

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université M'hamed BOUGARA Boumerdes



Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
PG : Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique

**Mémoire**  
**Présenté pour l'obtention du diplôme de**  
**MAGISTER**

**TAMSAOUT Toufik**

**Thème :**

**Effets des caractéristiques spatio-temporelles  
sur les conditions d'apparition des instabilités  
entre sphères coaxiales en rotations**

**Soutenu publiquement le : 17 Mai 2006**

**Devant le jury composé de :**

|                       |                              |              |                           |
|-----------------------|------------------------------|--------------|---------------------------|
| <b>M. BOUHADEF</b>    | <b>Professeur</b>            | <b>USTHB</b> | <b>Président</b>          |
| <b>A. BOUABDALLAH</b> | <b>Professeur</b>            | <b>USTHB</b> | <b>Directeur de thèse</b> |
| <b>A. MAHAMDIA</b>    | <b>Maître de conférences</b> | <b>USTHB</b> | <b>Examineur</b>          |
| <b>A. NOUR</b>        | <b>Professeur</b>            | <b>UMBB</b>  | <b>Examineur</b>          |
| <b>R. SACI</b>        | <b>Maître de conférences</b> | <b>UMBB</b>  | <b>Examineur</b>          |

Année universitaire 2005/2006



*Au nom de dieu, le tout  
miséricordieux, le très miséricordieux*

*Lis, au non de ton seigneur  
qui a créé (1) qui a créé  
l'homme d'une adhérence  
(3) Lis ! Ton seigneur est le  
très noble, (4) Qui a  
enseigné par le calame, (5)  
a enseigné à l'homme ce qu'il  
ne savait pas (6).*

## Dédicaces

*Avant tout propos, je tiens à rendre grâce à Dieu qui m'a guidé sur la bonne voie.*

*Je tiens rendre hommage à mon père, et à celle qui a su et avoir pu faire de moi l'homme que je suis, « à maman (Femma) », ainsi qu'à mes Grands-parents « Jedi et Jéda », mon oncle Said, mon oncle Poucef, mon frère Djillali et ma sœur Roza pour leurs indéfectible assistance et leurs soutien tout le long de ma formation. Les mots ne peuvent exprimer mon entière gratitude et ma reconnaissance pour tous leurs sacrifices.*

*. Encore une fois, un grand Merci à toute ma famille à qui je dédie ce présent travail.*

*Je pris dieu, de leurs accorder longue vie et bonne santé.*

*Lotfi*

## Remerciements

*J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur Ahcène Bouabdallah qui, par son savoir faire et son expérience dans le domaine, n'a cessé de m'encourager et de m'orienter assidûment par ses conseils et recommandations pertinentes pour venir à bout de ce travail. Egalement, je n'oublie pas son accueil chaleureux au sein de son laboratoire LTSE/USTHB. Ainsi que, sa gentillesse de m'avoir offert toutes les conditions de travail et la totale confiance mise en moi.*

*Je remercie chaleureusement Monsieur le Dr. M. Bouhadeb de m'avoir fait l'honneur de Présider mon jury et je lui suis très reconnaissant. Mes remerciements sincères s'adressent au Dr. A. Nour qui m'a accueilli au sein de son laboratoire, ainsi que Messieurs A. Mahamdia et R. Saci, Maître de conférences, pour leur gentillesse et pour s'être intéressés à mon travail.*

*Et enfin, je tiens à remercier, mes amis et collègues Mahfoud, Karim, Ahmed, Locif et Saïda pour leur soutien moral et tout les moments inoubliables qu'on a enduré et partagé durant notre cursus commun, sans omettre mes autres collègues des deux laboratoires LDMV/Boumerdès et LTSE/UTHB.*

*Je pris dieu, de leurs accorder longue vie et bonne santé.*

*Merci à Tous*

*Toufik*

# SOMMAIRE

|                                    |          |
|------------------------------------|----------|
| <b>INTRODUCTION GENERALE .....</b> | <b>1</b> |
|------------------------------------|----------|

## **PARTIE I : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DE LA TRANSITION LAMINAIRE–TURBULENT DANS LE SYSTEME D’ECOULEMENT DE TAYLOR–COUETTE SPHERIQUE**

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUCTION .....                                                                                 | 6  |
| I. Phénoménologie et caractéristique de l’écoulement .....                                         | 7  |
| 1. Phénoménologie .....                                                                            | 7  |
| 2. Paramètre de contrôle .....                                                                     | 8  |
| 3. Etats d’écoulement .....                                                                        | 9  |
| 4. Diagramme de stabilité .....                                                                    | 10 |
| II. APPROCHE ANALYTIQUE .....                                                                      | 13 |
| III. APPROCHE NUMERIQUE .....                                                                      | 14 |
| IV. APPROCHE EXPERIMENTALE .....                                                                   | 16 |
| V. ETUDE DES INSTABILITES EN REGIME DE TRANSITION .....                                            | 20 |
| 1. Conditions d’apparitions des instabilités dans des espaces<br>annulaires petits et moyens ..... | 20 |
| 2. Bifurcation de mouvement .....                                                                  | 20 |
| 3. Conditions d’apparitions des instabilités dans des espaces<br>annulaires larges .....           | 22 |
| VI. ETUDE DE L’INFLUENCE DES EFFETS SUR L’ECOULEMENT .....                                         | 24 |
| 1. Effet de géométrie .....                                                                        | 24 |
| a. Effet du facteur géométrique $\delta$ .....                                                     | 24 |
| b. Effet de l’excentricité .....                                                                   | 25 |
| 2. Effet dynamique (débit axial) .....                                                             | 27 |
| 3. Effet du champ de température .....                                                             | 29 |
| 4. Effet rhéologique (viscoélasticité) .....                                                       | 34 |
| 5. Effet du champ magnétique .....                                                                 | 36 |
| V. CONCLUSION .....                                                                                | 37 |

## PARTIE II : ETUDE THEORIQUE

### CHAPITRE 1 : MISE EN EQUATION DU SYSTEME D'ÉCOULEMENT

|                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUCTION .....                                                                   | 38 |
| I. CARACTERISATION DU SYSTEME D'ÉCOULEMENT .....                                     | 39 |
| II. MISE EN EQUATION DU MOUVEMENT .....                                              | 40 |
| 1. Equation de la continuité.....                                                    | 40 |
| 2. Equations de Navier–Stokes.....                                                   | 40 |
| 3. contribution de la gravité $\bar{g}$ .....                                        | 41 |
| 4. Condition aux limites .....                                                       | 41 |
| III. THEORIE LINEAIRE.....                                                           | 41 |
| 1. Champ moyen .....                                                                 | 42 |
| 2. Champ perturbé.....                                                               | 43 |
| V. SYSTEME D'EQUATIONS ADIMENSIONNEES .....                                          | 44 |
| 1. Grandeurs adimensionnées .....                                                    | 44 |
| 2. Champ moyen .....                                                                 | 45 |
| 3. Champ perturbé.....                                                               | 47 |
| 4. Etude adimensionnelle dans le cas d'un dispositif incliné partiellement rempli .. | 48 |
| 5. Nouvelle forme des équations adimensionnelles .....                               | 49 |
| V. formulation de l'interaction de la surface libre sur l'écoulement.....            | 53 |
| VI. CONCLUSION .....                                                                 | 57 |

### CHAPITRE 2 : ETUDE PHENOMENOLOGIQUE ET NUMERIQUE

|                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUCTION .....                                                                                               | 58 |
| I. ETUDE PHENOMENOLOGIQUE .....                                                                                  | 59 |
| 1. Détermination du champ moyen des vitesses .....                                                               | 59 |
| 2. Validation du model phénoménologique .....                                                                    | 63 |
| II. APPROCHE NUMERIQUE.....                                                                                      | 65 |
| 1. Maillage du domaine de calcul .....                                                                           | 65 |
| 2. Conditions aux limites .....                                                                                  | 66 |
| 3. Effet de l'inclinaison $\alpha$ sur les cellules de Taylor – cas d'un<br>système d'écoulement en charge ..... | 67 |
| 4. Distribution de la vitesse tangentielle W .....                                                               | 70 |
| III. CONCLUSION .....                                                                                            | 73 |

## PARTIE III : ETUDE EXPERIMENTALE

### CHAPITRE 1 : DESCRIPTION DU DISPOSITIF ET CONDITIONS EXPERIMENTALES

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| INTRODUCTION .....                                    | 74 |
| I. ASPECT MECANIQUE .....                             | 75 |
| 1. Description du dispositif expérimental .....       | 75 |
| a. Système d'écoulement .....                         | 75 |
| b. système d'inclinaison .....                        | 78 |
| 2. Mesure de l'angle d'inclinaison .....              | 80 |
| 3. Mesure de la hauteur du fluide .....               | 80 |
| II. ASPECT ELECTRIQUE .....                           | 80 |
| 1. Motorisation .....                                 | 80 |
| 3. Mesure de la vitesse de rotation $\Omega_f$ .....  | 81 |
| 2. Mesure de la température du fluide .....           | 81 |
| III. ASPECT PHYSICO-CHIMIQUE .....                    | 81 |
| 1. Mise en œuvre du produit de la visualisation ..... | 81 |
| 2. Mesure de la viscosité .....                       | 82 |
| 3. Mesure de la densité du fluide .....               | 83 |
| IV. ASPECT OPTIQUE .....                              | 84 |
| V. PROCEDURE D'ESSAIS .....                           | 86 |
| VI. CONCLUSION .....                                  | 90 |

### CHAPITRE 2 : ETUDE PHOTOMETRIQUE

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| INTRODUCTION .....                                                                                     | 91  |
| I. ESSAIS DYNAMIQUES .....                                                                             | 92  |
| II. ETUDE QUALITATIVE : .....                                                                          | 97  |
| 1. Effet de l'inclinaison $\alpha$ pour un système totalement rempli $\Gamma = \Gamma_{max}$ .....     | 97  |
| 2. Effet de l'inclinaison $\alpha$ pour un taux de remplissage $\Gamma$ fixé: .....                    | 99  |
| 3. Effet taux de remplissage pour un angle d'inclinaison $\alpha$ fixé .....                           | 111 |
| III. ETUDE QUANTITATIVE .....                                                                          | 117 |
| 1. Variation des nombres critiques de Taylor $Tc$ en fonction<br>du taux de remplissage $\Gamma$ ..... | 117 |

|                                                                                                                                                           |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2. Etude de la variation des nombres critiques de Taylor $T_c$ en fonction de l'angle d'inclinaison $\alpha$ .....                                        | 123        |
| IV. ETUDE DU MOUVEMENT DANS LE CAS D'UN DISPOSITIF VERTICAL.....                                                                                          | 127        |
| 1. Etude de la transition laminaire– turbulent en fonction de $\Gamma$ pour $\alpha=0$ .....                                                              | 127        |
| 2. Etude des caractéristiques spatio–temporelle de l'onde azimutale en fonction de $Ta$ pour un facteur d'aspect $\Gamma$ donné en système vertical ..... | 130        |
| V. IDENTIFICATION DU CHEMINEMENT ORDRE–CHAOS .....                                                                                                        | 138        |
| 1. Dispositif d'écoulement en charge .....                                                                                                                | 138        |
| 2. Dispositif d'écoulement à surface libre .....                                                                                                          | 139        |
| VI. OBSERVATION DE NOUVEAUX PHENOMENES.....                                                                                                               | 142        |
| VII. CONCLUSION .....                                                                                                                                     | 153        |
| <b>CONCLUSION GENERALE .....</b>                                                                                                                          | <b>154</b> |

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

## ANNEXES

# NOMENCLATURE

## o Caractéristiques du fluide

|            |                         |
|------------|-------------------------|
| $\rho$     | : Masse volumique       |
| $\mu$      | : Viscosité dynamique   |
| $\nu$      | : Viscosité cinématique |
| $T_\theta$ | : Température du fluide |

## o Caractéristiques géométriques

|                                                  |                                                  |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $R_1$                                            | : Rayon de la sphère intérieure                  |
| $R_2$                                            | : Rayon de la sphère extérieure                  |
| $d = R_2 - R_1$                                  | : Espace annulaire ou gap                        |
| $\eta = \frac{R_2}{R_1}$                         | : Rapport des rayons ;                           |
| $\delta = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{d}{R_1}$ | : Jeu radial                                     |
| $H$                                              | : Hauteur de remplissage                         |
| $\Gamma = \frac{H}{d}$                           | : Facteur d'aspect ou Taux de remplissage        |
| $\alpha$                                         | : Angle d'inclinaison du dispositif d'écoulement |
| $\alpha_c$                                       | : Angle critique de relaminarisation             |
| $\alpha_c^*$                                     | : Angle critique de disparition d'un état        |

## o Notation utilisée dans la mise en équation et l'étude théorique

|                              |                                                                  |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $V_1$                        | : Vitesse linéaire de la sphère intérieure en rotation           |
| $\Omega_1$                   | : Vitesse angulaire de la sphère intérieure                      |
| $\Omega_2$                   | : Vitesse angulaire de la sphère extérieure                      |
| $(r, \theta, \varphi)$       | : Coordonnées sphériques (radiale, méridionale, tangentielle)    |
| $\vec{g}$                    | : Accélération de pesanteur ou gravité                           |
| $(U_r, U_\theta, U_\varphi)$ | : Composantes de la vitesse (radiale, méridionale, tangentielle) |

|                                                      |                                                                                           |
|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(\bar{V}_r, \bar{V}_\theta, \bar{V}_\varphi)$       | : Composantes de la vitesse moyenne radiale, méridionale, tangentielle                    |
| $(U, V, W)$                                          | : Composantes de la vitesse moyenne radiale, méridionale, tangentielle (phénoménologique) |
| $(v_r, v_\theta, v_\varphi)$                         | : Composantes de la vitesse de perturbation                                               |
| $\bar{P}$                                            | : Pression moyenne                                                                        |
| $p$                                                  | : Perturbation de pression                                                                |
| $t$                                                  | : Temps                                                                                   |
| $(\bar{V}_r^*, \bar{V}_\theta^*, \bar{V}_\varphi^*)$ | : Composantes adimensionnées de la vitesse moyenne                                        |
| $(v_r^*, v_\theta^*, v_\varphi^*)$                   | : Composantes adimensionnées de la vitesse de perturbation                                |
| $\bar{P}^*$                                          | : Pression adimensionnée moyenne                                                          |
| $p^*$                                                | : Pression adimensionnée de perturbation                                                  |
| $t^*$                                                | : Temps adimensionné                                                                      |
| $Ta$                                                 | : Nombre de Taylor                                                                        |
| $Re_{Cyl}$                                           | : Nombre de Reynolds classique (cylindrique)                                              |
| $Re_{Sph}$                                           | : Nombre de Reynolds adopté pour le Taylor–Couette sphérique                              |
| $Ta_C$                                               | : Nombre de Taylor et de Reynolds critiques                                               |
| $Fr$                                                 | : Nombre de Froude                                                                        |
| $Fr^*$                                               | : Nombre de Froude associé à l’inclinaison                                                |
| $N_B$                                                | : Nouveau nombre adimensionnel : paramètre d’influence globale                            |
| $\Pi(r, \theta, \varphi)$                            | : Pression adimensionnée modifiée en coordonnées sphériques                               |
| $s$                                                  | : Paramètre de pente                                                                      |
| <b>o Nombres de Taylor Critiques</b>                 |                                                                                           |
| $Tc_1$                                               | : Nombre de Taylor correspondant à l’apparition de l’onde de Taylor                       |
| $Tc_2$                                               | : Nombre de Taylor correspondant à l’apparition du mode spiral                            |
| $Tc_3$                                               | : Nombre de Taylor correspondant à l’apparition du mode spirale et le Wavy Mode combiné   |
| $Tc_4$                                               | : Nombre de Taylor correspondant à l’apparition du Spiral Wavy Mode                       |

|                                                          |                                                                                          |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_{C_w}$                                                | : Nombre de Taylor correspondant au Wavy Mode                                            |
| $T'_1$                                                   | : Nombre de Taylor correspondant à l'apparition des fluctuations au voisinage des pôles  |
| $T'_2$                                                   | : Nombre de Taylor correspondant à l'apparition des fluctuations chaotiques              |
| $T'_C$                                                   | : Nombre de Taylor correspondant à l'apparition du chaos                                 |
| $T_D$                                                    | : Nombre de Taylor correspondant à l'apparition de la turbulence complètement développée |
| <b>o Caractéristique de l'onde azimutale (Wavy Mode)</b> |                                                                                          |
| $\omega$                                                 | : Vitesse de phase                                                                       |
| $\lambda_z$                                              | : Longueur d'onde axiale                                                                 |
| $\lambda_c$                                              | : Longueur d'onde axiale critique à l'apparition de l'onde de Taylor                     |
| $n$                                                      | : Nombre de cellules de Taylor                                                           |
| $m$                                                      | : Nombre d'onde circonférentielle ou nombre d'onde azimutale                             |
| <b>o Etat d'instabilité et Régime étudiés</b>            |                                                                                          |
| RLS                                                      | : Régime Laminaire Stable                                                                |
| RVT ou TVF                                               | : Régime des Vortex de Taylor (cellules de Taylor)                                       |
| MS ou SM                                                 | : Mode Spiral                                                                            |
| WM+MS                                                    | : Mode Spiral + Wavy Mode                                                                |
| WMS ou SMW                                               | : Wavy Mode Spiral                                                                       |

## INTRODUCTION GENERALE

L'objectif lié à l'étude des écoulements d'un fluide réside dans la prévision des phénomènes d'instabilités qui prennent naissance en son sein et de confronter les résultats de la théorie à l'expérience à travers les propriétés caractéristiques du mouvement. Par conséquent, une explication satisfaisante des phénomènes d'instabilités ainsi qu'une compréhension globale permettant d'établir une théorie capable de prédire la plupart des mouvements secondaires en liaison avec la naissance du chaos et le déclenchement de la turbulence constitue, à ce jour, la préoccupation majeure de l'hydrodynamique physique. Cependant, le développement de nouveaux codes de calcul ont conduit, au cours des dernières décennies, à l'avènement des simulations numériques basées sur la puissance de calcul permettant d'aborder des processus physiques liés à caractère de plus en plus complexe. Ainsi, grâce à l'utilisation d'outils numériques on peut choisir des dispositifs simples pour en tirer des propriétés conduisant à une meilleure compréhension d'un phénomène physique donné tels que l'écoulement plan, entre parois parallèles, conduite circulaire ou rectangulaire, etc....

En revanche, l'examen des écoulements entre cylindres coaxiaux, entre sphères coaxiales, etc.... restent encore d'accès difficile en raison du caractère tridimensionnel et instationnaire du processus de transition qui est phénoménologiquement plus complexe que dans les géométries simples évoquées précédemment.

Actuellement, la compréhension de la transition laminaire–turbulent se base essentiellement sur l'étude des instabilités thermo–convectives de type Rayleigh–Bénard ainsi que dans les systèmes confinés rotatifs tel que l'écoulement entre cylindres coaxiaux tournants ou mouvement de Taylor–Couette. En raison de l'intérêt grandissant de ce dernier, on porte particulièrement notre attention sur l'écoulement analogue d'un fluide visqueux incompressible, compris entre deux sphères concentriques, dont la sphère intérieure est en rotation et l'extérieure est au repos.

Fondamentalement, ce type de système peut servir comme exemple de modélisation des phénomènes naturels à grande échelle relevant de la Physique de l'Atmosphère (Météorologie) citant l'exemple des tourbillons de Hadley (figure 1) et des perturbations anticycloniques ou cycloniques (Figure 2) qui couvrent la surface du globe (gulf stream figure 3). Egalement en Astrophysique pour étudier la dynamique atmosphérique des planètes l'exemple de la grande tache rouge de Jupiter (Figure 4), des formations similaires mais plus petites ont été également observées sur Saturne et Neptune. En Océanographie, dans l'approche des effets de déplacement de masses d'eau froide et chaude et la détermination de leur influence sur le climat de la terre (Climatologie). Enfin en Géophysique, dans le cadre de l'étude de l'effet dynamo régissant le manteau terrestre (figure 5).

Dans l'industrie, on se limitera à évoquer essentiellement le domaine des techniques tribologiques qui consiste à réduire le frottement dans la transmission des vitesses dans les machines tournantes et dans les diverses articulations et liaisons mécaniques (figure 6). En Technologie de la croissance cristalline (visant l'élaboration de cristaux semi-conducteurs), selon la géométrie imposée : cylindrique et sphérique.

Au stade actuel, on peut tirer la conséquence que de nombreuses investigations, à la fois théoriques et expérimentales, ont été effectuées mais sans aborder, à notre connaissance, l'effet de l'inclinaison du système d'écoulement et de la variation du taux remplissage. La motivation principale guidant ce travail consiste à une recherche d'identification du ou des

paramètres sensibles permettant d'agir directement sur le contrôle de l'écoulement dans sa diversité phénoménologique : instabilités, structures, chaos et turbulence.

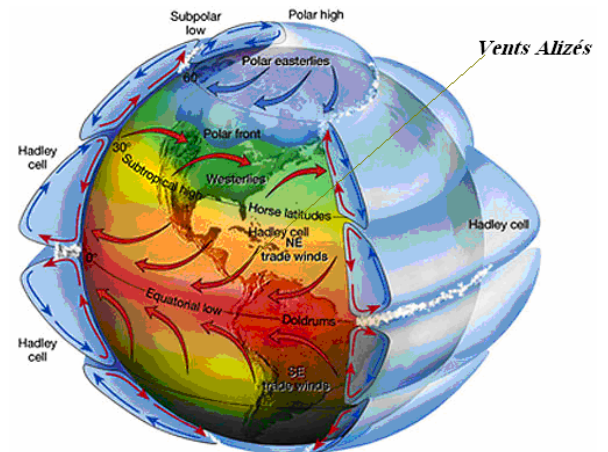
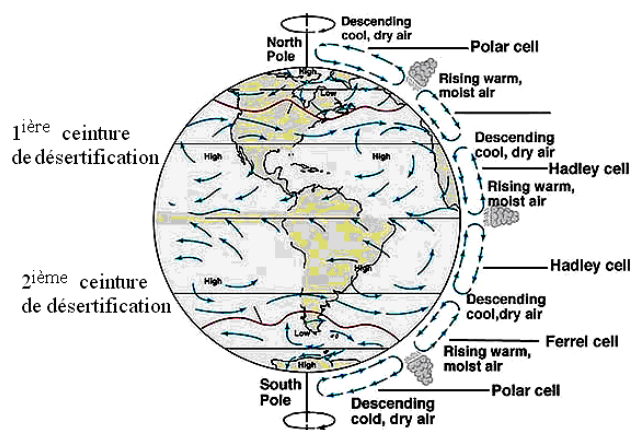
Dans un premier stade, il s'agit d'abord d'analyser l'influence de la gravité sur l'évolution de l'écoulement. Ensuite il y'a lieu d'examiner l'influence de la hauteur de l'écoulement ainsi que l'effet induit par la surface libre sur la structure de mouvement. Notre démarche est essentiellement à caractère expérimental et l'on se propose, ensuite, de formuler phénoménologiquement les lois de comportement les plus significatives décrivant les structures observées en régime de transition laminaire-turbulent. Plus particulièrement, notre objectif consiste à analyser par photométrie l'influence de ces effets, combinés ou non, sur l'apparition ou la disparition des instabilités caractérisant le passage de la transition vers le chaos.

Le mémoire qui rend compte de nos principaux résultats s'articule, en trois parties, comme suit :

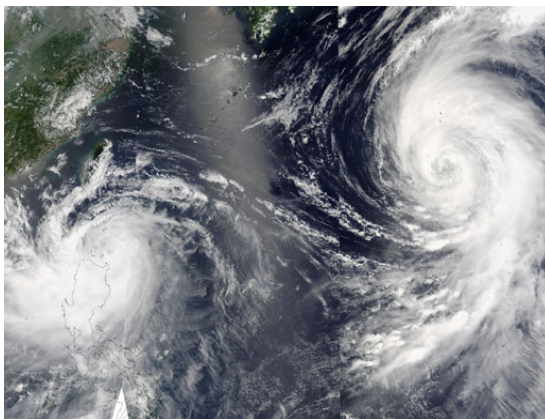
Dans la première partie, on présente une revue bibliographique du domaine de recherche d'écoulement en donnant une vue d'ensemble de la plupart des phénomènes d'instabilités résultant du mouvement entre sphères coaxiales en rotation.

Dans la deuxième partie on se propose de donner, au chapitre I, la formulation générale des équations qui régissent le mouvement en fonction d'un nombre caractéristique regroupant, à la fois, les trois paramètres de contrôle agissant sur l'écoulement : l'angle d'inclinaison  $\alpha$ , le nombre de Taylor  $Ta$  et Le nombre de Froude  $Fr$ . Au second chapitre, une analyse théorique est consacrée à la détermination des profils de distribution du champ des vitesses moyennes de l'écoulement entre sphères coaxiales en rotation.

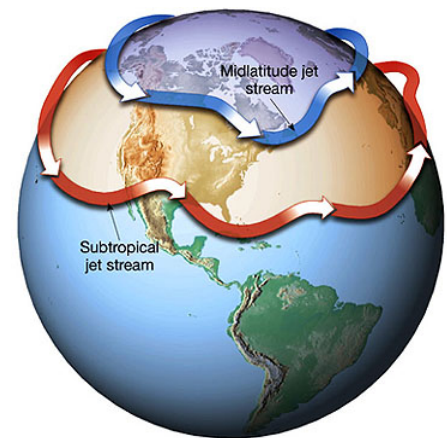
La troisième Partie, organisée également en deux chapitres, vise à donner une description générale du dispositif expérimental, au chapitre 1, puis l'élaboration et la mesure des caractéristiques du fluide utilisé. On donne également des informations sur les différentes méthodes de visualisation employées et l'on fournit des indications sur les conditions expérimentales mises en œuvre. Au second chapitre, on recense les principaux phénomènes observés à partir d'un traitement de données photométriques. Une analyse systématique des effets d'inclinaison et du taux de remplissage est effectuée pour mieux comprendre la phénoménologie spécifique à ce type de mouvement ainsi que l'interaction de la surface libre.



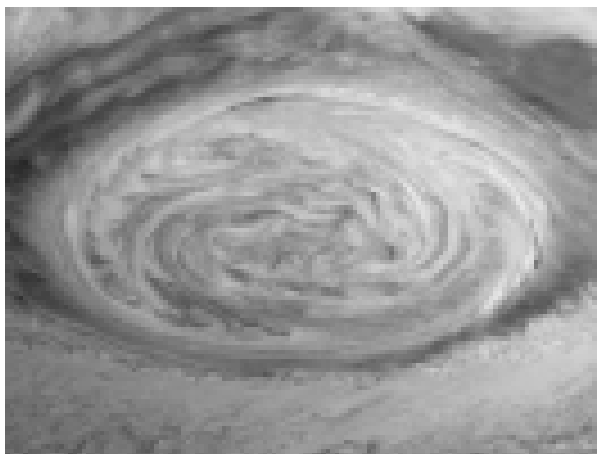
**Figure 1 :** Cellules thermo-convectives de Hadley et circulation des vents alizés



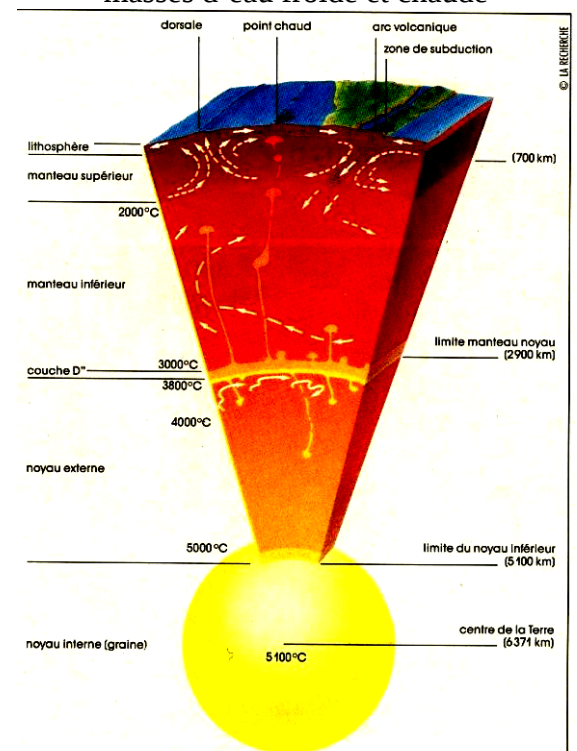
**Figure 2 :** Perturbations anticycloniques ou cycloniques



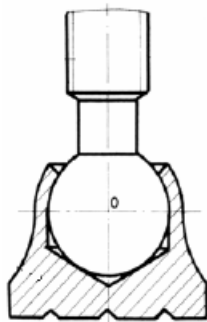
**Figure 3 :** Circulation océanographique des masses d'eau froide et chaude



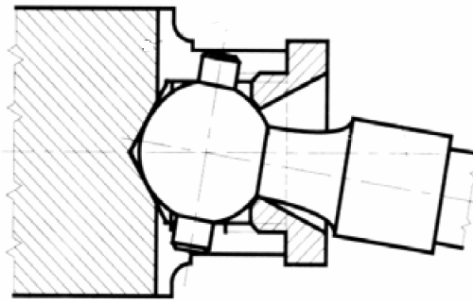
**Figure 4 :** Tache rouge de Jupiter



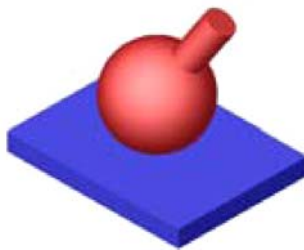
**Figure 5 :** thermoconvection dans le manteau terrestre



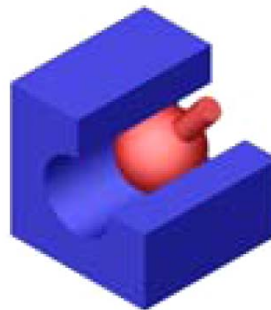
Patin de serre-joint



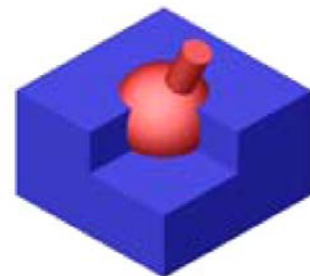
Accouplement sphérique à ergots



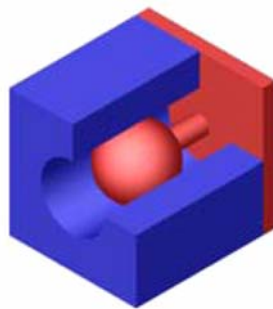
Sphère / Plan



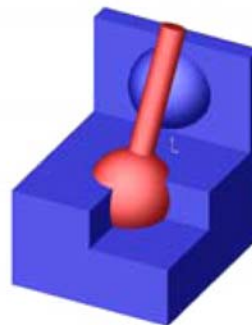
Sphère / Cylindre



Sphère / Sphère



Glissière Sphérique – pivot



Encastrément Sphérique à doigt

**Figure 6 :** Tribologie des liaisons mécaniques / type sphérique

## PARTIE I

### REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DE LA TRANSITION LAMINAIRE–TURBULENT DANS LE SYSTEME D'ÉCOULEMENT DE TAYLOR–COUETTE SPHERIQUE

---

#### POSITION DU PROBLEME THEORIQUE ET EXPERIMENTAL

#### INTRODUCTION

Les phénomènes d'instabilités hydrodynamiques et leur relation complexe avec la transition laminaire–turbulent via le chaos ont déjà été étudiés dans différents dispositifs d'écoulement. On s'intéresse, ici, aux écoulements dans les milieux confinés tournants appartenant à la classe des mouvements rotatifs entre cylindres, cônes et sphères coaxiales. En raison de l'intérêt grandissant, porté aux systèmes précédents, on s'intéresse plus particulièrement à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible compris entre deux sphères concentriques dont la sphère intérieure est en rotation et l'extérieure est au repos.

De prime abord, le mouvement considéré apparaît analogue à celui qui se produit entre cylindres coaxiaux, d'où l'appellation écoulement de Taylor–Couette sphérique. Cependant, ce type d'écoulement présente des différences assez importantes. Ainsi, il n'existe pas d'effets d'extrémités ou effets de bords dans ce cas. Le mouvement de base, en géométrie sphérique, est tridimensionnel alors qu'il est bidimensionnel dans le cas cylindrique. En fait, il se compose d'un mouvement azimutal qui se superpose à un écoulement méridional formant de la sorte un grand vortex dans le plan méridional. On présente, dans ce qui suit, les principaux résultats théoriques et expérimentaux obtenus par différents auteurs en mettant l'accent spécialement sur certains facteurs qui agissent significativement sur l'évolution de l'écoulement en géométrie sphérique.

## I. PHENOMENOLOGIE ET CARACTERISTIQUES DE L'ÉCOULEMENT

### I.1. Phénoménologie :

Dans le cas d'un fluide à propriétés physiques (densité  $\rho$  et la viscosité dynamique  $\mu$ ) constantes : on va énumérer les principaux travaux théoriques et expérimentaux effectués sur le mouvement de ce fluide dans l'espace entre deux sphères concentriques dont la sphère intérieure  $r=R_1$  est en rotation  $\Omega = \Omega_1$  et la sphère extérieure  $r = R_2$  étant maintenue fixe  $\Omega = \Omega_2 = 0$ .

Le système d'écoulement entre sphères est soumis à une inclinaison  $\alpha$  par rapport à la verticale (l'axe de rotation)  $\alpha \in [0, \pi/2]$  (Voir figure 1.1).

On choisira pour notre étude les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  sachant que :

$$r \in [R_1, R_2], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$$

Avec :  $R_1$  : Le rayon de la sphère intérieure,  $R_2$  : Le rayon de la sphère extérieure.

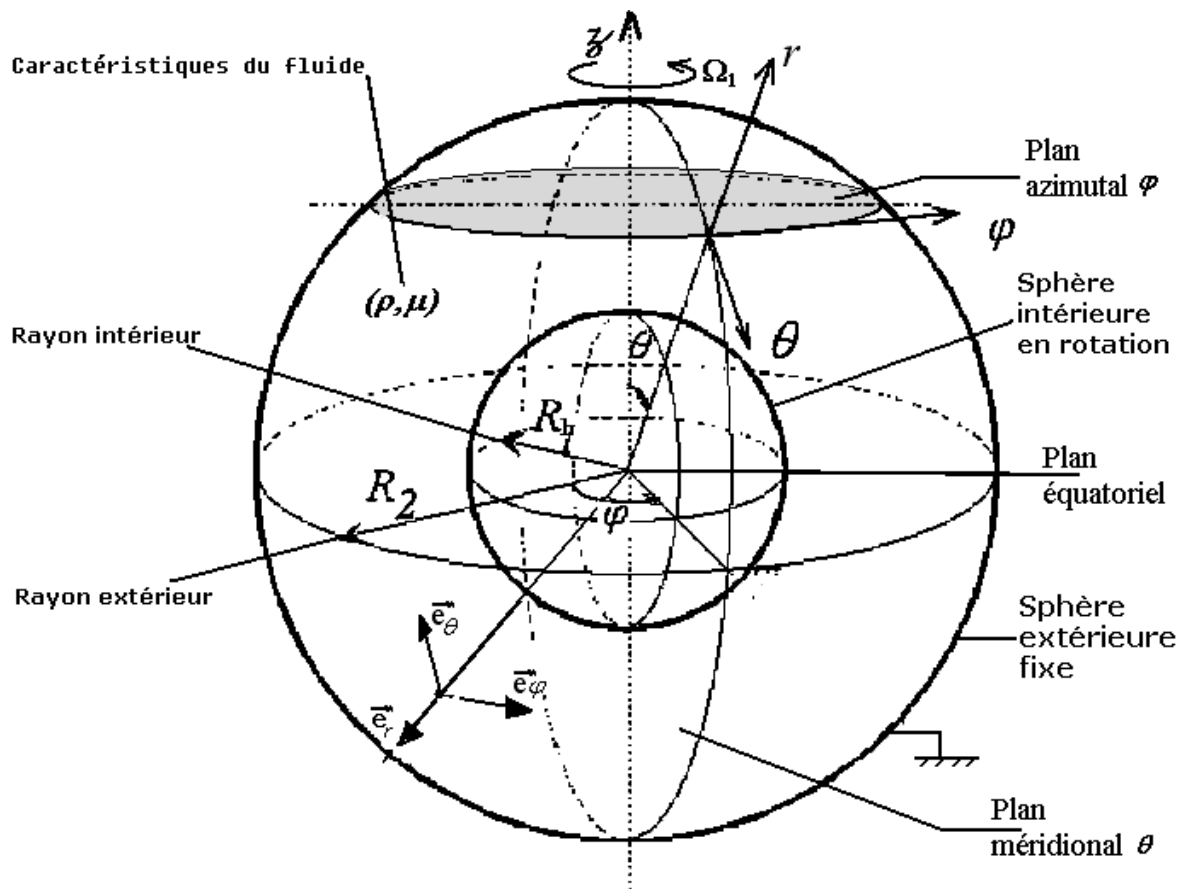


Figure 1.1 : Système d'écoulement

## 1.2. Paramètres de contrôle

Pour étudier les instabilités hydrodynamiques, il est nécessaire d'introduire des nombres sans dimension qui font intervenir les facteurs stabilisant et déstabilisant rencontrés dans les problèmes analogue. Dans le cas considéré les mouvements secondaires ou instabilités qui apparaissent résultent d'un processus compétitif entre deux tendances opposées :

- La force centrifuge qui joue un rôle déstabilisant,
- La force de frottement visqueux a, par contre, un rôle stabilisant.

Selon la valeur du paramètre  $Re$  ou  $Ta$ , l'écoulement devient stable ou instable.

### - Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds mesure le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses correspondantes. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$Re = \frac{\rho \Omega_1 R_1^2}{\mu}$$

Avec  $V_l = R_l \Omega_l$ , qui désigne la vitesse linéaire correspond à la rotation de la sphère intérieure.

$\rho$  : densité du fluide

$\mu$  : viscosité dynamique.

On peut écrire aussi le nombre de Reynolds  $Re$  en fonction de la viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ de façon que : } Re_{Cyl} = \frac{V_l d}{\nu} = \frac{\Omega_l R_l d}{\nu}$$

$$\text{ou encore } Re_{sph} = \frac{\Omega_l R_l^2}{\nu}$$

### - Nombre de Taylor :

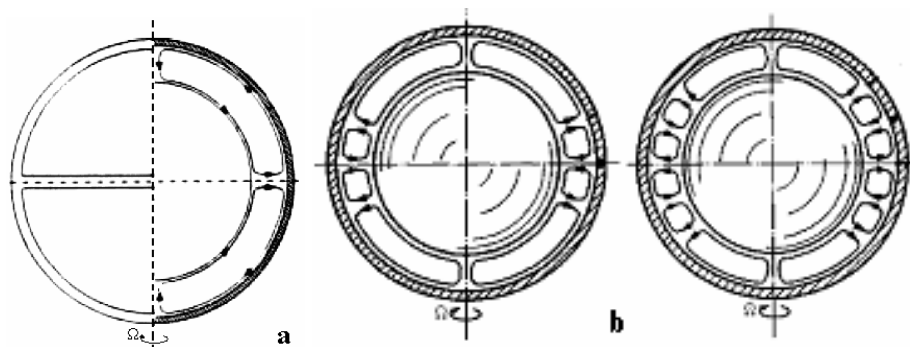
Le nombre de Taylor  $Ta$  est défini sur la base du nombre de Reynolds  $Re$  corrigé par le jeu radial  $\delta = \frac{d}{R_1}$  :

$$Ta = Re \sqrt{\frac{d}{R_1}} \text{ qui s'écrit de façon explicite comme suit : } Ta = \rho \frac{\Omega_1 R_1^2}{\mu} \sqrt{\delta}$$

$d = R_2 - R_1$  : espace annulaire entre les deux sphères coaxiales de rayons  $R_1$  et  $R_2$ .

### I.3. Etats d'écoulement :

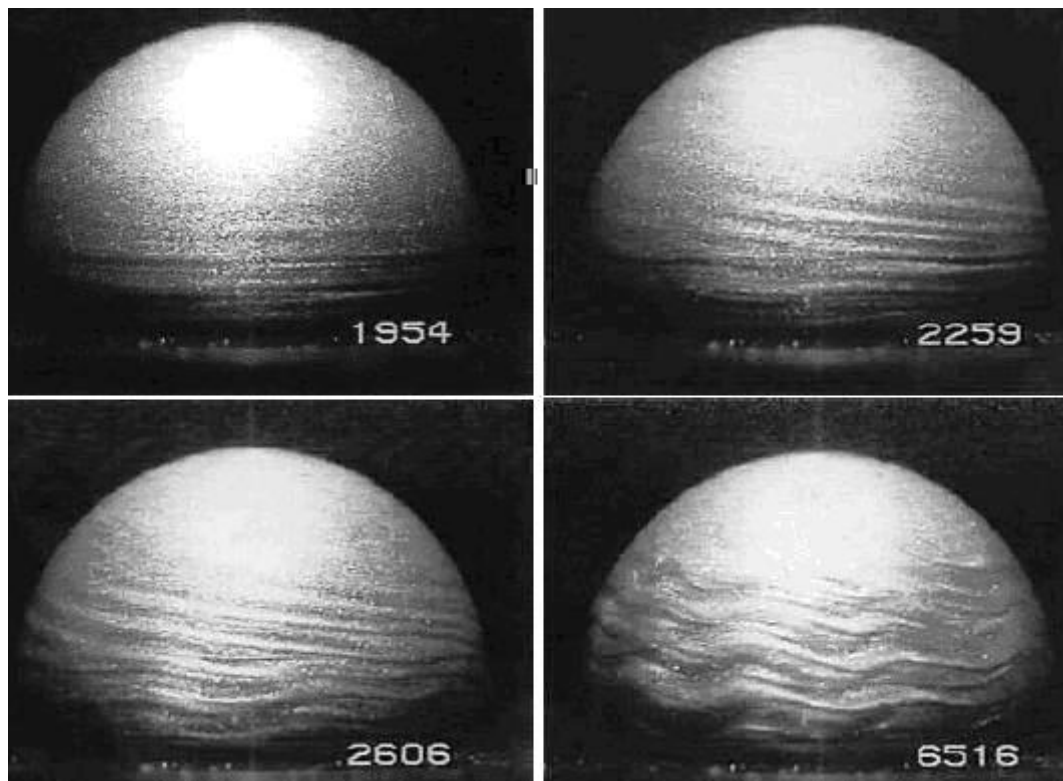
L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible entre deux sphères concentriques dont la sphère intérieure est en rotation et l'extérieure est au repos dépend essentiellement du nombre de Reynolds ou du nombre de Taylor et éventuellement de la largeur de l'espace annulaire. Ainsi, on observe plusieurs états d'écoulement pour différents nombres de Reynolds. Dès lors, on peut dénombrer les différents états d'écoulement possible en augmentant de façon quasi-statique le nombre de Reynolds. Aux bas nombres de Reynolds, l'écoulement du fluide est laminaire, tridimensionnel et formé par deux grandes cellules (figure 1.2.a). Au-delà de la valeur associée au nombre de Reynolds critique  $Rec_1$ , les cellules de Taylor se forment près de l'équateur, représentant ainsi la première étape de la transition laminaire-turbulent. Les conditions d'apparition des cellules de Taylor dépendent fortement de l'espace annulaire et de la mise en régime de la vitesse de rotation de la sphère intérieure, par exemple, dans des espaces annulaires moyens, on peut avoir un état à deux cellules de Taylor (une onde stationnaire), comme on peut avoir un état à quatre cellules de Taylor (deux ondes stationnaires) (figure 1.2.b).



**Figure 1.2 :** (a) Etat de base, (b) Etat à une cellule de Taylor et à deux cellules de Taylor dans chaque hémisphère.

En faisant croître le nombre de Reynolds  $Re$ , on peut identifier un état avec des cellules de Taylor situées près de l'équateur et d'autres inclinées d'un angle variant de  $2^\circ$  à  $10^\circ$  par rapport au plan équatorial.

En augmentant davantage le nombre de Reynolds  $Re$ , un autre état combiné entre état de cellules de Taylor inclinées et un état d'onde ondulées de caractère instationnaires ou ondes azimutales (wavy mode partiellement établi). Après cet état, il lui succède un régime d'ondes ondulées ou wavy mode complètement établi. Si l'on continue d'accroître progressivement le nombre de Reynolds  $Re$ , le régime avec fluctuations s'installe d'abord et conduit vers le régime chaotique ou régime de Pré-turbulence puis la turbulence complètement développée.



**Figure 1.3:** Visualisation des états d'écoulement pour  $\delta = 0.08$  : Cellules de Taylor légèrement inclinées pour  $Re = 1954$ . Cellules de Taylor inclinées (en spiral) pour  $Re = 2259$ . Ecoulement ondulé + cellule de Taylor inclinées pour  $Re = 2606$ . Ecoulement ondulé pour  $Re = 6516$ .

L'écoulement dit ondulé correspond au wavy mode ou onde azimutale

#### I.4. Diagramme de stabilité

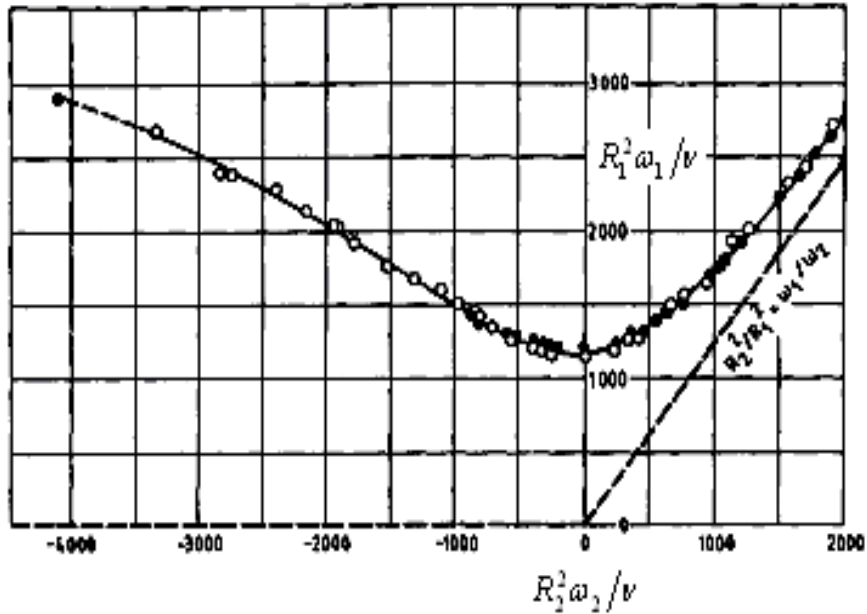
On se place dans les conditions générales d'un système d'écoulement tel que la sphère intérieure, l'extérieure de rayons  $R_1$  et  $R_2$  respectivement, peuvent tourner dans la même direction ou dans des directions opposées. Dans les deux cas, les instabilités apparaissent

lorsque le nombre de Reynolds  $Re$  ou de Taylor  $Ta$  augmente. Ainsi, la première instabilité peut apparaître dans les deux cas mais dépend fortement des dimensions de l'espace annulaire comme le montre les expériences réalisées par **M. Wimmer [1]** qui sont récapitulées dans le diagramme de stabilité (figure 1.4) établi pour un jeu radial  $\delta=0.111$ . Celui-ci s'exprime en fonction du nombre de Reynolds  $Re_1$  de la sphère intérieure, figurant en ordonnée et en fonction de la valeur du nombre de Reynolds  $Re_2$  de la sphère extérieure qui est indiqué en abscisse. Dans le plan positif, les deux sphères tournent dans la même direction, et dans le plan négatif celles-ci tournent dans des directions opposées de sorte que le côté droit de l'abscisse est noté par  $+R_2^2\omega_2/\nu$  et le côté gauche est noté par  $-R_1^2\omega_1/\nu$ .

La ligne discontinue, se trouvant du côté droit du diagramme, représente la loi de comportement asymptotique prévue par la théorie de la stabilité pour un fluide non visqueux. Dans le cas d'un fluide parfait  $\mu = 0$ , celle-ci peut se formuler à l'aide du critère de stabilité de Rayleigh basé sur le moment cinétique  $L = rV$  ou  $V = r\omega$ , d'où :  $dL^2/dr > 0$ . Après intégration de celle-ci par rapport aux rayons  $R_1$  et  $R_2$ , on obtient l'inégalité suivante :

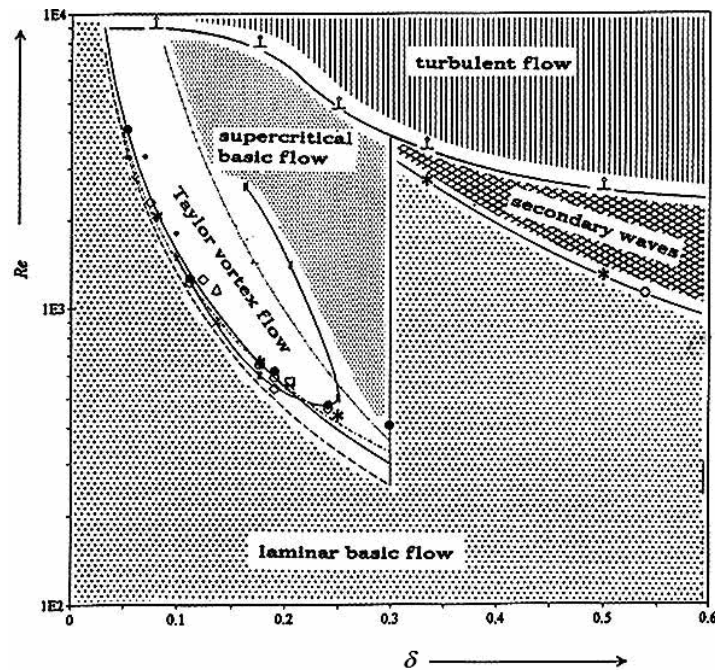
$$(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) > 0 \quad (1)$$

Quand les deux sphères tournent dans la même direction, la relation précédente prédit que le produit  $\omega_2 R_2^2$  doit être toujours plus grand que  $\omega_1 R_1^2$  pour obtenir la stabilité. Pour un rapport de rayons donné  $\eta = R_2/R_1$ , la relation (1) s'écrit alors sous la forme  $\omega_2 \eta^2 > \omega_1$ . Ainsi, la vitesse angulaire de la sphère extérieure doit être supérieure à celle de la sphère intérieure par un facteur  $\eta^2$  pour que la stabilité s'installe, autrement, le mouvement devient instable. Si les deux sphères tournent dans des directions opposées la relation (1) n'est pas satisfaite, et l'écoulement est alors instable.



**Figure 1.4 :** Diagramme de stabilité pour  $\delta = 0.111$  d'après M. Wimmer [1].  
 ○ Mesures effectuées pour l'écoulement entre sphères coaxiales,  
 ● Théorie de Taylor pour l'écoulement entre cylindres coaxiaux  
 - Prévion théorique en fluide parfait.

Après avoir décrit la phénoménologie et indiqué les conditions de stabilité, on résume dans le diagramme (figure 1.5) tous les différents états possibles pour un jeu radial  $\delta$  donné en fonction du nombre de Reynolds  $Re$ .



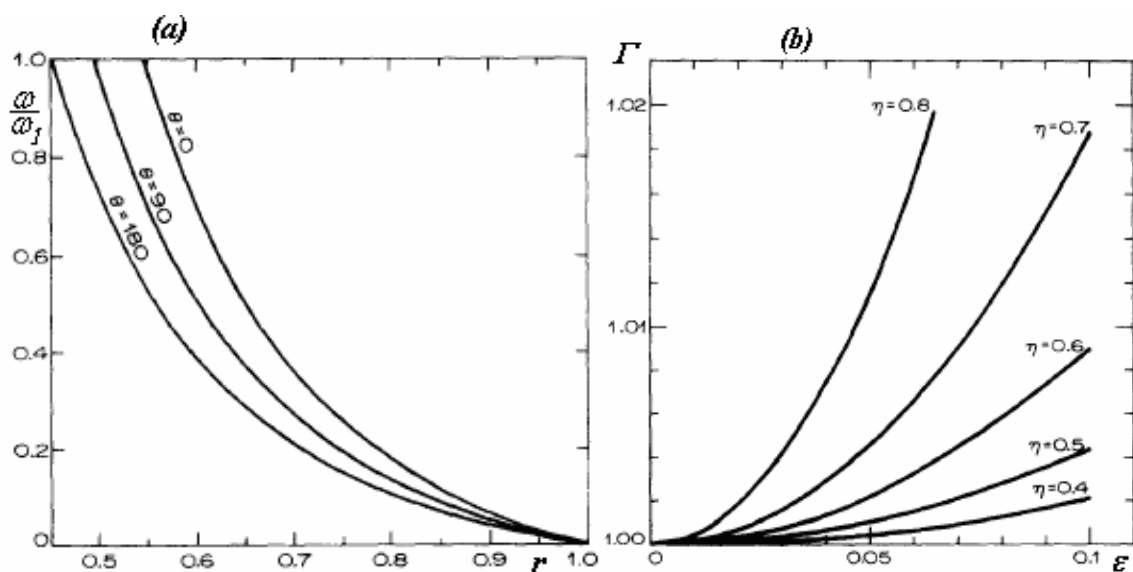
**Figure 1.5 :** Diagramme de stabilité : Vue d'ensemble des nombres de Reynolds critiques  $Re = (\rho \Omega_1 R_1^2) / \mu$  observés en fonction du jeu radial  $\delta = d/R_1$ .

D'après M. Junk & C. Egbers [2].

## II. APPROCHE ANALYTIQUE

On se propose de récapituler les principaux résultats des travaux effectués qui s'intéresse à l'écoulement entre deux sphères coaxiales en se servant des données fournies par la littérature. **V.S. Sorokin [3]** propose une solution approchée pour l'écoulement d'un fluide entre deux sphères coaxiales dont la sphère intérieure est en rotation et l'extérieure est au repos, respectivement de rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Cette tentative est intéressante du point de vue analytique pour approcher le problème de la stabilité hydrodynamique en utilisant la méthode de *Galerkin*. La solution est obtenue à l'aide d'une base de décomposition de la solution contenant 12 fonctions propres. Celle-ci est suivie par l'étude théorique de **IU.K. Bratukhin [4]** qui a obtenu une limite approchée de la stabilité linéaire pour un rapport de rayons  $\eta = R_1/R_2 = 0.5$ , ce qui correspond à un jeu radial proche de l'unité  $\delta = (R_2 - R_1)/R_1 = 1$ . Cependant le modèle adopté s'appuie sur un l'écoulement de Stokes représentant écoulement laminaire de base. Il trouve que l'écoulement laminaire de base perd sa stabilité pour une valeur de Reynolds proche de  $Re \approx 100$ .

En outre, l'écoulement entre sphères tournantes excentriques a été étudié analytiquement par **B.R. Munson [5]** pour le mouvement de base, en traitant tous les cas possibles : sphère intérieur tournante, l'extérieure fixe ; les deux sphères en Co- et contre-rotation.... En particulier, il a déterminé les champs de vitesse laminaire, parallèlement à des mesures le couple en fonction de l'excentricité  $\varepsilon$  et du rapport de rayons des deux sphères (figure 1.6).



**Figure 1.6 :** (a) : Champ de vitesse angulaire laminaire, (b) Couple de frottement  $\Gamma$  en fonction de l'excentricité  $\varepsilon$ . D'après **B.R. Munson [5]**

**G. Schrauf [6]** a étudié l'influence de  $\delta$  sur la première apparition d'une paire de cellules de Taylor dans l'écoulement entre sphères coaxiales en calculant les solutions stationnaires axisymétriques mais qui ne sont pas nécessairement stables. Il a conclu que les cellules de Taylor peuvent exister jusqu'à  $\delta=0.45-0.48$  mais elles n'ont pu être observées dans les expériences fréquemment réalisées lorsque seule la sphère intérieure est en rotation. Pour le cas  $\delta>0.24$ , où aucun point de bifurcation n'a été constaté, l'écoulement de base reste stable jusqu'à l'apparition de l'instabilité tridimensionnelle qui est caractéristique d'un espace annulaire large.

### III. APPROCHE NUMERIQUE

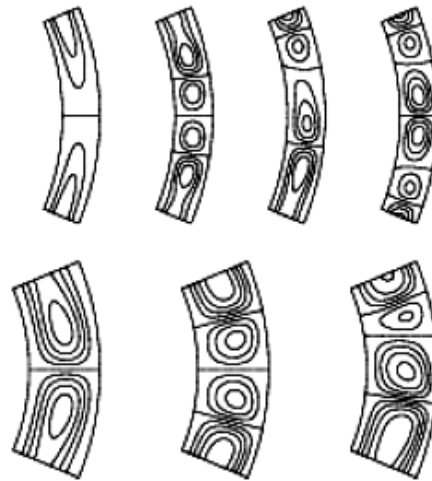
Les investigations numériques sur l'écoulement de Taylor–Couette sphérique confiné dans des espaces annulaires larges sont rares. Ceci vaut également pour effectuer des simulations liées aux instabilités successives au delà du domaine d'existence des cellules de Taylor apparaissant dans les espaces annulaires minces. La raison tient aux difficultés numériques qui surgissent pour simuler des écoulements non-axisymétriques.

Par ailleurs, pour des espaces annulaires petits et moyens, qui sont situés autour de la valeur du jeu radial  $\delta=0.18$ . On a enregistré plusieurs tentatives s'intéressant aux écoulements axisymétriques avec une ou deux cellules de Taylor dans chaque hémisphère ; celle-ci ont pu être identifiées par **J.P. Bonnet & T. Alziary de Roquefort [7]**, **F. Bartels [8]**, **S.C.R. Dennis & L. Quartapelle [9]** et **P. Marcus & L. Tuckerman [10]**. Ces auteurs ont aussi examiné les transitions entre les différents états d'instabilités afin de dégager les bifurcations associés. **K. Bühler [11]** a découvert un état d'instabilité avec une cellule de Taylor asymétrique par rapport à l'équateur. Ce type de bifurcation lié à l'état asymétrique a été étudié intensivement par **C.K. Mamun & L. Tuckerman [12]**. Ainsi, **R.J. Yang [13]** s'efforce de retrouver tous les états d'instabilités par des simulations d'écoulement axisymétrique avec des conditions de frontière symétriques arbitraires.

Des simulations tridimensionnelles des états d'écoulement dans le système sphérique ont été effectuées pour la première fois par **G. Dumas & A. Leonard [14]** qui ont confirmé la présence des cellules de Taylor inclinées observées auparavant par **K. Nakabayashi** (Tableau 02). Cet état d'écoulement a été également retrouvé numériquement par **O.YU. Zikanov [15]** dans le cas des sphères fonctionnant en Co et Contra-rotation.

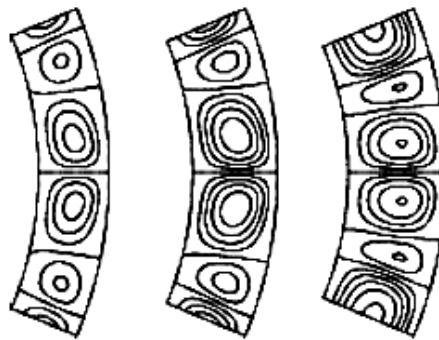
Une étude numérique détaillée consacrée aux cellules de Taylor pour  $\delta = 0.336$  a été présentée par **R. Hollerbach** [16]. **H. Yamaguchi & al** [17] [18] [19] qui ont publié une série d'articles concernant l'analyse expérimentale et numérique : sphère intérieure en rotation et la sphère externe au repos et vice versa. Ce travail a été étendu aux fluides viscoélastiques en vue de dégager les propriétés de la viscosité sur l'écoulement.

Dans des études numériques récentes, **R. Hollerbach & L. Tuckerman** [20] exploitent le code de calcul établi par **Hollerbach** [16] en le modifiant pour réaliser l'itération de Newton–Raphson qui à déjà été utilisée par **P. Marcus & L. Tuckerman** [10]. Cette analyse se concentre sur l'état de deux cellules de Taylor dans chaque hémisphère existant pour  $\delta = 0.154$  mais non pour  $\delta = 0.336$  comme indiqué dans la figure 1.7 ainsi que pour  $\delta = 0.2, 0.25, 0.3$ . Enfin, on peut se référer également à la figure 1.9 qui a été obtenu expérimentalement par **Junk & Egbers** [2] pour  $\delta = 0.25$ .



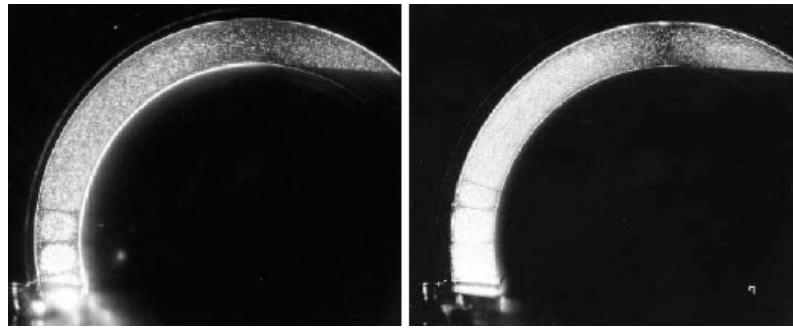
**Figure 1.7:** Exemple des états d'instabilités possible d'après pour  $\delta = 0.154$  et  $\delta = 0.336$ .

D'après **P. Marcus & L. Tuckerman** [10]



**Figure 1.8 :** Etat d'instabilité à deux cellules de Taylor pour  $\delta = 0.2, \delta = 0.25$  et  $\delta = 0.336$ .

D'après **P. Marcus & L. Tuckerman** [10]



**Figure 1.9:** Cellules de Taylor générés par la contre-rotation des sphères : Etat à une cellule pour  $Re=520$  et Etat à deux cellules pour  $Re=900$ . D'après **M. Junk & C. Egbers [2]**

Par la suite, **V.C. Lokopoulos et al [21]** ont tenté d'établir une solution stationnaire satisfaisant les équations du mouvement valables pour un fluide incompressible visqueux. Les équations sont approximées par la méthode des différences finies afin d'obtenir des cellules de Taylor symétrique et asymétrique dans des espaces annulaires moyens et larges. En particulier, Ils se sont penchés sur l'étude des cellules de Taylor pour  $\delta=0.154$ ,  $\delta=0.18$  et  $\delta=0.336$ , dont le résultat semblent en bonne concordance avec les travaux de **P. Marcus & L. Tuckerman [10]**, **K. Bühler [11]** et **R. Hollerbach [16]**. Récemment, **Yuan Li [22] [23]** a développé une modélisation numérique, en se basant sur les travaux expérimentaux de **K.Nakabayashi & al** et **M. Wimmer** pour espace annulaire un petit et un moyen respectivement  $\delta=0.06$  et  $\delta=0.18$ . Il a pu simulé la non-unicité des états d'écoulement de Taylor-Couette sphérique en résolvant l'équation de Navier-Stokes d'un écoulement de fluide incompressible, tridimensionnel et instable en utilisant la méthode des différences finis compacte au 3<sup>ème</sup> ordre. Ceci révèle que l'état à une cellule et l'état à deux cellules de Taylor peuvent coexister pour des nombres de Reynolds supercritiques mais petits à condition que le jeu radial soit très faible  $\delta=0.06$ . On constate alors que le développement des solutions de bifurcation dépend du nombre d'onde mais aussi de l'histoire de l'écoulement (accélération, mise en régime des vitesses, etc....) et de la valeur du nombre de Reynolds associé. Ces résultats paraissent en accord qualitatif avec les expériences précédentes.

#### IV. APPROCHE EXPERIMENTALE

Les investigations expérimentales fréquemment réalisées en géométrie sphérique où la sphère intérieure étant en mouvement et l'extérieure au repos, ont été effectuées pour des espaces annulaires petits et moyens. On note, dans chaque cas, que les cellules de Taylor existent comme dans l'écoulement entre cylindres coaxiaux [**G.I. Taylor [24]**].

Ainsi, **G.N. Khlebutin [25]** a été le premier à découvrir expérimentalement l'existence des cellules de Taylor dans ce système d'écoulement. Pour un jeu radial inférieur ou égale à  $\delta = 0.19$ , il a pu établir une corrélation entre le nombre de Reynolds critique  $Re_c$  et  $\delta$  indiquant le début d'apparition des cellules de Taylor donnée par la relation  $Re_c = 49\delta^{-3/2}$ . Ultérieurement cette corrélation a été reformulée selon le facteur de correction suivant  $Re_c = 41.3 (1 + \delta) \delta^{-3/2}$ . Il a aussi effectué des expériences de visualisation et des mesures de couple pour une série de sphères intérieures interchangeables, au nombre de six, pour un jeu radial variant de 0.037 à 1.155. Les résultats de ces expériences sont récapitulés dans le tableau 1. Cependant, il n'a pas pu visualiser les cellules de Taylor dans ses expériences pour un jeu radial supérieur à 0.44.

| Nombre de mesures | $R_1 (cm)$    | $\delta$ | $Re_c$   | $Ta_c$ |
|-------------------|---------------|----------|----------|--------|
| 1                 | 3.128±0.001   | 0.0371   | 6500±700 |        |
| 2                 | 3.019±0.001   | 0.0745   | 2300±200 |        |
| 3                 | 2.8901±0.0002 | 0.1225   | 1250±90  |        |
| 4                 | 2.7258±0.0003 | 0.1901   | 540±20   |        |
| 5                 | 2.2461±0.0008 | 0.4443   | —        |        |
| 6                 | 1.2900±0.0006 | 1.5147   | —        |        |

**Tableau 1.1** : Résultats expérimentaux de **G.N. Khlebutin [25]** indiquant pour chaque jeu radial  $\delta = d/R_1$ , le nombre de Reynolds critique correspondant  $Re_c$  lié à la première instabilité

D'autres investigations sur l'instabilité de Taylor dans l'écoulement entre sphères coaxiales ont été effectuées par **V.I. Yakushin [26]**, **B.R. Munson & M. Menguturk [27]**, **M. Wimmer [28]**, **I.M. Yavorskaya & al [29]**, et **K. Nakabayashi [30]**. **K. Bühler & J. Zierep [31] [32]** ont mis en évidence des nouvelles instabilités secondaires conditionnées pour des nombres de Reynolds plus élevés et des espaces annulaires moyens. On constate que pour le cas d'un large espace annulaire, les observations expérimentales sont peu nombreuses. Dans ce dernier cas, **M.P. Sorokin & al [33]** ont expérimentalement examiné la validité de l'analyse linéaire de stabilité de **Bratukhin [4]** au voisinage de la valeur  $\delta = 1$ . **B.R. Munson & M. Menguturk [27]** et **A.M. Waked & B.R. Munson [34]** ont signalé que l'écoulement de base laminaire devient instable par la transition directe en écoulement turbulent et non par l'instabilité de Taylor, alors que **I.M. Yavorskaya & al [35]** ont détecté une région de

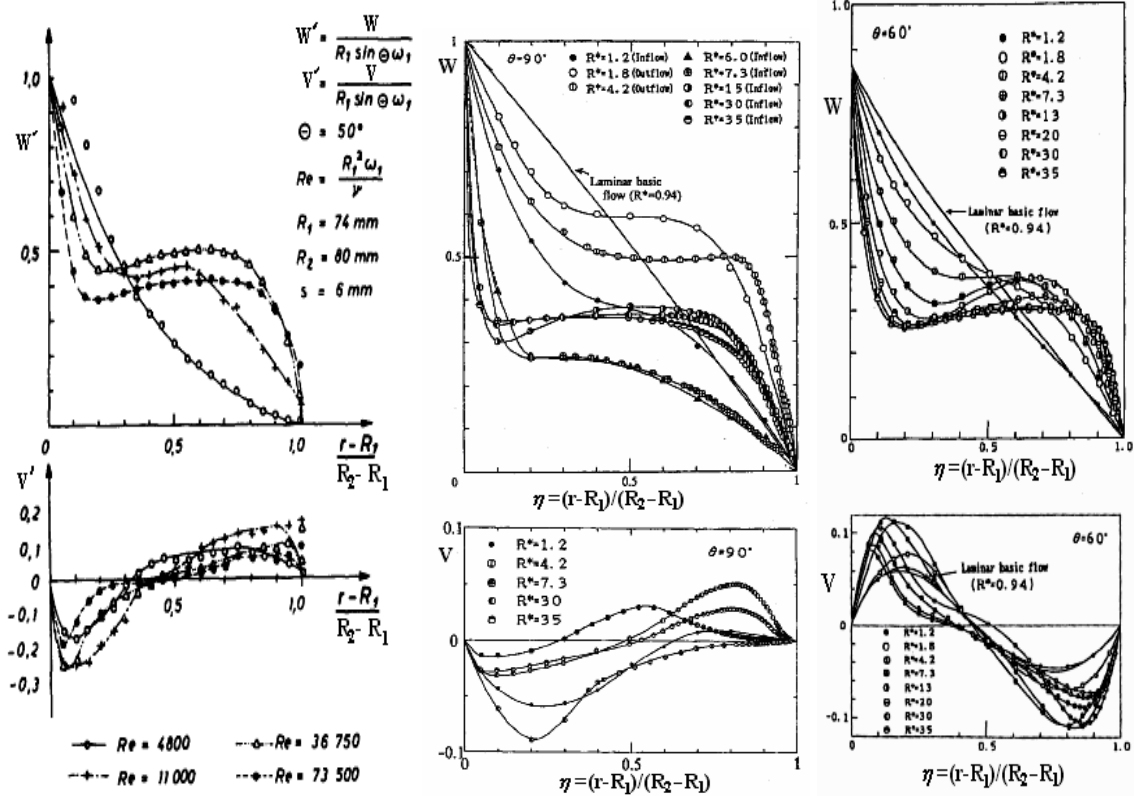
transition jusqu'à  $\delta=0.54$ , où des ondes secondaires persistent avant que l'écoulement devienne turbulent. Des phénomènes semblables ont été observés dans d'autres espaces annulaires larges. Cependant, la description du comportement de ces ondes secondaires semble peu détaillée.

On recense dans la littérature que seulement peu d'investigations de l'écoulement entre sphères coaxiales sont consacrées au cas où les deux sphères peuvent tourner indépendamment. Des expériences sur la stabilité de Co- et contre-rotation des sphères ont été effectuées par **I.M. Yavorskaya & al [29]**, **M. Wimmer [1]** et **A.A. Monakhov [36]** pour de petits espaces annulaires et par **A.M. Waked & B.R. Munson [34]** pour des espaces annulaires larges.

Signalons également, que l'écoulement entre deux sphères tournantes excentriques a été étudié expérimentalement et numériquement pour des sphères en Co- et contre-rotation par **P. Bar-Yoseph & al [37] [38]**.

Expérimentalement, les cellules de Taylor ont pu être générées dans le cas d'un espace annulaire large par **YU.N. Belyaev & al [39]** pour  $\delta=0.3038$ , et par **M. Liu & al [40]** pour  $\delta=0.33$ . Dans ce dernier travail, les auteurs ont pu montrer qu'ils peuvent également générer des cellules de Taylor numériquement jusqu'à  $\delta=0.483$ .

**M. Wimmer [28]** a réalisé une étude détaillée pour un jeu radial  $\delta=0.18$ , l'ayant conduit à classer les états d'instabilité observés. Il a mesuré le couple de frottement et la longueur d'onde en fonction du nombre de Reynolds et établi un profil de vitesse expérimental. Comme observé dans certains cas d'expérience, il y a apparition des états intermédiaires (exemple : cellules de Taylor légèrement inclinées (figure 1.3)) avant que le wavy mode s'installe, lequel a été décrit et classifié par **K. Nakabayashi [41 à 47]** (tableau 02). Ce dernier a pu réaliser une approche analytique pour évaluer le champ de vitesse en se basant sur une étude déjà effectuée dans l'écoulement entre cylindres coaxiaux (figure 1.10). Et il a étudié complètement la nature des structures, le processus d'évolution et le mécanisme d'apparition de cet écoulement.



**Figure 1.10 :** Profil de vitesse établi par M. Wimmer [48] pour  $\theta=50^\circ$  (à gauche pour  $\delta=0.081$ ) et par K. Nakabayachi [44] pour  $\theta=90^\circ$  et  $\theta=60^\circ$  (à droite pour  $\delta=0.14$ ).

V : vitesse méridionale et W : vitesse azimutale ou tangentielle.

|                    |                                                                                          |                  |                                                              |                    |                                              |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------|----------------------------------------------|
| $\text{II}_T$      | $R_1^*=1.00$<br>$R_1^*=1.06$<br>$R_1^*=1.07$                                             | $\text{II}_{TS}$ | $R_2^*=1.08$<br>$R_2^*=1.12$<br>$R_2^*=1.18$<br>$R_2^*=1.25$ | $\text{III}_{WTS}$ | $R_3^*=1.28$<br>$R_3^*=1.29$<br>$R_3^*=1.33$ |
| $\text{III}_{WS}$  | $R_4^*=1.37$<br>$R_4^*=1.43$                                                             | $\text{IV}_S$    | $R_5^*=2.00$<br>$R_5^*=3.00$<br>$R_5^*=6.20$                 | $\text{IV}_{TS}$   | $R_6^*=11.0$<br>$R_7^*=30.0$                 |
| $\text{I}_B$       | 1 <sup>er</sup> état d'écoulement : Mouvement principale ou mouvement laminaire de base, |                  |                                                              |                    |                                              |
| $\text{II}_T$      | 2 <sup>ème</sup> état d'écoulement : Instabilité de Taylor ou Cellules de Taylor,        |                  |                                                              |                    |                                              |
| $\text{II}_{TS}$   | Cellules de Taylor + Cellules de Taylor inclinées,                                       |                  |                                                              |                    |                                              |
| $\text{II}_S$      | Cellules de Taylor inclinées,                                                            |                  |                                                              |                    |                                              |
| $\text{III}_{WTS}$ | Ecoulement en cellules de Taylor ondulées (Wavy mode) + Cellules de Taylor inclinées     |                  |                                                              |                    |                                              |
| $\text{III}_{WS}$  | Ecoulement cellules de Taylor ondulées inclinées,                                        |                  |                                                              |                    |                                              |
| $\text{III}_{WT}$  | Ecoulement en cellules de Taylor ondulées (Wavy mode),                                   |                  |                                                              |                    |                                              |
| $\text{IV}_S$      | Ecoulement chaotique (turbulence naissante) + cellules de Taylor inclinées,              |                  |                                                              |                    |                                              |
| $\text{IV}_B$      | Ecoulement Turbulent.                                                                    |                  |                                                              |                    |                                              |

**Tableau 1.2 :** Transition des états d'écoulement et le nombre de Reynolds critiques correspondant en augmentant  $R^*$  quasi-statiquement avec  $R^* = Re/Re_c$  avec  $Re_c=2760$  (l'apparition de la première instabilité mesurée expérimentalement) pour  $\delta=0.06$ , Et caractéristiques de quelques différents états d'écoulement classés par K. Nakabayashi

## V. ETUDE DES INSTABILITES EN REGIME DE TRANSITION

### V.1. Conditions d'apparitions des instabilités dans des espaces annulaires petits et moyens :

L'écoulement entre deux sphères coaxiales en rotation, où seulement la sphère intérieure tourne et l'extérieure est au repos, est non seulement une fonction du nombre de Reynolds et du jeu radial  $\delta$ , mais il dépend également des conditions initiales ou des conditions aux limites. Les différents types d'instabilités que l'on recense peuvent être décrites comme suit : Au-dessous d'un nombre de Reynolds critique, l'écoulement de base est un écoulement laminaire tridimensionnel axisymétrique et symétrique par rapport à l'équateur. Au-dessus de ce nombre de Reynolds critique, la structure de l'écoulement dépend fortement du jeu radial  $\delta$ ; pour des facteurs d'aspect petits, les conditions d'écoulement près de l'équateur sont semblables à l'écoulement entre deux cylindres concentriques en rotation. Par conséquent, la première instabilité se produit sous forme d'une (ou deux) cellules de Taylor dans chaque hémisphère (figure 1.2).

Le nombre de Reynolds critique  $Re_c$  est une fonction du jeu radial  $\delta$ . Pour des facteurs d'aspect très petits ( $\delta < 0.08$ ), la courbe de stabilité semble en bonne concordance avec la « théorie de **Taylor** » [24]. Pour le domaine spatial lié aux facteurs d'aspect  $0.08 \leq \delta \leq 0.25$ , **Yu.N. Belyaev & al** [49] a établi empiriquement la valeur de  $Re_c$  pour l'écoulement sphérique qui semble plus grande que dans le cas cylindrique. Elle a été formulée comme suit:  $Re_c = 41.3(1 + \delta)\delta^{-3/2}$  qui paraît en bonne concordance avec les travaux de **M. Junk & C. Egbers** [2] et d'autres résultats expérimentaux obtenus pour  $\delta < 0.25$ .

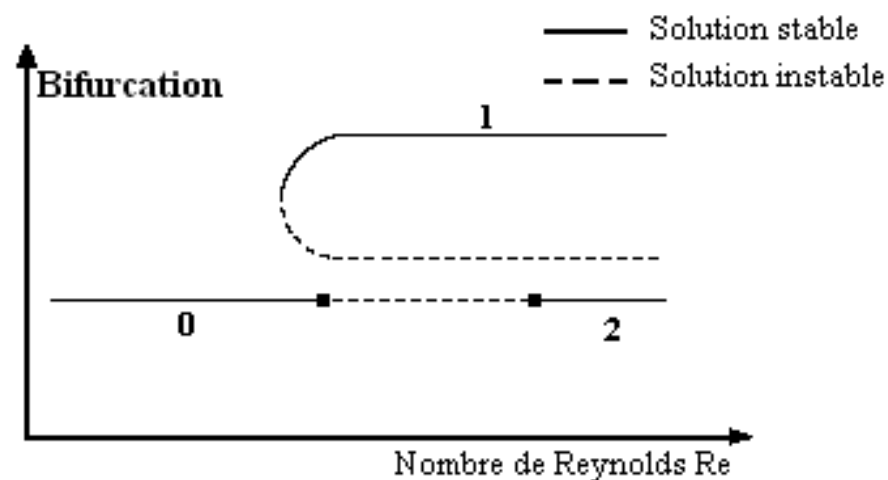
### V.2. Bifurcation de mouvement

Plusieurs études, aussi bien expérimentale que numérique, se sont focalisées sur le jeu radial  $\delta = 0.18$ . Particulièrement, les expériences de **M. Wimmer** [28] et le travail numérique de **G. Schrauf** [6] et **P. Marcus & L. Tuckerman** [10] qui mènent à une analyse approfondie des phénomènes de bifurcation liés aux états axisymétriques d'écoulement dans la configuration étudiée. Avant que se produise n'importe quelle transition vers un état supercritique d'écoulement, on observe un pincement apparent du vortex méridional de

l'écoulement de base correspondant à l'apparition d'un point de stagnation dans chaque hémisphère situé à un ordre de grandeur d'un espace annulaire par rapport à l'équateur.

Deux états axisymétriques des cellules de Taylor existent, pouvant être générés de l'état de base : un état avec une cellule de Taylor dans chaque hémisphère et un état avec deux cellules. Parmi les transitions possibles entre les trois états axisymétriques, les transitions vers l'état à une cellule (ou deux cellules) entraînant la rupture la symétrie équatoriale jusqu'à l'état final d'une cellule ou deux cellules de Taylor restructurant la symétrie équatoriale. L'état à deux cellules de Taylor peut être généré par l'accélération rapide de la sphère intérieure par rapport à l'état de base pour un nombre de Reynolds suffisamment élevé. Si l'accélération est suffisamment lente, au-dessus d'un nombre de Reynolds critique  $Re_c=651$  pour  $\delta=0.18$ , la transition de l'état de base vers un état à une cellule s'opère.

Les phénomènes observés peuvent être récapitulés dans un diagramme de bifurcation proposé par **P. Marcus & L. Tuckerman [10]** (figure 1.11). Ainsi, la courbe d'équilibre de l'écoulement 0-2 paires de cellules est linéairement instable par rapport aux perturbations non symétriques autour à l'équateur sur une certaine plage du nombre de Reynolds ( $651 < Re < 775$  si  $\delta=0.18$ ). Si les perturbations peuvent se développer, finalement l'état 1-paire de cellules se développe. D'autre part, lorsque l'accélération est assez rapide, l'écoulement va évoluer de la courbe d'équilibre de 0-2 paires de cellules vers un régime stable mais les perturbations n'ont pas le temps de se développer : on observe alors l'état à 2-paires de cellules.



**Figure 1.11:** Schéma d'un diagramme de bifurcation  
D'après **P. Marcus & L. Tuckerman [10]**

**G. Schrauf [6]** a étendu cette étude du comportement de bifurcation dans l'espace des paramètres  $(Re, \delta)$ . Aussi **I.M. Yavorskaya & al [29]** ont détecté dans leurs expériences une transition d'un écoulement à une paire de cellules jusqu'à  $\delta_c=0.2413$ . Au-dessus de cette valeur  $\delta > \delta_c$ , l'écoulement de base de type Couette demeure stable vis à vis des perturbations axisymétriques tel que le mouvement avec une paire cellule de Taylor est considéré comme solution isolée ; celle-ci ne pouvant être observée que seulement avec des conditions initiales assez spéciales ( **Yu.N. Belyaev & al [39]** et **M. Liu & al [40]**). Les travaux approfondis de **G. Schrauf** ont permis de mettre en évidence une plage de valeurs du jeu radial pour lesquelles aucune cellule de Taylor n'est observée ( $\delta \approx 0.45-0.48$ ).

### V.3. Conditions d'apparition des Instabilités dans des espaces annulaires larges :

Une étude comparative a montré qu'il y a moins de travaux dans les dispositifs d'écoulement à un espace annulaire large par rapport aux espaces annulaires petits et moyen. Dans ce cas, l'écoulement de base est stable par rapport aux perturbations axisymétriques car les cellules de Taylor n'apparaissent pas. Des investigations expérimentales de l'écoulement supercritique ont été effectuées par **Yu.N. Belyaev & I.M. Yavorskaya [49] [50]** pour  $\delta=0.398, 0.54, 1.0, 1.33$  et par **C. Egbers [51]** et **P. Wulf [52]** respectivement pour  $\delta=0.33$  et  $\delta=0.5$ . Egalement, on peut mentionner celles réalisées par **B.R.Munson & Menguturk [27]** pour des espaces annulaires très larges avec  $\delta=1.27$  et  $\delta=2.29$ .



**Figure 1.12:** Visualisation d'écoulements dans la configuration d'espace annulaire large  $\delta=0.5$  (vue région polaire): Ecoulement en spirale avec  $m=5$  ( $Re=1320$ ),  $m=4$  ( $Re=1575$ ) et  $m=3$  ( $Re=1680$ ).

A ce sujet on ne dispose que de quelques données numériques de ces phénomènes qui révèlent la nature tridimensionnelle et complexe de ces écoulements. On recense dans cette perspective le premier travail publié par **G. Dumas [14] [53]** qui a réalisé sa prévision numérique de quelques nombres de Reynolds critiques. De même, **R. Hollerbach [54]** a pu simuler les structures d'écoulement en onde spirale et évaluer les nombres critiques de Reynolds associés pour  $\delta=0.33$  et  $\delta=0.5$ . Pour ce dernier jeu radial, **K. Araki [55]** a effectué une analyse numérique de stabilité. Les résultats des travaux précédents apparaissent en bon accord avec les données expérimentales obtenues par **C. Egbers**. En outre, l'évolution du nombre de Reynolds critique pour quelques espaces annulaires larges ont été également calculés par **N.M. Astafyeva [56]** et **Jan-R Schmidt & al [57]**. On a effectué une synthèse de tous les résultats l'on propose de se référer au tableau 1.3 pour avoir un aperçu des principales valeurs critiques du nombre de Reynolds déterminées pour la première transition. Correspondant à l'apparition des cellules ou vortex de Taylor.

| $\delta = \frac{(R_2 - R_1)}{R_1}$ | 0.33        | 0.398       | 0.5         | 0.54        | 1.0        | 1.27       | 1.33       | 2.0        | 2.29 |                           |
|------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|------------|------|---------------------------|
| Auteur                             |             |             |             |             |            |            |            |            |      |                           |
| <b>Yu.N Belyaev [49] [50]</b>      |             | 1900<br>(5) |             | 1120<br>(5) | 463<br>(4) |            | 406<br>(3) |            |      | Données<br>expérimentales |
| <b>B.R. Munson [27]</b>            |             |             |             |             |            | 407        |            |            | 425  |                           |
| <b>C. Egbers [51]</b>              | 2628<br>(6) |             | 1244<br>(5) |             |            |            |            |            |      |                           |
| <b>P. Wulf [52]</b>                | 2395        |             | 1190<br>(5) |             |            |            |            |            |      |                           |
| <b>G. Dumas [14] [53]</b>          |             |             |             | 1122<br>(5) | 489<br>(4) | 406<br>(3) |            |            |      | Données numériques        |
| <b>K. Araki [55]</b>               |             |             | 1245<br>(5) |             |            |            |            |            |      |                           |
| <b>N.M. Astafyeva [56]</b>         |             |             | 1150<br>(6) |             | 493<br>(4) |            |            | 457<br>(3) |      |                           |
| <b>R. Hollerbach [16] [54]</b>     | 2684<br>(6) |             | 1244<br>(5) |             |            |            |            |            |      |                           |
| <b>M. Junk &amp; C.Egbers [2]</b>  |             | 1937<br>(5) | 1245<br>(5) | 1115<br>(5) | 489<br>(4) | 405<br>(3) | 395<br>(3) | 383<br>(3) |      |                           |
| <b>Jan-R Schmidt &amp; al [57]</b> |             |             |             |             | 489<br>(4) |            |            |            |      |                           |

**Tableau 1.3:** Données théorique et expérimentale du nombre de Reynolds critique et les nombres d'ondes circonférentiel  $m$  (entre parenthèse) dans la configuration d'espace annulaire large (wide gap configuration).

## VI. ETUDE DE L'INFLUENCE DES EFFETS SUR L'ÉCOULEMENT :

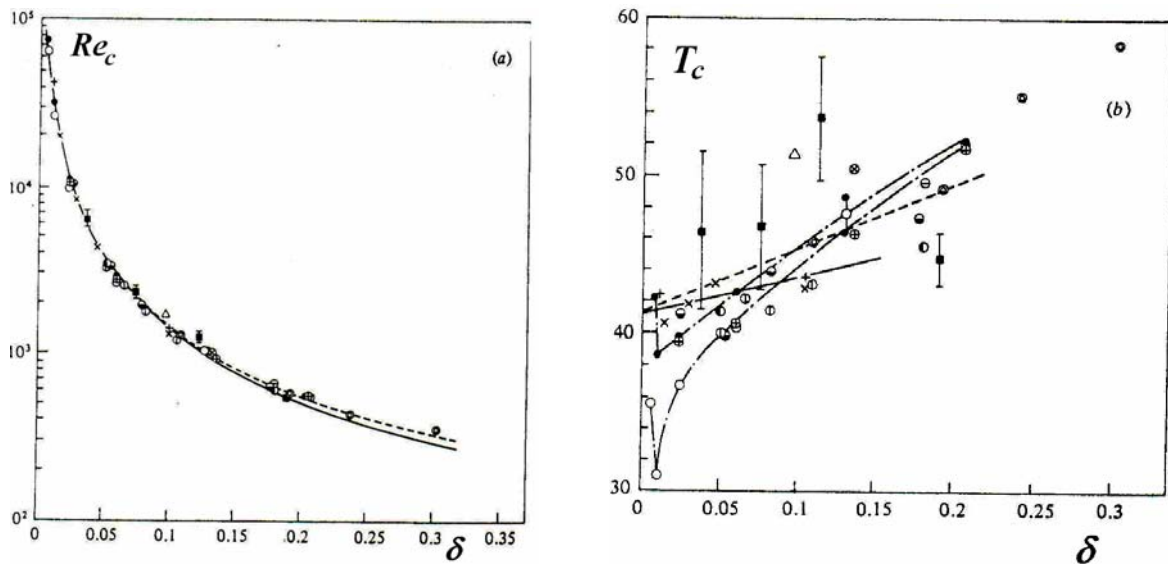
On se propose de réaliser un bilan phénoménologique sur la nature de la structure de l'écoulement engendré à partir de différents facteurs d'influence.

### VI.1. Effet de géométrie :

#### a. Effet du jeu radial $\delta$ :

Notons que l'apparition des instabilités en géométrie sphérique dépend fortement de la variation du jeu radial  $\delta$ . Il agit essentiellement sur le nombre de Reynolds critique ou Taylor critique et le nombre de cellules de Taylor. D'après la littérature, on trouve un jeu radial critique  $\delta_c$  où les cellules de Taylor n'apparaissent plus en régime de transition laminaire-turbulent. Ceci a été confirmé expérimentalement par **G.N. Klebuthin** [25] pour la géométrie correspondante à la valeur  $\delta_c=0.44$  et numériquement pour  $\delta_c=0.483$  selon **YU.N. Balyeav** [39].

Pour illustration on représente sur la figure 1.13 le nombre de Reynolds et le nombre de Taylor en fonction du jeu radiale  $\delta$ .



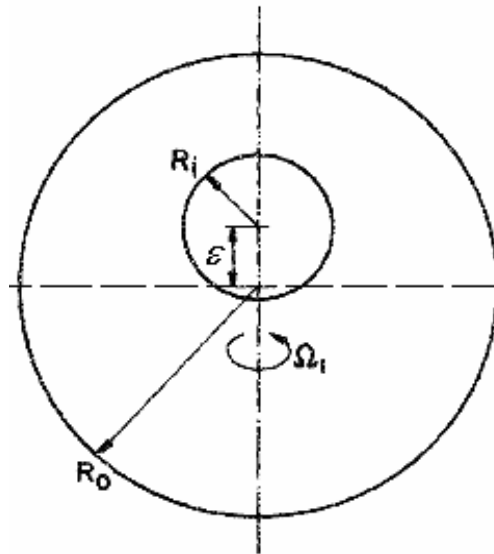
**Figure 1.13 :** (a) Nombre de Reynolds critique  $Re_c$  en fonction du jeu radial  $\delta$ . (b) Nombre de Taylor critique  $Ta_c$  en fonction du jeu radial  $\delta$ . D'après **K. Nakabayashi** [30]

⊖ Wimmer (1978) ; ⊙ Wimmer (1978) ; ○ Nakabayashi (1978) ; ● Nakabayashi (1978) ;  
 --- Nakabayashi (1983) ; ⊕ Nakabayashi (1978) ; × Nakabayashi (1972) ; ■ Khlebutin  
 (1968) ; + Vohr (1968) ; ⊗ Munson & Menguturk (1975) ; ⊙ Yavorskaya & al (mesure de  
 couple, 1980) ; --- Yavorskaya & al (1980) ; — Taylor (1923) ; ● Sawatzki & J. Zierep  
 (1970) ; ⊕ Sawatzki & J. Zierep (1970) ; △ Yakushin (1970) ;

### b. Effet de l'excentricité :

L'écoulement entre deux sphères excentriques en rotation a été relativement peu étudié. Ainsi **B.R. Munson [5]** a établi un modèle analytique pour l'écoulement de base qui est fonction de l'excentricité  $\bar{\varepsilon}$ . Il a effectué des estimations du champ des vitesses moyen et du couple. Ces résultats sont en bonne concordance avec les expériences de **M. Menguturk & B.R. Munson [27]**.

**P. Bar-Yoseph et al [58]** ont examiné les effets de l'excentricité  $\varepsilon$  sur le comportement des cellules de Taylor, par voie numérique et expérimentale (figures 1.15 à 1.18). Ils montrent que celles-ci ont tendance à s'installer, là, où l'espace annulaire se rétrécit. En outre, pour une gamme d'excentricité particulière ils observent une zone de recirculation qui a tendance à disparaître quand l'excentricité augmente. Le tableau 1.4 donne une indication sur les valeurs du nombre de Reynolds critiques valables pour la transition de l'écoulement de base vers l'état caractérisé par une seule cellule de Taylor et vice versa.



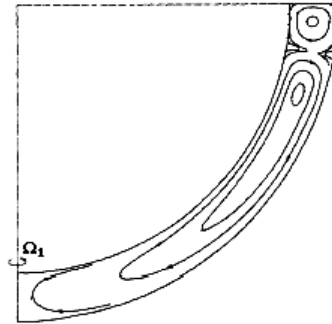
**Figure 1.14:** Schéma de base d'un dispositif à deux sphères excentriques ;

le paramètre  $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{R_0 - R_i}$  est la distance entre les centres des deux sphères.

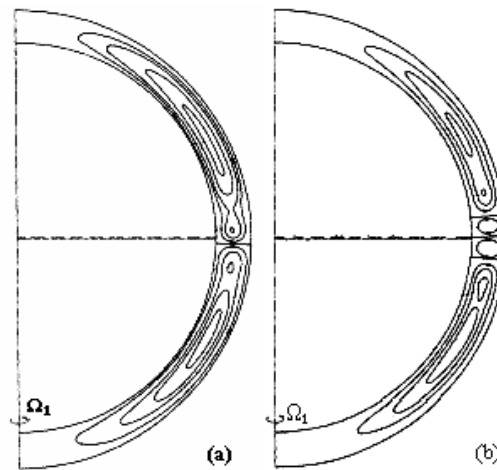
On résume, ci-dessus, l'ensemble des états recensés en fonction du jeu radial  $\delta$  et de l'effet d'excentricité  $\varepsilon$ .

| $\delta$                | Excentricité $\bar{\varepsilon}$ | Transition<br>0–1 vortex (Re) | Transition<br>1–0 vortex |
|-------------------------|----------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| <b>0.15</b>             | 0.00                             | 666.32                        | 660.87                   |
|                         | 0.01                             | 664.0 – 664.7                 | 660.4 – 659.6            |
|                         | 0.05                             | 661.1 – 661.8                 | 660.4 – 659.6            |
|                         | 0.10                             | 658.9 – 659.6                 | 658.9 – 658.2            |
|                         | 0.15                             | 657.3 – 657.5                 | 657.0 – 653.0            |
|                         | 0.20                             | 653.0 – 657.0                 | 555.3 – 553.9            |
| <b>0.17<br/>(0.169)</b> | 0.00                             | 583.4                         | 566.7                    |
|                         | 0.10                             | 566.9 – 568.3                 | 558.0 – 554.6            |
|                         | 0.15                             | 556.6 – 557.3                 | 554.3 – 554.1            |
|                         | 0.20                             | 554.3 – 554.5                 | 554.6 – 553.2            |
|                         | 0.38                             | 551.0 – 554.0                 | 554.0 – 551.0            |
|                         | 0.70                             | 565.0 – 575.0                 | 575.0 – 565.0            |
|                         | 0.82                             | 575.0 – 585.0                 | 585.0 – 575.0            |

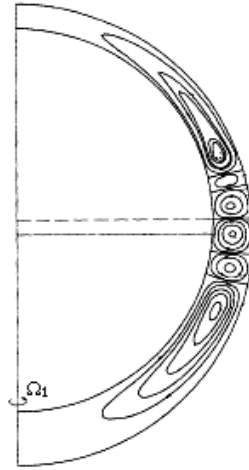
**Tableau 1.4:** Nombres de Reynolds critiques pour la transition 0–1 vortex et vice versa.  
D'après **P. Bar-Yoseph et al [58]**



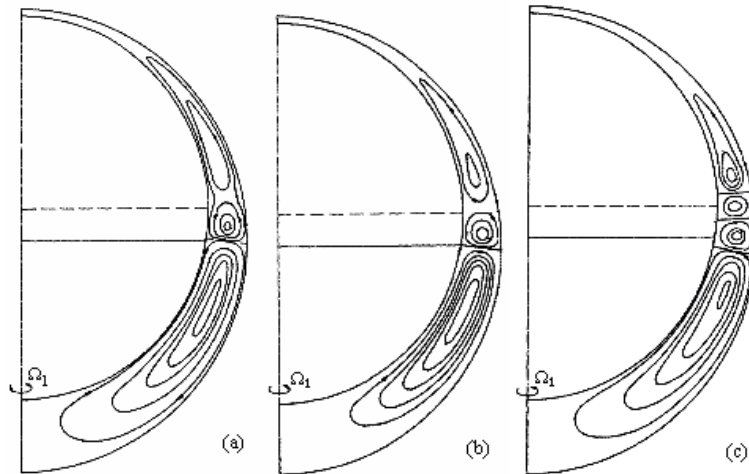
**Figure 1.15:** Ecoulement entre sphères concentrique tel que :  $\delta=0.15$ ,  $Re=753$ .



**Figure 1.16:** Espace annulaire excentrique tel que :  $\delta=0.15$ ,  $\bar{\varepsilon}=0.05$ , (a)  $Re=661$  et (b)  $Re=662$ .



**Figure 1.17** : Espace annulaire excentrique tel que :  $\delta=0.17$ ,  $\bar{\varepsilon}=0.38$  et  $Re=827$ .

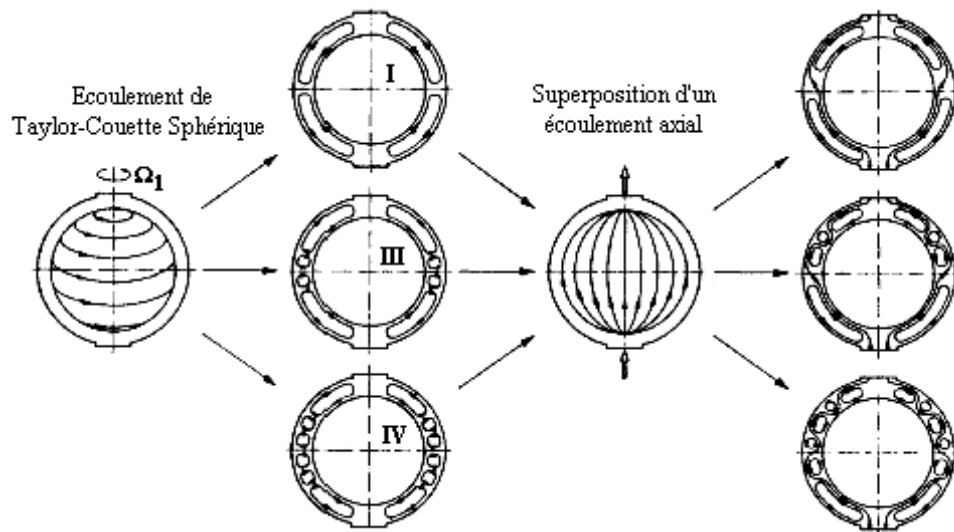


**Figure 1.18** : Espace annulaire excentrique tel que :  $\delta=0.17$ ,  $\bar{\varepsilon}=0.82$  (a)  $Re=551$ , (b)  $Re=575$  et (c)  $Re=620$ .

### VI.3. Effet dynamique (débit axial) :

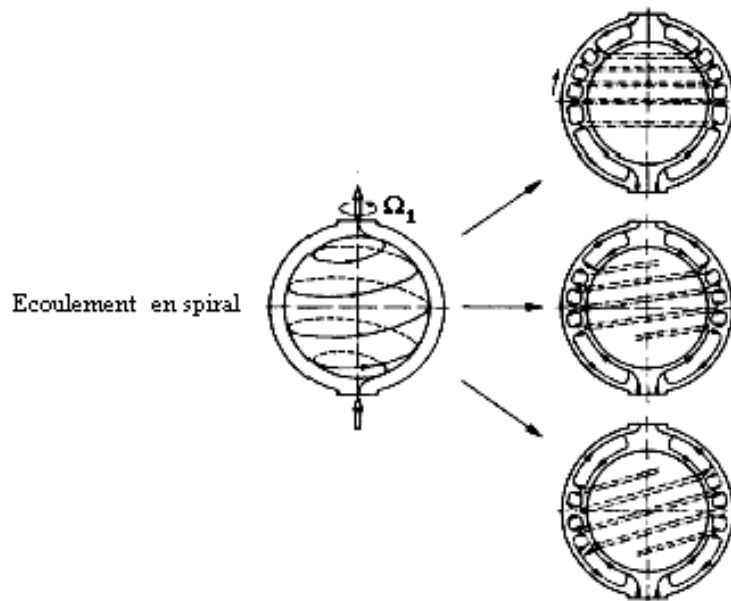
Il s'agit de l'étude de l'écoulement entre deux sphères concentriques en rotation débouchant vers un système ouvert en superposant un écoulement axial dans la direction méridionale. L'effet combiné des deux écoulements a tendance à déplacer la structure (cellule de type Taylor...) dans le sens de l'écoulement axial, ce qui a été confirmé expérimentalement par **K.Bühler** [59] (voir figure 1.19.A - B).

(a)



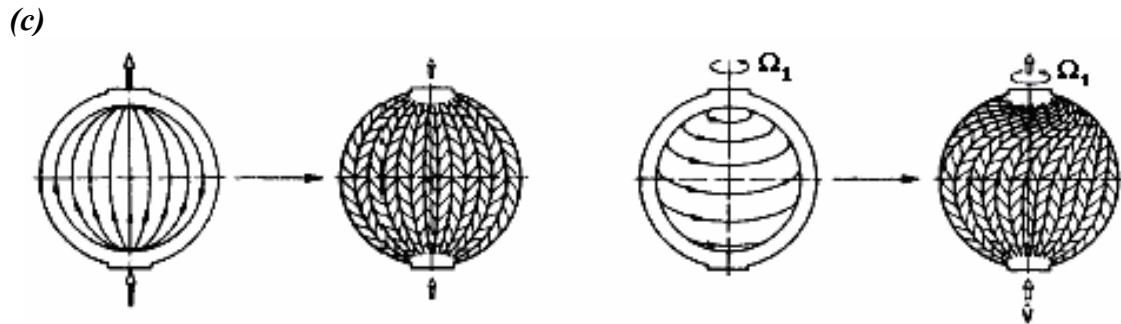
Trois états d'écoulement symétrique sans superposition d'un débit axial. Ces trois états deviennent asymétriques par rapport à l'équateur en superposant un écoulement axial.

(b)



Cellules de Taylor en spirale peuvent être obtenues en fonction de la rotation de la sphère intérieure et du débit axial. Pour une combinaison particulière du nombre de Reynolds  $Re$  de la sphère intérieure et de  $Re_D$  imposé par l'écoulement axial. Les cellules se déplacent dans la direction de l'écoulement axial en augmentant  $Re_D$  et dans la direction opposée en diminuant  $Re_D$ .

**Figure 1.19.A:** Vue d'ensemble des possibilités de structures d'écoulement dans un espace annulaire sphériques avec et sans le débit axial.



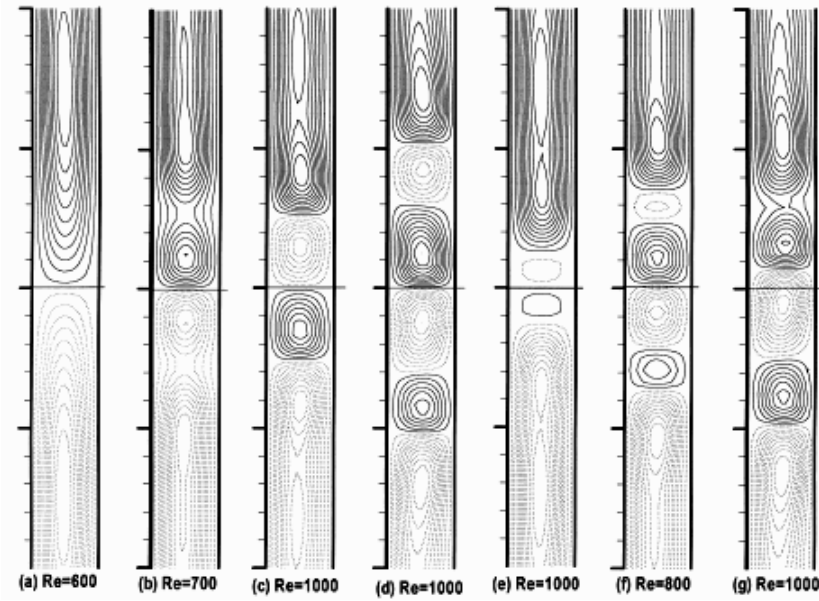
Sans l'effet de rotation de la sphère intérieure, on constate l'apparition des cellules de Göertler sous forme de bananes, en superposant un écoulement axial. Le comportement des ces cellules change, ainsi que, leur taille.

**Figure 1.19.B:** Vue d'ensemble de la structure de l'écoulement dans un espace annulaire sphériques avec et sans le débit axial.

## VI.2. Effet du champ de température :

La convection naturelle entre deux sphères concentriques a été considérablement étudiée, principalement dans le cas où les deux sphères sont au repos. **E.H. Bishop & al [60]**, **J.A. Scalan & al [61]** et **S.H. Yin & al [62]** ont examiné ce cas expérimentalement pour une large gamme du nombre de Prandtl  $Pr$  et de Rayleigh  $Ra$ . La distribution de la température a été mesurée et des expressions de corrélations du nombre de Nusselt–Grashof ont été proposées. Par la suite, **S.N. Singh & J.M. Elliocht [63]** ont proposé une solution en série de puissance pour un milieu stratifié, la température de la sphère intérieure étant maintenue fixe laissant variable celle de la sphère extérieure. Des études expérimentales et numériques plus récentes sur la convection thermique dans un espace annulaire sphérique ont été également réalisés notamment par **M.Liu & al [64]** et **C. Egbers & al [65]** qui récapitulent dans un travail de synthèse des études théoriques, numériques et expérimentales, en appliquant un champ de température au centre de la sphère intérieure (figure 1.20). **W.-J. Luo & R.-J. Yang [66]** se sont intéressés à l'étude numérique de la convection naturelle entre deux sphères concentriques, la sphère intérieure est en rotation et la sphère extérieure est au repos. Une méthode numérique itérative a permis de suivre l'évolution de l'écoulement en fonction d'un paramètre de contrôle comme le nombre de Reynolds afin de déterminer aisément les bifurcations qui se produisent. Un diagramme de bifurcation de l'écoulement est construit pour  $Re < 1200$  débouchant sur la prévision de sept états stationnaires de l'écoulement (figure 1.20). Les états (a) – (d) sont connus dans la littérature par 0–vortex, 0–vortex avec

pincement, 1-vortex et 2-vortex respectivement. Les trois autres états (e) – (g) sont rapportés, ici, pour la première fois.



**Figure 1.20** : Sept états d'écoulement stationnaires prédit par **W.-J. Luo & R.-J. Yang [66]**.

**W.-J. Luo & R.-J. Yang [66]** ont utilisé dans leur étude le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\rho C_p \nu}{k}$  qui vaut  $Pr = 0.72$  dans le cas de l'air. Le nombre de Nusselt local  $Nu_i$  lié à la sphère intérieure et celui de la sphère extérieure ainsi que le Nusselt moyen  $\bar{Nu}_{i,e}$  sont définis respectivement par :

$$Nu_i = -\frac{\eta - 1}{\eta} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)_{r=1}, Nu_e = -\eta(\eta - 1) \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)_{r=\delta}, \bar{Nu}_{i,e} = -\int_0^\pi Nu_{i,e} \left( \frac{\sin \theta}{2} \right) d\theta$$

Sachant que :  $\Theta = \frac{T - T_e}{T_i - T_e}$

$T_i$  : Température de la sphère intérieure.

$T_e$  : Température de la sphère extérieure.  $T_i > T_e$

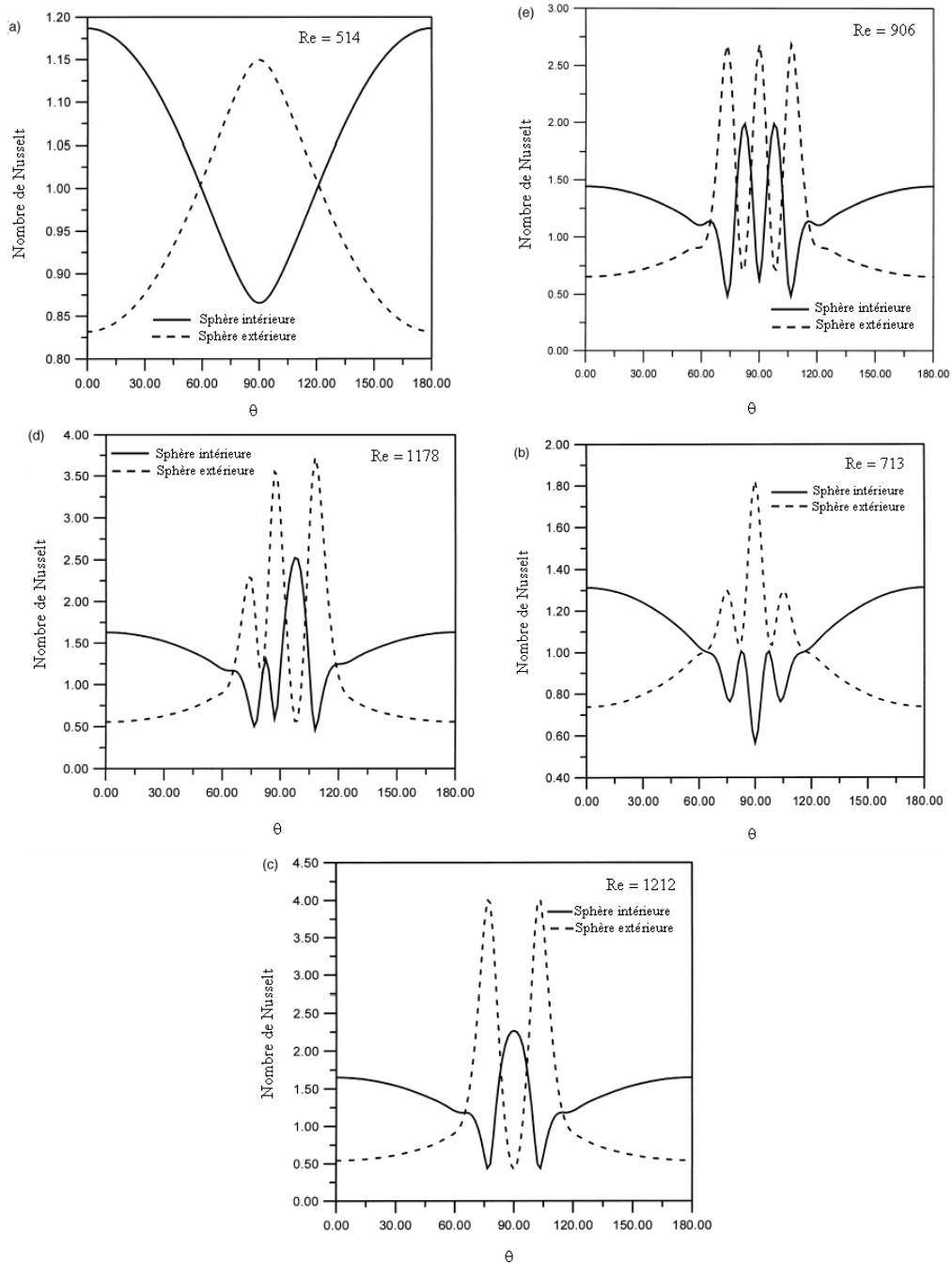
$\eta = \frac{R_1}{R_2}$  : Rapport des rayons.

$Gr = \frac{g V \Delta \rho}{\nu^2 \rho}$  avec  $\frac{\Delta \rho}{\rho}$  mesure le changement de la densité.

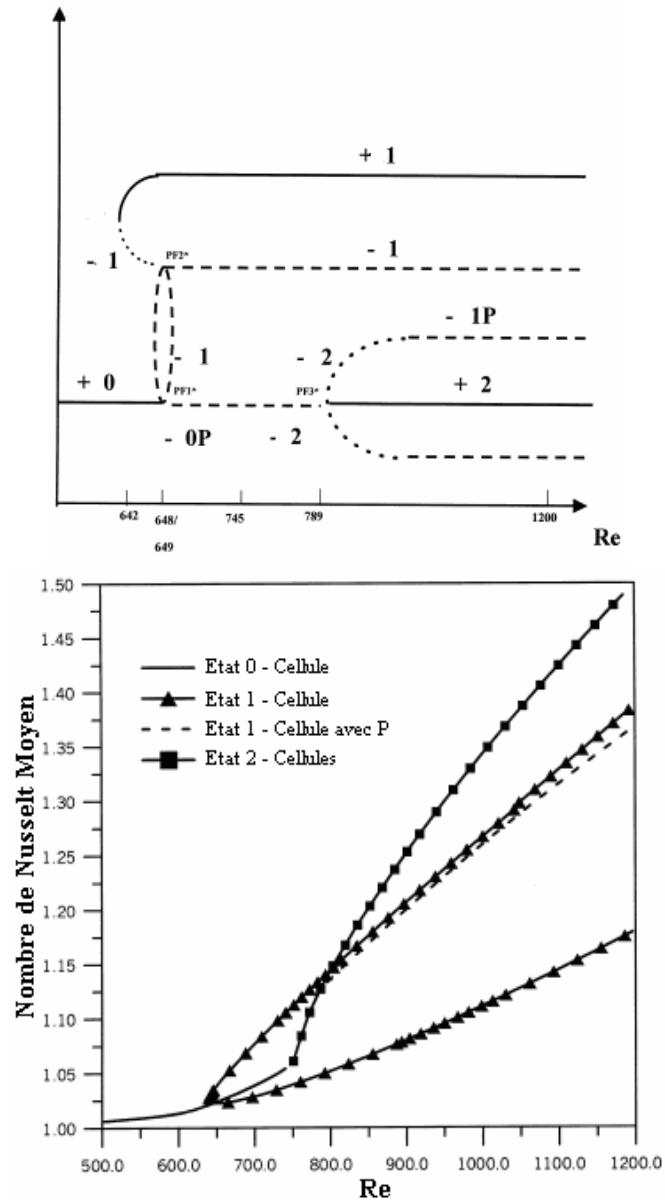
L'analyse de la stabilité linéaire est utilisée pour déterminer de chaque état d'écoulement. Le taux de transfert thermique est aussi simulé et analysé en fonction de la

variation du nombre de Nusselt local  $Nu_i$  ou moyen  $\bar{Nu}_{i,e}$  pour les différents états d'écoulement examinés (figure 1.21 → 1.25).

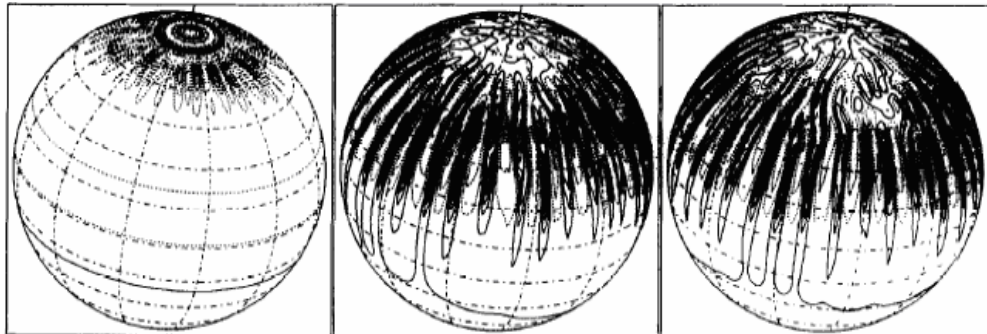
Pour le transfert de chaleur local, ils concluent que les extremums associés au nombre de Nusselt local de la sphère intérieure  $Nu_i$  et celui de la sphère extérieure  $Nu_e$  existent et se sont localisé en fonction de la position angulaire (figure 1.21 et 1.22). **V.V. Travnikov & al [67]** ont effectué une investigation sur la stabilité de la convection naturelle dans un espace annulaire sphérique à partir d'un bilan énergétique, valable pour une large gamme du nombre de Prandtl et pour différents rapports de rayon  $\eta$ .



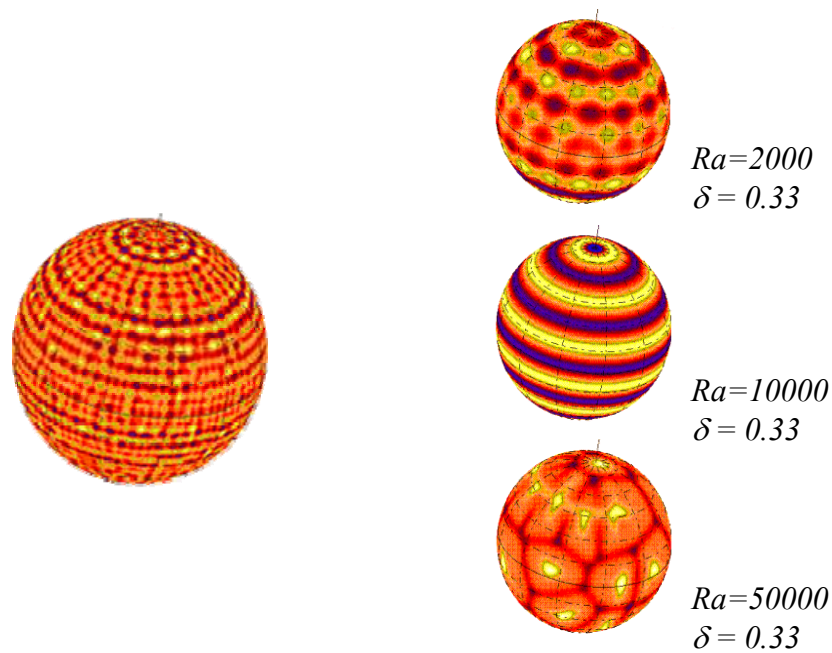
**Figure 1.21 :** Distribution du nombre de Nusselt local  $Nu$  pour les états (a), (b), (c), (d) et (e) en fonction de la position angulaire  $\theta$



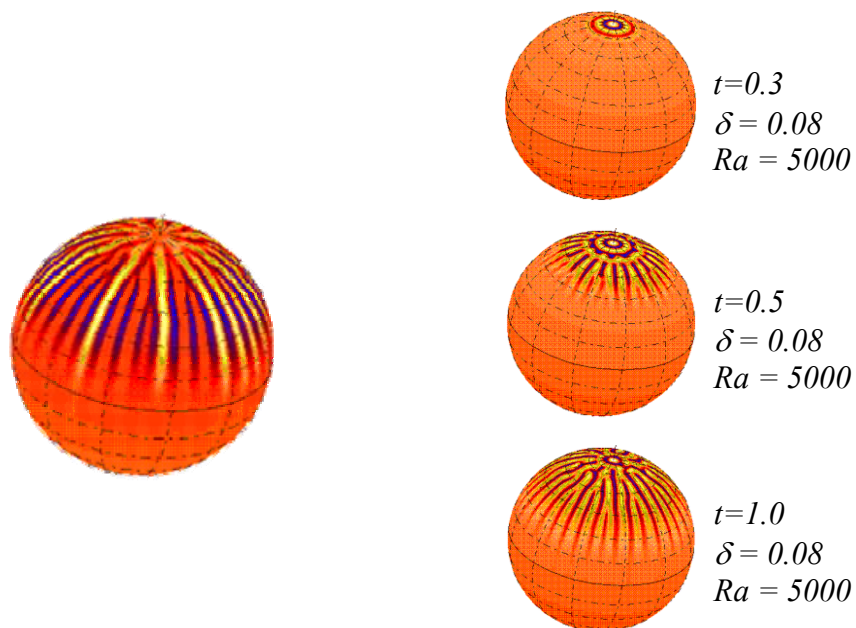
**Figure 1.22 :** Diagramme de Bifurcation (en haut), et la distribution du nombre de Nusselt moyen en fonction du Nombre de Reynolds, pour les différents états d'écoulement, d'après W.J. Luo & R.J. Yang [66].



**Figure 1.23** : Simulation numérique de la convection forcée entre sphères concentriques en rotation sous un champ de température axiale à  $Ra=10000$  d'après **M. Liu & al [64]**



**Figure 1.24** : Phénomène de convection créé par un champ de température de la sphère intérieure vers l'extérieure pour simuler des écoulements analogues que l'on rencontre en Géophysique et Astrophysique.



**Figure 1.25:** Phénomène de convection généré par un champ de température axial du pôle nord vers le pôle sud (configuration cellulaire en forme de bananes).

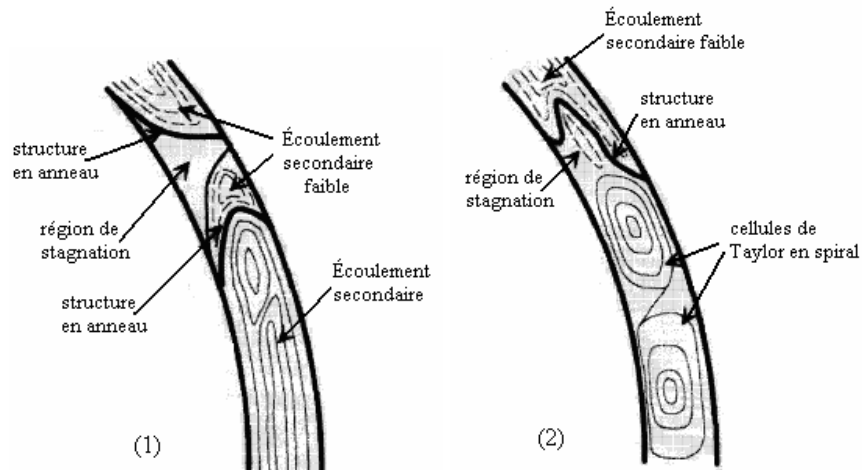
#### VI.4. Effet Rhéologique :

Il s'agit d'évaluer l'effet dû à une modification du champ de concentration massique sur l'écoulement. **H. Yamaguchi & al [17] [18] [19]** ont effectué des expériences sur la transition d'un écoulement de fluide viscoélastique à basse concentration (*500, 1000 et 2000ppm*) macromoléculaire entre deux sphères concentriques (intérieure en rotation et extérieure au repos). Ils observent des états d'écoulement spécifiques aux fluides viscoélastiques (non newtonien) qu'on ne peut observer pour les écoulements ordinaires (fluides newtoniens). Ils constatent la présence de deux régions distinctes au sein de l'espace annulaire sphérique : une région élastique, où l'instabilité de type élastique cause une transition d'écoulement au niveau de la région polaire formant une structure en anneau à la frontière. L'autre correspond à la région inertielle, où l'instabilité centrifuge donnée par l'effet visqueux dans la zone équatoriale où l'écoulement est semblable à celui d'un fluide newtonien. Il apparaît deux différents nombres de Reynolds, l'un spécifique à la région élastique et l'autre est relatif à la région inertielle, ces résultats sont en accord qualitatif avec la corrélation de **Khlebutin** modifiée. Qui conduit à affirmer que la force centrifuge est le mécanisme essentiel de l'apparition des instabilités. Par contre, la viscosité a tendance à retarder leur apparition. A partir de ces expériences, des diagrammes des états d'écoulement ont été tracés qui sont exprimés à l'aide du nombre de Deborah  $De = r_1 \Omega_1 \lambda / (r_1 - r_2)$  où  $\lambda$  correspond du temps de relaxation proportionnel au nombre de Reynolds  $Re$  (figure 1.26 et 1.27).

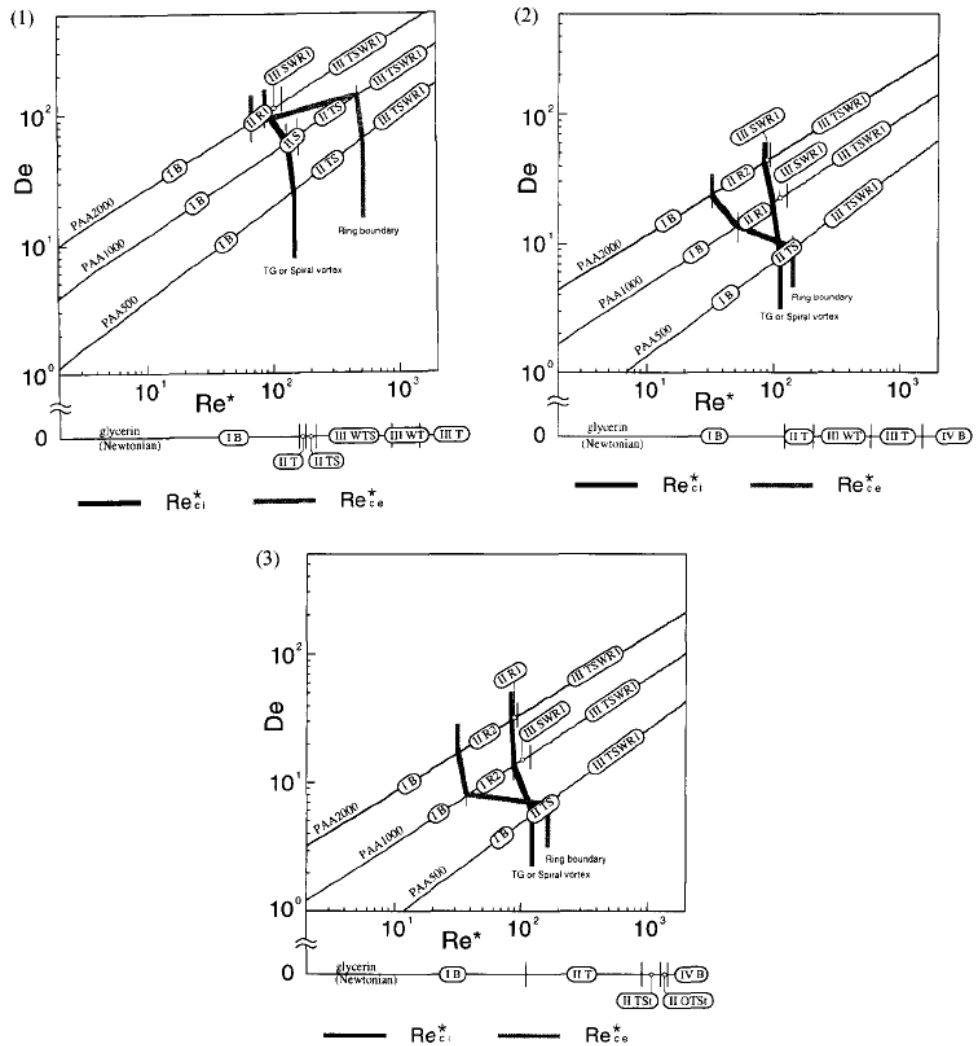
En plus des états d'écoulement caractéristiques de fluide newtonien on récapitule ici tous les états spécifiques au fluide viscoélastique que l'on présente comme suit :

|                          |                                                                                                              |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>I</b>                 | : Ecoulement laminaire de base,                                                                              |
| <b>II<sub>T</sub></b>    | : Cellules de Taylor,                                                                                        |
| <b>II<sub>TS</sub></b>   | : Cellules de Taylor + Cellules de Taylor inclinées,                                                         |
| <b>IIR1</b>              | : Une seule structure en anneau,                                                                             |
| <b>IIR2</b>              | : Deux structures en anneau,                                                                                 |
| <b>IITR1</b>             | : Cellule de Taylor + une structure en anneau,                                                               |
| <b>III<sub>WTS</sub></b> | : Ecoulement en cellules de Taylor ondulées + Cellules de Taylor inclinées                                   |
| <b>III<sub>WS</sub></b>  | : Ecoulement cellules de Taylor ondulées inclinées,                                                          |
| <b>III<sub>WT</sub></b>  | : Ecoulement en cellules de Taylor ondulées,                                                                 |
| <b>IIISWR1</b>           | : Ecoulement oscillatoire + Cellule de Taylor en spirale + un anneau oscillatoire (wavy)                     |
| <b>IIITSWR1</b>          | : Ecoulement oscillatoire + Cellule de Taylor + Cellule de Taylor en spirale + un anneau oscillatoire (wavy) |

(voir les diagrammes associés)



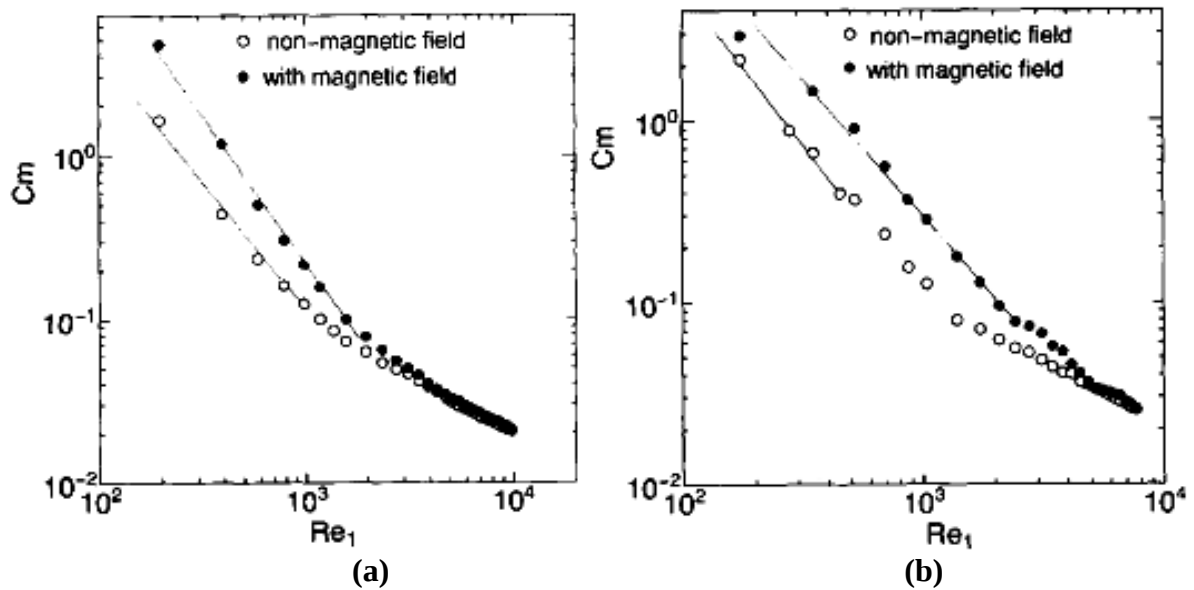
**Figure 1.26 :** Visualisation des états d'écoulement pour  $\delta=0.2$  : (1) mode IIR2  $Re^* = 44$ , (2) mode IIITSWR1  $Re^* = 172$



**Figure 1.27 :** Diagramme des états d'écoulement du nombre de Deborah  $De = r_1 \Omega_1 \lambda / (r_1 - r_2)$  en fonction du  $Re^*$ : (1)  $\delta = 0.0769$ , (2)  $\delta = 0.1538$ , (3)  $\delta = 0.2$ .

### VI.5. Effet du champ magnétique :

**H. Yamaguchi & I. Kobori [68]** ont étudié l'effet du champ magnétique sur le couple résistant mesuré pour un écoulement d'un fluide magnétique entre sphères coaxiales pour deux jeu radial  $\delta=0.11$  et  $\delta=0.25$ . Ils ont pu constater d'importantes différences et présenté des courbes du couple caractéristique  $Cm$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_1$  pour un écoulement avec ou sans champ magnétique imposé. L'évolution de  $Cm$  correspond à un coefficient de couple, sans dimension,  $Cm = Tr / \rho R_1^5 \Omega_1^2$  où  $Tr$  est le couple mesuré,  $R_1$  le rayon de la sphère intérieure,  $\Omega_1$  la vitesse angulaire et  $\rho$  la densité du fluide. Les résultats indiquent que, à des nombres de Reynolds élevés, l'effet hydrodynamique devient prédominant sur le champ magnétique et, par conséquent, le couple caractéristique devient identique à celui sans champ magnétique (figure 1.28).



**Figure 1.28 :** Couple caractéristique  $Cm$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_1$   
 (a)  $\delta=0.11$  (b)  $\delta=0.25$ . D'après **H. Yamaguchi & I. Kobori**

## VII. CONCLUSION

Après recensement et analyse de la littérature spécifique à l'étude de l'écoulement de type Taylor–Couette sphérique, on s'aperçoit que malgré l'existence de nombreux travaux théoriques et expérimentaux, ceux-ci soulèvent plus de questions qu'ils n'apportent de réponses sur les phénomènes fondamentaux régissant les conditions d'apparition des instabilités et le déclenchement du chaos et de la turbulence. Notons, au passage, que les effets de géométrie qui se limitent à l'étude de la largeur d'espace annulaire ont permis de rendre compte de la sensibilité des phénomènes observés à travers la diversité des états d'écoulement mis en évidence en régime de transition laminaire–turbulent.

A travers ces résultats, le but consiste à réunir le maximum d'informations sur les propriétés de l'écoulement afin d'accéder à un mécanisme explicatif décrivant l'apparition des instabilités.

Dans la présente contribution, on cherche à analyser l'influence naturelle de la gravité sur l'écoulement de Taylor–couette sphérique. En effet, l'inclinaison du dispositif d'écoulement à partir de la position verticale vers l'horizontale permet de suivre progressivement l'effet de gravité sur la nature et la structure de l'écoulement. Cette étude a été étendue également à l'effet de la hauteur ou taux de remplissage du fluide générant l'influence de la surface libre afin d'évaluer son impact sur l'évolution de l'écoulement. A notre connaissance, on n'a pas enregistré de travaux consacrés à ces nouveaux phénomènes. En fait, il s'agit d'apprécier leur incidence sur la naissance des instabilités en régime de transition laminaire–turbulent afin de pouvoir contrôler les différents modes d'apparition et de suivre leur évolution vers le chaos.

## **PARTIE II**

### **ETUDE THEORIQUE**

---

#### **CHAPITRE 1**

#### **MISE EN EQUATIONS DU SYSTEME D'ÉCOULEMENT**

##### **INTRODUCTION**

Dans le cas d'un dispositif cylindrique coaxial en rotation, on note que les théories linéaire et non linéaire reproduisent convenablement les données expérimentales au voisinage de la première et seconde instabilité. Inversement et, au stade actuel, on reste dans une méconnaissance relative quand il s'agit de formuler systématiquement ces mêmes lois dans le cas des sphères en rotation. Pour cela, on propose, dans ce chapitre, le formalisme général des équations du mouvement permettant d'évaluer le champ moyen. La détermination de celui-ci conditionne très fortement les prévisions effectuées à partir de la théorie linéaire qui constitue une étape très importante dans l'étude de la stabilité du mouvement. En particulier, la théorie linéaire fournit un moyen efficace pour déterminer les dimensions spatiales d'un type d'instabilité choisi mais ne permet pas d'envisager, par hypothèse même, les questions relatives à la loi de croissance de l'amplitude en fonction du temps. L'interaction de la perturbation avec le mouvement moyen nécessite alors la prise en compte des termes non linéaires dans les équations du mouvement. Par conséquent, l'approche du mouvement laminaire, ou champ moyen, est à la base du succès de la prévision des instabilités dans ce type d'écoulement que ce soit en théorie linéaire ou non linéaire.

## I. CARACTERISATION DU SYSTEME D'ECOULEMENT

Dans le cas d'un fluide à propriétés physiques  $(\rho, \mu)$  constantes, on se propose d'étudier son mouvement dans l'espace défini entre deux sphères concentriques en rotation telles que la sphère intérieure est en rotation  $\Omega = \Omega_1$  et la sphère extérieure étant fixe  $\Omega_2 = 0$ .

Le système d'écoulement entre sphères est soumis à une inclinaison  $\alpha$  par rapport à la verticale, coïncidant avec l'axe de rotation, et telle que  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  (Fig. 2.1).

On choisit, pour effectuer notre étude, un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  (figure.II.1). On admet que la position radiale  $r$  de l'écoulement est définie dans le domaine :  $r \in [R_1, R_2]$

Soit  $R_1 \leq r \leq R_2$  tels que :  $R_1$  : Le rayon de la sphère intérieure.

$R_2$  : Le rayon de la sphère extérieure.

Le domaine angulaire est précisé comme suit :

- Position azimutale :  $\varphi \in [0, 2\pi]$  :  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
- Position méridionale :  $\theta \in [0, \pi]$  :  $0 \leq \theta \leq \pi$

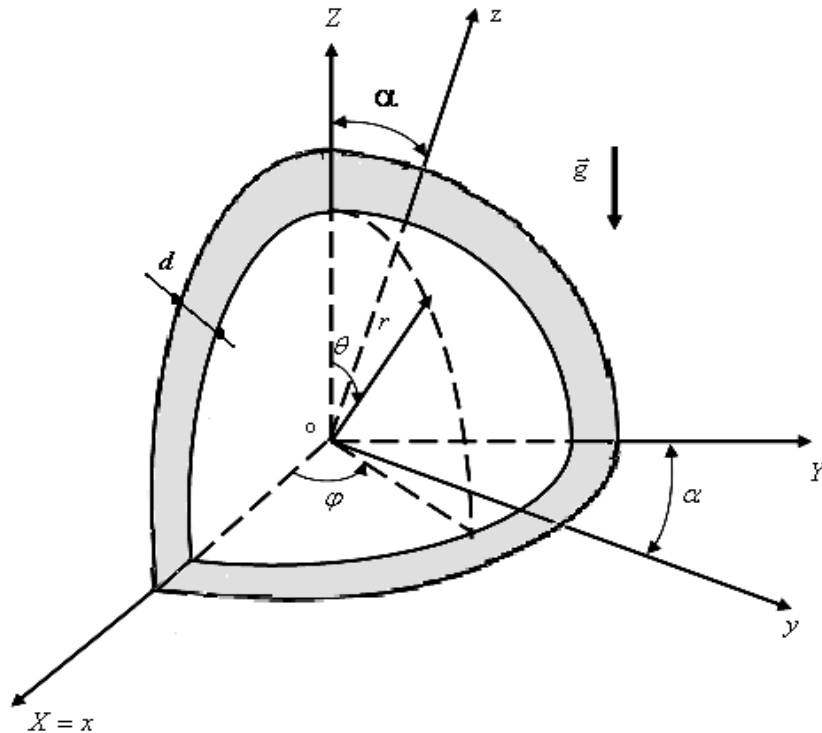


Figure II.1 : Système d'écoulement en coordonnées sphériques

Les équations du mouvement entre les deux sphères s'expriment en fonction de la pression  $P$  et les composantes de la vitesse  $U(U_r, U_\theta, U_\varphi)$ .

## II. MISE EN EQUATION DU MOUVEMENT

### II.1. Equation de continuité

Elle découle du principe de conservation de matière exprimée en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2U_r}{r} + \frac{U_\theta}{r} \cot \theta = 0 \quad (2.1)$$

### II.2. Equations de conservation de la quantité du mouvement

Elles découlent du principe fondamental de la dynamique exprimant la conservation de la quantité du mouvement en projection dans la représentation sphérique :

$\vec{e}_r$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{U_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} - \frac{U_\theta^2 + U_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + g_r + \\ \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r U_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2U_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right. \\ \left. - \frac{2 \cot \theta}{r^2} U_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\vec{e}_\theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} + \frac{U_r U_\theta}{r} - \frac{U_\varphi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + g_\theta + \\ \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r U_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r^2 \sin \theta} \right. \\ \left. - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\vec{e}_\varphi$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\varphi}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} + \frac{U_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{U_r U_\varphi}{r} + \frac{U_\theta U_\varphi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + g_\varphi \\ \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r U_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} \right. \\ \left. - \frac{U_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

### II.3. Expression de la gravité $\vec{g}$

En se référant au repère cartésien dans le système incliné, on établit l'expression de  $\vec{g}$  qui s'écrit comme suit :

$$\vec{g} = -g \cos \alpha \vec{e}_z + g \sin \alpha \vec{e}_y \quad (2.5)$$

Exprimons  $\vec{g}$  dans le repère sphérique en utilisant la matrice de passage :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

Celle-ci permet d'obtenir l'expression vectorielle de la gravité:

$$\vec{g} = g(\sin \alpha \sin \theta \sin \varphi - \cos \alpha \cos \theta) \vec{e}_r + g(\sin \alpha \cos \theta \sin \varphi + \cos \alpha \sin \theta) \vec{e}_\theta + g \sin \alpha \cos \varphi \vec{e}_\varphi \quad (2.6)$$

#### Cas particulier :

Lorsque l'on est dans la situation d'un dispositif vertical  $\alpha = 0$ , on retrouve l'expression classique de la force de pesanteur :

$$\vec{g} = -g \cos \theta \vec{e}_r + g \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (2.7)$$

### II.4. Conditions aux limites

Elles expriment la notion d'adhérence du fluide aux parois du système d'écoulement :

Sphère intérieure en rotation :

$$r = R_1 : U_r = U_\theta = 0, \quad U_\varphi = V_1 \sin \theta = R_1 \Omega_1 \sin \theta \quad (2.8)$$

Sphère extérieure maintenue fixe :

$$r = R_2 : U_r = U_\theta = U_\varphi = 0 \quad (2.9)$$

## III. THEORIE LINEAIRE

Dans l'approche linéaire du problème considéré, on suppose valable l'hypothèse de Rayleigh qui consiste à négliger les termes quadratiques liés à la perturbation  $(v_r, v_\theta, v_\varphi, p)$  devant le champ moyen  $(\bar{V}_r, \bar{V}_\theta, \bar{V}_\varphi, \bar{P})$ .

Ceci se traduit par l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} U_r &= \bar{V}_r + v_r & v_r &\ll \bar{V}_r \\ U_\theta &= \bar{V}_\theta + v_\theta & v_\theta &\ll \bar{V}_\theta \\ U_\varphi &= \bar{V}_\varphi + v_\varphi & v_\varphi &\ll \bar{V}_\varphi \\ P &= \bar{P} + p & p &\ll \bar{P} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dans la suite, on garde les termes principaux et on néglige les termes du second ordre.

### III.1. CHAMP MOYEN

On écrit les équations relatives au champ moyen hydrodynamique en terme de vitesse  $(\bar{V}_r, \bar{V}_\theta, \bar{V}_\varphi)$  et de pression  $\bar{P}$  :

- **Equation de conservation de la masse**

$$\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\bar{V}_r}{r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \cot \theta = 0 \quad (2.11)$$

Contrairement à l'écoulement entre cylindres coaxiaux où les effets de la composante radiale axiale  $W$  n'existent pas, en raison de le système axial du mouvement dans cette direction, dans la configuration entre sphères coaxiales le caractère de l'écoulement de base est de nature tridimensionnelle.

- **Equations de conservation de la quantité du mouvement**

$\bar{e}_r$  :

$$\begin{aligned} \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \varphi} - \frac{\bar{V}_\theta^2}{r} - \frac{\bar{V}_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + g(\sin \alpha \sin \theta \sin \varphi - \cos \alpha \cos \theta) + \\ \nu \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2\bar{V}_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} \bar{V}_\theta \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

$\bar{e}_\theta$  :

$$\begin{aligned} \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\bar{V}_r \bar{V}_\theta}{r} - \frac{\bar{V}_\varphi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + g(\sin \alpha \cos \theta \sin \varphi + \cos \alpha \sin \theta) + \\ \nu \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{V}_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

$\bar{e}_\varphi$  :

$$\begin{aligned} \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\bar{V}_r \bar{V}_\varphi}{r} - \frac{\bar{V}_\theta \bar{V}_\varphi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \varphi} + g \sin \alpha \cos \varphi \\ \nu \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \varphi} \right. \\ \left. - \frac{\bar{V}_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

• **Conditions aux limites**

Pour le champ moyen on a :

- Paroi mobile :  $r = R_1 : \bar{V}_r = \bar{V}_\theta = 0 \quad \text{et} \quad \bar{V}_\varphi = R_1 \Omega_1 \sin \theta$  (2.15)

- Paroi fixe :  $r = R_2 : \bar{V}_r = \bar{V}_\theta = \bar{V}_\varphi = 0$  (2.16)

**III.2. CHAMP PERTURBE**

On écrit les équations relatives au champ perturbé ( $v_r, v_\theta, v_\varphi$ ) et  $p$

• **Equation de conservation de la masse**

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta = 0 \quad (2.17)$$

Là, aussi, on note sur cette équation le caractère tridimensionnel lié aux contributions de toutes les composantes  $v_r, v_\varphi$  et  $v_\theta$  à l'ensemble de l'écoulement.

• **Equations de conservation de la quantité du mouvement**

$\vec{e}_r$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_r}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \varphi} - \frac{2\bar{V}_\theta v_\theta}{r} - \frac{2\bar{V}_\varphi v_\varphi}{r} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

$\vec{e}_\theta$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_r \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\bar{V}_r v_\theta}{r} + \frac{v_r \bar{V}_\theta}{r} \\ & - \frac{2\bar{V}_\varphi v_\varphi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

$\bar{e}_\varphi$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_r \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\bar{V}_r v_\varphi}{r} + \frac{v_r \bar{V}_\varphi}{r} \\ & + \frac{\bar{V}_\theta v_\varphi}{r} \cot \theta + \frac{v_\theta \bar{V}_\varphi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v \left[ \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

### • Conditions aux limites

Les conditions aux limites du champ perturbé s'écrivent :

• sur la sphère intérieure :  $r = R_1 : v_r = v_\theta = v_\varphi = 0$  (2.21)

• Sur la sphère extérieure:  $r = R_2 : v_r = v_\theta = v_\varphi = 0$  (2.22)

Les équations (2.21) et (2.22) traduisent l'adhérence du fluide sur les parois mobile et fixe.

## IV. SYSTEME D'EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

### IV.1. Grandeurs adimensionnées

#### • Variables :

- Espace :  $r^* = \frac{r}{d}$  tel que  $R_1 \leq r \leq R_2$  et  $\frac{R_1}{d} \leq r^* \leq \frac{R_2}{d}$

Sachant que :  $R_2 = R_1 + d$  d'où  $\frac{1}{\delta} \leq r^* \leq 1 + \frac{1}{\delta}$

- Temps :  $t^* = \frac{t\nu}{d^2}$

#### • Champ moyen :

$$\bar{V}_r^* = \frac{\bar{V}_r}{R_1 \Omega_1} \quad , \quad \bar{V}_\theta^* = \frac{\bar{V}_\theta}{R_1 \Omega_1} \quad , \quad \bar{V}_\varphi^* = \frac{\bar{V}_\varphi}{R_1 \Omega_1} \quad \text{et} \quad \bar{P}^* = \frac{\bar{P}}{\rho V_1^2} = \frac{\bar{P}}{\rho R_1^2 \Omega_1^2}$$

#### • Champ perturbé:

$$v_r^* = \frac{v_r}{R_1 \Omega_1} \quad , \quad v_\theta^* = \frac{v_\theta}{R_1 \Omega_1} \quad , \quad v_\varphi^* = \frac{v_\varphi}{R_1 \Omega_1} \quad \text{et} \quad p^* = \frac{p}{\rho V_1^2} = \frac{p}{\rho R_1^2 \Omega_1^2}$$

Pour ne pas alourdir les notations, on va omettre par la suite, l'étoile dans toutes les grandeurs adimensionnelles liées aux équations à résoudre.

## IV.2. Equations du champ moyen

Celui-ci est régi par le système d'équations suivant :

- **Equation de conservation de la matière**

$$\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\bar{V}_r}{r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \cot \theta = 0 \quad (2.23)$$

- **Equations de conservation de la quantité du mouvement**

$\bar{e}_r$  :

$$\begin{aligned} \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \varphi} - \frac{\bar{V}_\theta^2}{r} - \frac{\bar{V}_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + \left( \frac{\cos \alpha}{Fr^2 \Gamma} \right) (\sin \theta \sin \varphi \tan \alpha - \cos \theta) + \\ \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2\bar{V}_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} \bar{V}_\theta \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

$\bar{e}_\theta$  :

$$\begin{aligned} \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\bar{V}_r \bar{V}_\theta}{r} - \frac{\bar{V}_\varphi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + \left( \frac{\cos \alpha}{Fr^2 \Gamma} \right) (\cos \theta \sin \varphi \tan \alpha + \sin \theta) \\ + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{V}_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

$\bar{e}_\varphi$  :

$$\begin{aligned} \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\bar{V}_r \bar{V}_\varphi}{r} + \frac{\bar{V}_\theta \bar{V}_\varphi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \varphi} + \left( \frac{\cos \alpha}{Fr^2 \Gamma} \right) (\cos \varphi \tan \alpha) \\ \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \varphi} \right. \\ \left. - \frac{\bar{V}_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Où on l'a noté par :  $Re = \frac{\Omega_1 R_1 d}{\nu}$  le nombre de Reynolds déjà défini précédemment.

Et :  $Fr = \frac{V_1}{\sqrt{gH}}$  désigne le nombre de Froude qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces de gravité agissant sur l'écoulement considéré.

On note :  $\frac{1}{Fr^{*2}} = \frac{\cos \alpha}{Fr^2}$  tel que  $Fr^*$  représente le nouveau nombre de Froude caractérisant l'effet d'inclinaison du dispositif.

- En position verticale :  $\alpha = 0$ ,  $Fr = Fr^*$  ici la gravité n'agit pas sur la dynamique des structures.
- En position horizontale :  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $Fr^*$  n'existe pas quoique la gravité joue un rôle considérable sur la dynamique de l'écoulement.

On note aussi que  $\Gamma$  représente le facteur d'aspect qui présente le rapport de la hauteur  $H$  de l'écoulement par l'espace annulaire  $d=R_2-R_1$  et tel que  $\Gamma = \frac{H}{d}$  :

$$\text{Avec } 0 \leq H \leq 2R_2 \quad \text{soit} \quad 0 \leq \Gamma \leq 2(1 + \delta)$$

Avec ces données le système d'équations précédent s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\bar{V}_r}{r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \cot \theta = 0 \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \varphi} - \frac{\bar{V}_\theta^2}{r} - \frac{\bar{V}_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + \frac{1}{Fr^{*2} \Gamma} (\sin \theta \sin \varphi \tan \alpha - \cos \theta) + \\ \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2\bar{V}_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} \bar{V}_\theta \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\bar{V}_r \bar{V}_\theta}{r} - \frac{\bar{V}_\varphi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + \frac{1}{Fr^{*2} \Gamma} (\cos \theta \sin \varphi \tan \alpha + \sin \theta) +$$

$$\frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{V}_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{V}_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\cos \theta}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} \right] \quad (2.29)$$

$$\bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\bar{V}_r \bar{V}_\varphi}{r} + \frac{\bar{V}_\theta \bar{V}_\varphi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \varphi} + \frac{1}{Fr^{*2} \Gamma} (\cos \varphi \tan \alpha)$$

$$\frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\bar{V}_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \quad (2.30)$$

• **Conditions aux limites associées :**

- En paroi mobile :  $r = 1 : \quad \bar{V}_\varphi = \sin \theta \quad (2.31)$

- En paroi fixe :  $r = 1 + \delta : \quad \bar{V}_r = \bar{V}_\theta = \bar{V}_\varphi = 0 \quad (2.32)$

**IV.3. CHAMP PERTURBE**

On procède de la même façon que précédemment pour écrire les équations associées au champ perturbé.

• **Equation de conservation de la masse :**

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta = 0 \quad (2.33)$$

• **Equations de conservation de la quantité du mouvement:**

Ces équations s'écrivent en faisant intervenir le nombre de Reynolds seulement :

$\vec{e}_r$  :

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial v_r}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \varphi} - \frac{2\bar{V}_\theta v_\theta}{r} - \frac{2\bar{V}_\varphi v_\varphi}{r} =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] \quad (2.34)$$

$\vec{e}_\theta$  :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_r \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\bar{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\bar{V}_r v_\theta}{r} + \frac{v_r \bar{V}_\theta}{r} \\ & - \frac{2\bar{V}_\varphi v_\varphi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} \right. \\ & \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

$\vec{e}_\varphi$  :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_r \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\bar{V}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\bar{V}_r v_\varphi}{r} + \frac{v_r \bar{V}_\varphi}{r} \\ & + \frac{\bar{V}_\theta v_\varphi}{r} \cot \theta + \frac{v_\theta \bar{V}_\varphi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

• **Conditions aux limites :**

- Sphère intérieure en rotation :  $r = 1 : v_r = v_\theta = v_\varphi = 0$  (2.37)

- Sphère extérieure fixe :  $r = 1 + \delta : v_r = v_\theta = v_\varphi = 0$  (2.38)

**IV.4. Etude adimensionnelle dans le cas d'un dispositif incliné partiellement rempli :**

• **Changement de variables :**

Pour la raison qui est liée aux effets combinés de  $\alpha$  et de  $\Gamma$ , il apparaît nécessaire de procéder à un changement de variables sur les composantes de la vitesse et de la pression. On se propose de mettre en évidence un nombre caractéristique qui regroupe, à la fois, les trois paramètres de contrôle agissant sur le mouvement : Le nombre de Taylor  $Ta$ , Le nombre de Froude  $Fr^*$  modifié par l'angle d'inclinaison  $\alpha$  et le facteur d'aspect  $\Gamma$ .

Le nombre de Taylor  $Ta$  met en évidence la spécificité des effets centrifuges et de la viscosité à l'aide du nombre de Reynolds  $Re$  corrigé par le facteur géométrique  $\delta = d/R_1$  et tel que :

$$Ta = Re_{cyl} \left( \frac{d}{R_1} \right)^{1/2} = Re_{sph} \left( \frac{d}{R_1} \right)^{3/2}$$

Où les paramètres de contrôle  $Re_{cyl}$  et  $Re_{sph}$  désignent les nombre de Reynolds respectifs aux géométries cylindrique et sphérique.

$$\text{Avec : } Re_{cyl} = \frac{R_1 \Omega_1 d}{\nu} \quad \text{et} \quad Re_{sph} = \frac{R_1 \Omega_1^2}{\nu} \quad (2.39)$$

L'examen des équations précédentes met en évidence au niveau des effets de gravité le nombre  $N_B$  suivant :

$$N_B = \frac{Ta \cos \alpha}{\Gamma Fr^2} = \frac{Ta}{Fr^{*2} \Gamma} \quad (2.40)$$

$$\text{Avec} \quad Fr^* = \frac{Fr}{\sqrt{\cos \alpha}} \quad (2.41)$$

Plus explicitement, le choix adéquat des variables pour obtenir le nombre  $N_B$  dans nos équations sont donnés par les changements d'échelles suivants en terme de vitesse et de pression :

- Champ moyen  $\bar{U} = \bar{V}_r \sqrt{Ta}$  ,  $\bar{V} = \bar{V}_\theta \sqrt{Ta}$  ,  $\bar{W} = \bar{V}_\varphi \sqrt{Ta}$  et  $\bar{P} = \tilde{P} Ta$
- Champ perturbé  $u = v_r \sqrt{Ta}$  ,  $v = v_\theta \sqrt{Ta}$  ,  $w = v_\varphi \sqrt{Ta}$  et  $p = \tilde{p} Ta$

#### IV.5. Nouvelle forme des équations adimensionnelles

Dans ces conditions, les équations du champ moyen et du champ perturbé deviennent :

##### 5.1. Champ moyen

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varphi} + \frac{2\bar{U}}{r} + \frac{\bar{V}}{r} \cot \theta = 0 \quad (2.39)$$

• Equations de conservation de la quantité du mouvement:

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} + \frac{\bar{W}}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varphi} - \frac{\bar{V}^2}{r} - \frac{\bar{W}^2}{r} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} + N_B (\sin \theta \sin \varphi \tan \alpha - \cos \theta) + \\ \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \varphi^2} - \frac{2\bar{U}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} \bar{V} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} + \frac{\bar{W}}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{U}\bar{V}}{r} - \frac{\bar{W} \cot \theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} + N_B (\cos \theta \sin \varphi \tan \alpha + \sin \theta) + \\ \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} - \frac{\bar{V}}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \theta} + \frac{\bar{W}}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{U}\bar{W}}{r} + \frac{\bar{V}\bar{W}}{r} \cot \theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} + N_B (\cos \varphi \tan \alpha) + \\ \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi} \right. \\ \left. - \frac{\bar{W}}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Les équations précédentes révèlent que seul le second membre est systématiquement affecté par le paramètre de contrôle  $N_B$  au niveau du terme de gravité.

Si on pose :  $\Pi(r, \theta, \varphi) = P(r, \theta, \varphi) + N_B (\sin \theta \sin \varphi \tan \alpha - r \cos \theta)$

Les équations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} + \frac{\bar{W}}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varphi} - \frac{\bar{V}^2}{r} - \frac{\bar{W}^2}{r} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \varphi^2} - \frac{2\bar{U}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} \bar{V} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} + \frac{\bar{W}}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{U}\bar{V}}{r} - \frac{\bar{W} \cot \theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} - \frac{\bar{V}}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \theta} + \frac{\bar{W}}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{U}\bar{W}}{r} + \frac{\bar{V}\bar{W}}{r} \cot \theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \theta^2} \right. \\ \left. + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi} - \frac{\bar{W}}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

Finalement avec la notation adoptée pour la nouvelle expression de la pression  $\Pi$ , tout se passe au niveau de l'écoulement comme si celui-ci n'est pas sensible aux effets d'inclinaison  $\alpha$ . D'après les équations (2.43, 2.44, 2.45) on a fait disparaître l'intervention de  $\alpha$  de manière explicite.

- **Conditions aux limites associées :**

$$r = 1 : \quad \bar{W} = \sin \theta \sqrt{Ta} \quad (2.46)$$

$$r = 1 + \delta : \quad \bar{U} = \bar{V} = \bar{W} = 0 \quad (2.47)$$

Ces relations apparaissent inchangées par rapport aux conditions imposées en (2.37) et (2.38).

## 5.2. Champ perturbé

On obtient, en définitive, le système d'équations suivant :

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{2u}{r} + \frac{v}{r} \cot \theta = 0 \quad (2.48)$$

• Equations de conservation de la quantité du mouvement:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{Ta}} \frac{\partial^2}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial r} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} + \frac{\bar{W}}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \varphi} - \frac{2\bar{V}v}{r} - \frac{2\bar{W}w}{r} = \\ & - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right. \\ & \left. - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{Ta}} \frac{\partial^2}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial r} + \bar{U} \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} + \frac{\bar{W}}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{U}v}{r} + \frac{u\bar{V}}{r} \\ & - \frac{2\bar{W}w}{r} \cot \theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right. \\ & \left. - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{Ta}} \frac{\partial^2}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial r} + \bar{U} \frac{\partial w}{\partial r} + u \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \theta} + \frac{\bar{W}}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{U}w}{r} + \frac{u\bar{W}}{r} + \frac{\bar{V}w}{r} \cot \theta \\ & + \frac{v\bar{W}}{r} \cot \theta = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right. \\ & \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

D'après l'expression des équations précédentes, il semble que le champ perturbé n'est pas affecté directement par l'effet d'inclinaison  $\alpha$ . En fait, celui-ci, intervient via le champ moyen à travers une modification relative de ses composantes

- Conditions aux limites associées :

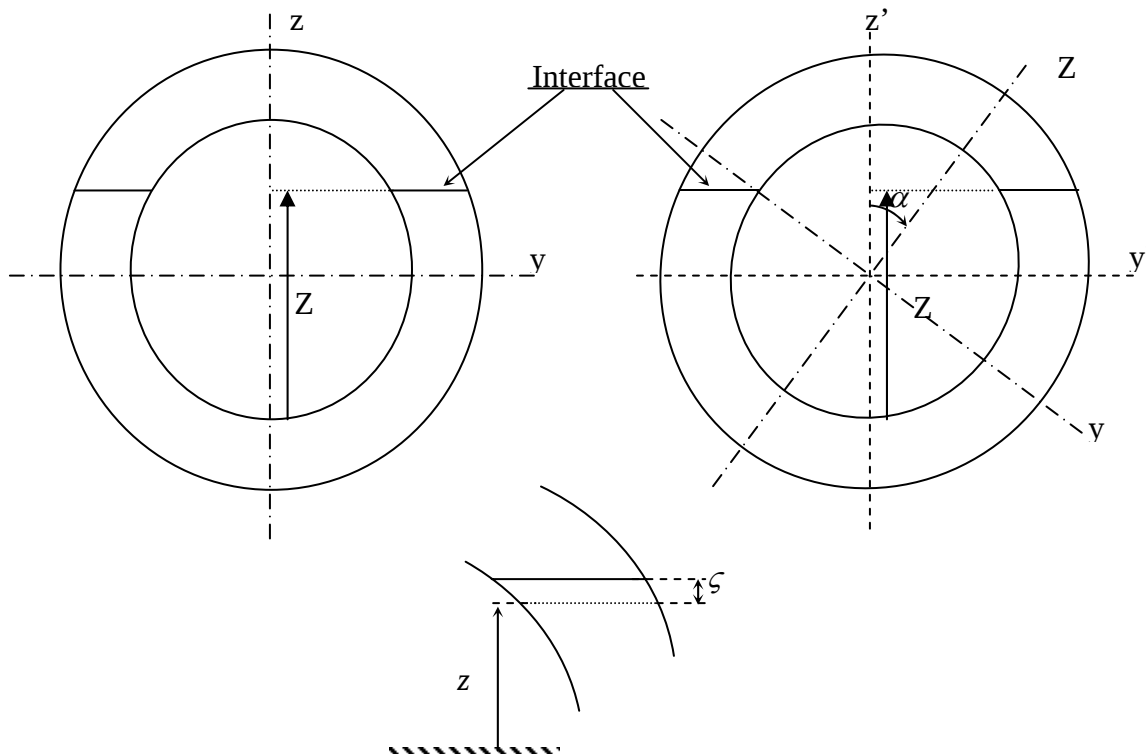
$$r = 1 : u = v = w = 0 \quad (2.52)$$

$$r = 1 + \delta : u = v = w = 0 \quad (2.53)$$

Conditions qui restent globalement inchangées.

## V. FORMULATION DE L'INTERACTION DE LA SURFACE LIBRE SUR L'ÉCOULEMENT :

Il s'agit d'une approche de la dynamique interfaciale liée à l'interaction de la surface libre sur l'écoulement de Taylor–Couette sphérique.



**Figure II. 2 :** Schématisation de la surface libre

Caractérisation de l'interface :

$$Z = z_0 + z \quad \text{Tel que } z = \zeta(r, \varphi, \theta, t)$$

Avec  $z_0$  la position d'équilibre autour de laquelle évolue la fluctuation  $\xi$  correspondant à l'évolution de la surface libre. Par conséquent  $\xi$  désigne la déformation de la surface libre qui est fonction du temps et de la position radiale et angulaire.

On distingue deux situations intéressantes à analyser :

### 1°/ Cas d'un dispositif vertical

L'étude de la dynamique interfaciale conduit à poser les deux équations suivantes :

- Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{r} \cot \theta = 0$$

- Equation de Bernoulli :

Si il est possible de négliger les effets de viscosité et lorsque les forces en volume dérivent d'un potentiel  $\phi$ , il vient :

$$\frac{P}{\rho} + gZ + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = F(t) \quad \text{Avec } V(u, \bar{V} + v, w)$$

Equation dynamique interfaciale qui est valable le long d'une ligne de courant

$$\text{Soit } z = \zeta(r, \varphi, \theta, t) \quad \text{d'ou} \quad \frac{D}{Dt}(z - \zeta) = 0$$

Avec  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$  Qui désigne l'opérateur de dérivée particulaire, on évalue :

$$\frac{D}{Dt} z = \frac{\partial}{\partial t} z + u \frac{\partial}{\partial r} z + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} z + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} z = \frac{v}{r}$$

$$\text{Et aussi, } \frac{D}{Dt} \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}$$

L'hypothèse d'approximation linéaire fournit :

$$\frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \ll \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{D'où} \quad \frac{D}{Dt} \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

L'équation interfaciale donne alors :  $\frac{v}{r} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$

Le champ de vitesse découle d'un potentiel  $\Phi$  :  $v = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$  on a :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

Et l'équation de Bernoulli

$$\frac{\bar{P}}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - gZ - \frac{u^2 + (\bar{V} + v)^2 + w^2}{2} + F(t)$$

En négligeant les termes quadratiques on obtient :

$$\frac{\bar{P}}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - gZ - \frac{\bar{V}^2 + 2\bar{V}v}{2} + F(t)$$

Par ailleurs on a la propriété suivante :

$$Z = z_0 + \zeta$$

L'équation de Bernoulli se simplifie considérablement :

$$\frac{\bar{P}}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - g(z_0 + \zeta) - \frac{\bar{V}^2 + 2\bar{V}v}{2} + F(t)$$

Trois cas peuvent se présenter :

1° cas :  $F(t)=0$  cela signifie que la surface libre n'interagit pas sur l'écoulement.

2° cas :  $F(t)=Cte$  cela indique que la surface libre a subi une déformation qui reste constante.

3° cas  $F(t)=F(t)$  quelconque : cela signifie que la surface libre peut subir une déformation variable en fonction du temps.

## 2°/ Cas d'un dispositif incliné

Dans le système incliné, il y a nécessairement des modifications induites par l'inclinaison au niveau de l'équation de Bernoulli

$$\frac{\bar{P}}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - g Z \cos \alpha - \frac{\bar{V}^2 + 2\bar{V}v^2}{2} + F(t)$$

$$Z = z_0 + \zeta$$

Par conséquent la surface libre agit sur l'écoulement à travers la pression.

L'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{\bar{P}}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - g(z + \zeta) \cos \alpha - \frac{\bar{V}^2 + 2\bar{V}v^2}{2} + F(t)$$

A  $\alpha=0$ , on retrouve le cas classique précédent.

Trois cas peuvent se présenter :

1° cas :  $F(t)=0$  cela signifie que la surface libre n'interagit pas sur l'écoulement.

2° cas :  $F(t)=Cte$  cela indique que la surface libre a subi une déformation qui reste constante.

3° cas  $F(t)=F(t)$  quelconque : cela signifie que la surface libre peut subir une déformation variable en fonction du temps.

La résolution du problème interfacial doit se faire, dans chaque cas, de manière compatible avec les équations régissant l'écoulement excluant la surface libre.

## **VI. CONCLUSION**

Précédemment, on a pu établir les équations générales du mouvement régissant le champ des vitesses moyennes et le champ perturbé associé aux conditions aux limites. Mais l'existence de trois composantes relatives au champ moyen des vitesses, ajoutée aux effets d'inclinaison du système d'écoulement ainsi que la variation de la hauteur compliquent considérablement la résolution du problème envisagé. Au stade actuel, et au vu de l'ampleur de la difficulté on se limite volontairement à une étude phénoménologique du champ moyen dans le cadre d'un dispositif d'écoulement incliné et totalement rempli qui fera l'objet du prochain chapitre.

## **PARTIE II**

### **ETUDE THEORIQUE**

---

## **CHAPITRE 2**

### **ETUDE PHENOMENOLOGIQUE ET NUMERIQUE**

#### **INTRODUCTION**

Si l'expérience montre que l'instabilité de Taylor subsiste en turbulence, il n'a pas été possible jusqu'à présent d'élaborer un modèle permettant de réaliser la prévision des cellules dans le domaine de la transition et en régime turbulent complètement développé. En effet, même avec des hypothèses simplificatrices que l'on évoque couramment pour résoudre les équations de la stabilité en écoulement laminaire perturbé. Celle-ci demeure en générale difficilement exploitable.

On tente ici d'examiner la question en proposant un modèle de type phénoménologique essentiellement valable pour décrire le champ des vitesses moyennes. Le modèle sera validé par une comparaison par rapport aux profils expérimentaux obtenus par les autres auteurs. Enfin, une simulation numérique et mise en œuvre pour mettre en évidence l'effet de l'inclinaison sur les cellules de Taylor dans le cadre d'un système vertical totalement rempli.

## I. ETUDE PHENOMENOLOGIQUE

### I.1. Détermination du champ moyen des vitesses

Dans ce paragraphe, on effectue une étude phénoménologique du champ des vitesses moyenne  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$  pour généraliser les profils qui ont été déterminés expérimentalement. Pour cela, on propose une expression de la vitesse moyenne tangentielle  $\bar{W}$  basée sur le profil proposé par A. BOUABDALLAH [71] valable pour la géométrie cylindrique,

$$\bar{W}(x, \theta) = \frac{I}{2} \left[ \left( 1 + (1 - 2x)^\delta \right) \sin \theta \right] e^{-\frac{7}{4}(x \cos \theta)^\delta}$$

$$\text{Tel que : } x = \frac{r - R_1}{d} = \frac{1}{d}r - \frac{1}{\delta} \quad \text{avec } \delta = \frac{d}{R_1} : \text{ jeu radial}$$

Celle-ci est écrite dans un système de grandeurs sans dimensions. Le paramètre  $\delta$  désigne le paramètre de cisaillement turbulent rapporté au cisaillement laminaire évalué par déduction pour le même nombre de Reynolds (ou nombre de Taylor), sachant que  $\delta = 2\ell + 1$ , il n'y a que les valeurs impaires qui sont admissibles (donnent des profils correcte et valable). Ce type de profil met en évidence le terme de puissance, sensible à l'influence de la turbulence sur l'écoulement moyen.

Le champ moyen proposé, ci-dessus, vérifie effectivement les conditions aux limites :

- $x = 0 \quad \bar{W} = \sin \theta$
- $x = 1 \quad \bar{W} = 0$

On vérifie, au passage, pour  $\delta = 1$ , que l'on retrouve le profil linéaire régissant l'écoulement laminaire de base. Pour  $\delta > 1$ , l'allure de  $\bar{W}$  a un comportement voisin des profils expérimentaux mesurés par différents auteurs [44] [48].

De même, pour la composante radiale de la vitesse moyenne, on a :

$$\bar{U}(x, \theta) = \frac{3}{7\delta} \sin \theta (\sin 2\theta + \cos 2\theta - 1) x^2 (x - 1)^2 (x^3 - 1) e^{-\frac{7}{4}(x \cos \theta)^\delta}$$

Il reste à déterminer la composante méridionale  $\bar{V}$  qui sera déduite de l'équation de continuité :

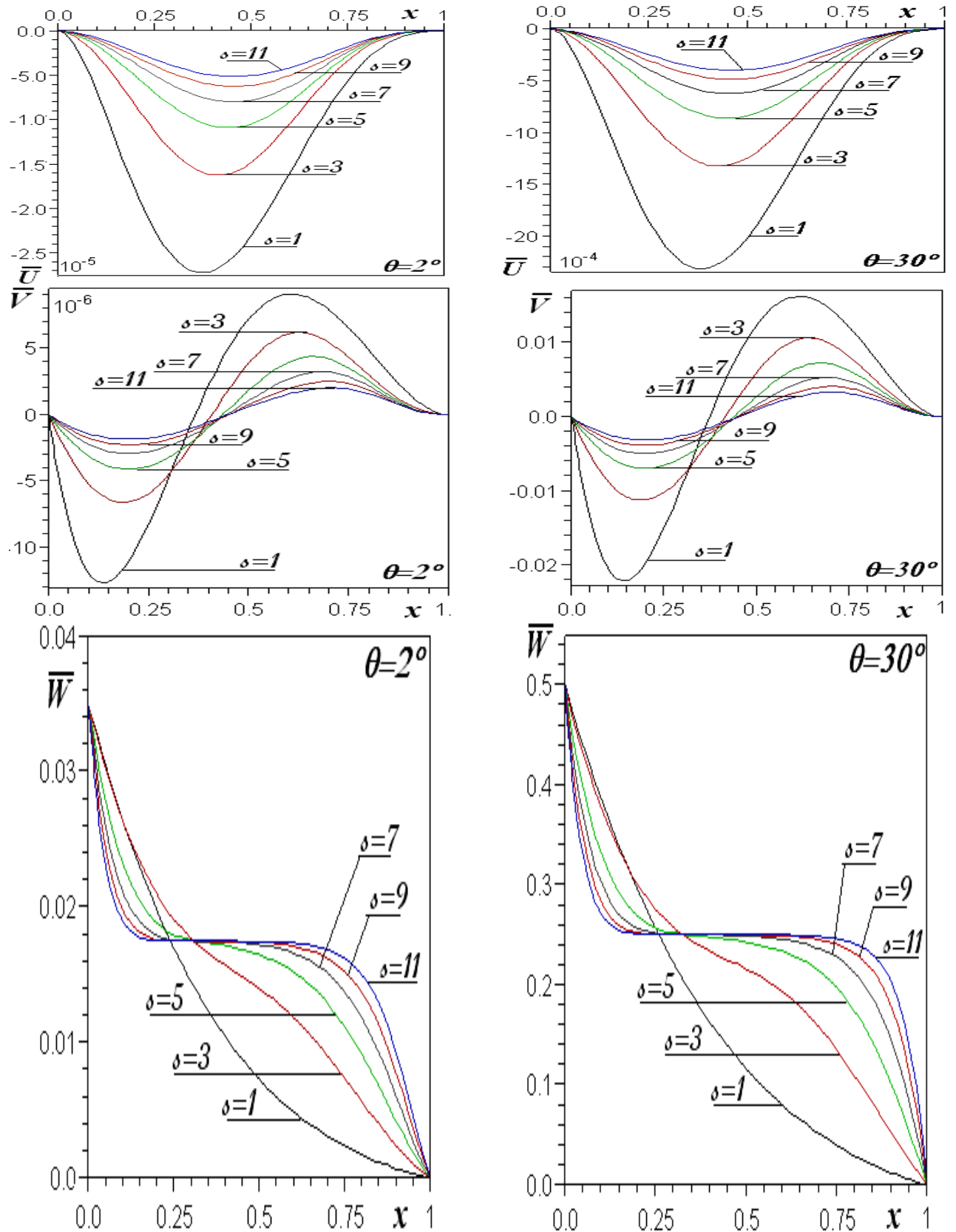
$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} + \frac{2\bar{U}}{r} + \frac{\bar{V}}{r} \cot \theta = 0$$

Sachant que  $r = d \left( x + \frac{l}{\delta} \right)$  et  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial x}$  l'équation de continuité s'écrit :

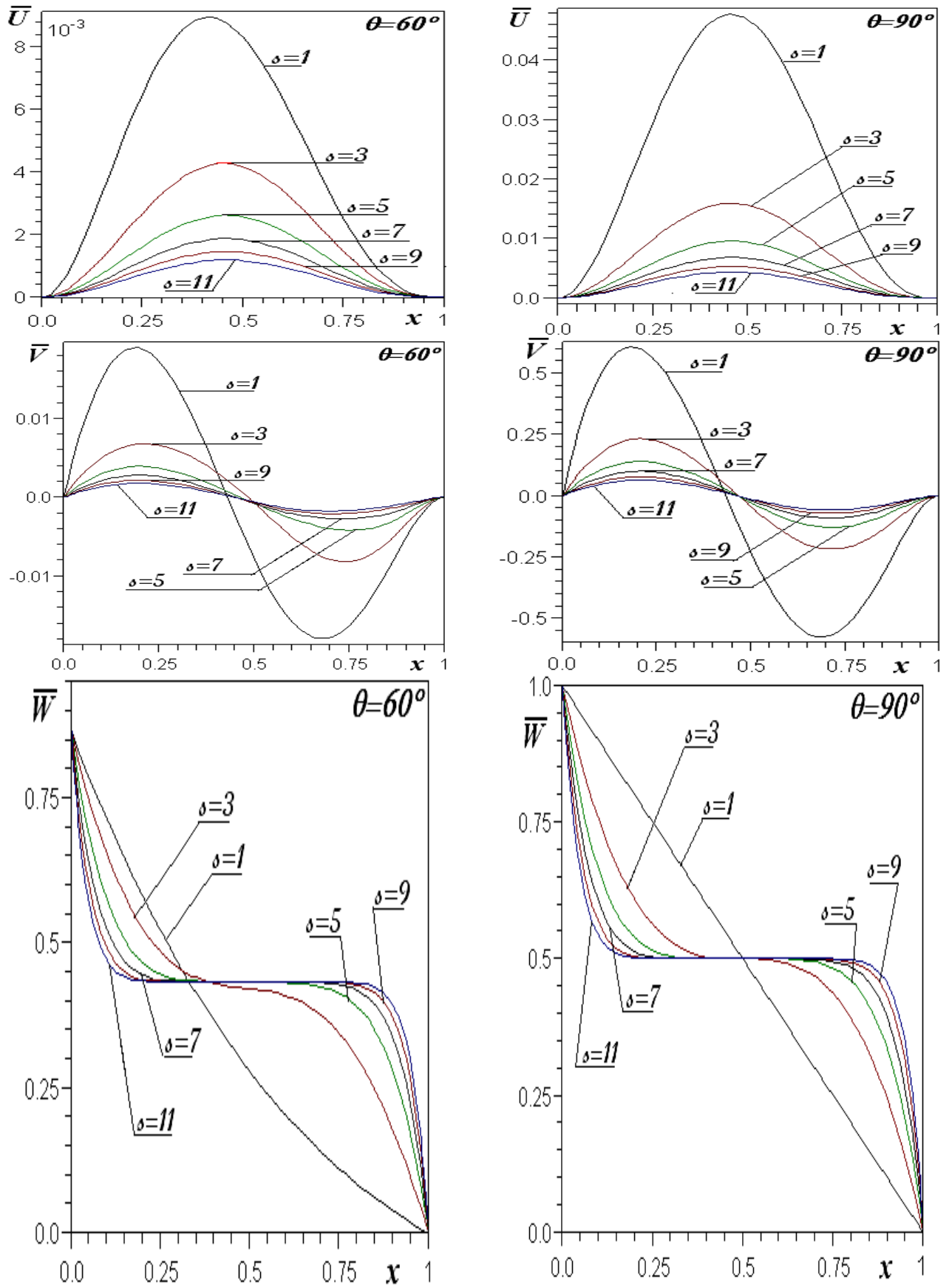
$$\left( x + \frac{l}{\delta} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} + 2\bar{U} + \bar{V} \cot \theta = 0$$

Après résolution de cette équation, on détermine la composante méridionale  $\bar{V}$  :

$$\bar{V}(x, \theta) = \frac{-3}{4\delta \sin \theta} x (x-l)^2 \int_0^\theta (\sin \theta)^2 (\sin 2\theta + \cos 2\theta - 1) e^{\frac{7}{4}(x \cos \theta)^\delta} \left\{ \left[ \delta (x-l)(x^2 + x + l)^\delta \right] \right. \\ \left. (x\delta + l)(x \cos \theta) + \frac{8}{7} \left[ 1 - \frac{5}{2}x^4 - \left( \frac{7}{2} + \delta \right) x^3 - (l + \delta)x^2 + x \right] \right\} d\theta$$



**Figure II.2.1:** Distribution du champ des vitesses moyennes ( $\bar{U}$  composante radiale,  $\bar{V}$  composante meridionale,  $\bar{W}$  composante tangentielle ou azimuthale)



**Figure II.2.2:** Distribution du champ des vitesses moyennes  
( $\bar{U}$  composante radiale,  $\bar{V}$  composante meridionale,  $\bar{W}$  composante tangentielle ou azimuthale)

## I.2. Validation du modèle phénoménologique

Les profils phénoménologiques obtenus ont mis en évidence le fait que la composante tangentielle  $\bar{W}$  du champ de vitesses moyennes semble identiques à ceux établi par **M. Wimmer** [48] et **K. Nakabayashi** [44]. (Figure II.2.3 et II.2.4)

Au vue d'une étude comparative entre auteurs, l'erreur commise dans l'approximation des profils obtenus par **M. Wimmer** est proche de 3.5%, par contre celle, commise pour approcher le profil donné par **K. Nakabayashi** est voisin de 7%. Par conséquent, le profil des vitesses moyennes proposé semble valable surtout pour les configurations d'espaces annulaire minces  $\delta \ll 1$ .

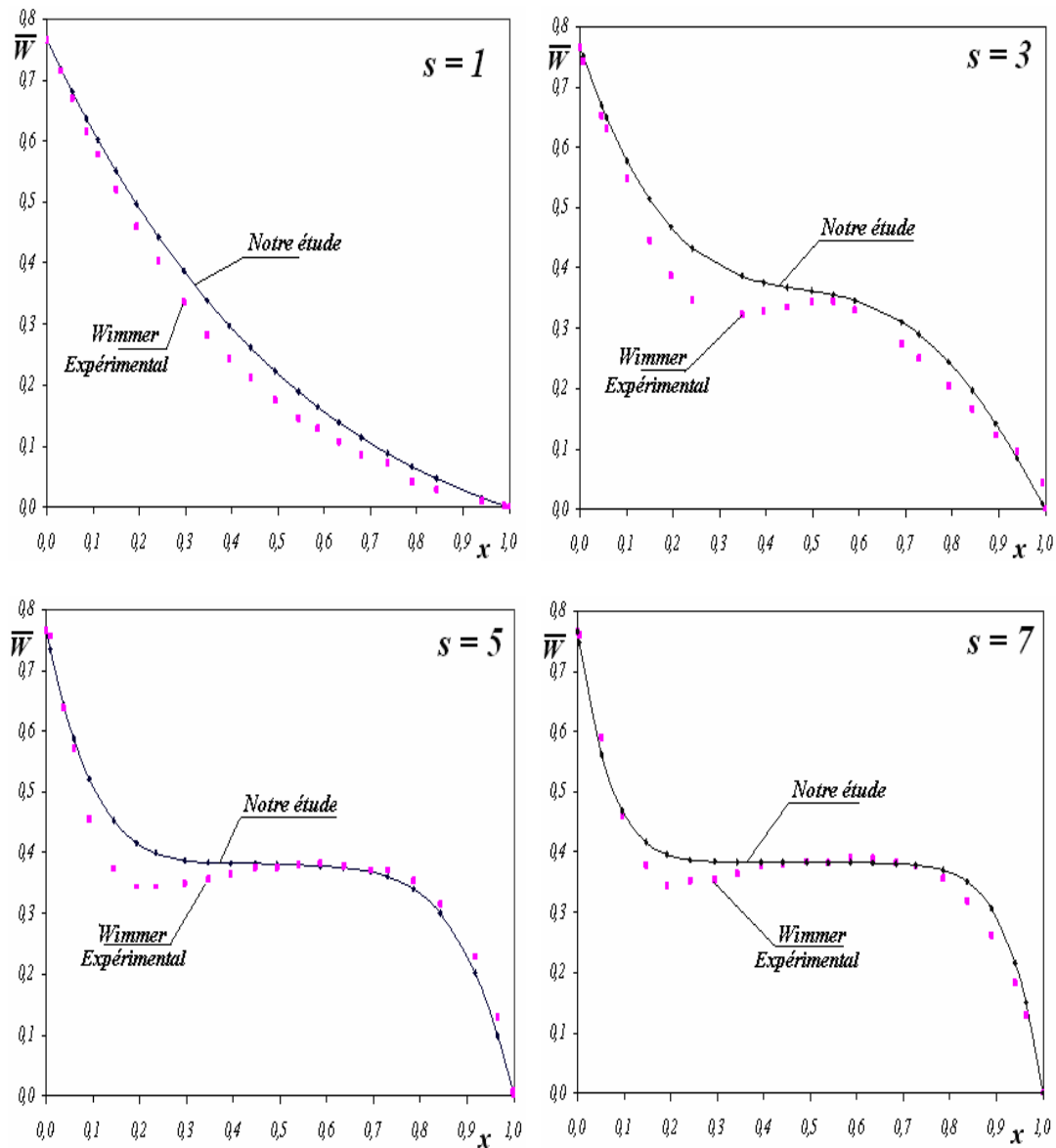


Figure II.2.3 : Comparaison entre les profils phénoménologiques et expérimentaux obtenus par **M. Wimmer** [48], pour différentes pente  $s$ ,  $\theta = 50^\circ$ .

$\bar{W}$  composante tangentielle ou azimutale

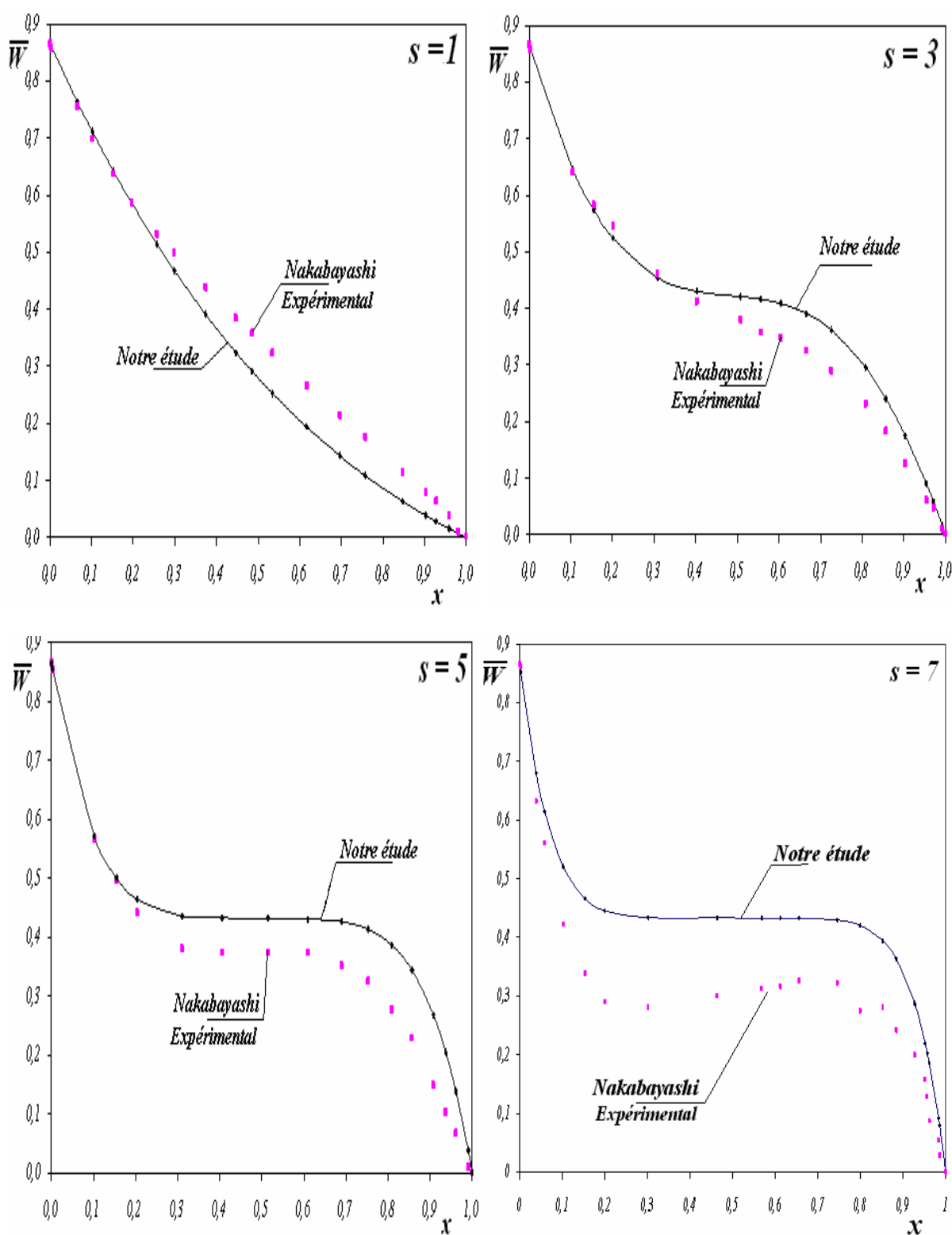


Figure II.2.4 : Comparaison entre les profils phénoménologiques et expérimentaux obtenus par K. Nakabayashi [44], pour différentes pente  $s$ ,  $\theta = 60^\circ$

## II. APPROCHE NUMERIQUE : simulation de l'écoulement entre sphères coaxiales

L'objectif principal de cette étude numérique est de fournir une description assez réaliste de l'écoulement dans l'espace annulaire compris entre deux sphères coaxiales en rotation.

Après un bref rappel concernant le maillage de calcul et les conditions aux limites utilisées, on simule l'écoulement entre sphères coaxiales. Dans un premier temps, on examine l'influence de l'inclinaison  $\alpha$  sur l'écoulement pour un système totalement rempli avec un jeu radial  $\delta=0.08$ . En second lieu, on détermine le tracé du profil des vitesses moyennes dans la direction tangentielle et cela dans un but de comparaison avec notre profil et ceux obtenus expérimentalement par **M. Wimmer**[48].

### II.1. Maillage du domaine de calcul

Nous présentons dans ce paragraphe, la méthode utilisée pour simuler numériquement l'écoulement compris entre sphères coaxiales. Toutes les simulations sont menées avec le code de calcul FLUENT qui utilise la méthode des volumes finis.

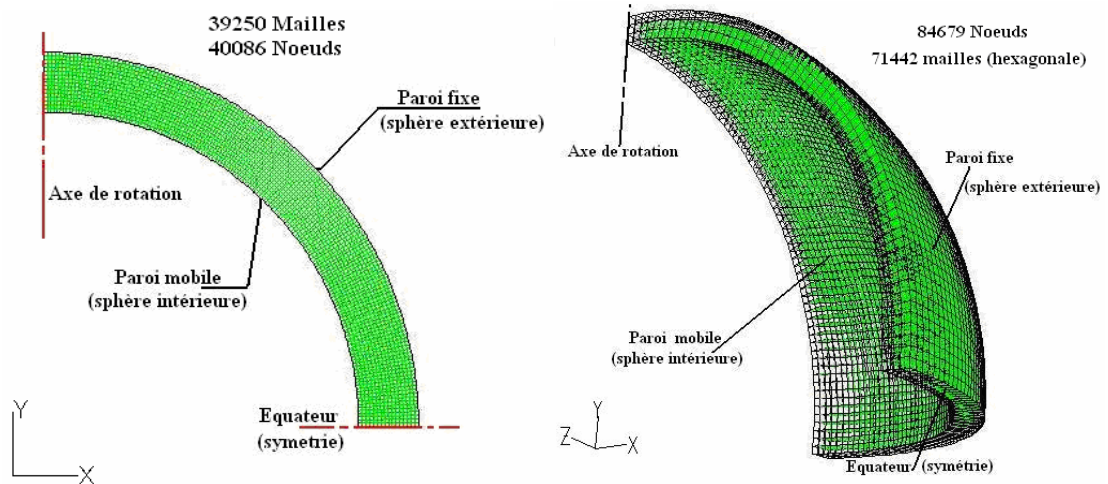
On présente d'abord le maillage du domaine de calcul après quoi on aborde les conditions aux limites imposées.

Compte tenu de la symétrie du domaine, les calculs sont réalisés sur un huitième ( $\frac{1}{8}$ ) de l'espace annulaire compris entre deux sphères coaxiales. Les simulations sont réalisées pour un jeu radial  $\delta = 0.08$ . La simulation numérique est exécutée en deux étapes, la première étape, elle est réalisée dans un domaine bidimensionnel pour déterminer l'effet de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ . La seconde correspond à une simulation tridimensionnelle afin de déterminer le profil de la composante tangentielle  $W$  du champ des vitesses moyennes.

La bonne description de la structure de l'écoulement étant conditionnée par la finesse du maillage, on a imposé un maillage uniforme dans toutes les directions. Les équations de NAVIER-STOKES (incompressible et stationnaire) sont résolues sur un maillage structuré : l'orthogonalité des lignes du maillage simplifie les équations régissant l'écoulement et leurs méthodes de résolution. Chaque maille (ou volume de contrôle) est hexaédrique et peut être

repérée par trois indices ( $i, j$  et  $k$ ). Toutes les équations sont résolues aux centres des volumes de contrôle et les valeurs aux frontières de ces volumes sont estimées par interpolation avec un schéma au second ordre.

Enfin, le calcul converge lorsque la somme des résidus de l'ensemble des variables calculées est inférieure à  $10^{-3}$ .



**Figure II.2.5 :** Domaine de calcul, maillage et conditions aux limites des simulations.  
(Bidimensionnel et Tridimensionnel)

## II.2. Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont indiquées sur la figure II.2.5 permettant de distinguer :

**Condition de symétrie :** afin de limiter le nombre total de maille, une condition de symétrie est appliquée autour de l'équateur.

**Condition de paroi fixe (sphère extérieure) :** les conditions en parois imposent que la vitesse doit être nulle.

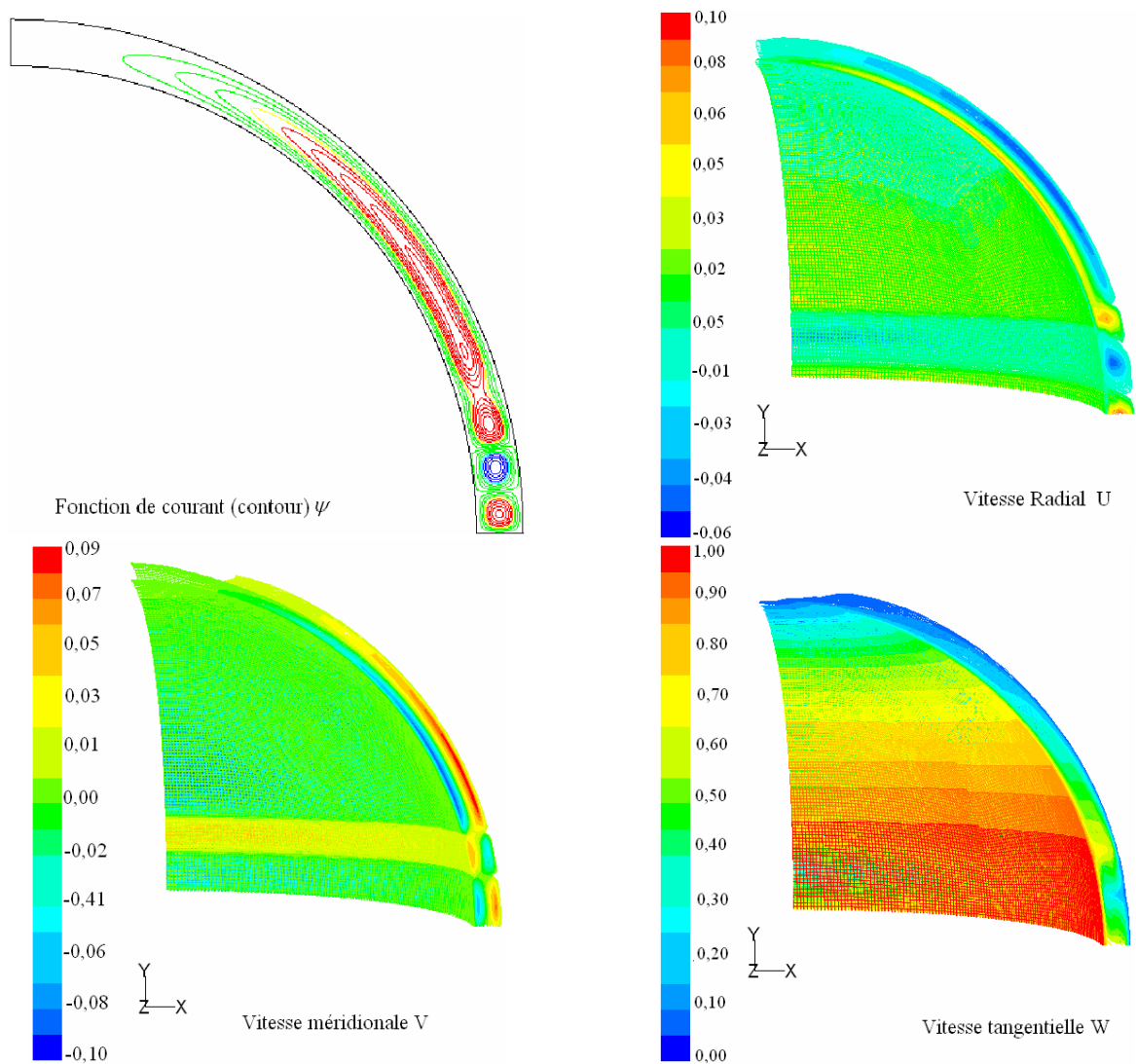
**Condition de paroi mobile (sphère intérieure) :** on impose une vitesse de rotation de sphère intérieure  $\Omega_i$ .

**Condition de rotation :** enfin, on impose un axe de rotation de la sphère intérieure.

En appliquant toutes ces contraintes, on arrive à simuler un écoulement proche des observations expérimentales.

### III.3. Effet de l'inclinaison $\alpha$ sur les cellules de Taylor – cas d'un système d'écoulement en charge :

Pour des raisons de symétrie, on ne présente que le quadrant positif de l'espace annulaire compris entre deux sphères coaxiales, l'écoulement complet étant obtenu par symétrie. Nous avons procédé, ainsi, de façon à retrouver les résultats obtenus par **M. Wimmer** [1, 48] au voisinage du seuil critique  $Tc_I=43$ , correspondant à l'apparition des cellules de Taylor pour admettre la validité des résultats obtenus par simulation numérique. C'est dans ces conditions qu'on s'est intéressé aux lois d'évolution de la fonction de courant et de la distribution du champ des vitesses qu'on a représenté en figure II.2.6. En particulier, la fonction de courant  $\psi$  met en évidence l'existence de deux ondes, soit quatre cellules de Taylor, et dont la dissymétrie axiale qui est localisée au niveau de la dernière cellule devient apparente lorsque la position  $\theta$  est croissante.



**Figure II.2.6 :** Contours des différentes composantes du champ des vitesses moyennes  
 $Re=2000$ ,  $Ta=46$  et  $\delta = 0.08$

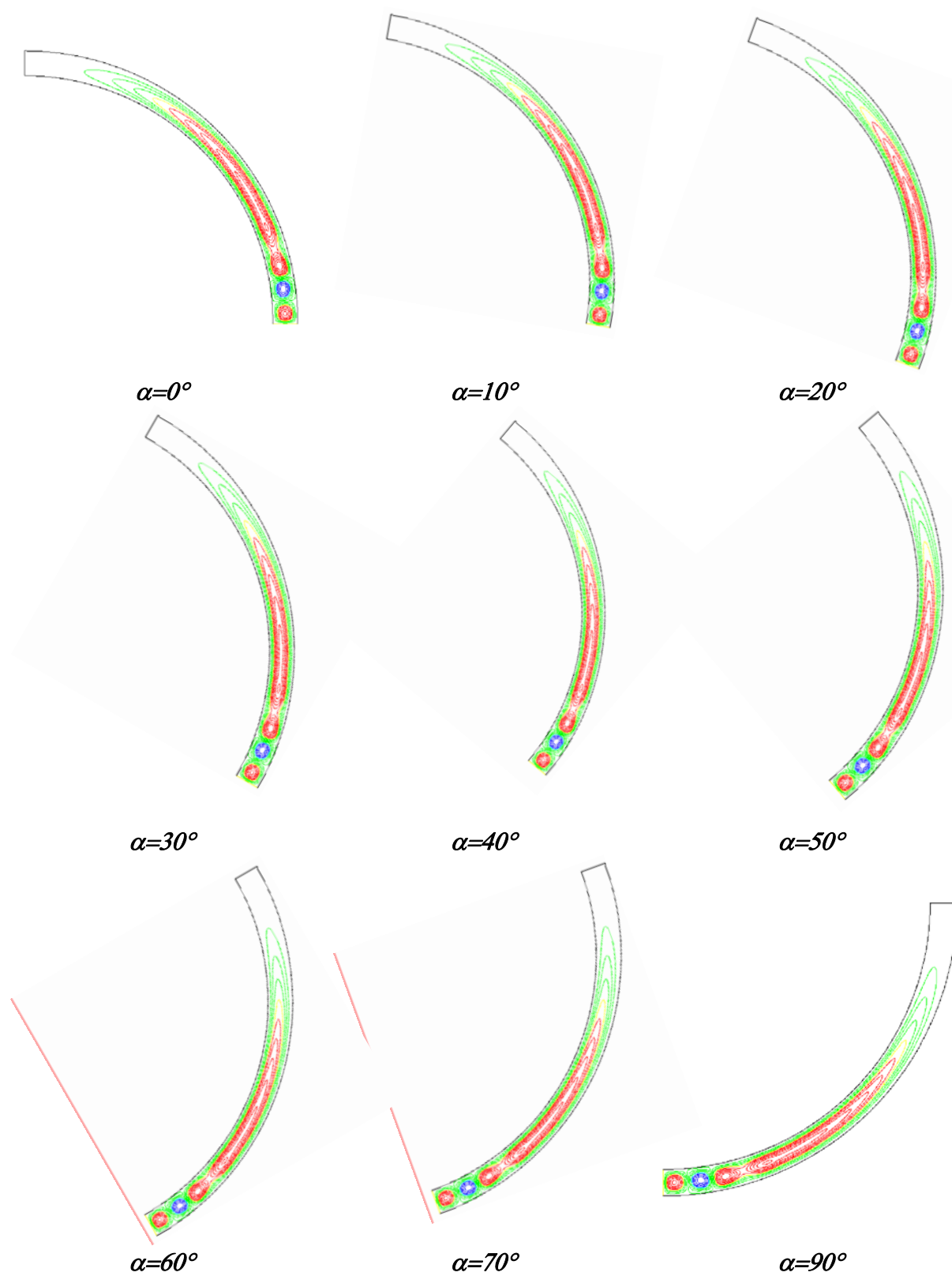
A ce stade d'initiation aux simulations numériques, pour retrouver les données que l'on a établies par la voie expérimentale, on s'est limité volontairement à l'étude de l'influence de l'inclinaison  $\alpha$  du dispositif sur la structure de l'écoulement au voisinage de l'état  $Tc_1$  dans l'intervalle  $Tc_1 \leq Ta \leq Tc_2$ .

Dans ces conditions, on s'est placé d'abord au voisinage de  $Tc_1=42$  qui est le cas d'un système d'écoulement en charge ou taux de remplissage maximal.

Comme on l'a pu constater, au cours de nos essais lorsque  $\alpha$  varie, la structure de l'écoulement semble indifférente aux effets d'inclinaison dans l'intervalle des positions angulaire  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Ainsi, on note l'existence de quatre cellules identiques à celles décrites précédemment et qui reste inchangées quant à leur nombre et leur taille lorsque  $\alpha$  varie de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ .

De plus, la simulation a été refaite pour  $Ta=46$  et l'on constate, à nouveau, que l'influence de  $\alpha$  est sans effet sur la structure des cellules de Taylor.

On en conclut que l'inclinaison du système d'écoulement ne produit aucun résultat physiquement significatif comme il a été établi expérimentalement.



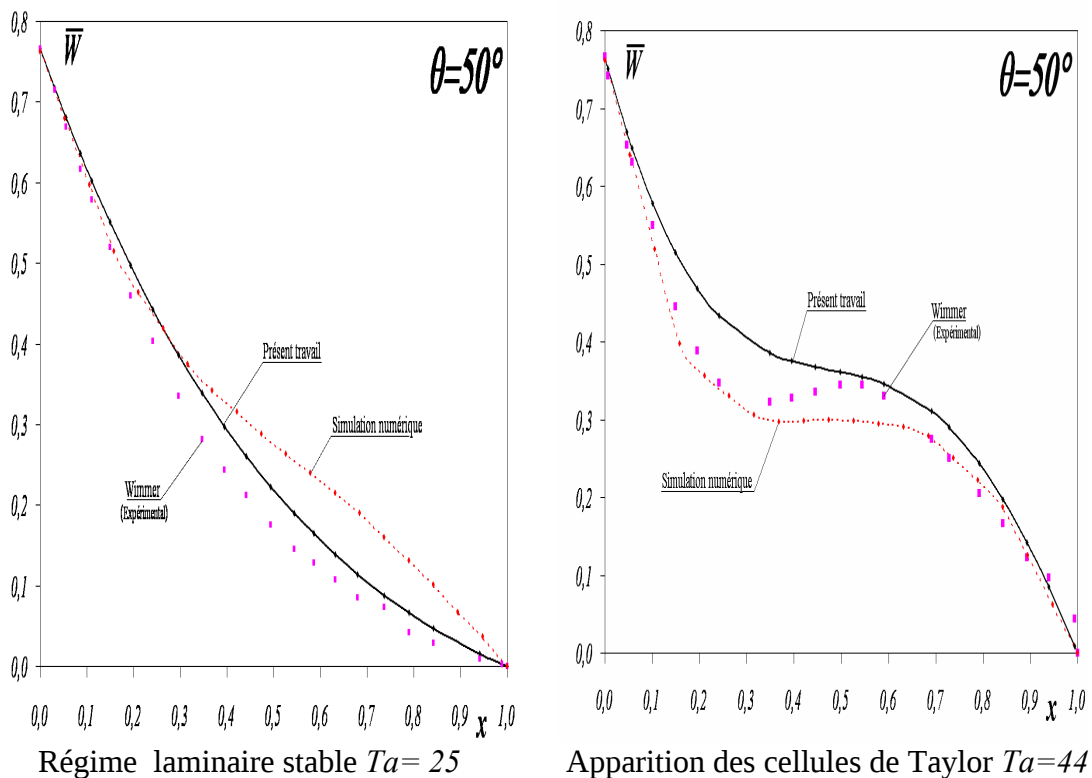
**Figure II.2.7:** Effet de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  sur les cellules de Taylor pour un système totalement rempli  $Re=1400$ ,  $Ta=42$  et  $\delta=0.08$

## II.4. Distribution de la vitesse tangentielle $W$

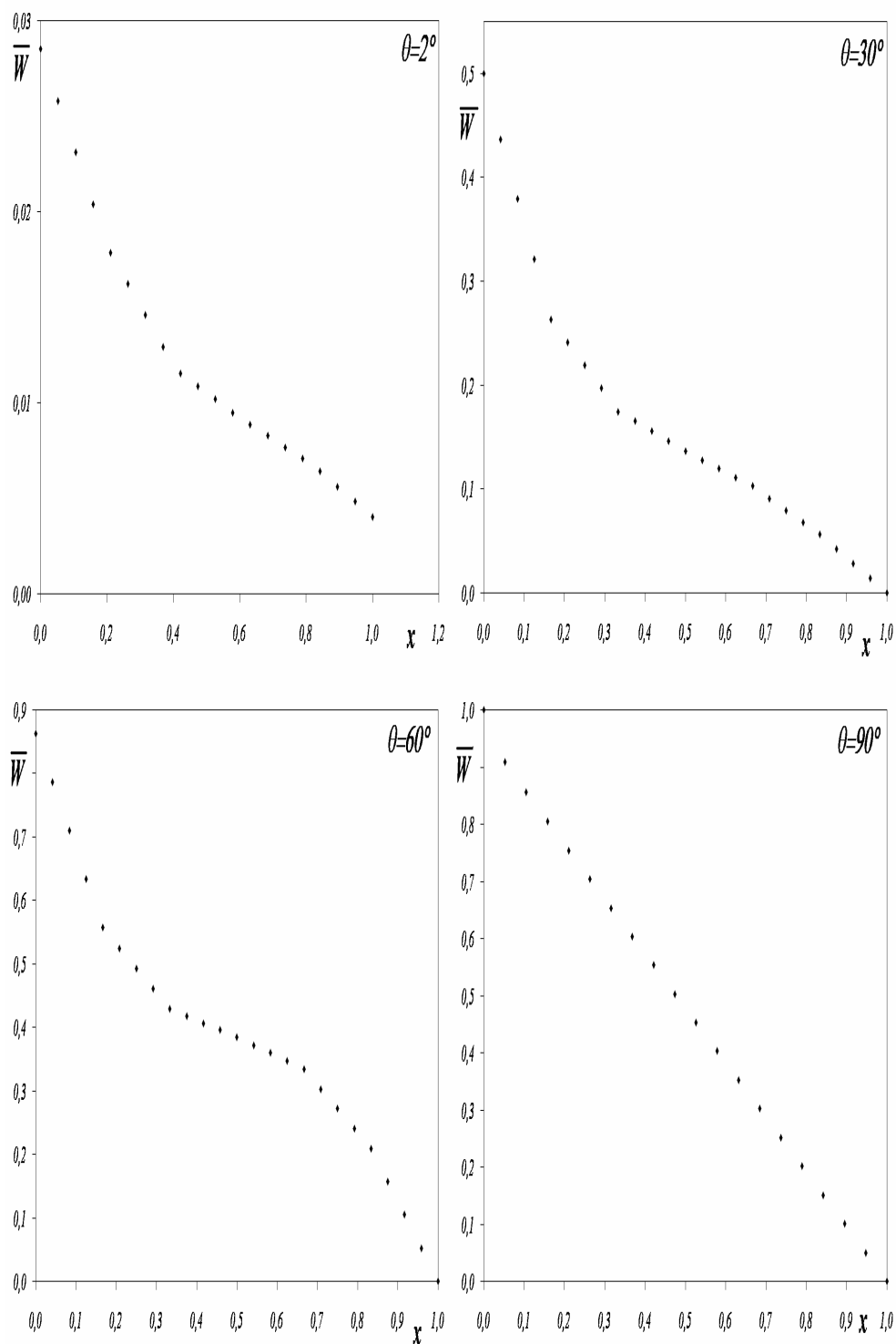
Le tracé du profil des vitesses moyennes dans la direction tangentielle montre que notre approche analytique semble réaliste puisque celle-ci se place entre les valeurs expérimentale de **Wimmer** et les résultats obtenus directement par la simulation numérique. Cet accord entre la prévision théorique et expérimentale semble coïncider en régime laminaire stable à  $Ta=25$  et au voisinage de l'apparition des cellules de Taylor  $Ta=44$ .

Une estimation de l'erreur commise sur le profil de vitesse par la méthode des moindres carrés a montré que l'erreur relative globale est de 3.23 % à  $Ta=25$  et de 4.1 % à  $Ta=44$ . Cette évaluation s'est faite avec les résultats expérimentaux de M. Wimmer. Par contre, elle peut monter à 7,5% en moyenne avec les essais de K. Nakabayashi. La relative divergence entre le profil théorique et expérimentaux est dû essentiellement à l'effet d'espace annulaire  $\delta=8\%$  (M. Wimmer),  $\delta=14\%$  (K. Nakabayashi) comparé à notre modèle théorique  $\delta=10\%$ .

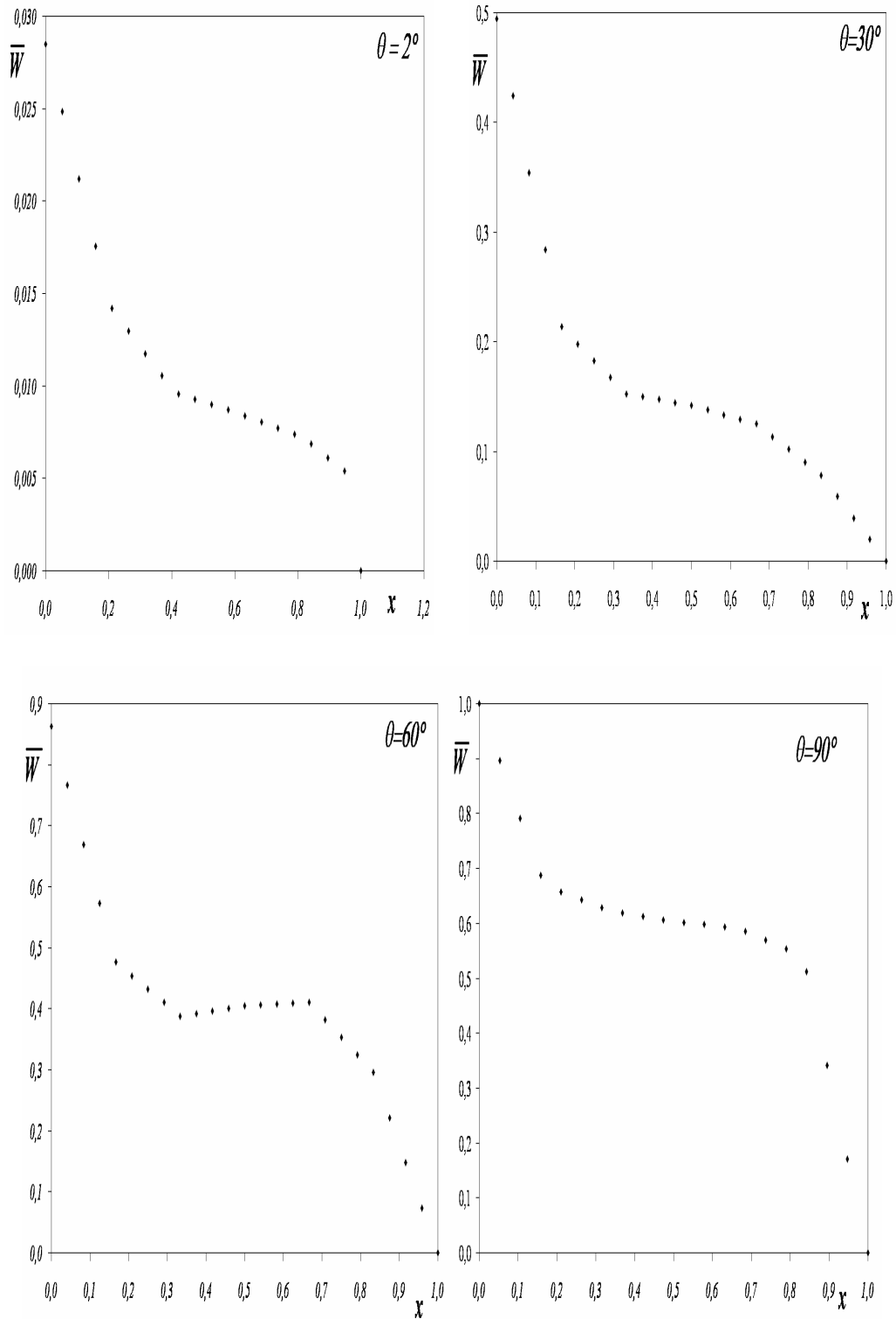
D'une façon générale il apparaît que le profil proposé est plus adapté aux espaces annulaires minces tel que  $\delta = 12\%$ .



**Figure II.2.8** : Comparaison des profils de distribution de la vitesse tangentielle



**Figure II.2.9 :** Distribution du profil des vitesses dans la direction tangentielle en régime laminaire stable  $Ta = 25$



**Figure II.2.10 :** Distribution du profil des vitesses dans la direction tangentielle au voisinage de l'apparition des cellules de Taylor  $Ta = 44$

### III. CONCLUSION

Dans une première étape, on a établi la loi de comportement du champ des vitesses moyennes et vérifié qu'elle est en bon agrément avec les profils expérimentaux de M. Wimmer et K.Nakabayashi. En particulier, on a montré que le type de profil obtenu est mieux adapté aux configurations d'espaces annulaires minces.

Dans une seconde étape, on a tenté de réaliser une approche numérique de l'effet de l'inclinaison  $\alpha$  sur le système vertical totalement rempli et montré que l'angle d'inclinaison  $\alpha$  ne semble avoir aucun effet. Ce qui est conforme aux observations expérimentales que l'on décrira plus loin.

## **PARTIE III**

### **ETUDE EXPERIMENTALE**

#### **CHAPITRE I**

---

### **DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET CONDITIONS D'ESSAIS**

#### **INTRODUCTION**

Au vu de la synthèse des travaux précédemment décrits, il s'agit de concevoir et de réaliser un dispositif expérimental capable de retrouver les principaux résultats déjà établis par d'autres auteurs. Par la suite, on a étendu nos essais à la mise en évidence des effets de l'inclinaison et de la surface libre dans la configuration définie par deux sphères coaxiales dans le cadre de l'étude des phénomènes d'instabilités en régime de transition laminaire-turbulent. Dans les conditions expérimentales que nous avons créées, l'évolution de l'écoulement est analysée au moyen d'une technique de visualisation par réflexion et par transmission optique en lumière naturelle et cohérente (laser).

Préalablement, on procède aux mesures des caractéristiques du fluide de visualisation mis au point au laboratoire notamment la température, densité et viscosité afin de se placer dans des meilleures conditions d'observations. On donne ensuite des indications sur les conditions opératoires facilitant la reproductibilité et la précision des mesures.

## I. ASPECT MECANIQUE

### 1. Description du dispositif expérimental

#### a. Système d'écoulement Principal

Le dispositif est constitué de deux sphères coaxiales réalisées en matériaux isolants et transparents (Plexiglas) offrant la possibilité d'effectuer une étude expérimentale par visualisation (Figure III.1.2) a, b.

La sphère extérieure fixe est usinée par commande numérique dans un bloc cubique en deux parties (supérieure et inférieure) de rayon  $R_2 = 50 \pm 0,5mm$ . La partie supérieure comprend l'hémisphère nord, deux évidements, l'un, joue le rôle d'un déversoir et l'autre est réservé pour l'évacuation de l'air lors du remplissage et d'un logement pour encasturer un roulement à bille étanche. La partie inférieure comprend un autre évidement pour effectuer la vidange du fluide de visualisation et d'un logement d'appui servant de guide pour la sphère intérieure (figure III.1.3). La sphère intérieure est montée sur un axe, en acier inoxydable, de rayon  $R_1 = 45 \pm 0,5mm$ . Le système est prévu pour l'emploi de plusieurs sphères interchangeable et conçu pour faciliter les opérations de montage et de démontage.

Les caractéristiques de cette configuration sont :

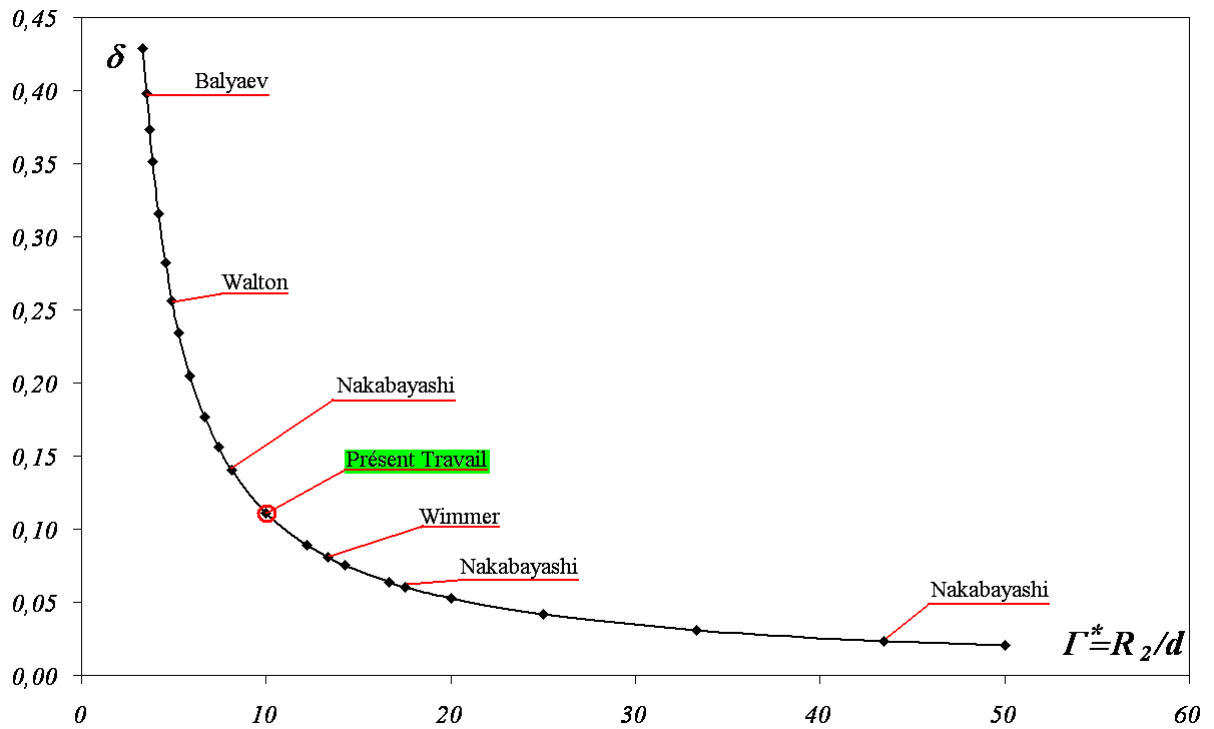
- Rayon intérieur :  $R_1 = 45 \pm 0.5mm$ ,
- Rayon extérieur :  $R_2 = 50 \pm 0.5mm$ .
- Espace annulaire :  $d = R_2 - R_1$

$$d = (5 \pm 0.2)mm$$

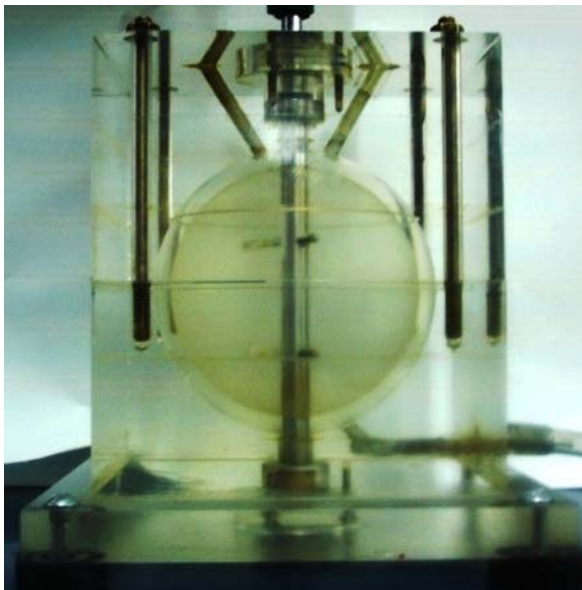
- Jeu radial :  $\delta = d/R_1$  :

$$\text{soit } \delta = 0.11$$

La géométrie ainsi définie par le jeu radial  $\delta = 0.11$  est proche des dispositifs expérimentaux qui adoptent la configuration d'espace annulaire relativement moyen dans le système de Taylor–Couette cylindrique ou sphérique.



**Figure III.1.1** : Tracé du jeu radial  $\delta$  en fonction du rapport d'aspect  $\Gamma^* = \frac{R_2}{d}$

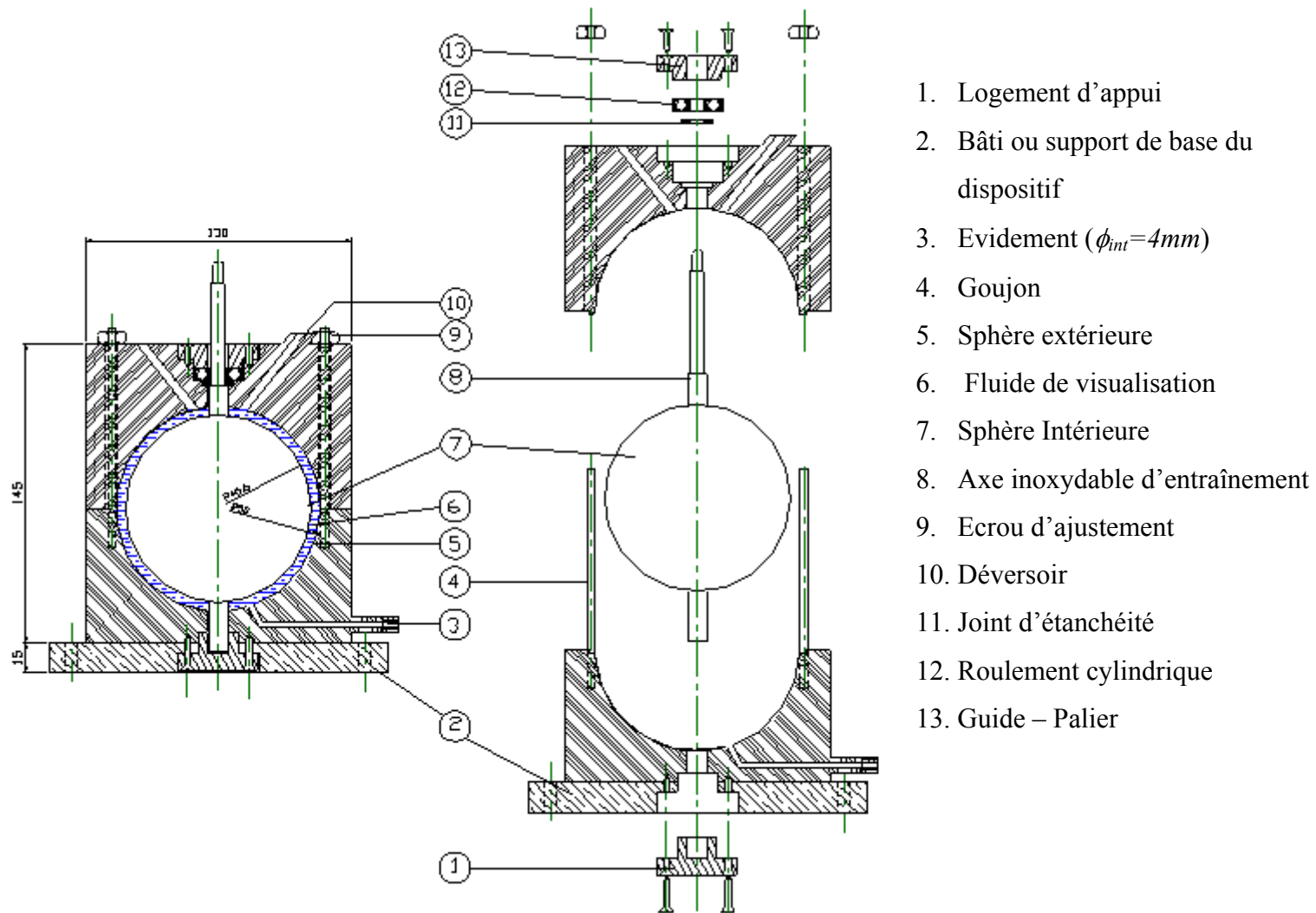


(a) vue de face



(b) Vue en perspective.

**Figure III.1.2** : Système d'écoulement principal

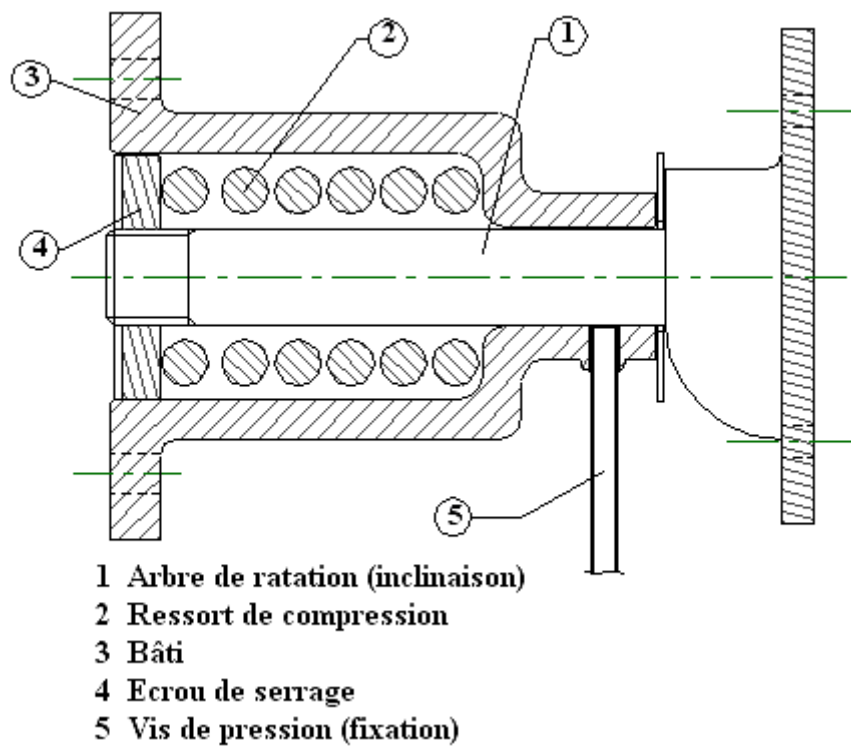
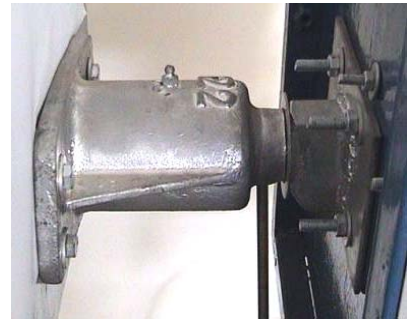


**Figure III.1.3** : Coupe du système d'écoulement principal

### b. Système d'inclinaison

Le support portant l'ensemble du montage et solidaire d'une poutree qui est fixée sur un mur comportant un axe tournant (figure III.1.4)

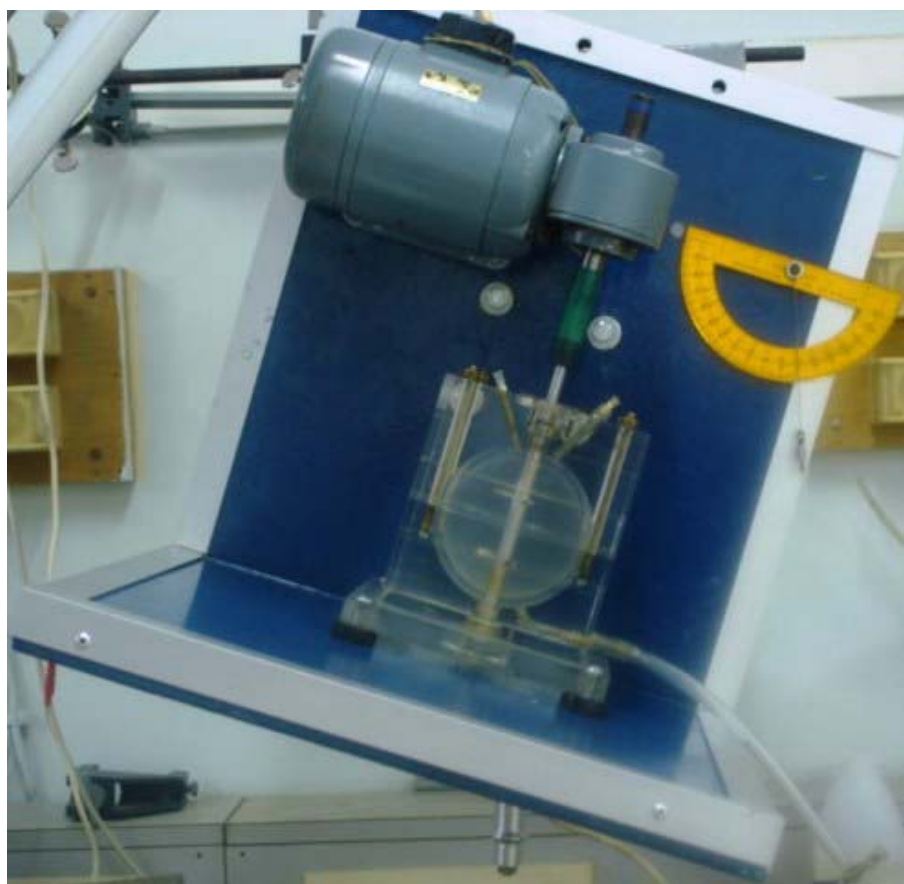
Ce système facilite grandement le pivotement de l'ensemble du dispositif avec précision car lié à une règle circulaire graduée en degré et radian.



**Figure III.1.4 :** Coupe longitudinale du système d'inclinaison



**Figure III.1.5 :** Dispositif expérimental en position verticale ( $\alpha=0^\circ$ )



**Figure III.1.6 :** Dispositif expérimental en position inclinée  $\alpha=20^\circ$ .

## 2. Mesure de l'angle d'inclinaison

L'angle d'inclinaison est indiqué à l'aide d'un fil à plomb suspendu au centre d'un rapporteur gradué en degré solidaire du support qui porte l'ensemble du montage. Ainsi, on a fixé l'angle zéro à la position verticale du dispositif expérimental. Celui-ci étant réglé par niveau à bulle pour garantir une bonne planéité de la base du système d'écoulement.

## 3. Mesure de la hauteur du fluide

La mesure de la hauteur du fluide est effectuée à l'aide d'une règle graduée solidaire du bloc cubique dans laquelle est taillé la sphère extérieure.

# II. ASPECT ELECTRIQUE

## 1. Motorisation

L'entraînement du système s'effectue à l'aide d'un moteur à courant continu du type BRESGES ELECTROMOTOREN GmbH RHEYDT, d'une puissance de 230 watts, fournissant un couple constant dans l'ensemble du domaine des vitesses étudiées. En pratique, ceci a permis de s'assurer de la constance et stabilité en vitesse. Branché à un variateur de tension, on a pu contrôler la vitesse de rotation selon nos besoins pour décrire l'ensemble des régimes d'écoulement.



La transmission des vitesses se fait au moyen d'un réducteur de vitesse (de rapport 1/30) que l'on peut utiliser dans une large gamme des vitesses ; environ des basses  $N = 0.05 \text{ tr/s}$  jusqu'au hautes vitesses  $N = 60 \text{ tr/s}$ .

Pour effectuer nos observations, on a utilisé toute la gamme de fréquence de rotation disponible pour détecter et analyser les différents états d'écoulement.

En pratique, on assure la transmission de la vitesse de rotation du moteur à l'axe tournant à l'aide d'un flexible pouvant absorber les éventuelles vibrations provenant du moteur, empêchant ainsi leur propagation au système d'écoulement. Le moteur est installé sur un support et fixé à l'aide de quatre boulons dans une position qui permet d'avoir l'alignement entre l'axe du réducteur et l'axe tournant du système d'écoulement principal.

### 3. Mesure de la vitesse de rotation $\Omega_1$

La mesure de la vitesse de rotation de la sphère intérieure est effectuée à l'aide d'un tachymètre numérique de type DT2236 (phototachymètre) que l'on contrôle périodiquement avec un tachymètre à contact. On peut évaluer ainsi la vitesse de rotation correspondant à une valeur donnée dans la plage dans la plage 5 à 99999 tr/min, et par contact de 0.5 à 19999 tr/min. le premier appareil est très performant et donne une précision inférieure à 1%.



### 4. Mesure de la température du fluide

La mesure de la température est effectuée à l'aide d'un capteur électronique à courant continu et dont la précision est inférieure à 1% pour chaque mesure effectuée.

## III. ASPECT PHYSICO-CHIMIQUE

### 1. Mise en œuvre du produit de la visualisation

Concernant le système d'écoulement de base, il a été prévu l'utilisation de plusieurs produits de visualisation constituées à base d'une poudre d'Aluminium et d'une poudre dorée à base de chrome. L'ensemble est mélangé dans une solution composée de 20 % d'huile de vaseline CHALLALA, favorisant une meilleure suspension des particules dans le fluide de visualisation au quelle on ajoute 80 % d'un produit pétrolier de type SIMILI pour diminuer la viscosité de l'huile selon une concentration de 2g/litre. Pour mettre au point une solution adéquate permettant d'améliorer la visualisation des phénomènes d'instabilité (onde stationnaire, onde instationnaire, etc....). On a d'abord procédé à des mélanges pure à base de la solution d'aluminium et ensuite on a utilisé la solution dorée pure selon les indications que l'on donne dans le tableau suivant :

|     | Solution Alum. | Solution dorée |                                         |
|-----|----------------|----------------|-----------------------------------------|
| (1) | 100 %          | 0 %            | solution<br>d'aluminium<br>prédominante |
| (2) | 80 %           | 20 %           |                                         |
| (3) | 70 %           | 30 %           |                                         |
| (4) | 60 %           | 40 %           | Produit choisi                          |
| (5) | 50 %           | 50 %           | Solution dorée<br>prédominante          |
| (6) | 40 %           | 60 %           |                                         |
| (7) | 30 %           | 70 %           |                                         |
| (8) | 20 %           | 80 %           |                                         |
| (9) | 0 %            | 100 %          |                                         |

Cette étude initiale nous a permis de choisir valablement la solution optimale nécessaire à nos essais de visualisation.

Les propriétés physiques des solutions utilisées ont été déterminées pour différentes températures. Dans chacun des cas nous avons pris soin de mesurer les caractéristiques associées aux produits utilisés, à savoir, la température, la densité et la viscosité pour évaluer avec précision les nombres de Reynolds, Froude et Taylor caractérisant l'écoulement.

## 2. Mesure de la viscosité

Comme les phénomènes étudiés sont très sensibles aux variations de température, il est nécessaire d'évaluer la variation de la viscosité en fonction de la température. A cet effet, on a aménagé un récipient parallélépipédique en plexiglas rempli d'eau et communiquant avec un thermostat nous permettant de contrôler la température au 1/10°C.

Le viscosimètre et le thermomètre sont plongés dans l'eau ; pour chaque valeur de température, le temps de coulée de fluide est comparé à celui de l'eau et l'utilisation d'une formule caractéristique permet de déduire la valeur de la viscosité du fluide tel que [69]:

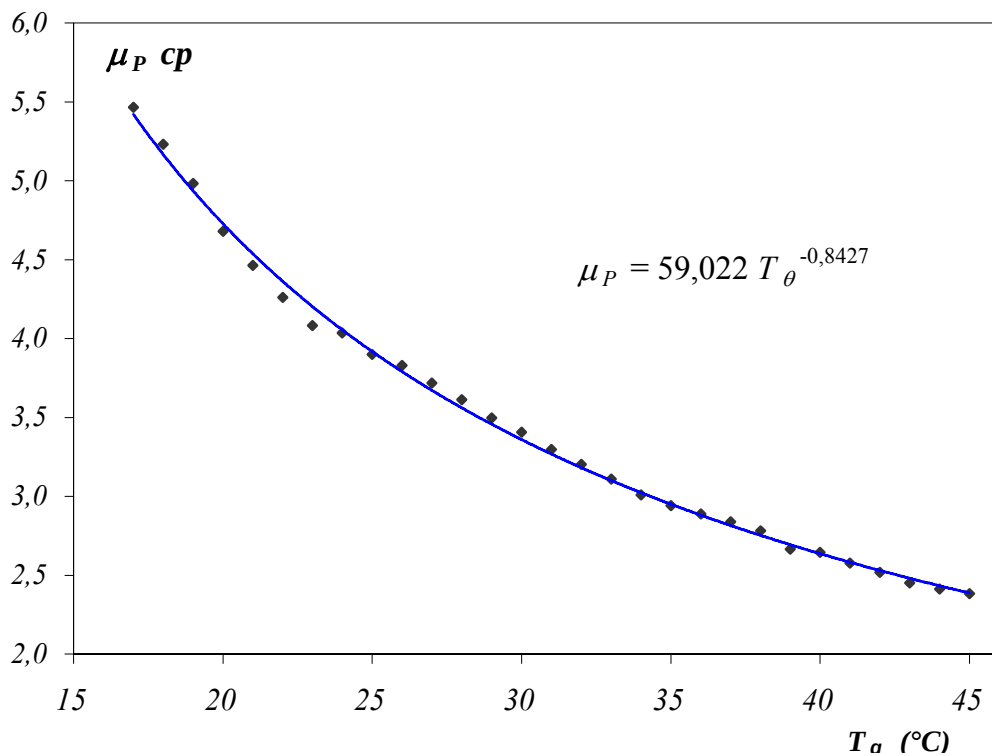
$$\frac{\mu_p}{\mu_e} = \frac{\rho_p t_p}{\rho_e t_e}$$

L'indice *e* désigne l'eau ; l'indice *p* désigne le fluide étudié (eau permutée).

Dans les conditions opératoires, on procède à la mesure du temps d'écoulement du fluide et celui de l'eau pour évaluer à chaque valeur de la température  $T_\theta$ , la viscosité associée dans la plage (15 °C - 45 °C) liée à nos observations.

Le temps d'écoulement du fluide utilisé et celui de l'eau, sont mesurés pour chaque valeur de température  $T_\theta$ . La viscosité et la masse volumique de l'eau sont connues à l'avance pour  $T_\theta$  donné.

L'évolution de la viscosité dynamique  $\mu$  du mélange en fonction de la température  $T_\theta$  est représentée par la Figure (III.1.6). La variation de la viscosité de la solution en fonction de la température permet d'évaluer le paramètre de contrôle  $Ta$  associée à chaque valeur de température  $T_\theta$ .



**Figure III.1.7 :** Variation de la viscosité  $\mu_p$  du mélange en fonction de la température

### 3. Mesure de la densité du fluide

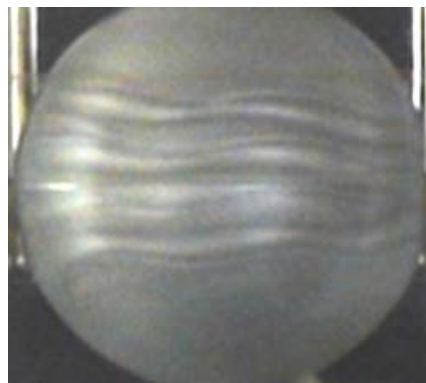
La mesure de la densité ou masse volumique du fluide  $\rho$  est effectuée à l'aide d'une balance à haute sensibilité de type SQRTORIUS dont la précision est inférieure au milligramme.

## IV. ASPECT OPTIQUE

La procédure de visualisation de l'écoulement a été mise en œuvre selon deux techniques opératoires :

**1°/ Etude par réflexion de la lumière :**

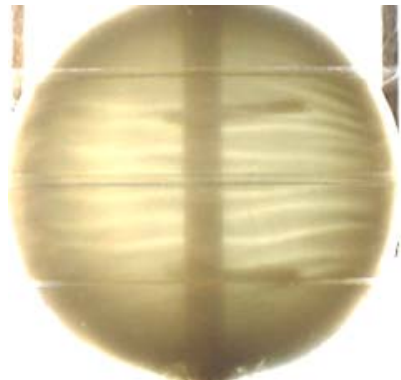
Ce mode d'observation procède par réflexion d'un faisceau lumineux diffusé par une source extérieure avant sur l'écoulement afin de mettre en évidence le régime et la structure associée au mouvement.



**Figure III.1.8 :** Visualisation d'un état d'écoulement par réflexion optique

**2°/ Etude par transmission transversale de la lumière :**

Ici, la visualisation est basée sur la transmission optique d'un faisceau lumineux provenant d'une source placée à l'opposé de l'observateur et traversant l'ensemble de l'écoulement. Ce mode d'éclairage permet de visualiser la structure en profondeur du mouvement liée à la forme des cellules.



**Figure III.1.9 :** Visualisation d'un état d'écoulement par transmission optique

### 3°/ Etude par transmission Laser

Nous avons travaillé en lumière naturelle pour étudier la structure globale de l'écoulement et en lumière cohérente (Laser *He*, 1mW) pour examiner la structure locale du mouvement, notamment la configuration détaillée des vortex de Taylor. La projection du plan lumineux par le laser s'effectue au plan vertical moyen d'une lentille cylindrique d'un diamètre  $D$  et selon les besoins exigés par l'expérience a soit pour visualiser tous le cœur de l'écoulement ou pour isoler une cellule, pour cela il faut respecter les distances adéquates ( e.g.  $D=12mm$ ,  $l_1=26mm$ ,  $l_2=37mm$ ).

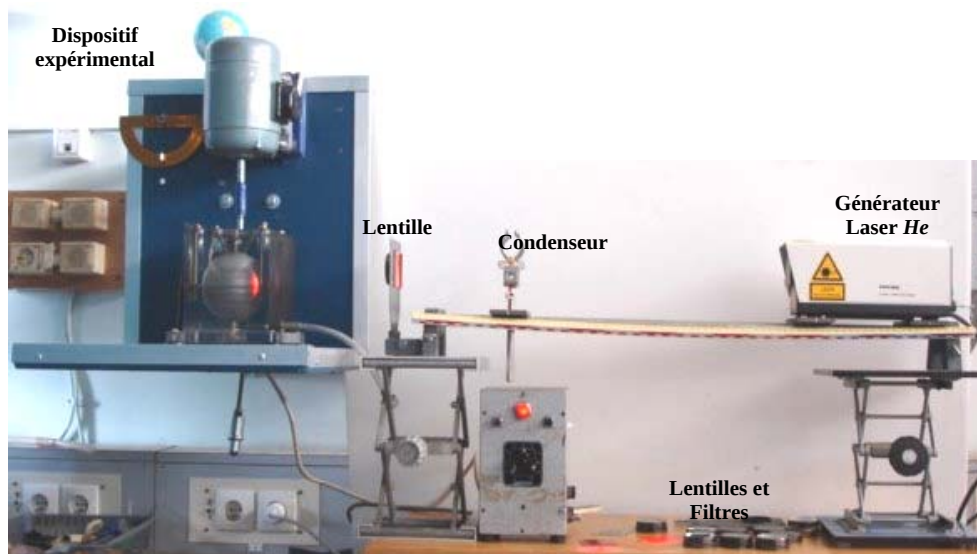
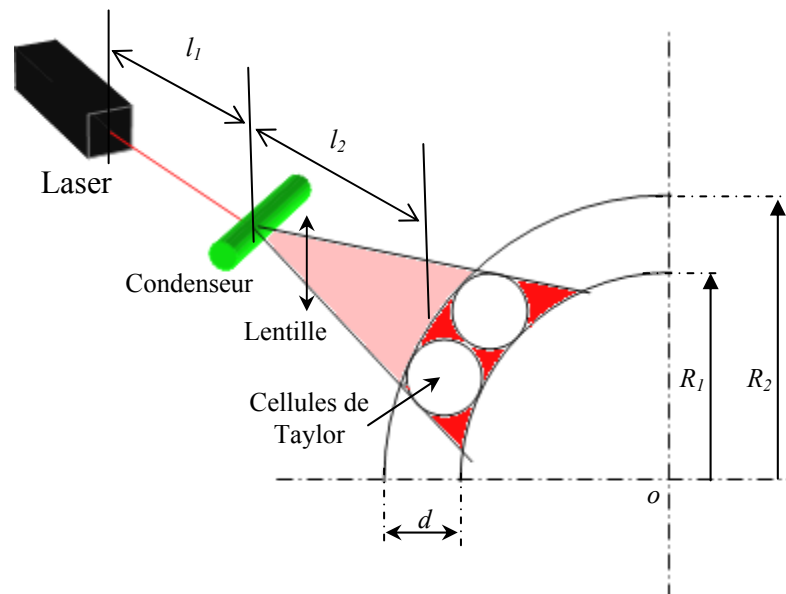
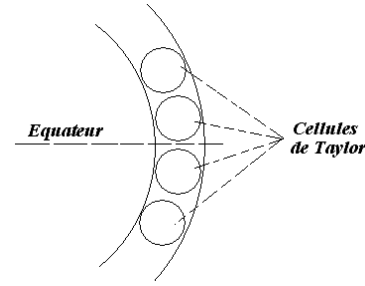


Figure III.1.10 : Installation du système de visualisation par Laser *He*



**Figure III.1.11** : Visualisation d'un état d'écoulement par Laser *He*

## V. PROCEDURE D'ESSAIS

### 1. Condition de mise en régime des vitesses

Etant donné que les caractéristiques géométriques sont fixés et n'évoluent ni dans l'espace ni dans le temps, la valeur du paramètre de contrôle ( $Ta$ ) dépend essentiellement de la vitesse de rotation de la sphère tournante  $\Omega_I$  et de l'espace annulaire ( $d$ ) et de la viscosité du fluide utilisé. Par conséquent, la valeur de ce paramètre ( $Ta_c$ ) ne dépend que de  $\Omega_I$ .

$$Ta = C \times \Omega_I \quad \text{Avec} \quad C = \frac{R_1 d}{\nu}$$

La constante  $C$  dépend des caractéristiques de l'appareil ou du dispositif employé. En pratique, on estime la valeur de  $C$  à  $C=44.9$  (dans le présent travail à  $25^\circ\text{C}$ ).

Nous avons adopté le même mode opératoire pour chaque essai en procédant systématiquement par vitesse croissante et selon une condition de mise en régime satisfaisant l'inégalité suivante :

$$\frac{\Delta\Omega_I}{\Omega_I} \leq 1\%$$

Où  $\Omega_I$  représente la vitesse angulaire de la sphère intérieure tournante.

Cette condition apparaît également nécessaire pour la bonne reproductibilité des mesures qui est d'ailleurs assez proche de l'incertitude expérimentale commise sur la vitesse angulaire  $\Omega_I$  soit :

$$\frac{\Delta\Omega_I}{\Omega_I} \approx 1\%.$$

Le mode opératoire adopté pour les différents essais s'effectue comme suit :

A partir du repos, on met le moteur en marche en augmentant progressivement la vitesse en respectant l'inégalité (\*) puis on s'arrête quelques minutes afin de permettre à l'écoulement de se stabiliser dans l'état qu'il occupe et on observe l'apparition des phénomènes.

Pour  $\Omega_I$  choisi, caractérisant l'apparition d'un phénomène, on note les mesures caractéristiques des structures considérées et on prend une photographie de l'état de l'écoulement.

## 2. Estimation de l'erreur de mesure sur le nombre de Taylor

$$Ta = Re \sqrt{\frac{d}{R_I}}$$

$$\text{Log } Ta = \text{Log } Re + \text{Log } \sqrt{\frac{d}{R_I}}$$

$$\log Ta = \log Re + \frac{1}{2} \log \frac{d}{R_I} = \log Re + \frac{1}{2} \text{Log}(d) - \frac{1}{2} \text{Log} R_I$$

Dérivons cette expression on obtient :

$$\frac{dT_a}{Ta} = \frac{dRe}{Re} + \frac{1}{2} \frac{d(d)}{d} - \frac{1}{2} \frac{d(R_I)}{R_I}$$

L'évaluation physique permet d'écrire:  $dTa \approx \Delta Ta$

$$\frac{\Delta Ta}{Ta} = \frac{\Delta Re}{Re} + \frac{1}{2} \frac{\Delta(d)}{d} + \frac{1}{2} \frac{\Delta R_I}{R_I}$$

$$\frac{\Delta Ta}{Ta} = \frac{\Delta Re}{Re} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta R_I}{R_I} \right)$$

Avec 
$$Re = \frac{V_I R_I}{\nu} = \frac{\Omega_I R_I^2}{\nu}$$

On peut écrire :

$$\frac{\Delta Re}{Re} = 2 \frac{\Delta R_I}{R_I} + \frac{\Delta \Omega_I}{\Omega_I} + \frac{\Delta \nu}{\nu}$$

Comme  $\Omega_I = 2\pi N$  on a  $\frac{\Delta\Omega_I}{\Omega_I} = \frac{\Delta N}{N}$

$$\frac{\Delta Re}{Re} = \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta \nu}{\nu} + 2 \frac{\Delta R_I}{R_I}$$

L'expression finale de l'erreur est donc :

$$\frac{\Delta Ta}{Ta} = \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta \nu}{\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta d}{d} + 5 \frac{\Delta R_I}{R_I} \right)$$

En pratique on mesure :  $\frac{\Delta N}{N} = 1\%$ ,  $\frac{\Delta \nu}{\nu} = 2\%$  et  $\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta R_I}{R_I} = 1\%$

L'estimation globale de l'erreur correspondant à l'indétermination sur  $Ta$  est alors:

$$\frac{\Delta Ta}{Ta} = 6\%.$$

Au passage, on note que l'incertitude sur le nombre de Reynolds est également proche du nombre de Taylor ; on évalue :

$$\frac{\Delta Re}{Re} = 5\%$$

Ces incertitudes sont acceptables dans les conditions de travail ainsi réalisé. Par exemple : la détermination du nombre critique associée à l'apparition des cellules de Taylor est :

- Pour  $\delta=0.1225$  :  $Re_C = 1250 \pm 62.5$ ,
- Pour  $\delta=0.0745$  :  $Re_C = 2300 \pm 115$ .

Evaluation aussi précise que celle effectuée par **G.N. Khlebutin [8]**, (voir tableau 1.1 Partie I page 17)

### 3. Estimation de l'erreur de mesure sur le nombre de Froude

Par définition le nombre de Froude utilisé au cours de nos expériences est :

$$Fr = \frac{V_I}{\sqrt{gH}} = \frac{\Omega_I R_I}{\sqrt{gH}} \text{ et } Fr^* = \frac{V_1}{\sqrt{g'H}} = \frac{Fr}{\sqrt{\cos \alpha}}$$

Avec  $g' = g \cos \alpha$

Prenons le logarithme de l'expression précédente :

$$\text{Log } Fr = \text{Log } \Omega_l + \text{Log } R_l - \frac{1}{2} \text{Log}(g) - \frac{1}{2} \text{Log } H$$

Dérivons cette expression, on obtient :

$$\frac{dFr}{Fr} = \frac{d\Omega_l}{\Omega_l} + \frac{dR_l}{R_l} - \frac{1}{2} \frac{dg}{g} - \frac{1}{2} \frac{dH}{H}$$

L'évaluation physique permet d'écrire:  $dFr \approx \Delta Fr$

$$\frac{\Delta Fr}{Fr} = \frac{\Delta \Omega_l}{\Omega_l} + \frac{\Delta R_l}{R_l} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta H}{H} \right)$$

Par ailleurs on sait que :

$$\frac{\Delta \Omega_l}{\Omega_l} = \frac{\Delta N}{N}$$

D'où l'expression finale de l'erreur est donc :

$$\frac{\Delta Fr}{Fr} = \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta R_l}{R_l} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta H}{H} \right)$$

En pratique, on évalue les incertitudes relatives suivantes :

$$\frac{\Delta N}{N} = 1\%, \quad \frac{\Delta g}{g} = 1\% \text{ et } \frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta R_l}{R_l} = 1\%$$

Par conséquent on détermine l'incertitude sur la valeur mesurée du nombre de Froude :

$$\frac{\Delta Fr}{Fr} = 3\% .$$

#### 4. Calcul d'erreur sur le nombre $N_B$

Par définition le nombre  $N_B$  est défini par la relation suivante :  $N_B = \frac{\cos \alpha Ta}{Fr^2 \Gamma}$

De la même manière, on peut écrire l'expression finale de l'erreur par :

$$\frac{\Delta N_B}{N_B} = \frac{\Delta \alpha}{\cot \alpha} + \frac{\Delta Ta}{Ta} + 2 \frac{\Delta Fr}{Fr} + \frac{\Delta \Gamma}{\Gamma}$$

Sachant que :  $\frac{\Delta \Gamma}{\Gamma} = \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta d}{d}$

D'où l'expression finale de l'erreur commise sur le nombre  $N_B$  qui est donnée par :

$$\frac{\Delta N_B}{N_B} = \frac{\Delta \alpha}{\cot \alpha} + \frac{\Delta Ta}{Ta} + 2 \frac{\Delta Fr}{Fr} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta d}{d}$$

En pratique, on évalue les incertitudes relatives suivantes :

$$\frac{\Delta\alpha}{\cot \alpha} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} = 1\% , \frac{\Delta Ta}{Ta} = 6\% , \frac{\Delta Fr}{Fr} = 3\% , \frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta d}{d} = 1\% \text{ et } \frac{\Delta \Gamma}{\Gamma} = 2\%$$

Par conséquent on détermine l'incertitude sur la valeur mesurée du nombre  $N_B$ :

$$\frac{\Delta N_B}{N_B} = 15\% .$$

Au passage, on note que l'incertitude sur le nombre  $N_B$  est importante car dépassant celle commise sur  $Re$  et  $Ta$  et semble ainsi cumuler les erreurs sur tous les paramètres du système d'écoulement.

## VI. CONCLUSION

Afin de répondre aux exigences expérimentales, on a réalisé un dispositif destiné aux essais de visualisation pour analyser qualitativement les structures de l'écoulement soumis à l'influence de l'inclinaison. Ainsi, le plus grand soin a été apporté aux caractéristiques géométrique et dynamique en vue de déterminer, avec précision, les paramètres d'influences  $Re$ ,  $Fr$  et  $Ta$  associés au changement de régime de l'écoulement.

Au départ, le dispositif a été testé en position verticale pour retrouver les données établies par d'autres auteurs. Par la suite, le système d'écoulement a permis de réaliser l'étude de l'évolution de l'écoulement en position inclinée. Ceci a rendu possible une investigation systématique qui a été consacrée à l'effet de la force de pesanteur sur l'apparition des différentes instabilités combiné à l'effet de la surface libre.

## **PARTIE III**

### **ETUDE EXPERIMENTALE**

---

#### **CHAPITRE 2**

#### **ETUDE PHOTOMETRIQUE**

##### **INTRODUCTION**

Après avoir testé l'ensemble des dispositifs et créé les conditions de mesures, on a effectué systématiquement des essais de caractérisation pour chaque régime envisagé.

Ainsi, pour un régime donné, on étudie les conditions d'apparition des structures mis en cause et l'on détermine les caractéristiques associées (longueur d'onde axiale, nombre d'onde circonférentiel, ou longueur d'onde azimutal, vitesse de phase, etc....) par voie de traitement de données photométriques.

Afin de mettre en évidence l'influence de la gravité sur la nature et la structure de l'écoulement on a soumis celui-ci aux effets d'inclinaison du dispositif et l'on relève les modifications intervenant sur chaque type d'instabilité ; Les expériences précédentes ont été refaites en faisant varier la hauteur de l'écoulement afin de mettre en évidence l'interaction éventuelle de la surface libre sur les différents régimes de transition observés.

Enfin, le dépouillement des données photométriques a permis de dégager des lois phénoménologiques reliant les paramètres de contrôles, à savoir,  $Ta$ ,  $Fr$ ,  $\Gamma$ , sur les caractéristiques de structures.

## I. Essais dynamiques

### I.1. Etude de la transition laminaire–turbulent dans le système vertical ( $\alpha = 0$ ):

On procède systématiquement à la mise en évidence des régimes et la structure de l'écoulement lié aux phénomènes de transition laminaire–turbulente. A cet effet on procède selon des conditions d'essais permettant d'effectuer des mesures reproductibles et la caractérisation des conditions d'apparition des structures est résumée dans le tableau suivant :

| Nombre de Taylor critique | $Tc_1$                                   | $Tc_2$                               | $Tc_3$                       | $Tc_4$                | $T_w$     |
|---------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------|
| Régime d'écoulement       | Ondes de Taylor                          | Ondes de Taylor + Spiral Mode        | Wavy Mode + Spiral Mode      | Spiral Wavy Mode      | Wavy Mode |
| Nombre de Taylor critique | $T'_1$                                   | $T'_2$                               | $T'_c$                       | $T_D$                 |           |
| Régime d'écoulement       | Naissance de fluctuations aux deux pôles | Extension de fluctuations Chaotiques | Déclenchement total du chaos | Turbulence développée |           |

En faisant varier le nombre de Taylor, à partir du régime laminaire de base, on note l'apparition de la première instabilité qui s'installe à partir d'une valeur critique  $Tc_1$  (*Figure III.2.2.(1)*) Celle-ci consiste en un mouvement secondaire de nature stationnaire associé à l'écoulement de base. L'apparition de cette instabilité qui se traduit par une onde axiale intervient en nombre fini de cellules en fonction du facteur géométrique selon la formule empirique  $i = 0.21\delta^{-\frac{4}{3}}$  [2] au niveau de la région équatoriale. Dans notre cas, on observe l'apparition de quatre cellules de Taylor. Rappelons qu'une onde est constituée de deux cellules de Taylor ou encore de deux vortex.

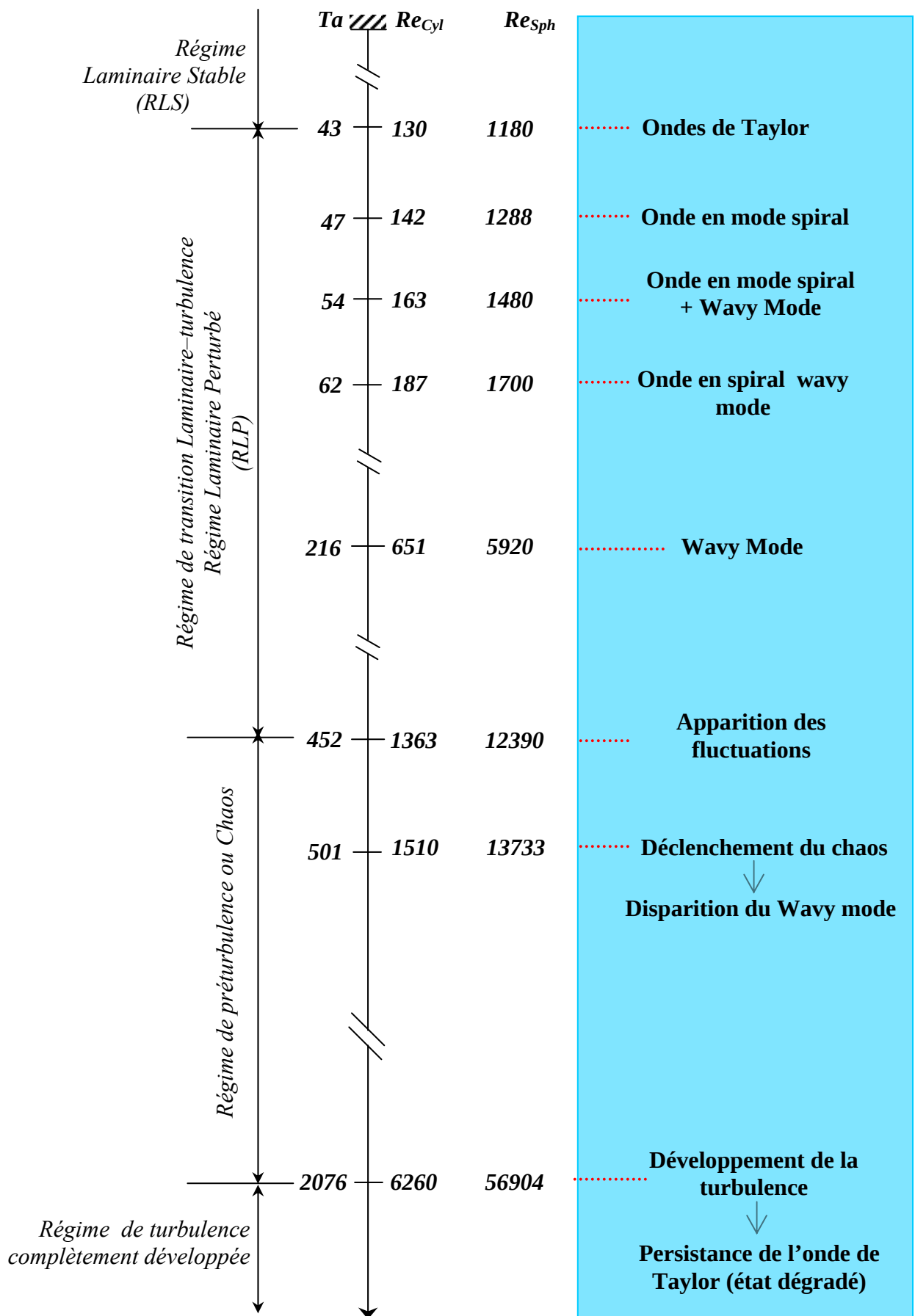
Le tableau qui suit donne quelques valeurs critiques du nombre de Taylor  $Tc_1$  pour quelques facteurs géométriques :

| Auteur                 | Facteur géométrique $\delta$ | Nombre de Reynolds cylindrique critique $Re_{Cyl}$ | Nombre de Reynolds sphérique critique $Re_{Sph}$ | Nombre de Taylor critique $Tc_1$ |
|------------------------|------------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------|
| K. Nakabayashi [30]    | 0.024                        | 118.28                                             | 1079.96                                          | 39.40                            |
|                        | 0.060                        | 121.86                                             | 1112.85                                          | 40.60                            |
|                        | 0.138                        | 138.97                                             | 1269.09                                          | 46.30                            |
|                        | 0.206                        | 153.98                                             | 1406.14                                          | 51.30                            |
| Walton [70]            | 0.256                        | 128.46                                             | 1173.15                                          | 42.80                            |
|                        | 0.111                        | 129.15                                             | 1179.46                                          | 43.03                            |
| I.M. Yavorskaya [35]   | 0.111                        | 134.53                                             | 1228.52                                          | 44.82                            |
| M. Wimmer [28]         | 0.0256                       | 125.97                                             | 1150.40                                          | 41.97                            |
|                        | 0.111                        | 129.03                                             | 1178.36                                          | 42.99                            |
| <b>Présent travail</b> | 0.11                         | 130.18                                             | 1178.88                                          | 43.37                            |

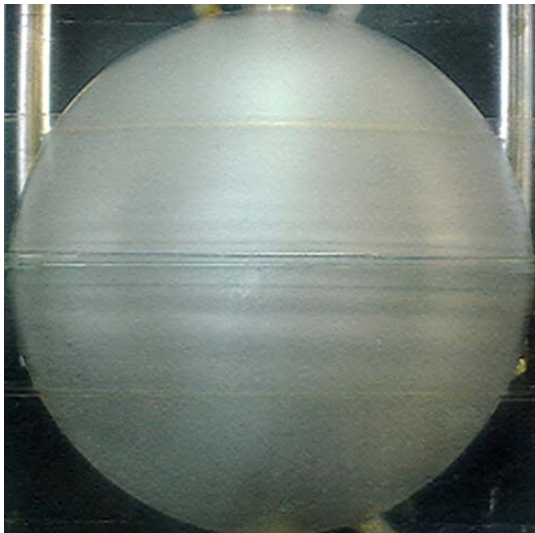
**Tableau III.2.1 :** Quelques valeurs du nombre de Taylor Critique  $Tc_1$  pour différents facteurs géométriques  $\delta$ .

Un mouvement d'onde en mode spiral s'associe aux cellules de Taylor se déclenchent à  $Tc_2$ . la direction de propagation est inclinée de  $2^\circ$  à  $10^\circ$  par rapport à l'horizontale (*figure III.2.2.(2)*). Suivi de l'installation partielle d'un mouvement de nature instationnaire caractérisé par l'établissement d'un mouvement se propageant au voisinage de l'équateur à une valeur critique  $Tc_3$  (*figure III.2.2. (3)*) qui se superpose au mouvement spiral en cellules de Taylor. En augmentant la vitesse, on observe l'installation complète de l'onde azimutale inclinée (Spiral Wavy Mode) correspondant à une deuxième valeur critique  $Tc_4$  (*Figure III.2.2.(4)*). Le Wavy Mode ou onde azimutale instationnaire s'installe pour une valeur critique  $T_w$ . Il s'agit d'un système d'onde se propageant dans la direction  $\theta$  et tournant autour de  $z$ .

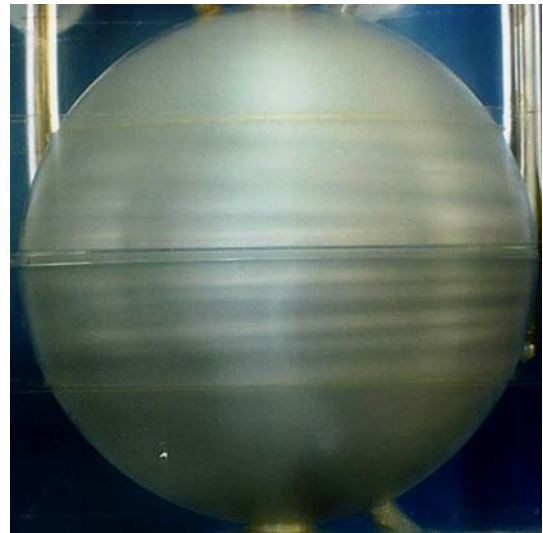
Pour des vitesses croissantes, l'écoulement a tendance à se compliquer davantage avec l'apparition de faible fluctuations au niveau des pôles pour  $T'_1$ , se propageant vers la région équatoriale, le régime des fluctuations chaotiques s'établit pour  $T'_2$ . en augmentant le nombre de Taylor jusqu'à une valeur critique  $T'_C$  on assiste à la disparition de l'onde azimutale ou Wavy Mode critère décisif d'installation du régime chaotique. En augmentant encore la vitesse, le régime turbulent complètement développé s'établit à une valeur critique  $T_D$ . En ce qui concerne la géométrie étudiée défini par le jeu radial  $\delta=0.11$ , les nombres de Taylor critiques des régimes d'écoulement décrit précédemment sont résumées dans le diagramme suivant :



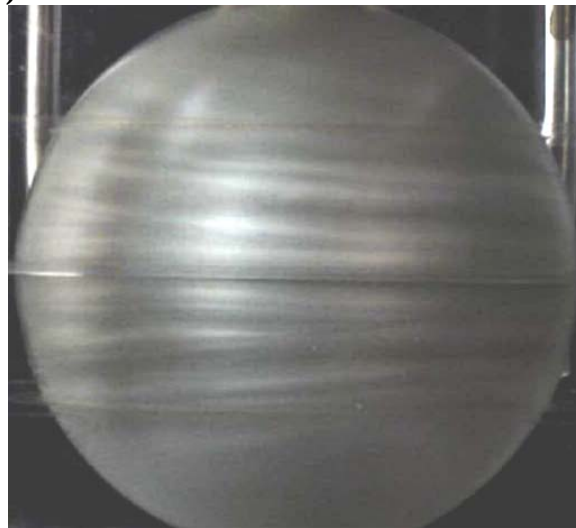
**Figure III.2.1:** Diagramme d'apparitions des phénomènes d'instabilité et des régimes d'écoulement  $\delta=0.11$ ,  $\Gamma=\Gamma_{max}=20$ .



(1)



(2)



(3)



(4)



(5)

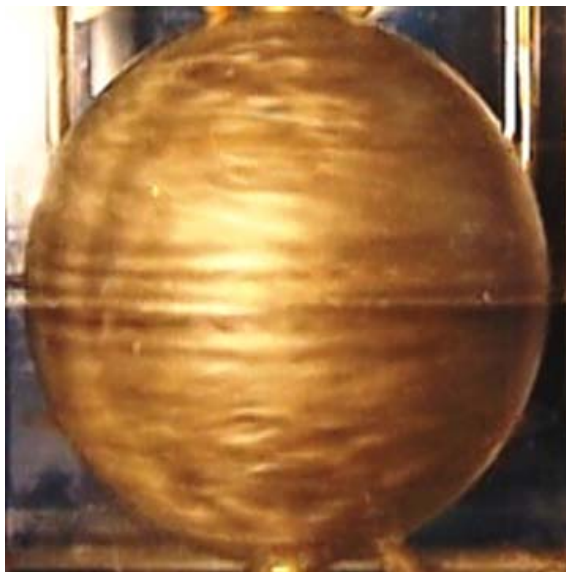
**Figure III.2.2:** Visualisation des états d'écoulement pour  $\delta = 0.11$  : 1.Cellules de Taylor, 2.Spiral Mode, 3.Wavy Mode + Spiral Mode, 4.Spiral Wavy Mode, 5.Wavy Mode,



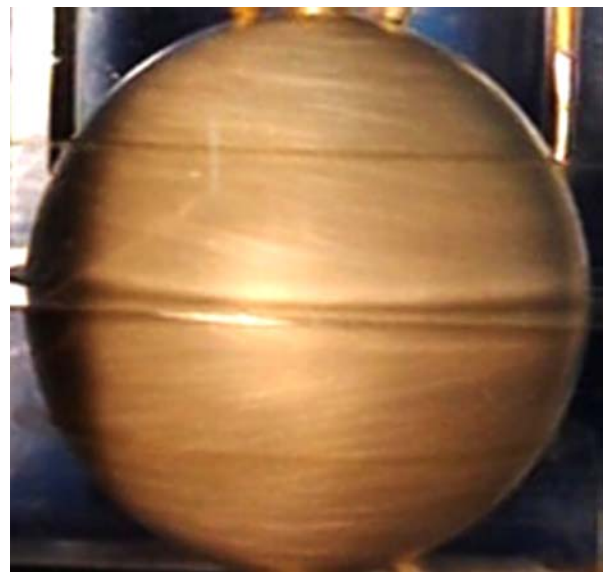
(1)



(2)



(3)



(4)

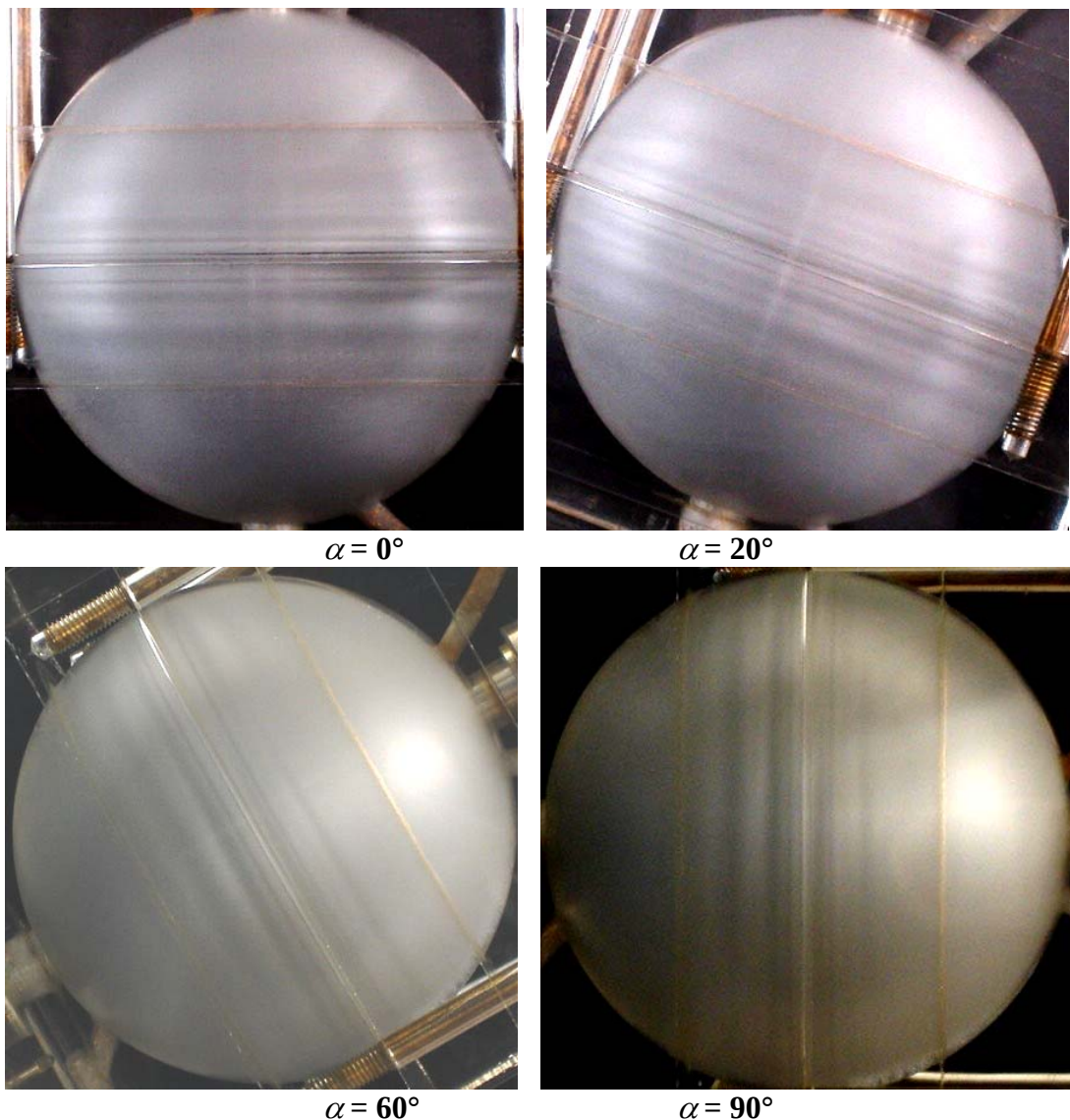
**Figure III.2.3:** Visualisation des états d'écoulement pour  $\delta = 0.11$  : 1. Fluctuation au pôle Nord, 2. Fluctuation au pôle Sud, 3. Chaos, 4. Turbulence complètement développée

## II. ETUDE QUALITATIVE :

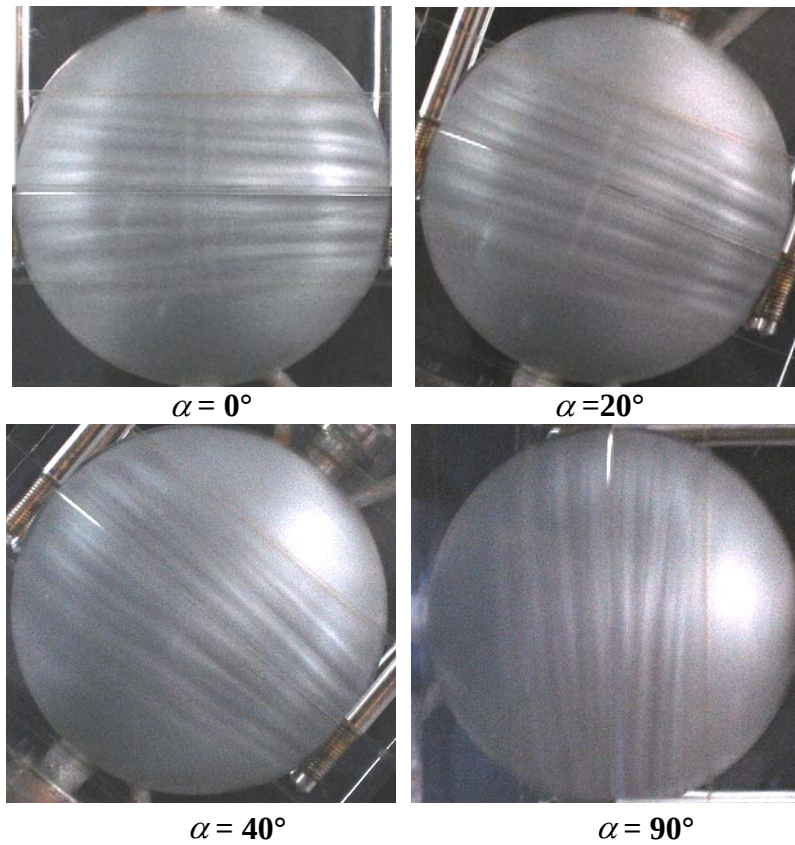
### II.1. Effet de l'inclinaison $\alpha$ pour un système totalement rempli $\Gamma=\Gamma_{max}$ :

D'après les différentes observations menées dans cette configuration et la comparaison des résultats obtenus pour chaque position de l'inclinaison, il semble que l'inclinaison (force de gravité) ne joue aucun rôle si le dispositif d'écoulement est totalement rempli pour les quatre modes étudiés.

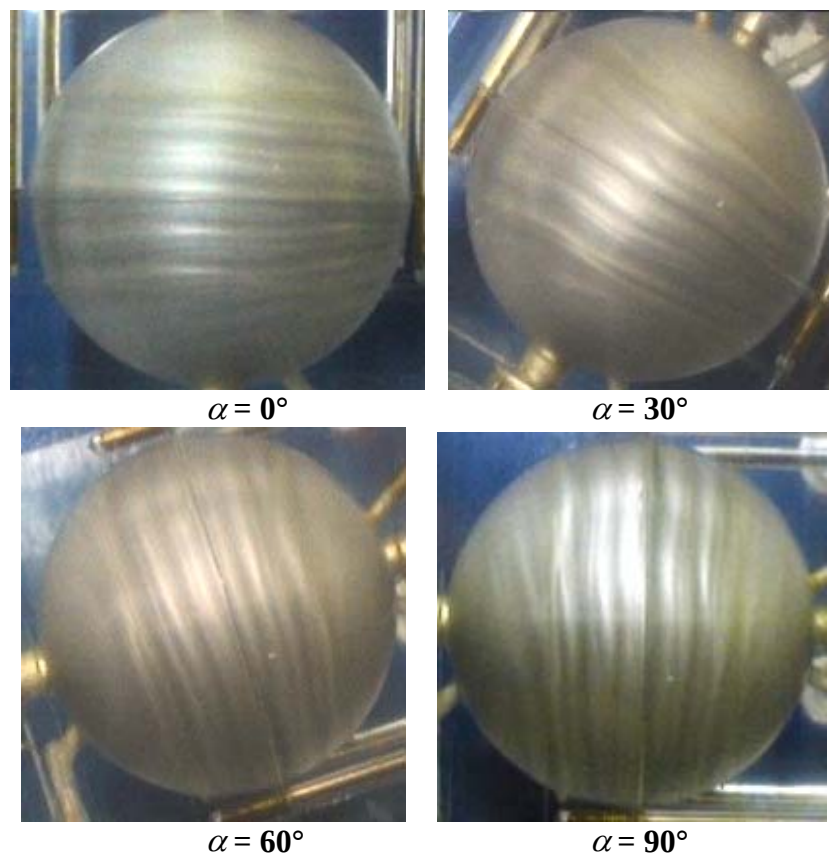
Ainsi pour  $Ta=45$  correspondant au régime d'écoulement en cellules de Taylor on note que  $\alpha$  a et sans incidence sur la forme et la taille de celle-ci.



**Figure III.2.4 :** Effet de l'inclinaison sur les cellules de Taylor  $Ta=45$ .



**Figure III.2.5 :** Effet de l'inclinaison sur le mode spiral  $Ta=50$



**Figure III.2.6 :** Effet de l'inclinaison sur l'onde azimutale en mode spiral (Spiral Wavy Mode)  $Ta=64$ .

La caractérisation de l'écoulement entre sphères coaxiales en position inclinée et de jeu radial  $\delta=0.11$ , complètement rempli  $\Gamma=\Gamma_{max}=20$  a permis de mettre en évidence que l'effet d'inclinaison donc la force de gravité n'a aucun effet sur le mouvement. Par contre, l'influence de l'inclinaison  $\alpha$  semble être d'une grande importance lorsque le dispositif est partiellement rempli c'est-à-dire lorsque  $H$  diminue tel que le facteur d'aspect :

$$\Gamma = \frac{H}{d}$$

Dans cette situation il s'agit de mettre en évidence l'influence spécifique de la surface libre et de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ . En premier lieu, on fixe le taux de remplissage  $\Gamma$  et le nombre de Taylor  $Ta$  et on fait varier l'angle d'inclinaison  $\alpha$ . En second lieu, on fait varier le taux de remplissage  $\Gamma$  en gardant l'angle d'inclinaison  $\alpha$  et le nombre de Taylor  $Ta$  fixes.

En dernier lieu, on garde le taux de remplissage  $\Gamma$  et l'angle d'inclinaison  $\alpha$  fixe, puis on fait varier le nombre de Taylor  $Ta$ .

Selon ce mode opératoire on procède aux traitements des résultats obtenus

## II.2. Effet de l'inclinaison $\alpha$ pour un taux de remplissage $\Gamma$ fixé:

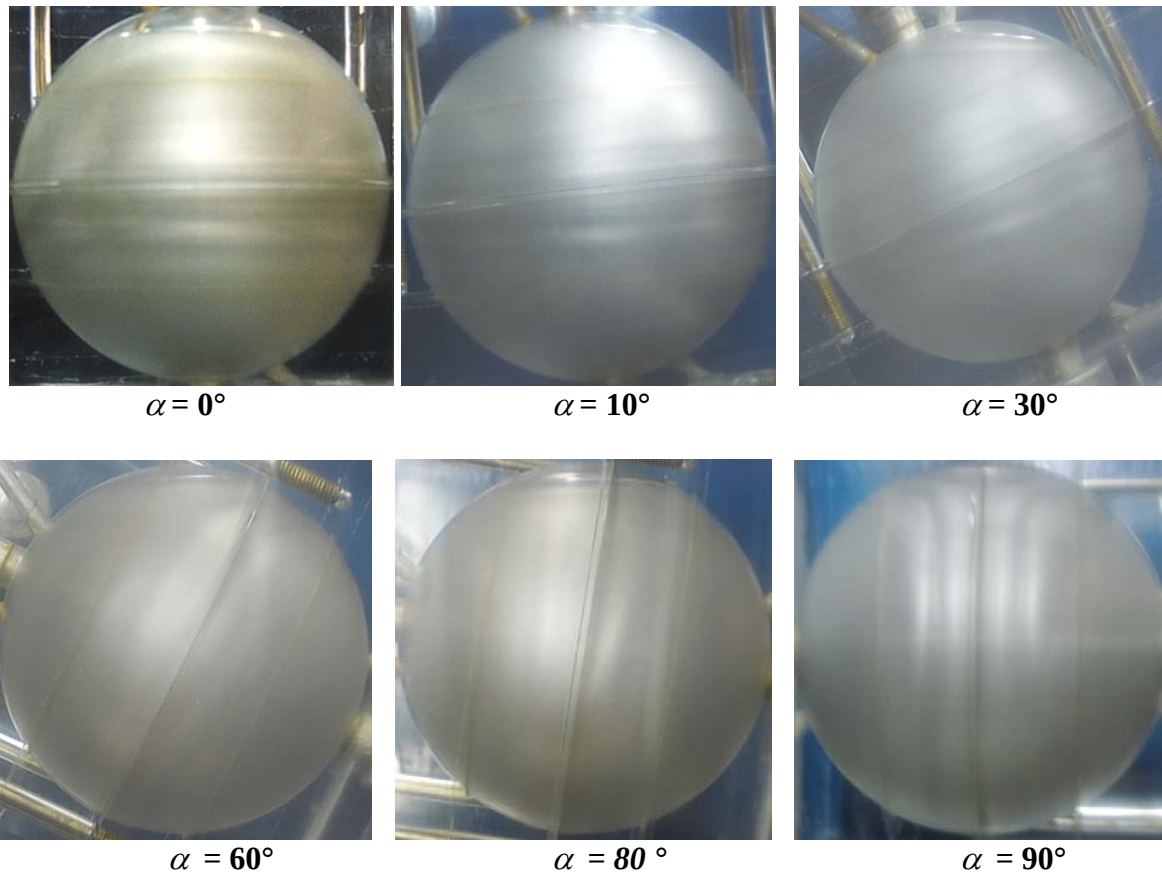
Afin d'étudier l'effet de l'inclinaison  $\alpha$  sur les conditions d'apparition des instabilités considérées, on a procédé à l'inclinaison du système d'écoulement, pour chaque facteur géométrique  $\Gamma$  fixé et pour un nombre de Taylor déterminé pour chaque cas et état d'instabilités à étudier.

Cette étude s'est déroulée selon les étapes suivantes :

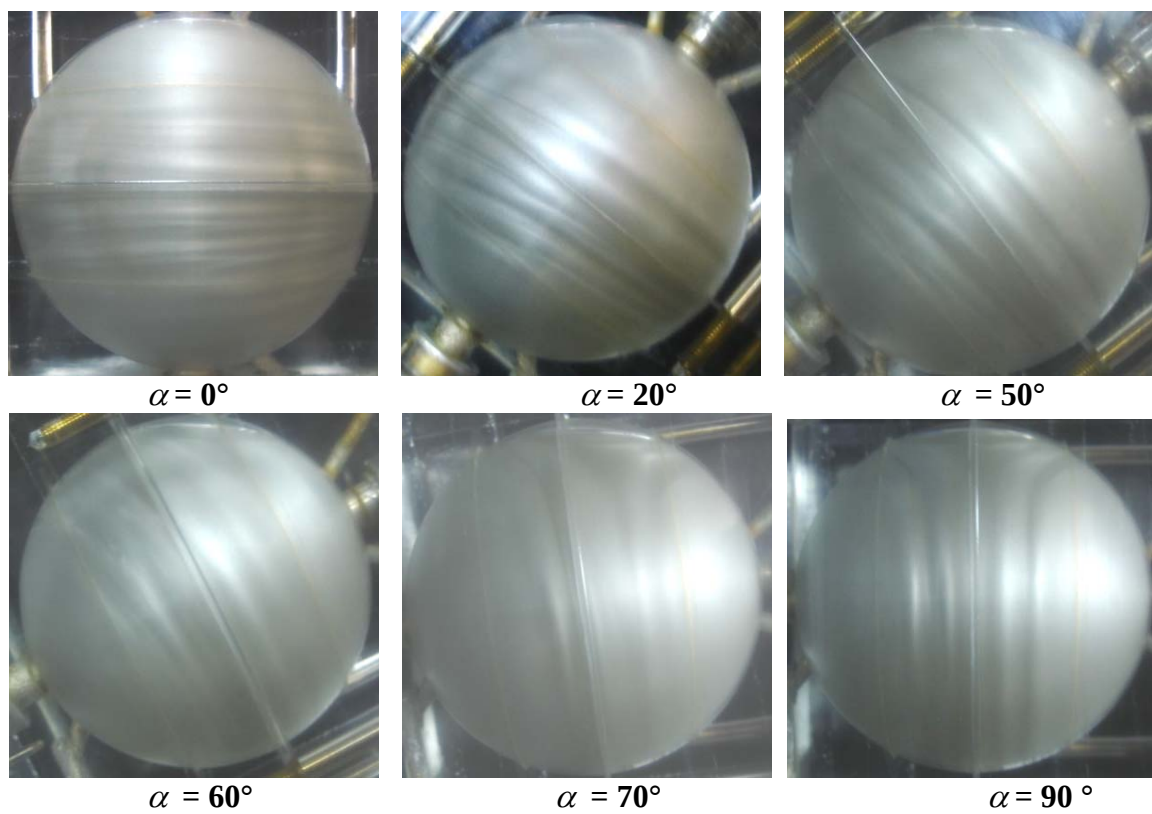
### a) Etude du cas $\Gamma = 19$ :

Ce cas est proche de l'écoulement en charge (taux de remplissage maximal). En procédant aux expériences de la manière décrite auparavant, on observe ce qui suit :

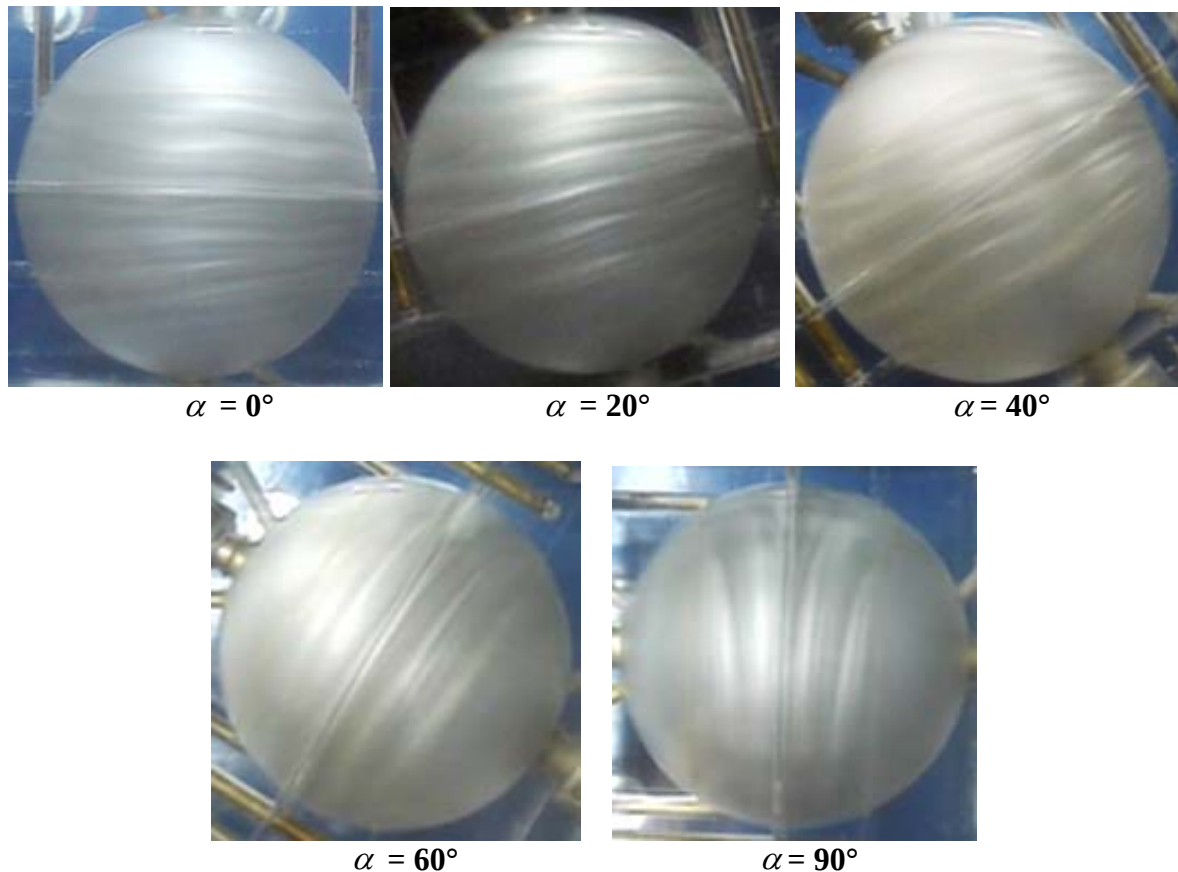
1. A  $Ta=45$ ,  $\alpha=0$  qui est la position de référence, on note l'apparition de la première instabilité : (cellules de Taylor). Dans cette situation, on n'observe aucune disparition des cellules lorsque  $\alpha$  croît de  $0$  à  $90^\circ$ . Cependant, on note, un rétrécissement des cellules, d'un côté, et un élargissement, de l'autre, avec un effet d'inclinaison des cellules qui s'opère. A  $\alpha=90^\circ$ , la symétrie se réinstalle à nouveau et la forme des cellules de Taylor devient homogène sur l'ensemble de sa circonférence [72].
2. On revient à la position verticale  $\alpha=0$  et en augmentant la vitesse jusqu'à l'apparition des cellules de Taylor en mouvement spiral (inclinée de  $2^\circ$  à  $10^\circ$ ) vers  $Ta=50$ , on note alors en faisant varier l'angle d'inclinaison, une déformation des cellules qui s'opère à partir de la surface libre. Au-delà de  $\alpha=85^\circ$  on enregistre la disparition totale de cet état mais en cédant la place aux cellules de Taylor qui reste dominante au sein de l'écoulement.
3. Pour  $Ta=56$ , à  $\alpha=0^\circ$ , en augmentant la vitesse du repos jusqu'à l'apparition de l'état composé d'une onde instationnaire près de l'équateur et des ondes spirales, on note alors en faisant varier l'angle d'inclinaison, une déformation des cellules qui s'opère à partir de la surface libre. Au-delà de  $\alpha=40^\circ$  on enregistre la disparition de l'onde azimutale et à  $\alpha=80^\circ$ , une disparition totale de cet état mais en cédant la place aux cellules de Taylor qui reste dominante au sein de l'écoulement.
4. Vers  $Ta=64$ , en procédant de la même manière jusqu'à l'installation du spiral wavy mode dans tout l'écoulement et en faisant varier l'angle d'inclinaison, on observe toujours la même déformation qui s'opère au niveau de la surface libre. Comme précédemment, on note la disparition de l'inclinaison des ondes instationnaire à  $\alpha=40^\circ$ . à  $\alpha=60^\circ$ , une disparition totale de cet état mais en cédant la place aux cellules de Taylor qui reste dominante au sein de l'écoulement.



**Figure III.2.7 :** Effet de l'inclinaison sur les cellules de Taylor à  $Ta=45$



**Figure III.2.8 :** Effet de l'inclinaison sur le Spiral Mode à  $Ta=56$



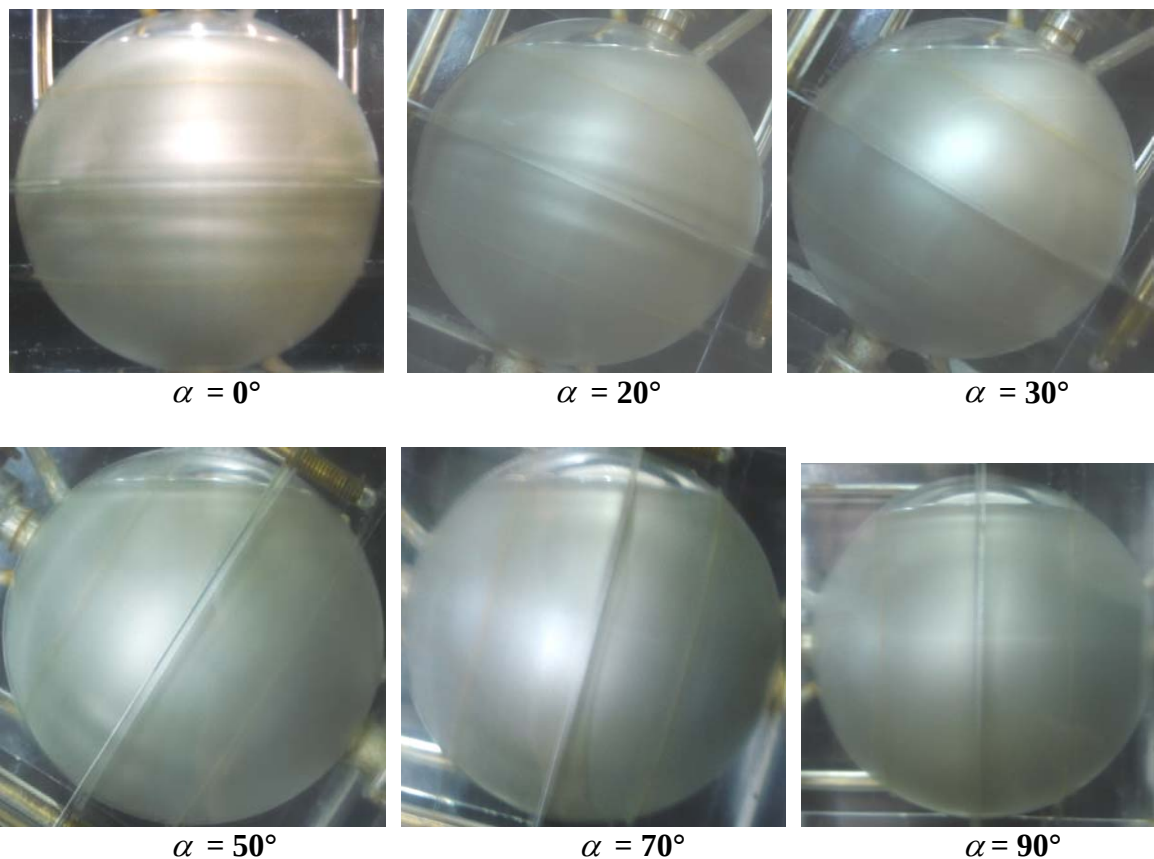
**Figure III.2.9 :** Effet de l'inclinaison sur le Wavy Mode à  $Ta=77$ .

**b) Etude du cas  $\Gamma = 18$  :**

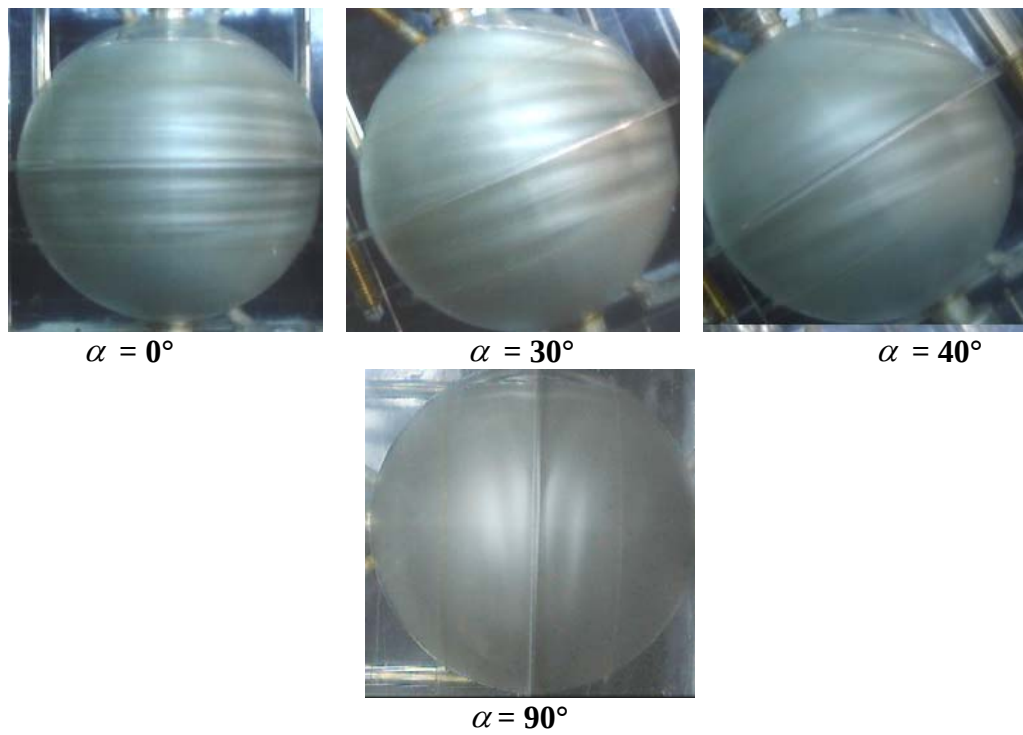
La hauteur de remplissage est fixée à  $H=90mm$  de sorte que l'on a  $\Gamma=18$ . On fait varier l'angle pour  $Ta$  fixé, on résume les observations suivantes :

1. En position verticale et à  $Ta=45$ , on note l'apparition de la première instabilité (cellules de Taylor). Dans ce cas, on remarque un rétrécissement et un élargissement des cellules de Taylor et une inclinaison de l'équateur qui commence. A  $\alpha=20^\circ$ , On observe la disparition d'une seule cellule puis la disparition totale des cellules de Taylor vers  $\alpha=30^\circ$  et le régime laminaire domine et s'étant à tout l'écoulement. On peut dire que  $\alpha=\alpha_c=30^\circ$  est une position de relaminarisation de l'écoulement.
2. On revient à la position verticale et en augmentant la vitesse jusqu'à l'apparition du Spiral Mode vers  $Ta=50$ . Pour cette valeur et en faisant varier l'angle d'inclinaison, on observe toujours la déformation des cellules au niveau de la surface libre et on enregistre une disparition totale de ce mode à  $\alpha=80^\circ$  mais, en cédant la place aux cellules de Taylor qui reste dominante au sein de l'écoulement.

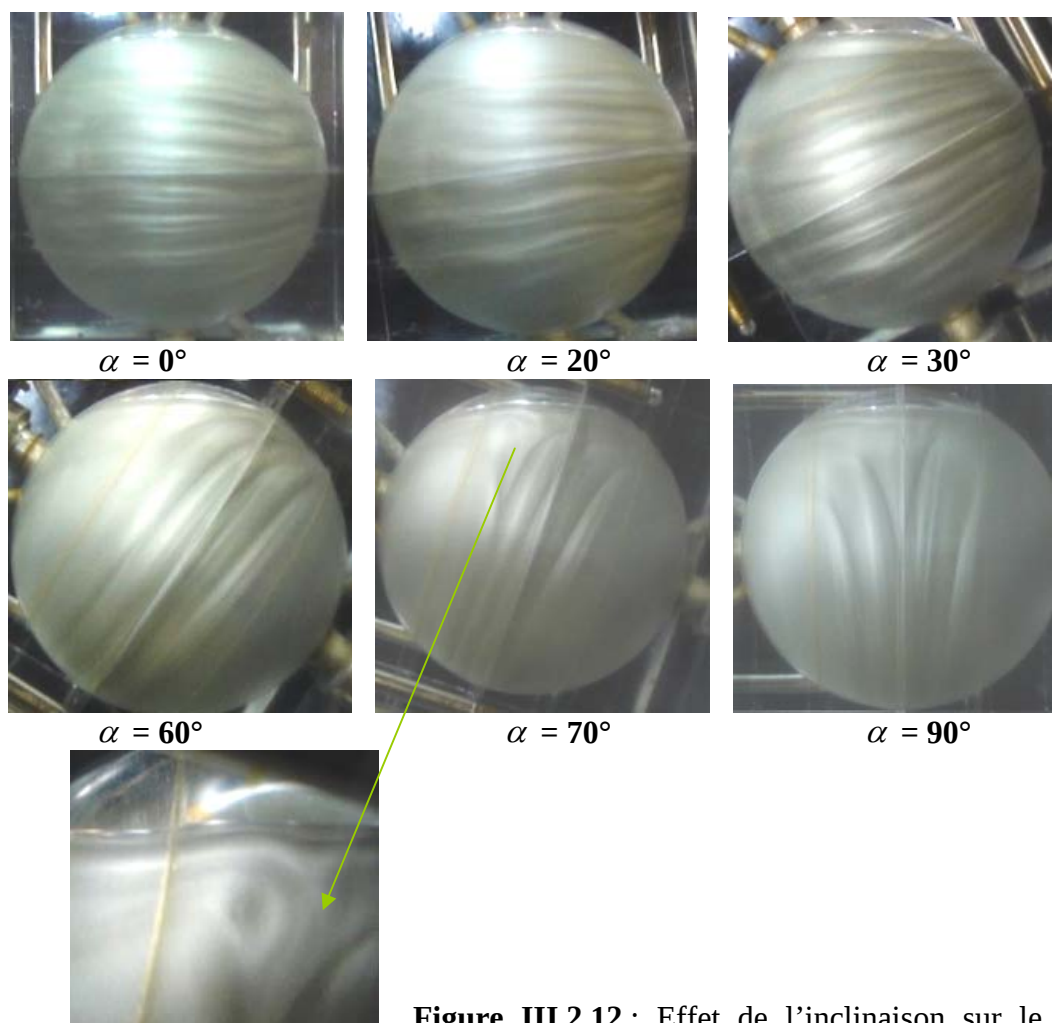
3. Pour  $Ta=56$ , à  $\alpha=0$ , on augmente la vitesse du repos jusqu'à l'apparition de l'état composé d'une onde instationnaire près de l'équateur et des ondes spiral inclinée de  $2^\circ$  à  $10^\circ$ . On remarque une disparition partielle de l'onde azimutale vers  $\alpha=40^\circ$  et à  $\alpha=80^\circ$  une disparition totale de cet état mais en cédant la place aux cellules de Taylor qui reste dominante au sein de l'écoulement.
4. en procédant de la même manière jusqu'à l'installation du Spiral Wavy Mode dans tout l'écoulement à  $Ta=64$ . En faisant varier l'angle d'inclinaison, on observe toujours la même déformation qui s'opère au niveau de la surface libre, une disparition de l'inclinaison des ondes à  $\alpha=40^\circ$ , à  $\alpha=60^\circ$ , une disparition totale de cet état mais en cédant la place aux cellules de Taylor qui reste dominante au sein de l'écoulement. On note l'apparition d'un tourbillon près de la surface libre à  $\alpha=70^\circ$ .



**Figure III.2.10:** Effet de l'inclinaison sur les cellules de Taylor à  $Ta=45$



**Figure III.2.11** : Effet de l'inclinaison sur le Spiral Mode à  $Ta=56$



**Figure III.2.12** : Effet de l'inclinaison sur le Spiral Wavy Mode à  $Ta=80$ .

**c) Etude du cas  $\Gamma = 13$  :**

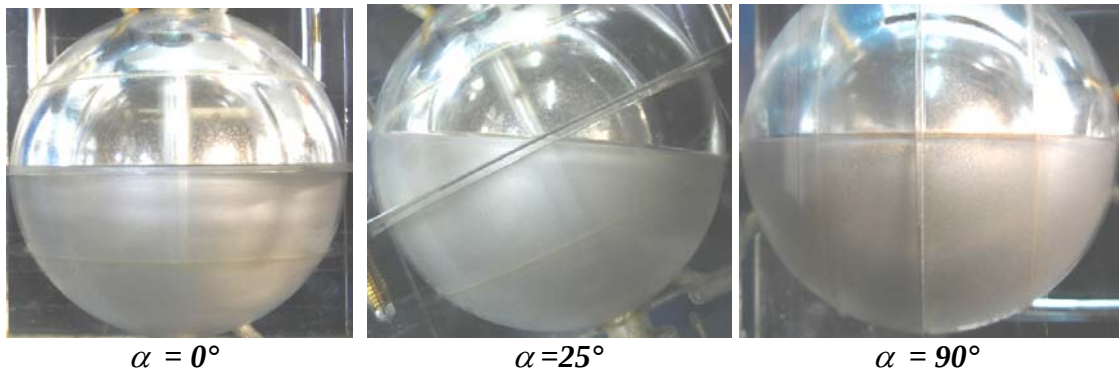
La hauteur de remplissage est de  $H=65mm$  correspond à  $\Gamma=13$ . En procédant aux expériences de la manière décrite précédemment, on observe ce qui suit

1. A  $Ta=45$ , on note l'apparition que de trois cellules de Taylor et la disparition de la symétrie équatoriale [72]. Au cours du processus d'inclinaison, on observe un rétrécissement et un élargissement des cellules de Taylor puis une disparition totale de celles-ci pour  $\alpha=25^\circ$ .  $\alpha=\alpha_c=25^\circ$  est une position de relaminarisation de l'écoulement.
2. A  $Ta=53$ , on note que le mouvement spiral des cellules de Taylor qui s'effectue dans la zone hémisphérique sud. On constate une disparition totale de cet état au voisinage de  $\alpha=60^\circ$ .  $\alpha=\alpha_c=60^\circ$  est une position de relaminarisation de l'écoulement.
3. A  $Ta=60$ , le comportement est le même que celui de l'état précédent sauf que la disparition totale s'opère à  $\alpha=40^\circ$ .  $\alpha=\alpha_c=40^\circ$  est une position de relaminarisation de l'écoulement.
4. A  $Ta=72$ , on observe que le mouvement instationnaire s'effectue seulement dans l'hémisphère sud. La disparition totale de ces ondes s'opère à  $\alpha=50^\circ$ ,  $\alpha=\alpha_c=50^\circ$  est une position de relaminarisation de l'écoulement.

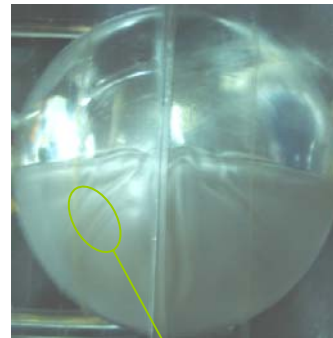
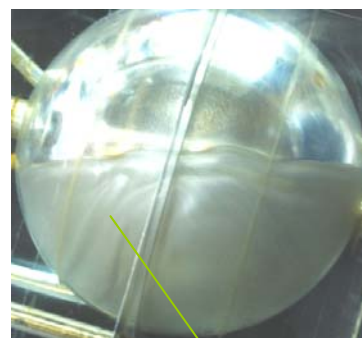
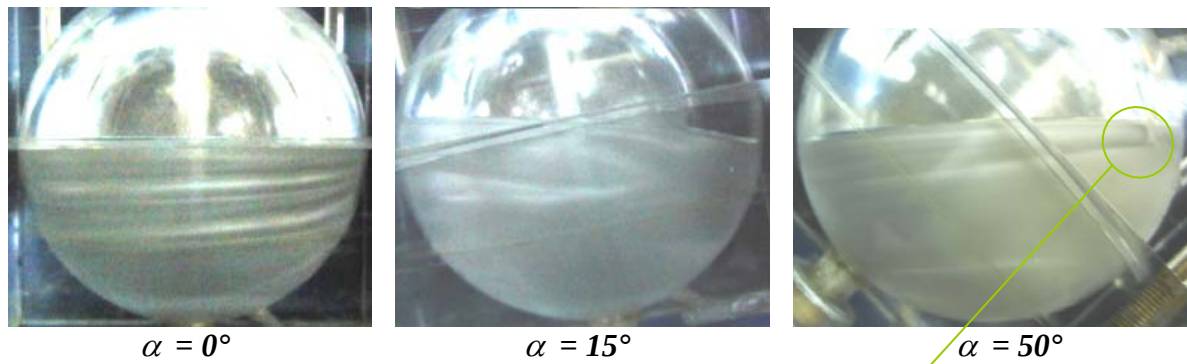
**d) Etude du cas  $\Gamma = 10$  :**

La hauteur de remplissage est de  $H=50mm$  correspond à  $\Gamma=10$ .

1. A  $Ta=45$ , on note que l'apparition de deux cellules de Taylor dans l'hémisphère sud. Au cours du processus d'inclinaison, un rétrécissement et un élargissement des cellules de Taylor se produit. La disparition totale des cellules de Taylor s'opère pour  $\alpha=25^\circ$ .  $\alpha=\alpha_c=25^\circ$  est une position de relaminarisation de l'écoulement.
2. A  $Ta=51$ , on remarque qu'un mouvement spiral « en vis sans fin » des cellules de Taylor s'effectue que dans l'hémisphère sud. On enregistre une disparition totale de cet état à  $\alpha=25^\circ$ .  $\alpha=\alpha_c=25^\circ$  est une position de relaminarisation de l'écoulement.
3. Dans cette configuration d'écoulement, le mode onde instationnaire superposé d'un mouvement spiral n'existe plus.
4. A  $Ta=56$ , on observe que le Spiral Wavy Mode s'effectue seulement dans l'hémisphère sud et l'onde près de la surface libre reste stationnaire. La disparition totale de ces ondes est observée à  $\alpha=35^\circ$ ,  $\alpha=\alpha_c=35^\circ$  est une position de relaminarisation de l'écoulement.



**Figure III.2.13 :** Effet de l'inclinaison sur les cellules de Taylor à  $Ta=45$



$\alpha = 75^\circ$

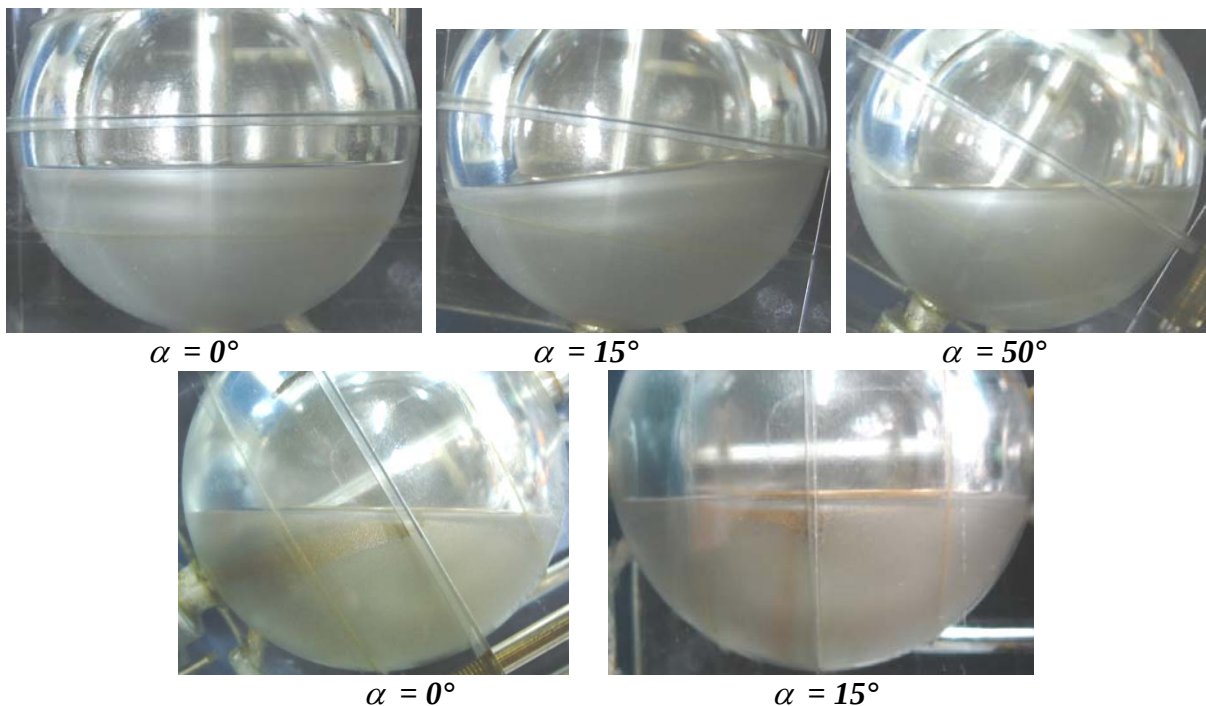
$\alpha = 90^\circ$

**Figure III.2.14 :** Effet de l'inclinaison sur le Spiral Wavy Mode à  $Ta=133$

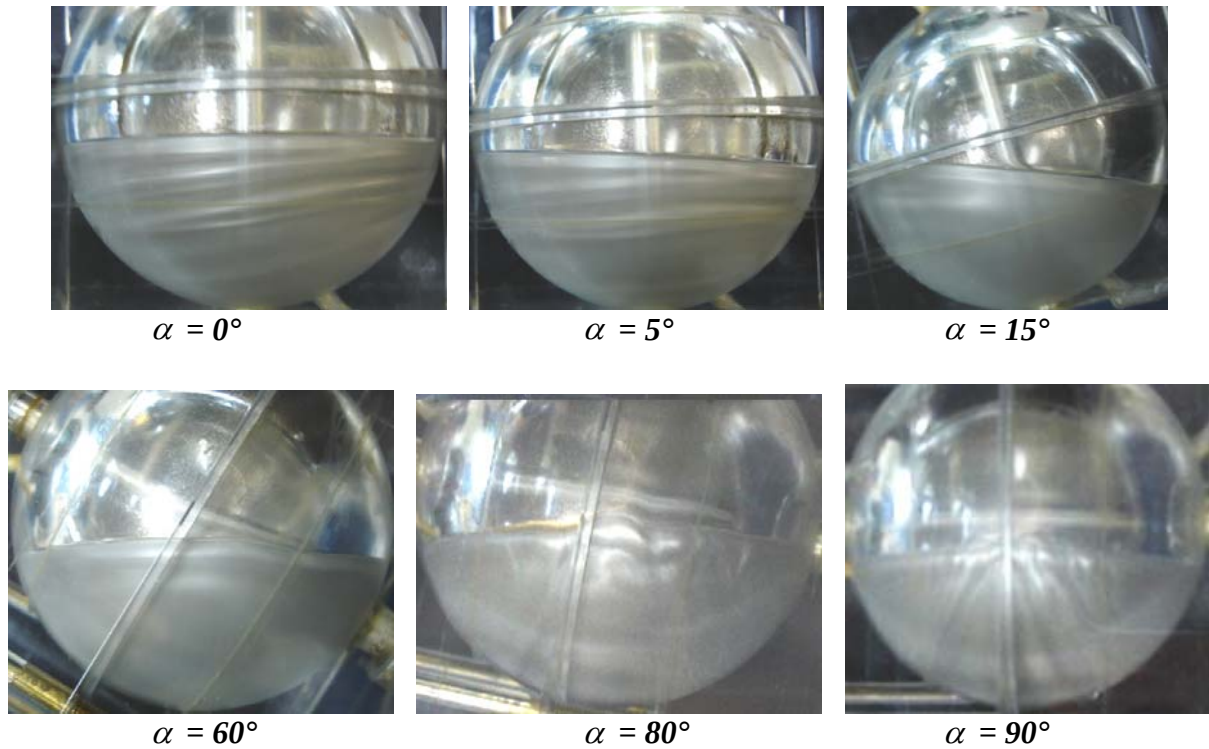
**e) Etude du cas  $\Gamma = 8$  :**

La hauteur de remplissage est de  $H=40mm$  correspond à  $\Gamma=8$ .

1. A  $Ta=45$ , on note l'apparition que de deux cellules de Taylor dans l'hémisphère sud.  
La disparition totale des cellules de Taylor s'opère pour  $\alpha=20^\circ$ .  $\alpha=\alpha_c=20^\circ$  est une position de relaminarisation de l'écoulement.
2. A  $Ta=51$ , on constate qu'un mouvement spiral sous la forme en vis sans fin des cellules de Taylor s'établit uniquement dans l'hémisphère sud. On enregistre une disparition totale de cet état à  $\alpha=25^\circ$ .  $\alpha=\alpha_c=25^\circ$  est une position de relaminarisation de l'écoulement.
3. Dans cette configuration d'écoulement, les deux états qui suivent ne subsistent plus.



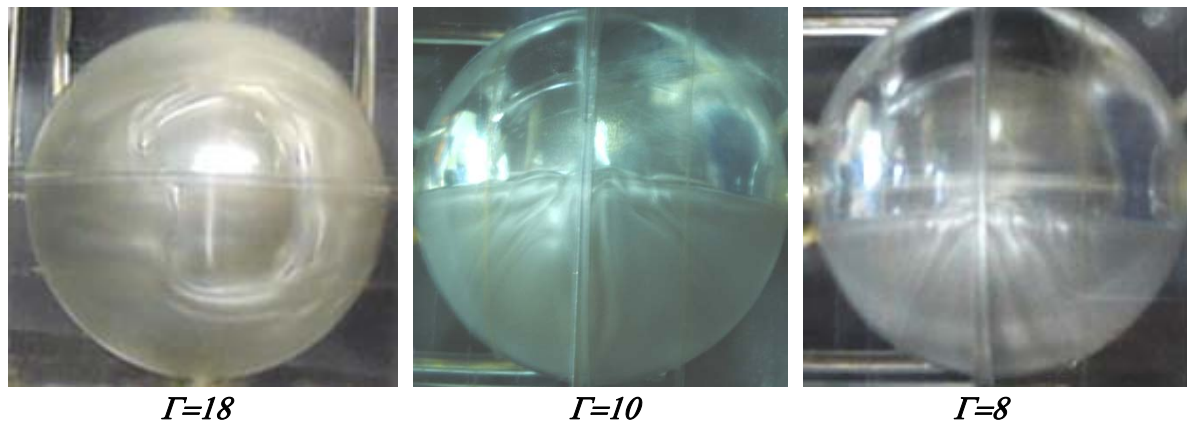
**Figure III.2.15 :** Effet de l'inclinaison sur les cellules de Taylor à  $Ta=45$



**Figure III.2.16 :** Effet de l'inclinaison sur le Spiral Mode à  $Ta=105$ .

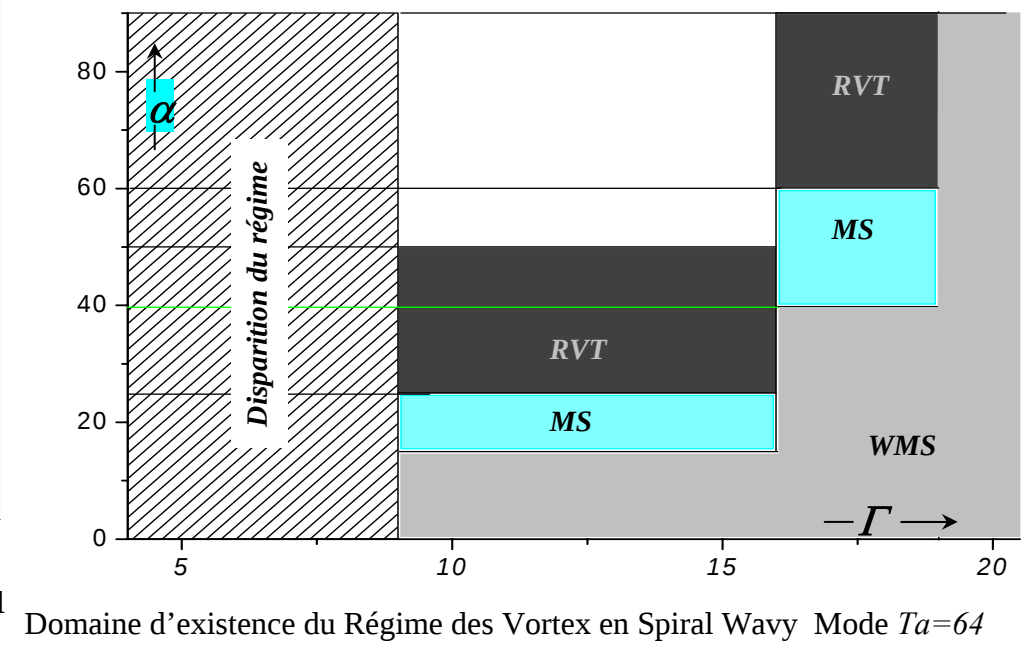
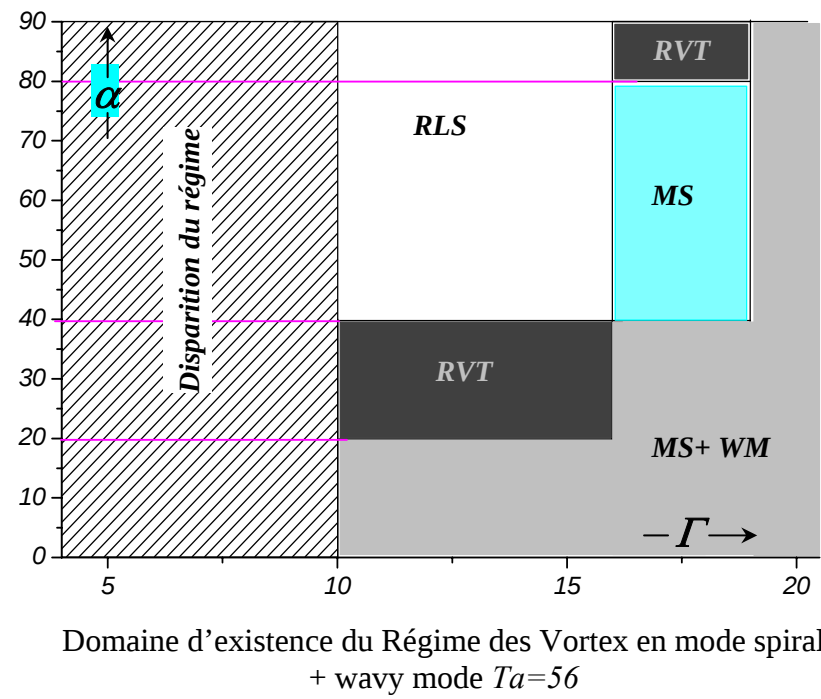
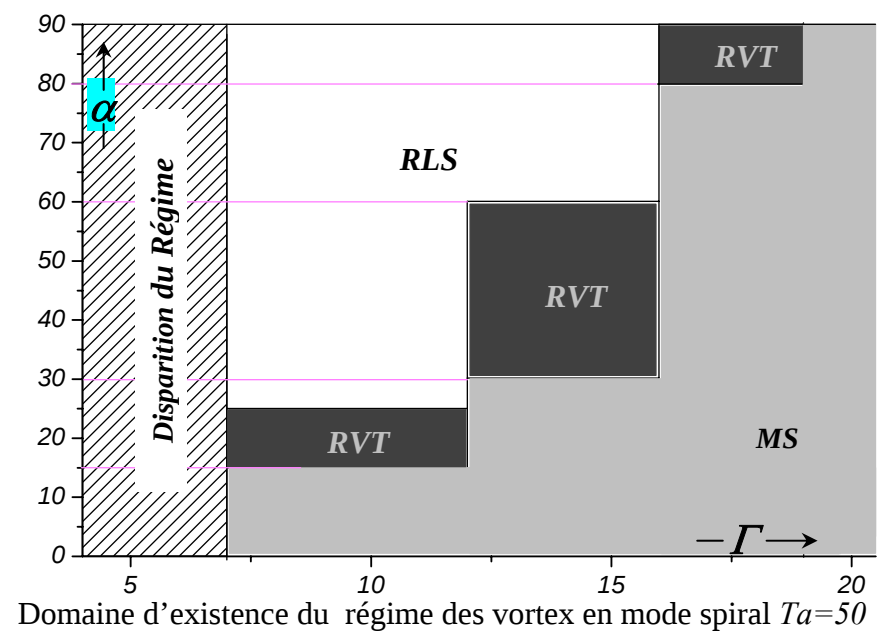
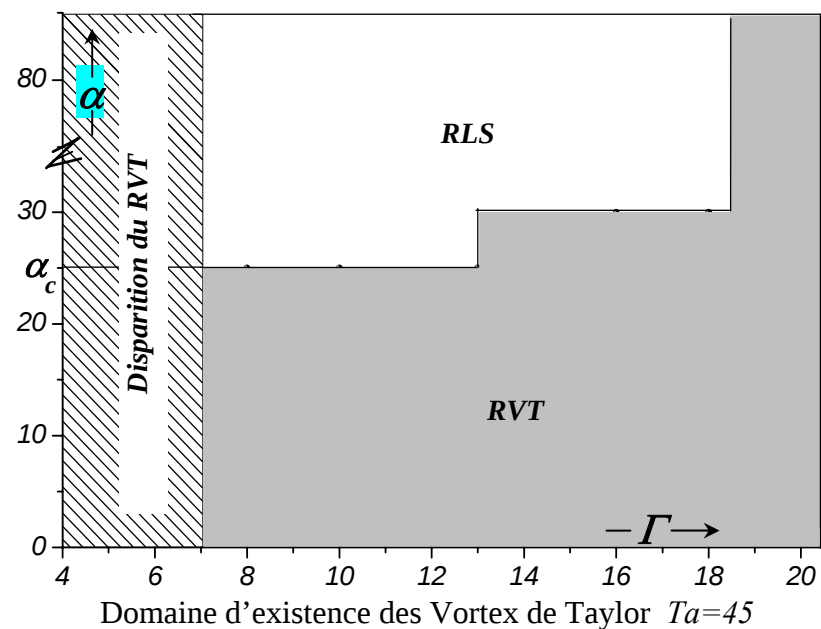
**Remarque :** Déformation de la surface libre :

Au cours de nos essais, on constate une déformation notable de la surface libre pour des nombres de Taylor élevés (*Figure III.2.17*).



**Figure III.2.17 :** Déformation de la surface pour  $Ta=105$ .

Le dépouillement et l'analyse des résultats expérimentaux de l'effet de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  pour un facteur d'aspect  $\Gamma$  et un nombre de Taylor  $Ta$  fixés, nous a permis de déterminer les angles d'inclinaisons critiques résumés dans les diagrammes suivants :



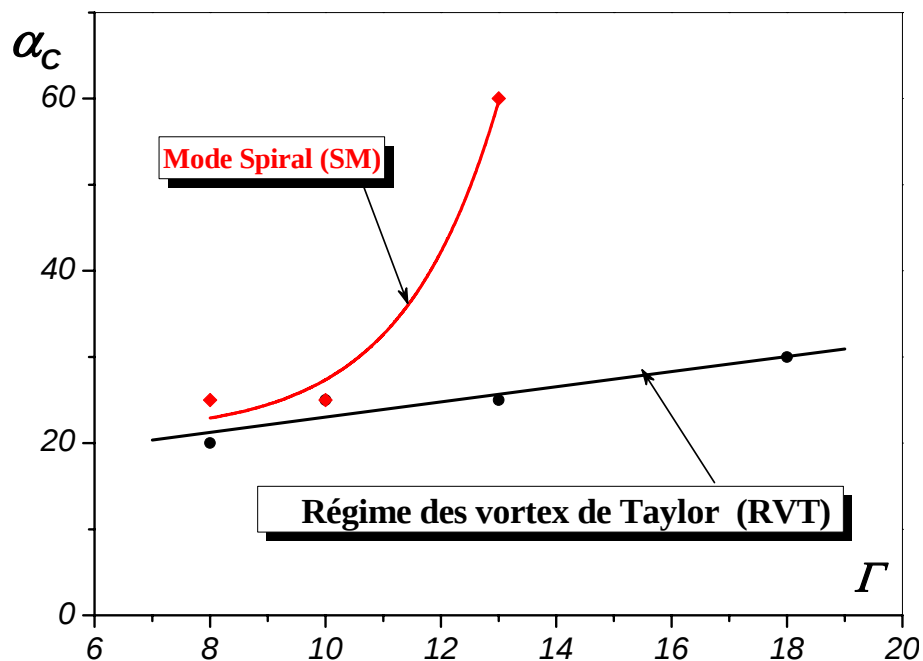
La nomenclature adoptée pour représenter les régimes d'écoulement et structures associées dans les diagrammes est la suivante :

- RLS** : Régime Laminaire Stable
- RVT** : Régime des Vortex de Taylor
- MS** : Mode Spiral
- MS+WM** : Mode Spiral + Wavy Mode
- WMS** : Wavy Mode Spiral

La figure III.2.18 indique la variation des angles critiques de relaminarisation en fonction du taux de remplissage  $\Gamma$  pour le premier et le deuxième mode. Les lois qui découlent de cette variation sont :

**RVT : Loi linéaire**  $\alpha_c(\Gamma) = 14.2 + 0.88\Gamma$  pour  $\Gamma > 7$

**MS : Loi exponentielle**  $\alpha_c(\Gamma) = 21 + 0.015 e^{0.6\Gamma}$



**Figure III.2.18** : Détermination des angles critiques de relaminarisation en fonction des limitations axiales  $\Gamma$

### II.3. Effet taux de remplissage pour un angle d'inclinaison $\alpha$ fixé

Cette étude est consacrée à l'effet du facteur d'aspect  $\Gamma$  pour chaque angle d'inclinaison  $\alpha$  fixé et un nombre de Taylor fixe, sur l'évolution des Structures des instabilités étudiées.

#### a) Cas d'un système verticale $\alpha=0^\circ$

Cette étude a donné lieu aux observations suivantes :

En position verticale et à  $Ta=45$ , on note l'apparition de la première instabilité (cellules de Taylor). En faisant diminuer le facteur d'aspect  $\Gamma$ , on constate la disparition d'une cellule à une hauteur critique  $\Gamma_{c1}=13$  accompagnée d'une perte de symétrie équatoriale. Arrivée à  $\Gamma=10$  une autre cellule disparaît. A  $\Gamma=8$  on note l'existence d'une seule cellule. La disparition totale des ondes s'opère à  $\Gamma_{c2}=7$ . (Figure III.2.19)

A  $Ta=76$ , toujours en position verticale, le Wavy Mode spiral s'établit, toujours on note une perte de la symétrie à  $\Gamma=13$ , une disparition de ce régime d'écoulement se produit à  $\Gamma=8$ . (Figure III.2.20)

#### b) Cas d'un système incliné $\alpha=30^\circ$

A  $Ta=45$ , on note l'apparition de la première instabilité (cellules de Taylor). En faisant diminuer le facteur d'aspect  $\Gamma$ , on constate la disparition totale de régime des vortex de Taylor à une hauteur critique  $\Gamma_{c1}=18$ . Au-dessous de cette valeur l'écoulement est laminaire. (Figure III.2.21)

A  $Ta=56$ , on constate la disparition totale du mode spiral + le wavy mode à une hauteur critique  $\Gamma_{c1}=16$ . Au-dessous de cette valeur l'écoulement est laminaire. (Figure III.2.22)

#### c) Cas d'un système incliné $\alpha=60^\circ$

Pour  $\alpha=60^\circ$  et à  $Ta=45$ , on note l'apparition de la première instabilité (cellules de Taylor). En faisant diminuer le facteur d'aspect  $\Gamma$ , on constate la disparition totale de régime des vortex de Taylor à une hauteur critique  $\Gamma_{c1}=18$ . Au-dessous de cette valeur l'écoulement est laminaire. (Figure III.2.23)

A  $Ta = 56$ , on constate la disparition totale du mode spiral + le wavy mode à une hauteur critique  $\Gamma_{c1} = 16$ . Au-dessous de cette valeur l'écoulement est laminaire. (*Figure III.2.24*)

**d) Cas d'un système horizontal  $\alpha = 90^\circ$**

Pour  $\alpha = 90^\circ$  et à  $Ta = 45$ , on note l'apparition de la première instabilité (vortex de Taylor). En faisant diminuer le facteur d'aspect  $\Gamma$ , on constate la disparition totale de régime des vortex de Taylor à une hauteur critique  $\Gamma_{c1} = 18$ . Au-dessous de cette valeur l'écoulement est laminaire. (*Figure III.2.25*)

A  $Ta = 56$ , on constate la disparition totale du mode spiral + le wavy mode à une hauteur critique  $\Gamma_{c2} = 16$ . Au-dessous de cette valeur l'écoulement devient laminaire. (*Figure III.2.26*)

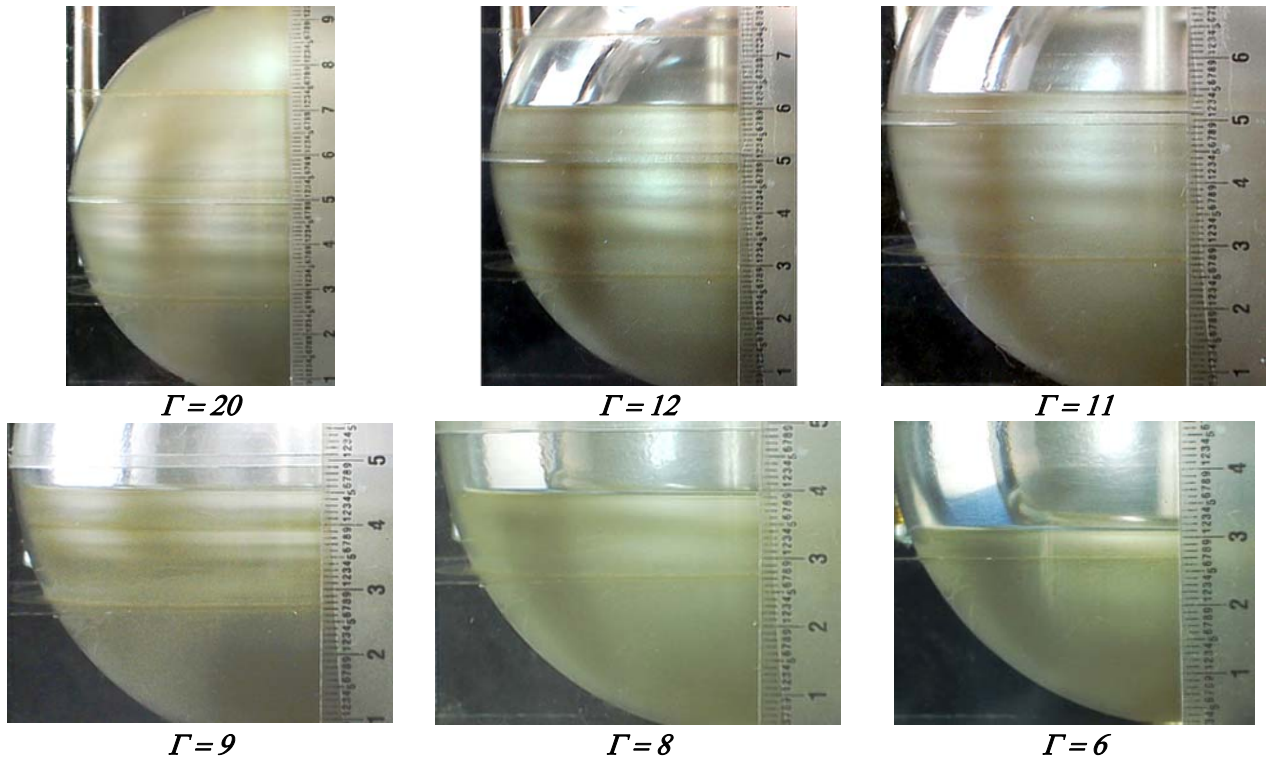


Figure III.2.19 : de la hauteur sur les cellules de Taylor en système vertical  $Ta=45$

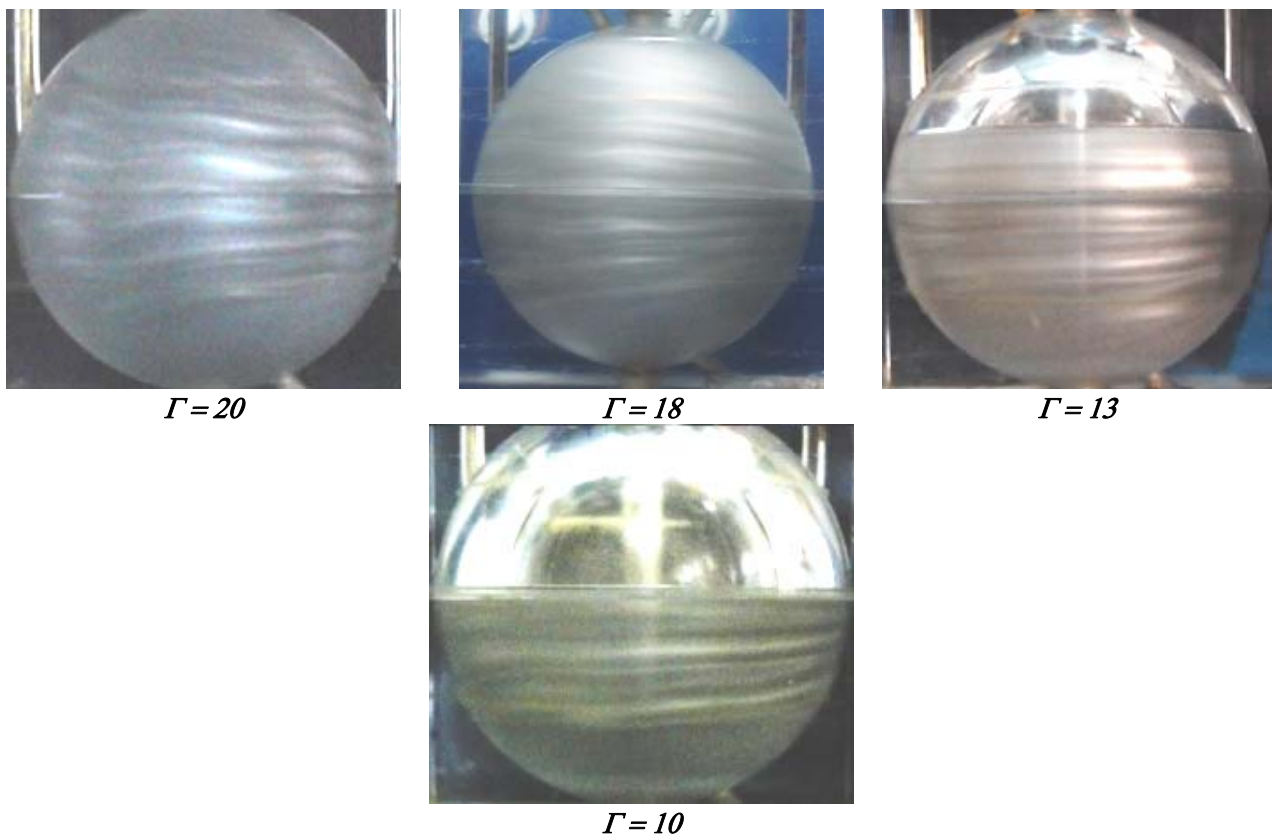
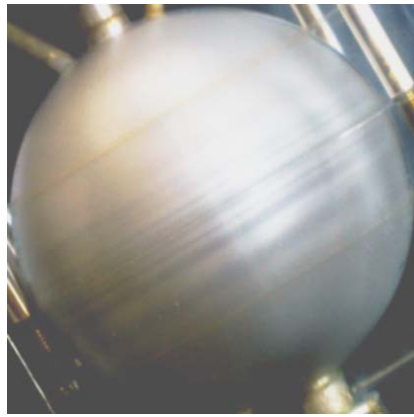
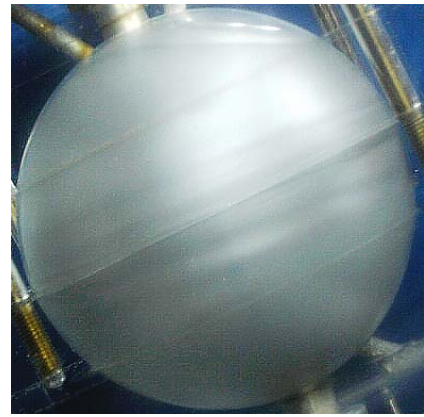


Figure III.2.20 : Effet de la hauteur sur le Spiral Wavy Mode en système vertical  $Ta=76$



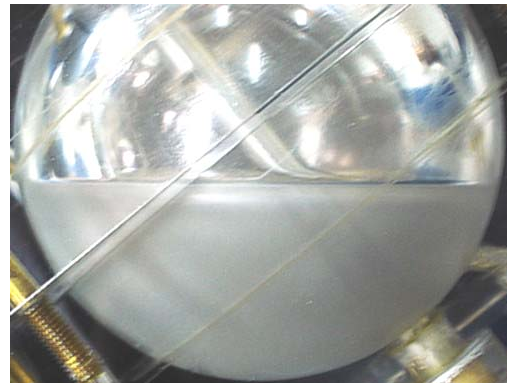
$\Gamma = 20$



$\Gamma = 19$



$\Gamma = 18$



$\Gamma = 8$

Figure III.2.21 : Effet du taux de remplissage  $\Gamma$  sur le régime des vortex de Taylor à  $\alpha = 30^\circ$ .  $Ta = 45$



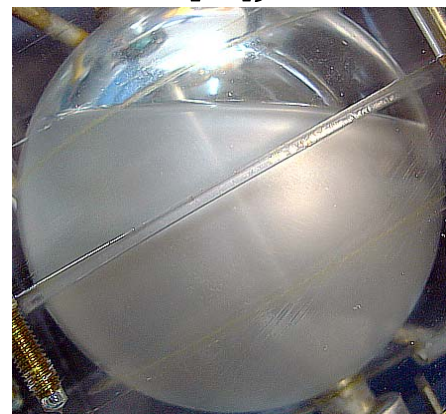
$\Gamma = 20$



$\Gamma = 19$

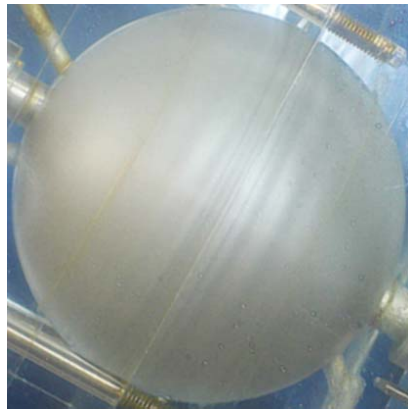


$\Gamma = 18$

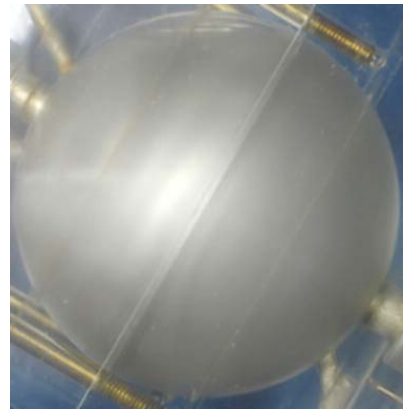


$\Gamma = 13$

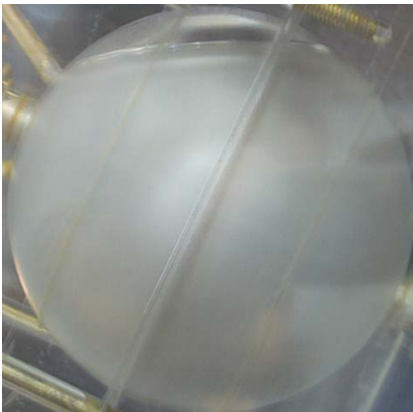
Figure III.2.22 : Effet du taux de remplissage  $\Gamma$  sur le wavy mode spiral à  $\alpha = 30^\circ$ .  $Ta = 76$



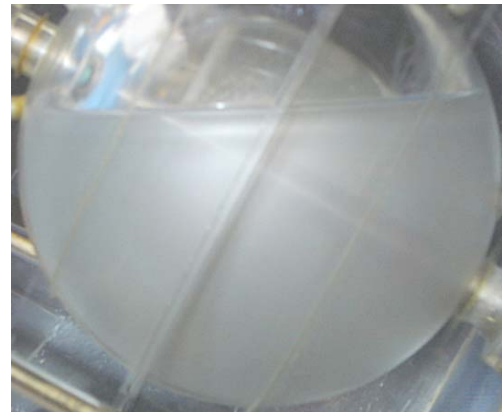
$\Gamma = 20$



$\Gamma = 19$

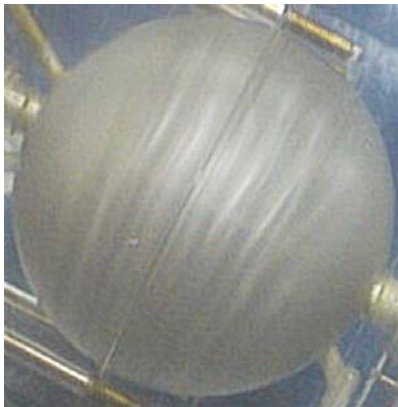


$\Gamma = 18$

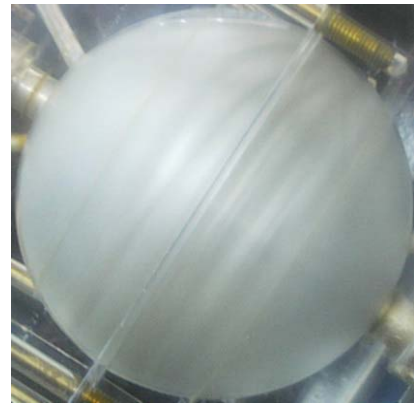


$\Gamma = 13$

Figure III.2.23 : Effet du taux de remplissage  $\Gamma$  sur le régime des vortex de Taylor à  $\alpha = 60^\circ$ .  $Ta = 45$



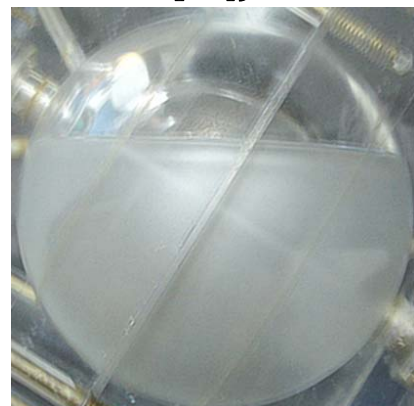
$\Gamma = 20$



$\Gamma = 19$

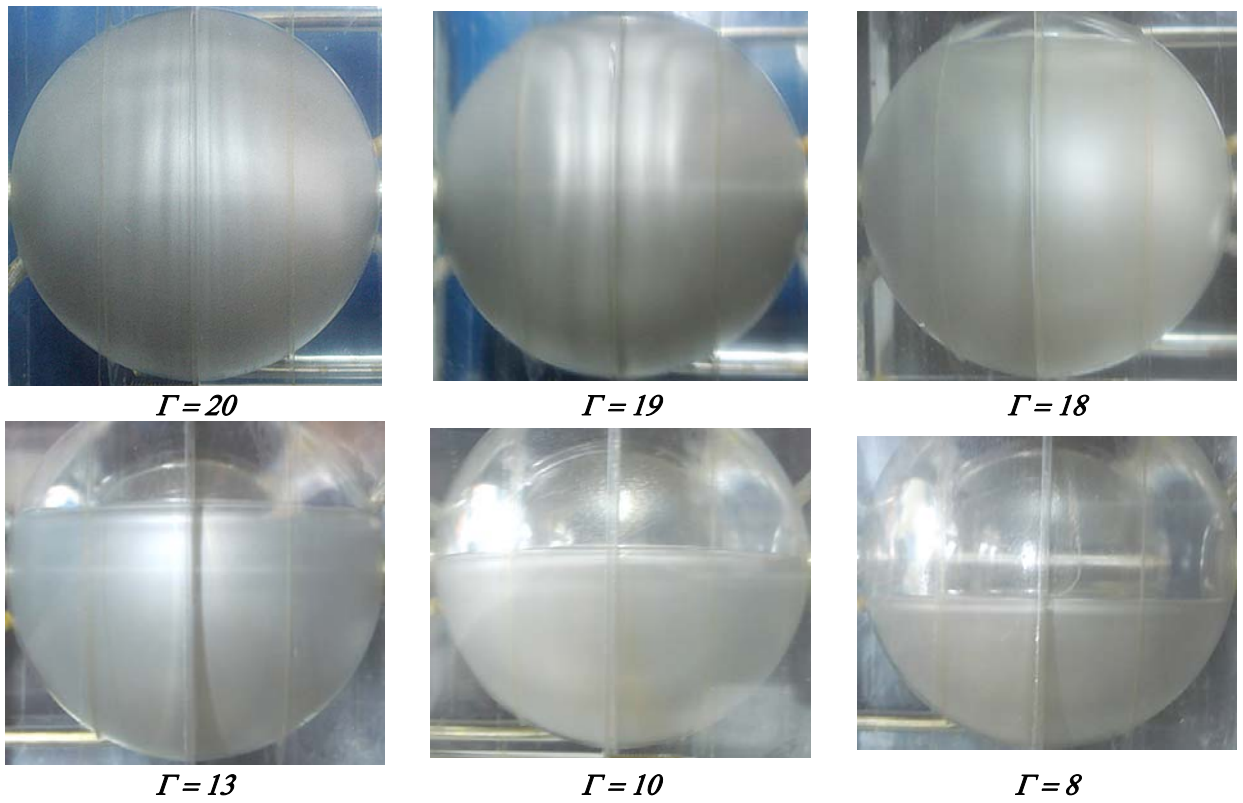


$\Gamma = 18$

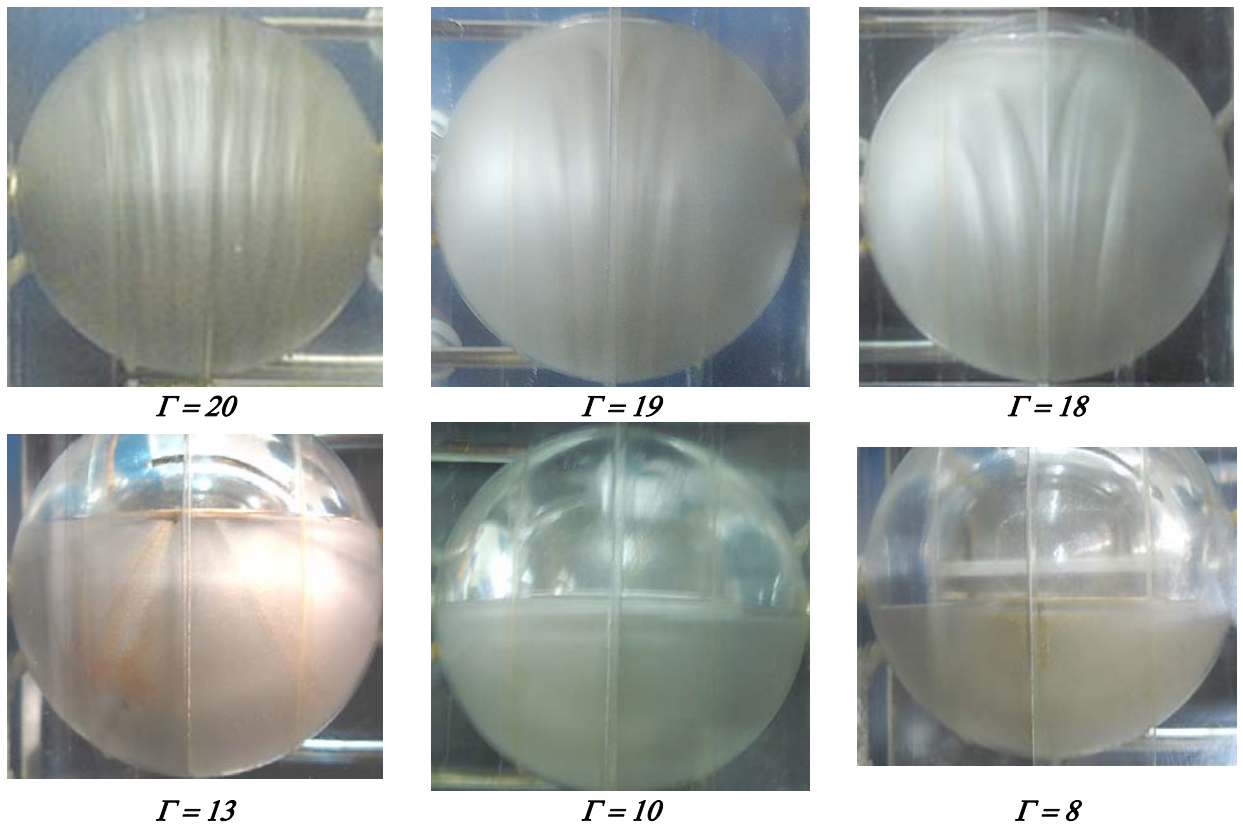


$\Gamma = 13$

**Figure III.2.24** : Effet du taux de remplissage  $\Gamma$  sur le wavy mode spiral à  $\alpha = 60^\circ$ .  $Ta = 76$



**Figure III.2.25** : Effet du taux de remplissage  $\Gamma$  sur le régime des vortex de Taylor à  $\alpha = 90^\circ$ .  $Ta = 45$



**Figure III.2.26** : Effet du taux de remplissage  $\Gamma$  sur le wavy mode spiral à  $\alpha = 90^\circ$ .  $Ta = 76$

### III. ETUDE QUANTITATIVE

#### III.1. Variation des nombres critiques de Taylor $Tc$ en fonction du taux de remplissage $\Gamma$

Il s'agit d'étudier la loi de comportement attachée aux seuils critiques des nombres de Taylor associés à chaque structure en fonction de la variation de la hauteur de remplissage pour un angle d'inclinaison  $\alpha$  donné que l'on fixe préalablement. Des lois phénoménologiques, ajustées pour suivre l'évolution des nombres de Taylor critiques en fonction du taux de remplissage  $\Gamma$  (Figure III.2.27–31) sont résumées sous la forme générale dans le tableau suivant :

| Lois de comportement | Forme générale                                                        |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Linéaire             | $Tc(\Gamma) = A_1 + B_1 \Gamma$                                       |
| Gaussienne           | $Tc(\Gamma) = Tc_0 + C_1 \exp[-D_1(\Gamma - \Gamma_0)^2]$             |
| exponentielle        | $Tc(\Gamma) = Tc_0 + G \exp(\Gamma/\Gamma_0)$                         |
| Boltzmannienne       | $Tc(\Gamma) = Tc_0 + \frac{E_1}{[1 + \exp((\Gamma - \Gamma_0)/F_1)]}$ |

Tableau III.2.2 : Loi de comportement  $Tc$  ( $\Gamma$ )

L'ensemble des constantes  $Tc_0, A_1, B_1, C_1, D_1, G, E_1, F_1, \Gamma_0$  sont déterminées par ajustement numérique sur les courbes expérimentales.

Afin de déterminer la variation des nombres de Taylor critiques pour un angle d'inclinaison  $\alpha$  et un facteur d'aspect  $\Gamma$  fixés, on procède à

la variation quasi-statique de la vitesse de rotation  $\Omega_l$  pour en déterminer le nombre de Taylor critique pour les différentes instabilités représentées dans des courbes pour chaque cas et état étudié. La systématisation des essais a permis de mettre en lumière l'influence remarquable de l'inclinaison  $\alpha$  du système d'écoulement sur les conditions d'apparitions des instabilités que l'on récapitule sous forme d'abaques (Figure III.2.32).

Les lois de type linéaire sont valables pour une inclinaison faible qui se situe dans l'intervalle angulaire suivant :  $0 \leq \alpha \leq 15^\circ$ . On constate que ces lois sont également valables, de nouveau, dans l'intervalle des grandes inclinaisons  $65^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . En ce qui concerne les

lois de type exponentiel, le critère d'apparition des structures précédentes est valable dans le domaine des angles complémentaires, à savoir  $15^\circ \leq \alpha \leq 65^\circ$

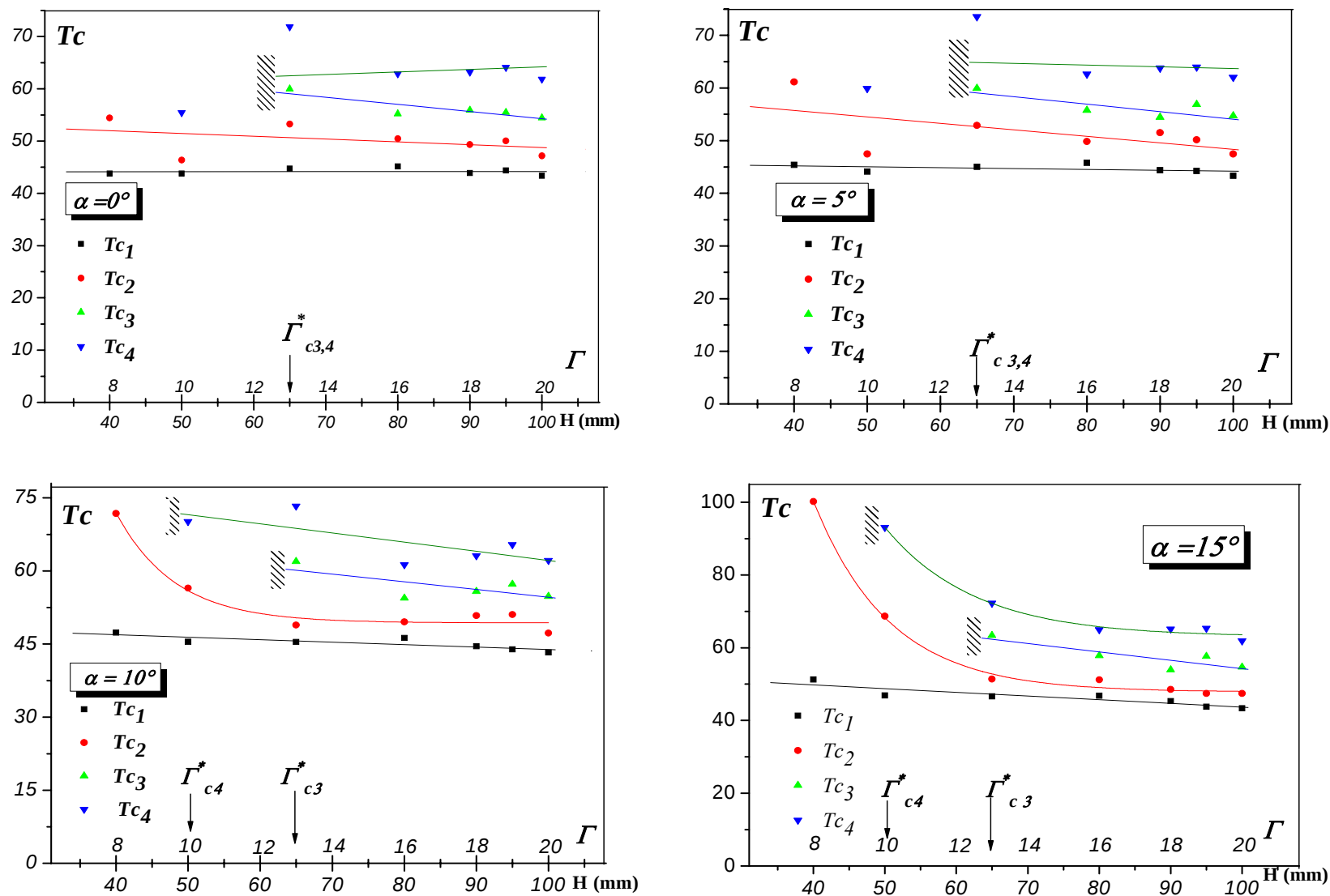


Figure III.2.27 : Variation des nombres de Taylor critiques  $Tc_1$ ,  $Tc_2$ ,  $Tc_3$  et  $Tc_4$  en fonction du taux de remplissage  $\Gamma$  pour  $\alpha=0...15$

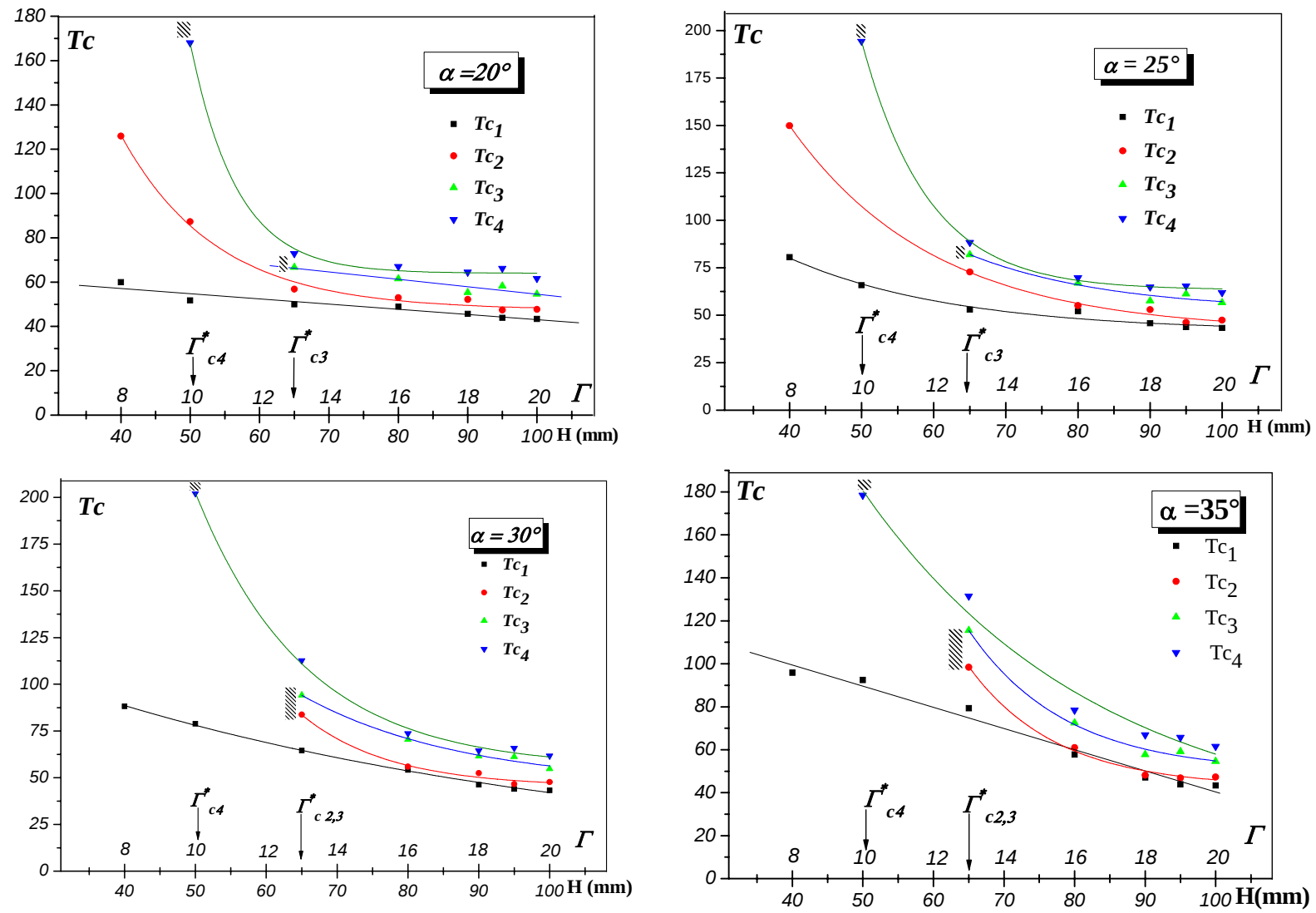


Figure III.2.28 : Variation des nombres de Taylor critiques  $Tc_1$ ,  $Tc_2$ ,  $Tc_3$  et  $Tc_4$  en fonction du taux de remplissage  $\Gamma$  pour  $\alpha=20\dots35$

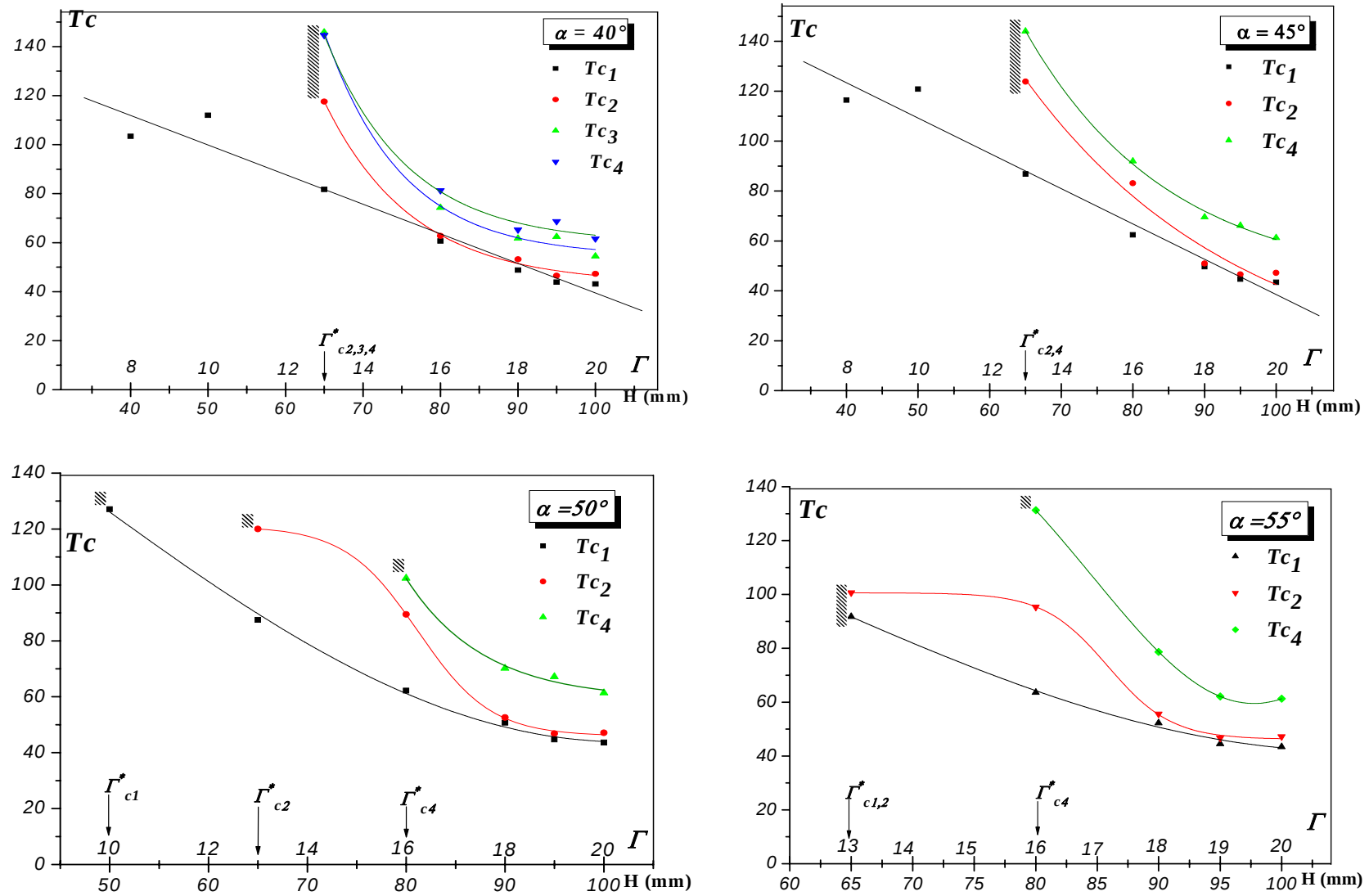


Figure III.2.29 : Variation des nombres de Taylor critiques  $Tc_1$ ,  $Tc_2$ ,  $Tc_3$  et  $Tc_4$  en fonction du taux de remplissage  $\Gamma$  pour  $\alpha=40\dots55$

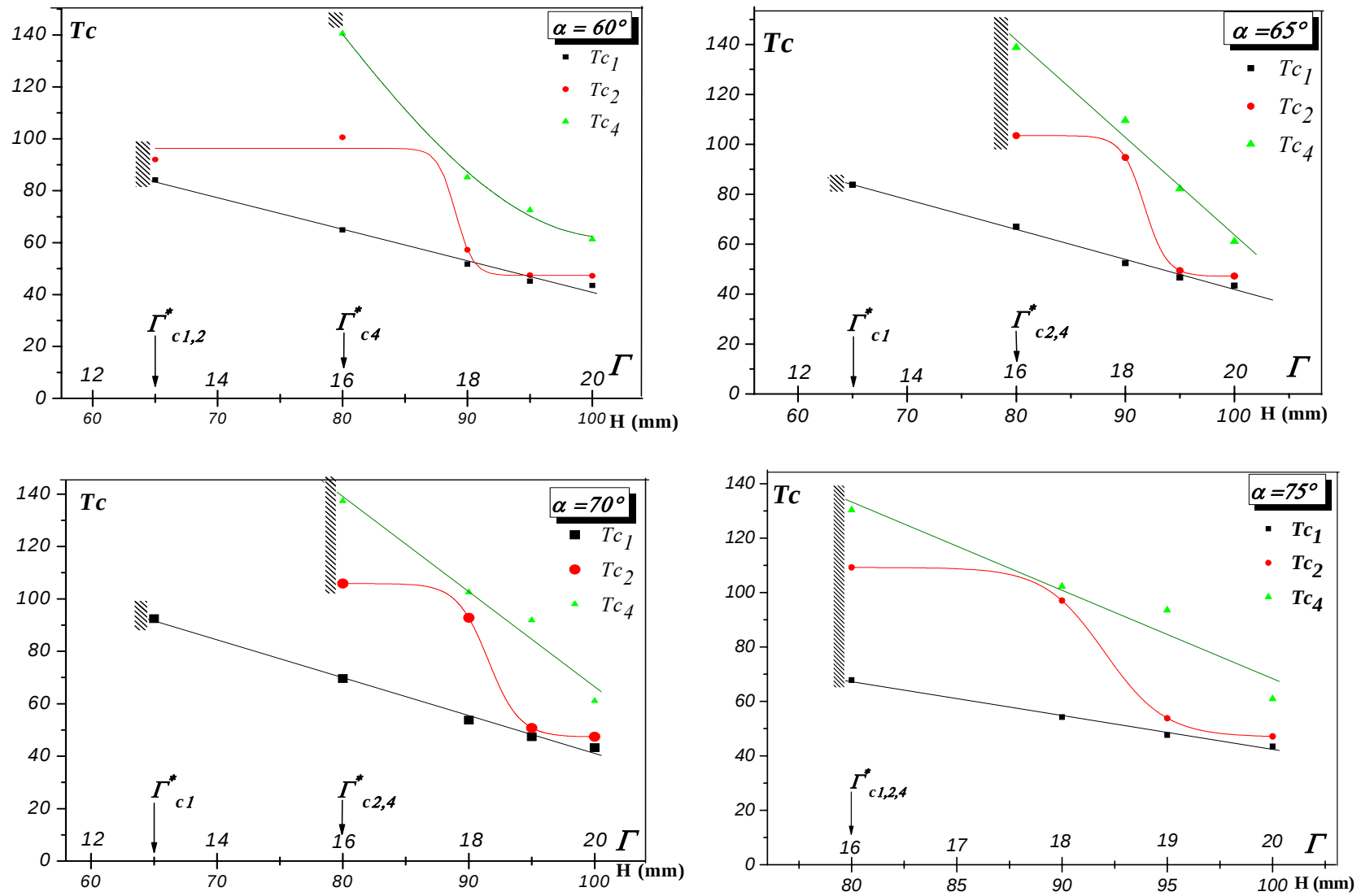
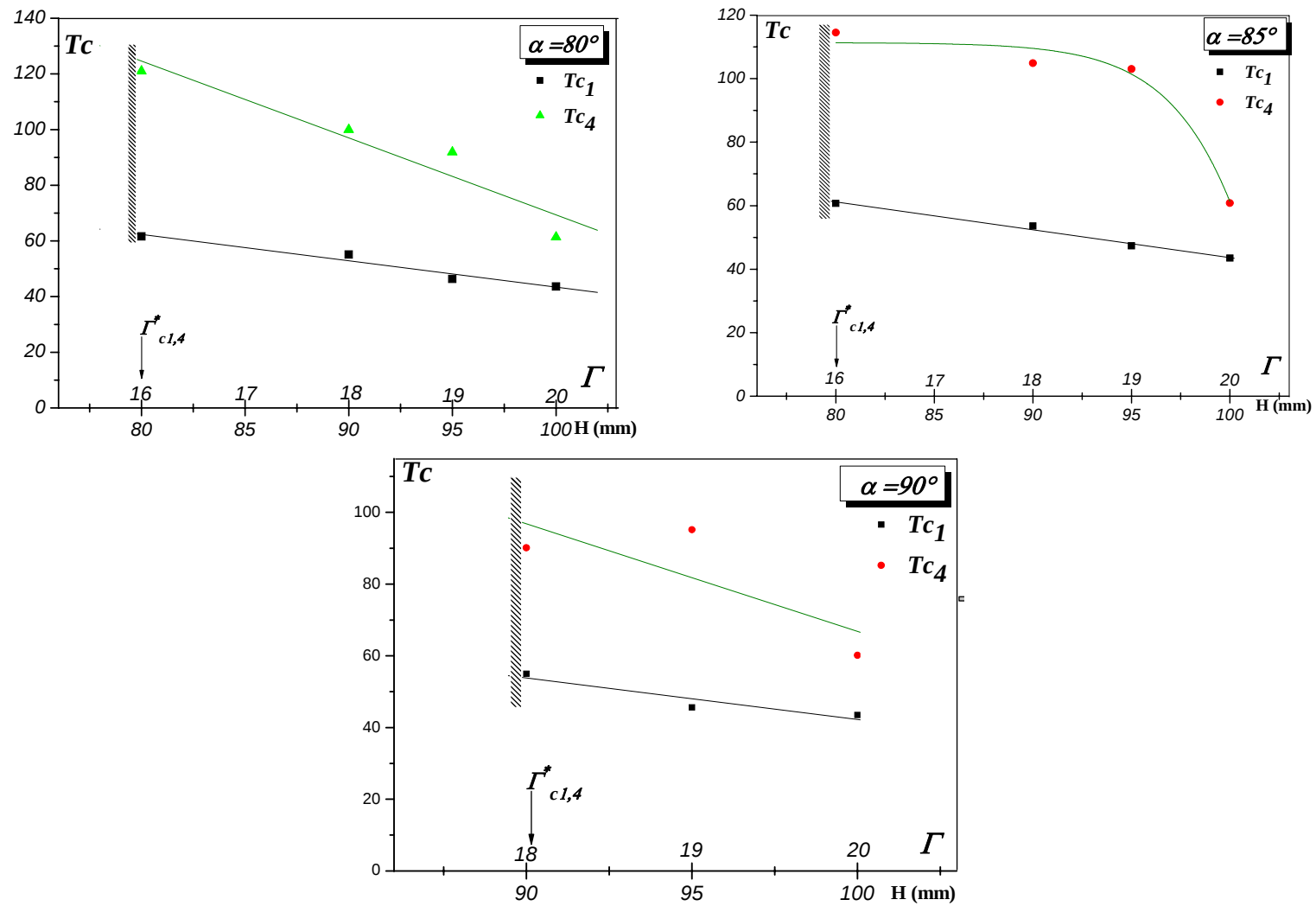


Figure III.2.30 : Variation des nombres de Taylor critiques  $Tc_1$ ,  $Tc_2$ ,  $Tc_3$  et  $Tc_4$  en fonction du taux de remplissage  $\Gamma$  pour  $\alpha=60\dots75$



**Figure III.2.31 :** Variation des nombres de Taylor critiques  $Tc_1$ ,  $Tc_2$ ,  $Tc_3$  et  $Tc_4$  en fonction du taux de remplissage  $\Gamma$  pour  $\alpha=80\dots90$

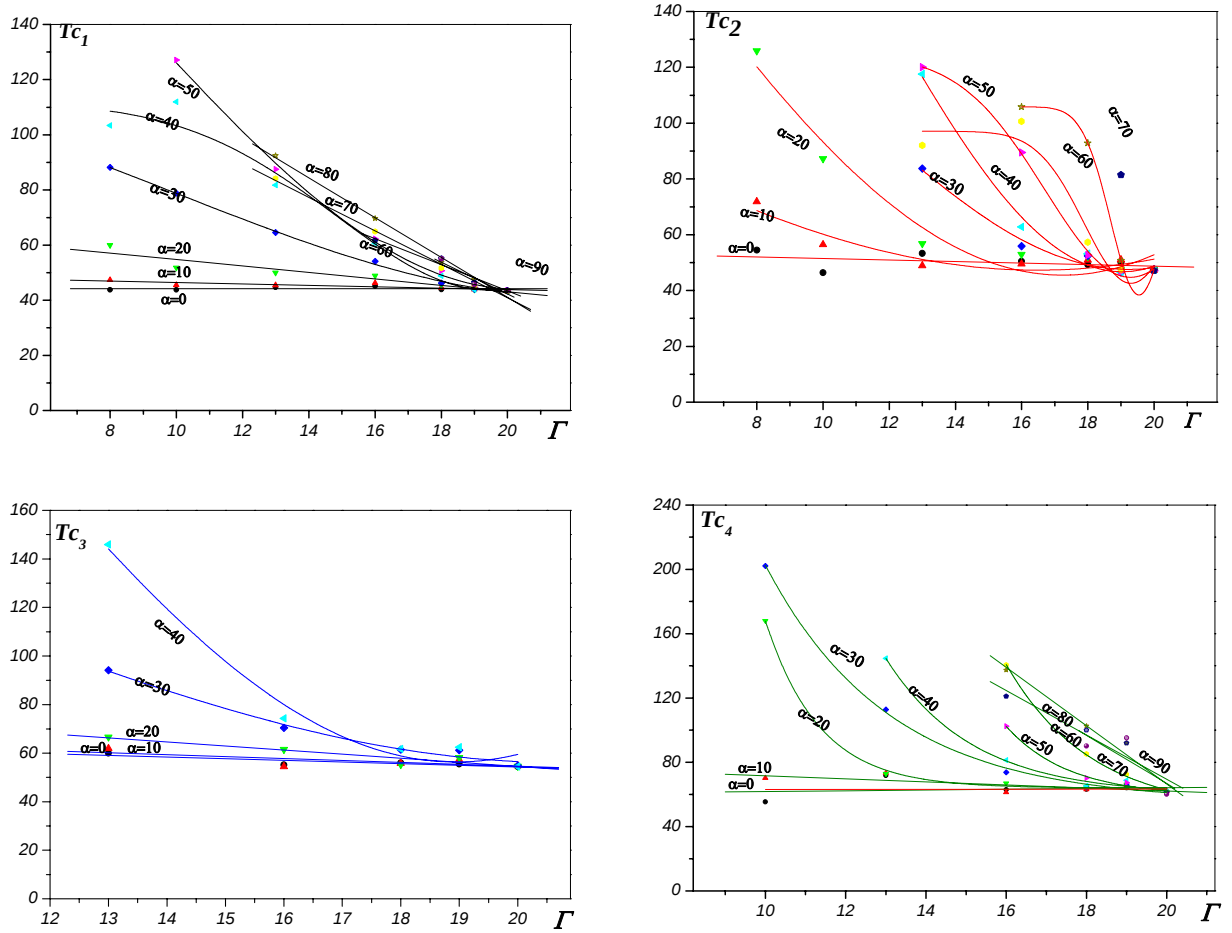


Figure III.2.32 : Variation des nombres critiques de Taylor  $Tc_1$ ,  $Tc_2$ ,  $Tc_3$ ,  $Tc_4$  en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma$  à un angle constant  $\alpha = cte$ .

### III.2. Etude de la variation des nombres critiques de Taylor $Tc$ en fonction de l'angle d'inclinaison $\alpha$ pour un taux de remplissage $\Gamma$ fixé:

Le dépouillement des résultats expérimentaux nous a permis d'analyser l'effet de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  à un taux de remplissage  $\Gamma$  fixé, permettant d'établir des lois phénoménologiques, obéissant à des expressions linéaires ou exponentielles, que l'on présente sous la forme générale suivante :

| Lois de comportement  | Forme générale                                                    |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------|
| <i>Linéaire</i>       | $Tc(\alpha) = A + B\alpha$                                        |
| <i>Gaussienne</i>     | $Tc(\alpha) = Tc_0 + C \exp\left[-D(\alpha - \alpha_0)^2\right]$  |
| <i>Boltzmannienne</i> | $Tc(\alpha) = Tc_0 + \frac{E}{[1 + \exp((\alpha - \alpha_0)/F)]}$ |

Tableau III.2.3 : Loi de comportement  $Tc(\alpha)$

L'ensemble des constantes  $T_{c0}, A, B, C, D, \alpha_0, F$  sont déterminées par ajustement numérique sur les courbes expérimentales.

Il est remarquable de noter que la loi de comportement en variation angulaire semble analogue à l'évolution du taux de remplissage  $\Gamma$  correspondant à une hauteur de remplissage  $H$  donné de l'écoulement.

Ceci peut contribuer à énoncer un critère prédictif d'apparition de toutes les structures possibles à  $\alpha = cte$  dans ce système d'écoulement, à savoir, notamment pour les cellules de Taylor  $T_{c1}$ , le mode spiral  $T_{c2}$ , le mode spirale combiné avec le wavy mode  $T_{c3}$  et le mode spiral ondulatoire  $T_{c4}$ .

Là aussi, on note une propriété intéressante concernant la loi de comportement de  $Ta$  qui est à caractère exponentiel mais de nature différente. En effet, il apparaît que l'évolution de  $Ta$  en fonction des paramètres angulaires  $\alpha$  obéit à une loi de probabilité (loi de Gauss).

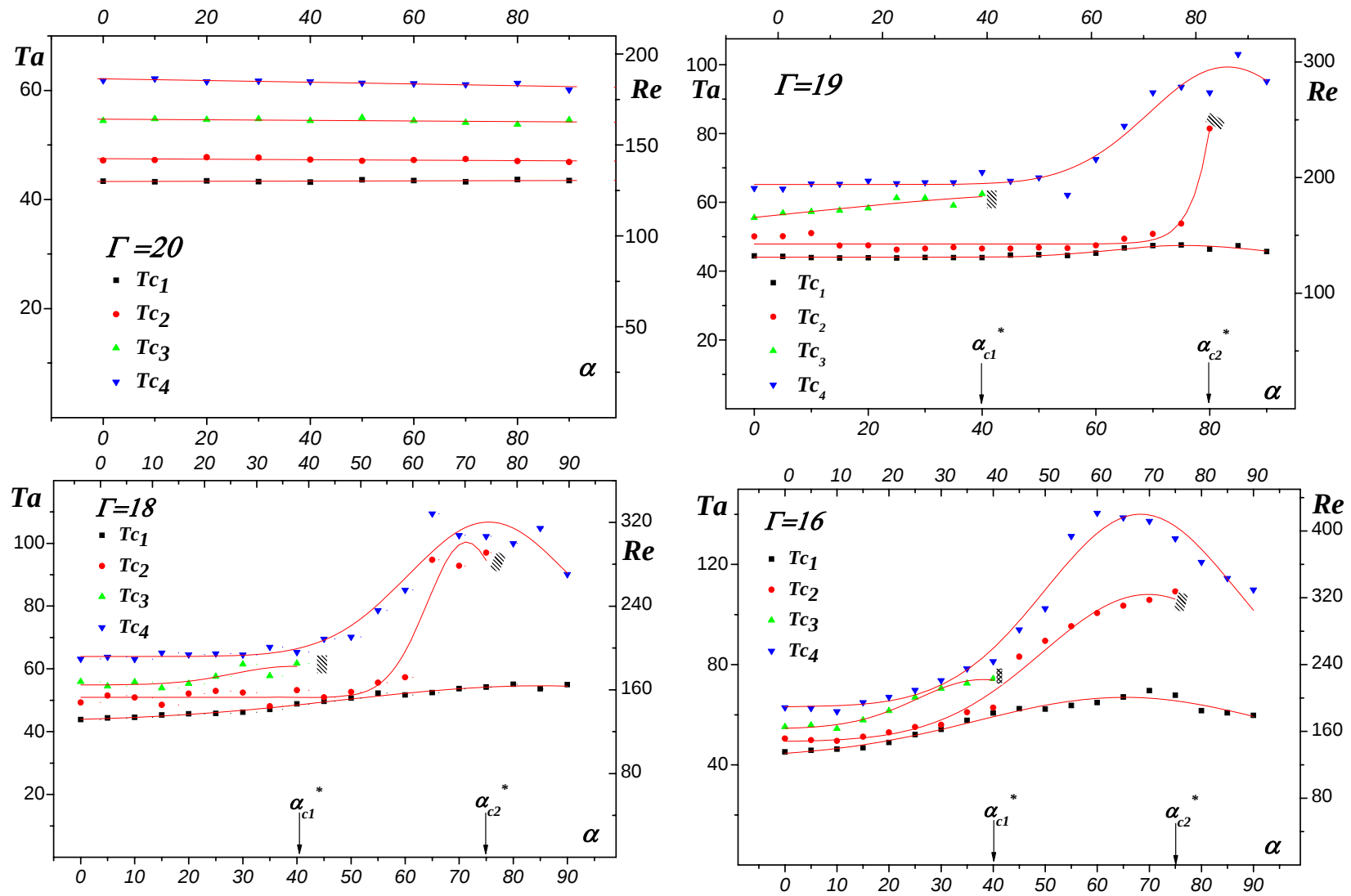
Par contre, l'évolution de  $Ta$  en fonction du taux de remplissage  $H$  (facteur d'aspect  $\Gamma$ ) obéit à une variation exponentielle décroissante de type "décharge d'un condensateur" qui se stabilise autour de la valeur  $Ta = T_{c1}$  correspondant à l'apparition des ondes de Taylor en régime de charge plein (taux de remplissage maximal)

L'intérêt d'une telle évolution montre l'existence de valeur particulière très importante  $\alpha = \alpha_c = 30^\circ$  correspondant à  $H = H_c = 90mm$  soit  $\Gamma_c = 18$ , On observe alors la destruction de toute structure au sein de l'écoulement (*Figure III.2.10*)

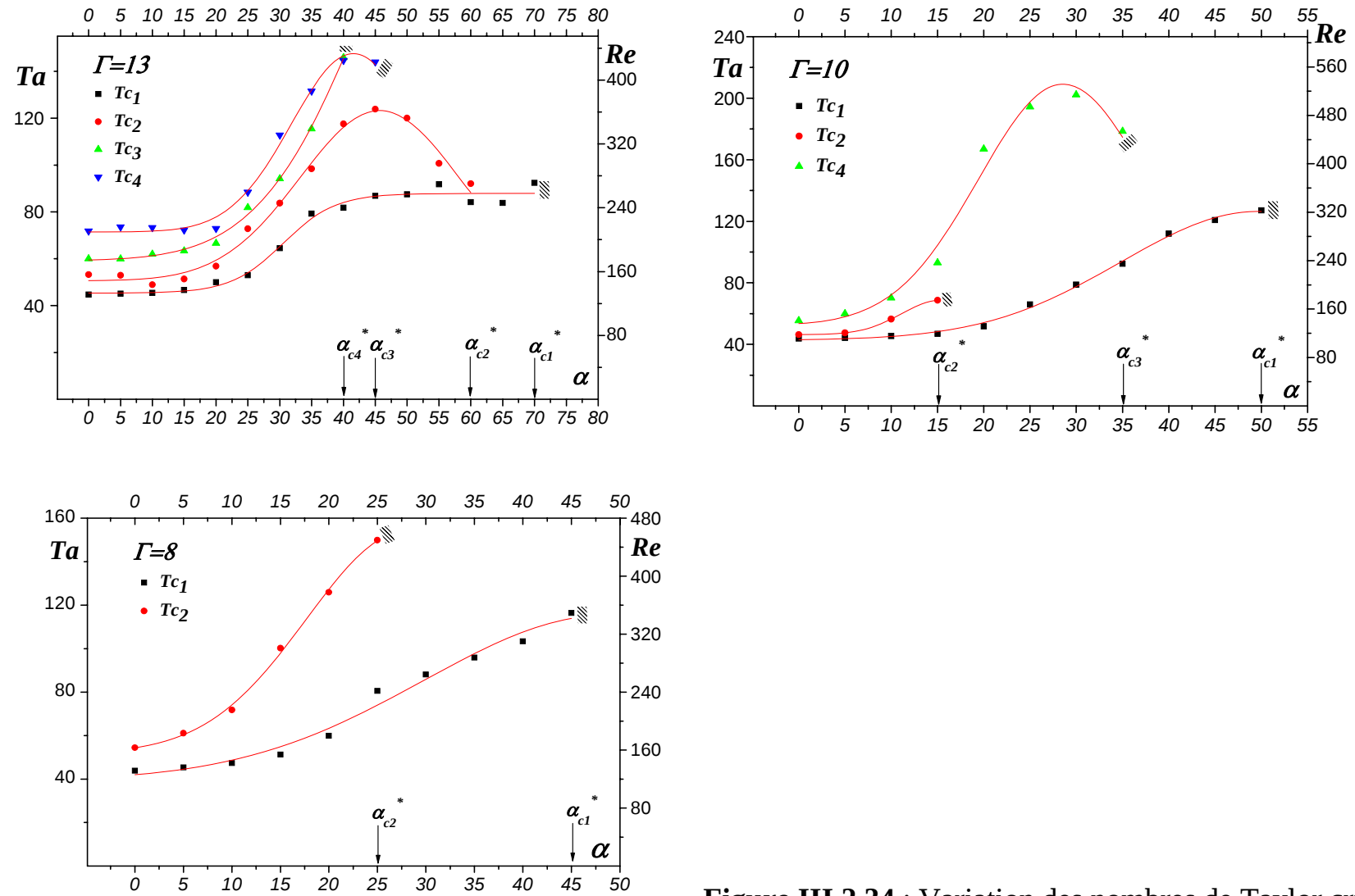
On a vérifié cette propriété également lorsque  $\Gamma$  diminue.

Ainsi, pour  $\Gamma = \Gamma_c = 10$ , on note la disparition de toute structure à  $\alpha = \alpha_c = 25^\circ$  (*Figure III.2.23*)

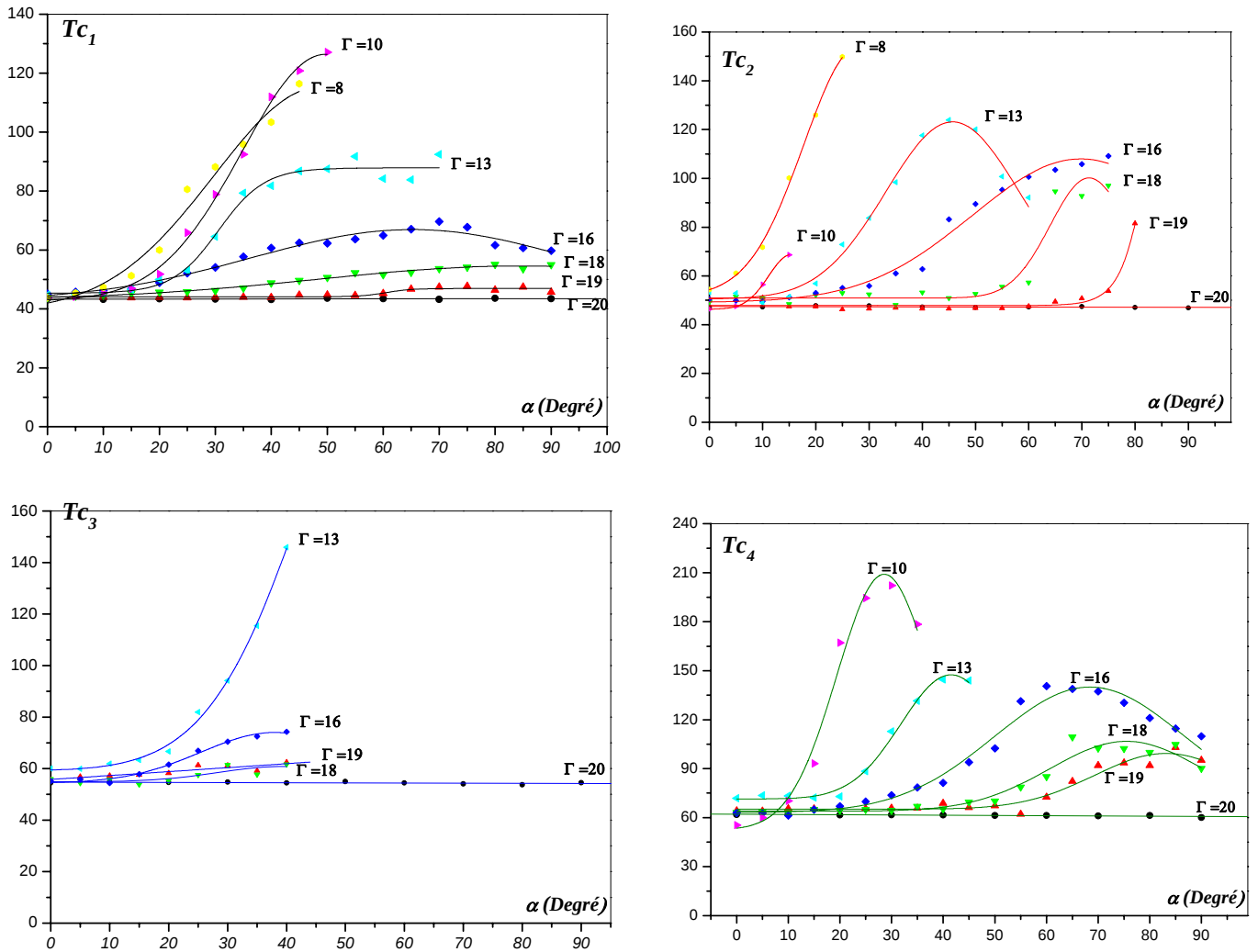
Lorsque l'écoulement est en charge, le taux de remplissage est alors maximal, on observe que l'évolution des paramètres critiques  $T_{ci}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) sont insensibles à l'effet angulaire  $\alpha$  et donc à la force de gravité (*Figure III.2.30*). Par contre, lorsque  $\Gamma$  diminue on observe une évolution des paramètres critiques précédents (*Figure III.2.31*) et la disparition progressive des états d'instabilité critiques associés aux nombres  $T_{c3}$  et  $T_{c4}$  correspondant à  $\Gamma=10$  et  $\Gamma=8$ .



**Figure III.2.33 :** Variation des nombres de Taylor critiques  $Tc_1$ ,  $Tc_2$ ,  $Tc_3$  et  $Tc_4$  en fonction de l'inclinaison  $\alpha$  pour  $\Gamma$  fixé



**Figure III.2.34 :** Variation des nombres de Taylor critiques  $T_{c1}$ ,  $T_{c2}$ ,  $T_{c3}$  et  $T_{c4}$  en fonction de l'inclinaison  $\alpha$  pour  $\Gamma$  fixé



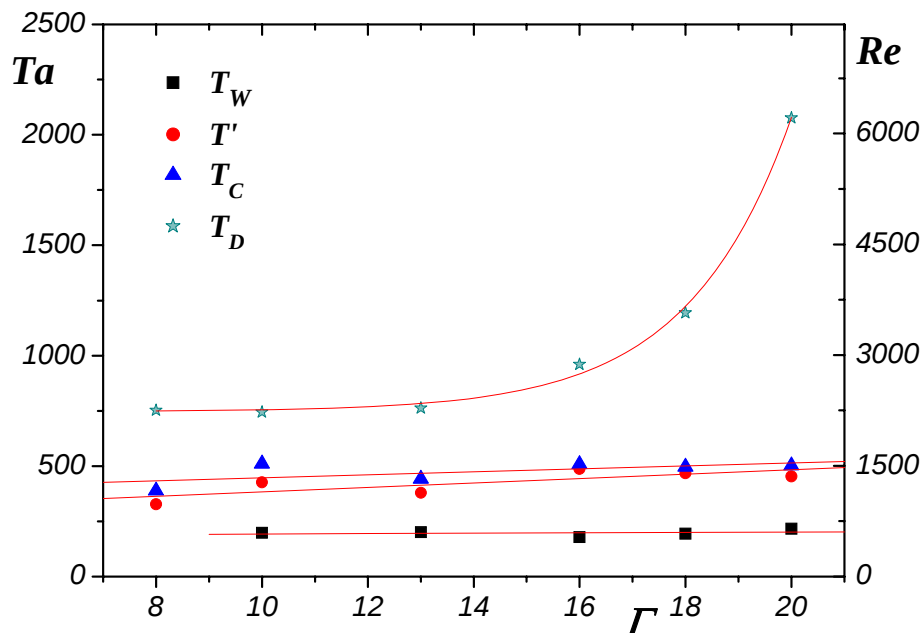
**Figure III.2.35 :** variation des nombres critiques de Taylor  $Tc_1$ ,  $Tc_2$ ,  $Tc_3$  et  $Tc_4$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  pour un taux de remplissage  $\Gamma$  fixe

#### IV. ETUDE DU MOUVEMENT DANS LE CAS D'UN DISPOSITIF VERTICAL :

##### IV.1. Etude de la transition laminaire– turbulent en fonction de $\Gamma$ pour $\alpha=0^\circ$

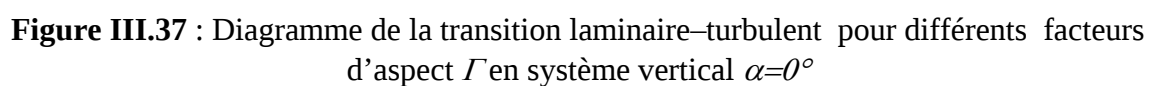
En position verticale, lorsqu'on fait varier la vitesse du régime laminaire au régime turbulent, on procède à la mise en évidence des propriétés liées à la structure de l'écoulement. En particulier, il s'agit de déterminer les valeurs critiques associées aux nombres de Taylor en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma$ . A cet effet on procède selon des conditions d'essais permettant d'effectuer des mesures reproductibles de manière à caractériser efficacement les structures et régimes d'écoulement.

Les résultats de ces expériences sont résumés dans un diagramme présentant les valeurs du nombre de Taylor  $Ta$  en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma$  pour chaque structure considérée.



**Figure III.2.36** : Variation des nombres critiques de Taylor  $T_W$ ,  $T'$ ,  $T_C$ , et  $T_D$  en fonction du facteur d'aspect  $\Gamma$ .

Il est intéressant de noter que l'évolution associée aux nombres de Taylor ( $T_W$ ,  $T'$ ,  $T_C$ ) reste sensiblement constante dans l'intervalle  $8 \leq \Gamma \leq 16$  et ceci quel que soit le facteur d'aspect  $\Gamma$ . Par contre, le nombre de Taylor  $T_D$  varie selon une loi exponentielle. Ceci nous permet de conclure que, le facteur d'aspect  $\Gamma$  agit sur le régime de transition laminaire-turbulent en retardant l'apparition des instabilités et en avançant le déclenchement de la turbulence.



#### IV.2. Etude des caractéristiques spatio-temporelle de l'onde azimutale ( $m$ , $\lambda_z$ , $\omega$ ) en fonction de $Ta$ pour un facteur d'aspect $\Gamma$ donné en système vertical:

Afin de déterminer la variation des caractéristiques du wavy mode ou de l'onde azimutale instationnaire pour un facteur d'aspect  $\Gamma$  fixé en système vertical, on procède à la prise d'image pour un nombre de Taylor critique suivi d'un traitement d'image sur PC pour déterminer la longueur d'onde axiale  $\lambda_z$ , le nombre d'onde azimutal ou nombre d'onde circonférentielle  $m$  et la vitesse de phase  $\omega$ . L'évolution de ces caractéristiques est présentée sur les courbes en fonction du nombre de Taylor (*Figure III.2.38 –42*).

La présentation de la vitesse de phase  $\omega$  en fonction du nombre de Taylor montre que quelque soit le facteur d'aspect  $\Gamma$ , cette dernière se stabilise à une valeur fixe  $\frac{\omega}{\Omega_1} = 0,35$ .

Cependant, on remarque que la variation du rapport  $\frac{\omega}{\Omega_1}$  en fonction de  $\Gamma$  dépend de la pente de la courbe correspondante. Ainsi pour  $\Gamma=20$ , on note une diminution rapide la vitesse alors que celle-ci devient relativement faible pour  $\Gamma=10$ . On peut aussi constater sur la figure III.2.43 qu'il y a une dispersion des valeurs en fonction de  $\Gamma$  pour les différents nombres d'onde circonférentielles  $m=5$ ,  $m=6$ ,  $m=7$ . L'ensemble des courbes se rejoignent vers le nombre de Taylor  $Ta=185$  correspond à  $m=6$ . Valeur qui subsiste avant la disparition du Wavy mode.

Concernant la variation de la longueur d'onde axiale  $\lambda_z$ , nos mesures semblent en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus par **M. Wimmer [1]** (figure III.2.45) mesurée dans le cas d'un système vertical totalement rempli (écoulement en charge). Il apparaît que l'évolution de  $\lambda_z$  semble obéir à une loi de probabilité (loi de type normal ou gaussienne) pour des nombres de Taylor relativement faibles. Celle-ci obéit à une loi exponentielle ordinaire pour des nombres de Taylor élevé. On remarque, aussi, une discontinuité de la courbe de  $\lambda_z = f(Ta)$  vers une valeur du nombre de Taylor  $Ta=136$  ( $Re=3710$ ), cela est dû au changement de régime du spiral wavy mode vers le wavy mode avec l'apparition d'une fourche dans chaque hémisphère.

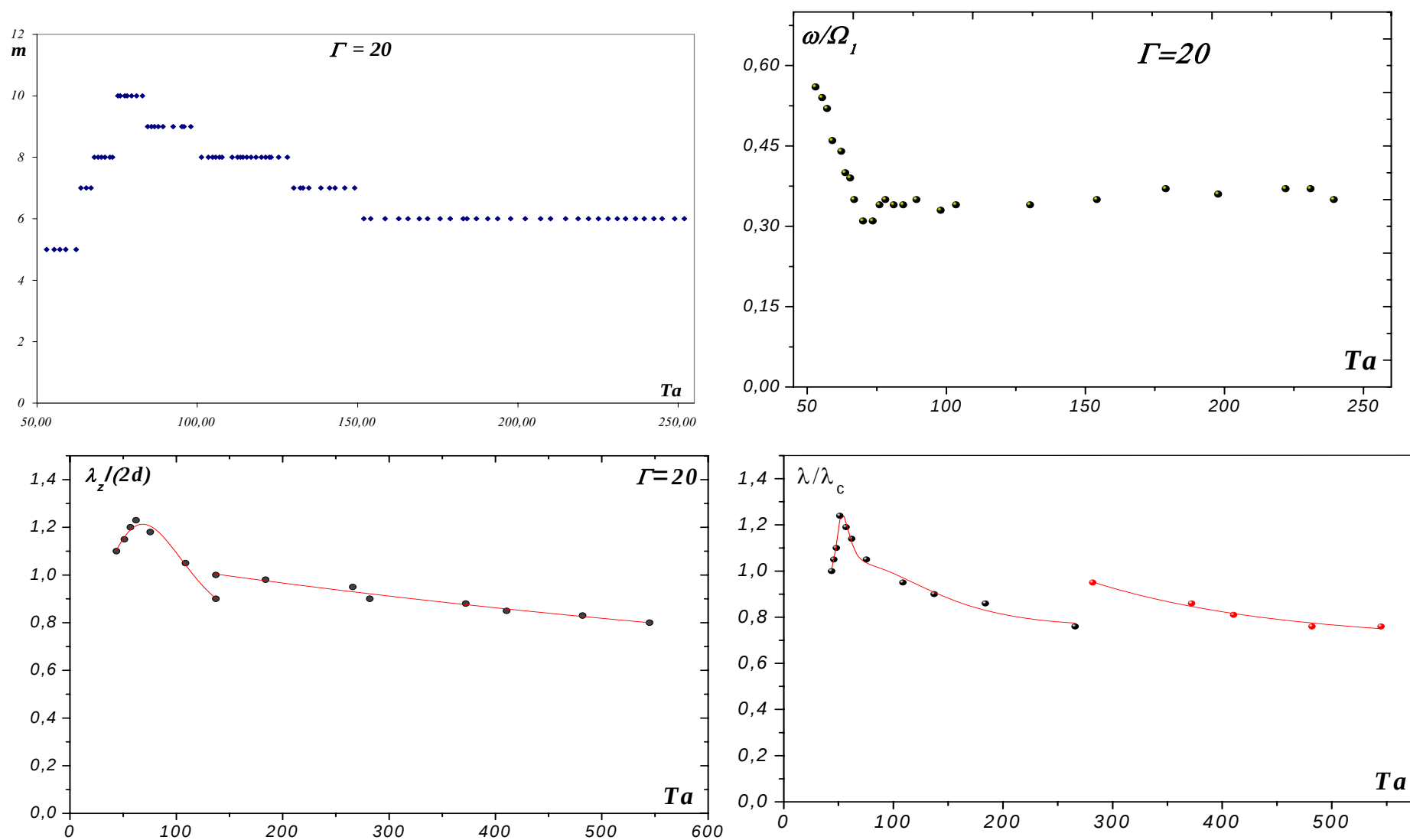


Figure III.2.38: variation du nombre d'onde  $m$ , de la vitesse de phase  $\omega$  et la longueur d'onde azimuthal  $\lambda_z$ .

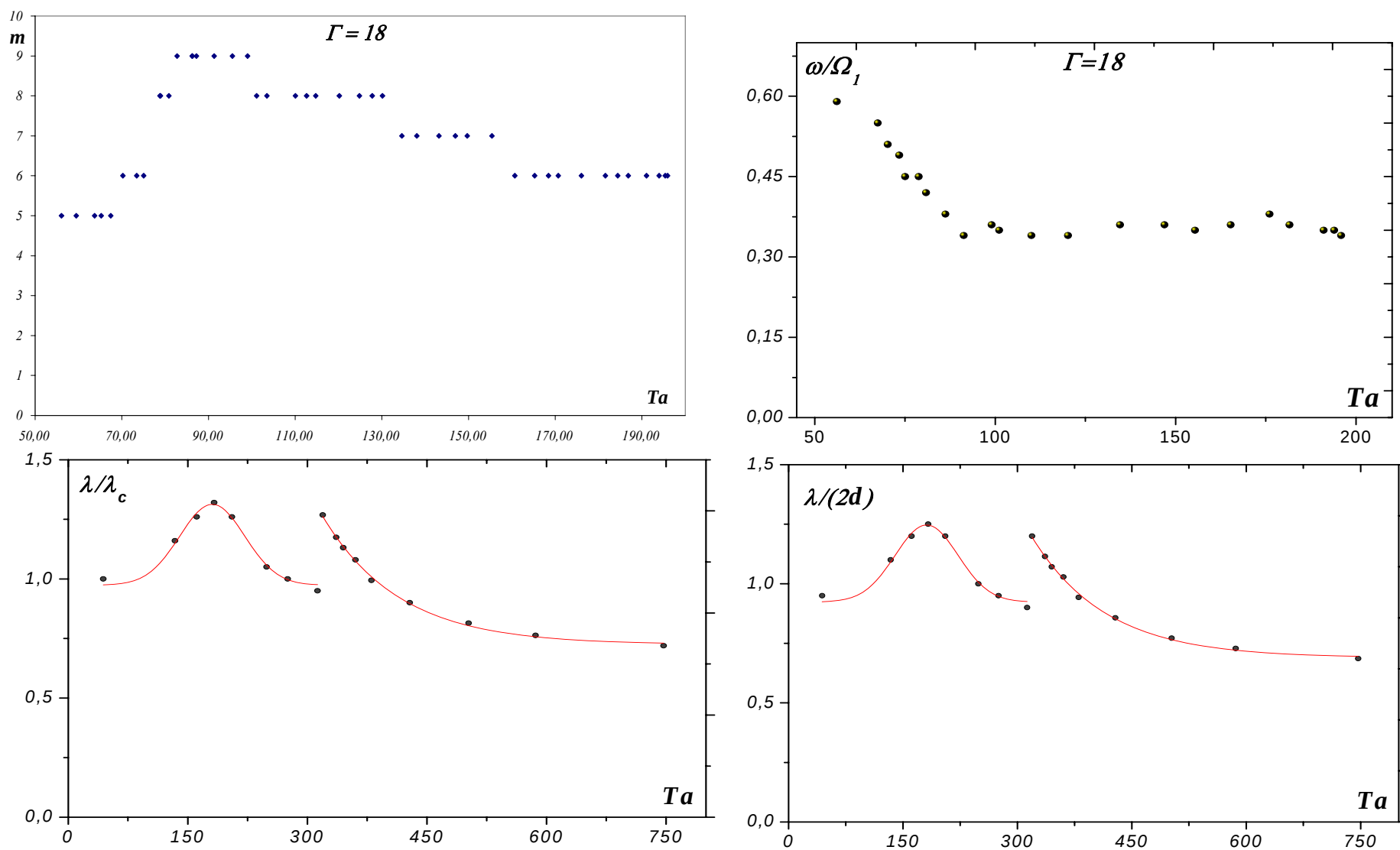


Figure III.2.39: variation du nombre d'onde  $m$ , de la vitesse de phase  $\omega$  et la longueur d'onde azimuthal  $\lambda_z$ .

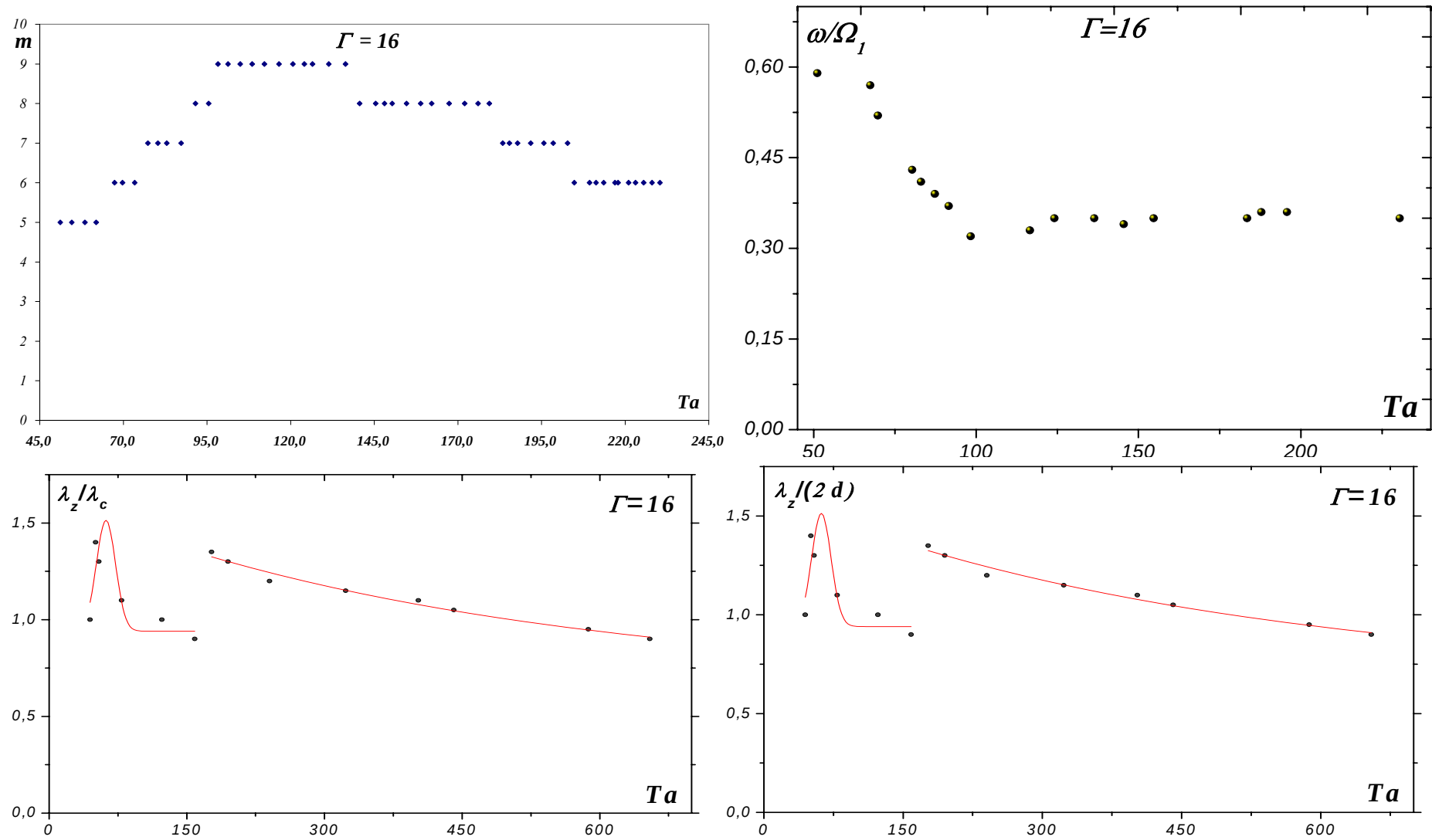


Figure III.2.40: variation du nombre d'onde  $m$ , de la vitesse de phase  $\omega$  et la longueur d'onde azimuthal  $\lambda_z$ .

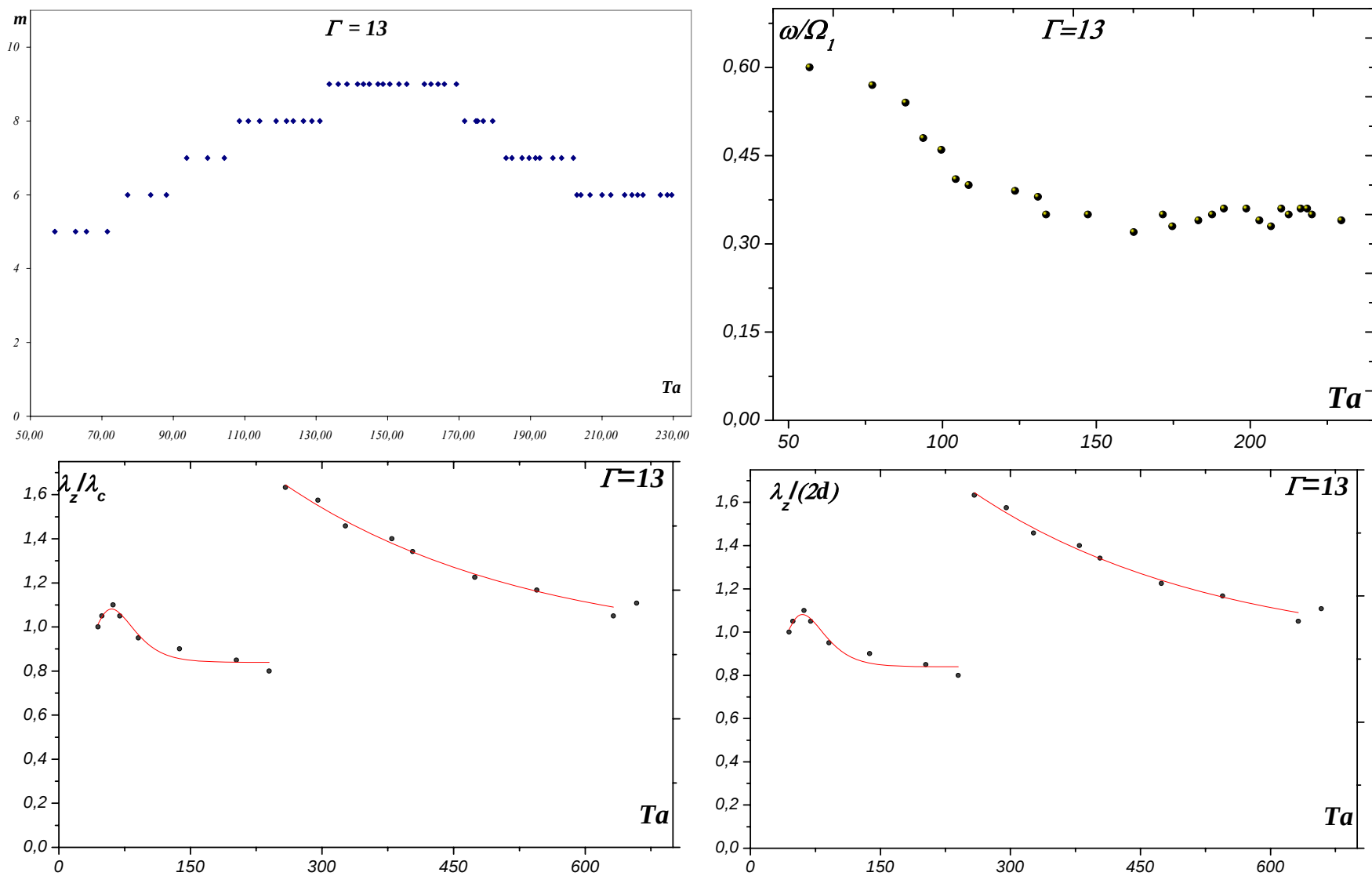


Figure III.2.41 : variation du nombre d'onde  $m$ , de la vitesse de phase  $\omega$  et la longueur d'onde azimuthal  $\lambda_z$ .

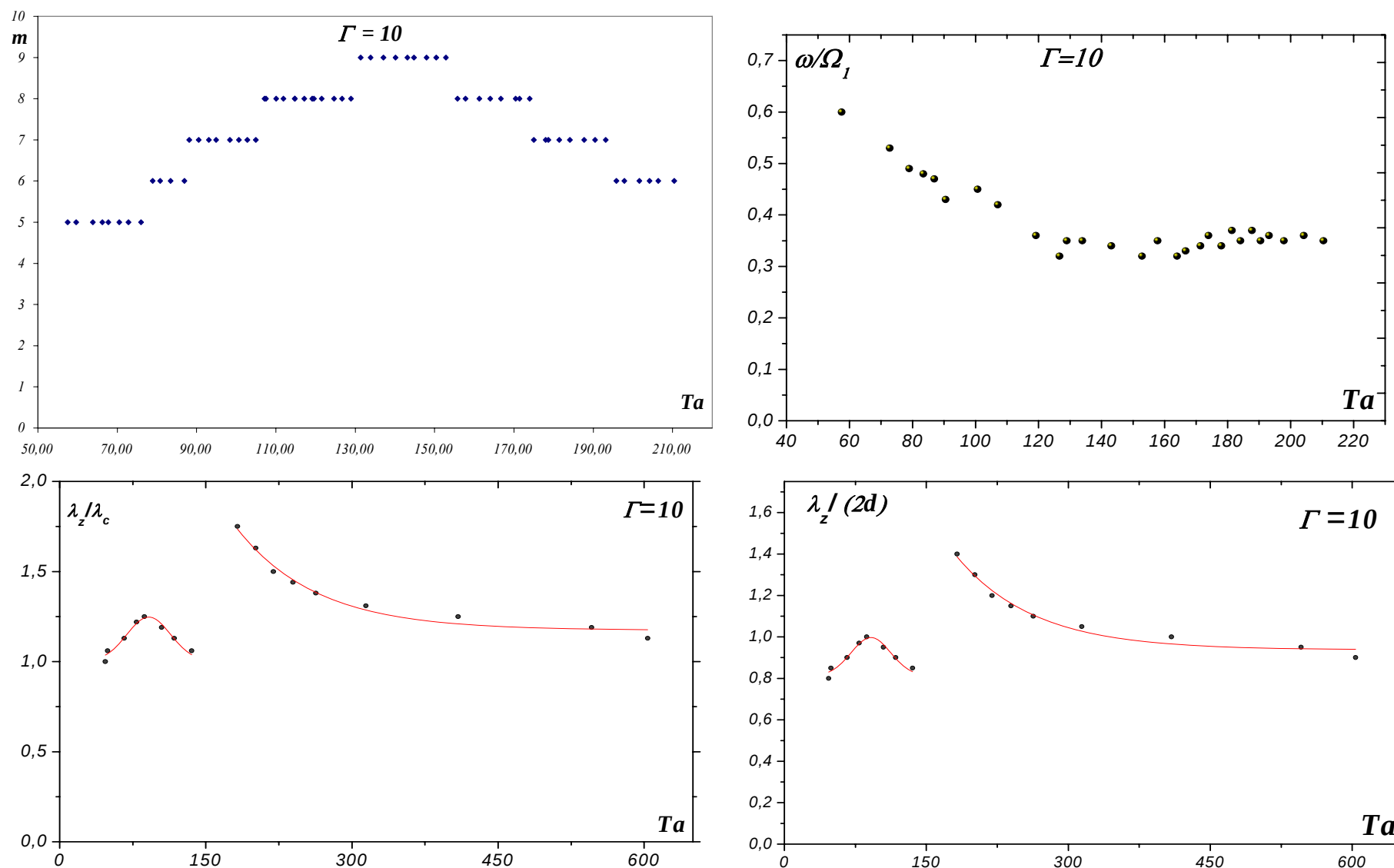
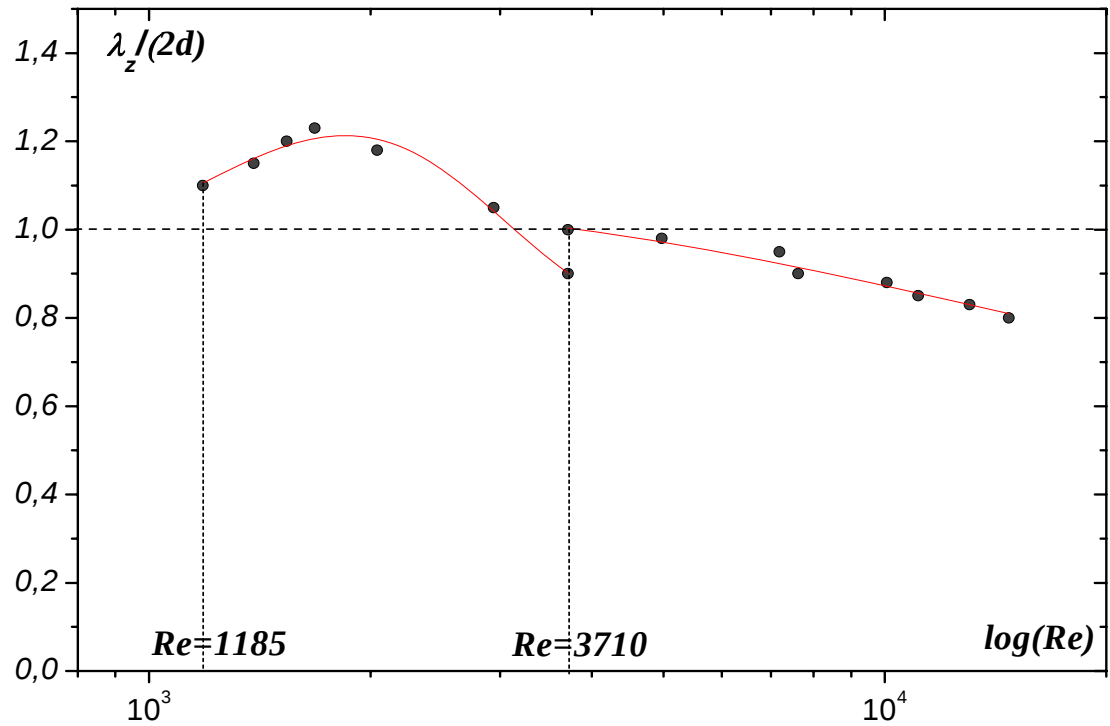
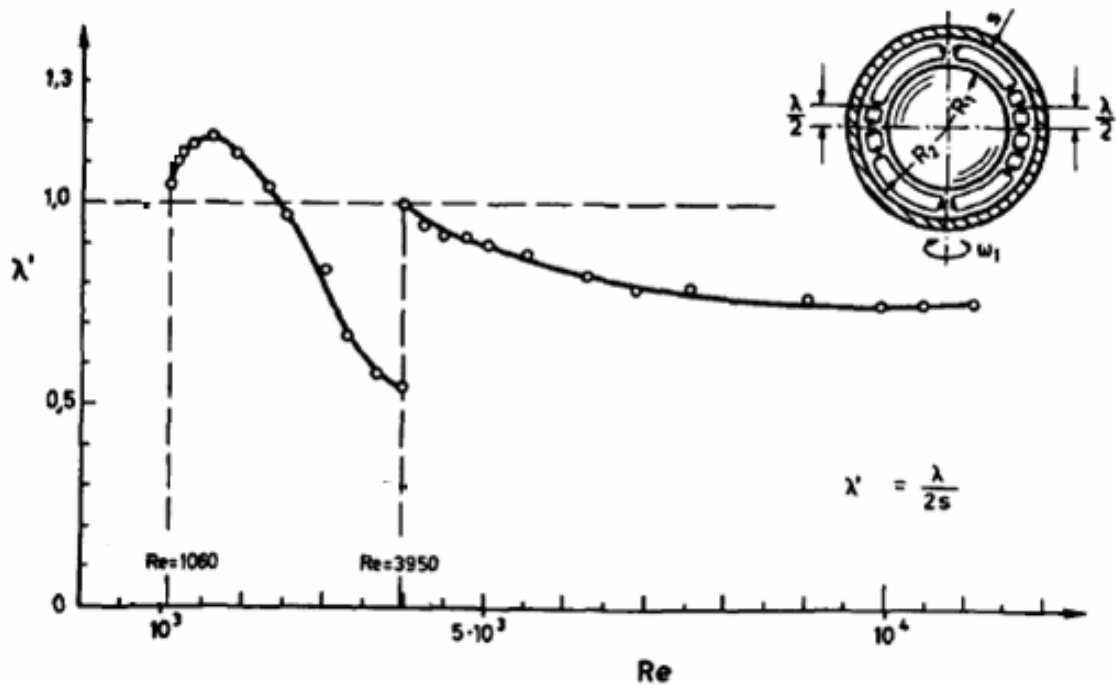


Figure III.2.42: variation du nombre d'onde  $m$ , de la vitesse de phase  $\omega$  et la longueur d'onde azimuthal  $\lambda_z$ .



(1)



(2)

Figure III.2.43 : Planche de comparaison 1 : (1) longueur d'onde azimutale  $\lambda_z$  (nos résultats),  
(2) longueur d'onde azimutale  $\lambda_z$  (M. Wimmer [1])

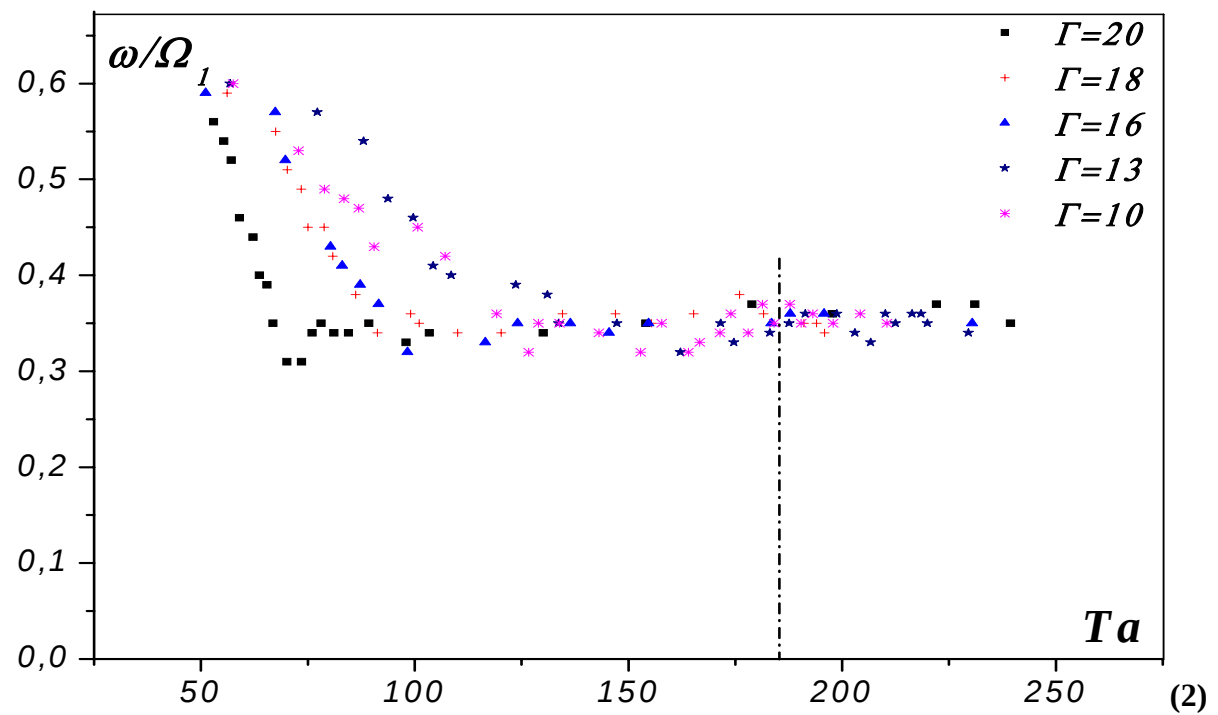
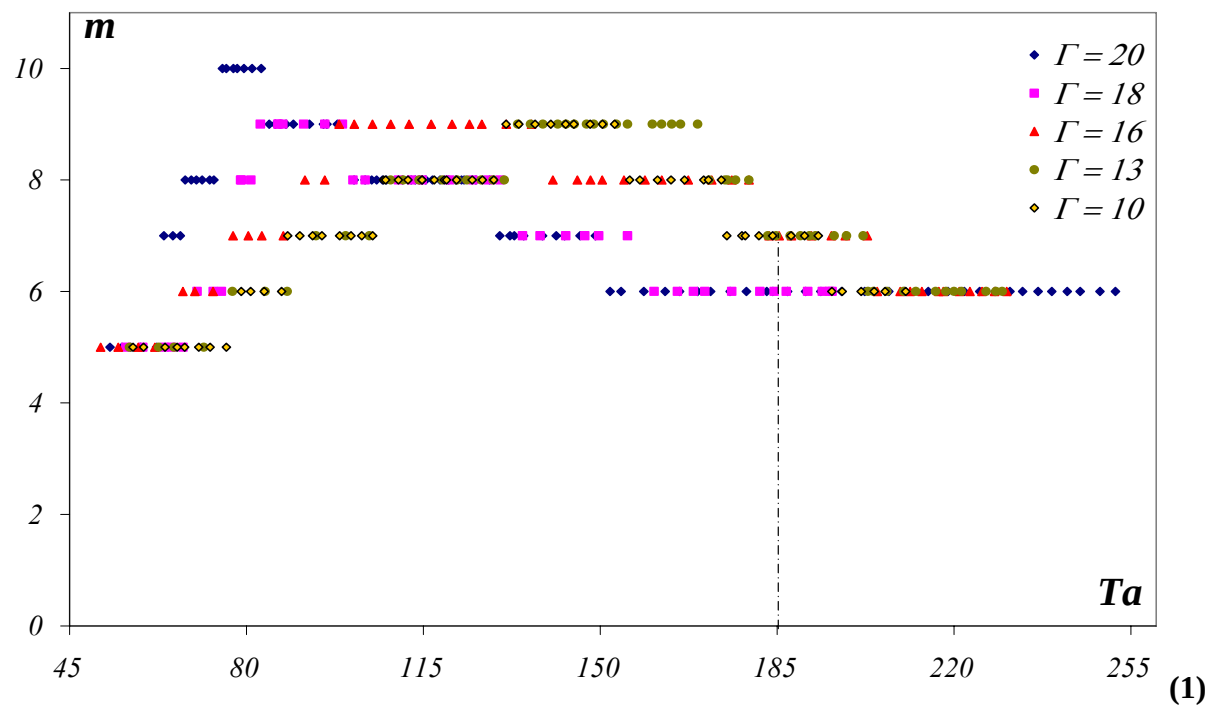


Figure III.2.44 : Planche 2 : (1) nombre d'onde  $m$ , (2) Vitesse de phase  $\omega$ .

## V. Identification du cheminement ordre–chaos

Dans le cadre de la mise en évidence du processus de transition laminaire–turbulent on a tenté d'isoler séparément l'évolution de l'écoulement à travers ses caractéristiques structurales dans le plan d'onde  $(n, m)$ . On rappelle que  $n$  est associé au nombre de cellules lié à l'onde axiale stationnaire de Taylor et  $m$  correspond au nombre d'ondes circonférentielles correspondant à l'onde azimutale (Wavy Mode).

Les observations ont été réalisées dans le cadre de l'influence du facteur d'aspect  $\Gamma$  lorsque le dispositif d'écoulement est vertical ( $\alpha = 0$ ). Le processus de mise en régime des vitesses obéit à un processus quasi–statique déjà décrit au chapitre 1 (Partie III).

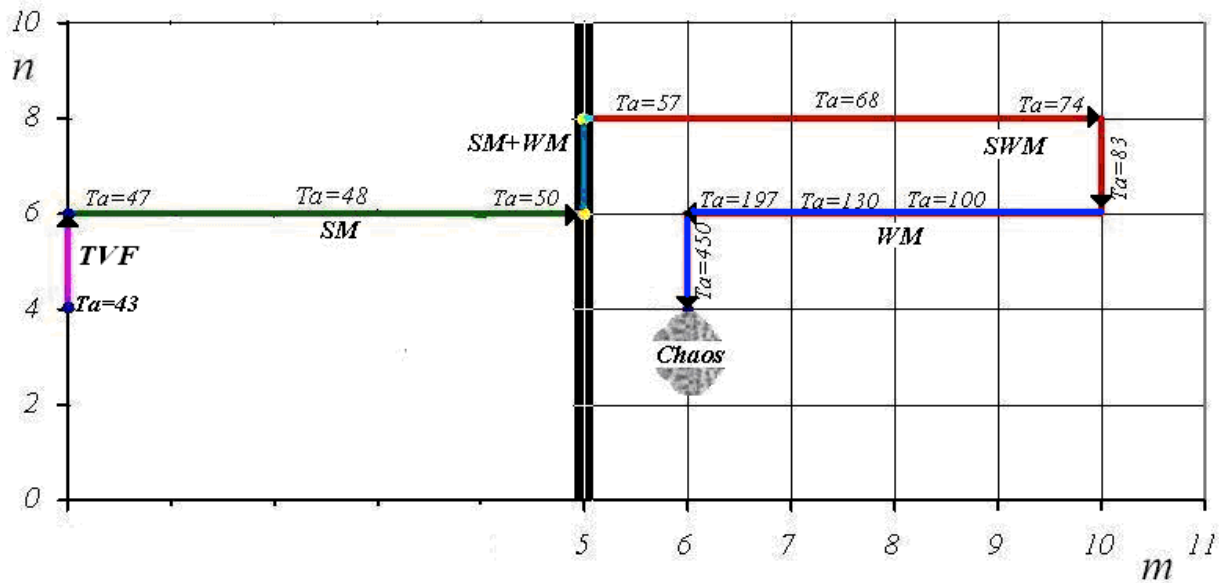
### V.1. Dispositif d'écoulement en charge

On part d'un système d'écoulement à taux de remplissage maximal  $\Gamma = \Gamma_{max} = 20$ . On peut considérer que le cas ainsi étudié constitue la référence de nos mesures lorsque  $\Gamma$  varie ultérieurement. D'après la courbe présentée en figure III.2.45 paramétrée en nombre de Taylor  $Ta$  sous la forme d'un diagramme  $(n, m)$  on dénombre quatre étapes fondamentales décrivant le processus de transition laminaire–turbulent :

- La première étape correspond au régime d'onde de Taylor (RVT ou TVF) qui est caractérisé par l'existence d'une onde stationnaire :  $n=4$  ( $m$  n'existant pas encore). Le domaine d'instabilité s'étend de  $43 \leq Ta \leq 47$ .
- La seconde étape est relative au domaine du régime évoluant en mode spiral (Spiral Mode SM) ; il peut se définir par le saut d'onde stationnaire de  $n=4$  vers  $n=6$  et tel que  $n=6$  reste constant. Le domaine d'existence est tel que  $47 \leq Ta \leq 54$  qui est assez étroit.
- La troisième étape est liée à l'interaction entre le mode spiral et Wavy Mode qui correspond à un processus de transition faisant passer l'écoulement du mode spiral au mode spiral ondulé (Wavy mode ou onde azimutale). Ce phénomène se caractérise par le saut d'ondes stationnaires de  $n=6$  à  $n=8$  pour  $m=5$  fixé. C'est un domaine d'évolution semble comparable au précédent  $54 \leq Ta \leq 57$ .
- La quatrième étape correspond au domaine de l'onde azimutale ou Wavy Mode qui semble plus complexe et se caractérise par un nombre d'ondes circonférentielles qui varie beaucoup, d'abord de  $m=5$  à  $10$  puis de  $m=10$  à  $6$ . Parallèlement, on enregistre un saut d'ondes stationnaires qui varie également de  $n=8$  à  $6$  puis décroît de nouveau pour se

stabiliser à  $n=4$ . C'est indiscutablement le domaine d'existence d'instabilité le plus large du régime de transition qui s'étend dans l'intervalle  $57 \leq Ta \leq 450$

En effet, le point limite  $(n_c, m_c)$  qui correspond à  $T'_C = 450$  tel que  $n_c=4$  et  $m_c=6$  peut constituer un critère de déclenchement du chaos qui coïncide avec la fin du régime de transition laminaire-turbulent.



**Figure III.2.45 :** Diagramme de chemin vers le chaos pour  $\Gamma=20$ ,  $\alpha = 0$   
(Système d'écoulement en charge)

## V.2. Dispositif d'écoulement à surface libre

Nous avons analysé les résultats pour différents taux de remplissage afin de mettre en lumière l'influence de la surface libre à travers les variations du facteur d'aspect suivant  $\Gamma=18, 16, 13$  et  $10$ .

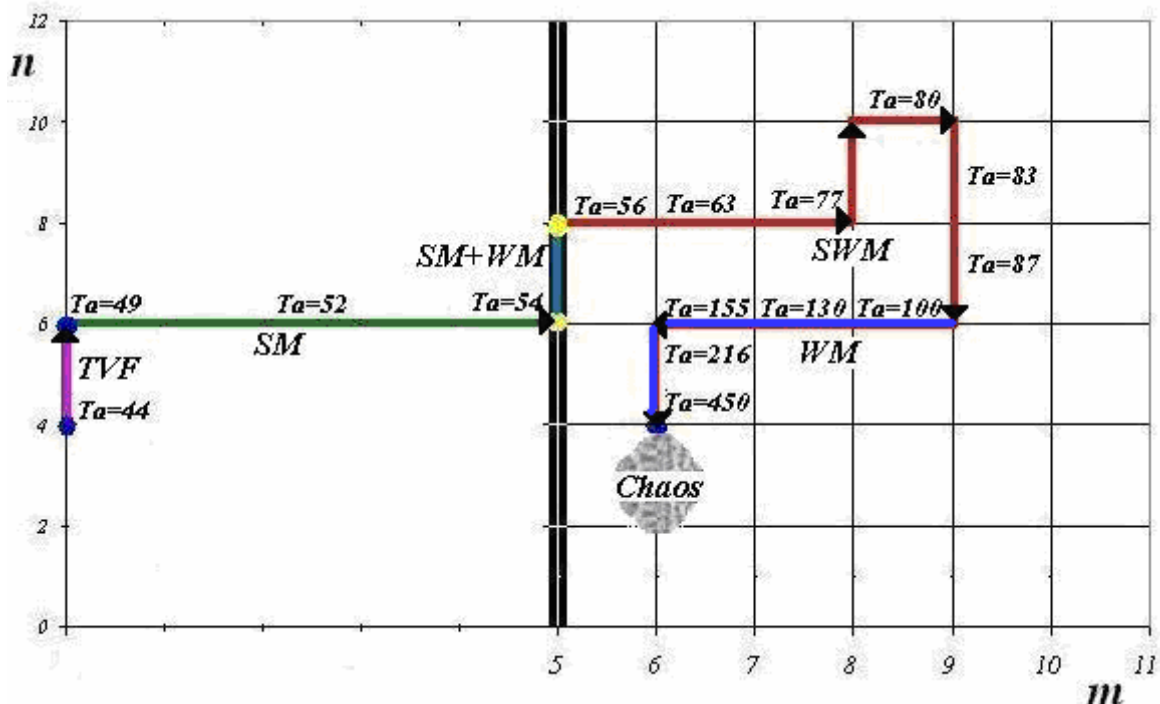
L'examen des diagrammes associés à  $\Gamma$  révèle un comportement globalement analogue à gauche de la valeur de  $m=5$  à la différence près que le nombre de cellules de Taylor  $n$  décroît lorsque  $\Gamma$  diminue. Ainsi l'apparition du régime en mode spiral qui commence de  $n=4$  à  $6$  pour  $\Gamma=20$  chute autour des valeurs  $n=2$  à  $3$  lorsque on atteint la valeur  $\Gamma=10$ . On vérifie, par ailleurs l'apparition du mode spiral ondulé qui intervient à  $m=5$  et ceci quel que soit  $\Gamma$ .

C'est là, une propriété importante pour laquelle on n'a pas trouvé encore d'explication.

Par contre, le cheminement lié à la transition s'opère différemment, à droite de  $m=5$ , si  $\Gamma$  diminue. En particulier, il a tendance à se compliquer pour les cas  $\Gamma=18$ , 16 et 10, excepté le cas pour  $\Gamma=13$ . Dans tous les cas le processus de transition, d'un mode à l'autre, s'opère avec un double changement des nombres d'ondes ( $n$ ,  $m$ ). Les quatre étapes précédemment décrites sont également observées et le déclenchement du chaos apparaît dans tous les cas autour de la valeur  $T'_C = 450$  malgré une variation sensible de  $\Gamma$ .

Dés lors, on constate que le processus chaotique s'établit pour la valeur de  $m=6$  quel que soit  $\Gamma$  avec une légère diminution de  $n$  qui passe de  $n=4$  à 2. C'est là également une propriété intéressante qui mérite une explication quant à sa relation avec le mécanisme d'apparition du chaos.

De ce qui précède, il semblerait que le processus de transition laminaire-turbulent est sensible aux effet du taux de remplissage  $\Gamma$  qui dépend, à la fois, du nombre de Taylor  $Ta$  et de la quantification ( $n$ ,  $m$ ) des nombres d'ondes associés. Ceci suggère l'existence d'une multiplicité d'états, pour  $Ta$  fixé, qui ne peuvent être accessibles à la descriptions hydrodynamique. Seule une étude thermodynamique basée sur l'évaluation de l'Entropie d'Information [73] permet d'approfondir cette analyse.



**Figure III.2.46 :** Diagramme de chemin vers le chaos pour  $\Gamma=18$ ,  $\alpha=0$   
(Système d'écoulement à surface libre)

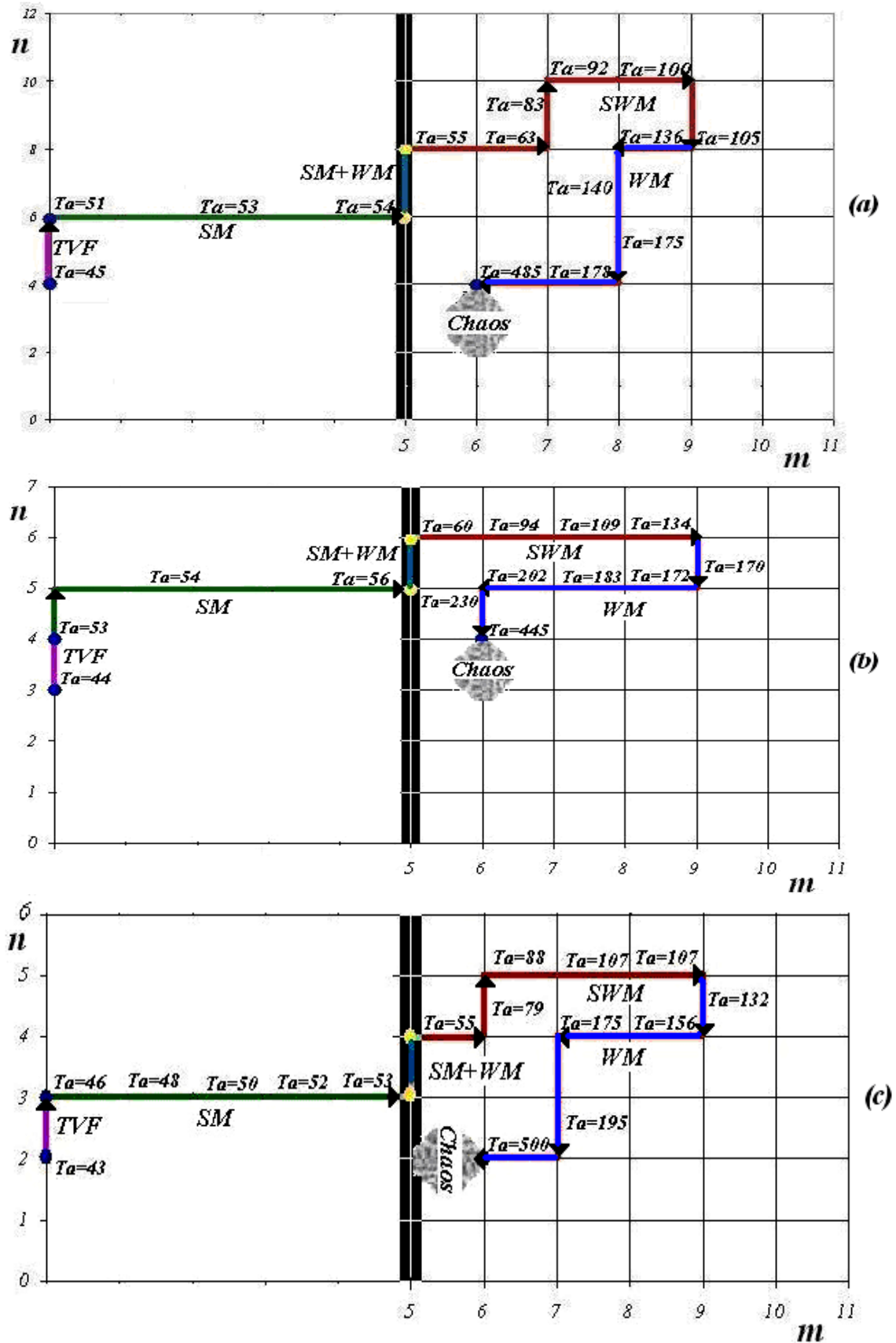


Figure III.2.47 : Diagramme des chemins vers le chaos pour différent  $\Gamma$ ,  $\alpha = 0$   
(a)  $\Gamma=16$ , (b)  $\Gamma=13$ , (c)  $\Gamma=10$   
(Système d'écoulement à surface libre)

## VI. OBSERVATION DE NOUVEAUX PHENOMENES

Au cours de nos essais expérimentaux correspondant à des positions particulières du dispositif, nous avons recensé des phénomènes d'instabilité fondamentalement nouveaux dans le contexte de la littérature spécialisée. Il s'agit de mouvements secondaires engendrés selon le cas par trois processus possibles:

- Effet de la chute de pression liée à l'apparition de l'instabilité baroclinique (position angulaire  $\alpha = 90^\circ$ ).
- Effet de la diminution du taux de remplissage donnant lieu à l'apparition de l'instabilité de Taylor–Dean (position angulaire  $\alpha = 90^\circ$ ).
- Phénomène de spin–up liée à la position angulaire  $\alpha = 90^\circ$ .

### 1°) Phénomène d'instabilité baroclinique :

#### Conditions opératoires :

Le dispositif d'écoulement est fixé comme suit :

- Position angulaire :  $\alpha = 90^\circ$
- Nombre de Taylor critique d'apparition de l'instabilité baroclinique  $Ta = T_{c_{IB}} = 280$
- Taux de remplissage critique d'apparition:  $\Gamma = 19$

#### Observations

Pour  $T_{c_{IB}}$ , on remarque que la surface libre se divise en deux parties selon deux formes plus ou moins circulaires en se déplaçant vers les pôles Nord et Sud. Ceci est l'origine de la formation de deux zones de dépressions tourbillonnaires localisées aux niveaux de ces pôles. Il est intéressant de noter que l'apparition d'un mouvement secondaire : instabilité baroclinique qui se produit au voisinage de la surface libre, là où on observe un gradient de pression notable. Cette instabilité qui correspond à une dépression tourbillonnaire est à caractère stationnaire à la naissance. En augmentant le nombre de Taylor, on observe que l'oeil du cyclone ainsi formé a tendance à devenir instationnaire tel que le centre de cette dépression se déplace sur le périmètre d'un cercle de diamètre 12mm. (Figure III.2.48 et 49)

En outre, on constate toujours deux tourbillons symétriques tel que les deux dépressions tourbillonnaires vont finir par disparaître lors du déclenchement de la turbulence complètement développée.

*Vue de face*

*Agrandissement*

*Vue de dessus*



$Ta = 508$



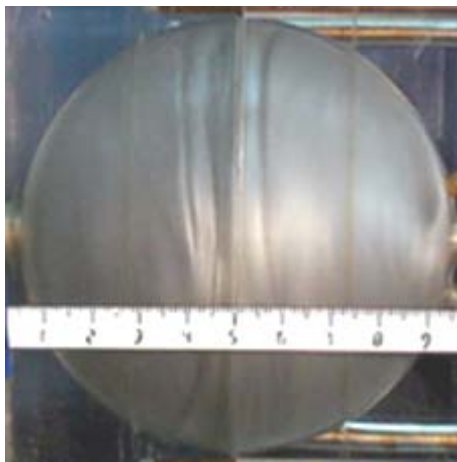
$Ta = 682$

**Figure III.2.48** : Mise en évidence d'une instabilité baroclinique près des pôles Nord et Sud  
(à  $\alpha=90^\circ$  et  $\Gamma=18$ )

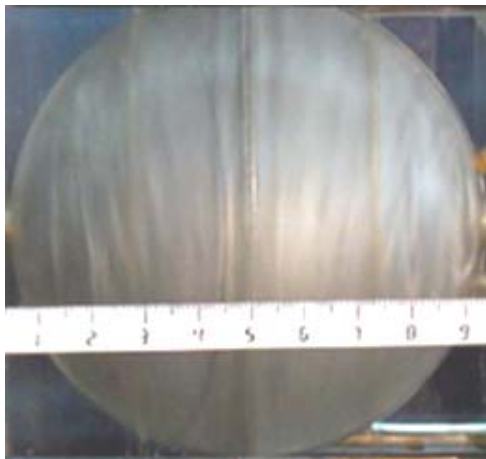
*Vue de face*

*Agrandissement*

*Vue de dessus*



$Ta = 288$



$Ta = 550$



**Figure III.2.49** : Mise en évidence d'une instabilité baroclinique près des pôles Nord et Sud  
(à  $\alpha=90^\circ$  et  $\Gamma = 19$ )

## 2°) Phénomène d'instabilité de type Taylor–Dean :

### Conditions opératoires :

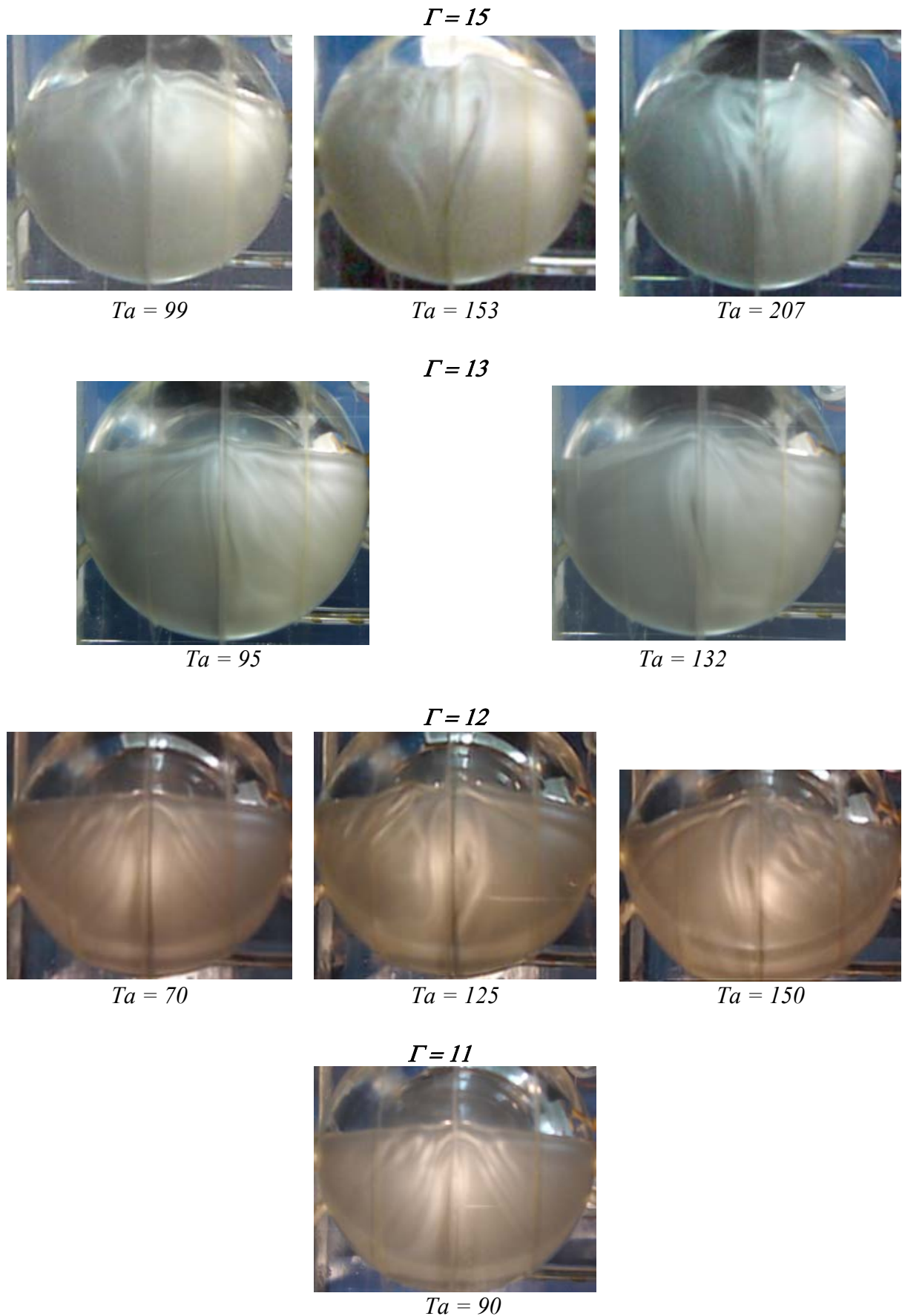
Le dispositif d'écoulement est adopté comme suit :

- Position angulaire :  $\alpha = 90^\circ$
- Nombre de Taylor critique d'apparition de l'instabilité de Taylor–Dean  $Ta = T_{cTD} = 70$
- Taux de remplissage critique d'apparition :  $\Gamma_{c1} = 13$
- Taux de remplissage critique de disparition :  $\Gamma_{c2} = 5$

### Observations

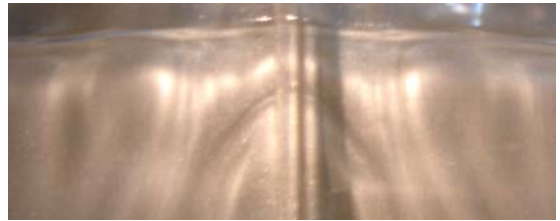
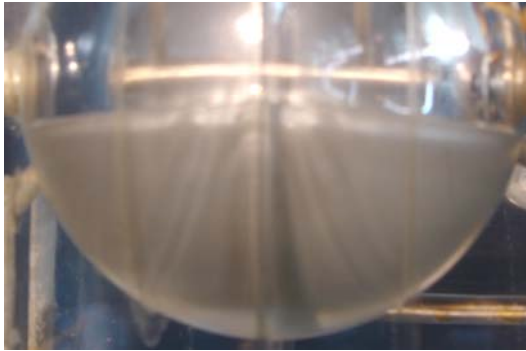
Lorsque le dispositif expérimental est en position horizontale  $\alpha = 90^\circ$ , on fait varier le taux de remplissage  $\Gamma$ . Au voisinage de la valeur particulière très importante  $\Gamma = \Gamma_{c1} = 13$  et à  $T_{cTD} = 70$ , on note l'apparition d'ondes stationnaires, au nombre de 6, localisées au niveau de la surface libre caractérisant ainsi l'écoulement de Taylor–Dean en géométrie Sphérique. Une onde de Taylor–Dean est constituée de deux cellules caractérisées sous la forme d'un dôme arrondi au maximum et de nature aigue au minimum de vitesses. Cette structure ainsi mise évidence semble de même forme que celle observée dans l'écoulement de Taylor–Couette cylindrique en position horizontale. En augmentant le nombre de Taylor le caractère stationnaire disparaît car ces ondes ont tendance à devenir instationnaire et se déplacent de l'équateur vers les pôles Nord et Sud (figure III.2.50... 52). Par la suite, lorsque on diminue le taux de remplissage on constate que l'instabilité de Taylor–Dean disparaît à  $\Gamma = \Gamma_{c2} = 5$ . C'est là, un critère géométrique de stabilité lié au domaine d'existence des cellules de Taylor–Dean.

Remarque: il est intéressant de voir, ultérieurement, au cours d'essais systématiques appropriés, quel sera le domaine de stabilité du mouvement de Taylor–Dean lorsque l'inclinaison  $\alpha$  est imposée à l'écoulement autour de la valeur  $\alpha = 90^\circ$ .



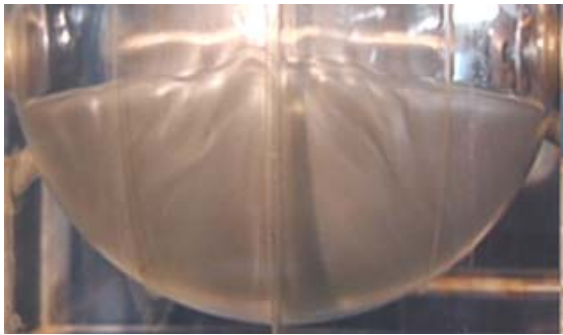
**Figure III.2.50** : Mise en évidence de l'instabilité Taylor–Dean en géométrie sphérique  
(à  $\alpha=90^\circ$ )

$$\Gamma = 8$$



Effet de Zoom

$$Ta = 95$$

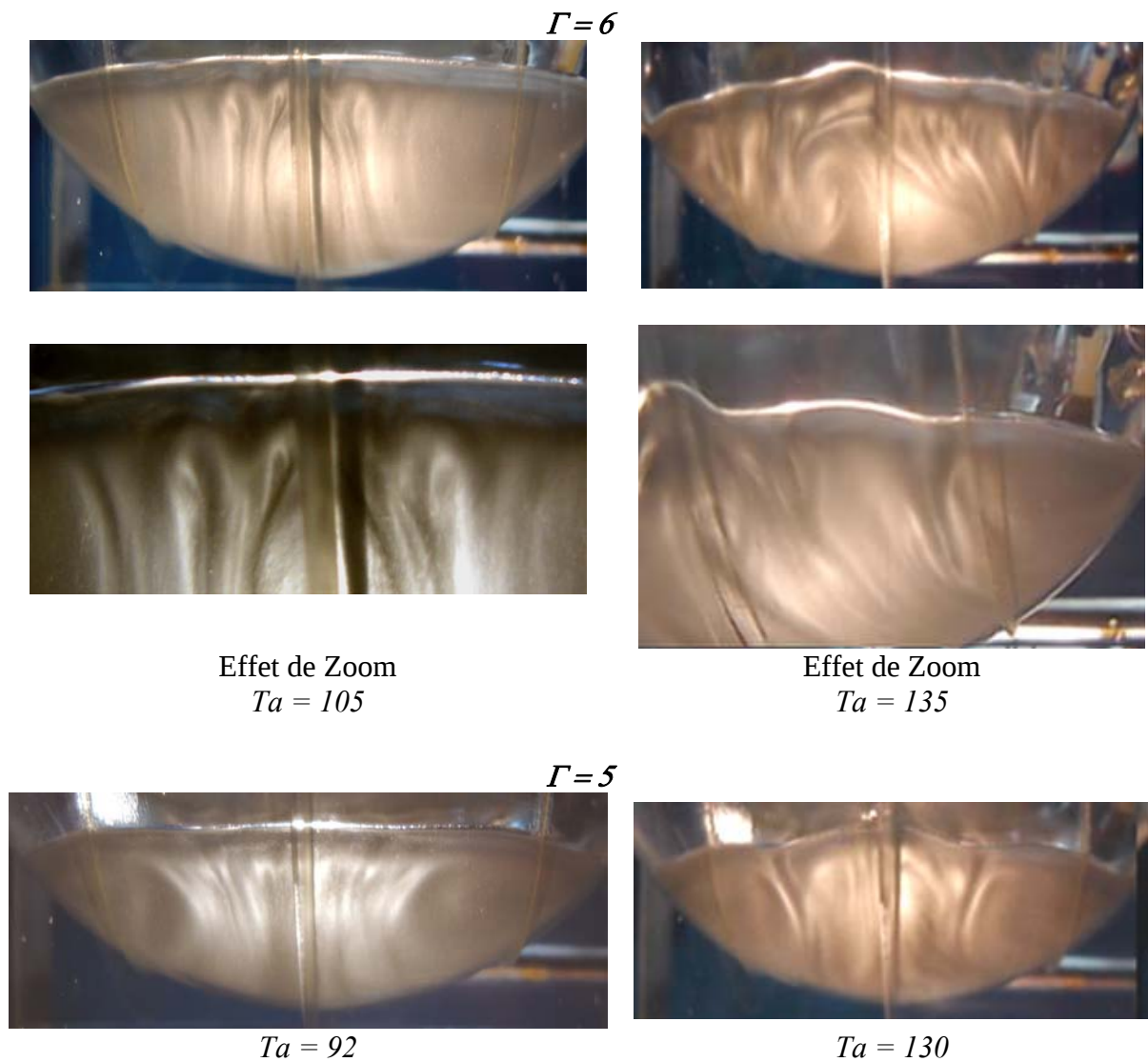


Effet de Zoom  
 $Ta = 124$



Effet de Zoom  
 $Ta = 168$

**Figure III.2.51** : Mise en évidence de l'instabilité de Taylor–Dean en géométrie sphérique  
(à  $\alpha=90^\circ$ )



**Figure III.2.52 :** Mise en évidence de l'instabilité Taylor–Dean en géométrie sphérique  
(à  $\alpha=90^\circ$ )

## 2°) Phénomène du spin-up

### Conditions opératoires :

Le dispositif d'écoulement est fixé selon les données suivantes :

- Position angulaire :  $\alpha = 90^\circ$
- Nombre de Taylor critique d'apparition  $Ta = T_{CSU} = 330$
- Taux de remplissage critique d'apparition :  $\Gamma = \Gamma_{c1} = 19$
- Taux de remplissage critique de disparition :  $\Gamma = \Gamma_{c2} = 3$

### Observations

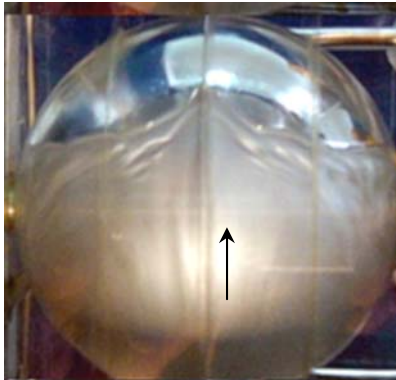
Au fur et à mesure que l'on augmente la vitesse  $\Omega_l$  on voit apparaître la naissance d'une forme de perturbation nouvelle de type instationnaire analogue à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz en surface libre (voir l'effet d'agrandissement figure III.2.53).

Cette instabilité disparaît lorsque la surface libre entre en contact avec la paroi de la sphère extérieure située au voisinage du nouveau pôle Nord  $N'$ . Dès lors tout se passe comme si l'on a formé un jet rond pariétal confiné entre sphères coaxiales en rotation. Ainsi, lorsqu'on est très proche de la valeur  $T_{CSU} = 330$  on note une nouvelle modification de l'écoulement qui se caractérise par une instabilité de type spin up : Dans cette nouvelle configuration, c'est un mouvement qui évolue de l'équateur vers le nouveau pôle Nord  $N'$  et tel que le plan méridien correspond au plan de symétrie dynamique. Ce mouvement tridimensionnel résulte des conditions d'adhérence pariétales de la sphère intérieure en rotation, d'un côté, et de l'effet de gradient des forces centrifuges, de l'autre côté.

Il est à signaler qu'au-delà de  $T_{CG} = 470$  ce phénomène s'accompagne de l'apparition des cellules de Goërtler, onde stationnaire, qui est solidaire de ce mouvement.

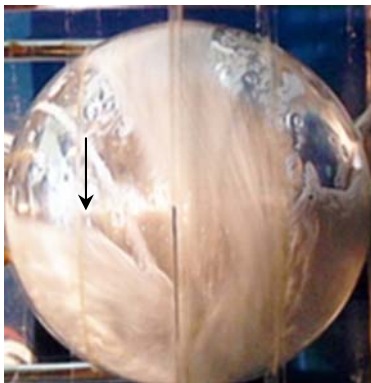
Enfin, on constate que le phénomène de spin up disparaît si l'on diminue le taux de remplissage soit  $\Gamma = \Gamma_{c2} = 3$ .

$Ta=160$

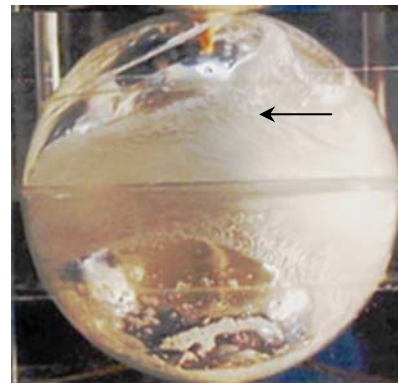


Effet d'agrandissement

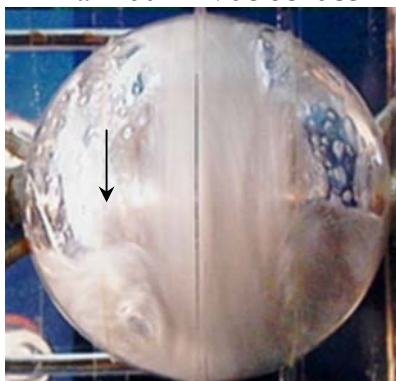
$Ta=410$  Vue de face



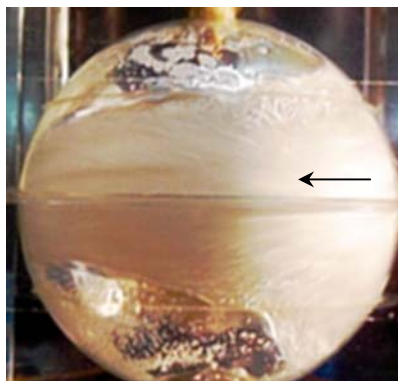
Vue de dessus



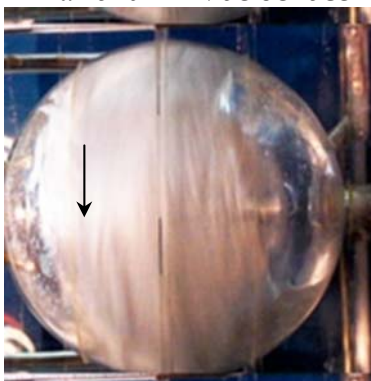
$Ta=460$  Vue de face



Vue de dessus



$Ta=640$  Vue de face



Vue de dessus

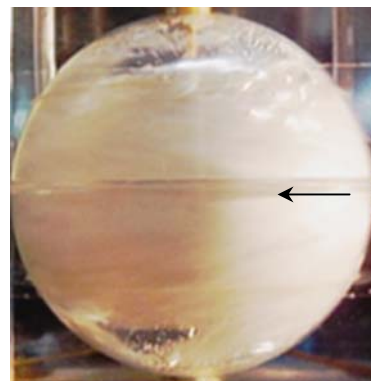
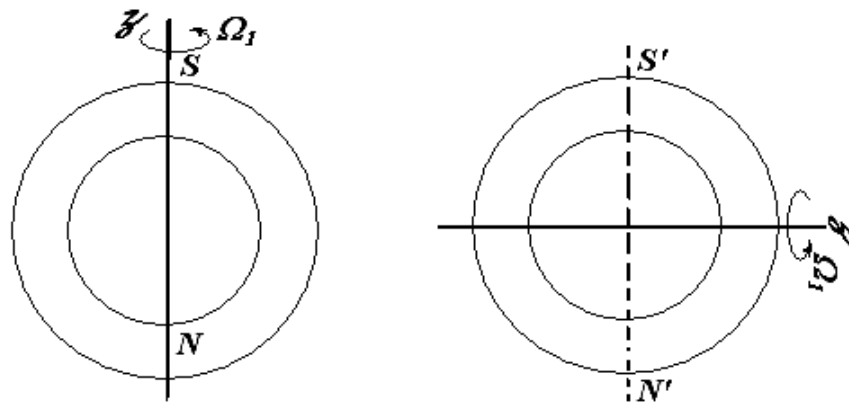


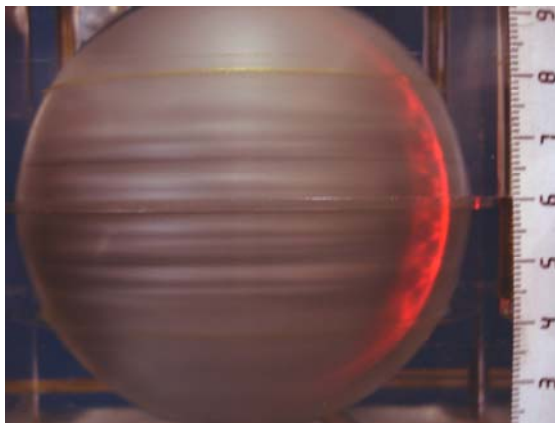
Figure III.2.53 : phénomène de spin up pour  $\Gamma=15$

↓ : Sens de rotation de la sphère intérieure

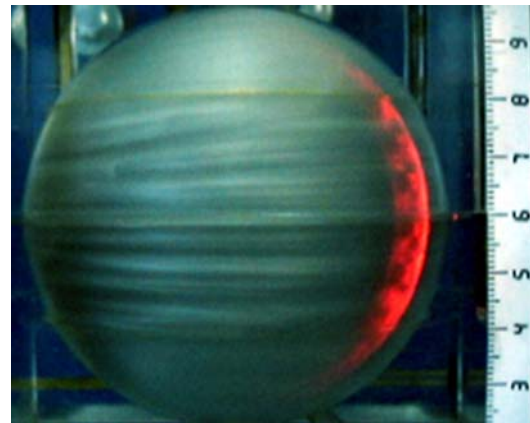


Définition du nouveau pôle Nord  $N'$  et du pôle Sud  $S'$

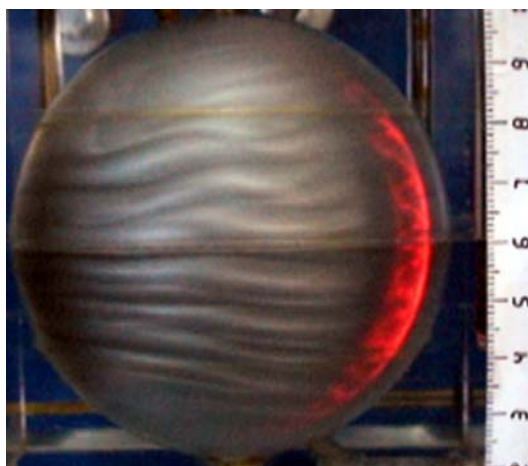
### Visualisation par laser



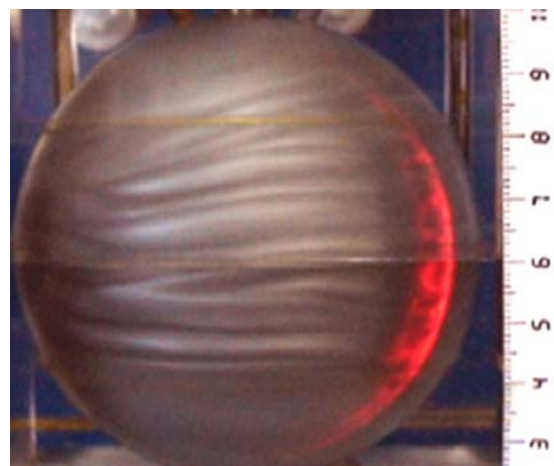
$Ta=45$   
Cellule de Taylor



$Ta=48$   
Mode Spiral



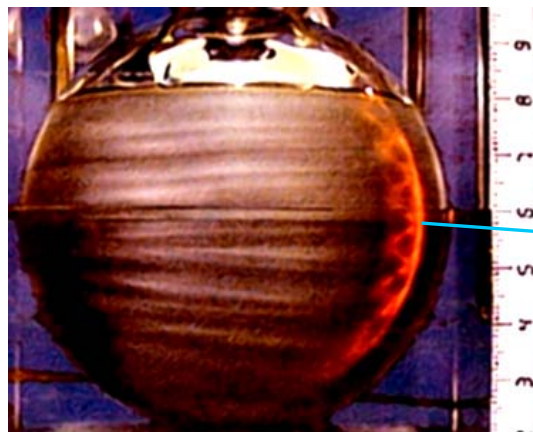
$Ta=73$



$Ta=86$

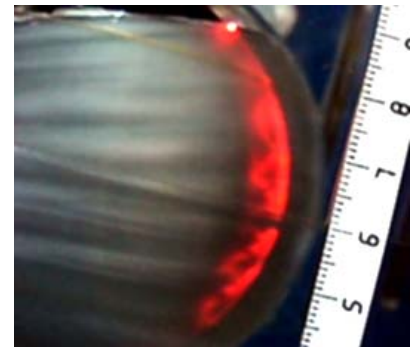
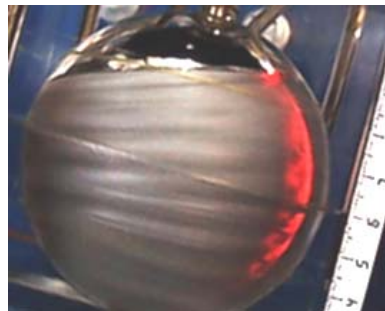
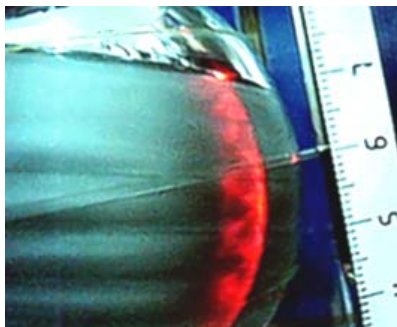
Spiral Wavy mode

**Figure III.2.54** : Visualisation par laser : Cas du dispositif vertical  $\alpha=0^\circ$ . Système d'écoulement en charge maximale  $\Gamma=\Gamma_{\max} = 20$

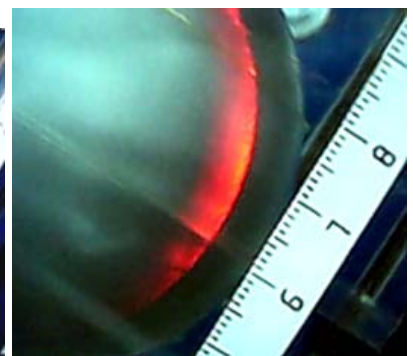
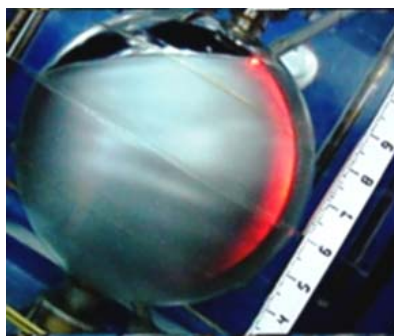
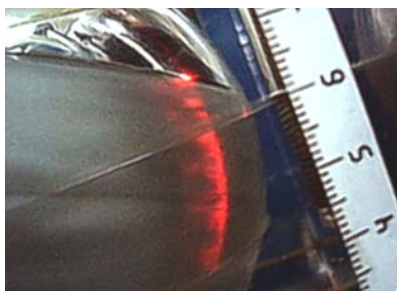


Mise en évidence  
des structures

$$\alpha = 0^\circ$$



$$\alpha = 15^\circ$$



$$\alpha = 30^\circ$$

**Figure III.2.55 :** Visualisation par laser  $Ta = 52$  : Dispositif expérimental en position angulaire  $\alpha$  variable. Système d'écoulement avec surface libre :  $\Gamma = 15$

## VII. CONCLUSION :

Le traitement des données photométriques a rendu possible l'analyse des résultats aux plans qualitatif et quantitatif. Pour un régime d'écoulement donné, on a pu tracer l'évolution des nombres de Taylor critiques associés aux états d'instabilités caractéristiques et on a aussi mis en évidence l'influence du facteur d'aspect  $\Gamma$  et de l'inclinaison  $\alpha$  sur la nature de l'écoulement et ses propriétés.

Les effets du facteur d'aspect  $\Gamma$ , et surtout de  $\alpha$ , marquent cette sensibilité et introduisent une grande complexité au sein de l'écoulement due principalement à l'intervention de la gravité et de la surface libre. Ainsi, l'influence de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  est responsable des phénomènes d'apparition des cellules et éventuellement de la disparition de celle-ci et, donc du phénomène de la relaminarisation de l'écoulement. Egalement, l'influence de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  et du facteur d'aspect  $\Gamma$  entraîne des modifications structurales : élargissement ou extension des cellules, d'un côté, et rétrécissement ou compression des cellules, de l'autre.

## CONCLUSION GENERALE

Au terme de ce travail, on peut faire le bilan des investigations théoriques et expérimentales concernant l'influence des caractéristiques spatio-temporelles sur l'écoulement de Taylor–Couette en géométrie sphérique.

Cette étude a permis d'évaluer qualitativement et quantitativement l'effet de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  du système d'écoulement ainsi que l'effet du taux de remplissage  $\Gamma$  et leur effet combiné capable de produire des modifications significatives sur la nature et la structure des instabilités caractérisant le régime de transition laminaire–turbulent dans l'écoulement considéré.

Au plan théorique, on a pu formuler le problème en vue d'effectuer ultérieurement sa modélisation générale. Celle-ci a permis de dégager un nouveau nombre caractéristique de l'écoulement  $\mathcal{N}_B$  qui est lié à l'influence des paramètres sensibles  $Ta$ ,  $\alpha$ ,  $\Gamma$ . Au vue de la complexité du problème, on s'est limité à établir une loi de comportement phénoménologique, susceptible de décrire fidèlement la distribution du champ moyen des vitesses au sein de l'espace annulaire en fonction de la pente  $s$ , basée sur le profil proposé par **A.BOUABDALLAH** [71] représentant l'écoulement de Taylor–Couette en géométrie cylindrique.

Par conséquent, il est remarquable de noter que ce type de profil présente un caractère très général passant d'un mouvement bidimensionnel à un mouvement tridimensionnel.

Afin d'élargir notre domaine d'investigation théorique, une étude numérique a été réalisée à l'aide du code de calcul FLUENT pour examiner l'effet de l'inclinaison  $\alpha$  sur le système d'écoulement totalement rempli : écoulement en charge ou sans surface libre. Cette recherche a permis de vérifier que l'angle d'inclinaison  $\alpha$  semble n'avoir aucun effet.

Une comparaison systématique des profils recensés dans la littérature, a mis en évidence le fait que la composante tangentielle de champ de vitesse moyen  $\overline{W}$  semble en bonne concordance avec celle qui a été établi pour le dispositif vertical  $\alpha = 0$  par les deux auteurs **M. Wimmer [1, 48] et K. Nakabayashi [44]**.

Au plan expérimental, on souligne l'importance des résultats obtenus quant au caractère inédit des phénomènes rencontrés. Il s'agit principalement du retard des seuils d'apparition des instabilités qui peuvent être considérablement accrus lorsque l'angle d'inclinaison  $\alpha$  est croissant. Toutefois, le paramètre  $\alpha$  ne semble avoir aucun effet sur le système d'écoulement totalement rempli, autrement dit, lorsque l'écoulement est en charge. Par contre, l'angle d'inclinaison  $\alpha$  produit un effet considérable lorsque le taux de remplissage diminue pouvant entraîner la disparition totale d'un mode pour un angle d'inclinaison critique. Cette évolution révèle l'existence d'une valeur particulière très importante :  $\alpha = \alpha_c = 30^\circ$ , correspondant à un taux de remplissage  $\Gamma = 18$ , pour laquelle on constate la destruction totale de toute structure au sein de l'écoulement, au voisinage de la valeur  $Ta = 45$ , amorçant ainsi la relaminarisation générale de l'écoulement.

On a vérifié cette propriété également lorsque le taux de remplissage  $\Gamma$  diminue. Ainsi pour  $\Gamma = \Gamma_c = 10$  on note la disparition de toute structure vers  $\alpha = \alpha_c = 25^\circ$ . Une exploration a été également menée afin de déterminer l'effet de la variation du taux de remplissage  $\Gamma$  pour un angle d'inclinaison  $\alpha$  donné que l'on fixe à l'avance. De ce fait, on remarque la disparition de la symétrie équatoriale pour  $\alpha = 0$  à  $\Gamma = \Gamma_{c1} = 13$  puis lorsque  $\Gamma$  diminue,  $\Gamma_{c2} = 8$ , on observe l'extinction de l'onde azimutale. A  $\Gamma = \Gamma_{c3} = 7$ , on note la disparition de toute structure au sein de l'écoulement et ceci quelque soit le régime qui a été préalablement établie.

Cette propriété a été également observée pour d'autre valeur de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ . Ainsi pour  $\alpha = 60^\circ$ , la disparition de l'onde de Taylor s'effectue à  $\Gamma = \Gamma_c = 18$  et pour  $\alpha = 90^\circ$ , la disparition du régime des vortex de Taylor s'opère  $\Gamma = \Gamma_c = 18$ , enfin pour la disparition du mode spiral et du wavy mode s'accomplit à  $\Gamma = \Gamma_c = 16$ . C'est dans ces conditions qu'on a pu effectuer une étude quantitative afin de formuler l'évolution des nombres de Taylor  $Tc_i$  ( $i=1..4$ ) associés aux états critiques correspondants en fonction de  $\alpha$  et de  $\Gamma$  qui rendent compte de l'apparition ou de la disparition des ondes stationnaires et instationnaires. Dans ces conditions, on constate que les lois d'évolution des nombres de Taylor critique en fonction du taux de remplissage  $\Gamma$  de type linéaire sont valables pour une inclinaison faible qui se situe dans l'intervalle angulaire suivant :  $0 \leq \alpha \leq 15^\circ$  mais aussi, assez paradoxalement, dans le domaine des grandes inclinaisons  $65^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . En ce qui concerne les lois de type exponentiel simple, le critère d'apparition des structures précédentes est valable dans l'intervalle des angles complémentaires, à savoir,  $15^\circ \leq \alpha \leq 65^\circ$ .

Il est remarquable de noter que la loi de comportement, en variation angulaire  $\alpha$ , semble analogue à l'évolution du taux de remplissage  $\Gamma$ . En effet, il apparaît que l'évolution de  $Ta$  en fonction du paramètre angulaire  $\alpha$  obéit à une loi de probabilité de type Gauss ou loi normale. On constate, aussi, que lorsque l'écoulement est en charge, le taux de remplissage est alors maximal : on observe que l'évolution des paramètres critiques  $Tc_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) sont insensibles à l'effet angulaire  $\alpha$  et donc à la force de gravité. En revanche, lorsque  $\Gamma$  diminue on constate une évolution sensible de ces paramètres critiques et la disparition progressive des états d'instabilité associés aux nombres  $Tc_3$  et  $Tc_4$  qui sont observés à  $\Gamma = 10$  et  $\Gamma = 8$ .

Tenant compte de ce qui précède, au vue de l'importance du taux de remplissage, une analyse systématique a été consacrée à la transition laminaire-turbulent dans le système verticale  $\alpha = 0^\circ$  afin de déterminer les paramètres critiques  $Tc_i$  ( $i=1..4$ ),  $T_w$ ,  $T'$ ,  $T_c$  associés aux instabilités et aux régimes d'écoulement en fonction de  $\Gamma$ . L'évolution de ces paramètres reste sensiblement constante. Par contre, le nombre de Taylor critique  $T_D$  associé au régime de la turbulence développée semble varier selon une loi exponentielle ordinaire. Ceci nous permet de conclure que, le facteur d'aspect  $\Gamma$  agit sur le régime de transition laminaire-turbulent en retardant l'apparition des instabilités et en avançant le déclenchement de la turbulence.

Par ailleurs, des phénomènes inédits ont été mis en évidence telle que l'apparition de tourbillons barocliniques symétrique à  $\alpha = 90^\circ$  au voisinage des pôles Nord et Sud. Egalement, on a pu déterminer la valeur critique  $\Gamma_c$  déclenchant le phénomène d'apparition de type Taylor–Dean sphérique analogue à celui rencontré en géométrie cylindrique.

Par la suite, on a suivi l'évolution des caractéristiques spatio-temporelles de l'onde azimutale telles que le nombre d'onde  $m$ , la longueur d'onde  $\lambda_z$  et la vitesse de phase  $\omega$ . on note que le rapport de la vitesse de phase  $\omega$  et de la vitesse de rotation  $\Omega_I$  semble se stabiliser vers une valeur proche de 0.35 et cela quelque soit le taux de remplissage  $\Gamma$ . Ce résultat est conforme à celui donné par plusieurs auteurs. En outre, l'ensemble des courbes, représentant le nombre d'onde  $m$  en fonction du nombre de Taylor  $Ta$  se rejoignent vers un nombre de Taylor  $Ta=185$  correspondant à  $m=6$  où le rapport  $\omega/\Omega_I$  se stabilise, l'évolution de la longueur d'onde axiale  $\lambda_z$  en fonction de  $Ta$  est également en bon accord avec celle établit par **M. Wimmer [1, 48]**.

Enfin, dans le cadre de la mise en évidence du processus de transition laminaire–turbulent on a tenté d'isoler l'évolution de l'écoulement à travers ses caractéristiques structurelles dans le plan d'onde associé  $(n, m)$ . Les observations ont été réalisées dans le cadre de l'influence du facteur d'aspect  $\Gamma$  lorsque le dispositif d'écoulement est vertical ( $\alpha = 0$ ). Il semblerait que ce processus de transition soit sensible aux effet du taux de remplissage  $\Gamma$  qui dépend à la fois du nombre de Taylor  $Ta$  et de la quantification  $(n, m)$  définissant les différents chemins vers le chaos. Ceci appel à un prolongement de nos travaux qui ne peut se faire, en raison de la complexité, que par une approche thermodynamique laquelle sera basée sur l'évolution de l'entropie d'information et les données d'analyse spectrale.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

- [1] M. Wimmer: *Experiments on the stability of viscous flow between two concentric rotating spheres*. J. Fluid Mech. 103, 117-131 (1981).
- [2] M. Junk & C. Egbers: *Isothermal spherical Couette flow*. In Lecture Notes in Physics, Physics of Rotating Fluids, Springer, 215-233 (2000)
- [3] V. S. Sorokin: *Nonlinear phenomena in closed flows near Critical Reynolds number*. PMM Vol.25, No.2, pp. 248-258 (1961)
- [4] I.U.K. Bratukhin : *On the evaluation of the critical Reynolds number for the flow of fluid between two rotating spherical surfaces*. PMM 25, 858-866 (1990)
- [5] B.R. Munson: *Viscous incompressible flow between eccentric coaxially rotation spheres*. The Physics of Fluids, Vol. 17, No 3, pp528-531 (March 1974)
- [6] G. Schrauf : *The first instability in spherical Taylor-Couette flow*. J. Fluid Mech. 166, 287-303 (1986)
- [7] J.P. Bonnet, T. Alziary de Roquefort: *Ecoulement entre deux sphères concentriques en rotation*. J. Mec. 13, 373 (1976)
- [8] F. Bartels: *Taylor vortices between two concentric rotating spheres*. J. Fluid Mech. 119, 1-25 (1982)
- [9] S.C.R. Dennis, L. Quartapelle: *Finite difference solution to the flow between two rotating spheres*. Comp. Fluids. 12, 77-92 (1984)
- [10] P. Marcus, L. Tuckerman: *Simulation of the flow between concentric rotating spheres*. J. Fluid Mech. 185, 1-65(1987)
- [11] K. Bühler: *Symmetric and asymmetric Taylor vortex flow in spherical gaps*. Acta Mechanica 81, 3-38 (1990)
- [12] C.K. Mamun, L. Tuckerman: *Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow*. Phys. Fluids 2, 1564-1573 (1995)
- [13] R.-J. Yang: *A numerical procedure for predicting multiple solutions of a spherical Taylor-Couette flow*. Int. J. Numer. Methods Fluids 22, 1135-1147 (1996)
- [14] G. Dumas, A. Leonard: *A divergence-free spectral expansions method for three dimensional flows in spherical-gap geometries*. J. Comput. Phys. 111, 205-219 (1994)

- [15] O.Yu. Zikanov: *Symmetry breaking bifurcations in spherical Couette flow*. J. Fluid Mech. 310, 293-324 (1996)
- [16] R. Hollerbach: *Time-Dependent Taylor Vortices in Wide-Gap Spherical Couette Flow*. Physical Review Letters Vol. 81, No 15 (12 October 1998)
- [17] H. Yamaguchi, J. Fujiyoshi, H. Matsui: *Spherical Couette flow of a viscoelastic fluid. Part 1: Experimental study of the inner sphere rotation*. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 69, 29-46 (1997)
- [18] H. Yamaguchi, H. Matsui: *Spherical Couette flow of a viscoelastic fluid. Part 2: Numerical study for the inner sphere rotation*. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 69, 47-70 (1997)
- [19] H. Yamaguchi, B. Nishiguchi: *Spherical Couette flow of a viscoelastic fluid. Part 3: A study of outer sphere rotation*. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 69, 47-70 (1997)
- [20] R. Hollerbach and Laurette S. Tuckerman: *Taylor vortices in wide spherical shells*. 12th International Couette–Taylor Workshop, September 6–8, 2001, Evanston, IL USA
- [21] V.C. Loukopoulos, G.A. Katsiaris, G.T. Karahalios: *A steady-state solver for the simulation of Taylor vortices in spherical annular flow*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192 2993–3003 (2003).
- [22] Yuan Li, Fu De-Xun and Ma Yan-Wen: *Numerical Study of Bifurcation Solutions of Spherical Taylor–Couette Flow*. Published at Science in China Ser. A - Mathematics, 39 (2), 187-196, 1996
- [23] Yuan Li: *Numerical study of multiple periodic flow states in spherical Couette flow*. Published in Science in China Ser. A - Mathematics, 47, Supp. 81-91, 2004.
- [24] G.I. Taylor: *Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders*. Phil. Trans. A 223, 289-293 (1923)
- [25] G.N. Khlebutin: *Stability of fluid motion between a rotating and a stationary concentric sphere*. Fluid Dyn. 3, 31-32 (1968)
- [26] V.I. Yakushin: *Instability of the motion of a liquid between two rotating spherical surfaces*. Fluid Dyn. 5, 660-661 (1970)
- [27] B.R. Munson, M. Menguturk: *Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Part 3: Linear stability and experiments*. J. Fluid Mech. 69, 705-719 (1975)

- [28] M. Wimmer: *Experiments on a viscous fluid between concentric rotating spheres*. J. Fluid Mech. 78, 317-335(1976)
- [29] I.M. Yavorskaya, Yu.N. Belyaev, A.A. Monakhov, N.M. Astaf'eva, S.A. Scherbakov, N.D. Vvedenskaya: *Stability, non-uniqueness and transition to turbulence in the flow between two rotating spheres*. IUTAM-Symposium, Toronto, Canada (1980)
- [30] K. Nakabayashi: *Transition of Taylor-Görtler vortex flow in spherical Couette flow*. J. Fluid Mech. 132, 209-230 (1983)
- [31] K. Bühler and J. Zierep: *New secondary instabilities for high Re-number flow between two rotating spheres*. in: Kozlov, V.V. (ed.): Laminar-Turbulent Transition. IUTAM-Symp. Novosibirsk/USSR, Springer (1984)
- [32] K. Bühler, J. Zierep: *Dynamical instabilities and transition to turbulence in spherical gap flows*. In: G. Comte-Bellot, J. Mathieu: Advances in turbulence. Proc. 1<sup>st</sup> Europ. Turb. Conf., Lyon, France, Springer (1986)
- [33] M.P. Sorokin, G.N. Khlebutin, G.F. Shaidurov: *Study of the motion of a liquid between two rotating spherical surfaces*. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 6, 73-74 (1966)
- [34] A.M. Waked, B.R. Munson: *Laminar turbulent flow in spherical annulus*. J. Fluids Eng. 100, 281-286 (1978)
- [35] I.M. Yavorskaya, Yu.N. Belyaev, A.A. Monakhov: *Experimental study of a spherical Couette flow*. Sov. Phys. Dokl. 20, 256-258 (1975)
- [36] A.A. Monakhov: *Limit of main flow stability in spherical layers*. Fluid Dynamics 31, 535-538 (1996)
- [37] P. Bar-Yoseph, A. Solan, R. Hillen, K.G. Roesner: *Taylor vortex flow between eccentric coaxial rotating spheres*. Phys. Fluids A 2, 1564-1573 (1990)
- [38] P. Bar-Yoseph, K.G. Roesner, A. Solan: *Vortex breakdown in the polar region between rotating spheres*. Phys. Fluids A 4, 1677-1686 (1992)
- [39] Yu.N. Belyaev, A.A. Monakhov, G.N. Khlebutin, I.M. Yavorskaya: *Investigation of stability and nonuniqueness of the flow between rotating spheres*. No. 567, Space Research Institute of the Academy of Sciences, Moscow, USSR (1980)
- [40] M. Liu, C. Blohm, C. Egbers, P. Wulf, H.J. Rath: *Taylor vortices in wide spherical shells*. Phys. Rev. Lett. 77, 286-289 (1996)
- [41] K. Nakabayashi, Y. Tsuchida: *Spectral study of the laminar-turbulent transition in spherical Couette flow*. J. Fluid Mech., 194, 101-132 (1988)

- [42] K. Nakabayashi, Y. Tsuchida : *Modulated travelling azimuthal waves on the toroidal vortices in a spherical couette system*. J. Fluid Mech., 195, 495-522 (1988)
- [43] K. Nakabayashi, W. Sha: *Vortical structures and velocity fluctuations of spiral and wavy vortices in the spherical Couette flow*. this book (2000)
- [44] K. Nakabayashi, Zhiming Zheng and Yoichi Tsuchida: *Evolution of mean and fluctuating velocity components in the laminar–turbulent transition of spherical Couette flow*. Physics Of Fluids Volume 14, n° 8 (August 2002)
- [45] K. Nakabayashi, Yoichi Tsuchida and Zhiming Zheng : *Characteristics of disturbances in the laminar–turbulent transition of spherical Couette flow. 1. Spiral Taylor–Görtler vortices and travelling waves for narrow gaps*. Physics Of Fluids Volume 14, n° 11 (November 2002)
- [46] K. Nakabayashi, Zhiming Zheng and Yoichi Tsuchida: *Characteristics of disturbances in the laminar–turbulent transition of spherical Couette flow. 2. New disturbances observed for a medium gap*. Physics Of Fluids Volume 14, n° 11 (November 2002)
- [47] K. Nakabayashi, Zhiming Zheng and Yoichi Tsuchida: *Evolution of mean and fluctuating velocity components in the laminar-turbulent transition of spherical couette flow*. 12th International Couette-Taylor Workshop, (September 6-8 2001), Evanston, IL USA
- [48] M. Wimmer: *Viscous flows and instabilities near rotating Bodies*. Prog. Aerospace Sci. Vol. 25, pp. 43-103, (1988)
- [49] Yu.N. Belyaev, A.A. Monakhov, I.M. Yavorskaya: *Stability of spherical Couette flow in thick layers when the inner sphere revolves*. Fluid Dyn. 13, 162-163 (1978)
- [50] Yu.N. Belyaev, A.A. Monakhov, S.A. Scherbakov, I.M. Yavorskaya: *Some routes to turbulence in spherical Couette Flow*. in: V.V. Kozlov (ed.): Laminar-Turbulent Transition. IUTAM-Symp. Novosibirsk/USSR, Springer (1984)
- [51] C. Egbers, H.J. Rath: *The existence of Taylor vortices and wide-gap instabilities in spherical Couette flow*. Acta Mech. 111, 125-140 (1995)
- [52] P. Wulf, C. Egbers. H.J. Rath: *Routes to chaos in wide-gap spherical Couette flow*. Phys. Fluids 11, 1359-1372 (1999).
- [53] G. Dumas: *The spherical Couette flow and its large-gap stability by spectral simulations*. Proceedings of CFD 94, Canadian Society of CFD, Toronto, Canada, 67-75 (1994).

- [54] R. Hollerbach: *A spectral solution of the magneto-convection equations in spherical geometry*. Int. J. Num. Meth. Fluids 32, 773-797 (2000)
- [55] K. Araki, J. Mizushima, S. Yanase: *The non-axisymmetric instability of the wide gap spherical Couette flow*. Phys. Fluids 9, 1197-1199 (1997)
- [56] N.M. Astafyeva: *Nonlinear shear flow in rotating spherical layers and global atmosphere motion modelling* (in Russian). Izv. Vusov PND 5, 3-30 (1997)
- [57] Jan-R. Schmidt, Christoph Egbers and Hans J. Rath: *Experiments on the isothermal flow in wide spherical gaps*. 12th International Couette-Taylor Workshop, September 6-8, 2001, Evanston, IL USA
- [58] P. Bar-Yoseph, A. Solan, R. Hillen, K.G. Roesner: *Taylor vortex flow between eccentric coaxial rotating spheres*. Phys. Fluids A 2, 1564-1573 (1990)
- [59] K. Bühler: *Spherical Couette flow with superimposed through flow*. LNP 549, pp. 256–268, 2000. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2000).
- [60] E.H. Bishop, J.A. Scanlan, L.R. Mack: *Heat transfer by natural convection between concentric spheres*, Int. J. Heat Mass Transfer 9 649-662 (1966).
- [61] J.A. Scanlan, E.H. Bishop, R.E. Powe: *Natural convection heat transfer between concentric spheres*, Int. J. Heat Mass Transfer 13 1857-1872 (1970).
- [62] S.H. Yin, R.E. Powe, J.A. Scanlan, E.H. Bishop: *Natural convection flow patterns in spherical annuli*, Int. J. Heat Mass Transfer 16 1785-1795 (1973).
- [63] S.N. Singh, J.M. Elliott: *Natural convection between concentric spheres in a slightly-thermally stratified medium*, Int. J. Heat Mass Transfer 24 395-406 (1981).
- [64] M. Liu, C. Egbers and H. J. Rath: *Three-dimensional finite amplitude thermal convection in a spherical shell*. Adv. Space Res. Vol. 16. No. 7, pp. 105–108 (1995)
- [65] C Egbers, W Brasch, B Sitte, J Immohr and J-R Schmidt: *Estimates on diagnostic methods for investigations of thermal convection between spherical shells in space*. Meas. Sci. Technol. Vol. 10 (1999) 866–877. Printed in the UK
- [66] W.-J. Luo, R.-J. Yang: *Flow bifurcation and heat transfer in a spherical gap*. International Journal of Heat Mass Transfer 43 885-899 (2000).
- [67] Vadim V. Travnikov, Hans J. Rath, C. Egbers: *Stability of natural convection between spherical shells: Energy Theory*. International Journal of Heat and Mass Transfer 45 pp 4227–4235 (2002)

- [68] H. Yamaguchi & I. Kobori : *Spherical Couette flow of a magnetic fluid with inner sphere rotation*. Journal of Magnetism and Magnetic Materials volume 122, pp 221-223 (1993).
- [69] R. C. Weast, PH.D: *Handbook of chemistry and Physics*, Crc Press, Paris 1976
- [70] I.C. Walton: *The linear stability of the flow in narrow spherical annulus*. Journal of Fluid Mech, **86**, 673(1978)
- [71] A. BOUABDALLAH : *Proceedings, 3<sup>ième</sup> Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 5–8 Septembre 1976*.
- [72] A. BOUABDALLAH : *Symetries and broken symetries in condensed matter physics*, Ed. N. Boccara IDSET Parie, 1981
- [73] A. BOUABDALLAH : *Approche thermodynamique de la transition laminaire–turbulent dans les systèmes d’écoulement rotatif*, Rapport interne 2005.

# ANNEXE I

## TABLEAUX DE MESURES EXPÉRIMENTALES

| <b><i>H=100 mm    <math>\Gamma=20</math></i></b> | <b><i><math>\alpha</math></i></b> | <b><i><math>\Omega</math><br/>(tr/min)</i></b> | <b><i><math>T</math> (°C)</i></b> | <b><i><math>T_{c1}</math></i></b> | <b><i><math>\Omega</math><br/>(tr/min)</i></b> | <b><i><math>T</math> (°C)</i></b> | <b><i><math>T_{c2}</math></i></b> | <b><i><math>\Omega</math><br/>(tr/min)</i></b> | <b><i><math>T</math> (°C)</i></b> | <b><i><math>T_{c3}</math></i></b> | <b><i><math>\Omega</math><br/>(tr/min)</i></b> | <b><i><math>T</math> (°C)</i></b> | <b><i><math>T_{c4}</math></i></b> |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
|                                                  | 0                                 | 27,00                                          | 27,10                             | <b>43,37</b>                      | 30,20                                          | 27,10                             | <b>47,17</b>                      | 35,50                                          | 27,10                             | <b>54,43</b>                      | 39,60                                          | 27,10                             | <b>61,85</b>                      |
|                                                  | 10                                | 25,90                                          | 27,00                             | <b>43,26</b>                      | 28,20                                          | 27,10                             | <b>47,24</b>                      | 32,70                                          | 27,10                             | <b>54,78</b>                      | 37,10                                          | 27,10                             | <b>62,16</b>                      |
|                                                  | 20                                | 26,00                                          | 26,80                             | <b>43,41</b>                      | 28,60                                          | 26,80                             | <b>47,75</b>                      | 32,60                                          | 26,90                             | <b>54,61</b>                      | 36,80                                          | 26,90                             | <b>61,64</b>                      |
|                                                  | 30                                | 25,60                                          | 27,20                             | <b>43,29</b>                      | 28,20                                          | 27,20                             | <b>47,68</b>                      | 32,40                                          | 27,20                             | <b>54,78</b>                      | 36,40                                          | 27,30                             | <b>61,74</b>                      |
|                                                  | 40                                | 25,30                                          | 27,50                             | <b>43,18</b>                      | 28,50                                          | 26,60                             | <b>47,29</b>                      | 32,50                                          | 26,60                             | <b>54,44</b>                      | 36,80                                          | 26,90                             | <b>61,64</b>                      |
|                                                  | 50                                | 25,40                                          | 27,90                             | <b>43,61</b>                      | 27,50                                          | 27,90                             | <b>47,10</b>                      | 32,00                                          | 27,90                             | <b>54,98</b>                      | 36,00                                          | 28,00                             | <b>61,38</b>                      |
|                                                  | 60                                | 25,40                                          | 27,80                             | <b>43,48</b>                      | 27,60                                          | 27,80                             | <b>47,24</b>                      | 31,70                                          | 27,90                             | <b>54,43</b>                      | 35,70                                          | 27,90                             | <b>61,29</b>                      |
|                                                  | 70                                | 25,60                                          | 27,80                             | <b>43,24</b>                      | 27,70                                          | 27,80                             | <b>47,42</b>                      | 31,70                                          | 27,70                             | <b>54,10</b>                      | 35,90                                          | 27,60                             | <b>61,08</b>                      |
|                                                  | 80                                | 26,80                                          | 26,20                             | <b>43,64</b>                      | 28,90                                          | 26,20                             | <b>47,06</b>                      | 33,10                                          | 26,10                             | <b>53,72</b>                      | 37,80                                          | 26,10                             | <b>61,35</b>                      |
|                                                  | 90                                | 26,60                                          | 26,30                             | <b>43,45</b>                      | 28,70                                          | 26,30                             | <b>46,88</b>                      | 33,40                                          | 26,30                             | <b>54,56</b>                      | 36,80                                          | 26,30                             | <b>60,12</b>                      |

**Tableau 1** : Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de l'inclinaison  
(Système totalement rempli H=100mm).

|                                       | $\alpha$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c1}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c2}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c4}$      |
|---------------------------------------|----------|----------------------|-----------------|--------------|----------------------|-----------------|--------------|----------------------|-----------------|--------------|----------------------|-----------------|---------------|
|                                       |          |                      |                 |              |                      |                 |              |                      |                 |              |                      |                 |               |
| $\Gamma = 19$<br><br>$H=95\text{ mm}$ | 0        | 27,40                | 26,00           | <b>44,40</b> | 30,30                | 26,60           | <b>50,05</b> | 33,60                | 26,60           | <b>55,50</b> | 38,70                | 26,70           | <b>64,12</b>  |
|                                       | 5        | 26,30                | 27,20           | <b>44,26</b> | 29,80                | 27,20           | <b>50,15</b> | 33,80                | 27,20           | <b>56,88</b> | 38,00                | 27,20           | <b>63,95</b>  |
|                                       | 10       | 27,10                | 26,00           | <b>43,92</b> | 31,30                | 26,20           | <b>51,05</b> | 35,00                | 26,30           | <b>57,26</b> | 40,00                | 26,30           | <b>65,44</b>  |
|                                       | 15       | 26,70                | 26,40           | <b>43,82</b> | 28,90                | 26,40           | <b>47,43</b> | 35,10                | 26,40           | <b>57,61</b> | 39,70                | 26,40           | <b>65,32</b>  |
|                                       | 20       | 26,80                | 26,30           | <b>43,85</b> | 29,00                | 26,30           | <b>47,45</b> | 35,60                | 26,30           | <b>58,25</b> | 40,50                | 26,30           | <b>66,26</b>  |
|                                       | 25       | 29,00                | 23,90           | <b>43,80</b> | 30,40                | 24,10           | <b>46,23</b> | 40,00                | 24,30           | <b>61,26</b> | 42,20                | 24,70           | <b>65,51</b>  |
|                                       | 30       | 28,50                | 24,50           | <b>43,95</b> | 30,20                | 24,50           | <b>46,57</b> | 39,70                | 24,50           | <b>61,21</b> | 42,80                | 24,40           | <b>65,77</b>  |
|                                       | 35       | 29,70                | 23,30           | <b>43,91</b> | 31,50                | 23,40           | <b>46,91</b> | 39,40                | 23,70           | <b>59,09</b> | 43,70                | 23,80           | <b>65,77</b>  |
|                                       | 40       | 30,80                | 22,30           | <b>43,90</b> | 32,50                | 23,30           | <b>46,55</b> | 42,70                | 23,00           | <b>62,45</b> | 47,00                | 23,00           | <b>68,74</b>  |
|                                       | 45       | 31,70                | 22,00           | <b>44,67</b> | 32,20                | 22,70           | <b>46,58</b> | ----                 | ----            | ----         | 45,40                | 22,90           | <b>66,16</b>  |
|                                       | 50       | 30,60                | 23,00           | <b>44,75</b> | 31,90                | 23,10           | <b>46,83</b> | ----                 | ----            | ----         | 44,80                | 23,60           | <b>67,19</b>  |
|                                       | 55       | 31,50                | 22,10           | <b>44,56</b> | 33,10                | 22,10           | <b>46,68</b> | ----                 | ----            | ----         | 43,40                | 22,40           | <b>62,09</b>  |
|                                       | 60       | 31,60                | 22,40           | <b>45,21</b> | 32,70                | 22,80           | <b>47,48</b> | ----                 | ----            | ----         | 49,40                | 23,10           | <b>72,51</b>  |
|                                       | 65       | 31,60                | 23,30           | <b>46,72</b> | 33,30                | 23,40           | <b>49,41</b> | ----                 | ----            | ----         | 54,80                | 23,70           | <b>82,18</b>  |
|                                       | 70       | 33,40                | 22,20           | <b>47,42</b> | 35,50                | 22,40           | <b>50,79</b> | ----                 | ----            | ----         | 62,60                | 23,10           | <b>91,89</b>  |
|                                       | 75       | 32,20                | 23,30           | <b>47,61</b> | 36,80                | 23,30           | <b>53,82</b> | ----                 | ----            | ----         | 61,30                | 24,10           | <b>93,55</b>  |
|                                       | 80       | 32,30                | 22,50           | <b>46,38</b> | 55,30                | 23,20           | <b>81,47</b> | ----                 | ----            | ----         | 61,70                | 23,50           | <b>91,88</b>  |
|                                       | 85       | 31,70                | 23,60           | <b>47,37</b> | ----                 | ----            | ----         | ----                 | ----            | ----         | 67,50                | 24,20           | <b>103,01</b> |
|                                       | 90       | 29,80                | 24,30           | <b>45,64</b> | ----                 | ----            | ----         | ----                 | ----            | ----         | 61,70                | 24,50           | <b>95,17</b>  |

**Tableau 2:** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de l'inclinaison  
(Pour une hauteur de remplissage H=95mm).

|                  | $\alpha$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c1}$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c2}$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c3}$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c4}$ |
|------------------|----------|----------------------|-----------------|----------|----------------------|-----------------|----------|----------------------|-----------------|----------|----------------------|-----------------|----------|
|                  |          |                      |                 |          |                      |                 |          |                      |                 |          |                      |                 |          |
| $\Gamma = 18$    | 0        | 30,10                | 22,90           | 43,86    | 33,60                | 23,10           | 49,32    | 38,10                | 23,10           | 55,93    | 42,90                | 23,20           | 63,20    |
|                  | 5        | 29,90                | 23,40           | 44,37    | 34,00                | 24,00           | 51,53    | 35,50                | 24,10           | 54,45    | 41,10                | 24,70           | 63,81    |
|                  | 10       | 29,70                | 23,70           | 44,54    | 33,90                | 23,70           | 50,84    | 37,20                | 23,70           | 55,79    | 42,50                | 24,10           | 63,12    |
|                  | 15       | 29,80                | 24,10           | 45,32    | 31,80                | 24,20           | 48,53    | 35,00                | 24,30           | 53,91    | 42,40                | 24,40           | 65,15    |
|                  | 20       | 29,40                | 24,70           | 45,68    | 34,30                | 24,70           | 52,16    | 35,50                | 24,80           | 55,30    | 41,20                | 24,90           | 64,55    |
|                  | 25       | 29,40                | 24,80           | 45,80    | 33,90                | 24,90           | 52,98    | 36,70                | 25,00           | 57,55    | 41,30                | 25,10           | 64,89    |
|                  | 30       | 31,70                | 22,90           | 46,20    | 36,00                | 22,90           | 52,47    | 40,70                | 23,90           | 61,47    | 42,40                | 24,10           | 64,48    |
|                  | 35       | 32,20                | 23,00           | 47,08    | 32,90                | 23,00           | 48,12    | 39,20                | 23,20           | 57,75    | 44,50                | 23,80           | 66,97    |
|                  | 40       | 32,10                | 24,10           | 48,82    | 35,00                | 24,10           | 53,23    | 40,60                | 24,10           | 61,75    | 42,50                | 24,40           | 65,31    |
|                  | 45       | 32,30                | 24,60           | 49,66    | 36,00                | 22,20           | 50,92    | ----                 | ----            | ----     | 49,00                | 22,20           | 69,56    |
| $H=90\text{ mm}$ | 50       | 35,50                | 22,30           | 50,68    | 36,80                | 22,40           | 52,63    | ----                 | ----            | ----     | 48,90                | 22,50           | 70,20    |
|                  | 55       | 36,70                | 22,30           | 52,29    | 38,40                | 22,30           | 55,59    | ----                 | ----            | ----     | 54,00                | 22,90           | 78,67    |
|                  | 60       | 35,60                | 22,80           | 51,68    | 38,90                | 23,20           | 57,29    | ----                 | ----            | ----     | 56,40                | 23,90           | 85,16    |
|                  | 65       | 35,60                | 23,20           | 52,43    | 62,30                | 24,10           | 94,72    | ----                 | ----            | ----     | 71,50                | 24,30           | 109,47   |
|                  | 70       | 35,20                | 24,20           | 53,71    | 59,90                | 24,60           | 92,81    | ----                 | ----            | ----     | 66,40                | 24,60           | 102,55   |
|                  | 75       | 34,80                | 24,80           | 54,19    | 62,30                | 24,80           | 97,02    | ----                 | ----            | ----     | 65,00                | 25,10           | 102,25   |
|                  | 80       | 34,80                | 25,30           | 55,11    | ----                 | ----            | ----     | ----                 | ----            | ----     | 62,10                | 25,80           | 99,96    |
|                  | 85       | 33,10                | 26,00           | 53,62    | ----                 | ----            | ----     | ----                 | ----            | ----     | 64,10                | 26,20           | 104,85   |
|                  | 90       | 33,30                | 26,60           | 54,99    | ----                 | ----            | ----     | ----                 | ----            | ----     | 54,40                | 26,70           | 90,11    |

**Tableau 3:** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de l'inclinaison  
(Pour une hauteur de remplissage  $H=90\text{mm}$ ).

|         | $\alpha$ | $\Omega$ | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c1}$     | $\Omega$ | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c2}$      | $\Omega$ | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c3}$     | $\Omega$ | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c4}$      |
|---------|----------|----------|-----------------|--------------|----------|-----------------|---------------|----------|-----------------|--------------|----------|-----------------|---------------|
|         |          | (tr/min) |                 |              | (tr/min) |                 |               | (tr/min) |                 |              | (tr/min) |                 |               |
| H=80 mm | 0        | 29,70    | 24,10           | <b>45,16</b> | 33,20    | 24,10           | <b>50,48</b>  | 35,80    | 24,60           | <b>55,19</b> | 40,80    | 24,50           | <b>62,89</b>  |
|         | 5        | 29,40    | 24,80           | <b>45,78</b> | 31,90    | 24,90           | <b>49,85</b>  | 35,70    | 24,90           | <b>55,78</b> | 40,10    | 24,90           | <b>62,66</b>  |
|         | 10       | 29,50    | 25,00           | <b>46,25</b> | 31,50    | 25,10           | <b>49,55</b>  | 34,60    | 25,10           | <b>54,43</b> | 38,10    | 25,70           | <b>61,29</b>  |
|         | 15       | 29,00    | 25,90           | <b>46,83</b> | 31,70    | 25,90           | <b>51,19</b>  | 35,70    | 26,00           | <b>57,84</b> | 40,10    | 26,00           | <b>64,97</b>  |
|         | 20       | 30,10    | 26,10           | <b>48,92</b> | 32,50    | 26,10           | <b>52,98</b>  | 37,50    | 26,40           | <b>61,53</b> | 40,60    | 26,60           | <b>67,04</b>  |
|         | 25       | 32,90    | 25,30           | <b>52,10</b> | 34,80    | 25,30           | <b>55,11</b>  | 42,00    | 25,50           | <b>66,95</b> | 43,40    | 25,80           | <b>69,86</b>  |
|         | 30       | 33,40    | 26,00           | <b>54,11</b> | 34,70    | 26,10           | <b>55,91</b>  | 43,20    | 26,10           | <b>70,44</b> | 45,20    | 26,20           | <b>73,70</b>  |
|         | 35       | 33,90    | 27,60           | <b>57,73</b> | 35,60    | 27,80           | <b>61,00</b>  | 42,30    | 27,80           | <b>72,48</b> | 45,50    | 27,80           | <b>78,47</b>  |
|         | 40       | 42,10    | 22,60           | <b>60,66</b> | 43,40    | 22,70           | <b>62,77</b>  | 51,20    | 22,80           | <b>74,32</b> | 55,60    | 23,00           | <b>81,30</b>  |
|         | 45       | 41,10    | 23,90           | <b>62,39</b> | 54,70    | 24,10           | <b>83,17</b>  | ----     | ----            | ----         | 61,60    | 24,20           | <b>93,99</b>  |
|         | 50       | 44,50    | 21,80           | <b>62,22</b> | 63,50    | 22,00           | <b>89,46</b>  | ----     | ----            | ----         | 72,40    | 22,10           | <b>102,39</b> |
|         | 55       | 44,50    | 22,30           | <b>63,65</b> | 66,40    | 22,50           | <b>95,32</b>  | ----     | ----            | ----         | 90,10    | 22,90           | <b>131,26</b> |
|         | 60       | 46,60    | 21,70           | <b>64,90</b> | 68,30    | 23,20           | <b>100,59</b> | ----     | ----            | ----         | 102,10   | 21,40           | <b>140,55</b> |
|         | 65       | 48,70    | 21,40           | <b>67,04</b> | 74,60    | 21,60           | <b>103,50</b> | ----     | ----            | ----         | 100,00   | 21,60           | <b>138,74</b> |
|         | 70       | 49,80    | 21,80           | <b>69,63</b> | 75,70    | 21,80           | <b>105,84</b> | ----     | ----            | ----         | 97,10    | 22,10           | <b>137,32</b> |
|         | 75       | 48,30    | 21,90           | <b>67,79</b> | 77,50    | 22,00           | <b>109,19</b> | ----     | ----            | ----         | 92,50    | 22,00           | <b>130,32</b> |
|         | 80       | 44,10    | 21,80           | <b>61,66</b> | ----     | ----            | ----          | ----     | ----            | ----         | 86,20    | 21,90           | <b>120,98</b> |
|         | 85       | 43,10    | 21,60           | <b>60,72</b> | ----     | ----            | ----          | ----     | ----            | ----         | 81,90    | 21,80           | <b>114,51</b> |

**Tableau 4:** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de l'inclinaison  
(Pour une hauteur de remplissage H=80mm).

| $H=65\text{ mm}$ | $\Gamma = 13$ | $\alpha$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c1}$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c2}$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c3}$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c4}$ |
|------------------|---------------|----------|----------------------|-----------------|----------|----------------------|-----------------|----------|----------------------|-----------------|----------|----------------------|-----------------|----------|
|                  |               | 0        | 32,10                | 21,70           | 44,71    | 38,10                | 21,80           | 53,27    | 42,90                | 21,80           | 59,98    | 51,20                | 21,90           | 71,86    |
|                  |               | 5        | 32,10                | 21,80           | 45,05    | 37,70                | 21,90           | 52,91    | 42,70                | 21,90           | 59,93    | 52,30                | 22,00           | 73,54    |
|                  |               | 10       | 33,30                | 21,10           | 45,44    | 36,10                | 21,00           | 48,92    | 45,70                | 21,00           | 61,93    | 53,90                | 21,10           | 73,33    |
|                  |               | 15       | 34,40                | 21,00           | 46,61    | 37,90                | 21,00           | 51,36    | 47,50                | 21,00           | 63,34    | 54,20                | 20,60           | 72,27    |
|                  |               | 20       | 38,10                | 20,20           | 49,98    | 43,50                | 20,10           | 56,83    | 50,80                | 20,10           | 66,63    | 55,60                | 20,20           | 72,93    |
|                  |               | 25       | 41,80                | 19,40           | 53,01    | 57,20                | 19,50           | 72,85    | 64,30                | 19,50           | 81,90    | 69,10                | 19,50           | 88,39    |
|                  |               | 30       | 50,00                | 19,80           | 64,50    | 64,10                | 20,10           | 83,74    | 72,10                | 20,10           | 94,19    | 86,30                | 20,10           | 112,74   |
|                  |               | 35       | 59,70                | 20,00           | 79,28    | 74,10                | 20,50           | 98,41    | 89,50                | 19,80           | 115,46   | 101,10               | 20,00           | 131,52   |
|                  |               | 40       | 63,10                | 19,90           | 81,74    | 90,00                | 20,10           | 117,57   | 111,20               | 20,20           | 145,87   | 109,80               | 20,30           | 144,63   |
|                  |               | 45       | 65,10                | 20,60           | 86,81    | 96,30                | 20,60           | 123,85   | -----                | -----           | -----    | 107,10               | 20,70           | 143,97   |
|                  |               | 50       | 70,20                | 19,00           | 87,49    | 96,30                | 19,00           | 120,02   | -----                | -----           | -----    | -----                | -----           | -----    |
|                  |               | 55       | 69,10                | 20,50           | 91,77    | 74,60                | 20,90           | 100,69   | -----                | -----           | -----    | -----                | -----           | -----    |
|                  |               | 60       | 62,10                | 21,00           | 84,15    | 68,20                | 20,90           | 92,05    | -----                | -----           | -----    | -----                | -----           | -----    |
|                  |               | 65       | 63,90                | 20,20           | 83,82    | ----                 |                 | ----     | -----                | -----           | -----    | -----                | -----           | -----    |
|                  |               | 70       | 68,20                | 21,00           | 92,42    |                      |                 |          | -----                | -----           | -----    | -----                | -----           | -----    |

**Tableau 5 :** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de l'inclinaison  
(Pour une hauteur de remplissage  $H=65\text{mm}$ ).

| $H=50\text{ mm}$ | $\Gamma=10$ | $\alpha$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c1}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c2}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c3}$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T (^{\circ}C)$ | $T_{c4}$      |
|------------------|-------------|----------|----------------------|-----------------|---------------|----------------------|-----------------|--------------|----------------------|-----------------|----------|----------------------|-----------------|---------------|
|                  |             | 0        | 34,10                | 19,70           | <b>43,80</b>  | 36,10                | 19,70           | <b>46,37</b> | -----                | -----           | -----    | 42,80                | 19,90           | <b>55,45</b>  |
|                  |             | 5        | 33,50                | 20,20           | <b>44,13</b>  | 36,20                | 20,20           | <b>47,49</b> | -----                | -----           | -----    | 45,50                | 20,30           | <b>59,93</b>  |
|                  |             | 10       | 29,40                | 24,60           | <b>45,48</b>  | 36,50                | 24,60           | <b>56,46</b> | -----                | -----           | -----    | 45,50                | 24,50           | <b>70,15</b>  |
|                  |             | 15       | 30,40                | 24,50           | <b>46,86</b>  | 45,00                | 24,20           | <b>68,66</b> | -----                | -----           | -----    | 61,20                | 24,10           | <b>93,05</b>  |
|                  |             | 20       | 34,90                | 23,50           | <b>51,77</b>  | 58,40                | 23,60           | <b>87,25</b> | -----                | -----           | -----    | 117,70               | 22,20           | <b>167,08</b> |
|                  |             | 25       | 48,40                | 21,10           | <b>65,85</b>  | -----                | -----           | -----        | -----                | -----           | -----    | 145,20               | 20,70           | <b>194,40</b> |
|                  |             | 30       | 58,40                | 20,90           | <b>78,82</b>  | -----                | -----           | -----        | -----                | -----           | -----    | 148,40               | 21,20           | <b>202,19</b> |
|                  |             | 35       | 62,10                | 23,50           | <b>92,45</b>  | -----                | -----           | -----        | -----                | -----           | -----    | 120,30               | 23,40           | <b>178,46</b> |
|                  |             | 40       | 77,70                | 22,60           | <b>111,96</b> | -----                | -----           | -----        | -----                | -----           | -----    | -----                | -----           | -----         |
|                  |             | 45       | 86,10                | 21,90           | <b>120,84</b> | -----                | -----           | -----        | -----                | -----           | -----    | -----                | -----           | -----         |
|                  |             | 50       | 90,20                | 22,00           | <b>127,08</b> | -----                | -----           | -----        | -----                | -----           | -----    | -----                | -----           | -----         |

**Tableau 6 :** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de l'inclinaison  
(Pour une hauteur de remplissage  $H=50\text{mm}$ ).

| $H=40\text{ mm}$<br>$\Gamma=8$ | $\alpha$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T\ (^{\circ}\text{C})$ | $Tc_1$        | $\Omega$<br>(tr/min) | $T\ (^{\circ}\text{C})$ | $Tc_2$        | $\Omega$<br>(tr/min) | $T\ (^{\circ}\text{C})$ | $Tc_3$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T\ (^{\circ}\text{C})$ | $Tc_4$ |
|--------------------------------|----------|----------------------|-------------------------|---------------|----------------------|-------------------------|---------------|----------------------|-------------------------|--------|----------------------|-------------------------|--------|
|                                | 0        | 33,40                | 20,20                   | <b>43,81</b>  | 41,50                | 20,20                   | <b>54,44</b>  | -----                | -----                   | -----  | -----                | -----                   | -----  |
|                                | 5        | 34,60                | 20,20                   | <b>45,39</b>  | 46,60                | 20,20                   | <b>61,13</b>  | -----                | -----                   | -----  | -----                | -----                   | -----  |
|                                | 10       | 35,60                | 20,40                   | <b>47,35</b>  | 54,30                | 20,40                   | <b>71,82</b>  | -----                | -----                   | -----  | -----                | -----                   | -----  |
|                                | 15       | 39,10                | 20,20                   | <b>51,29</b>  | 76,70                | 20,10                   | <b>100,20</b> | -----                | -----                   | -----  | -----                | -----                   | -----  |
|                                | 20       | 45,70                | 20,20                   | <b>59,95</b>  | 96,00                | 20,20                   | <b>125,93</b> | -----                | -----                   | -----  | -----                | -----                   | -----  |
|                                | 25       | 55,10                | 23,00                   | <b>80,57</b>  | 104,80               | 22,40                   | <b>149,89</b> | -----                | -----                   | -----  | -----                | -----                   | -----  |
|                                | 30       | 63,30                | 22,70                   | <b>88,16</b>  | -----                | -----                   | -----         | -----                | -----                   | -----  | -----                | -----                   | -----  |
|                                | 35       | 67,50                | 22,20                   | <b>95,85</b>  | -----                | -----                   | -----         | -----                | -----                   | -----  | -----                | -----                   | -----  |
|                                | 40       | 76,90                | 20,80                   | <b>103,38</b> | -----                | -----                   | -----         | -----                | -----                   | -----  | -----                | -----                   | -----  |
|                                | 45       | 86,60                | 20,80                   | <b>116,41</b> | -----                | -----                   | -----         | -----                | -----                   | -----  | -----                | -----                   | -----  |

**Tableau 7:** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de l'inclinaison  
(Pour une hauteur de remplissage  $H=40\text{mm}$ ).

| $\alpha = 0^\circ$  | $H$ (mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$     |
|---------------------|----------|----------|----------------------|--------------------|--------------|----------------------|--------------------|--------------|----------------------|--------------------|--------------|----------------------|--------------------|--------------|
|                     | 100      | 20       | 27,00                | 27,10              | <b>43,37</b> | 30,20                | 27,10              | <b>47,17</b> | 35,50                | 27,10              | <b>54,43</b> | 39,60                | 27,10              | <b>61,85</b> |
|                     | 95       | 19       | 27,40                | 26,00              | <b>44,40</b> | 30,30                | 26,60              | <b>50,05</b> | 33,60                | 26,60              | <b>55,50</b> | 38,70                | 26,70              | <b>64,12</b> |
|                     | 90       | 18       | 30,10                | 22,90              | <b>43,86</b> | 33,60                | 23,10              | <b>49,32</b> | 38,10                | 23,10              | <b>55,93</b> | 42,90                | 23,20              | <b>63,20</b> |
|                     | 80       | 16       | 29,70                | 24,10              | <b>45,16</b> | 33,20                | 24,10              | <b>50,48</b> | 35,80                | 24,60              | <b>55,19</b> | 40,80                | 24,50              | <b>62,89</b> |
|                     | 65       | 13       | 32,10                | 21,70              | <b>44,71</b> | 38,10                | 21,80              | <b>53,27</b> | 42,90                | 21,80              | <b>59,98</b> | 51,20                | 21,90              | <b>71,86</b> |
|                     | 50       | 10       | 34,10                | 19,70              | <b>43,80</b> | 36,10                | 19,70              | <b>46,37</b> | -----                | -----              | -----        | 42,80                | 19,90              | <b>55,45</b> |
|                     | 40       | 8        | 33,40                | 20,20              | <b>43,81</b> | 41,50                | 20,20              | <b>54,44</b> | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----        |
| $\alpha = 5^\circ$  | $H$ (mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$     |
|                     | 100      | 20       |                      |                    | <b>43,31</b> |                      |                    | <b>47,45</b> |                      |                    | <b>54,71</b> |                      |                    | <b>62,05</b> |
|                     | 95       | 19       | 26,30                | 27,20              | <b>44,26</b> | 29,80                | 27,20              | <b>50,15</b> | 33,80                | 27,20              | <b>56,88</b> | 38,00                | 27,20              | <b>63,95</b> |
|                     | 90       | 18       | 29,90                | 23,40              | <b>44,37</b> | 34,00                | 24,00              | <b>51,53</b> | 35,50                | 24,10              | <b>54,45</b> | 41,10                | 24,70              | <b>63,81</b> |
|                     | 80       | 16       | 29,40                | 24,80              | <b>45,78</b> | 31,90                | 24,90              | <b>49,85</b> | 35,70                | 24,90              | <b>55,78</b> | 40,10                | 24,90              | <b>62,66</b> |
|                     | 65       | 13       | 32,10                | 21,80              | <b>45,05</b> | 37,70                | 21,90              | <b>52,91</b> | 42,70                | 21,90              | <b>59,93</b> | 52,30                | 22,00              | <b>73,54</b> |
|                     | 50       | 10       | 33,50                | 20,20              | <b>44,13</b> | 36,20                | 20,20              | <b>47,49</b> | -----                | -----              | -----        | 45,50                | 20,30              | <b>59,93</b> |
|                     | 40       | 8        | 34,60                | 20,20              | <b>45,39</b> | 46,60                | 20,20              | <b>61,13</b> | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----        |
| $\alpha = 10^\circ$ | $H$ (mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$     |
|                     | 100      | 20       | 25,90                | 27,00              | <b>43,26</b> | 28,20                | 27,10              | <b>47,24</b> | 32,70                | 27,10              | <b>54,78</b> | 37,10                | 27,10              | <b>62,16</b> |
|                     | 95       | 19       | 27,10                | 26,00              | <b>43,92</b> | 31,30                | 26,20              | <b>51,05</b> | 35,00                | 26,30              | <b>57,26</b> | 40,00                | 26,30              | <b>65,44</b> |
|                     | 90       | 18       | 29,70                | 23,70              | <b>44,54</b> | 33,90                | 23,70              | <b>50,84</b> | 37,20                | 23,70              | <b>55,79</b> | 42,50                | 24,10              | <b>63,12</b> |
|                     | 80       | 16       | 29,50                | 25,00              | <b>46,25</b> | 31,50                | 25,10              | <b>49,55</b> | 34,60                | 25,10              | <b>54,43</b> | 38,10                | 25,70              | <b>61,29</b> |
|                     | 65       | 13       | 33,30                | 21,10              | <b>45,44</b> | 36,10                | 21,00              | <b>48,92</b> | 45,70                | 21,00              | <b>61,93</b> | 53,90                | 21,10              | <b>73,33</b> |
|                     | 50       | 10       | 29,40                | 24,60              | <b>45,48</b> | 36,50                | 24,60              | <b>56,46</b> | -----                | -----              | -----        | 45,50                | 24,50              | <b>70,15</b> |
|                     | 40       | 8        | 35,60                | 20,40              | <b>47,35</b> | 54,30                | 20,40              | <b>71,82</b> | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----        |

**Tableau 8:** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de la hauteur de remplissage  
(Pour les angles d'inclinaison  $\alpha=0^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ).

| $\alpha = 15^\circ$ | $H$ (mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|---------------------|----------|----------|----------------------|--------------------|--------------|----------------------|--------------------|---------------|----------------------|--------------------|--------------|----------------------|--------------------|---------------|
|                     | 100      | 20       | 27,40                | 25,30              | <b>43,33</b> | 29,80                | 25,40              | <b>47,41</b>  | 34,20                | 25,60              | <b>54,65</b> | 40,00                | 24,60              | <b>61,89</b>  |
|                     | 95       | 19       | 26,70                | 26,40              | <b>43,82</b> | 28,90                | 26,40              | <b>47,43</b>  | 35,10                | 26,40              | <b>57,61</b> | 39,70                | 26,40              | <b>65,32</b>  |
|                     | 90       | 18       | 29,80                | 24,10              | <b>45,32</b> | 31,80                | 24,20              | <b>48,53</b>  | 35,00                | 24,30              | <b>53,91</b> | 42,40                | 24,40              | <b>65,15</b>  |
|                     | 80       | 16       | 29,00                | 25,90              | <b>46,83</b> | 31,70                | 25,90              | <b>51,19</b>  | 35,70                | 26,00              | <b>57,84</b> | 40,10                | 26,00              | <b>64,97</b>  |
|                     | 65       | 13       | 34,40                | 21,00              | <b>46,61</b> | 37,90                | 21,00              | <b>51,36</b>  | 47,50                | 21,00              | <b>63,34</b> | 54,20                | 20,60              | <b>72,27</b>  |
|                     | 50       | 10       | 30,40                | 24,50              | <b>46,86</b> | 45,00                | 24,20              | <b>68,66</b>  | -----                | -----              | -----        | 61,20                | 24,10              | <b>93,05</b>  |
|                     | 40       | 8        | 39,10                | 20,20              | <b>51,29</b> | 76,70                | 20,10              | <b>100,20</b> | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----         |
| $\alpha = 20^\circ$ | $H$ (mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|                     | 100      | 20       | 26,00                | 26,80              | <b>43,41</b> | 28,60                | 26,80              | <b>47,75</b>  | 32,60                | 26,90              | <b>54,61</b> | 36,80                | 26,90              | <b>61,64</b>  |
|                     | 95       | 19       | 26,80                | 26,30              | <b>43,85</b> | 29,00                | 26,30              | <b>47,45</b>  | 35,60                | 26,30              | <b>58,25</b> | 40,50                | 26,30              | <b>66,26</b>  |
|                     | 90       | 18       | 29,40                | 24,70              | <b>45,68</b> | 34,30                | 24,70              | <b>52,16</b>  | 35,50                | 24,80              | <b>55,30</b> | 41,20                | 24,90              | <b>64,55</b>  |
|                     | 80       | 16       | 30,10                | 26,10              | <b>48,92</b> | 32,50                | 26,10              | <b>52,98</b>  | 37,50                | 26,40              | <b>61,53</b> | 40,60                | 26,60              | <b>67,04</b>  |
|                     | 65       | 13       | 38,10                | 20,20              | <b>49,98</b> | 43,50                | 20,10              | <b>56,83</b>  | 50,80                | 20,10              | <b>66,63</b> | 55,60                | 20,20              | <b>72,93</b>  |
|                     | 50       | 10       | 34,90                | 23,50              | <b>51,77</b> | 58,40                | 23,60              | <b>87,25</b>  | -----                | -----              | -----        | 117,70               | 22,20              | <b>167,08</b> |
|                     | 40       | 8        | 45,70                | 20,20              | <b>59,95</b> | 96,00                | 20,20              | <b>125,93</b> | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----         |
| $\alpha = 25^\circ$ | $H$ (mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|                     | 100      | 27,78    | 26,10                | 26,9               | <b>43,35</b> | 27,6                 | 28,10              | <b>47,75</b>  | 36,70                | 24,30              | <b>56,60</b> | 39,10                | 25,20              | <b>61,90</b>  |
|                     | 95       | 26,82    | 29,00                | 23,90              | <b>43,80</b> | 30,40                | 24,10              | <b>46,23</b>  | 40,00                | 24,30              | <b>61,26</b> | 42,20                | 24,70              | <b>65,51</b>  |
|                     | 90       | 25,82    | 29,40                | 24,80              | <b>45,80</b> | 33,90                | 24,90              | <b>52,98</b>  | 36,70                | 25,00              | <b>57,55</b> | 41,30                | 25,10              | <b>64,89</b>  |
|                     | 80       | 23,74    | 32,90                | 25,30              | <b>52,10</b> | 34,80                | 25,30              | <b>55,11</b>  | 42,00                | 25,50              | <b>66,95</b> | 43,40                | 25,80              | <b>69,86</b>  |
|                     | 65       | 20,37    | 41,80                | 19,40              | <b>53,01</b> | 57,20                | 19,50              | <b>72,85</b>  | 64,30                | 19,50              | <b>81,90</b> | 69,10                | 19,50              | <b>88,39</b>  |
|                     | 50       | 16,67    | 48,40                | 21,10              | <b>65,85</b> | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----        | 145,20               | 20,70              | <b>194,40</b> |
|                     | 40       | 13,97    | 55,10                | 23,00              | <b>80,57</b> | 104,80               | 22,40              | <b>149,89</b> | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----         |

**Tableau 9:** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de la hauteur de remplissage  
(Pour les angles d'inclinaison  $\alpha=15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $25^\circ$ ).

| $\alpha = 30^\circ$ | $H$<br>(mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|---------------------|-------------|----------|----------------------|--------------------|---------------|----------------------|--------------------|---------------|----------------------|--------------------|---------------|----------------------|--------------------|---------------|
|                     | 100         | 20       | 25,60                | 27,20              | <b>43,29</b>  | 28,20                | 27,20              | <b>47,68</b>  | 32,40                | 27,20              | <b>54,78</b>  | 36,40                | 27,30              | <b>61,74</b>  |
|                     | 95          | 19       | 28,50                | 24,50              | <b>43,95</b>  | 30,20                | 24,50              | <b>46,57</b>  | 39,70                | 24,50              | <b>61,21</b>  | 42,80                | 24,40              | <b>65,77</b>  |
|                     | 90          | 18       | 31,70                | 22,90              | <b>46,20</b>  | 36,00                | 22,90              | <b>52,47</b>  | 40,70                | 23,90              | <b>61,47</b>  | 42,40                | 24,10              | <b>64,48</b>  |
|                     | 80          | 16       | 33,40                | 26,00              | <b>54,11</b>  | 34,70                | 26,10              | <b>55,91</b>  | 43,20                | 26,10              | <b>70,44</b>  | 45,20                | 26,20              | <b>73,70</b>  |
|                     | 65          | 13       | 50,00                | 19,80              | <b>64,50</b>  | 64,10                | 20,10              | <b>83,74</b>  | 72,10                | 20,10              | <b>94,19</b>  | 86,30                | 20,10              | <b>112,74</b> |
|                     | 50          | 10       | 58,40                | 20,90              | <b>78,82</b>  | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----         | 148,40               | 21,20              | <b>202,19</b> |
|                     | 40          | 8        | 63,30                | 22,70              | <b>88,16</b>  | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----         |
| $\alpha = 35^\circ$ | $H$<br>(mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|                     | 100         | 20       | 28,60                | 24,60              | <b>43,37</b>  | 30,60                | 24,60              | <b>47,33</b>  | 35,20                | 24,60              | <b>54,54</b>  | 39,80                | 24,60              | <b>61,56</b>  |
|                     | 95          | 19       | 29,70                | 23,30              | <b>43,91</b>  | 31,50                | 23,40              | <b>46,91</b>  | 39,40                | 23,70              | <b>59,09</b>  | 43,70                | 23,80              | <b>65,77</b>  |
|                     | 90          | 18       | 32,20                | 23,00              | <b>47,08</b>  | 32,90                | 23,00              | <b>48,12</b>  | 39,20                | 23,20              | <b>57,75</b>  | 44,50                | 23,80              | <b>66,97</b>  |
|                     | 80          | 16       | 33,90                | 27,60              | <b>57,73</b>  | 35,60                | 27,80              | <b>61,00</b>  | 42,30                | 27,80              | <b>72,48</b>  | 45,50                | 27,80              | <b>78,47</b>  |
|                     | 65          | 13       | 59,70                | 20,00              | <b>79,28</b>  | 74,10                | 20,50              | <b>98,41</b>  | 89,50                | 19,80              | <b>115,46</b> | 101,10               | 20,00              | <b>131,52</b> |
|                     | 50          | 10       | 62,10                | 23,50              | <b>92,45</b>  | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----         | 120,30               | 23,40              | <b>178,46</b> |
|                     | 40          | 8        | 67,50                | 22,20              | <b>95,85</b>  | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----         |
| $\alpha = 40^\circ$ | $H$<br>(mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|                     | 100         | 20       | 25,30                | 27,50              | <b>43,18</b>  | 28,50                | 26,60              | <b>47,29</b>  | 32,50                | 26,60              | <b>54,44</b>  | 36,80                | 26,90              | <b>61,64</b>  |
|                     | 95          | 19       | 30,80                | 22,30              | <b>43,90</b>  | 32,50                | 23,30              | <b>46,55</b>  | 42,70                | 23,00              | <b>62,45</b>  | 47,00                | 23,00              | <b>68,74</b>  |
|                     | 90          | 18       | 32,10                | 24,10              | <b>48,82</b>  | 35,00                | 24,10              | <b>53,23</b>  | 40,60                | 24,10              | <b>61,75</b>  | 42,50                | 24,40              | <b>65,31</b>  |
|                     | 80          | 16       | 42,10                | 22,60              | <b>60,66</b>  | 43,40                | 22,70              | <b>62,77</b>  | 51,20                | 22,80              | <b>74,32</b>  | 55,60                | 23,00              | <b>81,30</b>  |
|                     | 65          | 13       | 63,10                | 19,90              | <b>81,74</b>  | 90,00                | 20,10              | <b>117,57</b> | 111,20               | 20,20              | <b>145,87</b> | 109,80               | 20,30              | <b>144,63</b> |
|                     | 50          | 10       | 77,70                | 22,60              | <b>111,96</b> | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----         |
|                     | 40          | 8        | 76,90                | 20,80              | <b>103,38</b> | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----         |

**Tableau 10:** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de la hauteur de remplissage  
(Pour les angles d'inclinaison  $\alpha=30^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $40^\circ$ ).

|                     |             |          |                      |                    |               |                      |                    |               |                      |                    |              |                      |                    |               |
|---------------------|-------------|----------|----------------------|--------------------|---------------|----------------------|--------------------|---------------|----------------------|--------------------|--------------|----------------------|--------------------|---------------|
| $\alpha = 45^\circ$ | $H$<br>(mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|                     | 100         | 20       |                      |                    |               |                      |                    |               |                      |                    |              |                      |                    |               |
|                     | 95          | 19       | 31,70                | 22,00              | <b>44,67</b>  | 32,20                | 22,70              | <b>46,58</b>  | ----                 | ----               | ----         | 45,40                | 22,90              | <b>66,16</b>  |
|                     | 90          | 18       | 32,30                | 24,60              | <b>49,66</b>  | 36,00                | 22,20              | <b>50,92</b>  | ----                 | ----               | ----         | 49,00                | 22,20              | <b>69,56</b>  |
|                     | 80          | 16       | 41,10                | 23,90              | <b>62,39</b>  | 54,70                | 24,10              | <b>83,17</b>  | ----                 | ----               | ----         | 61,60                | 24,20              | <b>93,99</b>  |
|                     | 65          | 13       | 65,10                | 20,60              | <b>86,81</b>  | 96,30                | 20,60              | <b>123,85</b> | -----                | -----              | -----        | 107,10               | 20,70              | <b>143,97</b> |
|                     | 50          | 10       | 86,10                | 21,90              | <b>120,84</b> | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----         |
|                     | 40          | 8        | 86,60                | 20,80              | <b>116,41</b> | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----         |
| $\alpha = 50^\circ$ | $H$<br>(mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|                     | 100         | 20       | 25,40                | 27,90              | <b>43,61</b>  | 27,50                | 27,90              | <b>47,10</b>  | 32,00                | 27,90              | <b>54,98</b> | 36,00                | 28,00              | <b>61,38</b>  |
|                     | 95          | 19       | 30,60                | 23,00              | <b>44,75</b>  | 31,90                | 23,10              | <b>46,83</b>  | ----                 | ----               | ----         | 44,80                | 23,60              | <b>67,19</b>  |
|                     | 90          | 18       | 35,50                | 22,30              | <b>50,68</b>  | 36,80                | 22,40              | <b>52,63</b>  | ----                 | ----               | ----         | 48,90                | 22,50              | <b>70,20</b>  |
|                     | 80          | 16       | 44,50                | 21,80              | <b>62,22</b>  | 63,50                | 22,00              | <b>89,46</b>  | ----                 | ----               | ----         | 72,40                | 22,10              | <b>102,39</b> |
|                     | 65          | 13       | 70,20                | 19,00              | <b>87,49</b>  | 96,30                | 19,00              | <b>120,02</b> | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----         |
|                     | 50          | 10       | 90,20                | 22,00              | <b>127,08</b> | -----                | -----              | -----         | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----         |
| $\alpha = 55^\circ$ | $H$<br>(mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|                     | 100         | 20       |                      |                    |               |                      |                    |               |                      |                    |              |                      |                    |               |
|                     | 95          | 19       | 31,50                | 22,10              | <b>44,56</b>  | 33,10                | 22,10              | <b>46,68</b>  | ----                 | ----               | ----         | 43,40                | 22,40              | <b>62,09</b>  |
|                     | 90          | 18       | 36,70                | 22,30              | <b>52,29</b>  | 38,40                | 22,30              | <b>55,59</b>  | ----                 | ----               | ----         | 54,00                | 22,90              | <b>78,67</b>  |
|                     | 80          | 16       | 44,50                | 22,30              | <b>63,65</b>  | 66,40                | 22,50              | <b>95,32</b>  | ----                 | ----               | ----         | 90,10                | 22,90              | <b>131,26</b> |
|                     | 65          | 13       | 69,10                | 20,50              | <b>91,77</b>  | 74,60                | 20,90              | <b>100,69</b> | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----         |

**Tableau 11:** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de la hauteur de remplissage  
(Pour les angles d'inclinaison  $\alpha=45^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $55^\circ$ ).

|                     |             |          |                      |                    |              |                      |                    |               |                      |                    |              |                      |                    |               |
|---------------------|-------------|----------|----------------------|--------------------|--------------|----------------------|--------------------|---------------|----------------------|--------------------|--------------|----------------------|--------------------|---------------|
| $\alpha = 60^\circ$ | $H$<br>(mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|                     | 100         | 20       | 25,40                | 27,80              | <b>43,48</b> | 27,60                | 27,80              | <b>47,24</b>  | 31,70                | 27,90              | <b>54,43</b> | 35,70                | 27,90              | <b>61,29</b>  |
|                     | 95          | 19       | 31,60                | 22,40              | <b>45,21</b> | 32,70                | 22,80              | <b>47,48</b>  | ----                 | ----               | ----         | 49,40                | 23,10              | <b>72,51</b>  |
|                     | 90          | 18       | 35,60                | 22,80              | <b>51,68</b> | 38,90                | 23,20              | <b>57,29</b>  | ----                 | ----               | ----         | 56,40                | 23,90              | <b>85,16</b>  |
|                     | 80          | 16       | 46,60                | 21,70              | <b>64,90</b> | 68,30                | 23,20              | <b>100,59</b> | ----                 | ----               | ----         | 102,10               | 21,40              | <b>140,55</b> |
|                     | 65          | 13       | 62,10                | 21,00              | <b>84,15</b> | 68,20                | 20,90              | <b>92,05</b>  | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----         |
| $\alpha = 65^\circ$ | $H$<br>(mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|                     | 100         | 20       |                      |                    |              |                      |                    |               |                      |                    |              |                      |                    |               |
|                     | 95          | 19       | 31,60                | 23,30              | <b>46,72</b> | 33,30                | 23,40              | <b>49,41</b>  | ----                 | ----               | ----         | 54,80                | 23,70              | <b>82,18</b>  |
|                     | 90          | 18       | 35,60                | 23,20              | <b>52,43</b> | 62,30                | 24,10              | <b>94,72</b>  | ----                 | ----               | ----         | 71,50                | 24,30              | <b>109,47</b> |
|                     | 80          | 16       | 48,70                | 21,40              | <b>67,04</b> | 74,60                | 21,60              | <b>103,50</b> | ----                 | ----               | ----         | 100,00               | 21,60              | <b>138,74</b> |
|                     | 65          | 13       | 63,90                | 20,20              | <b>83,82</b> | ----                 |                    | ----          | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----         |
| $\alpha = 70^\circ$ | $H$<br>(mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c1}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c2}$      | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c3}$     | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $T_{c4}$      |
|                     | 100         | 20       | 25,60                | 27,80              | <b>43,24</b> | 27,70                | 27,80              | <b>47,42</b>  | 31,70                | 27,70              | <b>54,10</b> | 35,90                | 27,60              | <b>61,08</b>  |
|                     | 95          | 19       | 33,40                | 22,20              | <b>47,42</b> | 35,50                | 22,40              | <b>50,79</b>  | ----                 | ----               | ----         | 62,60                | 23,10              | <b>91,89</b>  |
|                     | 90          | 18       | 35,20                | 24,20              | <b>53,71</b> | 59,90                | 24,60              | <b>92,81</b>  | ----                 | ----               | ----         | 66,40                | 24,60              | <b>102,55</b> |
|                     | 80          | 16       | 49,80                | 21,80              | <b>69,63</b> | 75,70                | 21,80              | <b>105,84</b> | ----                 | ----               | ----         | 97,10                | 22,10              | <b>137,32</b> |
|                     | 65          | 13       | 68,20                | 21,00              | <b>92,42</b> |                      |                    |               | -----                | -----              | -----        | -----                | -----              | -----         |

**Tableau 12:** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de la hauteur de remplissage  
(Pour les angles d'inclinaison  $\alpha=60^\circ$ ,  $65^\circ$ ,  $70^\circ$ ).

|                     |          |          |                      |                    |        |                      |                    |        |                      |                    |        |                      |                    |        |
|---------------------|----------|----------|----------------------|--------------------|--------|----------------------|--------------------|--------|----------------------|--------------------|--------|----------------------|--------------------|--------|
| $\alpha = 75^\circ$ | $H$ (mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_1$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_2$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_3$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_4$ |
|                     | 100      | 20       |                      |                    |        |                      |                    |        |                      |                    |        |                      |                    |        |
|                     | 95       | 19       | 32,20                | 23,30              | 47,61  | 36,80                | 23,30              | 53,82  | ----                 | ----               | ----   | 61,30                | 24,10              | 93,55  |
|                     | 90       | 18       | 34,80                | 24,80              | 54,19  | 62,30                | 24,80              | 97,02  | ----                 | ----               | ----   | 65,00                | 25,10              | 102,25 |
|                     | 80       | 16       | 48,30                | 21,90              | 67,79  | 77,50                | 22,00              | 109,19 | ----                 | ----               | ----   | 92,50                | 22,00              | 130,32 |
| $\alpha = 80^\circ$ | $H$ (mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_1$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_2$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_3$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_4$ |
|                     | 100      | 20       | 26,80                | 26,20              | 43,64  | 28,90                | 26,20              | 47,06  | 33,10                | 26,10              | 53,72  | 37,80                | 26,10              | 61,35  |
|                     | 95       | 19       | 32,30                | 22,50              | 46,38  | 55,30                | 23,20              | 81,47  | ----                 | ----               | ----   | 61,70                | 23,50              | 91,88  |
|                     | 90       | 18       | 34,80                | 25,30              | 55,11  | ----                 | ----               | ----   | ----                 | ----               | ----   | 62,10                | 25,80              | 99,96  |
|                     | 80       | 16       | 44,10                | 21,80              | 61,66  | ----                 | ----               | ----   | ----                 | ----               | ----   | 86,20                | 21,90              | 120,98 |
| $\alpha = 85^\circ$ | $H$ (mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_1$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_2$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_3$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_4$ |
|                     | 100      | 20       |                      |                    |        |                      |                    |        |                      |                    |        |                      |                    |        |
|                     | 95       | 19       | 31,70                | 23,60              | 47,37  | ----                 | ----               | ----   | ----                 | ----               | ----   | 67,50                | 24,20              | 103,01 |
|                     | 90       | 18       | 33,10                | 26,00              | 53,62  | ----                 | ----               | ----   | ----                 | ----               | ----   | 64,10                | 26,20              | 104,85 |
|                     | 80       | 16       | 43,10                | 21,60              | 60,72  | ----                 | ----               | ----   | ----                 | ----               | ----   | 81,90                | 21,80              | 114,51 |
| $\alpha = 90^\circ$ | $H$ (mm) | $\Gamma$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_1$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_2$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_3$ | $\Omega$<br>(tr/min) | $T$ ( $^\circ C$ ) | $Tc_4$ |
|                     | 100      | 20       | 26,60                | 26,30              | 43,45  | 28,70                | 26,30              | 46,88  | 33,40                | 26,30              | 54,56  | 36,80                | 26,30              | 60,12  |
|                     | 95       | 19       | 29,80                | 24,30              | 45,64  | ----                 | ----               | ----   | ----                 | ----               | ----   | 61,70                | 24,50              | 95,17  |
|                     | 90       | 18       | 33,30                | 26,60              | 54,99  | ----                 | ----               | ----   | ----                 | ----               | ----   | 54,40                | 26,70              | 90,11  |

**Tableau 13:** Variation des nombres critiques de Taylor en fonction de la hauteur de remplissage  
(Pour l'angle d'inclinaison  $\alpha=75^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $85^\circ$ ,  $90^\circ$ ).

# ANNEXE II

## TABLEAUX DES CONSTANTES EMPIRIQUES

| $\begin{matrix} Ta_c \\ \Gamma \end{matrix}$ | $Tc_1$                                                                                                       | $Tc_2$                                                                                                       | $Tc_3$                                                                                                  | $Tc_4$                                                                                                  |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>20</b>                                    | <b>Loi linéaire :</b><br>$A = 43,29673$<br>$B = 0$                                                           | <b>Loi linéaire :</b><br>$A = 47,47473$<br>$B = 0$                                                           | <b>Loi linéaire :</b><br>$A = 54,73691$<br>$B = 0$                                                      | <b>Loi linéaire :</b><br>$A = 54,73691$<br>$B = 0$                                                      |
| <b>19</b>                                    | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 44.01111$<br>$\alpha_0 = 75.61723$<br>$C = 3.4569$<br>$D = 0.0031$        | <b>Loi Boltzmannienne :</b><br>$Tc_0 = 47.8636$<br>$\alpha_0 = 87.05353$<br>$E = -392.9183$<br>$F = 2.97056$ | <b>Loi linéaire :</b><br>$A = 55,76911$<br>$B = 0,15327$                                                | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 65.1744$<br>$\alpha_0 = 83.0686$<br>$C = 34.1977$<br>$D = 0.0026$    |
| <b>18</b>                                    | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 43.24664$<br>$\alpha_c = 84.57314$<br>$C = 11.3465$<br>$D = 0.0003$       | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 50.9255$<br>$\alpha_0 = 71.34855$<br>$C = 49.4886$<br>$D = 0.0094$        | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 54.87529$<br>$\alpha_0 = 39.06096$<br>$C = 7.2714$<br>$D = 0.0043$   | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 63.95686$<br>$\alpha_0 = 75.47512$<br>$C = 42.8188$<br>$D = 0.0023$  |
| <b>16</b>                                    | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 42.81618$<br>$\alpha_0 = 65.16601$<br>$C = 24.1343$<br>$D = 6.1518$       | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 49.2002$<br>$\alpha_0 = 69.77837$<br>$C = 58.8237$<br>$D = 0.0012$        | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 54.41288$<br>$\alpha_0 = 37.97056$<br>$C = 19.6171$<br>$D = 0.0032$  | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 63.12634$<br>$\alpha_0 = 68.37764$<br>$C = 76.9297$<br>$D = 0.0015$  |
| <b>13</b>                                    | <b>Loi Boltzmannienne :</b><br>$Tc_0 = 45.29364$<br>$\alpha_0 = 30.54072$<br>$E = -42.5871$<br>$F = 4.09772$ | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 50.53036$<br>$\alpha_0 = 45.68944$<br>$C = 72.6985$<br>$D = 0.0032$       | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 59.11874$<br>$\alpha_0 = 62.56333$<br>$C = 198.7367$<br>$D = 0.0016$ | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 71.415$<br>$\alpha_0 = 41.51166$<br>$C = 76.1436$<br>$D = 0.0053$    |
| <b>10</b>                                    | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 42.72447$<br>$\alpha_0 = 49.69376$<br>$C = 83.7164$<br>$D = 0.0022$       | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 59.11874$<br>$\alpha_0 = 62.56333$<br>$C = 198.7367$<br>$D = 0.0016$      | —                                                                                                       | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 52.31714$<br>$\alpha_0 = 28.56669$<br>$C = 156.8016$<br>$D = 0.0060$ |
| <b>8</b>                                     | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 39.12332$<br>$\alpha_0 = 48.84776$<br>$C = 76.2309$<br>$D = 0.0014$       | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$Tc_0 = 51.78453$<br>$\alpha_0 = 28.09248$<br>$C = 102.2597$<br>$D = 0.0046$      | —                                                                                                       | —                                                                                                       |

**Tableau 01 : Lois et valeurs numériques des constantes pour les tracés de  
 $Ta_c = Ta_c(\alpha)$**

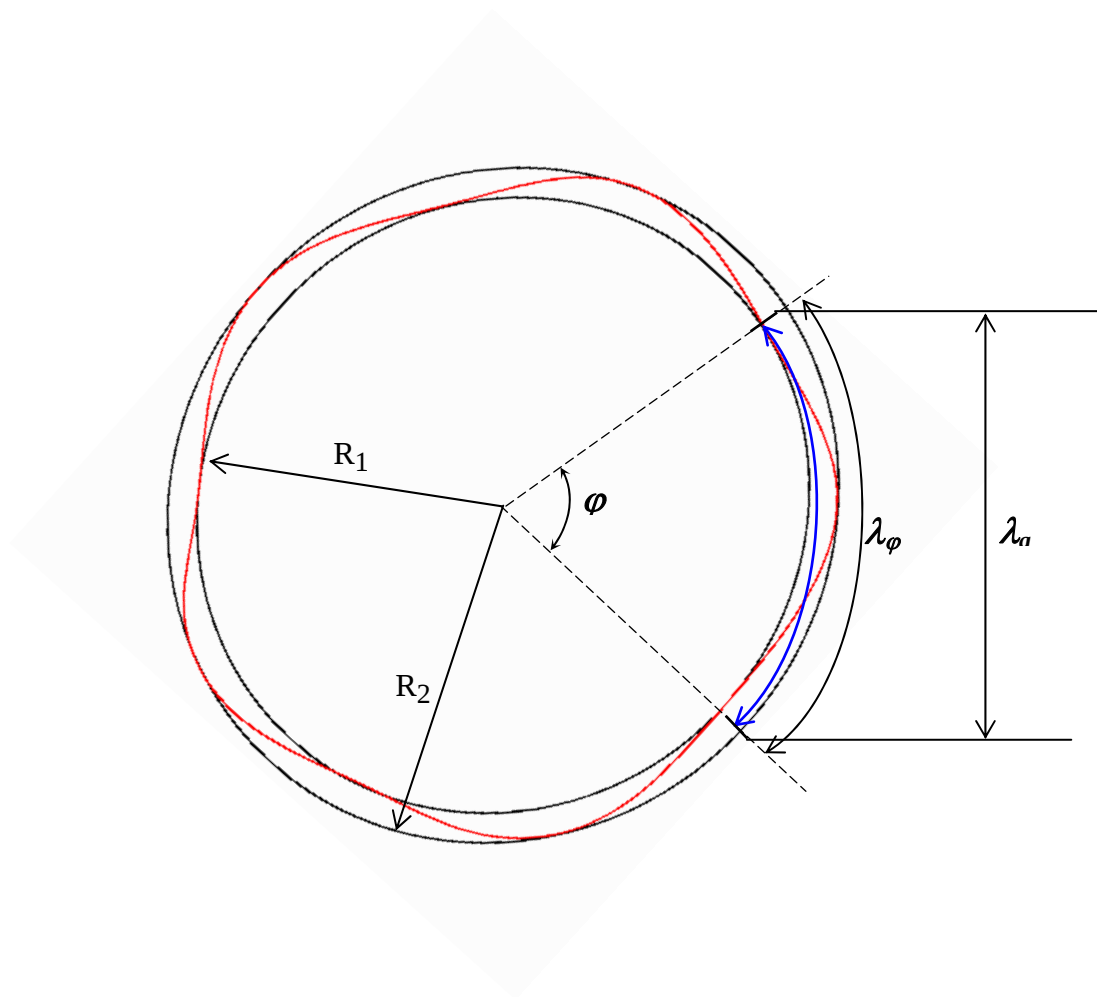
| $Ta_c$<br>$\alpha$ | $T_{c1}$                                                                  | $T_S$                                                                                 | $T_{SW}$                                                                  | $T_W$                                                                       |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 0                  | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 44,13$<br>$B' = 0$                         | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 54,17$<br>$B' = -0,27$                                 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 68,00$<br>$B' = -0,68$                     | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 59,36$<br>$B' = 0,24$                        |
| 5                  | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 45,93$<br>$B' = -0,10$                     | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 60,42$<br>$B' = -0,60$                                 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 67,25$<br>$B' = -0,63$                     | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 67,03$<br>$B' = -0,17$                       |
| 10                 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 48,95$<br>$B' = -0,25$                     | <b>Exponentielle :</b><br>$T_{C0}=49.35$<br>$\Gamma_0=1.63$<br>$G=3082.86$            | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 70,43$<br>$B' = -0,79$                     | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 80,98$<br>$B' = -0,94$                       |
| 15                 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 53,85$<br>$B' = -0,51$                     | <b>Exponentielle</b><br>$T_{C0}=47.83$<br>$\Gamma_0=2.12$<br>$G=2286.65$              | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 77,34$<br>$B' = -1,15$                     | <b>Exponentielle</b><br>$T_{C0}= 62.97$<br>$\Gamma_0=2.53$<br>$G=1562.68$   |
| 20                 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 66,49$<br>$B' = -1,17$                     | <b>Exponentielle</b><br>$T_{C0}=47.44$<br>$\Gamma_0=2.73$<br>$G=1474.26$              | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 88,13$<br>$B' = -1,68$                     | <b>Exponentielle</b><br>$T_{C0}= 64.00$<br>$\Gamma_0=1.34$<br>$G=178537.86$ |
| 25                 | <b>Exponentielle</b><br>$T_{C0}=41.39$<br>$\Gamma_0= 4.62$<br>$G=219.10$  | <b>Exponentielle</b><br>$T_{C0}=41.41$<br>$\Gamma_0= 4.01$<br>$G=795.88$              | <b>Exponentielle</b><br>$T_{C0}=52.21$<br>$\Gamma_0= 3.90$<br>$G=834.18$  | <b>Exponentielle</b><br>$T_{C0}=63.36$<br>$\Gamma_0= 1.84$<br>$G=30331.77$  |
| 30                 | <b>Exponentielle</b><br>$T_{C0}= 3.75$<br>$\Gamma_0= 15.06$<br>$G=144.35$ | <b>Croissance exponentielle</b><br>$T_{C0}= 45.12$<br>$\Gamma_0= 2.47$<br>$G=7469.00$ | <b>Exponentielle</b><br>$T_{C0}= 45.84$<br>$\Gamma_0= 4.57$<br>$G=828.71$ | <b>Exponentielle</b><br>$T_{C0}=55.36$<br>$\Gamma_0= 3.09$<br>$G=3758.58$   |

|    |                                                                                                 |                                                                                                    |                                                                                    |                                                                                                    |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 35 | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}= 98,11$<br>$\Gamma_0= 19,61$<br>$C' = -54,76$                | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}= 228,86$<br>$\Gamma_0= 19,07$<br>$C' = -182.56$<br>$D' = 0.01$  | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}= 259.00$<br>$\Gamma_0= 19.26$<br>$C' = -203.83$ | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}= 244.84$<br>$\Gamma_0= 19.09$<br>$C' = -182.43$                 |
| 40 | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}=111,80$<br>$\Gamma_0= 19,50$<br>$C' = -68.16$<br>$D' = 0.02$ | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}= 332,68$<br>$\Gamma_0=19,04$<br>$C' = -285.97$<br>$D' = 0.008$  | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}= 433,11$<br>$\Gamma_0= 18,94$<br>$C' = -376,77$ | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}= 382,19$<br>$\Gamma_0= 18,94$<br>$C' = -319,46$<br>$D' = 0.008$ |
| 45 | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}= 126.83$<br>$\Gamma_0=19.54$<br>$C' = -82.72$                | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}= 136,63$<br>$\Gamma_0=19,24$<br>$C' = -91.55$<br>$D' = 0.05$    | —                                                                                  | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}= 407.06$<br>$\Gamma_0=20,16$<br>$C' = -345.04$                  |
| 50 | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}=292.28$<br>$\Gamma_0=20.41$<br>$C' = 246.34$                 | <b>Loi Boltzmannienne :</b><br>$T_{C0}=46.01$<br>$\Gamma_0=16.24$<br>$E' = 74.92$<br>$F' = 0.74$   | —                                                                                  | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}=213.31$<br>$\Gamma_0=19.81$<br>$C' = 151.00$                    |
| 55 | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}=193.43$<br>$\Gamma_0=21.22$<br>$C' = -151,73$                | <b>Loi Boltzmannienne :</b><br>$T_{C0}=46.19$<br>$\Gamma_0=17.17$<br>$E' = 54.42$<br>$F' = 0.52$   | —                                                                                  | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}=178.75$<br>$\Gamma_0=19.55$<br>$C' = -119.25$                   |
| 60 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 162,22$<br>$B' = -6,07$                                          | <b>Comportement polynomial</b>                                                                     | —                                                                                  | <b>Loi Gaussienne :</b><br>$T_{C0}=326,65$<br>$\Gamma_0=20,30$<br>$C' = -264,68$                   |
| 65 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 161,90$<br>$B' = -6,00$                                          | <b>Loi Boltzmannienne :</b><br>$T_{C0}= 47,18$<br>$\Gamma_0= 18,35$<br>$E' = 56,32$<br>$F' = 0.20$ | —                                                                                  | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 454,44$<br>$B' = -19,54$                                            |
| 70 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 185,44$<br>$B' = -7,22$                                          | <b>Loi Boltzmannienne :</b><br>$T_{C0}=47.35$<br>$\Gamma_0=18.31$<br>$E' = 58,49$<br>$F' = 0.25$   | —                                                                                  | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 429,42$<br>$B' = -18,15$                                            |

|    |                                                        |                                                                                                      |   |                                                                                         |
|----|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 75 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 166,54$<br>$B' = -6,21$ | <b>Loi Boltzmannienne :</b><br>$T_{C0} = 46.93$<br>$\Gamma_0 = 18.40$<br>$E' = 62,28$<br>$F' = 0.28$ | — | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 392,82$<br>$B' = -16,22$                                 |
| 80 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 137,96$<br>$B' = -4,74$ | <b>2 Points<br/>expérimentaux</b>                                                                    | — | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 345,75$<br>$B' = -13,82$                                 |
| 85 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 131,40$<br>$B' = -4,39$ | —                                                                                                    | — | <b>Loi<br/>Gaussienne :</b><br>$T_{C0} = 109,82$<br>$\Gamma_0 = 20,37$<br>$C' = -57,01$ |
| 90 | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 157,66$<br>$B' = -5,77$ | —                                                                                                    | — | <b>Loi linéaire :</b><br>$A' = 366,70$<br>$B' = -15,00$                                 |

Tableau 02 : Lois et valeurs numériques des constantes pour les tracés de  
 $Ta_c = Ta_c(\Gamma)$

# ANNEXE III



### Calcul du nombre d'ondes circonférentielle $m$ :

Mesure de la longueur circonférentielles

Elle se calcule par la relation suivante :

$$\lambda_{\varphi} = 2R_2 \text{Arc sin}\left(\frac{\lambda_a}{2R_2}\right)$$

Par la suite, le nombre d'onde  $m$  se déduit par :

$$m = \frac{2\pi R_2}{\lambda_{\varphi}}$$

Avec :

$\lambda_a$  : longueur d'onde apparente

$\lambda_{\varphi}$  : longueur d'onde réelle

## «تأثير المميزات الفضائية و الزمنية على شروط ظهور الحالات اللاستقرارية و الاضطرابية بين كرتين متمركزتين في حالة الدوران»

إن الظواهر اللاستقرارية لجريان الموائع و علاقتهم المعقدة مع انتقال مجمل السيلان و توقع خصائصها، الاهتمام بمعرفة معمقة للآليات يظهر واضحا خاصة عندما نريد فهم بعض الظواهر الطبيعية (علم البحار، علم المناخ، الفلك)، أو لضمان التحكم و مراقبة العمليات الصناعية (علم الطيران، علم الاحتكاك، روبوتيك) وكذلك في فيزياء الجو (علم الأرصاد الجوية العالمية)، في الفلك (ديناميكية النجوم) وفي الجي و فيزياء... الهدف من هذا البحث هو القيام ب دراسة نظرية و تجريبية من أجل تحليل قوانين تصرف الحركة (الخصائص و الآليات) و المعرفة في النظام بين كرتين متمركزتين، وبدوران الداخلية و الخارجية ثابتة.

في المستوى التجريبي، يجب تعيين العتبات الحرجة لظهور الحالات اللاستقرارية و إيضاح طبيعة بُنيته، و ذلك من خلال الشروط التجريبية التالية:

- تأثير الارتفاع الأقصى للمائع على نظام السيلان .
  - تأثير ارتفاع المائع المعطى (سيلان بالسطوح الحرة) .
  - تأثير ميلان الجهاز التجريبي بأخذ بعين الاعتبار تأثير الجاذبية على نشأة الحالات اللاستقرارية و شروط ظهور ال اختلاط ال كامل.
- في المستوى النظري، يخص عرض نموذج ظاهري، من أجل تعيين توزيع المركبات الثلاث لحقل السرعة في حالة النظام الأول القاعدي.
- كلمات المفتاح:** سيلان بين كرتين متمركزتين – أمواج – اللاستقرارية – اختلاط كامل – الاضطراب – علم الاحتكاك – ديناميكية النجوم – دينامو

## « EFFECT OF THE SPATIALLY AND TEMPORALLY CHARACTERISTICS ON THE CONDITIONS OF APPEARANCE OF INSTABILITIES AND OF TURBULENCE BETWEEN COAXIAL ROTATING SPHERES »

The phenomena of instabilities hydrodynamics and their relation with the transition laminar-turbulent via the chaos have an essential importance in the definition of most of the flows and the prediction of their properties. The interest of a detailed knowledge of the mechanisms seems evident, especially when it is a question of understanding some natural phenomena (oceanography, meteorology and astrophysical) or of making the best control of the industrial operations (in Aeronautics, Lubrication, Centrifugation, Robotics, in Physics of the Atmosphere (world meteorology), in Astrophysics (dynamics of stars), in Geophysics (Dynamo Effect) etc....).

This subject has for objective, the development of a theoretical and experimental study dedicated to the analysis of the laws of behaviour of motion (properties and mechanism) defines in configuration between coaxial spheres, when the inner is in rotation and the outer being maintained fixes.

In the experimental phase, it is to determine by visualization the critical thresholds of appearance of the instabilities and of clarifying the nature and their structure (axial waves, azimuthal waves, Spiral Wavy mode, etc.) in three conditions of following attempts:

- Effect of maximal the rate of filling the system of flow.
- Effect of a given rate of filling (flow on free surface).
- Effect of the inclination of the device and the revealing of the influence of the gravity on the birth of the instabilities and the conditions of appearance of the chaos.

In the theoretical plan, a phenomenological model is proposed to determine the distribution of three components of the field of velocity in steady state flow. The effect of gravity was studied numerically to improve the experimental results, simultaneous, we obtain the distribution of the tangential velocity which compared to the phenomenological results and experimental results obtain by M. Wimmer and K. Nakabayashi.

**Keywords:** flow between coaxial rotating spheres – Waves – Instabilities – Chaos - Turbulence - visualization – Lubrication – dynamo – dynamics of stars .

## « EFFETS DES CARACTERISTIQUES SPATIO-TEMPORELLES SUR LES CONDITIONS D'APPARITION DES INSTABILITES ET DE LA TURBULENCE ENTRE SPHERES COAXIALES EN ROTATIONS »

Les phénomènes d'instabilités hydrodynamiques et leur relation complexe avec la transition laminaire-turbulent via le chaos revêtent une importance primordiale dans la définition de la plupart des écoulements et la prévision de leurs propriétés. L'intérêt d'une connaissance approfondie des mécanismes mis en cause apparaît évident, notamment lorsqu'il s'agit de mieux comprendre certains phénomènes naturels (océanographie, météorologie et astrophysiques...) ou de s'assurer la maîtrise et le contrôle des opérations industrielles (en Aéronautique, Tribologie, Centrifugation, Robotique, en Physique de l'Atmosphère (météorologie mondiale), en Astrophysique (dynamique des étoiles), en Géophysique (effet dynamo / manteau asténoïdal) etc....).

Ce sujet a pour objectif le développement d'une étude théorique et expérimentale dédiée à l'analyse des lois de comportement de mouvement (propriétés et mécanisme) défini dans la configuration entre sphères coaxiales dont l'intérieure est en rotation et l'extérieure étant maintenue fixe.

Au plan expérimental, il s'agit de déterminer par visualisation les seuils critiques d'apparition des instabilités et de préciser la nature et leur structure (onde stationnaire axiale, onde stationnaire azimutale, Wavy mode Spiral, etc....) dans les trois conditions d'essais suivantes:

- Effet du taux de remplissage maximal (écoulement en charge) sur le système d'écoulement.
- Effet d'un taux de remplissage donné (écoulement à surface libre).
- Effet de l'inclinaison du dispositif et mise en évidence de l'influence de la gravité sur la naissance des instabilités et les conditions d'apparition du chaos.

Au plan théorique, une modélisation phénoménologique est proposée en vue de déterminer la distribution des trois composantes du champ de vitesse en régime laminaire de base. Une modélisation numérique est mise en œuvre afin de d'étudier l'effet de la gravité sur la structure des cellules de Taylor et déterminer le profil des vitesses tangentielles moyennes, comparé par la suite au profil calculé phénoménologiquement ainsi qu'au résultats expérimentaux obtenus par M. Wimmer et K. Nakabayashi.

**Mots clefs :** écoulements entre sphères coaxiales rotatifs – ondes – instabilités – Chaos – turbulence – visualisation – modélisation – tribologie – dynamo – dynamique des étoiles