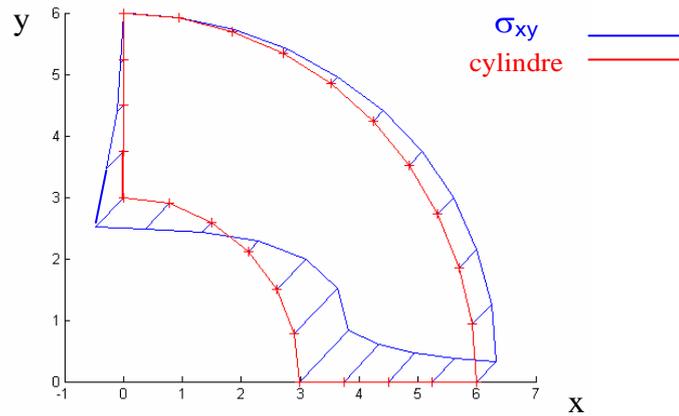


Figure IV.2.c Contrainte / XX et YY

$$\sigma_{xy}$$

IV.6.2 Exemple d'un problème axisymétrique (sphère)

Il concerne une sphère creuse à paroi épaisse, pressurisé, de rayon intérieur R_1 et de rayon externe R_2 . La pression est appliquée sur la paroi interne du cylindre. Nous considérons que le cylindre est assez long pour que des états plans de contrainte soient applicables. Les valeurs numériques utilisées dans cet exemple sont $R_1 = 1.0$, $R_2 = 2.0$, $P_1 = 5.0$, $P_2 = 3.0$ avec les propriétés du matériau $E = 1.0$ et $\nu = 0.3$. Les solutions numériques de ce problème sont.

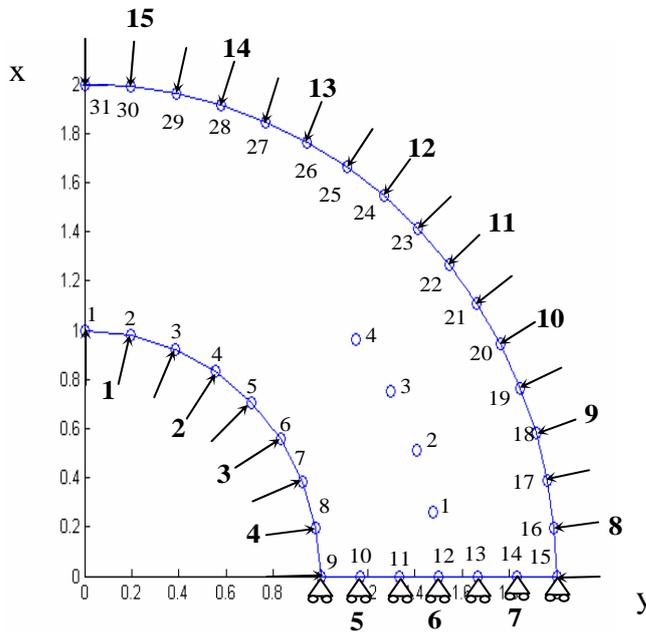


Figure IV.3 Corps axisymétrique
(Une sphère à paroi épaisse)

IV.6.2.1 Introduction des données et conditions aux frontières

Les coordonnées des nœuds.

| Nœuds | X | Y | Points internes | | |
|-------|--------|--------|-----------------|-------|-------|
| | | | point | X | Y |
| 1 | 0 | 1 | | | |
| 2 | 0,1951 | 0,9808 | 1 | 1,477 | 0,26 |
| 3 | 0,3827 | 0,9239 | 2 | 1,41 | 0,513 |
| 4 | 0,5556 | 0,8315 | 3 | 1,299 | 0,75 |
| 5 | 0,7071 | 0,7071 | 4 | 1,149 | 0,964 |
| 6 | 0,8315 | 0,5556 | | | |
| 7 | 0,9239 | 0,3827 | | | |
| 8 | 0,9808 | 0,1951 | | | |
| 9 | 1 | 0 | | | |
| 10 | 1,1667 | 0 | | | |
| 11 | 1,3333 | 0 | | | |
| 12 | 1,5 | 0 | | | |
| 13 | 1,6667 | 0 | | | |
| 14 | 1,8333 | 0 | | | |
| 15 | 2 | 0 | | | |
| 16 | 1,9904 | 0,196 | | | |
| 17 | 1,9616 | 0,3902 | | | |
| 18 | 1,9139 | 0,5806 | | | |
| 19 | 1,8478 | 0,7654 | | | |
| 20 | 1,7638 | 0,9428 | | | |
| 21 | 1,6629 | 1,1111 | | | |
| 22 | 1,546 | 1,2688 | | | |
| 23 | 1,4142 | 1,4142 | | | |
| 24 | 1,2688 | 1,546 | | | |
| 25 | 1,1111 | 1,6629 | | | |
| 26 | 0,9428 | 1,7638 | | | |
| 27 | 0,7654 | 1,8478 | | | |
| 28 | 0,5806 | 1,9139 | | | |
| 29 | 0,3902 | 1,9616 | | | |
| 30 | 0,196 | 1,9904 | | | |
| 31 | 0 | 2 | | | |

| Table connectivité | | |
|--------------------|--------|--------|
| éléments | Noeud1 | Noeud2 |
| 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 5 |
| 5 | 6 | 7 |
| 7 | 8 | 9 |
| 9 | 10 | 11 |
| 11 | 12 | 13 |
| 13 | 14 | 15 |
| 15 | 16 | 17 |
| 17 | 18 | 19 |
| 19 | 20 | 21 |
| 21 | 22 | 23 |
| 23 | 24 | 25 |
| 25 | 26 | 27 |
| 27 | 28 | 29 |
| 29 | 30 | 31 |

a- Conditions concernant le déplacement

| Élément | Dépl1 | Dépl2 | Dépl2 | Dépl3 |
|---------|-------|-------|-------|-------|
| 5 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 2 | 0 | 0 | 0 |

b- Conditions concernant les contraintes

| Elément | Cont(XX) | Cont(YY) | Cont(XY) |
|---------|-----------|-----------|----------|
| 0 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 1 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 2 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 3 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 4 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -5,00E+00 | -5,00E+00 | 0,00E+00 |
| 8 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 9 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 10 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 11 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 12 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 0 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |
| 13 | -3,00E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 |

IV.6.2.2 Résultats

Table connectivité pour les X

| éléments | Noeud1 | Noeud2 | Noeud3 |
|----------|--------|--------|--------|
| 1 | 0 | 0,1951 | 0,3827 |
| 2 | 0,3827 | 0,5556 | 0,7071 |
| 3 | 0,7071 | 0,8315 | 0,9239 |
| 4 | 0,9239 | 0,9808 | 1 |
| 5 | 1 | 1,1667 | 1,3333 |
| 6 | 1,3333 | 1,5 | 1,6667 |
| 7 | 1,6667 | 1,8333 | 2 |
| 8 | 2 | 1,9904 | 1,9616 |
| 9 | 1,9616 | 1,9139 | 1,8478 |
| 10 | 1,8478 | 1,7638 | 1,6629 |
| 11 | 1,6629 | 1,546 | 1,4142 |
| 12 | 1,4142 | 1,2688 | 1,1111 |
| 13 | 1,1111 | 0,9428 | 0,7654 |
| 14 | 0,7654 | 0,5806 | 0,3902 |
| 15 | 0,3902 | 0,196 | 0 |

Table connectivité pour les Y :

| éléments | Noeud1 | Noeud2 | Noeud3 |
|----------|--------|--------|--------|
| 1 | 1 | 0,9808 | 0,9239 |
| 2 | 0,9239 | 0,8315 | 0,7071 |
| 3 | 0,7071 | 0,5556 | 0,3827 |
| 4 | 0,3827 | 0,1951 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0,196 | 0,3902 |
| 9 | 0,3902 | 0,5806 | 0,7654 |
| 10 | 0,7654 | 0,9428 | 1,1111 |
| 11 | 1,1111 | 1,2688 | 1,4142 |
| 12 | 1,4142 | 1,546 | 1,6629 |
| 13 | 1,6629 | 1,7638 | 1,8478 |
| 14 | 1,8478 | 1,9139 | 1,9616 |
| 15 | 1,9616 | 1,9904 | 2 |

IV.6.2.2.a Déplacement de la frontière

| Noeuds | Coord R | Coord Z | Depla R | Depla Z | Normal Dépla | Tang Dépla |
|--------|----------|----------|----------|---------|--------------|------------|
| 1 | 0,00E+00 | 1,00E+00 | 0,00E+00 | 0,3999 | -0,39987 | -11,121 |
| 2 | 1,95E-01 | 9,81E-01 | 7,78E-02 | 0,3924 | -0,39999 | -6,6578 |
| 3 | 3,83E-01 | 9,24E-01 | 1,53E-01 | 0,3692 | -0,39964 | -11,162 |
| 4 | 5,56E-01 | 8,32E-01 | 2,22E-01 | 0,3323 | -0,39964 | -3,7468 |
| 5 | 7,07E-01 | 7,07E-01 | 2,83E-01 | 0,2826 | -0,39973 | -9,0022 |
| 6 | 8,32E-01 | 5,56E-01 | 3,32E-01 | 0,222 | -0,39963 | 0,2556 |
| 7 | 9,24E-01 | 3,83E-01 | 3,69E-01 | 0,1527 | -0,39954 | -8,8518 |
| 8 | 9,81E-01 | 1,95E-01 | 3,92E-01 | 0,0777 | -0,39986 | -1,1587 |
| 9 | 1,00E+00 | 0,00E+00 | 4,00E-01 | 0 | 0 | 2,9982 |
| 10 | 1,17E+00 | 0,00E+00 | 5,42E-01 | 0 | 0 | -2,7617 |
| 11 | 1,33E+00 | 0,00E+00 | 6,12E-01 | 0 | 0 | -7,1193 |
| 12 | 1,50E+00 | 0,00E+00 | 9,68E-01 | 0 | 0 | -10,683 |
| 13 | 1,67E+00 | 0,00E+00 | 1,27E+00 | 0 | 0 | -1,2748 |
| 14 | 1,83E+00 | 0,00E+00 | 1,55E+00 | 0 | 0 | -1,5484 |
| 15 | 2,00E+00 | 0,00E+00 | 1,80E+00 | 0 | -1,8 | -1,551 |
| 16 | 1,99E+00 | 1,96E-01 | 1,79E+00 | 0,1765 | -1,8001 | -5,8202 |
| 17 | 1,96E+00 | 3,90E-01 | 1,77E+00 | 0,3512 | -1,8001 | 2,3553 |
| 18 | 1,91E+00 | 5,81E-01 | 1,72E+00 | 0,5226 | -1,8001 | -14,444 |
| 19 | 1,85E+00 | 7,65E-01 | 1,66E+00 | 0,689 | -1,8002 | -1,5074 |
| 20 | 1,76E+00 | 9,43E-01 | 1,59E+00 | 0,8486 | -1,8001 | 0,0352 |
| 21 | 1,66E+00 | 1,11E+00 | 1,50E+00 | 1,0001 | -1,8 | -6,4486 |
| 22 | 1,55E+00 | 1,27E+00 | 1,39E+00 | 1,142 | -1,8001 | -6,054 |
| 23 | 1,41E+00 | 1,41E+00 | 1,27E+00 | 1,2729 | -1,8001 | -7,569 |
| 24 | 1,27E+00 | 1,55E+00 | 1,14E+00 | 1,3915 | -1,8001 | -2,4556 |
| 25 | 1,11E+00 | 1,66E+00 | 1,00E+00 | 1,4967 | -1,8 | 0,4817 |
| 26 | 9,43E-01 | 1,76E+00 | 8,49E-01 | 1,5875 | -1,8001 | -8,4292 |
| 27 | 7,65E-01 | 1,85E+00 | 6,89E-01 | 1,6632 | -1,8002 | 3,6818 |
| 28 | 5,81E-01 | 1,91E+00 | 5,23E-01 | 1,7226 | -1,8002 | 4,1851 |
| 29 | 3,90E-01 | 1,96E+00 | 3,51E-01 | 1,7656 | -1,8002 | 0,6432 |
| 30 | 1,96E-01 | 1,99E+00 | 1,76E-01 | 1,7916 | -1,8002 | 3,1912 |
| 31 | 0,00E+00 | 2,00E+00 | 0,00E+00 | 1,8001 | -1,8001 | 0 |

IV.6.2.2.b Traction à la frontière

| Elém | Noeuds | Contrainte /R | Contrainte /Z | Normal / Contrainte | Tangent / Contrainte | Angle / Normal |
|------|----------|---------------|---------------|---------------------|----------------------|----------------|
| 1 | 1,00E+00 | 8,80E-03 | 5,00E+00 | -5 | -9,31E-10 | 269,9 |
| 0 | 2,00E+00 | 9,75E-01 | 4,90E+00 | -5 | 0 | 258,75 |
| 0 | 3,00E+00 | 1,90E+00 | 4,62E+00 | -5 | 1,19E-07 | 247,61 |
| 2 | 3,00E+00 | 1,92E+00 | 4,62E+00 | -5 | 1,19E-07 | 247,41 |
| 0 | 4,00E+00 | 2,78E+00 | 4,16E+00 | -5 | 0 | 236,24 |
| 0 | 5,00E+00 | 3,53E+00 | 3,54E+00 | -5 | 2,38E-07 | 225,08 |
| 3 | 5,00E+00 | 3,54E+00 | 3,53E+00 | -5 | 0 | 224,92 |
| 0 | 6,00E+00 | 4,16E+00 | 2,78E+00 | -5 | 0 | 213,76 |
| 0 | 7,00E+00 | 4,62E+00 | 1,92E+00 | -5 | 0 | 202,59 |
| 4 | 7,00E+00 | 4,62E+00 | 1,90E+00 | -5 | -1,19E-07 | 202,39 |
| 0 | 8,00E+00 | 4,90E+00 | 9,75E+00 | -5 | 0 | 191,25 |
| 0 | 9,00E+00 | 5,00E+00 | 8,80E+00 | -5 | 0 | 180,1 |
| 5 | 9,00E+00 | 0,00E+00 | 1,60E+00 | -1,6029 | 0 | 270 |
| 0 | 1,00E+01 | 0,00E+00 | 1,98E+00 | -1,9783 | 0 | 270 |
| 0 | 1,10E+01 | 0,00E+00 | 2,25E+00 | -2,2503 | 0 | 270 |
| 6 | 1,10E+01 | 0,00E+00 | 2,25E+00 | -2,2503 | 0 | 270 |
| 0 | 1,20E+01 | 0,00E+00 | 2,37E+00 | -2,3718 | 0 | 270 |
| 0 | 1,30E+01 | 0,00E+00 | 2,47E+00 | -2,4723 | 0 | 270 |
| 7 | 1,30E+01 | 0,00E+00 | 2,47E+00 | -2,4723 | 0 | 270 |
| 0 | 1,40E+01 | 0,00E+00 | 2,53E+00 | -2,528 | 0 | 270 |
| 0 | 1,50E+01 | 0,00E+00 | 2,57E+00 | -2,5736 | 0 | 270 |
| 8 | 1,50E+01 | -3,00E+00 | -9,08E-07 | -3 | 0 | 1,73E-05 |
| 0 | 1,60E+01 | -2,99E+00 | -2,94E-01 | -3 | 0 | 5,6204 |
| 0 | 1,70E+01 | -2,94E+00 | -5,85E-01 | -3 | 0 | 11,236 |
| 9 | 1,70E+01 | -2,94E+00 | -5,86E-01 | -3 | 0 | 11,27 |
| 0 | 1,80E+01 | -2,87E+00 | -8,71E-01 | -3 | 0 | 16,873 |
| 0 | 1,90E+01 | -2,77E+00 | -1,15E+00 | -3 | 0 | 22,477 |
| 10 | 1,90E+01 | -2,77E+00 | -1,15E+00 | -3 | 0 | 22,549 |
| 0 | 2,00E+01 | -2,65E+00 | -1,41E+00 | -3 | 0 | 28,14 |
| 0 | 2,10E+01 | -2,49E+00 | -1,67E+00 | -3 | 0 | 33,735 |
| 11 | 2,10E+01 | -2,49E+00 | -1,67E+00 | -3 | 0 | 33,742 |
| 0 | 2,20E+01 | -2,32E+00 | -1,90E+00 | -3 | -1,19E-07 | 39,37 |
| 0 | 2,30E+01 | -2,12E+00 | -2,12E+00 | -3 | 0 | 45 |
| 12 | 2,30E+01 | -2,12E+00 | -2,12E+00 | -3 | 0 | 45 |
| 0 | 2,40E+01 | -1,90E+00 | -2,32E+00 | -3 | -1,19E-07 | 50,63 |
| 0 | 2,50E+01 | -1,67E+00 | -2,49E+00 | -3 | 0 | 56,258 |
| 13 | 2,50E+01 | -1,67E+00 | -2,49E+00 | -3 | -1,19E-07 | 56,266 |
| 0 | 26 | -1,4149 | -2,6454 | -3 | 0 | 61,86 |
| 0 | 27 | -1,1504 | -2,7706 | -3 | 0 | 67,451 |
| 14 | 27 | -1,1469 | -2,7721 | -3 | -1,19E-07 | 67,523 |
| 0 | 28 | -0,87074 | -2,8709 | -3 | 0 | 73,127 |
| 0 | 29 | -0,5863 | -2,9422 | -3 | 0 | 78,73 |
| 15 | 29 | -0,58454 | -2,9425 | -3 | 0 | 78,764 |
| 0 | 30 | -0,29381 | -2,9856 | -3 | 0 | 84,38 |
| 0 | 31 | 0 | -3 | -3 | 0 | 90 |

IV.6.2.2.c Contraintes à la frontière

| Noeud | Contrainte RR | Contrainte ZZ | Contrainte RZ | Contrainte Tang | Von-MISES |
|-------|---------------|---------------|---------------|-----------------|-----------|
| 1 | -1,71E+00 | -5,00E+00 | -5,80E+00 | -1,7059 | 3,29E+00 |
| 2 | -1,70E+00 | -4,87E+00 | -6,56E+00 | -1,5732 | 3,4272 |
| 3 | -2,07E+00 | -4,50E+00 | -1,21E+00 | -1,5716 | 3,43E+00 |
| 4 | -2,63E+00 | -3,94E+00 | -1,58E+00 | -1,5718 | 3,43E+00 |
| 5 | -3,29E+00 | -3,29E+00 | -1,71E+00 | -1,5719 | 3,4278 |
| 6 | -3,94E+00 | -2,63E+00 | -1,58E+00 | -1,5718 | 3,43E+00 |
| 7 | -4,50E+00 | -2,07E+00 | -1,21E+00 | -1,5714 | 3,4292 |
| 8 | -4,87E+00 | -1,70E+00 | -6,56E-01 | -1,5718 | 3,4278 |
| 9 | -4,91E+00 | -1,59E+00 | -3,02E-03 | -1,5487 | 3,3381 |
| 10 | -4,23E+00 | -1,98E+00 | 0,00E+00 | -2,0145 | 2,24E+00 |
| 11 | -3,58E+00 | -2,25E+00 | 0,00E+00 | -2,2077 | 1,3504 |
| 12 | -3,41E+00 | -2,37E+00 | 0,00E+00 | -2,3813 | 1,0375 |
| 13 | -3,18E+00 | -2,47E+00 | 0,00E+00 | -2,4602 | 0,71258 |
| 14 | -3,09E+00 | -2,53E+00 | 0,00E+00 | -2,5311 | 0,56416 |
| 15 | -2,99E+00 | -2,57E+00 | -6,47E-08 | -2,5697 | 0,42133 |
| 16 | -3,00E+00 | -2,58E+00 | -4,18E-02 | -2,5714 | 0,42857 |
| 17 | -2,98E+00 | -2,59E+00 | -8,21E-02 | -2,5714 | 0,4288 |
| 18 | -2,96E+00 | -2,61E+00 | -1,19E-01 | -2,5716 | 0,42836 |
| 19 | -2,94E+00 | -2,63E+00 | -1,51E-01 | -2,5716 | 0,42832 |
| 20 | -2,90E+00 | -2,67E+00 | -1,78E-01 | -2,5715 | 0,42856 |
| 21 | -2,87E+00 | -2,70E+00 | -1,98E-01 | -2,5714 | 0,42865 |
| 22 | -2,83E+00 | -2,74E+00 | -2,10E-01 | -2,5715 | 0,42848 |
| 23 | -2,79E+00 | -2,79E+00 | -2,14E-01 | -2,5715 | 0,42841 |
| 24 | -2,74E+00 | -2,83E+00 | -2,10E-01 | -2,5715 | 0,4285 |
| 25 | -2,70E+00 | -2,87E+00 | -1,98E-01 | -2,5714 | 0,42868 |
| 26 | -2,67E+00 | -2,90E+00 | -1,78E-01 | -2,5715 | 0,42857 |
| 27 | -2,63E+00 | -2,94E+00 | -1,52E-01 | -2,5716 | 0,42838 |
| 28 | -2,61E+00 | -2,96E+00 | -1,19E-01 | -2,5715 | 0,42844 |
| 29 | -2,59E+00 | -2,98E+00 | -1,02E+01 | -2,5716 | 0,42833 |
| 30 | -2,58E+00 | -3,00E+00 | -4,18E-02 | -2,5714 | 0,42854 |
| 31 | -2,27E+00 | -3,00E+00 | 0,00E+00 | -2,2745 | 0,72546 |

V.6.2.2.d Déplacements internes

| Noeuds | Coord R | Coord Z | Depla R | Depla Z | Résultantes |
|--------|----------|----------|----------|---------|-------------|
| 1 | 1,48E+00 | 2,60E-01 | 9,53E-01 | 0,16786 | 9,68E-01 |
| 2 | 1,41E+00 | 5,13E-01 | 9,11E-01 | 0,33143 | 0,96925 |
| 3 | 1,30E+00 | 7,50E-01 | 8,39E-01 | 0,48423 | 9,68E-01 |
| 4 | 1,15E+00 | 9,64E-01 | 7,42E-01 | 0,62226 | 9,68E-01 |

IV.6.1.2.e Contraintes internes

| Noeud | Contrainte RR | Contrainte ZZ | Contrainte RZ | Contrainte Tang | Von-MISES |
|-------|---------------|---------------|---------------|-----------------|-----------|
| 1 | -3,36E+00 | -2,41E+00 | -1,72E-01 | -2,3756 | 1,02E+00 |
| 2 | -3,27E+00 | -2,49E+00 | -3,26E-01 | -2,3761 | 1,0149 |
| 3 | -3,14E+00 | -2,63E+00 | -4,40E-01 | -2,3757 | 1,02E+00 |
| 4 | -2,97E+00 | -2,80E+00 | -5,00E-01 | -2,3756 | 1,02E+00 |

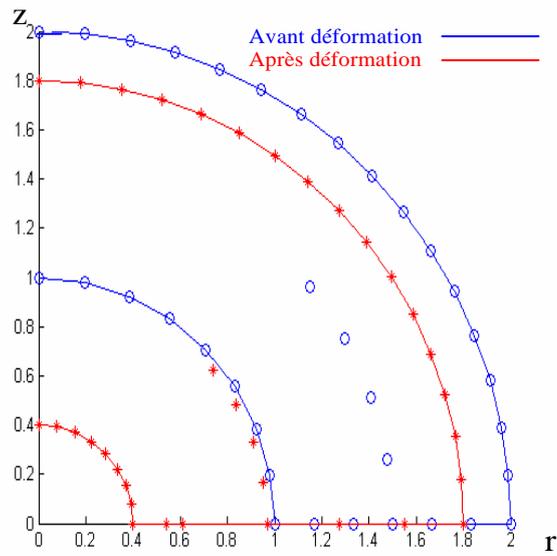


Figure IV.4 Corps axisymétrique
(Une sphère à paroi épaisse avant et après déformation)

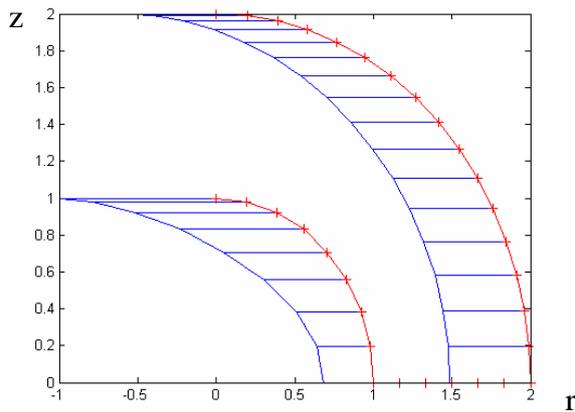


Figure IV.4.a Contrainte / RR

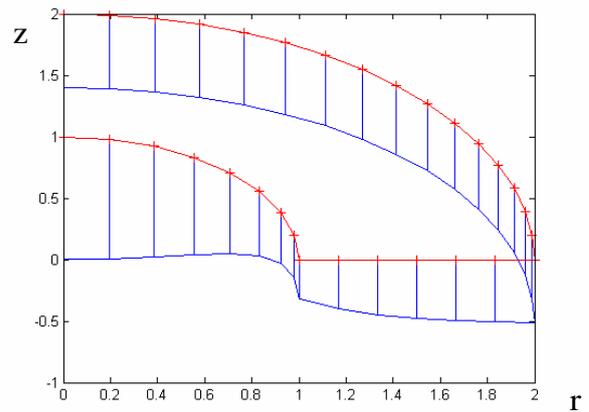


Figure IV.4.b Contrainte / ZZ

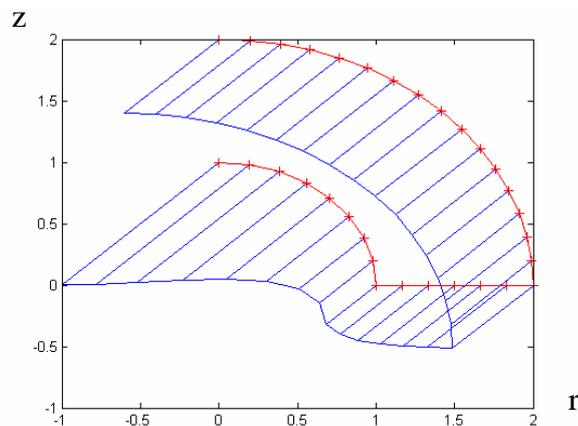


Figure IV.4.c Contrainte / RR et ZZ

IV.6.3 Exemples de rupture

Un programme machine utilisant les éléments isoparamétriques dans la section précédente est appliqué à quelques problèmes bidimensionnels, axisymétriques et tridimensionnels pratiques de rupture pour démontrer l'exactitude de la technique dans de tels problèmes.

Fissure semi elliptique dans un cylindre

Ce problème **concerne** des fissures qui peuvent se produire dans les cuves de méthaniers. Pratiquement, de telles fissures sont modélisé comme semi-elliptiques avec pour axe mineur a et pour axe principal b , tels que indiqués sur la Fig V.6. Nous considérons un cylindre épais de rayon externe R_2 , de rayon intérieur R_1 , et de hauteur H soumis à une pression interne P . Les valeurs numériques utilisées dans ce problème sont : $R_1=1.0$; $R_2 =2.0$; $H = 9.0$; $a/b = 0.8$ et $P = 1.0$

Avec les propriétés du matériau : $E = 1.0$ et $\nu= 0.3$.

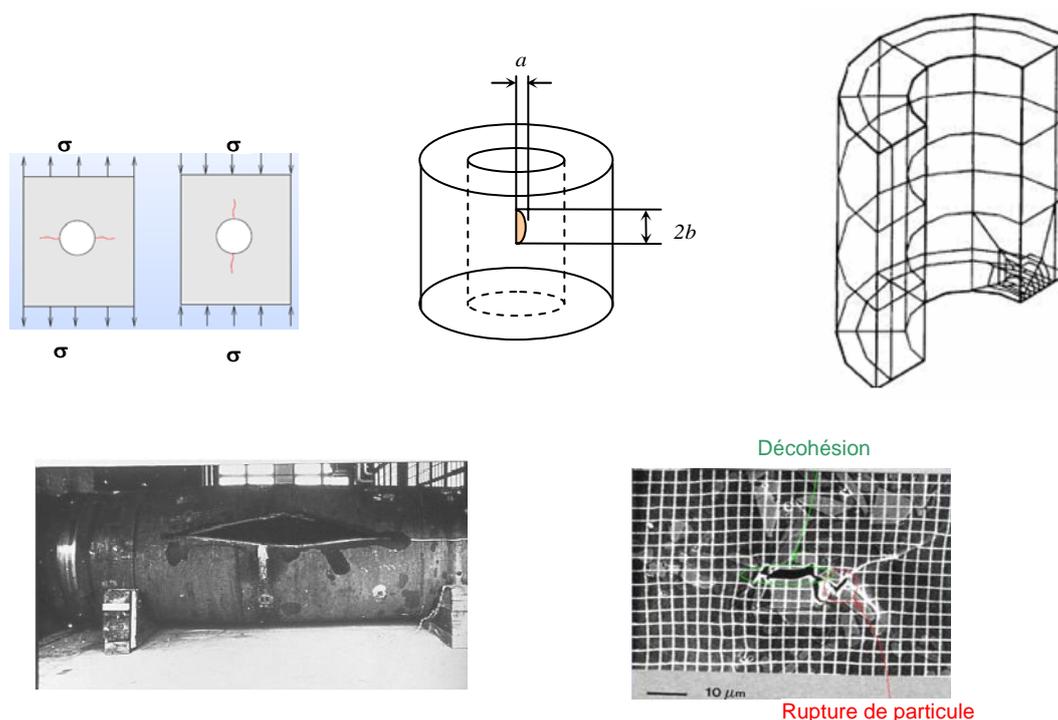
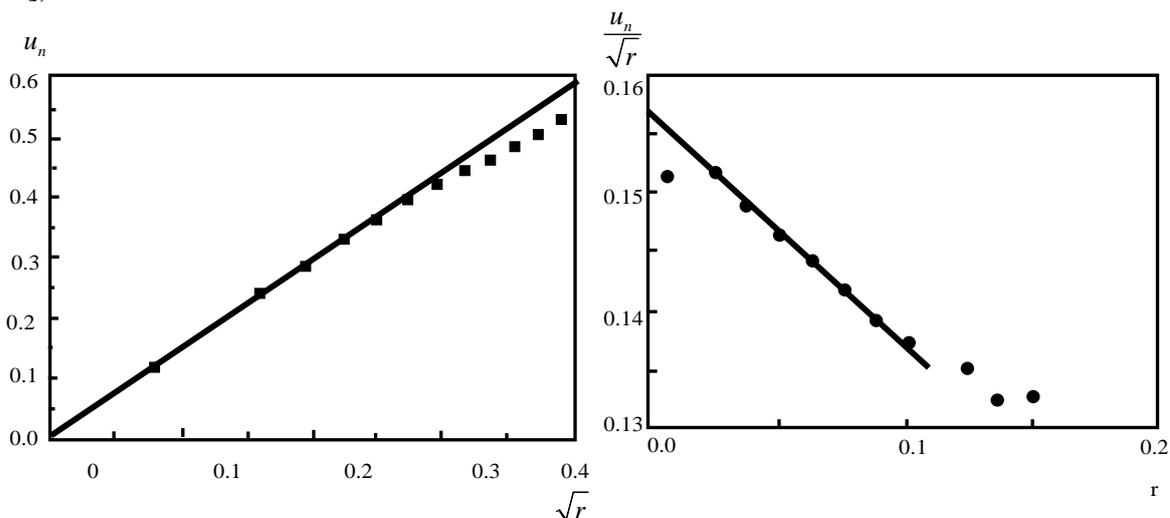


Figure V.6 Fissure semi elliptique dans un cylindre.

La figure V.7 montre la méthode de pente de déplacement et la méthode d'extrapolation de déplacement et d'effort pour calculer K_I . Bien que les deux méthodes arrivent à la même valeur approchée de K_I ($K_I=108.4 MPa \sqrt{m}$), la première méthode est habituellement plus fiable à employer dans des problèmes tridimensionnels au regard

du nombre disponible relativement petit d'extrapolation (Navid et Al. [1985] et Plant [1989]).



(b) Méthodes de pente de déplacement et de contrainte.

(a) Méthodes d'extrapolation de déplacement et d'effort

Figure V.7 L'intensité d'effort pour une fissure semi-elliptique dans un cylindre épais.

Interprétation et conclusion

Dans ce chapitre nous avons apprécié le résultat des calculs générés par le programme de la méthode des éléments frontières, ce qui nous a permis de faire le constat suivant:

- ▶ Le calcul de la matrice de rigidité dépend de la géométrie et de la nature de la pièce d'où la nécessité de réintroduire les caractéristiques à chaque fois que de besoin.
- ▶ La matrice de rigidité est antisymétrique.
- ▶ Contrairement à la méthode des éléments finis, la méthode des éléments frontières, une fois le programme bien établi, se distingue par la rapidité des calculs de la matrice de rigidité, car les éléments finis volumiques constituent le facteur pénalisant de la méthode.
- ▶ En FEM la fonction intégrale est régulière alors qu'elle est parfois singulière en BEM, d'où la difficulté d'évaluation avec exactitude, ce qui nous amène à rechercher des approches alternatives.

L'exécution du programme pour les exemples traités nous ont permis d'évaluer l'impact des efforts et la déformation qui en découle.

Conclusion Générale

Conclusion générale :

L'utilisation de la mécanique de la rupture pour le dimensionnement des pièces et des structures mécaniques couvre un vaste champ d'études. Il est certain que le chercheur n'a en particulier pas encore réussi à maîtriser la prévision relative à la forme et aux dimensionnalités des fissures et leur sens de propagation. Ce domaine n'a pas encore été exploré aux limites. Néanmoins nous retiendrons que :

➤ La fissure se propagera si la valeur du facteur d'intensité de contrainte K atteint la valeur critique K_c . Par conséquent, le calcul précis de K est primordial dans la prévision du comportement de la rupture.

➤ Plusieurs techniques pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte existent. Parmi ces techniques, dont la fiabilité de calcul est démontrée, nous citons les techniques d'effort, d'extrapolation et d'énergie de déplacement.

➤ Des éléments de singularité de bout de la fissure peuvent être employés pour aboutir à des résultats assez précis.

➤ Les applications montrent la précision et l'applicabilité des méthodes à des problèmes de rupture.

En perspective, ce travail peut constituer une bonne plateforme pour l'élaboration d'autres programmes notamment relatifs à:

- La prédiction de la fissuration.
- Au développement de la programmation de la méthode mixte FEM/BEM.
- L'adaptation de ce programme à d'autres types de problèmes (acoustiques, transferts de chaleur, génie civile, etc.).

Bibliographie

Bibliographie

- [1] Pr. SOLIMAN BELKAHLA , 'Cours d'élasticité-Plasticité'. Publication de l'université Badji Mokhtar-Annaba.
- [2] Pr. MOHAMED LAMINE FARES , 'Principe Physique du Comportement Mécanique des Matériaux' . Publication de l'université Badji Mokhtar-Annaba.
- [3] C.A. BREBIA and J. DOMINGUEZ , 'Boundary Elements an Introductory course'. WITPRESS Computational mechanics publications: U.K. 1992 reprinted 1989.
- [4] A. A. BECKER PhD, DIC, BSC(ENG), ACGI, MIMECHE. – 'The Boundary Element Method in Engineering A complete course'.
- [5] MARC BONNET. – 'Equation Intégrales et Elément de Frontière'. CNRS EDITION / EYROLLES : PARIS .1995.
- [6] CROUCH and A. M. STARFIELD, 'Boundary element methods in solid mechanics'. George Allen & Unwin(publishers) Ltd, 40 Museum street london WC1A 1LU,UK.
- [7] GOURI DHAT et GILBERT TOUZOT, 'Une présentation de la méthode des éléments finis'. MALOINE S.A. Editeur, Paris: Deuxième édition 1984.
- [8] O.C.ZIENKIEWICZ, R . L. Taylor, 'La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires'. Afnor technique 1991.
- [9] YOUNG W. KWON and HYOCHOONG BANG, 'The finite Element method using Matlab'. Library of congress Cataloging-in publication (Mechanical Engineering), 1997 by CRC press LLC Boca Raton Boston New York Washington, DC. London
- [10] MORTON E. GURTIN, ' Thermomechanics of Evolving Phase Boundaries in the Plane'. Department of Mathematics /Carnegie Mellon University/Pittsburgh, PA, USA.CLARENDON PRESS • OXFORD 1993
- [11] FRIEDEL HARTMANN, 'Introduction to Boundary Elements Theory and Applications'. Springer-Verlag /Berlin Heidelberg NewYork/London Paris Tokyo Hong Kong: 1994.
- [12] K.W. MAN, 'Contact Mechanics using Boundary Elements'. Topics in Engineering Volume 22 /Computational Mechanics Publications: 1994.
- [13] C ROGERS et W. F. AMES. – 'Nonlinear Boundary Value Problems in Sciences and Engineering'. ACADEMIC PRESS, INC. ACADEMIC PRESS, INC, London :1989.
- [14] O.RAHMANI, S.KEBDANI, 'Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs'.Office des publications universitaires.

- [15] JOHN P.WOLF, 'The Scaled Boundary Finite Element Method' Wiley Editorial Offices, England:2003.
- [16] PROFESSOR PETER HUNTER, 'FEM/BEM NOTES'.
The University of Auckland, New Zealand :February 21, 2001
University of Nottingham: 1992 McGraw-Hill International (UK) Limited
- [17] MUSTAPHA LAKRIB, 'Cours d'analyse numérique'. Office des publications universitaires.
- [18] Dr. MOHAMED MOKHTARI, Dr. ABDELHALIM MESBAH, 'Apprendre et Maitriser MATLAB'. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997 Imprimé en Allemagne.
- [19] W.A.GRANVILLE,PERCEY F.SMITH et W.R.LONGLEY, 'Élément de Calcul Différentiel et Intégral'. Librairie VUIBERT, Boulevard Saint-Germain (63), paris
- [20] M. BONNET A, M. GUIGGIANI, 'Direct evaluation of double singular integrals and new free terms in 2D (symmetric) Galerkin BEM' a Laboratoires de Mécanique des solides (UMR CNRS 7649), Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France
Received 27 November 2001; received in revised form 27 January 2003; accepted 31 March 2003, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192 (2003) 2565–2596 (Elsevier).
- [21] GAETAN HELLO - HOCINE KEBIR - LAURENT CHAMBON - JEAN-MARC ROELANDT- ALAIN RASSINEUX, 'Application de la méthode des éléments de frontière à la résolution de problèmes élastoplastiques'.Laboratoire Roberval,Université de Technologie de Compiègne / CNRS EADS,Centre Commun de Recherches.
- [22] A. APICELLA, C. CALI, R. CITARELLA, 'MULTIPLE CRACK PROPAGATION BY DUAL BEM ON AN AERONAUTIC REPAIRED PANEL', XXXV Convegno Nazionale – 13-16 Settembre 2006, Università Politecnica delle Marche
- [23] Marc Bonnet, Bojan B. Guzina, 'SOUNDING OF FINITE SOLID BODIES BY WAY OF TOPOLOGICAL DERIVATIVE' Laboratoire de Mécanique des Solides (UMR CNRS 7649), École Polytechnique, Palaiseau, France. Department of Civil Engineering, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455-0116, U.S.A. Volume 61, Issue 13, Pages 2344 - 2373
- [24] Bojan B. Guzina, Ronald Y. S. Pak, and Alejandro E. Martinez-Castro, 'Singular Boundary Elements for Three-Dimensional Elasticity Problems', University of Minnesota Supercomputing Institute Research Report UMSI 2006/61, June 2006.1
- [25] Bojan B. Guzina and Marc Bonnet, 'Sounding of Finite Solid Bodies By Way of Topological Derivative', University of Minnesota Supercomputing Institute Research Report UMSI 2005/51, May 2005.

- [26] Sylvain Nintcheu Fata and Bojan B. Guzina, 'A Linear Sampling Method for Near-Field Inverse Problems in Elastodynamics', University of Minnesota Supercomputing Institute Research Report UMSI 2004/40, April 2004.
- [27] Bojan B. Guzina and Andrew I. Madyarov, 'On the Spectral Analysis of Love Waves', Bulletin of the Seismological Society of America, 95, p. 1150 (2005). This report is available electronically
- [28] D.H. Timm, B.B. Guzina, and V.R. Voller, 'Prediction of Thermal Crack Spacing', University of Minnesota Supercomputing Institute Research Report UMSI 2002/208, December 2002.
- [29] B.B. Guzina and S.F. Nintcheu, 'Dynamic Response of a Padded Annular Footing on a Uniform Elastic Half-Space', University of Minnesota Supercomputing Institute Research Report UMSI 2000/103, June 2000.
- [30] Guzina and A. Lu, 'Full Waveform Analysis in Site and Material Characterization by Seismic Methods', B.B. Guzina and A. Lu, University of Minnesota Supercomputing Institute Research Report UMSI 99/223, November 1999. Publication in press, 1992 ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS LTD, (ELSEVIER APPLIED SCIENCE LONDON and NEW YORK).
- [31] N. NISHIMURA and S. KOBAYASHI, 'Advanced Dynamic Fracture Mechanics Analysis', 1992 ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS LTD, (ELSEVIER APPLIED SCIENCE LONDON and NEW YORK).
- [32] P. K. BANERJEE, H. C. WANG and S. AHMAD, 'Multiregion Periodic Dynamic Analysis by BEM of 2D, 3D and Axisymmetric Problems', 1992 ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS LTD, (ELSEVIER APPLIED SCIENCE LONDON and NEW YORK).
- [33] A. S. M. ISRAIL, P. K. BANERJEE and H. C. WANG, 'Time-domain Formulations of BEM for Two-dimensional Axisymmetric and Three-dimensional Scalar Wave Propagation', 1992 ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS LTD, (ELSEVIER APPLIED SCIENCE LONDON and NEW YORK).
- [34] P. K. BANERJEE, A. S. M. ISRAIL and H. C. WANG, 'Time-domain Formulations of BEM for Two-dimensional, Axisymmetric and Three-dimensional Transient Elastodynamics', 1992 ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS LTD, (ELSEVIER APPLIED SCIENCE LONDON and NEW YORK).
- [35] NOBUYOSHI TOSAKA and MASANOBU OHMI, 'Transient Elastic Wave Scattering Problems by Boundary Element Methods', 1992 ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS LTD, (ELSEVIER APPLIED SCIENCE LONDON and NEW YORK).

- [36] G. KRISHNASAMY, F. J. RLZZO and T. J. RUDOLPHI, Hypersingular Boundary Integral Equations: Their Occurrence, Interpretation, Regularization and Computation, 1992 ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS LTD, (ELSEVIER APPLIED SCIENCE LONDON and NEW YORK).
- [37] M. KRRAHARA, S. HI ROSE and J. D. ACHENBACH, 'Transient Elastodynamic Analysis for Three-dimensional Configurations', 1992 ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS LTD , (ELSEVIER APPLIED SCIENCE LONDON and NEW YORK).
- [38] S. T. RAVEENDRA and P. K. BANERJEE, ' Eigenvalue Analysis by Boundary Element Method', 1992 ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS LTD, (ELSEVIER APPLIED SCIENCE LONDON and NEW YORK).
- [39] H.D.BUI, 'Mathematical Foundations of BEM Formulations for Static and Dynamic Analyses', 1992 ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS LTD, (ELSEVIER APPLIED SCIENCE LONDON and NEW YORK).
- [40] LOTHAR GAUL and MICHAEL PLENGE, 'Progress in 3D BE Calculations and Optoelectronic Measurements of Soil-Structure Interaction', 1992 ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS LTD, (ELSEVIER APPLIED SCIENCE LONDON and NEW YORK).
- [41] NICOLAS COSME, BERTRAND BURGARDT et DIDIER SORIA, 'CALCULS DE FISSURATION 3D APPLICATION A UN COMPOSANT DE TURBOMACHINE' Snecma Moteurs - site de Villaroche Rond-Point René Ravaud 77550 Moissy Cramayel.

Annexes

Annexe A

| $\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j)$ | | |
|---|-----------------------|-----------------------|
| | $\pm a$ | H |
| n=1 | 0 | 2.000 000 000 000 000 |
| n=2 | 0.577 350 269 189 626 | 1.000 000 000 000 000 |
| n=3 | 0.774 596 669 241 483 | 0.555 555 555 555 556 |
| | 0.000 000 000 000 000 | 0.888 888 888 888 889 |
| n=4 | 0,861 136 311 594 953 | 0,347 854 845 137 454 |
| | 0,339 981 043 584 856 | 0,652 145 154862 546 |
| n=5 | 0,906 179 845 938 664 | 0,236 926 885 056 189 |
| | 0,538 469 310 105 683 | 0,478 628 670 499 366 |
| | 0,000 000 000 000 000 | 0,568 888 888 888 889 |
| n=6 | 0,932 469 514 203 152 | 0,171 324 492 379 170 |
| | 0,661 209 386 466 265 | 0,360 761 573 048 139 |
| | 0,661 209 386 466 265 | 0,467 913 934 572 691 |
| n=7 | 0,949 107 912 342 759 | 0,129 484 966 168 870 |
| | 0,741 531 185 599 394 | 0,279 705 391 489 277 |
| | 0,405 845 151 377 397 | 0,381 830 050 505 119 |
| | 0,000 000 000 000000 | 0,417 959 183 673 469 |
| n=8 | 0,960 289 856 497 536 | 0,101 228 536 290 376 |
| | 0,796 666 477 413 627 | 0,222 381 034 453 374 |
| | 0,525 532 409 916 329 | 0,313 706 645 877 887 |
| | 0,183 434 642 495 650 | 0,362 683 183 378 362 |
| n=9 | 0,968 160 239 507 626 | 0,081 274 388 361 574 |
| | 0,836 031 107 326 636 | 0,180 648 160 694 857 |
| | 0,613 371 432 700 590 | 0,260 610 696 402 935 |
| | 0,324 253 423 403 809 | 0,312 347 077 040 003 |
| | 0,000 000 000 000 000 | 0,330 239 355 001 260 |
| n=10 | 0,973 906 528 517 172 | 0,066 671 344 308 688 |
| | 0,865 063 366 688 985 | 0,149 451 349 150 581 |
| | 0,679 409 568 299 024 | 0,219 086 362 515 982 |
| | 0,433 395 394 129 247 | 0,269 266 719 309 996 |
| | 0,148 874 338 981 631 | 0,295 524 224 714 753 |

Tableau 1 Abscisses et poids des formules de quadrature de Gauss.

Annexe B

#####

BEMAXISYM

#####

```
clc
clear all

disp('XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX')
disp('')
disp('BOUNDARY ELEMENTS METHODES')
disp('B E M')
disp('2D ET ELEMENT AXISYMETRIQUES')
disp('')
disp('XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX')

MAXELE=100;
MAXNOD=2.*MAXELE;
MAXINT=200;

ZETA(1)=-1;
ZETA(2)=0;
ZETA(3)=1;

disp('=====')
disp(' ZETA(1,:) ZETA(1,:) ZETA(1,:) ')
disp('=====')
disp( ZETA(1,:))

disp('MAXELE: MAXIMUMNUMBER OF ELEMENTS '),MAXELE
disp('MAXNOD: MAXIMUM NUMBER OF NODES '),MAXNOD
disp('MAXINT: MAXIMUM NUMBER OF INTERNAL POINTS'),MAXINT
pause

%=====

%introduction des donées
intr
%=====

%- -%Calculer pour n'importe le quel point l'angle de la normale .
[ANGNOR]=ANGLES(NELEMS,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y,ZETA);

%=====

[AA1,BB1,CC1,DD1,XG,CG,XGL,CGL]=NUMDATA(NGAUSS) ;
%=====

%--ASSEMBLE SOLUTION MAT.
ASSEMB
%=====
SOLVER
%=====
%--REARRANGEMENT DES RESULTAT OBTENUE
ARRANG
%=====
%--CALCULER CONTRAINTE FRONTIERE
BSTRES
%=====
%--AFFICHAGER DE TOUS LES VARRIABLES.
OUTVAR
%=====
%CCALCULES DES VARRAIBE INTERNE
INTCAL
%=====

disp('=====')
disp(' LE PROGRAMME EST COMPLETEMENT DEROULER ')
disp('=====')
```

Annexe B

#####

%intr

#####

```
%=====
%=====
%introduisez la valeur 1 pour la lecture du titre ;
%introduisez la valeur 2 pour l'introduction des paramètre d'analyse ;
%introduisez la valeur 3 pour la lecture des coordonnées des nœuds sur la frontière;
%introduisez la valeur 4 pour l'introduction des donnée ;
%introduisez la valeur 5 pour l'introduction des déplacement ;
%introduisez la valeur 6 pour la lecture des contrainte ;
%introduisez la valeur 7 pour la lecture des coordonnées des nœuds interne;
%introduisez la valeur 8 pour arrêter le programme s'il y a excès des
%œuds frontière ou internes;
%=====
%=====
```

```
NBCU=0;
NBCS=0;
NINPTS=0 ;
%=====
%REAL NODA,INTE
TITL=1;
ANAL=2;
NODA=3;
ELEM=4;
DISP=4;
STRE=5;
INTE=6;
DATA=8;
%=====
%-----
  introd
%-----
```

#####

%introd

#####

```
n=1;
while n<9,

%--IDENTIFIER DATA MODULE.
%disp('introduisez la valeur une valeur >= 9 pour intérompre le programme ');
disp('introduisez la valeur 1 pour la lecture du titre ');
disp('introduisez la valeur 2 pour l'introduction des paramètre d'analyse ');
disp('introduisez la valeur 3 pour la lecture des coordonnées des nœuds sur la frontière');
%disp('introduisez la valeur 4 pour l'introduction des donnée ');
disp('introduisez la valeur 4 pour l'introduction des déplacement ');
disp('introduisez la valeur 5 pour la lecture des contrainte ');
disp('introduisez la valeur 6 pour la lecture des coordonnées des nœuds interne');
disp('introduisez la valeur 8 pour arrêter le programme s'il y a excès des nœuds frontière ou internes !');
```

```
DATMOD=input(' DATMOD = ' )

%=====1=====
if DATMOD==TITL %1
  XTITL=input('introduit la valeur XTITL =');
  disp (' T I T L ='),disp (XTITL);
%=====2=====
```

Annexe B

```
elseif DATMOD==ANAL %2
    disp('si le problème que vous voulez traiter est pb AXISYMETRIC')
    disp(' introduisez la valeur de GEOMETRY égale à 1');

    disp('si le problèmes que vous voulez traiter est pb de déformation plane ')
    disp(' introduisez la valeur de GEOMETRY égale à 2');

    disp('si le problèmes que vous voulez traiter est pb de contrainte plane ')
    disp('introduisez la valeur de GEOMETRY égale à 3');

    IGEOM=input('introduisez la valeur qui convient a votre probleme IGEOM=')
    NGAUSS=input('introduisez le nombre d"itegration gaussienne (4 ou 6) NGAUSS=')
    disp('% E=1')
    E=input('introduisez la valeur du module de young =')
    disp('% XNU=0.3')
    XNU=input('introduisez le coef poisson =')

    disp('le nombre d"integration gaussienne = '),disp(NGAUSS)
    if IGEOM ==1
        disp('#####')
        disp('===== Problème A X I S Y M E T R I C =====')
        disp('#####')
        load DONNEE2
    elseif IGEOM ==2
        disp('#####')
        disp('===== Problème de déformation plane===== ')
        disp('#####')
        load DONNEE1
    elseif IGEOM ==3
        disp('#####')
        disp('===== Problème de contrainte plane =====')
        disp('#####')
    end
    disp('=====')
    disp(' E= '),disp(E)

    disp(' XNU=' ),disp(XNU)
    disp('=====')
    % C=0.02

    %=====3=====
elseif DATMOD==NODA %3
%elseif DATMOD==NODA | DATMOD==ELEM
    disp ('Coordonnées nodales ')

A(:,1)=X;
A(:,2)=Y ;

%=====4=====
%elseif DATMOD==ELEM %4
    n=3;
    c=n-1;
    disp (' lecture des éléments')
    a1=size(A);
    Nn=a1(1,1); %nombre Nouveuds Nn total
    NNODES=Nn

    NODEE=a1(1,1);

    Ne=Nn./(n-1) ; %nombre d'éléments Ne
    disp('nombre d"éléments Ne'),disp(Ne)
    disp('nombre Nouveuds Nn'),disp(Nn)
    B=[1:1:Nn];
    %les valeur de B
    j=1;
    for i=1:c:Nn;
        if i < Nn-1
            w(1,j)=B(i,1);
            w(2,j)=B(i+1,1);
            w(3,j)=B(i+2,1);
            %w(4,j)=B(i+3,1);
        else;
            w(1,j)=B(i,1);
            w(2,j)=B(i+1,1) ;
```

Annexe B

```
w(3,j)=w(1,1);
%w(3,j)=B(i+2,1);
%w(4,j)=B(1,1);
end
j=j+1;
end
W=w';
j=1;
for i=1:c:Nn;

if i < Nn-1
x(1,j)=A(i,1);
x(2,j)=A(i+1,1);
x(3,j)=A(i+2,1);
%x(4,j)=A(i+3,1);
else;
x(1,j)=A(i,1);
x(2,j)=A(i+1,1);
x(3,j)=x(1,1);
%x(3,j)=A(i+2,1);
%x(4,j)=A(1,1);
end
j=j+1;
end

%les valeur de y
j=1;
for i=1:c:Nn;

if i < Nn-1
y(1,j)=A(i,2);
y(2,j)=A(i+1,2);
y(3,j)=A(i+2,2);
else;
y(1,j)=A(i,2);
y(2,j)=A(i+1,2);
y(3,j)=y(1,1);
end
j=j+1;
end

%Affichage
disp('A les coordonnées de l"élément géométrique ')
disp('      X | y '),printmat(V1(:,2:3))
%disp('B la numerotation globale ')printmat(B)
disp('Table_connectivité '),printmat(W)
disp('Table_connectivité de X '),printmat(x')
disp('Table_connectivité de Y '),printmat(y')

IELEM=Ne
NELEMS=Ne
NODEE=W
NODE1=NODEE(:,1)
NODE2=NODEE(:,2)
NODE3=NODEE(:,3)
%=====4=====
elseif DATMOD==DISP %4

disp('===== D E P L A C E M E N T  B.C =====')
MAN=input('INTRODUCTIONDES VALEUR MANNUEL (1) OU AUTO (#1)')
if MAN==1

DD=input('introduisez le nombre d"élément à introduire (déplacement) =')
for i=1:DD
NBCU=i;
IELEM=input('introduisez le numéro de l"élément à qui on va introduire les valeurs IELEM=')
ID =input('introduisez la direction (1 ou 2) ID=')
ISTORU(NBCU,1)=IELEM
IDIREC(NBCU,1)=ID
disp('introduisez PRESU pour l"élément'),disp(IELEM)
PRESU(NBCU,1)=input('PRESU(NBCU,1)=')
PRESU(NBCU,2)=input('PRESU(NBCU,2)=')
PRESU(NBCU,3)=input('PRESU(NBCU,3)=')
```

Annexe B

```
end
DD=4

MM(:,1)=ISTORU;
MM(:,2)=IDIREC;
MM(:,3:5)=PRESU(:,1:3);
else
    o=size(MM);
    DD=o(1,1);
    NBCU=o(1,1);
    ISTORU(:,1)=MM(:,1)
    IDIREC(:,1)=MM(:,2)
    PRESU(:,1)=MM(:,3)
    PRESU(:,2)=MM(:,4)
    PRESU(:,3)=MM(:,5)

end
disp(' élém direc dép 1 dép 2 dép 3'),disp(MM);

%=====5=====
elseif DATMOD==STRE %5
disp ('===== C O N T R A I N T E S   B.C =====')
    p=1;
    MAN=input('INTRODUCTION DES VALEUR MANNUEL (1) OU AUTO (#1)')
    if MAN==1
        MMM=input('Introduit le nombre d"élément a introduire ')
        for j=1:MMM
            IELEM=j;
            NBCS=NBCS+1;
            ISTORS1(p,1)=IELEM;
            ISTORS(p,1)=IELEM
            ISTORS1(p+1,1)=0
            ISTORS1(p+2,1)=0

            disp('Elément ='),disp(j)
            PRESXX(NBCS,1)=input('PRES XX1=')
            PRESXX(NBCS,2)=input('PRES XX2=')
            PRESXX(NBCS,3)=input('PRES XX3=')
            PRESXX1(p,1)=PRESXX(NBCS,1)
            PRESXX1(p+1,1)=PRESXX(NBCS,2)
            PRESXX1(p+2,1)=PRESXX(NBCS,3)

            PRESYY(NBCS,1)=input('PRES YY1=')
            PRESYY(NBCS,2)=input('PRES YY2=')
            PRESYY(NBCS,3)=input('PRES YY3=')
            PRESYY1(p,1)=PRESYY(NBCS,1)
            PRESYY1(p+1,1)=PRESYY(NBCS,2)
            PRESYY1(p+2,1)=PRESYY(NBCS,3)

            PRESXY(NBCS,1)=input('PRES XY1=')
            PRESXY(NBCS,2)=input('PRES XY2=')
            PRESXY(NBCS,3)=input('PRES XY3=')
            PRESXY1(p,1)=PRESXY(NBCS,1)
            PRESXY1(p+1,1)=PRESXY(NBCS,2)
            PRESXY1(p+2,1)=PRESXY(NBCS,3)
            p=p+3;
        end
        Resu=[ISTORS1,PRESXX1,PRESYY1,PRESXY1]
    else

        ISTORS1=Resu(:,1)
        PRESXX1=Resu(:,2)
        PRESYY1=Resu(:,3)
        PRESXY1=Resu(:,4)
        NBCS=0
        disp ('===== C O N T R A I N T E S   B.C =====')
        p=1;
        e=size(Resu)
        ee=e(1,1)/3
        for j=1:ee
            IELEM=j;
            NBCS=NBCS+1;
            ISTORS(NBCS,1)=ISTORS1(p,1)
        end
    end
end
```

Annexe B

```
PRESXX(NBCS,1)=PRESXX1(p,1);
PRESXX(NBCS,2)=PRESXX1(p+1,1);
PRESXX(NBCS,3)=PRESXX1(p+2,1);

PRESYY(NBCS,1)=PRESYY1(p,1);
PRESYY(NBCS,2)=PRESYY1(p+1,1);
PRESYY(NBCS,3)=PRESYY1(p+2,1);

PRESXY(NBCS,1)=PRESXY1(p,1);
PRESXY(NBCS,2)=PRESXY1(p+1,1);
PRESXY(NBCS,3)=PRESXY1(p+2,1);

    p=p+3;
end

PRESXX
PRESYY
PRESXY
disp('élé ContXX Cont YY ContXY'),disp(Resu)

end
% ISTORES=1:Ne;
%=====6=====
elseif DATMOD==INTE %6
disp('=====')
disp('===== point internes =====')
disp('=====')

disp(' point internes')
MAN=input('INTRODUCTIONDES VALEUR MANNUEL (1) OU AUTO (#1)')
if MAN==1

    DD=input('introduisez le nombre d"élément à introduire (point internes) =')
    for i=1:DD
        NINPTS(i,1)=i;
        XINT(i,1)=input('X Coord =')
        YINT(i,1)=input('Y Coord =')
    end
    MMM(:,1)=NINPTS
    MMM(:,2)=XINT;
    MMM(:,3)=YINT;

else
    MMM =[1.0000  1.4770  0.2600
          2.0000  1.4100  0.5130
          3.0000  1.2990  0.7500
          4.0000  1.1490  0.9640 ];
    nn=size(MMM)
    NINPTS=nn(1,1)
    XINT=MMM(:,2)
    YINT=MMM(:,3)
end

disp(' point X Coord Y Coord '),disp(MMM);

%=====8=====
elseif DATMOD==DATA %8
disp('ERREUR')
disp(' le maximum de la dimension des nouds interne est dépassé ')
disp(' le programme est arrêté ')
stop
end
n=DATMOD ;
%n =n+1;
End
```

Annexe B

#####

%ANGLES

#####

TOLER=1e-20;

for IELEM=1:NELEMS;

```
=====
[CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEM,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);%ARRAY3(IELEM)
=====
for IC=1:3;
```

```
    NODE=NORDER(IC);
    H=ZETA(IC);
    %=====
    [SHAPF,SHAPD]=SHAPE(H);
    %=====
    [DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODE);
    %=====
    if abs(XNORM)<TOLER;
        XNORM=TOLER;
    end
    if abs(YNORM)<TOLER;
        YNORM=TOLER;
    end
end
```

```
    THETA =atan(abs(YNORM)/abs(XNORM));
    if XNORM>0 & YNORM>0
        ANG=THETA;
    end
    if XNORM<0 & YNORM>0
        ANG=pi-THETA;
    end
    if XNORM>0 & YNORM<0
        ANG=2*pi-THETA;
    end
    if XNORM<0 & YNORM<0
        ANG=pi+THETA ;
    end
    ANGNOR(IELEM,IC)=ANG;
```

```
end
end
```

#####

ARRAY3

#####

```
NORDER(1)=NODE1(IELEM);
NORDER(2)=NODE2(IELEM);
NORDER(3)=NODE3(IELEM);
%où
%NORDER=NODE(3,:);
for IC=1:3
    NODE=NORDER(1,IC);
    CORDX(IC)=X(NODE);
    CORDY(IC)=Y(NODE);
end
```

#####

SHAPE

#####

```
%      SHAPE(H)
% le calcul la fonction quadratique d'itrpolation
```

Annexe B

```
SHAPF(1)=0.5*H*(H-1);
SHAPF(2)=1-H^2;
SHAPF(3)=0.5*H*(H+1);
% le calcul de la dérivée de la fonction quadratique d'itpolation
SHAPD(1)=H-0.5;
SHAPD(2)=-2*H;
SHAPD(3)=H+0.5;
```

```
#####
```

JACOBI

```
#####
```

```
function [DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODE)
```

```
DXDH=0;
DYDH=0;
```

```
for IC=1:3
    DXDH=DXDH+SHAPD(IC)*CORDX(IC) ;
    DYDH=DYDH+SHAPD(IC)*CORDY(IC) ;
end
```

```
XJACOB=(DXDH^2+DYDH^2)^0.5;
%Arret en cas XJACOB=0
if XJACOB==1e-10;
    disp('#####')
    disp('#####')
    disp('E R R E U R E car: ')
    disp('le jacobien est nulle en ce point ='),disp(NODE)
    disp('#####')
    disp('#####')
stop
end
XNORM=DYDH/XJACOB ;
YNORM=-DXDH/XJACOB ;
```

```
end
```

```
#####
```

NUMDATA

```
#####
```

```
function [AA1,BB1,CC1,DD1,XG,CG,XGL,CGL]=NUMDATA(NGAUSS)
```

```
%Coefficient elliptique
if NGAUSS~=4 & NGAUSS~=6;
```

```
NGAUSS=input('introduisez le nombre d'itegration gaussienne (4 ou 6) NGAUSS=')
end
AA1(1)=0.096578619622;
AA1(2)=0.031559431627;
AA1(3)=0.023761224857;
AA1(4)=0.025962888452;
```

Annexe B

```
AA1(5)=0.0066398011146;
BB1(1)=0.12499929597;
BB1(2)=0.070148757782;
BB1(3)=0.044983875539;
BB1(4)=0.018751660276;
BB1(5)=0.0018472341632;
CC1(1)=0.44315287472;
CC1(2)=0.057566998484;
CC1(3)=0.031761145524;
CC1(4)=0.030662347457;
CC1(5)=0.0076529606032;
DD1(1)=0.24999920273;
DD1(2)=0.093564907830;
DD1(3)=0.054260524448;
DD1(4)=0.021836021169;
DD1(5)=0.0021247918284 ;

if NGAUSS==4 ;

XG(1)=-0.861136311594053;
XG(2)=-0.339981043584856;

CG(1)=0.347854845137454;
CG(2)=0.652145154862546;

XGL(1)=0.0414484801993832 ;
XGL(2)=0.245274914320602 ;
XGL(3)=0.556165453560276;
XGL(4)=0.0392254871299598;

CGL(1)=0.383464068145135 ;
CGL(2)=0.386875317774762 ;
CGL(3)=0.190435126950142 ;
CGL(4)=0.0392254871299598 ;

elseif NGAUSS==6 ;

XG(1)=-0.932469514203152 ;
XG(2)=-0.661209386466264 ;
XG(3)=-0.238619186083197 ;

CG(1)=0.171324492379170 ;
CG(2)=0.360761573048139 ;
CG(3)=0.467913934572691 ;

XGL(1)=0.0216340058441169;
XGL(2)=0.129583393154951 ;
XGL(3)=0.314020449914766;
XGL(4)=0.538657217351802 ;
XGL(5)=0.756915337377403 ;
XGL(6)=0.922668851372120;

CGL(1)=0.238763662578548 ;
CGL(2)=0.308286573273947 ;
CGL(3)=0.245317446563210 ;
CGL(4)=0.142008756566477 ;
CGL(5)=0.0554546223248863;
CGL(6)=0.0101689586929323;
end
N=1+(NGAUSS/2);
for l=N:NGAUSS
    XG(l)=XG(NGAUSS+1-l);
    CG(l)=CG(NGAUSS+1-l);
end
```

Annexe B

#####

ASSEMB

#####

```
YTRAC(1:NELEMS,1:3)=0;
XTRAC(1:NELEMS,1:3)=0;

NEQN=2*NNODES;
if IGEOM==3;
  E=E*(1+2*XNU)/(1+XNU)^2 ;
  XNU=XNU/(1+XNU);
end
XMU=E/(2*(1+XNU)) ;

for IBC=1:NBCS

  IELEM=ISTORS(IBC);
  %=====
  [CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEM,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);
  %=====
  for IC=1:3
    NODE=NORDER(IC);
    H=ZETA(IC) ;
    %=====
    [SHAPF,SHAPD]=SHAPE(H) ;
    %=====
    [DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODE);
    %=====
    XTRAC(IELEM,IC) =PRESXX(IBC,IC)*XNORM+PRESXY(IBC,IC)*YNORM;
    YTRAC(IELEM,IC) =PRESXY(IBC,IC)*XNORM+PRESYY(IBC,IC)*YNORM;
  end
end

DMAX=0;
DIST=0;
for II=1:NNODES;
  for JJ=1:NNODES;
    if JJ==II;
      else
        DIST=((X(II)-X(JJ))^2+(Y(II)-Y(JJ))^2)^0.5;
        if DIST > DMAX;
          DMAX=DIST;
        end
      end
    end
  end
end
SCALEF=E/DMAX;

RHS1(1:NNODES)=0;
RHS2(1:NNODES)=0;
BN1(1:NNODES)=0;
BN2(1:NNODES)=0;
NODE=NNODES;

for NODEP=1:NNODES;
  XP=X(NODEP);
  YP=Y(NODEP);
  for NODE=1:NNODES
    A11(NODE)=0;
    A12(NODE)=0;
    A21(NODE)=0;
    A22(NODE)=0;
    F11(NODE)=0;
    F12(NODE)=0;
    F21(NODE)=0;
    F22(NODE)=0;
  end
end
```

Annexe B

```

for IELEM=1:NELEMS
  for IC=1:3
    B11(IELEM,IC)=0;
    B12(IELEM,IC)=0;
    B21(IELEM,IC)=0;
    B22(IELEM,IC)=0;
  end
end
end

for IELEMQ=1:NELEMS      %11
  %=====
  [CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEMQ,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);
  %=====
  for IC=1:3              %22
    NODEQ=NORDER(IC);
    %pour le cas axisymetrique verifier si NODEPest sur l'axe Z
    RELXP=XP/DMAX;
    if IGEOM==1 & RELXP<1e-15 %5
      %-----
      PZAXIS ;% PZAXIS(IC)*****
      %-----
    end
    if IGEOM==1 & RELXP<1e-15 %5

  else
    ISELF=0;
    if NODEP==NODE1(IELEMQ) | NODEP==NODE2(IELEMQ) | NODEP==NODE3(IELEMQ);
      ISELF=1;
    end
    %pas d'integration singuliere
    if ISELF==0;
      %-----
      NONSIN ;% NONSIN(IC)*****
      %-----
    end
    if ISELF==1;
      %Integration singuliere (non logarithmique)
      %-----
      SINGU1;%SINGU1(IC)*****
      %-----
      %Integration singuliere (logarithmique)
      %-----
      SINGU2;% SINGU2(IC)*****
      %-----
    end
  end

  end%          -->5
end%          -->22
end%          -->11

%Tous les coeficien de la matrice A et B sont calculée excepté la
%diagonale de la matrice A
% le calcul de la diagonale de la matrice A
if IGEOM==1
  %-----
  DIAGAX ; %*****
  %-----
end
if IGEOM~=1
  %-----
  DIAG2D ; %*****
  %-----
end
% Appliqué les condition au limite
%-----
BCAPPL ;% *****
%-----
% pour le cas axisymetrique les coeffission de la matrice A peuvent
% etre non nulle dans la dirrection R de la
%si le noud est sur l'axe Z .on utilise l'pplication bde B.C
if IGEOM == 1 & RELXP<1e-15;
  A11(NODEP)=1e-2;
end
% on suavgarde A11,A12,A21 et A22 dans dans une matrice

```

Annexe B

```
% peut indiquer la position de n'importe quel solution matriciel
IROW1=2*NODEP-1;
IROW2=IROW1+1 ;
for l=1:NNODES
  ICOL1=2*l-1;
  ICOL2=ICOL1+1;
  A(IROW1,ICOL1)=A11(l);
  A(IROW1,ICOL2)=A12(l);
  A(IROW2,ICOL1)=A21(l);
  A(IROW2,ICOL2)=A22(l) ;
end

%--STOCKER LE R.H.S. DES ÉQUATIONS COMME PROLONGATION DES
%--MATRIX, POUR ÊTRE PRÊT POUR LE SOUS-PROGRAMME DE RESOLUTION.

JMAX=NEQN+1;

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%JMAX=NEQN

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

A(IROW1,JMAX)=RHS1(NODEP);
A(IROW2,JMAX)=RHS2(NODEP) ;
end
A

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%A=A(1:Nn*2,1:Nn*2)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

#####
                        PZAXIS
#####

%POUR INTÉGRER LES SOLUTION ELEMETAIRE, QUAND le "NODEP " EST SUR L'AXIS Z (XP=0) DANS DES CAS
d'AXISYMMETRIE.

% pas de singularité
for IG=1:NGAUSS;
  H=XG(IG);
  %=====
  [SHAPF,SHAPD]=SHAPE(H) ;      %SHAPE(H)
  %=====
  [DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODEQ);
%JACOBI(NODE);%JACOBI(NODEQ);
  %=====
  XQ=SHAPF(1)*CORDX(1)+SHAPF(2)*CORDX(2)+SHAPF(3)*CORDX(3);
  YQ=SHAPF(1)*CORDY(1)+SHAPF(2)*CORDY(2)+SHAPF(3)*CORDY(3) ;

  %Calculer le deplacement ELEMETAIRE pou (XP=0)

  XA=1/(16*pi*pi*XMU*(1-XNU));
  ZZ=(YP-YQ)^2;

  XB=(XQ^2+ZZ)^0.5;
  XU=-pi*XA/XB;

  UXX=0;
  UXY=0;
  UYX=XU*(YP-YQ)*XQ/(XB*XB);
  UYY=-XU*(3-4*XNU+ZZ/(XB*XB)) ;

  % CALCULATE THE TRACTION KERNELS (FOR XP=0)
```

Annexe B

```

XX=pi*XA/XB^3;
XA1=XX*(YP-YQ);
XA2=-XX*XQ;
XA3=XX*(YP-YQ);

P1=XA1*(2+2*XNU-3*ZZ/(XB*XB));
P2=XA2*(1-2*XNU+3*ZZ/(XB*XB));
P3=XA3*(1-2*XNU+3*ZZ/(XB*XB));
P4 = P2;
TXX=0;
TXY=0;
TYX=2*XMU*(P1*XNORM+P2*YNORM);
TYY=2*XMU*(P3*YNORM+P4*XNORM);

%FORM THE SUB-MATRIX ASSOCIATED WITH THIS PARTICULAR NODE.

FACT=2.0*pi*XJACOB*CG(IG)*SHAPF(IC)*XQ;
A11(NODEQ)=A11(NODEQ)+FACT*TXX;
A12(NODEQ)=A12(NODEQ)+FACT*TXY;
A21(NODEQ)=A21(NODEQ)+FACT*TYX;
A22(NODEQ)=A22(NODEQ)+FACT*TYY;

B11(IELEMQ,IC)=B11(IELEMQ,IC)+FACT*UXX;
B12(IELEMQ,IC)=B12(IELEMQ,IC)+FACT*UXY;
B21(IELEMQ,IC)=B21(IELEMQ,IC)+FACT*UYX;
B22(IELEMQ,IC)=B22(IELEMQ,IC)+FACT*UYY;

end

#####
% function =NONSIN(IC)
#####
for IG=1:NGAUSS;
  H=XG(IG);
  %=====
  [SHAPF,SHAPD]=SHAPE(H); % SHAPE(H)
  %=====
  [DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODEQ) ;
  % [DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODE)
  % JACOBI(NODE) ==>> %CALL JACOBI(NODEQ)%
  %=====
  %NOTE : AFIN D'ACCÉLERER L'EXÉCUTION TEMPS, LES GRAINS SONT
  % - CALCULÉS SEULEMENT UNE FOIS POUR LE PREMIER NOEUD DE L'ÉLÉMENT
  % - « IELEMQ », ET ALORS ENTREPOSÉ DANS DE NOUVELLES RANGÉES COMMENÇANT PAR
  % - LA LETTRE « G ».
  GSHAPF(IG)=SHAPF(IC);
  if IC==1;
    %C--CALCULER LES GRAINS (MAIS SEULEMENT POUR LE PREMIER NOEUD).
    if IGEOM==1 ;
      %-----
      KERAXI;%*****
      %-----
    end

    if IGEOM==1 ;
      %-----
      KER2D ;% *****
      %-----
    end %--STOCKER LES GRAINS DANS DE NOUVELLES RANGÉES. POUR ÉVITER DE LES CALCULER
    %--POUR LES DEUXIÈMES ET TROISIÈME NOEUDS DE L'ÉLÉMENT.
    GUXX(IG)=UXX;
    GUXY(IG)=UXY;
    GUYX(IG)=UYX;
    GUYX(IG)=UYX;
    GUYX(IG)=UYX;
    GUYX(IG)=UYX;
    GTXX(IG)=TXX;
    GTXY(IG)=TXY;
    GTYX(IG)=TYX;
    GTYY(IG)=TYY;
    if IGEOM==1 ;
      GFACT(IG)=2*pi*XJACOB*CG(IG)*XQ;
    end
    if IGEOM==1
      GFACT(IG)=XJACOB *CG(IG);

```

Annexe B

```
end
end
%-
%-FORM QUE LE SUB-MATRIX A ASSOCIÉ À CE NOEUD PARTICULIER.
FACT=GFACT(IG)*GSHAPF(IG) ;
A11(NODEQ)=A11(NODEQ)+FACT*GTXX(IG);
A12(NODEQ)=A12(NODEQ)+FACT*GTXY(IG);
A21(NODEQ)=A21(NODEQ)+FACT*GTYY(IG);
A22(NODEQ)=A22(NODEQ)+FACT*GTYY(IG);
B11(IELEMQ,IC)=B11(IELEMQ,IC)+FACT*GUXX(IG);
B12(IELEMQ,IC)=B12(IELEMQ,IC)+FACT*GUXY(IG);
B21(IELEMQ,IC)=B21(IELEMQ,IC)+FACT*GUYX(IG);
B22(IELEMQ,IC)=B22(IELEMQ,IC)+FACT*GUYX(IG) ;
end
```

#####

% SINGU1(IC)

#####

```
%-PURPOSE : POUR EFFECTUER LES INTÉGRATIONS SINGULIÈRES, QUAND « NODEP » EST
%- À L'INTÉRIEUR DE L'ÉLÉMENT « IELEMQ » DE CHAMP.
%- CE SOUS-PROGRAMME TRAITE LES PIÈCES DE NON-LOGARITHMIC.
%- QUADRATURE GAUSSIENNE ORDINAIRE DE %-USE, PUISQUE LES INTÉGRALES SONT
%-NON-LOGARITHMIC.
for IG=1:NGAUSS
  H=XG(IG);
  %%-%-si P est 1er NOEUD de L'ÉLÉMENT..
  if NODEP==NODE1(IELEMQ)
    FN1=(H-2)*CORDX(1)+2*(1-H)*CORDX(2)+H*CORDX(3);
    FN2=(H-2)*CORDY(1)+2*(1-H)*CORDY(2)+H*CORDY(3);
  end
  %%Si P est le 2 sconde noeud de l'ELEMENT.
  if NODEP==NODE2(IELEMQ)
    FN1=0.5*(H-1)*CORDX(1)-H*CORDX(2)+0.5*(1+H)*CORDX(3);
    FN2=0.5*(H-1)*CORDY(1)-H*CORDY(2)+0.5*(1+H)*CORDY(3);
  end
  %%Si P est le 3eme noeud de l'ELEMENT.
  if NODEP==NODE3(IELEMQ)
    FN1=-H*CORDX(1)+2*(1+H)*CORDX(2)-(H+2)*CORDX(3);
    FN2=-H*CORDY(1)+2*(1+H)*CORDY(2)-(H+2)*CORDY(3);
  end
  % calculer LES FONCTIONS DE FORME ET LE JAÇ0BIEN.
  %=====
  [SHAPF,SHAPD]=SHAPE(H); % SHAPE(H)
  %=====
  %=====
  [DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODEQ) ;
  %[DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODE)
  %JACOBI(NODE) ==>> %CALL JACOBI(NODEQ)%
  %=====
  %%CALCULER LES PARTIE NON LOGARITHMIC DES ELEMENT FRONTIRE.
  ILOG=0;
  if IGEOM==1
    %-----
    KERAXI;%*****
    %-----
  end
  if IGEOM~=1;
    %-----
    KER2D;%*****
    %-----
  end
end
```

Annexe B

```

%-----
end
if IGEOM==1 ;
  FACT=2*pi*XJACOB*CG(IG)*SHAPF(IC)*XQ;
end

if IGEOM~=1
  FACT=XJACOB*CG(IG)*SHAPF(IC) ;
end

% %-FORMER LE SUB-MATRIX LIÉ À CE NOEUD PARTICULIER
A11(NODEQ)=A11(NODEQ)+FACT*TXX;
A12(NODEQ)=A12(NODEQ)+FACT*TXY;
A21(NODEQ)=A21(NODEQ)+FACT*TYX;
A22(NODEQ)=A22(NODEQ)+FACT*TYY;

B11(IELEMQ,IC)=B11(IELEMQ,IC)+FACT*UXX;
B12(IELEMQ,IC)=B12(IELEMQ,IC)+FACT*UXY;
B21(IELEMQ,IC)=B21(IELEMQ,IC)+FACT*UYX;
B22(IELEMQ,IC)=B22(IELEMQ,IC)+FACT*UYY ;
end

#####
% SINGU2(IC)
#####

ISUBEL=0

for IG=1:NGAUSS

  if NODEP==NODE1(IELEMQ)
    H=2*XGL(IG)-1;
    COEFF=2;
  end
  %%-%-si P est 2nd NOEUD de L'ÉLÉMENT (FIRST SUB-ELEMENT) .
  if NODEP==NODE2(IELEMQ)
    ISUBEL=1;
    H=XGL(IG);
    COEFF=1;
  end
  %%-%-si P est 2nd NOEUD de L'ÉLÉMENT (SECOND SUB-ELEMENT) .

  if NODEP==NODE2(IELEMQ) & ISUBEL==2 % -->99
    H=-XGL(IG);
    COEFF=1 ;
  end

  % si P est 3eme NOEUD de L'ÉLÉMENT
  if NODEP==NODE3(IELEMQ)
    H=1-2*XGL(IG);
    COEFF=2;
  end
end

% calculer LES FONCTIONS DE FORME ET LE JAÇ0BIEN.
%=====
[SHAPF,SHAPD]=SHAPE(H); % SHAPE(H)
%=====

%=====
[DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODEQ) ;
%[DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODE)
%JACOBI(NODE) ==>> %CALL JACOBI(NODEQ)%
%=====
%CALCULER LES PARTIE LOGARITHMIC DES ELEMENT FRONTIRE.
ILOG=1

if IGEOM==1
  %-----
  KERAXI;%*****

```

Annexe B

```
%-----  
end  
if IGEOM~=1  
%-----  
KER2D;%*****  
%-----  
end  
if IGEOM==1  
FACTL=2*pi*COEFF*XJACOB*CGL(IG)*SHAPF(IC)*XQ;  
end  
if IGEOM~=1  
FACTL=COEFF*XJACOB*CGL(IG)*SHAPF(IC);  
end  
  
%-FORMER LE SUB-MATRIX LIÉ À CE NOEUD PARTICULIER  
A11(NODEQ)=A11(NODEQ)+FACTL*TXX;  
A12(NODEQ)=A12(NODEQ)+FACTL*TXY;  
A21(NODEQ)=A21(NODEQ)+FACTL*TYX;  
A22(NODEQ)=A22(NODEQ)+FACTL*TYY;  
  
B11(IELEMQ,IC)=B11(IELEMQ,IC)+FACTL*UXX;  
B12(IELEMQ,IC)=B12(IELEMQ,IC)+FACTL*UXY;  
B21(IELEMQ,IC)=B21(IELEMQ,IC)+FACTL*UYX;  
B22(IELEMQ,IC)=B22(IELEMQ,IC)+FACTL*UYU ;  
  
% RÉPÉTER LES CALCULS POUR LE DEUXIÈME SOUS-ÉLÉMENT (QUAND P EST  
% LE DEUXIÈME NOEUD DE L'ÉLÉMENT).  
if NODEP==NODE2(IELEMQ)  
ISUBEL=ISUBEL+1;  
end  
if ISUBEL==2;  
%-----  
SINGU3;  
%-----  
  
end  
end
```

#####

% SINGU3(IC)

#####

```
if NODEP==NODE2(IELEMQ) & ISUBEL==2 % -->99  
H=-XGL(IG);  
COEFF=1 ;  
end  
  
% si P est 3eme NOEUD de L'ÉLÉMENT  
if NODEP==NODE3(IELEMQ)  
H=1-2*XGL(IG);  
COEFF=2;  
end  
  
% calculer LES FONCTIONS DE FORME ET LE JAÇ0BIEN.  
%=====   
[SHAPF,SHAPD]=SHAPE(H); % SHAPE(H)  
%=====   
  
%=====   
[DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODEQ) ;  
%[DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODE)  
%JACOBI(NODE) ==>> %CALL JACOBI(NODEQ)%  
%=====   
%CALCULER LES PARTIE LOGARITHMIC DES ELEMENT FRONTIRE.  
ILOG=1  
  
if IGEOM==1  
%-----
```

Annexe B

```
KERAXI;%*****
%-----
end
if IGEOM~=1
%-----
KER2D;%*****
%-----
end
if IGEOM==1
FACTL=2*pi*COEFF*XJACOB*CGL(IG)*SHAPF(IC)*XQ;
end
if IGEOM~=1
FACTL=COEFF*XJACOB*CGL(IG)*SHAPF(IC);
end

%-FORMER LE SUB-MATRIX LIÉ À CE NOEUD PARTICULIER
A11(NODEQ)=A11(NODEQ)+FACTL*TXX;
A12(NODEQ)=A12(NODEQ)+FACTL*TXY;
A21(NODEQ)=A21(NODEQ)+FACTL*TYX;
A22(NODEQ)=A22(NODEQ)+FACTL*TYY;

B11(IELEMQ,IC)=B11(IELEMQ,IC)+FACTL*UXX;
B12(IELEMQ,IC)=B12(IELEMQ,IC)+FACTL*UXY;
B21(IELEMQ,IC)=B21(IELEMQ,IC)+FACTL*UYX;
B22(IELEMQ,IC)=B22(IELEMQ,IC)+FACTL*UYY ;

% RÉPÉTER LES CALCULS POUR LE DEUXIÈME SOUS-ÉLÉMENT (QUAND P EST
% LE DEUXIÈME NOEUD DE L'ÉLÉMENT).
if NODEP==NODE2(IELEMQ)
ISUBEL=ISUBEL+1;
end
if ISUBEL==2;
SINGU3;
end

#####
% DIAGAX
#####

ARZ=0;
AZZ=0;
%for NODE=1:NNODES
% if NODE~=NODEP
% ARZ=ARZ-A12(NODE)
% AZZ=AZZ-A22(NODE)
% end
%end

%ou

for NODE=1:NNODES;
if NODE==NODEP;

else
ARZ=ARZ-A12(NODE);
AZZ=AZZ-A22(NODE);
end
end

A12(NODEP)=ARZ;
A22(NODEP)=AZZ;

%- si « NODEP » EST SUR LE Z-AXIS, LÀ N'EST AUCUN BESOIN DE CALCULER LES LIMITES DE
%- DIAGONAL DANS LE R-DIRECTION.
%- c.à.d. CES LIMITES DOIT ÊTRE DIFFÉRENT DE ZÉRO.
RELXP=XP/DMAX;
if RELXP<1.E-15 ;
A11(NODEP)=1.E-2;
A21(NODEP)=1.E-2;
```

Annexe B

```
else
%-CALCULATE LES RANGÉES BN1 ET BN2, QUI SONT EMPLOYÉS POUR ACCUMULER
%-THE R-H.S.A EU BESOIN POUR LE R-DIRECTION, VOIT EQ. (6.41).
for IELEM=1:NELEMS
%=====
[CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEM,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);
%=====
for IC=1:3
NODE=NORDER(IC);
H=ZETA(IC);
%=====
[SHAPF,SHAPD]=SHAPE(H) ;
%=====
[DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODE);
%=====
TR=XNORM;
TZ=0;
BN1(NODEP)=BN1(NODEP)+B11(IELEM,IC)*TR+B12(IELEM,IC)*TZ;
BN2(NODEP)=BN2(NODEP)+B21(IELEM,IC)*TR+B22(IELEM,IC)*TZ;
end
end

%-NOW CALCULENT LES LIMITES DIAGONALES DANS LE R-DIRECTION, L'ARR ET L'AZR.
SUM1=0;
SUM2=0;
FACTR=1-XNU;
FACTZ=-2*XNU;
for NODE=1:NNODES;
if NODE==NODEP ;

else
UR=FACTR*X(NODE)/E;
UZ=FACTZ*Y(NODE)/E
SUM1=SUM1-A11(NODE)*UR-A12(NODE)*UZ;
SUM2=SUM2-A21(NODE)*UR-A22(NODE)*UZ ;
end
end

UR=FACTR*X(NODEP)/E;
UZ=FACTZ*Y(NODEP)/E ;
ARR=SUM1+BN1(NODEP)-ARZ*UZ;
AZR=SUM2+BN2(NODEP)-AZZ*UZ ;
%-%-PUT LES LIMITES DE DIAGONALE EN POSITIONS DE THIER DANS L'A-MATRIX.
A11(NODEP)=ARR/UR;
A21(NODEP)=AZR/UR;

end
#####
% DIAG2D
#####
%-      2D CASES.
%-
%L'ÉTAT RIGIDE DE DÉPLACEMENTS DE CORPS DE %-USE, VOIENT EQ. (4.57).
ARR=0;
ARZ=0;
AZR=0;
AZZ=0;
for NODE=1:NNODES
if NODE==NODEP;

else
ARR=ARR-A11(NODE);
ARZ=ARZ-A12(NODE);
AZR=AZR-A21(NODE);
AZZ=AZZ-A22(NODE) ;
end
end
% ONT MIS LES LIMITES DIAGONALES DANS LEURS POSITIONS DANS L'A-MATRIX.
A11(NODEP)=ARR;
A12(NODEP)=ARZ;
A21(NODEP)=AZR;
A22(NODEP)=AZZ;
```

Annexe B

#####

% BCAPPL

#####

```
%-PURPOSE : POUR APPLIQUER le B.
%. AUX MATRICES A ET B, DE SORTE QUE
%-- TOUS INCONNUS SONT SUR LE L.H.S.
%--CONSIDÉRER LE DÉPLACEMENT PRESCRIT B.C.
%--ICI LES A-COEFFICIENTS APPROPRIÉS SONT PERMUTÉS AVEC LE
%-B-COEFFICIENTS APPROPRIÉ. À CETTE FIN, EMPLOYER LES MATRICES PROVISOIRES « F ».
if NBCU==0
%-----
  introd
%-----
end

for IBC=1:NBCU
  IELEM=ISTORU(IBC)
  ID=IDIREC(IBC)
  %=====
  [CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEM,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);
  %=====
  for IC=1:3
    NODE=NORDER(IC)
    %MOTE QUE LE B-COEFFICIENTS APPROPRIÉ DOIT ÊTRE MULTIPLIÉ PAR LE FACTEUR DE %SCALING.
    if ID==1
      F11(NODE)=F11(NODE)-B11(IELEM,IC)*SCALEF
      F21(NODE)=F21(NODE)-B21(IELEM,IC)*SCALEF
    end
    if ID==2
      F12(NODE)=F12(NODE)-B12(IELEM,IC)*SCALEF
      F22(NODE)=F22(NODE)-B22(IELEM,IC)*SCALEF
    end
  end
end

%INITIALISE LA RANGÉE NCHECK. LA RANGÉE DE
%THIS EST EMPLOYÉE POUR S'ASSURER QUE DES NOEUDS COMMUNS ENTRE DEUX
%ELEMENTS NE SONT PAS TRAITÉS DEUX FOIS.
for NODE=1:NNODES
  NCHECK(NODE)=0
end

%NOW MULTIPLIE L'A-COEFFICIENTS APPROPRIÉ PAR LA DISP PRESCRITE,
%AND LES DÉPLACENT AU R.H.S. (ET RENSERSON LEUR SIGNE).
for IBC=1:NBCU
  IELEM=ISTORU(IBC)
  ID=IDIREC(IBC)
  %=====
  [CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEM,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);
  %=====
  for IC=1:3
    NODE=NORDER(IC) %*****
    DISP=PRESU(IBC,IC)
    if NCHECK(NODE)==IDIREC(IBC)

  else
    if ID==1
      RHS1(NODEP)=RHS1(NODEP)-A11(NODE)*DISP
      RHS2(NODEP)=RHS2(NODEP)-A21(NODE)*DISP
    end
    if ID==2
      RHS1(NODEP)=RHS1(NODEP)-A12(NODE)*DISP
      RHS2(NODEP)=RHS2(NODEP)-A22(NODE)*DISP
    end
  end

  %COEFFICIENT APPROPRIÉ
  %(MAINTENANT SAUVÉ DANS RANGÉES « F »
  %XTCUP LES POSITIONS DE L'A-COEFFICIENTS APPROPRIÉ.
  if ID==1
    A11(NODE)=F11(NODE)
    A21(NODE)=F21(NODE)
```

Annexe B

```
end
if ID==2
  A12(NODE)=F12(NODE)
  A22(NODE)=F22(NODE)
end
NCHECK(NODE)=IDIREC(IBC)
end
end

end

%CONSIDER L'EFFORT PRESCRIT B.C.
%WLTIPY LE B-COEFFICIENTS PAR LA TRACTION ET PUIS EUX DE PRESRIBED AU R.H.S.
if NBCS==0

else
for IBC=1:NBCS
  IELEM=ISTORS(IBC)
  %=====
  [CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEM,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);
  %=====
  for IC=1:3
    NODE=NORDER(IC)
    RHS1(NODEP)=RHS1(NODEP)+B11(IELEM,IC)*XTRAC(IELEM,IC)+B12(IELEM,IC)*YTRAC(IELEM,IC)
    RHS2(NODEP)=RHS2(NODEP)+B21(IELEM,IC)*XTRAC(IELEM,IC)+B22(IELEM,IC)*YTRAC(IELEM,IC)
  end
end
end

#####
% SOLVER
#####
%-PURPOSE : POUR RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES EN UTILISANT % - ÉLIMINATION
GAUSSIENNE AVEC LE PIVOTEMENT PARTIEL. % - le CÔTÉ DROIT des ÉQUATIONS ONT ÉTÉ % SAUVÉS - COMME
PROLONGATION DE [A]
% %CALCULATE LA VALEUR MOYENNE DES COEFFICIENTS.
AMEAN=0;
for IROW=1:NEQN;
  for ICOL=1:NEQN;
    AMEAN=AMEAN+abs(A(IROW,ICOL)) ;
  end
end
AMEAN=AMEAN/NEQN^2 ;

% PIVOTEMENT PARTIEL DE PERFORM EN RECHERCHANT LA PRINCIPALE COLONNE DE [A]
JMAX=NEQN+1
for IEQN=1:NEQN-1;
  IMIN=IEQN+1;
  IMAX=IEQN;
  for I=IMIN,NEQN;
    if abs(A(I,IEQN))>abs(A(IMAX, IEQN));
      IMAX = I;
    end
  end
  if IMAX==IEQN
  else
    for J=IEQN:JMAX ;
      AA=A(IEQN,J);
      A(IEQN,J)=A(IMAX,J);
      A(IMAX,J)=AA;
    end
    %-ELIMINATE X (IEQN) DES ÉQUATIONS RESTANTES, ÉVITANT
    %-DIVISION PAR ZÉRO (SI L'ÉLÉMENT PIVOTAL EST ZÉRO).
  end
  if abs(A(IEQN,IEQN)/AMEAN)<1E-8
    disp('** Erreur **')
    disp(' LA SOLUTION MATRIX A » DÉTERMINANT ZÉRO')
    disp(' LES ÉQUATIONS NE PEUVENT PAS ÊTRE RÉSOLU')
    disp('** PROGRAMME arrêter**')
    %stop
  else
    for I=IMIN:NEQN
      FACT=A(I,IEQN)/A(IEQN,IEQN) ;
      for J=IMIN:JMAX ;
```

Annexe B

```
        A(I,J)=A(I,J)-FACT*A(IEQN,J) ;
    end
end
end
end
%===== SOUTIENNENT LA SUBSTITUTION, ÉVITANT LA DIVISION PAR ZÉRO.
if abs(A(NEQN,NEQN)/AMEAN)<1.E-8 ;
    disp('*** Erreur ***')
    disp(' LA SOLUTION MATRIX A » DÉTERMINANT ZÉRO')
    disp(' LES ÉQUATIONS NE PEUVENT PAS ÊTRE RÉSOULU')
    disp('*** PROGRAMME arrêter***')
    stop
else
    U(NEQN)=A(NEQN,JMAX)/A(NEQN, NEQN)
    for L=2:NEQN;
        I=NEQN+1-L;
        SUM=A(I,JMAX);
        IP1=I+1;
        for J=IP1:NEQN;
            SUM=SUM-A(I,J)*U(J) ;
        end
        U(I)=SUM/A(I,I) ;
    end

    %-STOP LE PROGRAMME SI LA CAUSE DÉTERMINANTE D'A EST ZÉRO.
end

U'
#####
                        % ARRANG
#####
%-PURPOSE : POUR ARRANGER LES VARIABLES CALCULÉES (LES INCONNUS) DANS
%- DÉPLACEMENTS ET TRACTION.
%- ÉLÉMENTS DE
%-FOR AVEC LA DISP PRESCRITE. B.C., LA TRACTION INCONNUE CALCULÉE DE
%-IS.
if NBCU==0 ;
else
    for IBC=1:NBCU;
        IELEM=ISTORU(IBC);
        %=====
        [CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEM,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);
        %=====
        for IC=1:3
            NODE=NORDER(IC);
            IROW1=2*NODE-1;
            IROW2=IROW1+1;
            %-NOTE THAT THE COMPUTED DISP MUST BE RE-SCALED, SEE EQ.(4.62).
            if IDIREC(IBC)==1 ;
                XTRAC(IELEM,IC)=U(IROW1)*SCALEF ;
            end
            if IDIREC(IBC)==2;
                YTRAC(IELEM, IC)=U(IROW2)*SCALEF;
            end
        end
    end
end
%-
%NOW INSERT THE PRESCRIBED DISP. INTO THEIR RELEVANT POSITION IN
%THE ARRAY *U".
for IBC=1:NBCU
    IELEM=ISTORU(IBC);
    %=====
    [CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEM,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);
    %=====
    for IC=1:3
        NODE=NORDER(IC);
        IROW=2*(NODE-1)+IDIREC(IBC);
        U(IROW)=PRESU(IBC,IC);
    end
end
end
end
U'
```

Annexe B

#####

% BSTRES

#####

```
for NODE=1:NNODES
  SIG11(NODE)=0;
  SIG12(NODE)=0;
  SIG22(NODE)=0;
  SIG33(NODE)=0;
  SIGXX(NODE)=0;
  SIGYY(NODE)=0;
  SIGXY(NODE)=0;
  SIGZZ(NODE)=0;
  NCHECK(NODE)=0;
end
%-
%-START LA BOUCLE POUR LES ÉLÉMENTS.
for IELEM=1:NELEMS
  %=====
  [CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEM,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);
  %=====
  for IC=1:3
    NODE=NORDER(IC) ;
    IROW1=2*NODE-1;
    %-CALCULATE LES COMPOSANTS TANGENTIELS DE VECTEUR D'UNITÉ, VOIENT EQ. {4.44).
    H=ZETA(IC);
    %=====
    [SHAPF,SHAPD]=SHAPE(H) ;
    %=====
    [DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODE);
    %=====
    TANG1=-YNORM;
    TANG2=XNORM ;

    %-NOW TRANSFORMENT LE TRACIONS DE GLOBAL AUX COORDONNÉES LOCALES,
    %-USING LES COMPOSANTS NORMAUX D'UNUT, VOIENT L'ORDRE TECHNIQUE. (4.67).
    TTRAC(IELEM,IC)=YTRAC(IELEM,IC)*XNORM-XTRAC(IELEM,IC)*YNORM;
    PTRAC(IELEM,IC)=XTRAC(IELEM,IC)*XNORM+YTRAC(IELEM,IC)*YNORM ;

    %-SIMILARLY. TRANSFORMER LA DISP DE GLOBAL AUX COORDONNÉES LOCALES.

    DISPT(NODE)=U(2*NODE)*XNORM-U(2*NODE-1)*YNORM;
    DISPN(NODE)=U(2*NODE-1)*XNORM+U(2*NODE)*YNORM ;
    %-%CALCULATE THE STRAINS IN THE LOCAL DIRECTIONS, SEE EQ.(4.66).
    XX1=0
    XX2=0
    for IIC=1:3;
      NN=NORDER(IIC);
      KROW1=2*NN-1;
      KROW2=KROW1+1;
      XX1=XX1+SHAPD(IIC)*U(KROW1);
      XX2=XX2+SHAPD(IIC)*U(KROW2) ;
    end
    E11=(XX1*TANG1+XX2*TANG2)/XJACOB
    %Les CAS d'AXISYMMETRIE, CALCULENT la CONTRAINTE « E33 » de CERCLE.
    %-NOTE : POUR 2D GEOMETRIES, 'E33 " =0 MÊME POUR L'EFFORT PLAT,
    % - PUISQU'E ET NU ONT ÉTÉ DÉJÀ MODIFIÉS.

    E33=0;

    if IGEOM==1 & X(NODE)>1.E-20 ;
      E33=U(IROW1)/X(NODE);
    end
    %-%-LA LOI DE USING HOOKE, CALCULENT DES EFFORTS LOCAUX, VOIENT EQ. (4.68).
    FACT=XNU*E*E33/(1-XNU^2);
    S11=FACT+(E*E11/(1+XNU)+XNU*PTRAC(IELEM,IC))/(1-XNU);
    S12=TTRAC(IELEM, IC);
    S22=PTRAC(IELEM,IC);
    S33=E*E33+XNU*(S11+S22);

    % LA TRANSFORMATION STANDARD MATRIX DE %-USING, CALCULENT LES EFFORTS GLOBAUX,
    %-SEE EQ. (4.70).
```

Annexe B

```
SRR=S11*YNORM^2+S22*XNORM^2-2.0*S12*XNORM*YNORM;
SZZ=S11*XNORM^2+S22*YNORM^2+2.0*S12*XNORM*YNORM;
SRZ=(S22-S11)*XNORM*YNORM+S12*(XNORM^2-YNORM^2);
if IGEOM==1 & X(NODE) < 1.E-20;
  S33=SRR
end
if IGEOM==3;
  S33=0;
end
SHOOP=S33
%LES EFFORTS « NODAUX » DE PRODUIT DE
%-TO, FONT LA MOYENNE DES VALEURS D'EFFORT SUR LE
%-COMMON %NODES ENTRE DEUX ÉLÉMENTS.
%-NOTE : CE FAIRE LA MOYENNE DES VALEURS D'EFFORT PEUT ÊTRE ÉVITÉ,
% RÉSULTANTS - EN VALEURS DISCONTINUES D'EFFORT AUX COINS.
FACT=1
if NCHECK(NODE)==1
  FACT=2
end
SIG11(NODE)=(SIG11(NODE)+S11)/FACT
SIG22(NODE)=(SIG22(NODE)+S22)/FACT
SIG12(NODE)=(SIG12(NODE)+S12)/FACT
SIG33(NODE)=(SIG33(NODE)+S33)/FACT
SIGXX(NODE)=(SIGXX(NODE)+SRR)/FACT
SIGYY(NODE)=(SIGYY(NODE)+SZZ)/FACT
SIGXY(NODE)=(SIGXY(NODE)+SRZ)/FACT
SIGZZ(NODE)=(SIGZZ(NODE)+SHOOP)/FACT
NCHECK(NODE)=1
end
end

#####
%OUTVAR
#####
if IGEOM==1
  disp(' =====')
  disp('   BOUNDARY DEPLACEMENT ')
  disp(' =====')
  disp(' ')
  disp(' NOTE : Le DÉPLACEMENT TANGENTIEL POSITIF EST À GAUCHE DE LA NORMALE SORTANTE')
  disp('  NODE   R-COORD  Z-COORD  R-DISP  Z-DISP  NORMAL-DISP  TANG-DISP ')
  disp(' =====  =====  =====  =====  =====  =====  ===== ')
end
if IGEOM~=1
  disp(' =====')
  disp('   BOUNDARY DEPLACEMENT ')
  disp(' =====')
  disp(' ')
  disp(' NOTE : Le DÉPLACEMENT TANGENTIEL POSITIF EST À GAUCHE DE LA NORMALE SORTANTE')
  disp('  NODE   X-COORD  Y-COORD  X-DISP  Y-DISP  NORMAL-DISP  TANG-DISP ')
  disp(' =====  =====  =====  =====  =====  =====  ===== ')
end

NODE=1:NNODES;
IROW1=2*NODE-1;
IROW2=IROW1+1;
disp([NODE' X(NODE) Y(NODE) U(IROW1)' U(IROW2)' DISPN(NODE)' DISPT(NODE)'])

%-OUTPUT THE BOUNDARY TRACTIONS
if IGEOM==1
  disp(' =====')
  disp('   BOUNDARY TRACTION')
  disp(' =====')
  disp(' ')
  disp(' NOTE : POSITIVE TANGENTIAL TRACTION IS TO THE LEFT OF THE OUTWARD NORMAL')
  disp(' ')
  disp('  ELEM   NODE   R-TRACT  Z-TRACT  NORM-TRA  TANG-TRA  NORMAL-ANGLE ')
  disp(' =====  =====  =====  =====  =====  =====  ===== ')
end
if IGEOM~=1
  disp(' =====')
  disp('   BOUNDARY TRACTION')
end
```

Annexe B

```

disp(' =====')
disp(' ')
disp('NOTE : POSITIVE TANGENTIAL TRACTION IS TO THE LEFT OF THE OUTWARD NORMAL')
disp(' ')
disp(' ELEM  NODE  X-TRACT Y-TRACT  NORM-TRA TANG-TRA  NORMAL-ANGLE ')
disp(' =====  =====  =====  =====  =====  =====  =====')
end

i=0;
for IELEM=1:NELEMS
%=====
[CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEM,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);
%=====
for IC=1:3
  NODE=NORDER(IC);
  XANG=ANGNOR(IELEM,IC)*180/pi;
  i=i+1;
  if IC==1

    ff(i,:)= [IELEM NODE XTRAC(IELEM,IC) YTRAC(IELEM,IC) PTRAC(IELEM,IC) TTRAC(IELEM,IC) XANG];

  end
  if IC>1
    ff(i,:)= [0  NODE XTRAC(IELEM,IC) YTRAC(IELEM,IC) PTRAC(IELEM,IC) TTRAC(IELEM,IC) XANG];
  end
  ICHECK=1;
end
end
disp(ff)

%-OUTPUT THE BOUNDARY STRESSES.
if IGEOM==1
disp(' =====')
disp('  B O U N D A R Y   C O N T R A I N T E S  ')
disp(' =====')
disp(' ')
disp('          | HOOP |          ')
disp('  NODE |CONT(RR) | CONT(ZZ) | CONT(RZ) | CONT | VON-MISES')
disp(' =====|=====|=====|=====|=====| =====')
end

if IGEOM~=1
disp(' =====')
disp('  B O U N D A R Y   C O N T R A I N T E S  ')
disp(' =====')
disp(' ')

disp('          | HOOP |          ')
disp(' =====|=====|=====|=====|=====| =====')
disp('  NODE | CONT(XX) | CONT(YY) | CONT(XY) |CONT(ZZ)|VON-MISES')
disp(' =====|=====|=====|=====|=====| =====')

end

for NODE=1:NNODES

  XX1=0.5*(SIGXX(NODE)+SIGYY(NODE));
  XX2=0.5*((SIGXX(NODE)-SIGYY(NODE))^2+4*SIGXY(NODE)^2)^0.5;

  SIGMA1=XX1+XX2;
  SIGMA2=XX1-XX2;
  SIGMA3=SIGZZ(NODE);
  SIGMAE=((SIGMA1-SIGMA2)^2+(SIGMA2-SIGMA3)^2+(SIGMA3-SIGMA1)^2)^0.5/2^0.5;

  pp(NODE,:)= [ NODE  SIGXX(NODE) SIGYY(NODE)  SIGXY(NODE) SIGZZ(NODE) SIGMAE];

end
disp(pp)

```

Annexe B

#####

% INTCAL

#####

```
%-PURPOSE : POUR CALCULER LA DISP INTERNE. ET EFFORTS.
% - PRENDRE CHAQUE POINT INTERNE À LEUR TOUR COMME POINT DE DÉPART DE LECTURE « NODEP ».
if NINPTS==0
else
  for NODEP=1:NINPTS;
    XP=XINT(NODEP);
    YP=YINT(NODEP);
    %-NOTE : POUR LE CAS D'AXISYMMETRIC
    % ÉVITER D'EMPLOYER NU=0.5 EXACTEMENT%
    %ET ^R^= XP=0.0, EN EMPLOYANT UN TOLARENCE VALUE7
    % - LES GRAINS ÊTRE ENCORE VALIDE POUR NU=0.5 ET XP=0.0, MAIS
    % - EXIGENT ENCORE D'AUTRES MANIPULATIONS ALGÈBRIQUES
    TOLER=1.E-20;
    DifF=0.5-XNU;
    if DifF<TOLER;
      XNU=0.5-TOLER;
    end
    RAD=XP/DMAX;
    if IGEOM==1 & RAD<TOLER
      XP=TOLER*DMAX;
    end
    %-%-INITIALISE LES CHOIX DES VARIABLES INTERNES.
    UXINT(NODEP)=0;
    UYINT(NODEP)=0;
    SXXINT(NODEP)=0;
    SXYINT(NODEP)=0;
    SYYINT(NODEP)=0;
    DUXDR=0 ;
    DUXDZ=0;
    DUYDR=0;
    DUYPDZ=0;
    %TAKE EACH ELEMENT ON THE BOUNDARY IN TURN AS THE FIELD ELEMENT %--IELEMQ".
    for IELEMQ=1:NELEMS
      %=====
      [CORDX,CORDY,NORDER,NODE] = ARRAY3(IELEMQ,NODE1,NODE2,NODE3,X,Y);%ARRAY3(IELEM)
      %=====
      for IC=1:3
        NODEQ=NORDER(IC);
        IROW1=2*NODEQ-1;
        IROW2=IROW1+1;

        UX=U(IROW1);
        UY=U(IROW2);
        TR=XTRAC(IELEMQ,IC);
        TZ=YTRAC(IELEMQ,IC);
        for IG=1:NGAUSS;
          H=XG(IG);
          %=====
          [SHAPF,SHAPD]=SHAPE(H);
          %=====
          [DXDH,DYDH,XJACOB,XNORM,YNORM]=JACOBI(SHAPD,CORDX,CORDY,NODE);
          %=====
          %-CALCULATE LA DISP. ET GRAINS DE TRACTION.
          %NOTE QU'IL N'Y A AUCUNE SINGULARITÉ ICI.
          ISELF=0;
          if IGEOM==1
            %=====
            KERAXI;
            %=====
            FACT=2.*pi*XJACOB*CG(IG)*SHAPF(IC)*XQ;
          end

          if IGEOM~=1
            %=====
            KER2D;
            %=====
            FACT=XJACOB*CG(IG)*SHAPF(IC);
          end

          %-%-CALCULER LES DÉPLACEMENTS INTERNES EN UTILISANT LE B.I.E.D'EQ. (4.32).
```

Annexe B

```

UXINT(NODEP)=UXINT(NODEP)+FACT*(-UX*TXX-UY*TXY+TR*UXX+TZ*UXY);
UYINT(NODEP)=UYINT(NODEP)+FACT*(-UX*TYX-UY*TYT+TR*UYX+TZ*UYT);
%calculer les différentielles des déplacements des points
%interne
if IGEOM==1
%=====
DifFAX;%*****
%=====
end
if IGEOM~=1
%=====
DIFF2D;%*****
%=====
end
%-calculer les contraintes internes 2D EQ.(4.35).
if IGEOM~=1
SXXINT(NODEP)=SXXINT(NODEP)+FACT*(-S1XX*UX-S2XX*UY+D1XX*TR+D2XX*TZ);
SXYINT(NODEP)=SXYINT(NODEP)+FACT*(-S1XY*UX-S2XY*UY+D1XY*TR+D2XY*TZ);
SYYINT(NODEP)=SYYINT(NODEP)+FACT*(-S1YY*UX-S2YY*UY+D1YY*TR+D2YY*TZ);
end
%-
%-calculer les déplacement différentelles axisymetrique
if IGEOM==1
DUXDR=DUXDR+FACT*(-UX*DTXXDR-UY*DTXYDR+TR*DUXXDR+TZ*DUXYDR);
DUXDZ=DUXDZ+FACT*(-UX*DTXXDZ-UY*DTXYDZ+TR*DUXXDZ+TZ*DUXYDZ);
DUYDR=DUYDR+FACT*(-UX*DTYXDR-UY*DTYYDR+TR*DUYXDR+TZ*DUYYDR);
DUYDZ=DUYDZ+FACT*(-UX*DTYXDZ-UY*DTYYDZ+TR*DUYXDZ+TZ*DUYYDZ);
end
end
end
%Calculer les contrainte axisymétrique interne
if IGEOM==1
XN1=XNU/(1-2*XNU);
XE=DUXDR+DUYDZ+UXINT(NODEP)/XP ;
SXXINT(NODEP)=2*XMU*(DUXDR+XN1*XE);
SYYINT(NODEP)=2*XMU*(DUYDZ+XN1*XE);
SXYINT(NODEP)=XMU*(DUXDZ+DUYDR)
SZZINT(NODEP)=2*XMU*(UXINT(NODEP)/XP+XN1*XE);
end
%-Calculer les contr-ZZ pour les problème de déformation et
%contrainte plane
if IGEOM==2
SZZINT(NODEP)=XNU*(SXXINT(NODEP)+SYYINT(NODEP));
end
if IGEOM==3
SZZINT(NODEP)=0 ;
end
end
%Affichage des déplacements internes
if IGEOM==1
disp(' =====')
disp(' DEPLACEMENT INTERNE ')
disp(' =====')
disp(' ')
disp(' POINT R-COORD Z-COORD R-DISP Z-DISP RESULTANT ')
disp(' =====')
end
if IGEOM~=1
disp(' =====')
disp(' DEPLACEMENT INTERNE ')
disp(' =====')
disp(' ')
disp(' POINT X-COORD Y-COORD X-DISP Y-DISP RESULTANT ')
disp(' =====')
end
end
for NODEP=1:NINPTS;
RESUL=(UXINT(NODEP)^2 + UYINT(NODEP)^2)^0.5 ;
disp([NODEP XINT(NODEP) YINT(NODEP) UXINT(NODEP) UYINT(NODEP) RESUL])%*****
end
%
%-Affichage des contraintes internes
if IGEOM==1

```

Annexe B

```

disp(' =====')
disp('          CONTRAINTES INTERNE ')
disp(' =====')
disp('          | HOOP | ')
disp(' POINT |STRESS(RR)|STRESS(ZZ)|STRESS(RZ)|STRESS | VON-MISES ')
disp(' =====|=====|=====|=====|=====| =====')

end
if IGEOM~=1
disp(' =====')
disp('          CONTRAINTES INTERNE ')
disp(' =====')
disp('          ')
disp(' POINT |STRESS(XX)|STRESS(YY)|STRESS(XY)|STRESS(ZZ)| VON-MISES ')
disp(' =====|=====|=====|=====|=====| =====')

end
for I=1:NINPTS;
  XX1=0.5*(SXXINT(I)+SYYINT(I));
  XX2=0.5*((SXXINT(I)-SYYINT(I))^2+4*SXYINT(I)^2)^0.5;
  RIGMA1=XX1+XX2;
  SIGMA2=XX1-XX2;
  SIGMA3=SZZINT(I);
  SIGMAE=((SIGMA1-SIGMA2)^2+(SIGMA2-SIGMA3)^2+(SIGMA1-SIGMA3)^2)/2^0.5;
  disp(I,SXXINT(I),SYYINT(I),SXYINT(I),SZZINT(I),SIGMAE) %*****
end
end
#####
% KERAXI
#####
%-CALCULER LES COORDONNÉES DU POINT DE CHAMP Q
XQ=SHAPF(1)*CORDX(1)+SHAPF(2)*CORDX(2)+SHAPF(3)*CORDX(3)
YQ=SHAPF(1)*CORDY(1)+SHAPF(2)*CORDY(2)+SHAPF(3)*CORDY(3)

%--C--CALCULER QUELQUES PARAMÈTRES COMMUNS.

XA=1/(16.*pi^2*XMU*(1-XNU));
ZZ=(YP-YQ)^2;
XC=((XP+XQ)^2+ZZ)^0.5;
XD=(XP-XQ)^2+ZZ;
XDC2=XD*XC*XC;
AM=2*(XP*XQ)^0.5/XC;
XN1=1-2*XNU;
XN2=2*XNU-3;
XN3=3-4*XNU;
X1=2*XP^2+XQ^2+2*ZZ;
X2=2*XP^2+3*ZZ;
X3=XP^2+XQ^2+ZZ;
X4=XP^2-XQ^2+ZZ;
X5=XQ^2-XP^2+ZZ;
X6=2*XP^2-3*XQ^2+4*ZZ;
X7=3*XQ^2+2*ZZ;
X8=ZZ*X3*X4/XDC2;

%CALCULER LES COMPOSANTS DES GRAINS DE DÉPLACEMENT
UA1=XA/(XP*XQ*XC);
UA2=XA*(YP-YQ)/(XP*XC);
UA3=XA*(YP-YQ)/(XQ*XC);
UA4=2*XA/XC ;

%-LIEN DISP. GRAINS DANS LES PIÈCES QUI MULTIPLIE LES
%--INTÉGRALES ELLIPTIQUES K ET E.
UXXK=UA1*(XN3*X3+ZZ);
UXXE=UA1*(-XN3*XC*XC-ZZ*X3/XD);
UXYK=UA2;
UXYE=-UA2*X5/XD;

UYXK=-UA3;
UYXE=UA3*X4/XD;
UYXK=UA4*XN3;
UYXE=UA4*ZZ/XD;

%--CALCULER LES COMPOSANTS DES GRAINS DE TRACTION, VOIR L'ANNEXE (D).

```

Annexe B

```

XA1=XA/(XP*XQ*XQ*XC);
XA2=(YP-YQ)*XA/(XP*XQ*XC*XD);
XA3=XA/(XP*XC*XD);
XA5=(YP-YQ)*XA/(XC*XD);
XA6=XA/(XQ*XC*XD);
XA7=2*(YP-YQ)*XA/(XC*XD);
TK1=XA1*(2*XNU*X1-1.5*X2+0.5*X8);
TE1=(XA1/XD)*(-2*XNU*(XP*XP*X6+ZZ*X7+XQ^4)+3*(XP*XP*X4+ZZ*X1)-2*X8*X3);
TK2=XA2*(XN2*XD+ZZ*X3/(XC*XC));
TE2=XA2*(3*ZZ*XN2*X3-4*ZZ*X3*X3/XDC2);
TK3=XA3*(-XN1*XD*ZZ*X5/(XC*XC));
TE3=XA3*(-ZZ+XN1*X5+8*ZZ*XP*XP*X4/XDC2);
TK4=TK2;
TE4=TE2;
TK5=XA5*(XD/(XQ*XQ)+2*ZZ/(XC*XC));
TE5=XA5*(4*(1+XNU)-X3/(XQ*XQ)-8*ZZ*X3/XDC2);
TK6=XA6*(-XN1*XD*ZZ*X4/(XC*XC));
TE6=XA6*(-3*ZZ+XN1*X4+4*ZZ*X3*X4/XDC2);
TK7=XA7*(-ZZ/(XC*XC));
TE7=XA7*(XN1+4*ZZ*X3/XDC2);
TK8=TK6;
TE8=TE6;
%--COUPER LES GRAINS DE TRACTION EN PIÈCES QUI MULTIPLIENT LES
%--INTÉGRALES K ET E. d'ELLIPTIC
TXXK=2*XMU*(TK1*XNORM+TK2*YNORM);
TXXE=2*XMU*(TE1*XNORM+TE2*YNORM);
TXYK=2*XMU*(TK3*YNORM+TK4*XNORM);
TXYE=2*XMU*(TE3*YNORM+TE4*YNORM);
TYXK=2*XMU*(TK5*XNORM+TK6*YNORM);
TYXE=2*XMU*(TE5*XNORM+TE6*YNORM);
TYYK=2*XMU*(TK7*YNORM+TK8*XNORM);
TYYE=2*XMU*(TE7*YNORM+TE8*YNORM);
%
%--DÉFINIR LE PARAMÈTRE SI REQUIS POUR DES PIÈCES
% DE NON-LOGARITHMIC--DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES.
if ISELF==1 & ILOG==0;
S1=log(XC*XC)-log(FN1^2+FN2^2);
end
%--CALCULER LES INTÉGRALES ELLIPTIQUES.
%--NOTE : LES INTÉGRALES ELLIPTIQUES PRENDRONT SOIN DES
% LOGARITHMIQUES-- ET PIÈCES DE NON-LOGARITHMIC QUAND P EST L'INTÉRIEUR « IELEMQ ».

%-----
ELLIPT; %^*****
%-----

%-- %--CALCULER MAINTENANT TOUS GRAINS EN MULTIPLIANT LEURS COMPOSANTS
%--PAR LES INTÉGRALES ELLIPTIQUES APPROPRIÉES
UXX=UXXK*ELLIPK+UXXE*ELLIPE;
UXY=UXYK*ELLIPK+UXYE*ELLIPE;
UYX=UYXK*ELLIPK+UYXE*ELLIPE;
UYX=UYXK*ELLIPK+UYXE*ELLIPE;
YYY=YYYK*ELLIPK+YYYE*ELLIPE;
TXX=TXXK*ELLIPK+TXXE*ELLIPE;
TXY=TXYK*ELLIPK+TXYE*ELLIPE;
TYX=TYXK*ELLIPK+TYXE*ELLIPE;
TYY=TYYK*ELLIPK+TYYE*ELLIPE;
#####
% KER2D
#####
%--BUT : POUR CALCULER les 2D GRAINS.
%--CALCULER LES COORDONNÉES DE L'ÉLÉMENT IELEMQ ", VOIR L'EQ. (4.39),

XQ=SHAPF(1)*CORDX(1)+SHAPF(2)*CORDX(2)+SHAPF(3)*CORDX(3);
YQ=SHAPF(1)*CORDY(1)+SHAPF(2)*CORDY(2)+SHAPF(3)*CORDY(3);
%--
%--CALCULER LES GRAINS DE DÉPLACEMENT, VOIR L'EQ. (4.23).
XA=1/(8*pi*XMU*(1-XNU));
RDIST=((XP-XQ)^2+(YP-YQ)^2)^0.5;
XN1=3-4*XNU;
XN2=1-2*XNU;
DRDX=(XQ-XP)/RDIST;
DRDY=(YQ-YP)/RDIST;

```

Annexe B

```
DRDN=DRDX*XNORM+DRDY*YNORM ;

% - C-DISP. GRAINS POUR « P* PAS À L'INTÉRIEUR du *IELEMQ d'ÉLÉMENT ».
if ISELF==0 ;
  UXX=XA*(XN1*log(1/RDIST)+DRDX*DRDX) ;
  UXY=XA*DRDX*DRDY ;
  UYX=UXY ;
  UYY=XA*(XN1*log(1.0/RDIST)+DRDY*DRDY);
end
% - %--DISP. GRAINS POUR « P » INTÉRIEUR « IELEMQ* (PIÈCES DE NON-LOGARITHMIC).

if ISELF==1 & ILOG==0 ;
  S1=-0.5*log(FN1^2+FN2^2);
  UXX=XA*(XN1*S1+DRDX*DRDX) ;
  UXY=XA*DRDX*DRDY ;
  UYX=UXY ;
  UYY=XA*(XN1*S1+DRDY*DRDY) ;
end

% de DISP. GRAINS POUR L'INTÉRIEUR « IELEMQ » DE « P » (PIÈCES LOGARITHMIQUES).

if ISELF==1 & ILOG==1;
  UXX=XA*XN1 ;
  UXY=0;
  UYX=UXY ;
  UYY=XA*XN1;
end

%CALCULATE LES GRAINS DE TRACTION, VOIENT EQ. (4.27).
%NOTE QU'IL N'Y A AUCUNE SINGULARITÉ LOGARITHMIQUE aux 2D GRAINS de TRACTION.
XB=-1/(4*pi*RDIST*(1-XNU));

TXX=XB*DRDN*(XN2+2*DRDX*DRDX);
TXY=XB*(DRDN*2*DRDX*DRDY-XN2*(DRDX*YNORM-DRDY*XNORM));
TYX=XB*(DRDN*2*DRDX*DRDY-XN2*(DRDY*XNORM-DRDX*YNORM));
TTY=XB*DRDN*(XN2+2*DRDY*DRDY);

if ISELF==1 & ILOG==1
  TXX=0 ;
  TXY=0 ;
  TYX=0 ;
  TYY=0 ;
end

#####
% DIFFAX
#####
%PURPOSE : TO CALCULATE THE DIFFERENTIALS OF AXISYMMETRIC KERNELS.
XA=1/(16*pi^2*XMU*(1-XNU));
ZZ=(YP-YQ)^2;
XB=XP^2+XQ^2+ZZ;
XC=((XP+XQ)^2+ZZ)^0.5;
XD=(XP-XQ)^2+ZZ;
XDC2=XD*XC^2;
XF=XP^2-XQ^2+ZZ;
XH=XQ^2-XP^2+ZZ ;
XM=2*XP^2+XQ^2+2*ZZ;
XN=2*XP^2+3*ZZ;
XS=2*XP^2-3*XQ^2+4*ZZ;
XV=3*XQ^2+2*ZZ;
DBDR=2*XP;
DBDZ=2*(YP-YQ);
DCDR=(XP+XQ)/XC;
DCDZ=(YP-YQ)/XC;
DDDR=2*(XP-XQ);
DDDZ=2*(YP-YQ);
DFDR=2*XP;
DFDZ=2*(YP-YQ);
DHDR=-2*XP;
DHDZ=2*(YP-YQ);
DXMDR=4*XP ;
DXMDZ=4*(YP-YQ);
DNDR=4*XP;
```

Annexe B

DNDZ=6*(YP-YQ);
DSDR=4*XP;
DSDZ=8*(YP-YQ);
DVDR=0;
DVDZ=4*(YP-YQ);
DMDR=((XP*XQ)^0.5/XC)*(-2*(XP+XQ)/XC^2+1/XP);
DMDZ=-2*(XP*XQ)^0.5*(YP-YQ)/XC^3;
DKDM=ELLIPE/(AM*(1-AM^2))-ELLIPK/AM;
DEDM=(ELLIPE-ELLIPK)/AM;

DKDR=DKDM*DMDR;
DKDZ=DKDM*DMDZ;
DEDR=DEDM*DMDR;
DEDZ=DEDM*DMDZ;

%
XN1=3-4*XNU;
XN2=1-XNU;
XN3=1-2*XNU;
XN4=2*XNU-3;
% %DIFFERENTIALS OF THE DISPLACEMENT KERNELS.
PP1=XA/(XP*XQ*XC);
PP4=-XA*(YP-YQ)/(XP*XC);
PP5=XA/(XP*XC);
PP6=XA*(YP-YQ)/(XP*XC*XD);
PP7=XA/(XP*XC*XD);
PP8=XA*(YP-YQ)/(XQ*XC*XD);
PP9=XA/(XQ*XC*XD);
PP10=2*XA*(YP-YQ)/(XC*XD);

XX1=XN1*XB+ZZ;
XX2=1/XP+DCDR/XC;
XX3=-2*XC*XN1*DCDR;
XX4=DBDR-XB*DDDR/XD;
XX5=-XN1*XC^2-ZZ*XB/XD;
XX6=(YP-YQ)*(2*XB+(YP-YQ)*(DBDZ-XB*DDDZ/XD))/XD;
XX7=2*XN1*XC*DCDZ;
XX8=1-(YP-YQ)*DCDZ/XC;
XX9=DCDR/XC+DDDR/XD;
XX10=XB*DFDR+XF*DBDR-XB*XF*DDDR/XD-2*XB*XF*DCDR/XC;

XX11=1/XP+DCDR/XC;
XX12=2*XNU*XM-1.5*XN+0.5*XB*XF*ZZ/XDC2;
XX13=XF*(YP-YQ)*DBDZ+XB*(YP-YQ)*DFDZ+2*XB*XF;
XX14=0.5*XB*XF*ZZ*(2*DCDZ/XC+DDDZ/XD)/XDC2;
XX15=DCDZ*XX12/XC;
XX16=XP*XP*DSDR+2*XS*XP+ZZ*DVDR;
XX17=3*XP*XP*DFDR+6*XP*XF+3*ZZ*DXMDR;
XX18=2*XB*XB*XF*ZZ*(DDDR/XD+2*DCDR/XC)/XDC2;
XX19=2*XB*ZZ*(XB*DFDR+2*XF*DBDR)/XDC2;
XX20=1/XP+DCDR/XC+DDDR/XD ;

XX21=XP*XP*XS+ZZ*XV+XQ^4;
XX22=3*(XP*XP*XF+ZZ*XM)-2*XB*XB*XF*ZZ/XDC2;
XX23=-2*XNU*XX21+XX22;
XX24=XP*XP*DSDZ+ZZ*DVDZ+2*(YP-YQ)*XV;
XX25=3*XP*XP*DFDZ+3*ZZ*DXMDZ+6*XM*(YP-YQ);
XX26=2*XB*XB*XF*ZZ*(DDDR/XD+2*DCDZ/XC)/XDC2;
XX27=XB*(YP-YQ)*DFDZ+2*XF*(YP-YQ)*DBDZ+2*XB*XF;
XX28=2*XB*(YP-YQ)*XX27/XDC2;
XX29=(DCDZ/XC+DDDZ/XD)*XX23;
XX30=DBDR-2*XB*DCDR/XC;

XX31=1/XP+DCDR/XC+DDDR/XD;
XX32=(YP-YQ)*DBDZ+2*XB-2*XB*(YP-YQ)*DCDZ/XC;
XX33=1-(YP-YQ)*DCDZ/XC-(YP-YQ)*DDDZ/XD;
XX34=XN4*XD+XB*ZZ/XC^2;
XX35=2*DBDR-XB*DDDR/XD-2*XB*DCDR/XC ;
XX36=1/XP+DCDR/XC+DDDR/XD;
XX37=3*ZZ-XN4*XB-4*XB*XB*ZZ/XDC2;
XX38=4*XB*ZZ*((YP-YQ)*(XB*DDDR/XD+2*XB*DCDZ/XC-2*DBDZ)-2*XB)/XDC2;
XX39=ZZ*(DHDR-2*XH*DCDR/XC)/XC^2 ;
XX40=DCDR/XC+DDDR/XD ;

XX41=-XN3*XD+XH*ZZ/XC^2;
XX42=2*XH+(YP-YQ)*DHDZ-2*XH*(YP-YQ)*DCDZ/XC ;
XX43=DCDZ/XC+DDDZ/XD;

Annexe B

XX44=8*XF*XP*XP*ZZ*(DDDR/XD+2*DCDR/XC)/XDC2;
XX45=8*XP*ZZ*(XP*DFDR+2*XF)/XDC2 ;
XX46=-ZZ+XN3*XH+8*XF*XP*XP*ZZ/XDC2;
XX47=2*XF*(YP-YQ)*DCDZ/XC+XF*(YP-YQ)*DDDZ/XD-2*XF-(YP-YQ)*DFDZ;
XX48=8*XP*XP*(YP-YQ)*XX47/XDC2;
XX49=XD/XQ^2+2*ZZ/XC^2;
XX50=4*ZZ*(1-(YP-YQ)*DCDZ/XC)/XC^2;

XX51=1-(YP-YQ)*XX43;
XX52=2*XB*DCDR/XC+XB*DDDR/XD-DBDR;
XX53=4*(1+XNU)-XB/XQ^2-8*XB*ZZ/XDC2;
XX54=(YP-YQ)*(2*XB*DCDZ/XC+XB*DDDZ/XD-DBDZ)-2*XB;
XX55=DFDR-2*XF*DCDR/XC;
XX56=-XN3*XD-XF*ZZ/XC^2;
XX57=2*XF*(YP-YQ)*DCDZ/XC-2*XF-(YP-YQ)*DFDZ;
XX58=XB*DFDR+XF*DBDR-XB*XF*DDDR/XD-2*XB*XF*DCDR/XC;
XX59=-3*ZZ+XN3*XF+4*XB*XF*ZZ/XDC2;
XX60=2*XB*XF+(YP-YQ)*(XF*DBDZ+XB*DFDZ-XB*XF*DDDZ/XD-2*XB*XF*DCDZ/XC);

XX61=DBDR-XB*DDDR/XD-2*XB*DCDR/XC;
XX62=XN3+4*XB*ZZ/XDC2;
XX63=2*XB+(YP-YQ)*(DBDZ-2*XB*DCDZ/XC-XB*DDDZ/XD) ;
%CALCULATE THE DIFFERENTIALS OF THE DISPLACEMENT KERNELS.

DRRKDR=PP1*(2*XN1*XP-XX1*XX2);
DRRKDZ=PP1*(8*XN2*(YP-YQ)-DCDZ*XX1/XC);
DRREDR=PP1*(XX3-ZZ*XX4/XD-XX2*XX5);
DRREDZ=PP1*(-XX7-XX6-XX5*DCDZ/XC);
DZRKDR=PP4*XX2;
DZRKDZ=PP5*XX8;
DZREDR=PP6*(XH*DCDR/XC+XH*DDDR/XD+XH/XP-DHDR);
DZREDZ=PP7*(XH*(YP-YQ)*XX43-XH-(YP-YQ)*DHDZ);
DRZKDR=XA*(YP-YQ)*DCDR/(XQ*XC^2);
DRZKDZ=XA*((YP-YQ)*DCDZ/XC-1)/(XQ*XC);
DRZEDR=PP8*(DFDR-XF*DCDR/XC-XF*DDDR/XD);
DRZEDZ=PP9*(XF+(YP-YQ)*DFDZ-(YP-YQ)*XF*(DCDZ/XC+DDDZ/XD));
DZZKDR=-2*XN1*XA*DCDR/XC^2;
DZZKDZ=-2*XN1*XA*DCDZ/XC^2;
DZZEDR=-2*XA*ZZ*XX9/(XC*XD);
DZZEDZ = PP10*(2-(YP-YQ)*DCDZ/XC-(YP-YQ)*DDDZ/XD);

DUXXDR=UXXK*DKDR+UXXE*DEDZ+ELLIPK*DRRKDR+ELLIPE*DRREDR;
DUXXDZ=UXXK*DKDZ+UXXE*DEDZ+ELLIPK*DRRKDZ+ELLIPE*DRREDZ;
DUXYDR=UXXK*DKDR+UXXE*DEDZ+ELLIPK*DZRKDR+ELLIPE*DZREDR;
DUXYDZ=UXXK*DKDZ+UXXE*DEDZ+ELLIPK*DZRKDZ+ELLIPE*DZREDZ;
DUYXDR=UXXK*DKDR+UXXE*DEDZ+ELLIPK*DRZKDR+ELLIPE*DRZEDR;
DUYXDZ=UXXK*DKDZ+UXXE*DEDZ+ELLIPK*DRZKDZ+ELLIPE*DRZEDZ;
DUYYDR=UYYK*DKDR+UYYE*DEDZ+ELLIPK*DZZKDR+ELLIPE*DZZEDR;
DUYYDZ=UYYK*DKDZ+UYYE*DEDZ+ELLIPK*DZZKDZ+ELLIPE*DZZEDZ ;

TT1=XA/(XP*XQ*XQ*XC);
TT2=XA/(XP*XQ*XQ*XC*XD);
TT3=XA*(YP-YQ)/(XP*XQ*XC*XD);
TT4=XA/(XP*XQ*XC*XD);
TT5=XA/(XP*XC*XD);
TT6=XA*(YP-YQ)/(XC*XD);
TT7=XA/(XC*XD);
TT8=XA/(XQ*XC*XD);
TT9=2*XA*(YP-YQ)^3/(XD*XC^3);
TT10=2*XA*ZZ/(XD*XC^3) ;
TT11=2*XA*(YP-YQ)/(XC*XD);
TT12=2*XA/(XC*XD) ;

DTK1DR=TT1*(2*XNU*DXMDR-1.5*DNDZ+.5*ZZ*XX10/XDC2-XX11*XX12);
DTK1DZ=TT1*(2*XNU*DXMDZ-1.5*DNDZ+.5*(YP-YQ)*XX13/XDC2-XX14-XX15);
DTE1DR=TT2*(-2*XNU*XX16+XX17+XX18-XX19-XX20*XX23);
DTE1DZ=TT2*(-2*XNU*XX24+XX25+XX26-XX28-XX29);
DTK2DR=TT3*(XN4*DDDR+ZZ*XX30/XC^2-XX31*XX34);
DTK2DZ=TT4*(XN4*(YP-YQ)*DDDZ+ZZ*XX32/XC^2+XX33*XX34);
DTE2DR=TT3*(-XN4*DBDR-4*XB*ZZ*XX35/XDC2-XX36*XX37);
DTE2DZ=TT4*(6*ZZ-XN4*(YP-YQ)*DBDZ+XX38+XX33*XX37);
DTK3DR=TT5*(-XN3*DDDR+XX39-(1/XP+XX40)*XX41);

DTK3DZ=TT5*(-XN3*DDDZ+(YP-YQ)*XX42/XC^2-XX43*XX41);
DTE3DR=TT5*(XN3*DHDR-XX44+XX45-(1./XP+XX40)*XX46);

Annexe B

```

DTE3DZ=TT5*(-2*(YP-YQ)+XN3*DHDZ-XX48-XX43*XX46);
DTK5DR=TT6*(DDDR/XQ^2-4*ZZ*DCDR/XC^3-XX40*XX49);
DTK5DZ=TT7*((YP-YQ)*DDDZ/XQ^2+XX50+XX51*XX49);
DTE5DR=TT6*(-DBDR/XQ^2+8*ZZ*XX52/XDC2-XX40*XX53);
DTE5DZ=TT7*(-(YP-YQ)*DBDZ/XQ^2+8*ZZ*XX54/XDC2+XX51*XX53);
DTK6DR=TT8*(-XN3*DDDR-ZZ*XX55/XC^2-XX40*XX56);
DTK6DZ=TT8*(-XN3*DDDZ+(YP-YQ)*XX57/XC^2-XX43*XX56);
DTE6DR=TT8*(XN3*DFDR+4*ZZ*XX58/XDC2-XX40*XX59);
DTE6DZ=TT8*(-6*(YP-YQ)+XN3 *DFDZ+4*(YP-YQ)*XX60/XDC2-XX43*XX59);
DTK7DR=TT9*(3*DCDR/XC+DDDR/XD);
DTK7DZ=TT10*((YP-YQ)*DDDZ/XD+3*(YP-YQ)*DCDZ/XC-3);
DTE7DR=TT11*(4*ZZ*XX61/XDC2-XX40*XX62);
DTE7DZ=TT12*(4*ZZ*XX63/XDC2+(1-(YP-YQ)*XX43)*XX62);

```

%-

THE DIFFERENTIALS OF THE TRACTION KERNELS.

```

DT1DR=TK1*DKDR+TE1*DEDR+ELLIPK*DTK1DR+ELLIPE*DTE1DR;
DT1DZ=TK1*DKDZ+TE1*DEDZ+ELLIPK*DTK1DZ+ELLIPE*DTE1DZ;
DT2DR=TK2*DKDR+TE2*DEDR+ELLIPK*DTK2DR+ELLIPE*DTE2DR;
DT2DZ=TK2*DKDZ+TE2*DEDZ+ELLIPK*DTK2DZ+ELLIPE*DTE2DZ;
DT3DR=TK3*DKDR+TE3*DEDR+ELLIPK*DTK3DR+ELLIPE*DTE3DR;
DT3DZ=TK3*DKDZ+TE3*DEDZ+ELLIPK*DTK3DZ+ELLIPE*DTE3DZ;
DT4DR=DT2DR;
DT4DZ=DT2DZ;
DT5DR=TK5*DKDR+TE5*DEDR+ELLIPK*DTK5DR+ELLIPE*DTE5DR;
DT5DZ=TK5*DKDZ+TE5*DEDZ+ELLIPK*DTK5DZ+ELLIPE*DTE5DZ;
DT6DR=TK6*DKDR+TE6*DEDR+ELLIPK*DTK6DR+ELLIPE*DTE6DR;
DT6DZ=TK6*DKDZ+TE6*DEDZ+ELLIPK*DTK6DZ+ELLIPE*DTE6DZ;
DT7DR=TK7*DKDR+TE7*DEDR+ELLIPK*DTK7DR+ELLIPE*DTE7DR;
DT7DZ=TK7*DKDZ+TE7*DEDZ+ELLIPK*DTK7DZ+ELLIPE*DTE7DZ;
DT8DR=DT6DR;
DT8DZ=DT6DZ;
DTXXDR=2*XMU*(DT1DR*XNORM+DT2DR*YNORM);
DTXXDZ=2*XMU*(DT1DZ*XNORM+DT2DZ*YNORM);
DTXYDR=2*XMU*(DT3DR*YNORM+DT4DR*XNORM);
DTXYDZ=2*XMU*(DT3DZ*YNORM+DT4DZ*XNORM);
DTYXDR=2*XMU*(DT5DR*XNORM+DT6DR*YNORM);
DTYXDZ=2*XMU*(DT5DZ*XNORM+DT6DZ*YNORM);
DTYYDR=2*XMU*(DT7DR*YNORM+DT8DR*XNORM);
DTYYDZ=2*XMU*(DT7DZ*YNORM+DT8DZ*XNORM);

```

#####

% DIFF2D

#####

%CALCULER LES COORDINNEES DE L'ELEMENT "IELEMQ".

```

XQ=SHAPF(1)*CORDX(1)+SHAPF(2)*CORDX(2)+SHAPF(3)*CORDX(3);
YQ=SHAPF(1)*CORDY(1)+SHAPF(2)*CORDY(2)+SHAPF(3)*CORDY(3) ;

```

```

RDIST=((XP-XQ)^2+(YP-YQ)^2)^0.5;
DRDX=(XQ-XP)/RDIST;
DRDY=(YQ-YP)/RDIST;
DRDN=DRDX * XNORM+DRDY * YNORM ;

```

% CALCULER D(KIJ) , SEE EQ.(4.38).

```

XAA=1./(4*pi*(1-XNU)*RDIST);

```

```

XN1=1-2*XNU;

```

```

D1XX=XAA*DRDX*( XN1+2*DRDX*DRDX);

```

```

D2XX=XAA*DRDY*(-XN1+2*DRDX*DRDX);

```

```

D1XY=XAA*DRDY*( XN1+2*DRDX*DRDX);

```

```

D2XY=XAA*DRDX*( XN1+2*DRDY*DRDY) ;

```

```

D1YY=XAA*DRDX*(-XN1+2*DRDY*DRDY);

```

```

D2YY=XAA*DRDY*( XN1+2*DRDY*DRDY) ;

```

% C--CALCULER S(KIJ) , SEE EQ.(4.37>.

```

XBB=XMU/(2*pi*(1-XNU)*RDIST*RDIST);

```

```

XN1=1-2*XNU;

```

```

XN2=1-4*XNU;

```

```

XN3=1-XNU;

```

```

S1XX=XBB*(XNORM*(1+2*DRDX*DRDX)+2*DRDN*DRDX*(1-4*DRDX*DRDX));

```

```

S2XX=XBB*(XNORM*4*XNU*DRDX*DRDY+YNORM*(2*XN1*DRDX*DRDX-XN2)+2*DRDN*DRDY*(XN1-4*DRDX*DRDX));

```

```

S1XY=XBB*(XNORM*2*XN3*DRDX*DRDY+YNORM*(2*XNU*DRDX*DRDX+XN1)+2*DRDN*DRDY*(XNU-4*DRDX*DRDX));

```

```

S2XY=XBB*(XNORM*(2*XNU*DRDY*DRDY+XN1)+YNORM*2*XN3*DRDX*DRDY+2*DRDN*DRDX*(XNU-4*DRDY*DRDY));

```

```

S1YY=XBB*(XNORM*(2*XN1*DRDY*DRDY-XN2)+YNORM*4*XNU*DRDX*DRDY+2*DRDN*DRDX*(XN1-4*DRDY*DRDY));

```

```

S2YY=XBB*(YNORM*(1+2*DRDY*DRDY)+2*DRDN*DRDY*(1-4*DRDY*DRDY));

```

Annexe B

#####

%ELLIPT

#####

```
SUMA1=0;
SUMB1=0;
SUMC1=0;
SUMD1=0;
for l=1:5
```

```
    SUMA1=SUMA1+AA1(l)*BM^l;
    SUMB1=SUMB1+BB1(l)*BM^l;
    SUMC1=SUMC1+CC1(l)*BM^l;
    SUMD1=SUMD1+DD1(l)*BM^l;
```

```
end
```

```
% « DE P » N'EST PAS À L'INTÉRIEUR DE L'ÉLÉMENT « IELEMQ*.
```

```
if ISELF==0 ;
```

```
    ELLIPK=log(4)+SUMA1+log(1/BM)*(0.5+SUMB1);
```

```
    ELLIPE=1+SUMC1+log(1/BM)*SUMD1;
```

```
end
```

```
% « DE P » EST À L'INTÉRIEUR DE L'ÉLÉMENT « IELEMQ », DES PIÈCES DE NON-LOGARITHMIC.
```

```
if ISELF==1 & ILOG==0 ;
```

```
    ELLIPK=log(4)+SUMA1+S1*(0.5 + SUMB1);
```

```
    ELLIPE=1+SUMC1+S1*SUMD1;
```

```
end
```

```
% « DE P » EST À L'INTÉRIEUR DU *IELEMQ D'ÉLÉMENT », LES PIÈCES LOGARITHMIQUES SEULEMENT.
```

```
% de NOTE : CES PIÈCES SONT DÉJÀ DIVISÉES PAR la notation (1./ETA).
```

```
if ISELF==1 & ILOG==1;
```

```
    ELLIPK=1+2*SUMB1;
```

```
    ELLIPE=2*SUMD1;
```

```
end
```

Annexe C

1. Matrice de rigidité (cylindre)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | -0,0258 | 0,1511 | 0,0460 | -0,1399 | 0,0220 | 0,0001 | 0,0429 | -0,0349 | 0,0173 | -0,0147 | 0,0347 | -0,0299 |
| 2 | 0,0030 | 0,2312 | 0,1339 | 0,0080 | -0,0139 | 0,0063 | 0,0102 | 0,0123 | -0,0050 | 0,0108 | -0,0068 | 0,0205 |
| 3 | -0,0008 | 0,0511 | 0,3871 | -0,0094 | 0,0222 | -0,0622 | 0,0356 | -0,0555 | 0,0152 | -0,0178 | 0,0301 | -0,0388 |
| 4 | -0,0011 | 0,0104 | 0,0446 | 0,4799 | 0,0405 | 0,0153 | 0,0157 | 0,0233 | -0,0071 | 0,0157 | -0,0087 | 0,0304 |
| 5 | -0,0021 | -0,0034 | 0,0415 | 0,0429 | 0,4503 | 0,0487 | 0,0254 | -0,1481 | 0,0096 | -0,0014 | 0,0192 | -0,0378 |
| 6 | -0,0012 | 0,0077 | -0,0620 | 0,0172 | -0,0500 | 0,5112 | 0,1245 | -0,0048 | -0,0141 | 0,0130 | 0,0089 | 0,0199 |
| 7 | -0,0034 | -0,0209 | 0,0455 | 0,0285 | 0,0052 | 0,0624 | 0,4754 | -0,0325 | 0,0069 | -0,0589 | 0,0101 | -0,0495 |
| 8 | -0,0012 | 0,0079 | -0,0471 | 0,0213 | -0,0761 | 0,0130 | 0,0085 | 0,5241 | 0,0462 | 0,0167 | 0,0255 | 0,0241 |
| 9 | -0,0045 | -0,0324 | 0,0455 | 0,0248 | 0,0013 | 0,0184 | 0,0091 | 0,0377 | 0,4940 | 0,0381 | 0,0023 | -0,1422 |
| 10 | -0,0012 | 0,0096 | -0,0427 | 0,0258 | -0,0315 | 0,0115 | -0,0629 | 0,0100 | -0,0591 | 0,5748 | 0,1267 | 0,0067 |
| 11 | -0,0055 | -0,0408 | 0,0436 | 0,0247 | -0,0024 | 0,0108 | 0,0051 | 0,0206 | -0,0022 | 0,0667 | 0,5211 | -0,0618 |
| 12 | -0,0012 | 0,0122 | -0,0410 | 0,0307 | -0,0222 | 0,0131 | -0,0442 | 0,0191 | -0,0705 | 0,0186 | -0,0081 | 0,6364 |
| 13 | -0,0063 | -0,0469 | 0,0405 | 0,0265 | -0,0057 | 0,0084 | 0,0005 | 0,0150 | -0,0033 | 0,0243 | -0,0093 | 0,0459 |
| 14 | -0,0012 | 0,0153 | -0,0397 | 0,0356 | -0,0171 | 0,0148 | -0,0347 | 0,0256 | -0,0237 | 0,0170 | -0,0511 | 0,0201 |
| 15 | -0,0065 | -0,0447 | 0,0364 | 0,0318 | -0,0083 | 0,0108 | -0,0052 | 0,0190 | -0,0240 | 0,0359 | -0,0586 | 0,0563 |
| 16 | -0,0012 | 0,0078 | -0,0302 | 0,0246 | -0,0132 | 0,0030 | -0,0242 | 0,0035 | -0,0015 | -0,0259 | 0,0062 | -0,0513 |
| 17 | -0,0066 | -0,0433 | 0,0318 | 0,0362 | -0,0123 | 0,0127 | -0,0131 | 0,0211 | -0,0383 | 0,0331 | -0,0844 | 0,0375 |
| 18 | -0,0012 | 0,0033 | -0,0229 | 0,0179 | -0,0089 | -0,0022 | -0,0148 | -0,0045 | 0,0075 | -0,0219 | 0,0191 | -0,0334 |
| 19 | -0,0068 | -0,0428 | 0,0277 | 0,0397 | -0,0157 | 0,0132 | -0,0194 | 0,0207 | -0,0403 | 0,0253 | -0,0828 | 0,0208 |
| 20 | -0,0012 | 0,0006 | -0,0175 | 0,0138 | -0,0061 | -0,0038 | -0,0091 | -0,0065 | 0,0070 | -0,0150 | 0,0146 | -0,0209 |
| 21 | -0,0071 | -0,0430 | 0,0244 | 0,0424 | -0,0181 | 0,0128 | -0,0235 | 0,0192 | -0,0379 | 0,0191 | -0,0751 | 0,0115 |
| 22 | -0,0011 | -0,0011 | -0,0137 | 0,0111 | -0,0044 | -0,0041 | -0,0061 | -0,0064 | 0,0052 | -0,0105 | 0,0099 | -0,0146 |
| 23 | -0,0065 | -0,0374 | 0,0188 | 0,0423 | -0,0235 | 0,0139 | -0,0350 | 0,0176 | -0,0507 | 0,0100 | -0,0945 | -0,0139 |
| 24 | -0,0010 | -0,0021 | -0,0112 | 0,0079 | -0,0033 | -0,0048 | -0,0041 | -0,0077 | 0,0002 | -0,0081 | -0,0011 | -0,0144 |
| 25 | -0,0059 | -0,0316 | 0,0105 | 0,0416 | -0,0315 | 0,0126 | -0,0504 | 0,0098 | -0,0543 | -0,0075 | -0,0933 | -0,0451 |
| 26 | -0,0008 | -0,0025 | -0,0093 | 0,0049 | -0,0038 | -0,0050 | -0,0057 | -0,0090 | -0,0099 | -0,0102 | -0,0183 | -0,0262 |
| 27 | -0,0052 | -0,0263 | -0,0003 | 0,0392 | -0,0403 | 0,0067 | -0,0655 | -0,0072 | -0,0417 | -0,0244 | -0,0671 | -0,0615 |
| 28 | -0,0006 | -0,0022 | -0,0092 | 0,0020 | -0,0076 | -0,0061 | -0,0133 | -0,0143 | -0,0170 | -0,0202 | -0,0255 | -0,0465 |
| 29 | -0,0046 | -0,0221 | -0,0131 | 0,0337 | -0,0454 | -0,0049 | -0,0710 | -0,0312 | -0,0196 | -0,0286 | -0,0338 | -0,0539 |
| 30 | -0,0003 | -0,0017 | -0,0117 | -0,0020 | -0,0147 | -0,0113 | -0,0253 | -0,0298 | -0,0119 | -0,0311 | -0,0146 | -0,0581 |
| 31 | -0,0039 | -0,0201 | -0,0256 | 0,0235 | -0,0408 | -0,0186 | -0,0582 | -0,0498 | -0,0027 | -0,0197 | -0,0118 | -0,0341 |
| 32 | 0,0001 | -0,0021 | -0,0176 | -0,0092 | -0,0206 | -0,0239 | -0,0312 | -0,0566 | 0,0020 | -0,0317 | 0,0038 | -0,0510 |
| 33 | -0,0033 | -0,0207 | -0,0334 | 0,0087 | -0,0261 | -0,0247 | -0,0333 | -0,0477 | 0,0024 | -0,0083 | -0,0038 | -0,0170 |
| 34 | 0,0005 | -0,0054 | -0,0251 | -0,0237 | -0,0169 | -0,0406 | -0,0189 | -0,0802 | 0,0131 | -0,0201 | 0,0163 | -0,0315 |
| 35 | -0,0028 | -0,0229 | -0,0315 | -0,0060 | -0,0111 | -0,0178 | -0,0148 | -0,0280 | 0,0007 | -0,0026 | -0,0030 | -0,0082 |
| 36 | 0,0009 | -0,0140 | -0,0279 | -0,0485 | -0,0016 | -0,0485 | 0,0061 | -0,0807 | 0,0149 | -0,0046 | 0,0185 | -0,0101 |
| 37 | -0,0026 | -0,0232 | -0,0206 | -0,0102 | -0,0055 | -0,0054 | -0,0104 | -0,0089 | -0,0011 | -0,0026 | -0,0032 | -0,0062 |
| 38 | 0,0012 | -0,0280 | -0,0156 | -0,0787 | 0,0146 | -0,0383 | 0,0248 | -0,0575 | 0,0099 | 0,0071 | 0,0128 | 0,0069 |
| 39 | -0,0027 | -0,0193 | -0,0114 | 0,0028 | -0,0077 | 0,0009 | -0,0124 | -0,0015 | -0,0006 | -0,0049 | -0,0016 | -0,0077 |
| 40 | 0,0010 | -0,0441 | 0,0151 | -0,0956 | 0,0196 | -0,0164 | 0,0276 | -0,0272 | 0,0030 | 0,0136 | 0,0035 | 0,0176 |
| 41 | -0,0028 | -0,0110 | -0,0151 | 0,0215 | -0,0091 | -0,0019 | -0,0121 | -0,0036 | 0,0018 | -0,0073 | 0,0026 | -0,0104 |
| 42 | 0,0000 | -0,0590 | 0,0495 | -0,0828 | 0,0129 | 0,0035 | 0,0192 | -0,0035 | -0,0028 | 0,0160 | -0,0058 | 0,0227 |
| 43 | -0,0006 | 0,0063 | -0,0276 | 0,0134 | -0,0054 | -0,0060 | -0,0080 | -0,0096 | 0,0061 | -0,0109 | 0,0104 | -0,0149 |
| 44 | 0,0000 | -0,0772 | 0,0696 | -0,1052 | 0,0140 | 0,0130 | 0,0193 | 0,0055 | -0,0060 | 0,0200 | -0,0110 | 0,0288 |
| 45 | 0,0007 | 0,0365 | -0,0576 | 0,0161 | 0,0005 | -0,0173 | -0,0009 | -0,0208 | 0,0122 | -0,0157 | 0,0214 | -0,0213 |
| 46 | 0,0000 | -0,1107 | 0,1114 | -0,1403 | 0,0114 | 0,0331 | 0,0142 | 0,0221 | -0,0113 | 0,0251 | -0,0203 | 0,0373 |
| 47 | -0,0007 | -0,0008 | -0,0886 | 0,0488 | 0,0097 | -0,0361 | 0,0161 | -0,0317 | 0,0168 | -0,0153 | 0,0304 | -0,0212 |
| 48 | 0,0000 | -0,1903 | 0,2193 | -0,1798 | -0,0075 | 0,0747 | -0,0049 | 0,0498 | -0,0205 | 0,0326 | -0,0382 | 0,0507 |

Annexe C

| | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | -0,0215 | 0,0056 | -0,0251 | 0,0086 | -0,0091 | 0,0038 | -0,0190 | 0,0077 | -0,0229 | -0,0011 | -0,0414 | 0,0178 |
| 2 | 0,0170 | 0,0247 | 0,0237 | 0,0401 | 0,0073 | 0,0258 | 0,0158 | 0,0503 | 0,0045 | -0,0071 | 0,0096 | -0,0135 |
| 3 | -0,0253 | -0,0001 | -0,0324 | -0,0005 | -0,0123 | -0,0017 | -0,0253 | -0,0032 | -0,0246 | 0,0004 | -0,0457 | 0,0236 |
| 4 | 0,0229 | 0,0190 | 0,0327 | 0,0314 | 0,0105 | 0,0223 | 0,0224 | 0,0430 | 0,0087 | -0,0060 | 0,0180 | -0,0189 |
| 5 | -0,0205 | 0,0034 | -0,0283 | 0,0055 | -0,0121 | 0,0025 | -0,0241 | 0,0050 | -0,0238 | -0,0007 | -0,0450 | 0,0223 |
| 6 | 0,0157 | 0,0138 | 0,0261 | 0,0234 | 0,0077 | 0,0188 | 0,0166 | 0,0359 | -0,0003 | -0,0050 | 0,0019 | -0,0122 |
| 7 | -0,0208 | 0,0032 | -0,0324 | 0,0055 | -0,0148 | 0,0028 | -0,0287 | 0,0053 | -0,0279 | -0,0007 | -0,0536 | 0,0235 |
| 8 | 0,0172 | 0,0071 | 0,0340 | 0,0132 | 0,0102 | 0,0154 | 0,0212 | 0,0287 | 0,0003 | -0,0040 | 0,0034 | -0,0138 |
| 9 | -0,0243 | 0,0044 | -0,0432 | 0,0080 | -0,0181 | 0,0044 | -0,0342 | 0,0083 | -0,0379 | -0,0012 | -0,0718 | 0,0195 |
| 10 | 0,0022 | -0,0011 | 0,0431 | 0,0014 | 0,0087 | 0,0128 | 0,0198 | 0,0225 | -0,0063 | -0,0031 | -0,0096 | -0,0099 |
| 11 | -0,0476 | 0,0055 | -0,0962 | 0,0104 | -0,0138 | 0,0033 | -0,0349 | 0,0067 | -0,0527 | -0,0010 | -0,0930 | 0,0034 |
| 12 | 0,0718 | -0,0145 | 0,0916 | -0,0168 | 0,0010 | 0,0106 | 0,0168 | 0,0155 | -0,0107 | -0,0021 | -0,0200 | -0,0081 |
| 13 | 0,2756 | 0,0034 | 0,0004 | 0,0050 | 0,0031 | 0,0013 | 0,0052 | 0,0030 | -0,0638 | -0,0004 | -0,0941 | -0,0250 |
| 14 | 0,0548 | -0,0190 | 0,1106 | -0,0180 | -0,0143 | 0,0065 | 0,0074 | 0,0110 | -0,0079 | -0,0015 | -0,0186 | -0,0079 |
| 15 | -0,0001 | 0,0039 | 0,3905 | 0,0021 | -0,0027 | 0,0020 | 0,0000 | 0,0042 | -0,0948 | -0,0006 | -0,1411 | -0,0377 |
| 16 | -0,0669 | -0,0101 | 0,0295 | -0,0461 | 0,0587 | -0,0054 | 0,0335 | -0,0024 | -0,0229 | 0,0005 | -0,0351 | -0,0280 |
| 17 | 0,0016 | 0,0034 | 0,0006 | 0,0021 | 0,4912 | 0,0018 | -0,0021 | 0,0041 | -0,1406 | -0,0006 | -0,1967 | -0,0696 |
| 18 | -0,0218 | 0,0088 | 0,0147 | -0,0237 | -0,0545 | -0,0359 | 0,1253 | -0,0068 | -0,0503 | -0,0002 | -0,0615 | -0,0537 |
| 19 | 0,0030 | 0,0028 | -0,0008 | 0,0019 | -0,0017 | 0,0019 | 0,6104 | 0,0037 | -0,2345 | -0,0006 | -0,2392 | -0,1523 |
| 20 | -0,0131 | 0,0128 | 0,0549 | 0,0045 | -0,0688 | -0,0065 | 0,0810 | -0,0444 | 0,0041 | -0,0015 | -0,0674 | -0,1287 |
| 21 | 0,0038 | 0,0024 | -0,0002 | 0,0017 | -0,0014 | 0,0019 | 0,0044 | 0,0036 | 0,1832 | -0,0007 | -0,0233 | -0,1528 |
| 22 | -0,0093 | 0,0197 | 0,1008 | 0,0094 | -0,0230 | 0,0118 | 0,0132 | -0,0049 | -0,1623 | -0,0276 | 0,1091 | -0,1719 |
| 23 | -0,0130 | -0,0015 | -0,0587 | -0,0003 | -0,0470 | -0,0028 | -0,1013 | -0,0039 | -0,0669 | 0,0005 | 0,3417 | -0,1304 |
| 24 | -0,0131 | 0,0196 | 0,0900 | 0,0093 | -0,0429 | 0,0057 | -0,0471 | 0,0116 | -0,0885 | -0,0026 | -0,0549 | 0,1885 |
| 25 | -0,0159 | -0,0042 | -0,0781 | -0,0014 | -0,0233 | -0,0015 | -0,0526 | -0,0021 | -0,0569 | 0,0002 | -0,0894 | -0,0475 |
| 26 | -0,0175 | 0,0187 | 0,0727 | 0,0092 | -0,0282 | 0,0087 | -0,0014 | 0,0174 | -0,0359 | -0,0034 | -0,1213 | -0,1581 |
| 27 | -0,0107 | -0,0048 | -0,0648 | -0,0012 | -0,0109 | 0,0010 | -0,0245 | 0,0014 | -0,0437 | -0,0004 | -0,0767 | -0,0469 |
| 28 | -0,0150 | 0,0179 | 0,0717 | 0,0095 | -0,0099 | 0,0135 | 0,0454 | 0,0253 | -0,0147 | -0,0048 | -0,1020 | -0,1385 |
| 29 | -0,0058 | -0,0035 | -0,0391 | -0,0003 | -0,0064 | 0,0034 | -0,0065 | 0,0052 | -0,0305 | -0,0011 | -0,0652 | -0,0413 |
| 30 | -0,0083 | 0,0182 | 0,0886 | 0,0104 | 0,0012 | 0,0186 | 0,0813 | 0,0335 | 0,0034 | -0,0063 | -0,0924 | -0,1285 |
| 31 | -0,0031 | -0,0009 | -0,0135 | 0,0011 | -0,0046 | 0,0057 | 0,0075 | 0,0091 | -0,0195 | -0,0018 | -0,0579 | -0,0392 |
| 32 | -0,0013 | 0,0202 | 0,1172 | 0,0121 | 0,0078 | 0,0239 | 0,1124 | 0,0422 | 0,0214 | -0,0079 | -0,0854 | -0,1233 |
| 33 | -0,0019 | 0,0019 | 0,0064 | 0,0025 | -0,0039 | 0,0074 | 0,0176 | 0,0123 | -0,0121 | -0,0024 | -0,0546 | -0,0405 |
| 34 | 0,0049 | 0,0236 | 0,1511 | 0,0145 | 0,0121 | 0,0294 | 0,1417 | 0,0514 | 0,0388 | -0,0096 | -0,0815 | -0,1233 |
| 35 | -0,0018 | 0,0040 | 0,0191 | 0,0035 | -0,0040 | 0,0084 | 0,0230 | 0,0142 | -0,0085 | -0,0027 | -0,0542 | -0,0434 |
| 36 | 0,0102 | 0,0280 | 0,1855 | 0,0173 | 0,0148 | 0,0347 | 0,1688 | 0,0608 | 0,0544 | -0,0113 | -0,0811 | -0,1281 |
| 37 | -0,0028 | 0,0052 | 0,0241 | 0,0039 | -0,0046 | 0,0084 | 0,0233 | 0,0145 | -0,0084 | -0,0028 | -0,0551 | -0,0457 |
| 38 | 0,0145 | 0,0327 | 0,2174 | 0,0202 | 0,0163 | 0,0398 | 0,1927 | 0,0696 | 0,0671 | -0,0130 | -0,0846 | -0,1370 |
| 39 | -0,0044 | 0,0052 | 0,0219 | 0,0037 | -0,0054 | 0,0074 | 0,0187 | 0,0129 | -0,0108 | -0,0025 | -0,0549 | -0,0451 |
| 40 | 0,0174 | 0,0368 | 0,2427 | 0,0226 | 0,0166 | 0,0438 | 0,2107 | 0,0769 | 0,0759 | -0,0143 | -0,0904 | -0,1469 |
| 41 | -0,0064 | 0,0044 | 0,0156 | 0,0030 | -0,0061 | 0,0058 | 0,0114 | 0,0102 | -0,0145 | -0,0020 | -0,0537 | -0,0425 |
| 42 | 0,0187 | 0,0397 | 0,2582 | 0,0243 | 0,0160 | 0,0464 | 0,2206 | 0,0815 | 0,0801 | -0,0151 | -0,0964 | -0,1546 |
| 43 | -0,0098 | 0,0036 | 0,0081 | 0,0025 | -0,0078 | 0,0048 | 0,0042 | 0,0085 | -0,0225 | -0,0017 | -0,0627 | -0,0470 |
| 44 | 0,0223 | 0,0408 | 0,2690 | 0,0252 | 0,0178 | 0,0485 | 0,2320 | 0,0850 | 0,0872 | -0,0158 | -0,0942 | -0,1566 |
| 45 | -0,0145 | 0,0010 | -0,0114 | 0,0008 | -0,0099 | 0,0015 | -0,0134 | 0,0027 | -0,0343 | -0,0006 | -0,0664 | -0,0441 |
| 46 | 0,0276 | 0,0440 | 0,2926 | 0,0274 | 0,0203 | 0,0529 | 0,2544 | 0,0927 | 0,0987 | -0,0172 | -0,0965 | -0,1659 |
| 47 | -0,0147 | 0,0039 | 0,0081 | 0,0026 | -0,0086 | 0,0051 | 0,0037 | 0,0090 | -0,0309 | -0,0018 | -0,0788 | -0,0606 |
| 48 | 0,0371 | 0,0520 | 0,3483 | 0,0327 | 0,0248 | 0,0633 | 0,3047 | 0,1107 | 0,1216 | -0,0206 | -0,1090 | -0,1933 |

Annexe C

| | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | -0,0273 | 0,0049 | -0,0530 | 0,0101 | -0,0321 | -0,0031 | -0,0624 | -0,0050 | -0,0309 | -0,0145 | -0,0602 | -0,0265 |
| 2 | -0,0004 | -0,0044 | -0,0001 | -0,0095 | -0,0093 | -0,0064 | -0,0171 | -0,0132 | -0,0209 | -0,0189 | -0,0389 | -0,0371 |
| 3 | -0,0311 | 0,0065 | -0,0602 | 0,0133 | -0,0357 | -0,0049 | -0,0689 | -0,0082 | -0,0255 | -0,0169 | -0,0499 | -0,0292 |
| 4 | 0,0044 | -0,0058 | 0,0090 | -0,0126 | -0,0070 | -0,0078 | -0,0124 | -0,0167 | -0,0209 | -0,0274 | -0,0370 | -0,0536 |
| 5 | -0,0345 | 0,0042 | -0,0661 | 0,0085 | -0,0378 | -0,0133 | -0,0716 | -0,0235 | -0,0147 | -0,0193 | -0,0319 | -0,0322 |
| 6 | -0,0094 | -0,0042 | -0,0177 | -0,0096 | -0,0276 | -0,0165 | -0,0511 | -0,0335 | -0,0271 | -0,0499 | -0,0482 | -0,0920 |
| 7 | -0,0415 | -0,0016 | -0,0782 | -0,0025 | -0,0291 | -0,0228 | -0,0554 | -0,0384 | 0,0013 | -0,0057 | -0,0066 | -0,0104 |
| 8 | -0,0137 | -0,0053 | -0,0260 | -0,0127 | -0,0342 | -0,0289 | -0,0607 | -0,0562 | -0,0127 | -0,0547 | -0,0247 | -0,0983 |
| 9 | -0,0455 | -0,0151 | -0,0837 | -0,0262 | -0,0112 | -0,0240 | -0,0271 | -0,0398 | 0,0046 | 0,0031 | 0,0011 | 0,0012 |
| 10 | -0,0310 | -0,0122 | -0,0564 | -0,0269 | -0,0317 | -0,0457 | -0,0564 | -0,0828 | 0,0018 | -0,0431 | -0,0032 | -0,0809 |
| 11 | -0,0312 | -0,0271 | -0,0598 | -0,0443 | 0,0045 | -0,0119 | -0,0014 | -0,0226 | 0,0040 | 0,0089 | 0,0041 | 0,0119 |
| 12 | -0,0363 | -0,0223 | -0,0627 | -0,0440 | -0,0171 | -0,0432 | -0,0337 | -0,0778 | 0,0064 | -0,0295 | 0,0063 | -0,0585 |
| 13 | -0,0130 | -0,0267 | -0,0322 | -0,0453 | 0,0072 | -0,0065 | 0,0065 | -0,0154 | 0,0037 | 0,0076 | 0,0053 | 0,0106 |
| 14 | -0,0259 | -0,0233 | -0,0436 | -0,0429 | -0,0082 | -0,0317 | -0,0180 | -0,0585 | 0,0061 | -0,0219 | 0,0080 | -0,0440 |
| 15 | -0,0134 | -0,0377 | -0,0397 | -0,0628 | 0,0097 | -0,0083 | 0,0091 | -0,0209 | 0,0054 | 0,0089 | 0,0083 | 0,0121 |
| 16 | -0,0156 | -0,0318 | -0,0272 | -0,0563 | 0,0010 | -0,0236 | -0,0020 | -0,0471 | 0,0064 | -0,0151 | 0,0104 | -0,0317 |
| 17 | 0,0005 | -0,0358 | -0,0315 | -0,0629 | 0,0091 | -0,0066 | 0,0096 | -0,0188 | 0,0055 | 0,0096 | 0,0086 | 0,0138 |
| 18 | -0,0158 | -0,0473 | -0,0318 | -0,0831 | 0,0004 | -0,0345 | -0,0031 | -0,0700 | 0,0103 | -0,0245 | 0,0172 | -0,0504 |
| 19 | 0,0199 | -0,0157 | -0,0201 | -0,0504 | 0,0065 | -0,0078 | 0,0080 | -0,0191 | 0,0056 | 0,0077 | 0,0088 | 0,0109 |
| 20 | -0,0011 | -0,0401 | -0,0138 | -0,0853 | 0,0010 | -0,0377 | 0,0011 | -0,0765 | 0,0124 | -0,0305 | 0,0219 | -0,0612 |
| 21 | -0,0077 | -0,0061 | -0,0143 | -0,0467 | 0,0051 | -0,0117 | 0,0072 | -0,0249 | 0,0065 | 0,0038 | 0,0103 | 0,0038 |
| 22 | -0,0449 | -0,0534 | -0,0387 | -0,1300 | 0,0018 | -0,0682 | 0,0013 | -0,1316 | 0,0238 | -0,0424 | 0,0401 | -0,0875 |
| 23 | -0,0096 | -0,0637 | -0,0313 | -0,0737 | 0,0080 | -0,0065 | 0,0093 | -0,0193 | 0,0058 | 0,0197 | 0,0077 | 0,0316 |
| 24 | 0,0238 | -0,0678 | -0,0230 | -0,1388 | 0,0039 | -0,0672 | 0,0076 | -0,1315 | 0,0247 | -0,0416 | 0,0425 | -0,0862 |
| 25 | 0,4556 | 0,0052 | -0,0512 | -0,2199 | 0,0054 | -0,0129 | 0,0034 | -0,0645 | 0,0106 | 0,0104 | 0,0144 | 0,0105 |
| 26 | -0,0479 | 0,3002 | 0,0447 | -0,2905 | -0,0049 | -0,1280 | 0,0201 | -0,2554 | 0,0480 | -0,0764 | 0,0831 | -0,1602 |
| 27 | -0,0139 | 0,0262 | 0,4187 | -0,0779 | -0,0022 | -0,0648 | -0,0120 | -0,0656 | 0,0031 | 0,0066 | 0,0008 | 0,0031 |
| 28 | -0,0824 | -0,1382 | -0,0408 | -0,0538 | 0,4742 | 0,0102 | -0,0237 | -0,2131 | 0,0055 | -0,0016 | 0,0041 | -0,0449 |
| 29 | -0,0153 | -0,0146 | -0,0524 | 0,0359 | -3,8711 | 0,2000 | 0,3144 | 1,3146 | 0,0109 | -0,1144 | 0,0922 | 0,0980 |
| 30 | -0,0411 | -0,1402 | -0,1176 | -0,4333 | 0,3641 | -0,1683 | 0,0503 | -0,4015 | 0,0740 | -0,1276 | 0,1335 | -0,2630 |
| 31 | -0,0156 | -0,0239 | -0,0499 | -0,0808 | -0,7275 | -0,0354 | 0,4294 | 0,0394 | -0,0225 | -0,0232 | -0,0510 | 0,0192 |
| 32 | -0,0347 | -0,1450 | -0,0999 | -0,4367 | -3,9310 | -0,5038 | -0,2750 | 1,7084 | -0,1789 | 0,3521 | -0,4212 | 0,7700 |
| 33 | -0,0149 | -0,0316 | -0,0475 | -0,1012 | -0,9085 | -0,1001 | -0,0918 | 0,2784 | 0,4776 | 0,0558 | -0,0507 | -0,1059 |
| 34 | -0,0318 | -0,1545 | -0,0922 | -0,4573 | -4,0723 | -0,5288 | -0,3633 | 1,2763 | -0,1665 | 0,6222 | -0,0601 | 0,1769 |
| 35 | -0,0144 | -0,0383 | -0,0461 | -0,1193 | -1,0665 | -0,1262 | -0,1012 | 0,3292 | -0,0368 | 0,0921 | 0,4687 | -0,0185 |
| 36 | -0,0294 | -0,1686 | -0,0870 | -0,4915 | -4,3667 | -0,5683 | -0,3667 | 1,3704 | -0,1909 | 0,1113 | -0,1805 | 0,6575 |
| 37 | -0,0146 | -0,0422 | -0,0463 | -0,1303 | -1,1616 | -0,1400 | -0,1048 | 0,3603 | -0,0392 | 0,0548 | -0,0646 | 0,0821 |
| 38 | -0,0277 | -0,1862 | -0,0845 | -0,5366 | -4,7588 | -0,6182 | -0,3815 | 1,4942 | -0,1557 | 0,1149 | -0,2551 | 0,1553 |
| 39 | -0,0149 | -0,0412 | -0,0467 | -0,1284 | -1,1435 | -0,1387 | -0,1021 | 0,3556 | -0,0378 | 0,0493 | -0,0626 | 0,0716 |
| 40 | -0,0269 | -0,2033 | -0,0843 | -0,5816 | -5,1499 | -0,6673 | -0,3966 | 1,6181 | -0,1538 | 0,1266 | -0,2438 | 0,1766 |
| 41 | -0,0154 | -0,0368 | -0,0471 | -0,1172 | -1,0450 | -0,1269 | -0,0962 | 0,3252 | -0,0352 | 0,0449 | -0,0590 | 0,0648 |
| 42 | -0,0268 | -0,2157 | -0,0855 | -0,6152 | -5,4403 | -0,7036 | -0,4064 | 1,7106 | -0,1527 | 0,1382 | -0,2370 | 0,1968 |
| 43 | -0,0206 | -0,0365 | -0,0601 | -0,1223 | -1,0989 | -0,1328 | -0,1180 | 0,3402 | -0,0539 | 0,0468 | -0,0976 | 0,0599 |
| 44 | -0,0251 | -0,2216 | -0,0817 | -0,6291 | -5,5621 | -0,7194 | -0,4121 | 1,7486 | -0,1580 | 0,1388 | -0,2462 | 0,1953 |
| 45 | -0,0246 | -0,0262 | -0,0692 | -0,0990 | -0,9023 | -0,1079 | -0,1217 | 0,2771 | -0,0611 | 0,0372 | -0,1153 | 0,0404 |
| 46 | -0,0246 | -0,2382 | -0,0817 | -0,6733 | -5,9509 | -0,7694 | -0,4377 | 1,8704 | -0,1739 | 0,1456 | -0,2734 | 0,2003 |
| 47 | -0,0304 | -0,0462 | -0,0850 | -0,1598 | -1,4462 | -0,1805 | -0,1757 | 0,4478 | -0,0811 | 0,0435 | -0,1485 | 0,0478 |
| 48 | -0,0264 | -0,2817 | -0,0898 | -0,7930 | -7,0065 | -0,9058 | -0,5093 | 2,2024 | -0,2058 | 0,1688 | -0,3236 | 0,2292 |

Annexe C

| | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | -0,0159 | -0,0169 | -0,0334 | -0,0297 | 0,0204 | 0,0149 | 0,0294 | 0,0178 | 0,0064 | 0,0212 | -0,0127 | 0,0435 |
| 2 | -0,0207 | -0,0482 | -0,0373 | -0,0908 | 0,0000 | 0,0126 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | -0,0031 | 0,0012 | -0,0130 | 0,0036 | 0,0204 | 0,0122 | 0,0296 | 0,0215 | 0,0016 | 0,0331 | 0,0053 | 0,0684 |
| 4 | -0,0067 | -0,0577 | -0,0113 | -0,1054 | -0,0004 | -0,0018 | 0,0000 | -0,0292 | 0,0037 | -0,0455 | 0,0080 | -0,0907 |
| 5 | -0,0031 | 0,0076 | -0,0128 | 0,0099 | 0,0193 | 0,0125 | 0,0285 | 0,0237 | 0,0053 | 0,0267 | 0,0139 | 0,0513 |
| 6 | 0,0083 | -0,0488 | 0,0091 | -0,0906 | 0,0088 | -0,0017 | 0,0135 | -0,0246 | 0,0049 | -0,0193 | 0,0114 | -0,0354 |
| 7 | -0,0065 | 0,0138 | -0,0144 | 0,0200 | 0,0197 | 0,0106 | 0,0296 | 0,0224 | 0,0092 | 0,0188 | 0,0226 | 0,0351 |
| 8 | 0,0143 | -0,0322 | 0,0197 | -0,0651 | 0,0091 | -0,0030 | 0,0139 | -0,0201 | 0,0048 | -0,0103 | 0,0112 | -0,0189 |
| 9 | -0,0077 | 0,0093 | -0,0141 | 0,0137 | 0,0219 | 0,0085 | 0,0335 | 0,0172 | 0,0130 | 0,0118 | 0,0312 | 0,0218 |
| 10 | 0,0119 | -0,0187 | 0,0181 | -0,0420 | 0,0125 | -0,0018 | 0,0191 | -0,0124 | 0,0071 | -0,0045 | 0,0167 | -0,0084 |
| 11 | -0,0082 | 0,0076 | -0,0139 | 0,0123 | 0,0238 | 0,0070 | 0,0366 | 0,0143 | 0,0160 | 0,0082 | 0,0377 | 0,0150 |
| 12 | 0,0094 | -0,0118 | 0,0156 | -0,0278 | 0,0114 | -0,0015 | 0,0175 | -0,0086 | 0,0067 | -0,0022 | 0,0159 | -0,0042 |
| 13 | -0,0072 | 0,0052 | -0,0119 | 0,0082 | 0,0271 | 0,0057 | 0,0421 | 0,0113 | 0,0193 | 0,0056 | 0,0454 | 0,0101 |
| 14 | 0,0089 | -0,0089 | 0,0154 | -0,0206 | 0,0045 | -0,0023 | 0,0069 | -0,0083 | 0,0022 | -0,0019 | 0,0053 | -0,0036 |
| 15 | -0,0077 | 0,0075 | -0,0126 | 0,0120 | 0,0314 | 0,0069 | 0,0485 | 0,0141 | 0,0221 | 0,0079 | 0,0520 | 0,0144 |
| 16 | 0,0061 | -0,0082 | 0,0114 | -0,0184 | 0,0103 | -0,0023 | 0,0160 | -0,0077 | 0,0071 | -0,0034 | 0,0166 | -0,0067 |
| 17 | -0,0084 | 0,0088 | -0,0140 | 0,0143 | 0,0346 | 0,0079 | 0,0535 | 0,0162 | 0,0244 | 0,0092 | 0,0574 | 0,0168 |
| 18 | 0,0120 | -0,0118 | 0,0219 | -0,0266 | 0,0082 | -0,0046 | 0,0127 | -0,0131 | 0,0051 | -0,0044 | 0,0119 | -0,0084 |
| 19 | -0,0078 | 0,0083 | -0,0131 | 0,0132 | 0,0363 | 0,0080 | 0,0562 | 0,0161 | 0,0258 | 0,0091 | 0,0606 | 0,0166 |
| 20 | 0,0163 | -0,0163 | 0,0301 | -0,0354 | 0,0055 | -0,0077 | 0,0086 | -0,0201 | 0,0031 | -0,0078 | 0,0072 | -0,0150 |
| 21 | -0,0060 | 0,0064 | -0,0099 | 0,0090 | 0,0369 | 0,0072 | 0,0573 | 0,0137 | 0,0265 | 0,0078 | 0,0622 | 0,0143 |
| 22 | 0,0190 | -0,0177 | 0,0355 | -0,0430 | 0,0411 | -0,0046 | 0,0636 | -0,0165 | 0,0280 | -0,0036 | 0,0655 | -0,0074 |
| 23 | -0,0190 | 0,0192 | -0,0330 | 0,0323 | 0,0646 | 0,0177 | 0,0999 | 0,0360 | 0,0457 | 0,0192 | 0,1073 | 0,0355 |
| 24 | 0,0194 | -0,0178 | 0,0366 | -0,0430 | 0,0401 | -0,0053 | 0,0619 | -0,0174 | 0,0267 | -0,0037 | 0,0627 | -0,0079 |
| 25 | -0,0188 | 0,0182 | -0,0329 | 0,0270 | 0,0863 | 0,0217 | 0,1332 | 0,0414 | 0,0595 | 0,0232 | 0,1402 | 0,0430 |
| 26 | 0,0343 | -0,0310 | 0,0654 | -0,0770 | 0,0840 | -0,0075 | 0,1297 | -0,0278 | 0,0554 | -0,0038 | 0,1303 | -0,0090 |
| 27 | -0,0184 | 0,0151 | -0,0338 | 0,0219 | 0,0704 | 0,0214 | 0,1084 | 0,0393 | 0,0476 | 0,0205 | 0,1124 | 0,0385 |
| 28 | -0,0116 | 0,0042 | -0,0226 | -0,0027 | 0,0776 | 0,0210 | 0,1193 | 0,0326 | 0,0513 | 0,0162 | 0,1213 | 0,0307 |
| 29 | 0,1502 | -0,0865 | 0,2889 | -0,1060 | -0,5091 | -0,1820 | -0,7827 | -0,3098 | -0,3402 | -0,1373 | -0,8052 | -0,2634 |
| 30 | 0,0578 | -0,0521 | 0,1099 | -0,1275 | 0,1250 | -0,0141 | 0,1927 | -0,0487 | 0,0808 | -0,0073 | 0,1902 | -0,0166 |
| 31 | -0,0292 | 0,0145 | -0,0572 | 0,0250 | 0,0209 | 0,0240 | 0,0319 | 0,0416 | 0,0145 | 0,0096 | 0,0348 | 0,0202 |
| 32 | -0,1841 | 0,1546 | -0,3501 | 0,3773 | -0,3718 | 0,0530 | -0,5739 | 0,1605 | -0,2419 | 0,0218 | -0,5689 | 0,0512 |
| 33 | -0,0266 | 0,0189 | -0,0529 | 0,0005 | 0,0239 | 0,0241 | 0,0364 | 0,0343 | 0,0178 | -0,0014 | 0,0425 | 0,0011 |
| 34 | -0,0750 | 0,0433 | -0,1145 | 0,0962 | -0,1203 | 0,0210 | -0,1862 | 0,0506 | -0,0793 | -0,0033 | -0,1859 | -0,0015 |
| 35 | -0,0221 | -0,0445 | -0,0485 | -0,0250 | 0,0234 | 0,0229 | 0,0359 | 0,0230 | 0,0207 | -0,0142 | 0,0486 | -0,0201 |
| 36 | -0,0116 | 0,0112 | -0,0990 | 0,0572 | -0,1141 | 0,0210 | -0,1769 | 0,0391 | -0,0739 | -0,0226 | -0,1730 | -0,0354 |
| 37 | 0,5262 | 0,0415 | -0,0549 | -0,1238 | 0,0194 | 0,0365 | 0,0304 | 0,0068 | 0,0245 | -0,0235 | 0,0557 | -0,0334 |
| 38 | -0,1137 | 0,5374 | 0,0031 | 0,0075 | -0,1058 | 0,0181 | -0,1642 | 0,0174 | -0,0649 | -0,0434 | -0,1521 | -0,0697 |
| 39 | -0,0327 | 0,0775 | 0,5754 | -0,0126 | 0,0207 | -0,0360 | 0,0354 | -0,0629 | 0,0364 | -0,0069 | 0,0786 | -0,0165 |
| 40 | -0,1334 | 0,0060 | -0,0857 | 0,5577 | -0,1184 | -0,0101 | -0,1842 | -0,0424 | -0,0657 | -0,0511 | -0,1564 | -0,0867 |
| 41 | -0,0321 | 0,0363 | -0,0616 | 0,0623 | -0,1201 | 0,3231 | -0,1828 | 0,0171 | -0,0604 | -0,0228 | -0,1465 | -0,0366 |
| 42 | -0,0905 | 0,0066 | -0,1774 | 0,0162 | 0,0258 | 0,1750 | -0,0382 | -0,0743 | 0,0211 | -0,0508 | 0,0545 | -0,0317 |
| 43 | -0,0868 | 0,0150 | -0,1782 | -0,0072 | 0,0337 | 0,0269 | -0,0809 | 0,2210 | 0,0452 | -0,1162 | 0,1164 | -0,0838 |
| 44 | -0,1099 | -0,0155 | -0,2209 | -0,0403 | -0,1445 | -0,3690 | 0,0192 | 0,2190 | -0,0439 | 0,0513 | -0,0264 | -0,1133 |
| 45 | -0,0764 | -0,0010 | -0,1504 | -0,0244 | 0,0584 | 0,2074 | 0,0182 | -0,0501 | -0,1009 | 0,6163 | -0,0626 | -0,2714 |
| 46 | -0,1234 | -0,0473 | -0,2382 | -0,1015 | -0,1804 | -0,4580 | -0,1010 | -0,4964 | 0,0278 | 0,3215 | -0,0348 | -0,0729 |
| 47 | -0,0698 | 0,0005 | -0,1413 | -0,0090 | 0,0519 | 0,1879 | 0,0399 | 0,2652 | 0,0516 | 0,1804 | 0,0814 | -0,0759 |
| 48 | -0,1319 | -0,0664 | -0,2491 | -0,1244 | -0,2271 | -0,5779 | -0,1275 | -0,6269 | -0,1289 | -0,6520 | -0,0725 | 0,3981 |

Annexe C

2. Matrice de rigidité (sphère)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0,01 | 0,00E+00 | 0,00E+00 | 0,00E+00 | 0 | 0,00E+00 | 0,0699144 | 0,151418 | -0,0228035 | 0,056294 |
| 2 | 0,01 | 6,16E-01 | 4,24E-01 | 1,89E-02 | -0,041169 | 0,013602 | 0,03696 | 0,026617 | -0,011917 | 0,021175 |
| 3 | -0,0008761 | 3,69E-02 | -1,04E+00 | -1,63E-03 | 0,0098469 | -8,40E-02 | 0,0040056 | -0,098184 | -0,0010305 | -0,013944 |
| 4 | -0,025599 | 1,43E-02 | -3,30E-01 | 6,11E-01 | 0,054795 | 4,28E-02 | 0,046288 | 0,058235 | -0,011205 | 0,025238 |
| 5 | -0,0029515 | 3,32E-03 | 7,59E-03 | 5,81E-03 | 0,30545 | 0,10068 | 0,010964 | -0,17713 | -0,0012504 | 0,0012916 |
| 6 | -0,0047612 | 1,01E-02 | -6,50E-03 | 9,78E-03 | -0,23757 | 6,86E-01 | 0,15752 | -0,109 | -0,023995 | 0,022663 |
| 7 | -0,0003378 | -1,57E-03 | 1,56E-03 | -2,78E-03 | 0,0057264 | 0,040548 | 0,49225 | 0,02325 | 0,003543 | -0,05987 |
| 8 | -3,33E-05 | 8,12E-03 | -7,85E-03 | 5,90E-03 | -0,056265 | 0,034743 | -0,087124 | 0,59311 | 0,041314 | 0,012704 |
| 9 | -0,0003589 | -2,75E-03 | 1,85E-03 | -5,52E-03 | -0,0019913 | -0,0006808 | 0,011569 | -0,0016635 | 0,54172 | 0,12825 |
| 10 | 2,76E-05 | 6,41E-03 | -5,51E-03 | 5,77E-03 | -0,015933 | 1,91E-02 | -0,030336 | 0,025448 | -0,14559 | 0,64094 |
| 11 | -0,0003272 | -2,94E-03 | 1,76E-03 | -6,45E-03 | -0,001277 | -0,0091301 | -9,70E-05 | -0,01779 | 0,0018553 | 0,047303 |
| 12 | 4,70E-05 | 5,43E-03 | -4,33E-03 | 5,96E-03 | -0,0066025 | 0,016811 | -0,0174 | 0,02641 | -0,066157 | 0,038473 |
| 13 | -0,0002898 | -2,74E-03 | 1,53E-03 | -6,62E-03 | -0,0023698 | -0,011013 | -0,0019423 | -0,023495 | -0,0066374 | 0,0032755 |
| 14 | 6,73E-05 | 4,91E-03 | -3,68E-03 | 6,30E-03 | -0,0034375 | 0,016148 | -0,010749 | 0,02844 | -0,020219 | 0,026445 |
| 15 | -0,0002546 | -2,33E-03 | 1,21E-03 | -6,31E-03 | -0,0028189 | -0,01118 | -0,0028673 | -0,024668 | -0,0060798 | -0,0062241 |
| 16 | 8,80E-05 | 4,64E-03 | -3,30E-03 | 6,70E-03 | -0,0015526 | 0,016183 | -0,0069755 | 0,030513 | -0,0083981 | 0,025121 |
| 17 | -0,0002221 | -1,75E-03 | 8,05E-04 | -5,62E-03 | -0,0029349 | -0,010355 | -0,003351 | -0,023381 | -0,0071828 | -0,0085529 |
| 18 | 0,0001071 | 4,53E-03 | -3,08E-03 | 7,11E-03 | -0,0002515 | 0,016519 | -0,004473 | 0,032565 | -0,0030636 | 0,024615 |
| 19 | -0,000193 | -1,69E-03 | 8,63E-04 | -4,49E-03 | -0,0022497 | -0,0080043 | -0,0025206 | -0,01795 | -0,006089 | -0,0048386 |
| 20 | 6,99E-05 | 3,43E-03 | -2,38E-03 | 4,85E-03 | -0,000524 | 0,01082 | -0,0036845 | 0,020707 | -0,0029524 | 0,011736 |
| 21 | -0,0001751 | -1,54E-03 | 8,14E-04 | -3,48E-03 | -0,0019755 | -0,0057964 | -0,0024741 | -0,013243 | -0,0064363 | -0,0011906 |
| 22 | 5,15E-05 | 2,63E-03 | -1,83E-03 | 3,35E-03 | -0,0003888 | 0,0070673 | -2,53E-03 | 0,013303 | -0,0012651 | 0,0048095 |
| 23 | -0,0001636 | -1,38E-03 | 7,25E-04 | -2,67E-03 | -0,0018885 | -0,0040366 | -0,0026968 | -0,0096589 | -0,0069921 | 0,0010409 |
| 24 | 4,24E-05 | 2,04E-03 | -1,41E-03 | 2,35E-03 | -0,0001799 | 0,0046698 | -0,0015423 | 0,0087633 | 2,23E-05 | 0,0016773 |
| 25 | -0,0001554 | -1,22E-03 | 6,28E-04 | -2,04E-03 | -0,0018583 | -0,0027388 | -0,0029258 | -0,0070802 | -0,0072337 | 0,0020858 |
| 26 | 3,77E-05 | 1,60E-03 | -1,10E-03 | 1,68E-03 | -9,01E-06 | 0,0031479 | -0,0008409 | 0,0059618 | 0,0006889 | 0,0003906 |
| 27 | -0,0001489 | -1,07E-03 | 5,37E-04 | -1,57E-03 | -0,0018281 | -0,0018173 | -0,003069 | -0,0052617 | -0,0071375 | 0,0024359 |
| 28 | 3,53E-05 | 1,26E-03 | -8,61E-04 | 1,23E-03 | 0,0001045 | 0,0021728 | -0,0003828 | 0,0041947 | 0,0009479 | -9,62E-05 |
| 29 | -0,0001433 | -9,39E-04 | 4,55E-04 | -1,22E-03 | -0,0017805 | -0,0011736 | -0,0031159 | -0,0039786 | -0,0068183 | 0,0024395 |
| 30 | 3,39E-05 | 1,01E-03 | -6,80E-04 | 9,16E-04 | 0,0001703 | 0,0015362 | -9,88E-05 | 0,0030459 | 0,0009942 | -0,0002541 |
| 31 | -0,000171 | -8,76E-04 | 3,70E-04 | -8,28E-04 | -0,00227 | -8,79E-05 | -0,0043016 | -0,0023419 | -0,0089594 | 0,0039218 |
| 32 | 3,62E-05 | 9,07E-04 | -6,07E-04 | 6,75E-04 | 0,0002115 | 9,94E-04 | 0,0001023 | 0,0020258 | 0,0010419 | -0,0006693 |
| 33 | -0,0002072 | -7,77E-04 | 2,42E-04 | -3,89E-04 | -0,0029437 | 0,0010871 | -0,0058668 | -0,0007623 | -0,011594 | 0,0048477 |
| 34 | 3,83E-05 | 8,14E-04 | -5,43E-04 | 4,63E-04 | 0,0002237 | 0,0005578 | 0,0002158 | 0,0011939 | 0,0007103 | -0,0007827 |
| 35 | -0,0002545 | -6,59E-04 | 7,68E-05 | 5,69E-05 | -0,003836 | 2,22E-03 | -0,0078399 | 0,000433 | -0,014462 | 0,0047113 |
| 36 | 3,91E-05 | 7,35E-04 | -4,93E-04 | 2,86E-04 | 0,000157 | 0,000246 | 0,0001356 | 0,0005284 | -0,000232 | -0,0007577 |
| 37 | -0,0003161 | -5,43E-04 | -1,14E-04 | 4,48E-04 | -0,0049571 | 3,10E-03 | -0,010177 | 0,0008099 | -0,016991 | 0,0030534 |
| 38 | 3,69E-05 | 0,0006888 | -0,000462 | 0,0001422 | -6,20E-05 | 4,69E-05 | -0,0002815 | -9,07E-05 | -0,0019068 | -0,0009993 |
| 39 | -0,0003954 | -0,0004622 | -0,0003141 | 0,0006982 | -0,0062596 | 0,0034557 | -0,012692 | -0,0001476 | -0,0018328 | -0,0002258 |
| 40 | 2,88E-05 | 0,0006104 | -0,0004565 | 1,44E-05 | -0,0005239 | -1,18E-04 | -0,0011891 | -0,0009503 | -0,0041058 | -0,0021266 |
| 41 | -0,0004955 | -0,0004541 | -0,0004937 | 0,0006952 | -0,007587 | 0,002953 | -0,014957 | -0,0029225 | -0,017642 | -0,004506 |
| 42 | 1,10E-05 | 0,0005459 | -0,0004788 | -0,0001404 | -0,0013053 | -0,0004474 | -0,0026654 | -0,0025752 | -0,0061143 | -0,0046898 |
| 43 | -0,0006185 | -0,0005669 | -0,000607 | 0,0002976 | -0,0086289 | 0,0012773 | -0,01626 | -0,0077039 | -0,014687 | -0,00838 |
| 44 | -2,06E-05 | 0,0004456 | -0,0005212 | -0,0004119 | -0,0023958 | -0,0013125 | -0,004542 | -0,0057309 | -0,006859 | -0,0086542 |
| 45 | -0,0007644 | -0,0008499 | -0,000586 | -0,000645 | -0,008925 | -0,0016664 | -0,015712 | -0,013974 | -0,010207 | -0,010208 |
| 46 | -6,95E-05 | 0,0002551 | -0,0005517 | -0,0009636 | -0,0035741 | -0,0032571 | -0,0061716 | -0,011216 | -0,005506 | -0,013025 |
| 47 | -0,0009323 | -0,0013333 | -0,0003457 | -0,0022416 | -0,0080034 | -0,0054881 | -0,012667 | -0,020182 | -0,0056511 | -0,0090753 |
| 48 | -0,000134 | -0,000116 | -0,0004903 | -0,0020635 | -0,0042969 | -0,0068483 | -0,0063253 | -0,019351 | -0,0021292 | -0,016151 |
| 49 | -0,0011269 | -0,0019838 | 0,0001853 | -0,0044453 | -0,0056893 | -0,009121 | -0,0073608 | -0,023916 | -0,0023473 | -0,0053476 |
| 50 | -0,000203 | -0,0007966 | -0,0001769 | -0,0040955 | -0,0037483 | -0,012324 | -0,0035353 | -0,02932 | 0,0022105 | -0,01666 |
| 51 | -0,0013833 | -0,002616 | 0,0009751 | -0,0068545 | -0,00242 | -0,010989 | -0,0012698 | -0,022849 | -0,0007898 | -0,0003016 |
| 52 | -0,0002556 | -0,0019322 | 0,0006459 | -0,0074995 | -0,0012017 | -0,019185 | 0,0030066 | -0,039013 | 0,0061151 | -0,014274 |
| 53 | -0,0018263 | -0,0027478 | 0,0017055 | -0,0084728 | 0,0007725 | -0,0095938 | 0,0034073 | -0,015829 | -0,0006117 | 0,0048484 |
| 54 | -0,0003027 | -0,0036018 | 0,00227 | -0,012577 | 0,0034186 | -0,026184 | 0,012611 | -0,046016 | 0,0086656 | -0,0098757 |
| 55 | -0,0026246 | -0,0012748 | 0,0014334 | -0,0075395 | 0,0027671 | -0,0039226 | 0,0048146 | -0,0026228 | -0,0011048 | 0,0098576 |
| 56 | -0,0006959 | -0,0055829 | 0,0047398 | -0,019127 | 0,0092583 | -0,031912 | 0,023202 | -0,049135 | 0,0097524 | -0,0048951 |
| 57 | -0,070798 | 0,0004517 | 0,0006914 | -0,0012417 | 0,0027364 | 0,0075269 | 0,0020962 | 0,018891 | -0,0018659 | 0,016576 |
| 58 | -0,006273 | 0,0006375 | 0,0021001 | -0,026318 | 0,015366 | -0,035482 | 0,031853 | -0,048549 | 0,0099812 | -0,0009099 |
| 59 | 0,058252 | 0,0008234 | 0,0035088 | -0,0513943 | 0,0279956 | -0,0784909 | 0,0616098 | -0,115989 | 0,0218283 | -0,0183958 |
| 60 | 0,10881 | 0,08491 | -0,053616 | -0,036438 | 0,02615 | -0,036512 | 0,03432 | -0,040896 | 0,010971 | -0,0003974 |

Annexe C

| | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0,056294 | -0,0278771 | 0,117643 | -0,0364144 | 0,0546768 | -0,0648906 | 0,1114867 | 0,0782719 | -0,0790755 | 0,1064171 | -0,124748 |
| 2 | 0,021175 | -0,014496 | 0,04064 | -0,019022 | 0,028908 | -0,033893 | 0,055402 | 0,038287 | -0,03855 | 0,051388 | -0,060769 |
| 3 | -0,013944 | -0,0011149 | -0,036363 | -0,0016296 | 0,0031392 | -0,0028954 | -0,0006827 | -0,0016979 | 0,0019755 | -0,0036411 | 0,00321 |
| 4 | 0,025238 | -0,011322 | 0,051627 | -0,017584 | 0,027278 | -0,030988 | 0,054445 | 0,037822 | -0,038483 | 0,051518 | -0,060693 |
| 5 | 0,0012916 | -0,0026363 | -0,037525 | -0,0051207 | -0,0005203 | -0,0089404 | -0,0064152 | 0,000343 | -4,92E-05 | -0,0022705 | 0,0001222 |
| 6 | 0,022663 | -0,0050813 | 0,011852 | -0,020525 | 0,027728 | -0,034821 | 0,049114 | 0,036878 | -0,03818 | 0,048717 | -0,060029 |
| 7 | -0,05987 | -0,0002818 | -0,054511 | -0,0065327 | -0,0037144 | -0,010867 | -0,014627 | -0,001274 | 0,0010992 | -0,0056651 | 0,0020373 |
| 8 | 0,012704 | 0,017272 | 0,026985 | -0,015889 | 0,056441 | -0,023045 | 0,04908 | 0,034399 | -0,037519 | 0,048322 | -0,059053 |
| 9 | 0,12825 | 0,0033358 | -0,15956 | -0,0081603 | 0,010401 | -0,014779 | -0,020247 | -0,0001166 | -0,0017318 | -0,0054815 | -0,0022674 |
| 10 | 0,64094 | 0,12643 | -0,002273 | -0,027128 | 0,030212 | -0,012683 | 0,046645 | 0,033207 | -0,039264 | 0,049531 | -0,061715 |
| 11 | 0,047303 | 0,54982 | 0,043612 | -0,0033932 | -0,050915 | -0,012996 | -0,040532 | -0,004916 | -0,0003579 | -0,013807 | 0,0001099 |
| 12 | 0,038473 | -0,051255 | 0,62314 | 0,038524 | 0,024402 | 0,012374 | 0,046163 | 0,029732 | -0,039585 | 0,052054 | -0,062167 |
| 13 | 0,0032755 | 0,0010128 | 0,001846 | 0,56222 | 0,15866 | -0,0097335 | -0,14289 | -0,010072 | -0,0031124 | -0,025267 | -0,0038521 |
| 14 | 0,026445 | -0,040331 | 0,044846 | -0,11126 | 0,66927 | 0,12179 | 0,020935 | 0,012442 | -0,042271 | 0,059753 | -0,06596 |
| 15 | -0,0062241 | -0,011425 | -0,014703 | -0,0045894 | 0,059044 | -0,57437 | 0,062492 | -0,035456 | -5,21E-05 | -0,082076 | 0,0016029 |
| 16 | 0,025121 | -0,019711 | 0,044156 | -0,065303 | 0,044959 | -0,031735 | 0,7168 | 0,078073 | -0,046975 | 0,10668 | -0,071828 |
| 17 | -0,0085529 | -0,013177 | -0,020193 | -0,01274 | 0,014869 | -0,01233 | 0,019363 | 0,26044 | -0,0022125 | -0,001402 | -0,0034607 |
| 18 | 0,024615 | -0,0089115 | 0,046082 | -0,016064 | 0,029503 | -0,034498 | 0,05353 | 0,027081 | -0,046666 | 0,13122 | -0,067036 |
| 19 | -0,0048386 | -0,011732 | -0,01232 | -0,020219 | 0,026349 | -0,050098 | 0,044192 | -0,0003276 | 0,0013723 | 0,47248 | 0,0002463 |
| 20 | 0,011736 | -0,0067127 | 0,020555 | -0,0014 | -0,015355 | 0,0049266 | -0,034901 | -0,057169 | -0,051072 | -0,074131 | -0,035127 |
| 21 | -0,0011906 | -0,013106 | -0,0054418 | -0,029687 | 0,028262 | -0,06875 | 0,037996 | 0,0005062 | 0,0021914 | -0,011152 | 0,0004534 |
| 22 | 0,0048095 | -0,0023424 | 0,0081231 | 0,0068665 | -0,016371 | 0,018579 | -0,026149 | -0,015039 | -0,038568 | -0,1304 | -0,025204 |
| 23 | 0,0010409 | -0,014517 | -0,0015923 | -0,029741 | 0,022198 | -0,064419 | 0,024027 | 0,001382 | 0,0016656 | -0,010425 | 0,0004155 |
| 24 | 0,0016773 | 0,0004902 | 0,003021 | 0,0067051 | -0,010695 | 0,014911 | -0,014545 | -0,0073287 | -0,035116 | -0,10843 | -0,0077103 |
| 25 | 0,0020858 | -0,015013 | 0,0001124 | -0,026348 | 0,016336 | -0,054767 | 0,014601 | 0,0016636 | 0,0011561 | -0,0090072 | 0,0003432 |
| 26 | 0,0003906 | 0,0017809 | 0,0010864 | 0,005097 | -0,0067037 | 0,010467 | -0,0084054 | -0,0045371 | -0,030263 | -0,090438 | -0,0063695 |
| 27 | 0,0024359 | -0,014711 | 0,0007123 | -0,022516 | 0,012054 | -0,045697 | 0,009009 | 0,0016554 | 0,0008067 | -0,0076423 | 0,0002803 |
| 28 | -9,62E-05 | 0,0021883 | 0,0003836 | 0,003709 | -0,004337 | 0,0073481 | -0,005222 | -0,003072 | -0,026745 | -0,078627 | -0,0054886 |
| 29 | 0,0024395 | -0,013938 | 0,0008231 | -0,019113 | 0,0090815 | -0,038254 | 0,005685 | 0,0015413 | 0,0005759 | -0,006493 | 0,0002309 |
| 30 | -0,0002541 | 0,0021812 | 0,0001405 | 0,0027117 | -0,0029305 | 0,0052917 | -0,0034601 | -0,0021995 | -0,024041 | -0,069984 | -0,004851 |
| 31 | 0,0039218 | -0,018247 | 0,0023368 | -0,022657 | 0,0074924 | -0,043965 | 0,000738 | -0,0021609 | -0,001043 | -0,01953 | -7,41E-05 |
| 32 | -0,0006693 | 0,0022207 | -0,0005785 | 0,0009772 | -0,001873 | 0,0016081 | -0,0027325 | -0,0025989 | -0,024284 | -0,07247 | -0,0048877 |
| 33 | 0,0048477 | -0,023297 | 0,0024262 | -0,024578 | 0,0038545 | -0,046146 | -0,0065115 | -0,00399 | -0,0028247 | -0,028568 | -0,0003523 |
| 34 | -0,0007827 | 0,0014341 | -0,0009655 | -0,0017402 | -0,0013411 | -0,0034627 | -0,0036311 | -0,0035725 | -0,024886 | -0,07744 | -0,0049747 |
| 35 | 0,0047113 | -0,028412 | 0,0003159 | -0,023863 | -0,0009884 | -0,043642 | -0,013799 | -0,003615 | -0,0045375 | -0,032021 | -0,0005677 |
| 36 | -0,0007577 | -0,0005553 | -0,0015215 | -0,0046123 | -0,0020902 | -0,0081887 | -0,006704 | -0,0040286 | -0,025845 | -0,082326 | -0,0050842 |
| 37 | 0,0030534 | -0,032358 | -0,0043872 | -0,020427 | -0,0053276 | -0,03718 | -0,018427 | -0,0017803 | -0,0059687 | -0,030951 | -0,0007174 |
| 38 | -0,0009993 | -0,0037954 | -0,0031228 | -0,0064264 | -0,0041904 | -0,01072 | -0,011046 | -0,0033435 | -0,027062 | -0,085221 | -0,0051921 |
| 39 | -0,0002258 | -0,033593 | -0,011123 | -0,015378 | -0,0074607 | -0,029034 | -0,018841 | 0,0005378 | -0,0069897 | -0,027455 | -0,0008128 |
| 40 | -0,0021266 | -0,0076131 | -0,0067401 | -0,0063496 | -0,0067092 | -0,010333 | -0,014668 | -0,0015801 | -0,028386 | -0,085684 | -0,0052884 |
| 41 | -0,004506 | -0,031031 | -0,01805 | -0,010406 | -0,0067145 | -0,021584 | -0,015358 | 0,0026786 | -0,0075659 | -0,023281 | -0,000865 |
| 42 | -0,0046898 | -0,010496 | -0,012719 | -0,0045293 | -0,0081821 | -0,0077738 | -0,015736 | 0,000863 | -0,029665 | -0,084271 | -0,0053704 |
| 43 | -0,00838 | -0,024991 | -0,02259 | -0,0068002 | -0,0037496 | -0,016156 | -0,0095894 | 0,0043369 | -0,0077173 | -0,019367 | -0,0008787 |
| 44 | -0,0086542 | -0,010717 | -0,020044 | -0,0019598 | -0,0075578 | -0,0045255 | -0,013573 | 0,0035911 | -0,030797 | -0,08183 | -0,0054384 |
| 45 | -0,010208 | -0,017352 | -0,022819 | -0,0049086 | 4,83E-05 | -0,012867 | -0,0033365 | 0,0054041 | -0,0074773 | -0,015996 | -0,0008542 |
| 46 | -0,013025 | -0,0075051 | -0,026427 | 0,0002215 | -0,0047773 | -0,0018592 | -0,0086963 | 0,0063209 | -0,031717 | -0,079032 | -0,0054904 |
| 47 | -0,0090753 | -0,010466 | -0,018583 | -0,0042909 | 0,0034466 | -0,011109 | 0,002162 | 0,005852 | -0,0068751 | -0,013089 | -0,0007896 |
| 48 | -0,016151 | -0,0017017 | -0,029535 | 0,0013584 | -0,000599 | -0,0003908 | -0,0022262 | 0,0088707 | -0,032393 | -0,076269 | -0,0055235 |
| 49 | -0,0053476 | -0,0058192 | -0,011294 | -0,0042396 | 0,0058229 | -0,010093 | 0,0063645 | 0,0056671 | -0,0059107 | -0,01041 | -0,0006811 |
| 50 | -0,01666 | 0,0048218 | -0,028329 | 0,0014145 | 0,0039815 | -0,0001379 | 0,0047044 | 0,01113 | -0,032832 | -0,073731 | -0,0055371 |
| 51 | -0,0003016 | -0,0035702 | -0,0027661 | -0,0041829 | 0,0071164 | -0,0091539 | 0,0092406 | 0,0048121 | -0,0045271 | -0,007642 | -0,0005185 |
| 52 | -0,014274 | 0,010345 | -0,023401 | 0,0007396 | 0,0081859 | -0,0007649 | 0,011231 | 0,013025 | -0,033053 | -0,071474 | -0,0055319 |
| 53 | 0,0048484 | -0,0030308 | 0,0059496 | -0,003816 | 0,0075955 | -0,0078537 | 0,011108 | 0,003194 | -0,002585 | -0,0043957 | -0,0002818 |
| 54 | -0,0098757 | 0,014053 | -0,016375 | -0,0002367 | 0,011606 | -0,0018303 | 0,016817 | 0,014518 | -0,033087 | -0,069498 | -0,0055105 |
| 55 | 0,0098576 | -0,0034284 | 0,015337 | -0,0030267 | 0,0076906 | -0,0059239 | 0,012619 | 0,0005528 | 0,0002467 | -6,34E-05 | 7,40E-05 |
| 56 | -0,0048951 | 0,016018 | -0,009075 | -0,0011902 | 0,014129 | -0,0029573 | 0,021189 | 0,015607 | -0,032986 | -0,067821 | -0,0054783 |
| 57 | 0,016576 | -0,0046307 | 0,029148 | -0,0018583 | 0,0083284 | -0,0033029 | 0,015549 | -0,003833 | 0,0047971 | 0,0065722 | 0,0006577 |
| 58 | -0,0009099 | 0,017017 | -0,0032857 | -0,0016607 | 0,015362 | -0,0033248 | 0,0236 | 0,015966 | -0,032418 | -0,065765 | -0,005388 |
| 59 | -0,0183958 | 0,0386647 | -0,0357194 | -0,0014631 | 0,0223956 | -0,0033467 | 0,031651 | 0,035765 | -0,0696331 | -0,1381022 | -0,0114337 |
| 60 | -0,0003974 | 0,019745 | -0,001369 | 0,0007017 | 0,011834 | 0,0019584 | 0,018903 | 0,012643 | -0,027875 | -0,056638 | -0,0047532 |

Annexe C

| | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0,0438892 | -0,0661137 | 0,0893904 | -0,1311149 | 0,0345596 | -0,067068 | 0,0714282 | -0,1337205 | 0,0340789 | 0,0188416 |
| 2 | 0,020663 | -0,032072 | 0,042277 | -0,063641 | 0,016135 | -0,0325 | 0,033435 | -0,064815 | 0,01606 | 0,0091328 |
| 3 | -0,0025632 | 0,0019697 | -0,0048364 | 0,0038329 | -0,0022896 | 0,002068 | -0,0045582 | 0,0040905 | -0,0019589 | -0,000576 |
| 4 | 0,021166 | -0,032091 | 0,043118 | -0,063658 | 0,016555 | -0,032504 | 0,034256 | -0,06482 | 0,016277 | 0,0091336 |
| 5 | -0,003221 | 0,0006289 | -0,0057242 | 0,0010904 | -0,0030534 | 0,0007685 | -0,0059525 | 0,001466 | -0,0026536 | -0,0002059 |
| 6 | 0,018211 | -0,031119 | 0,037688 | -0,061883 | 0,013511 | -0,031266 | 0,028337 | -0,062443 | 0,013352 | 0,0088 |
| 7 | -0,0058691 | 0,0019007 | -0,010622 | 0,0035319 | -0,0051756 | 0,0020625 | -0,010206 | 0,0040253 | -0,0053264 | -0,0005665 |
| 8 | 0,019409 | -0,030613 | 0,039481 | -0,060842 | 0,014171 | -0,030574 | 0,02967 | -0,061093 | 0,013255 | 0,0086107 |
| 9 | -0,0076759 | -8,56E-06 | -0,013487 | -0,0003802 | -0,0063023 | 8,98E-05 | -0,012439 | 7,14E-05 | -0,0082125 | -9,58E-06 |
| 10 | 0,019842 | -0,031443 | 0,040083 | -0,062595 | 0,01345 | -0,031016 | 0,028537 | -0,062092 | 0,011316 | 0,0087535 |
| 11 | -0,013472 | 0,0015262 | -0,023914 | 0,0025177 | -0,0090725 | 0,0013798 | -0,018513 | 0,0026789 | -0,014899 | -0,0003781 |
| 12 | 0,021455 | -0,030882 | 0,042429 | -0,061616 | 0,012702 | -0,029894 | 0,027652 | -0,060023 | 0,0094607 | 0,0084644 |
| 13 | -0,019649 | -0,0003646 | -0,034316 | -0,0014238 | -0,0090695 | -0,0009536 | -0,020103 | -0,0018839 | -0,023251 | 0,0002636 |
| 14 | 0,019605 | -0,030609 | 0,039481 | -0,061672 | 0,0092683 | -0,029073 | 0,021779 | -0,058657 | 0,0021575 | 0,0082745 |
| 15 | -0,021823 | 0,0010194 | -0,044278 | 0,0016177 | -0,0059497 | 2,72E-05 | -0,017175 | 0,0002776 | -0,033579 | -4,22E-05 |
| 16 | 0,010548 | -0,028798 | 0,033355 | -0,059765 | 0,0064791 | -0,027374 | 0,016574 | -0,055523 | -0,0044023 | 0,0078346 |
| 17 | 0,0001219 | -0,0019549 | 0,0001629 | -0,0038517 | 0,0004704 | -0,0020298 | 0,00079 | -0,0040295 | -0,039659 | 0,0005676 |
| 18 | -0,0081315 | -0,028302 | 0,020549 | -0,056435 | 0,0062448 | -0,025623 | 0,013796 | -0,052052 | -0,0090243 | 0,0073456 |
| 19 | -0,0031147 | -0,0001912 | -0,0056559 | -0,0002797 | -0,0006354 | -0,0003506 | -0,0019942 | -0,0006413 | -0,05421 | 8,96E-05 |
| 20 | 0,067097 | -0,014134 | 0,028114 | -0,021109 | 0,003323 | -0,0076637 | 0,010564 | -0,016312 | -0,018423 | 0,0023073 |
| 21 | 0,55892 | -7,68E-05 | -0,0081809 | -5,95E-06 | -0,001243 | -0,0001563 | -0,0033869 | -0,000274 | -0,073496 | 3,79E-05 |
| 22 | -0,083562 | -0,037195 | 0,11574 | -0,031778 | -0,0092349 | -0,013274 | 0,015102 | -0,025488 | -0,019508 | 0,0036114 |
| 23 | -0,0039809 | 3,82E-05 | 0,60614 | 0,0001314 | -0,0013846 | -5,01E-05 | -0,0035535 | -7,12E-05 | -0,097762 | 9,47E-06 |
| 24 | -0,066486 | -0,0234 | -0,057107 | -0,048645 | 0,058769 | -0,018369 | 0,028194 | -0,029609 | -0,026007 | 0,004222 |
| 25 | -0,0034799 | 8,83E-05 | -0,0067971 | 0,0001474 | 0,67169 | -6,64E-05 | -0,0032078 | -8,85E-05 | -0,13969 | 1,22E-05 |
| 26 | -0,0225 | -0,014444 | -0,093304 | -0,033607 | -0,077536 | -0,03679 | 0,11454 | -0,030429 | -0,054383 | 0,0034043 |
| 27 | -0,0029731 | 0,0001065 | -0,0057394 | 0,0001429 | -0,0010482 | -4,41E-05 | 0,76598 | -1,32E-05 | -0,22905 | 2,73E-06 |
| 28 | -0,01349 | -0,014455 | -0,076509 | -0,016081 | -0,079102 | -0,022839 | 0,0014518 | -0,049216 | -0,0035118 | 0,0020116 |
| 29 | -0,002538 | 0,0001098 | -0,0048592 | 0,0001323 | -0,0009317 | -2,96E-05 | -0,0025713 | -1,51E-06 | 0,27164 | 7,45E-07 |
| 30 | -0,0098513 | -0,012158 | -0,061724 | -0,013457 | -0,033339 | -0,013978 | -0,096962 | -0,034072 | -0,18387 | -0,014539 |
| 31 | -0,015276 | -0,0009013 | -0,033631 | -0,0010036 | -0,04244 | -0,0019356 | -0,087948 | -0,002069 | -0,034678 | 0,0002427 |
| 32 | -0,012709 | -0,012302 | -0,068126 | -0,013614 | -0,049462 | -0,017933 | -0,1439 | -0,021077 | -0,08364 | 0,0024129 |
| 33 | -0,018444 | -0,0013302 | -0,040789 | -0,0014666 | -0,022561 | -0,0009842 | -0,04314 | -0,000817 | -0,022139 | 0,0001096 |
| 34 | -0,016482 | -0,012453 | -0,075917 | -0,013749 | -0,038726 | -0,016298 | -0,11016 | -0,018644 | -0,032605 | 0,0021596 |
| 35 | -0,014602 | -0,001215 | -0,03308 | -0,0013596 | -0,010594 | 3,60E-05 | -0,020081 | 0,0001468 | -0,015319 | -6,75E-06 |
| 36 | -0,016357 | -0,01232 | -0,074935 | -0,013556 | -0,024189 | -0,014052 | -0,077061 | -0,016004 | -0,016693 | 0,0018641 |
| 37 | -0,0091819 | -0,0008889 | -0,022344 | -0,0010696 | -0,0056064 | 0,0005666 | -0,0097819 | 0,0005997 | -0,0089466 | -6,46E-05 |
| 38 | -0,013005 | -0,011897 | -0,067395 | -0,013083 | -0,015233 | -0,012129 | -0,056429 | -0,013937 | -0,0072734 | 0,0016244 |
| 39 | -0,0046341 | -0,0005924 | -0,013413 | -0,000824 | -0,003307 | 0,000754 | -0,0045924 | 0,0007439 | -0,003798 | -8,45E-05 |
| 40 | -0,0084893 | -0,011335 | -0,057733 | -0,012509 | -0,010046 | -0,010672 | -0,043298 | -0,012408 | -0,0001079 | 0,0014448 |
| 41 | -0,0013913 | -0,0004125 | -0,0070619 | -0,000686 | -0,0020236 | 0,0007492 | -0,0016944 | 0,0007142 | 0,0003356 | -8,27E-05 |
| 42 | -0,0040422 | -0,010775 | -0,048373 | -0,011968 | -0,0068522 | -0,0096083 | -0,034399 | -0,011294 | 0,0060456 | 0,0013132 |
| 43 | 0,0007343 | -0,0003419 | -0,0028904 | -0,0006367 | -0,0011772 | 0,0006475 | 1,97E-05 | 0,0005944 | 0,0034727 | -6,96E-05 |
| 44 | -0,0001279 | -0,010297 | -0,04021 | -0,011522 | -0,0046955 | -0,0088438 | -0,028003 | -0,01049 | 0,01158 | 0,0012181 |
| 45 | 0,0019955 | -0,0003369 | -0,0003455 | -0,0006307 | -0,0005712 | 0,0005076 | 0,0010274 | 0,000441 | 0,0056046 | -5,21E-05 |
| 46 | 0,0031421 | -0,0099286 | -0,033445 | -0,011185 | -0,0031051 | -0,0083011 | -0,023203 | -0,0099174 | 0,016567 | 0,0011504 |
| 47 | 0,0025961 | -0,0003513 | 0,0010454 | -0,0006241 | -0,0001371 | 0,000367 | 0,0015644 | 0,0002931 | 0,0067558 | -3,50E-05 |
| 48 | 0,0057817 | -0,00966 | -0,028012 | -0,01094 | -0,0018569 | -0,0079207 | -0,019504 | -0,0095152 | 0,020963 | 0,0011028 |
| 49 | 0,0026822 | -0,0003457 | 0,0016502 | -0,0005793 | 0,0001536 | 0,0002528 | 0,0017737 | 0,0001804 | 0,0069726 | -2,18E-05 |
| 50 | 0,0078497 | -0,0094705 | -0,023755 | -0,010766 | -0,0008438 | -0,0076575 | -0,016621 | -0,0092362 | 0,024719 | 0,0010698 |
| 51 | 0,0023425 | -0,0002863 | 0,0017419 | -0,0004611 | 0,0003186 | 0,0001878 | 0,0017601 | 0,0001297 | 0,006286 | -1,57E-05 |
| 52 | 0,0094162 | -0,0093369 | -0,020496 | -0,010638 | -1,62E-05 | -0,0074773 | -0,014379 | -0,0090437 | 0,027802 | 0,0010471 |
| 53 | 0,0015997 | -0,0001385 | 0,0015051 | -0,0002294 | 0,0003691 | 0,0001957 | 0,0015996 | 0,0001694 | 0,0046573 | -2,01E-05 |
| 54 | 0,010558 | -0,0092388 | -0,018056 | -0,010539 | 0,000652 | -0,0073531 | -0,012654 | -0,008909 | 0,030217 | 0,0010312 |
| 55 | 0,0003708 | 0,0001499 | 0,0010431 | 0,0001826 | 0,0003102 | 0,0003121 | 0,0013523 | 0,0003444 | 0,0018699 | -4,00E-05 |
| 56 | 0,011347 | -0,009163 | -0,016289 | -0,010456 | 0,0011706 | -0,0072661 | -0,011365 | -0,0088124 | 0,031995 | 0,0010198 |
| 57 | -0,0016602 | 0,0006799 | 0,0003291 | 0,0009144 | 0,0001393 | 0,0006047 | 0,0010611 | 0,0007428 | -0,002725 | -8,57E-05 |
| 58 | 0,011703 | -0,0090274 | -0,015001 | -0,010295 | 0,0015303 | -0,0071491 | -0,010399 | -0,0086732 | 0,032797 | 0,0010037 |
| 59 | 0,0250662 | -0,0187347 | -0,0303311 | -0,0215044 | 0,0029213 | -0,0149029 | -0,0218591 | -0,0180892 | 0,068319 | 2,09E-03 |
| 60 | 0,010509 | -0,008145 | -0,013087 | -0,0092217 | 0,0017188 | -0,0064886 | -0,0089416 | -0,007857 | 0,029515 | 0,0009093 |

Annexe C

| | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0,0673167 | -0,0669124 | 0,0228558 | -0,032593 | 0,046779 | -0,066618 | 0,0026824 | -0,0411146 | 0,0083349 | -0,080846 |
| 2 | 0,031467 | -0,031032 | 0,0095682 | -0,011121 | 0,01982 | -0,02321 | -0,0012301 | -0,0088423 | -0,0007808 | -0,018616 |
| 3 | -0,0043827 | 0,0048484 | -0,0037194 | 0,010351 | -0,007139 | 0,020198 | -0,0051426 | 0,02343 | -0,0098965 | 0,043614 |
| 4 | 0,032086 | -0,031896 | 0,010319 | -0,014126 | 0,021229 | -0,029053 | -0,000159 | -0,016126 | 0,0012547 | -0,032147 |
| 5 | -0,0062514 | 0,0072443 | -0,0070588 | 0,0082633 | -0,013388 | 0,015877 | -0,01103 | 0,012924 | -0,021036 | 0,024234 |
| 6 | 0,025417 | -0,024555 | 0,0028706 | -0,0042361 | 0,0070484 | -0,0099833 | -0,012301 | 0,001203 | -0,021932 | 0,0001878 |
| 7 | -0,011803 | 0,011536 | -0,011784 | 0,0082318 | -0,022396 | 0,015804 | -0,016602 | 0,0075827 | -0,031654 | 0,014509 |
| 8 | 0,025709 | -0,025887 | 0,0034361 | -0,0073743 | 0,0080291 | -0,016038 | -0,011971 | -0,005976 | -0,021289 | -0,013293 |
| 9 | -0,017587 | 0,013334 | -0,017977 | 0,0075309 | -0,03397 | 0,014333 | -0,023334 | 0,0022552 | -0,044289 | 0,0046692 |
| 10 | 0,021791 | -0,023702 | -0,0021606 | -0,0067585 | -0,0025688 | -0,015046 | -0,021222 | -0,0094941 | -0,038597 | -0,019998 |
| 11 | -0,030045 | 0,01677 | -0,02529 | 0,005183 | -0,047711 | 0,010132 | -0,024441 | -0,004525 | -0,046785 | -0,0072894 |
| 12 | 0,018186 | -0,021818 | -0,0069323 | -0,007166 | -0,01153 | -0,015993 | -0,026624 | -0,014785 | -0,048314 | -0,029751 |
| 13 | -0,04395 | 0,013869 | -0,030379 | -0,0014939 | -0,057203 | -0,0020036 | -0,020614 | -0,011215 | -0,041006 | -0,019414 |
| 14 | 0,0039143 | -0,016674 | -0,019334 | -0,0092515 | -0,03438 | -0,019904 | -0,032671 | -0,023682 | -0,059871 | -0,045248 |
| 15 | -0,058002 | 0,006453 | -0,026612 | -0,008275 | -0,051386 | -0,013696 | -0,0094988 | -0,010537 | -0,022052 | -0,018942 |
| 16 | -0,0084983 | -0,014499 | -0,025058 | -0,013799 | -0,044522 | -0,027728 | -0,027778 | -0,027751 | -0,052023 | -0,052034 |
| 17 | -0,060809 | -0,0075331 | -0,018777 | -0,011904 | -0,038725 | -0,020851 | -0,0041931 | -0,0089424 | -0,012174 | -0,017477 |
| 18 | -0,01613 | -0,015591 | -0,022918 | -0,017358 | -0,040777 | -0,033289 | -0,019462 | -0,025947 | -0,037643 | -0,048926 |
| 19 | -0,083323 | -0,0097976 | -0,021297 | -0,016754 | -0,045214 | -0,028521 | -0,0007988 | -0,0086769 | -0,0075942 | -0,01757 |
| 20 | -0,027578 | -0,011674 | -0,01158 | -0,011872 | -0,022237 | -0,021727 | -0,0031559 | -0,0098626 | -0,0082875 | -0,019306 |
| 21 | -0,11219 | -0,015913 | -0,021908 | -0,022803 | -0,049723 | -0,037954 | 0,0018989 | -0,0078112 | -0,0042751 | -0,017355 |
| 22 | -0,030348 | -0,016628 | -0,012689 | -0,018546 | -0,02322 | -0,033135 | -0,0001301 | -0,012213 | -0,0035644 | -0,024472 |
| 23 | -0,14561 | -0,028747 | -0,014079 | -0,026535 | -0,042723 | -0,043257 | 0,0045905 | -0,0039785 | 0,0004773 | -0,012322 |
| 24 | -0,039814 | -0,024829 | -0,0097181 | -0,024359 | -0,018101 | -0,041965 | 0,0051479 | -0,009193 | 0,0053291 | -0,020746 |
| 25 | -0,19456 | -0,059662 | 0,0044287 | -0,022747 | -0,02608 | -0,039642 | 0,0053279 | 0,0004577 | 0,0040304 | -0,0053252 |
| 26 | -0,061825 | -0,044449 | 0,0045023 | -0,023705 | 0,0001145 | -0,039789 | 0,0077935 | -0,0017846 | 0,0119 | -0,0092717 |
| 27 | -0,23724 | -0,13788 | 0,027929 | -0,0011446 | -0,0083058 | -0,023363 | 0,0038814 | 0,0024081 | 0,0049935 | 0,0002523 |
| 28 | -0,070315 | -0,10863 | 0,024338 | -0,0020655 | 0,023011 | -0,018383 | 0,0071665 | 0,0027811 | 0,015075 | 0,0010476 |
| 29 | -0,010599 | -0,13399 | -1,87E-05 | 0,012515 | -0,0007967 | -0,013066 | 0,0027861 | 0,0020813 | 0,0046923 | 0,0016205 |
| 30 | 0,16519 | -0,037568 | -0,0096248 | 0,019439 | 0,023579 | 0,015237 | 0,0062192 | 0,005587 | 0,014378 | 0,012155 |
| 31 | 0,46818 | -0,072034 | -0,0028093 | -0,045609 | -0,011816 | -0,033656 | 0,0030415 | 0,0028552 | 0,003444 | -0,0006944 |
| 32 | 0,024275 | 0,34491 | 0,056104 | 0,020515 | 0,049817 | 0,019863 | 0,0086432 | 0,0067269 | 0,022998 | 0,014636 |
| 33 | -0,042401 | 0,018217 | 0,51863 | 0,055878 | -0,02014 | -0,13706 | 0,0012697 | 0,015981 | -9,41E-05 | -0,0076415 |
| 34 | -0,0079431 | -0,004371 | -0,059322 | 0,46468 | 0,14983 | 0,0013697 | -0,0033516 | 0,0080418 | 0,031337 | 0,01269 |
| 35 | -0,025656 | 0,0077913 | -0,0081936 | 0,06657 | 0,48573 | -0,019653 | -0,0016288 | -0,043463 | -0,008011 | -0,024213 |
| 36 | 0,016238 | 0,0096466 | -0,059403 | 0,018965 | 0,015191 | 0,4713 | 0,055928 | 0,0074734 | 0,046488 | 0,010814 |
| 37 | -0,016112 | 0,0056528 | -0,0024897 | 0,022006 | -0,021606 | 0,043073 | 0,51586 | 0,060188 | -0,014523 | -0,1252 |
| 38 | 0,027859 | 0,015537 | -0,013149 | 0,014951 | -0,026504 | 0,011897 | -0,067694 | 0,49185 | 0,14458 | -0,0088013 |
| 39 | -0,007999 | 0,0058187 | -0,0012229 | 0,013773 | -0,0078918 | 0,026808 | -0,0084427 | 0,072643 | 0,4882 | -0,012434 |
| 40 | 0,036212 | 0,019406 | -0,0026959 | 0,013743 | -0,0023506 | 0,018552 | -0,060836 | 0,010467 | 0,0093118 | 0,48544 |
| 41 | -0,0011305 | 0,0066544 | 0,00097 | 0,010518 | -0,0017064 | 0,021176 | -0,0033982 | 0,027656 | -0,020689 | 0,053425 |
| 42 | 0,043626 | 0,022654 | 0,0029771 | 0,013762 | 0,0099079 | 0,022044 | -0,014506 | 0,0078705 | -0,030721 | 0,0059822 |
| 43 | 0,0043547 | 0,0074335 | 0,0026473 | 0,0087187 | 0,0028317 | 0,018337 | -0,0028073 | 0,018811 | -0,0090721 | 0,035166 |
| 44 | 0,050703 | 0,025636 | 0,0071029 | 0,01405 | 0,018755 | 0,025024 | -0,0047713 | 0,0080376 | -0,0080124 | 0,013222 |
| 45 | 0,0082939 | 0,0077931 | 0,0038836 | 0,0073533 | 0,0061666 | 0,016217 | -0,0011309 | 0,014826 | -0,0045654 | 0,027678 |
| 46 | 0,057451 | 0,028365 | 0,010537 | 0,014414 | 0,026124 | 0,027668 | 0,0001763 | 0,0090797 | 0,0023905 | 0,017169 |
| 47 | 0,010608 | 0,0075575 | 0,0046723 | 0,0059989 | 0,0084028 | 0,013973 | 0,0002243 | 0,012194 | -0,0012323 | 0,022988 |
| 48 | 0,063674 | 0,030759 | 0,013546 | 0,014721 | 0,032602 | 0,029917 | 0,0035903 | 0,010097 | 0,0094411 | 0,020344 |
| 49 | 0,011277 | 0,0066344 | 0,0049887 | 0,0044388 | 0,0095514 | 0,011177 | 0,0013533 | 0,0098914 | 0,0014097 | 0,018973 |
| 50 | 0,069174 | 0,03275 | 0,016202 | 0,014888 | 0,038344 | 0,031677 | 0,0064 | 0,010933 | 0,015179 | 0,022924 |
| 51 | 0,010264 | 0,004922 | 0,0048112 | 0,0025029 | 0,0096061 | 0,0075052 | 0,0022676 | 0,0074658 | 0,0035045 | 0,014713 |
| 52 | 0,0738 | 0,034301 | 0,018498 | 0,014873 | 0,043335 | 0,032887 | 0,008897 | 0,011486 | 0,020247 | 0,02487 |
| 53 | 0,0074156 | 0,0022167 | 0,0041081 | -4,28E-05 | 0,0085347 | 0,0025276 | 0,0029761 | 0,0046228 | 0,0051218 | 0,0096161 |
| 54 | 0,077476 | 0,035418 | 0,020407 | 0,014686 | 0,047516 | 0,033356 | 0,011136 | 0,01172 | 0,024784 | 0,026146 |
| 55 | 0,0022333 | -0,0019994 | 0,0028067 | -0,0037218 | 0,0062442 | -0,0047089 | 0,0035766 | 0,0009287 | 0,0064798 | 0,002872 |
| 56 | 0,080196 | 0,036146 | 0,021902 | 0,014384 | 0,050814 | 0,033795 | 0,013051 | 0,01169 | 0,028668 | 0,026826 |
| 57 | -0,0066187 | -0,0091885 | 0,0007669 | -0,010049 | 0,0026207 | -0,016933 | 0,0045039 | -0,0047385 | 0,0084608 | -0,0075146 |
| 58 | 0,081148 | 0,036137 | 0,022723 | 0,013817 | 0,052651 | 0,033211 | 0,014476 | 0,01117 | 0,031584 | 0,026421 |
| 59 | 0,1689147 | 0,0814625 | 0,0446792 | 0,037683 | 0,1026813 | 0,083355 | 0,0244481 | 0,0270785 | 0,0547072 | 0,0603566 |
| 60 | 0,073249 | 0,031825 | 0,020997 | 0,010836 | 0,048971 | 0,027117 | 0,015218 | 0,0071773 | 0,033282 | 0,01936 |

Annexe C

| | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | -0,027689 | -0,049219 | -0,049997 | -0,096229 | -0,0655665 | -0,055822 | -0,1228482 | -0,110153 | -0,0960002 | -0,06884 |
| 2 | -0,016675 | -0,011052 | -0,030463 | -0,022522 | -0,034554 | -0,021298 | -0,064927 | -0,041711 | -0,046864 | -0,041186 |
| 3 | -0,005661 | 0,027115 | -0,010929 | 0,051185 | -0,0035415 | 0,013226 | -0,0070058 | 0,026731 | 0,0022722 | -0,013532 |
| 4 | -0,015612 | -0,019896 | -0,028403 | -0,039212 | -0,033817 | -0,026541 | -0,063384 | -0,052136 | -0,045736 | -0,038132 |
| 5 | -0,012853 | 0,010388 | -0,024626 | 0,019935 | -0,0084355 | -0,000861 | -0,016656 | -0,0001187 | 0,0024848 | -0,010922 |
| 6 | -0,030715 | -0,0049204 | -0,057242 | -0,010771 | -0,04397 | -0,027698 | -0,083025 | -0,052466 | -0,038695 | -0,055407 |
| 7 | -0,01575 | 0,0007416 | -0,030309 | 0,002228 | -0,0047806 | -0,0067292 | -0,010685 | -0,011006 | 0,0079798 | -0,0033805 |
| 8 | -0,030192 | -0,014905 | -0,055952 | -0,029672 | -0,039334 | -0,03508 | -0,073988 | -0,066442 | -0,027907 | -0,049391 |
| 9 | -0,017359 | -0,0074027 | -0,03397 | -0,012559 | -0,0015492 | -0,0095048 | -0,0061591 | -0,016814 | 0,007407 | -0,0011608 |
| 10 | -0,036796 | -0,024947 | -0,068235 | -0,048007 | -0,033446 | -0,042918 | -0,064369 | -0,080527 | -0,015569 | -0,042813 |
| 11 | -0,0092004 | -0,010078 | -0,020338 | -0,017433 | 0,0049616 | -0,0038589 | 0,0055829 | -0,007871 | 0,006805 | 0,0034451 |
| 12 | -0,033751 | -0,032018 | -0,062911 | -0,060394 | -0,02169 | -0,040091 | -0,043957 | -0,075966 | -0,007315 | -0,031493 |
| 13 | -0,0036933 | -0,010161 | -0,011227 | -0,01898 | 0,0042767 | -0,0032914 | 0,0053035 | -0,007841 | 0,0040654 | 0,0004419 |
| 14 | -0,026009 | -0,035881 | -0,050823 | -0,067442 | -0,011564 | -0,033194 | -0,026034 | -0,064875 | -0,0028347 | -0,022509 |
| 15 | 0,0019655 | -0,0047131 | 0,0001177 | -0,010126 | 0,0041476 | -0,0006784 | 0,0066749 | -0,0026739 | 0,0028019 | -0,0002492 |
| 16 | -0,01642 | -0,031468 | -0,034073 | -0,060222 | -0,0059652 | -0,024913 | -0,014705 | -0,050071 | -0,0011871 | -0,015968 |
| 17 | 0,0020354 | -0,0044802 | 0,0015074 | -0,010021 | 0,0027838 | -0,0031596 | 0,0047198 | -0,0070148 | 0,0019242 | -0,0036479 |
| 18 | -0,010214 | -0,024966 | -0,022064 | -0,048761 | -0,0035969 | -0,018442 | -0,0091467 | -0,037686 | -0,0007926 | -0,011338 |
| 19 | 0,005155 | -0,0005416 | 0,0071874 | -0,0032534 | 0,0044416 | 0,0019187 | 0,0082315 | 0,0025377 | 0,0025148 | 0,0010598 |
| 20 | -0,0001273 | -0,0063261 | -0,0015453 | -0,01347 | 0,0003658 | -0,004988 | 0,0003469 | -0,010485 | 0,0004675 | -0,0043515 |
| 21 | 0,0064831 | 0,0018361 | 0,0098197 | 0,0007518 | 0,0051814 | 0,0046065 | 0,0098454 | 0,0076786 | 0,0028719 | 0,0036658 |
| 22 | 0,0018222 | -0,0056836 | 0,002248 | -0,013068 | 0,0010924 | -0,0031263 | 0,0020647 | -0,0072421 | 0,0005076 | -0,0020875 |
| 23 | 0,0063511 | 0,0039138 | 0,010373 | 0,0048544 | 0,0049487 | 0,0060191 | 0,0095962 | 0,010707 | 0,0027886 | 0,0050129 |
| 24 | 0,0040382 | -0,0023976 | 0,0071488 | -0,0072275 | 0,0019267 | -0,0011572 | 0,0041783 | -0,003196 | 0,000802 | -0,0012868 |
| 25 | 0,0055361 | 0,0051326 | 0,0096957 | 0,0078984 | 0,0044013 | 0,0065696 | 0,0086432 | 0,012139 | 0,002557 | 0,0055796 |
| 26 | 0,0040276 | 0,0008361 | 0,008296 | -0,000184 | 0,0019494 | 0,001013 | 0,004432 | 0,0015608 | 0,0008083 | 0,0005536 |
| 27 | 0,0045215 | 0,0053346 | 0,0082675 | 0,009127 | 0,0037631 | 0,0064578 | 0,0074098 | 0,012185 | 0,0022637 | 0,005605 |
| 28 | 0,0036546 | 0,0021699 | 0,0082679 | 0,0036293 | 0,0016374 | 0,001375 | 0,0039338 | 0,0027449 | 0,0006133 | 0,0005306 |
| 29 | 0,0037431 | 0,0049091 | 0,0069722 | 0,0086492 | 0,0032338 | 0,0060034 | 0,0063614 | 0,011381 | 0,0020051 | 0,0053598 |
| 30 | 0,0052156 | 0,0065531 | 0,010854 | 0,012947 | 0,0035206 | 0,0062217 | 0,0074192 | 0,012339 | 0,0019055 | 0,0048545 |
| 31 | 0,0054097 | 0,0071826 | 0,0095872 | 0,012203 | 0,0050911 | 0,0092735 | 0,0098081 | 0,017427 | 0,00329 | 0,0085235 |
| 32 | 0,0064667 | 0,0066955 | 0,014238 | 0,01349 | 0,0037991 | 0,0056758 | 0,0083878 | 0,011456 | 0,0018368 | 0,0039734 |
| 33 | 0,0050351 | 0,0068843 | 0,0084546 | 0,010544 | 0,0052756 | 0,009521 | 0,0099627 | 0,017621 | 0,0036334 | 0,0091681 |
| 34 | 0,0081138 | 0,0072145 | 0,018358 | 0,014047 | 0,0048819 | 0,0063852 | 0,010803 | 0,012714 | 0,0024018 | 0,0045731 |
| 35 | 0,0030279 | 0,0053946 | 0,0038745 | 0,004876 | 0,0041834 | 0,0078738 | 0,0075076 | 0,014011 | 0,0032871 | 0,0082372 |
| 36 | 0,0078684 | 0,0057274 | 0,020834 | 0,011206 | 0,0046833 | 0,0046578 | 0,010898 | 0,0093756 | 0,0021577 | 0,0030084 |
| 37 | 0,0010328 | 0,018394 | 0,0002286 | -0,001943 | 0,0034534 | 0,0070334 | 0,0057812 | 0,01146 | 0,0031598 | 0,0078894 |
| 38 | -0,0054314 | 0,0070384 | 0,026778 | 0,008756 | 0,0053919 | 0,0045528 | 0,013125 | 0,0088151 | 0,0027014 | 0,0031995 |
| 39 | -0,0021282 | -0,041488 | -0,0083447 | -0,019094 | 0,0015417 | 0,0053224 | 0,0012872 | 0,0053738 | 0,0022944 | 0,0062945 |
| 40 | 0,052611 | 0,0055912 | 0,040812 | 0,0065984 | 0,004879 | 0,0028332 | 0,015036 | 0,0055917 | 0,0025766 | 0,0015918 |
| 41 | 0,51077 | 0,052494 | -0,017087 | -0,12113 | -0,0007543 | 0,017733 | -0,0032094 | -0,0025793 | 0,0014792 | 0,0050218 |
| 42 | -0,073474 | 0,50547 | 0,1364 | -0,014526 | -0,0094318 | 0,003709 | 0,019038 | 0,0020066 | 0,0027603 | 0,0009347 |
| 43 | -0,011194 | 0,073519 | 0,47885 | -0,025034 | -0,0034927 | -0,042019 | -0,01107 | -0,01976 | 7,69E-05 | 0,0035912 |
| 44 | -0,065977 | 0,0071234 | -0,0008136 | 0,4918 | 0,047545 | 0,0008302 | 0,031352 | -0,0015973 | 0,0020655 | -0,000942 |
| 45 | -0,0064283 | 0,028026 | -0,025274 | 0,053559 | 0,49535 | 0,026985 | -0,01977 | -0,12222 | -0,0018792 | 0,0161 |
| 46 | -0,020363 | 0,0045972 | -0,042266 | -0,0034149 | -0,078405 | 0,50779 | 0,12476 | -0,025973 | -0,012873 | -0,0004934 |
| 47 | -0,0059165 | 0,018764 | -0,014165 | 0,034588 | -0,012615 | 0,071897 | 0,4487 | -0,063648 | -0,0038759 | -0,04285 |
| 48 | -0,011641 | 0,0044303 | -0,020622 | 0,0032991 | -0,071784 | -0,0019044 | -0,01103 | 0,48652 | 0,04303 | -0,004597 |
| 49 | -0,004061 | 0,014564 | -0,0096381 | 0,026642 | -0,0076997 | 0,026851 | -0,027418 | 0,049971 | 0,43744 | -0,031685 |
| 50 | -0,0074553 | 0,0051362 | -0,011649 | 0,0065477 | -0,02622 | -0,0028062 | -0,054736 | -0,022597 | -0,080996 | 0,49859 |
| 51 | -0,0022483 | 0,011907 | -0,005749 | 0,021917 | -0,0068722 | 0,018264 | -0,015974 | 0,033057 | -0,012212 | 0,070896 |
| 52 | -0,004716 | 0,0058577 | -0,0059046 | 0,009039 | -0,018164 | -0,0030183 | -0,033238 | -0,014917 | -0,076368 | -0,018067 |
| 53 | -0,000284 | 0,0098195 | -0,0018774 | 0,01841 | -0,0043518 | 0,015457 | -0,01049 | 0,028094 | -0,0068888 | 0,028408 |
| 54 | -0,0025132 | 0,006462 | -0,0013799 | 0,011021 | -0,014519 | -0,0024426 | -0,025334 | -0,011742 | -0,030548 | -0,013481 |
| 55 | 0,0020988 | 0,0079313 | 0,0025347 | 0,015414 | -0,0013406 | 0,015294 | -0,0047311 | 0,02864 | -0,0055077 | 0,023483 |
| 56 | -0,0006302 | 0,0068907 | 0,002424 | 0,012524 | -0,012474 | -0,0017895 | -0,020961 | -0,0094685 | -0,023317 | -0,013079 |
| 57 | 0,005685 | 0,0061504 | 0,0088661 | 0,012879 | 0,0029714 | 0,018165 | 0,0028634 | 0,035482 | -0,0018887 | 0,028276 |
| 58 | 0,0011262 | 0,0068555 | 0,0059107 | 0,013116 | -0,010659 | -0,0011498 | -0,017278 | -0,0074279 | -0,019699 | -0,011801 |
| 59 | -0,0034326 | 0,0075606 | 0,0029553 | 0,013353 | -0,0242894 | -0,0204646 | -0,0374194 | -0,0503378 | -0,0375093 | -0,051878 |
| 60 | 0,0051726 | 0,003868 | 0,013739 | 0,0091208 | -0,0040663 | -0,0002087 | -0,0048994 | -0,0025863 | -0,011712 | -0,0044036 |

Annexe C

| | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | -0,1814504 | -0,136007 | -0,0838372 | -0,088257 | -0,161064 | -0,170245 | -0,0321837 | -0,155596 | -0,0258899 | -0,09767 |
| 2 | -0,088906 | -0,078903 | -0,038446 | -0,059337 | -0,074561 | -0,11199 | -0,013467 | -0,098921 | -0,011536 | -0,066286 |
| 3 | 0,0036384 | -0,021799 | 0,0069452 | -0,030417 | 0,011942 | -0,053735 | 0,0052497 | -0,042246 | 0,0028179 | -0,034902 |
| 4 | -0,086527 | -0,074107 | -0,035562 | -0,047331 | -0,069249 | -0,090458 | -0,011548 | -0,072403 | -0,010121 | -0,047313 |
| 5 | 0,0029112 | -0,018361 | 0,008213 | -0,0077426 | 0,013501 | -0,014458 | 0,0055269 | -0,0033402 | 0,0027838 | -0,0055525 |
| 6 | -0,075085 | -0,10317 | -0,016197 | -0,057319 | -0,036157 | -0,10876 | -0,0002345 | -0,064727 | -0,0032368 | -0,048433 |
| 7 | 0,012205 | -0,0058416 | 0,0079724 | 0,0052929 | 0,014067 | 0,00832 | 0,004078 | 0,0092724 | 0,0021546 | 0,0049988 |
| 8 | -0,055466 | -0,092877 | -0,0085416 | -0,039114 | -0,021533 | -0,076917 | -8,80E-05 | -0,038085 | -0,0017631 | -0,029314 |
| 9 | 0,011151 | -0,0034062 | 0,0048603 | 0,0044974 | 0,0090669 | 0,0068745 | 0,0029424 | 0,0053216 | 0,0013139 | 0,0029094 |
| 10 | -0,034137 | -0,082444 | -0,0030019 | -0,026646 | -0,0099997 | -0,055252 | 0,0004289 | -0,024214 | -0,0006926 | -0,019415 |
| 11 | 0,011617 | 0,0048431 | 0,0030555 | 0,0045445 | 0,006445 | 0,007999 | 0,0021621 | 0,0037912 | 0,0008763 | 0,0022968 |
| 12 | -0,018232 | -0,062856 | -0,0010046 | -0,017628 | -0,0045096 | -0,037947 | 0,0002456 | -0,015811 | -0,0002967 | -0,012935 |
| 13 | 0,0072407 | -0,0004612 | 0,0017847 | 0,0008263 | 0,003857 | 0,0011735 | 0,001678 | -0,0003386 | 0,0005644 | -0,0007133 |
| 14 | -0,0085504 | -0,046595 | -0,0001396 | -0,012182 | -0,001641 | -0,026802 | 0,000382 | -0,011151 | -6,50E-05 | -0,0092511 |
| 15 | 0,0054926 | -0,0009874 | 0,0011841 | -0,0007884 | 0,0026871 | -0,001517 | 0,0012971 | -0,0022831 | 0,0004043 | -0,0021102 |
| 16 | -0,0042221 | -0,033736 | 1,07E-05 | -0,0085938 | -0,0007016 | -0,019077 | 0,0002639 | -0,0078833 | -1,92E-05 | -0,0065542 |
| 17 | 0,0038236 | -0,0073078 | 0,0009005 | -0,0035294 | 0,0019933 | -0,0069199 | 0,0010705 | -0,0051942 | 0,0003317 | -0,0044043 |
| 18 | -0,0027378 | -0,024272 | -0,0001041 | -0,005891 | -0,0006278 | -0,013257 | 4,50E-05 | -0,0051109 | -5,34E-05 | -0,0042257 |
| 19 | 0,0053001 | 0,0019445 | 0,0009951 | -0,000162 | 0,0023762 | -4,53E-05 | 0,0012464 | -0,0016586 | 0,0003607 | -0,0015343 |
| 20 | 0,0008281 | -0,0088634 | 0,0003491 | -0,0031856 | 0,0006716 | -0,0065374 | 0,0003246 | -0,0037455 | 0,0001125 | -0,0031565 |
| 21 | 0,0061191 | 0,0070662 | 0,0010894 | 0,0018049 | 0,0026505 | 0,0039323 | 0,0014534 | 0,0004683 | 0,0004031 | 0,0001877 |
| 22 | 0,0011367 | -0,0045864 | 0,0001973 | -0,0013138 | 0,000488 | -0,0028417 | 8,28E-05 | -0,0014039 | 5,53E-05 | -0,0012131 |
| 23 | 0,0059522 | 0,0098015 | 0,0010584 | 0,0029267 | 0,0025749 | 0,0061847 | 0,0015564 | 0,0018334 | 0,000404 | 0,0013168 |
| 24 | 0,0019539 | -0,0026982 | 0,0003033 | -0,0011589 | 0,0007877 | -0,0023062 | 7,98E-05 | -0,0014984 | 8,65E-05 | -0,0013068 |
| 25 | 0,0054386 | 0,011 | 0,0009859 | 0,0034887 | 0,0023803 | 0,0072948 | 0,0016232 | 0,0026253 | 0,0003907 | 0,001988 |
| 26 | 0,0019966 | 0,0011048 | 0,000258 | 0,0001679 | 0,0007222 | 0,0004321 | 8,33E-05 | -2,63E-05 | 7,62E-05 | -8,25E-05 |
| 27 | 0,0047805 | 0,011084 | 0,0008911 | 0,0036621 | 0,0021286 | 0,0076023 | 0,0016492 | 0,0030092 | 0,0003679 | 0,0023297 |
| 28 | 0,0016097 | 0,0012503 | 0,0001813 | 5,72E-05 | 0,0005435 | 0,000028 | -8,72E-05 | -0,0001186 | 4,35E-05 | -0,0001428 |
| 29 | 0,0042057 | 0,01058 | 0,0008049 | 0,0036271 | 0,0019041 | 0,0074784 | 0,0016621 | 0,0031476 | 0,000346 | 0,0024675 |
| 30 | 0,004218 | 0,0098705 | 0,0007124 | 0,0030285 | 0,0017699 | 0,0064046 | 0,0011309 | 0,0025565 | 0,0002814 | 0,0019843 |
| 31 | 0,0068007 | 0,016736 | 0,0013493 | 0,0058783 | 0,0031495 | 0,012059 | 0,0027375 | 0,0051838 | 0,0005747 | 0,0040545 |
| 32 | 0,004264 | 0,0082569 | 0,0006381 | 0,0022464 | 0,0016682 | 0,0048907 | 0,0005759 | 0,001776 | 0,0002181 | 0,0013325 |
| 33 | 0,0073806 | 0,01786 | 0,0015499 | 0,0065575 | 0,0035464 | 0,013337 | 0,0032756 | 0,0059706 | 0,0006701 | 0,0046747 |
| 34 | 0,0055513 | 0,0094297 | 0,0008454 | 0,0026189 | 0,0021936 | 0,0056696 | 0,0006315 | 0,0020847 | 0,0002765 | 0,0015305 |
| 35 | 0,006453 | 0,015813 | 0,0015095 | 0,0062601 | 0,0033328 | 0,012557 | 0,0036054 | 0,0059554 | 0,0006869 | 0,0046883 |
| 36 | 0,0051833 | 0,0063312 | 0,0007215 | 0,0015291 | 0,0019482 | 0,0034325 | -2,17E-05 | 0,0011133 | 0,0001904 | 0,0007215 |
| 37 | 0,005997 | 0,014879 | 0,0015779 | 0,0063539 | 0,0033629 | 0,012581 | 0,0043432 | 0,006278 | 0,000769 | 0,0049772 |
| 38 | 0,0064287 | 0,0065815 | 0,0009759 | 0,0018436 | 0,0025393 | 0,0039867 | 0,000179 | 0,001536 | 0,0002739 | 0,0009991 |
| 39 | 0,0039213 | 0,011312 | 0,0013665 | 0,0055739 | 0,0027058 | 0,010786 | 0,0050487 | 0,0057745 | 0,0007801 | 0,004668 |
| 40 | 0,006575 | 0,0034383 | 0,000909 | 0,0007496 | 0,0024686 | 0,0017409 | -0,0005948 | 0,0006006 | 0,0001959 | 0,0001855 |
| 41 | 0,0019169 | 0,007876 | 0,0011762 | 0,0049188 | 0,0020942 | 0,0092022 | 0,0062907 | 0,0053103 | 0,000848 | 0,0044285 |
| 42 | 0,0076399 | 0,0018083 | 0,0011124 | 0,0005997 | 0,0029647 | 0,0012663 | -0,0001781 | 0,0007123 | 0,0002977 | 0,0002211 |
| 43 | -0,0016279 | 0,0022617 | 0,0006805 | 0,0036629 | 0,000765 | 0,0062741 | 0,0077226 | 0,0041142 | 0,0008569 | 0,0037044 |
| 44 | 0,0089995 | -0,0018624 | 0,0010316 | -0,0007497 | 0,0030965 | -0,0014684 | -0,0011035 | -0,0004462 | 0,0002274 | -0,0008069 |
| 45 | -0,0055643 | -0,0055931 | 0,0001567 | 0,0025715 | -0,0006788 | 0,0031637 | 0,010156 | 0,0028655 | 0,000947 | 0,0030315 |
| 46 | 0,011739 | -0,0068435 | 0,0009073 | -0,001777 | 0,0034472 | -0,0039101 | -0,0001676 | -0,001228 | 0,0003615 | -0,0014247 |
| 47 | -0,011902 | -0,021373 | -0,000586 | 0,0018795 | -0,0028943 | -0,0009951 | 0,013236 | 0,0011977 | 0,0010083 | 0,0021603 |
| 48 | 0,022824 | -0,011593 | 0,0001122 | -0,0035077 | 0,0044496 | -0,0074682 | -0,0013107 | -0,0028728 | 0,0003317 | -0,0028969 |
| 49 | -0,019553 | -0,12274 | -0,0019074 | 0,015111 | -0,0056207 | -0,0074688 | 0,018781 | -0,0005991 | 0,0012516 | 0,0013361 |
| 50 | 0,11456 | -0,040817 | -0,015309 | -0,0029217 | 0,0063022 | -0,013295 | 0,0010547 | -0,0050052 | 0,0006517 | -0,0045015 |
| 51 | 0,33246 | -0,14959 | -0,0028569 | -0,042326 | -0,0099753 | -0,020191 | 0,026899 | -0,0018523 | 0,0015869 | 0,0007876 |
| 52 | -0,0178 | 0,46916 | 0,03895 | -0,008171 | 0,015744 | -0,018843 | -0,0007721 | -0,0071528 | 0,0009692 | -0,0067137 |
| 53 | -0,026027 | 0,04791 | 0,18884 | -0,16845 | -0,015712 | -0,11775 | 0,043188 | 0,0092681 | 0,0023868 | -0,0001058 |
| 54 | -0,065862 | -0,060196 | -0,080504 | 0,43117 | 0,10217 | -0,077766 | 0,0015981 | -0,0060933 | 0,0031919 | -0,010205 |
| 55 | -0,013713 | 0,041622 | -0,010229 | 0,068844 | -0,24787 | -0,36201 | 0,070588 | -0,053028 | 0,0022066 | -0,0009341 |
| 56 | -0,043934 | -0,046142 | -0,080542 | -0,089977 | -0,012537 | 0,44747 | 0,045782 | -0,0059621 | 0,0076649 | -0,016644 |
| 57 | -0,0066928 | 0,053352 | -0,004925 | 0,038389 | -0,022849 | 0,12429 | -1,5085 | -0,69272 | -2,0419 | 0,033859 |
| 58 | -0,036251 | -0,03996 | -0,033375 | -0,045547 | -0,075343 | 0,052787 | -0,087047 | 0,58728 | 0,20616 | -0,041669 |
| 59 | -0,0658092 | -0,133272 | -0,061825 | -0,129483 | -0,127837 | -0,018716 | 1,334406 | 1,86728 | 0,58042 | 0,70336 |
| 60 | -0,021323 | -0,018978 | -0,022269 | -0,024809 | -0,041716 | 0,035669 | -0,39523 | -0,10269 | 0,01 | -0,012118 |

ملخص:

في إطار هذه المذكرة، هدفنا يرمي إلى دراسة حلول القضايا المتعلقة بمرونة القطع الميكانيكية المتصدعة ذات الأبعاد المحورية وهذا باستخدام طريقة العناصر المنتهية، فيما يعترضنا إشكالان أساسيان يتعلقان بهته الطريقة، الأولى تتمثل في التقييم الدقيق للتكامل في الحالات الاستثنائية (الخاصة) والثانية تتعرض لخواص هته الطريقة و إمكانية تطبيقها على الأجسام ذات الأبعاد المحورية، سوف نرى مثالين الأول يخص أسطوانة ذات جدار سميك تحت الضغط نقر بها إلي جسم ثنائي الأبعاد(صفيحة) و نعالجها على هذا الأساس و الثاني كرة جوفاء سميكة تحت الضغط نعالجها على أساس جسم ذو أبعاد محورية.

Résumé:

L'objet de ce travail consiste à étudier les milieux fissurés axisymétriques par les équations intégrales de frontière. Les deux principales difficultés inhérentes à l'utilisation de cette méthode sont d'une part, la nécessité de disposer d'une procédure efficace d'évaluation des intégrales singulières et d'autre part, l'obligation d'adapter un algorithme d'intégration de comportement élastoplastique de type explicite à la formulation des équations intégrales du problème. Les solutions utilisées sont décrites puis appliquées à la résolution de problèmes élastoplastiques axisymétriques. Deux problèmes sont traités: le premier cas traité est un cylindre à paroi épaisse, pressurisé, assimilé à un problème bidimensionnel (plaque). Le second cas concerne une sphère creuse, à paroi épaisse, pressurisée, traitée autant qu'un problème axisymétrique.

Abstract:

This work aims at studying the solving of the fracture in axisymmetric problems by BEM (boundary elements methods). There are two main difficulties linked with this method. First an efficient procedure for the accurate evaluation of the singular integrals is needed. Then the existing elastoplastic behaviour integration algorithm will have to be adapted so as to take into account the boundary integral equations formulation. The solutions developed will be described before being employed in the solving elastoplastic problem (sheet metal) as well as an axisymmetric problem, two problems are solved. The first deals with the stresses in an internally pressurized hollow thick-walled cylinder treated as a two-dimensional plane strain geometry and the second deals with a pressurized hollow sphere treated as an axisymmetric problem.

Mots-clefs : Méthode des éléments de frontière, éléments axisymétriques par les éléments frontières.

Keywords: Boundary elements method, solving of the axisymmetric problems by BEM (boundary elements methods).