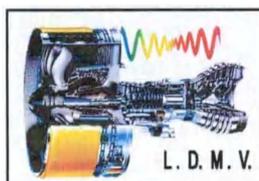


République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique Université
M'hamed BOUGARA Boumerdès



Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département : Maintenance Industrielle
Laboratoire : Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique



Mémoire de Magister
Filière : Génie Mécanique
Option: Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique

Thème

Etude du comportement dynamique du rotor anti-couple d'un l'hélicoptère

Présenté par : **LECHEB Samir**

Soutenu le : 23 Juin 2008

Devant le jury composé de :

MM. S. RECHAK	Professeur	ENP Alger	Président
A. NOUR	Professeur	UMB Boumerdès	Encadreur
A. KHALFI	Professeur	UDL Sidi Bel Abbès	Examineur
B. NECIB	Professeur	UMM Constantine	Examineur
M.O. SI-CHAIB	Maître de Conférences	UMB Boumerdès	Examineur

Année universitaire 2007 /2008

Remerciements

Ce travail a été accompli au laboratoire Dynamique des moteurs et vibro-acoustique de l'Université M'hamed Bougara de Boumerdès, Faculté des Sciences de l'Ingénieur (F.S.I.).

Je tiens tout d'abord à remercier en premier lieu Allah, le tout puissant, de m'avoir donné autant de courage pour atteindre ce but.

Mes premiers remerciements vont naturellement à mon directeur de mémoire, le Professeur NOUR Abdelkader pour ses conseils et le partage de ses compétences scientifiques. Ce fut un plaisir de travailler avec lui. J'ai également apprécié la grande liberté qu'il m'a accordée dans la gestion de mon mémoire ainsi que sa passion pour la recherche et sa bonne humeur toujours présente. Bref, merci de m'avoir supporté ces deux années et d'en avoir fait une période plus qu'agréable pour moi.

Merci également au président du jury Le Professeur RECHAK Said d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement Le Professeur KHALFI Ali de l'université Djillali Liabbès de sidi Bel Abbès et le Professeur NECIB Brahim de l'université de Mohamed Mentouri de Constantine, d'avoir accepté de faire parti du jury d'évaluation de ce mémoire, et pour leur déplacement et le temps qu'ils ont consacré à l'étude de ce document.

Je remercie notre cher enseignant Mr M.O. SI-CHAIB pour son aide le long de ma formation et pour sa participation au jury et pour ces critiques pertinentes.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Mr. Saadouni yacine de l'EMP pour l'aide et l'encouragement qu'il m'a donné.

Il convient également de saluer Mr. Chikh Nouredine, enseignant à l'Université de Boumerdès pour ses conseils scientifiques appréciables.

Je remercie M^{eme} YAHIAOUI Aicha pour ces conseils et sa participation dans mes études.

Je remercie également le chef de département Mr BOUAMRANE qui ma beaucoup aidé.

Je tiens aussi à remercier tous les enseignants qui ont assuré notre formation au cours de l'année théorique,

Un remerciement spécial au cher frère Ahmed CHELLIL, qui par sa disponibilité permanente a permis à ce travail d'aboutir, tout en gardent une fidèle amitié durant plus de cinq ans.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du laboratoire, qui durant ces deux années mon permis de travailler dans un cadre agréable. Merci à tous mes collègues étudiants, les anciens et ceux encore en activité.

J'adresse un grand merci à mes collègues en post-graduation : toufik, mohand, ahmed, Mourad, malik, hamid et nadia.

Je tiens à remercier particulièrement, Brahim, Ahmed, Abdou, Sofien pour beaucoup de choses,

Que tous mes ami(e) s sans exception, ils sont nombreux, je ne peux tous les citer mais je ne peux les oublier.

Je remercie tous les gens de mon passage, que j'ai connus ou rencontrés dans ma vie, sociale et universitaire, et à tous ceux que je n'ai pas cités avec toutes mes excuses.

Mes reconnaissances vont également à toutes les personnes des l'Université, M'hamed Bougara de Boumerdès, surtout les personnes des bibliothèques, Ex-INGM et centrale, merci pour leur disponibilité.

Enfin, que toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail, soient chaleureusement remerciées.

Dédicace

Avant tout propos, je tiens à rendre grâce à Allah qui m'a guidé sur la bonne voie.

Je tiens à rendre hommage à mon père qui a su et avoir pu faire de moi l'homme que je suis, à ma mère pour son fidèle assistance et son soutien tout le long de ma formation, à mes frères et ma soeur.

*Encore une fois, un grand merci à toute ma famille à qui je dédie ce présent travail.
à tous mes ami(e)s sans exception.*

Samir

هذا العمل يمثل دراسة نظرية و رقمية على السلوك الديناميكي الانحنائي للدوار المضاد للعزم للمروحية بتعيين خصائص العناصر المكونة للدوار. يتوصل في إيجاد عبارات الطاقة الحركية و التشويحية و كذلك العمل المقدر للعناصر الأساسية: قرص، عمود، المحمل، عدم التوازن.

هناك طريقتان نظريتان يمكن استعمالهما: طريقة ريلي ريتز التي تمكن من وصف الظواهر و طريقة العناصر المنتهية التي تمكن من معرفة السلوك الديناميكي للألات الحقيقية. و نستنتج معادلات الحركة وفق طريقة لقرنج. المحاكات الرقمية تمكننا من مشاهدة و معرفة التحليل الشكلي، التحليل النقطي و الاستجابات للتنبهات المختلفة.

كلمات المفاتيح: ديناميك، انحناء، الدوار المضاد للعزم، مروحية، طاقة، العناصر المنتهية.

Résumé

Ce travail propose une étude théorique et numérique sur le comportement dynamique en flexion de rotor anti-couple de l'hélicoptère. On détermine les caractéristiques des éléments de rotor. Il s'agit d'évaluer les expressions des énergies cinétiques et de déformation ainsi que le travail virtuel correspondant aux éléments de base : disque, arbre, palier et balourd.

Deux méthodes théoriques sont utilisées : la méthode de Rayleigh-Ritz, lorsqu' il s'agit de mettre en évidence les phénomènes, et la méthode des éléments finis quand il s'agit de prévoir le comportement dynamique des machines réelles. On déduit les équations du mouvement à partir des équations de Lagrange. La simulation numérique nous permet d'observer et mettre en évidence: l'analyse modale, l'analyse nodale et les réponses à diverses excitations.

Mots Clés : dynamique, flexion, rotor anti-couple, hélicoptère, énergie, éléments finis.

Abstract

This work proposes a theoretical and numerical study on the dynamic behavior flexion of anti-torque rotor of the helicopter. We determine the characteristics of the elements of rotor. We determine the expressions of the kinetic energies and deformation as well as virtual work corresponding to the basic element: disc, axe, bearing, and unbalance.

Two theoretical methods are used: Rayleigh-Ritz method when we study the phenomenon and the finite element method when it acts to envisage the dynamic behavior of the real machine. We deduce the equations of motion starting from the Lagrange equations. The digital simulation to allow us to observe: modal analysis, nodal analysis and responses to various excitations.

Key words: dynamic, flexion, anti-torque rotor, helicopter, energy, finite element.

Nomenclature

c	Amortissement
$[C]$	Matrice d'amortissement
E	Module d'élasticité
f_i	Fréquence propre
I	Moment d'inertie
I_p	Moment d'inertie polaire
I_a	Moment d'inertie transverse de l'arbre
j	Nombres complexes
L	Longueur
M_a	Masse de l'arbre
M_d	Masse de disque
M_b	Masse de balourd
$N_i(y)$	Fonction de forme
N	Vitesse de rotation
$\{q_i\}$	Cordonnées généralisés
\ddot{q}, \dot{q} et q	Vecteur accélération, vitesse et déplacements
$R_S(x_S, y_S, z_S)$	Repère lié au support indéformable
$R_0(x_0, y_0, z_0)$	Repère galiléen
$R(x, y, z)$	Repère courant
S_a	Section de l'arbre
T	Énergie cinétique
T_d	Énergie cinétique de disque
T_b	Énergie cinétique de balourd
t	Temps
U	Énergie potentielle
u et w	Coordonnées des points de la ligne moyenne dans le repère R_S
u^* et w^*	Coordonnées des points de la ligne moyenne dans le repère R
e	Excentrement

Symboles grecques

ω	Vitesse de rotation
Ω	Pulsation propre
Ω_c	Pulsation critique
ε	Déformation
σ	Contrainte de flexion
τ	Volume
δ	Vecteur des déplacements nodaux
ρ	Masse volumique
ψ	Angle de précession

θ	Angle de nutation
φ	Angle de rotation propre
α	Angle rotation autour de z_0
β	Angle rotation autour de y_0 autour du nouvel axe x'
γ	Angle rotation autour de x_0 autour de l'axe final y

Liste des figures

- Fig.I.1 Configuration de référence
- Fig.I.2 Configuration déformée
- Fig.I.3 Diagramme de Campbell pour un rotor axisymétrique
- Fig.I.4 Diagramme de Campbell pour un rotor avec des supports orthotropes
- Fig.II.1 Définition des repères
- Fig.II.2 Repères intermédiaires définie le passage du repère R_S lié au support au repère R lié à l'arbre déformé
- Fig.II.3 Repères intermédiaires définie le passage du repère galiléen R_0 au repère R_S lié au support
- Fig.II.4 Section d'arbre infiniment mince
- Fig.II.5 Masse de balourd
- Fig.II.6 Amortissement et raideur de palier
- Fig.II.7 Rotor simple
- Fig.II.8 Degré de liberté d'une poutre.
- Fig.III.1. Degrés de liberté d'un élément de disque
- Fig.III.2 Degrés de liberté d'un élément d'arbre
- Fig.IV.1 Dessin de L. de Vinci pour une machine volante à voilure tournante
- Fig.IV.2 Vol stationnaire
- Fig.IV.3 Mouvements de l'hélicoptère
- Fig.IV.4 Mouvement d'air descendant au passage des pales
- Fig.IV.5 Flux d'air autour d'une aile
- Fig.IV.6 Forces agissant sur une aile
- Fig.IV.7 La force centrifuge, poussée et résultante
- Fig.V.1 Schématisation du rotor anti-couple à neuf nœuds
- Fig.V.2 Modèle élément fin
- Fig.V.3 Paliers 1 et 2 du rotor anti-couple
- Fig.V.4 Rotor anti-couple à 4 ailettes
- Fig.V.5 Maillage de la section de la pale Profile d'aile
- Fig.V.6 Pale modèle éléments finis
- Fig.V.7 Élément de maillage type BEAM189
- Fig.V.8 Maillage de l'arbre
- Fig.V.9 Élément de maillage type BEAM189
- Fig.V.10 Les conditions aux limites présentées sur le dispositif
- Fig.V.11 Conditions aux limites
- Fig.V.12 Diagramme de Campbell
- Fig.V.14 Mode 1 (partie réelle)
- Fig.V.15 Mode 2 (partie imaginaire)
- Fig.V.16 Mode 3 (partie imaginaire)
- Fig.V.17 Mode 4 (partie réelle)
- Fig.V.18 Orbite modale du rotor anti-couple
- Fig.V.15 Présentation des forces harmoniques
- Fig.V.19 Spectre de réponse harmonique
- Fig.V.20 Balourd sur le disque
- Fig.V.21 Amortissement en réponse de balourd
- Fig.V.22 Graphe variable (U_y , U_z)
- Fig.V.23 Amplitude en fonction de la fréquence
- Fig.V.24 Spectre en réponse de balourd
- Fig.V.25 Contrainte suivant x
- Fig.V.26 Contrainte principale suivant x

Fig.V.27 Contrainte principale suivant y
Fig.V.28 Contrainte principale suivant z
Fig.V.29 Critère de Von Misés mode 1
Fig.V.30 Critère de Von Misés mode 1
Fig.V.31 Déplacement suivant x
Fig.V.32 Déplacement suivant z
Fig.V.33 Mode 1
Fig.V.34 Mode 2
Fig.V.35 Mode 3
Fig.V.36 Mode 4
Fig.V.37 Mode 5
Fig.V.38 Déplacement suivant x
Fig.V.39 Déplacement suivant y
Fig.V.40 Déplacement suivant z
Fig.V.41 Déplacement totale
Fig.V.42 Déplacement nodale (Mode 3)
Fig.V.43 La somme des déplacements USUM
Fig.V.44 Evolution de la contrainte élémentaire
Fig.V.45 Contrainte mode 3
Fig.V.46 Déplacement suivant y et z

SOMMAIRE

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I. Recherche bibliographique

Introduction	3
I.1 La modélisation dynamique des corps élastiques.....	5
I.1.1 Cinématique d'une particule du solide	5
I.1.2 Dynamique d'un corps déformable	6
I.2 Quelques phénomènes importants en dynamique des rotors.....	9
I.2.1 Les vitesses critiques.....	9
I.2.2 L'instabilité due à l'amortissement tournant.....	10
I.2.3 Les dissymétries.....	11
I.3. Notion de non linéarité des rotors	12

Chapitre II. Formulation des équations de mouvement

Introduction	13
II.1. Hypothèses	13
II.2. Détermination des énergies des éléments de rotor.....	14
II.2.1 Calculs des vitesses.....	14
II.2.2 Disque	19
II.2.3 Arbre.....	20
II.2.4 Balourd.....	24
II.2.5 Paliers.....	26
II.3 Type de rotor simple.....	27
II.3.1 Détermination des équations.....	27
II.3.2 Energie cinétique du rotor.....	28
II.3.3 Energie de déformation.....	31
II.3.4 Equation du mouvement.....	31

Chapitre III. Modélisation des rotors par Eléments Finis

Introduction	33
III.1 Formulation éléments finis	33
III.1.1 Disque	33
III.1.2 Arbre	35
III.1.3 Balourd	37
III.1.4 Paliers	37
III.2 Equation du mouvement	38
III.3 Résolution de l'équation du mouvement	38

Chapitre IV. Hélicoptères et rotor anti-couple

Introduction	40
IV.1. Utilisation	40
IV.2. Principe de fonctionnement	41
IV.3. Le retour des queues.....	42
IV.4. Vol stationnaire	42
IV.5. Vol en translation.....	43
IV.6. Force et phénomène aérodynamique	44
IV.7. Les phénomènes permettant le vol de l'hélicoptère	44
IV.8. Les effets néfastes sur le vol de l'hélicoptère	47
IV.5.1 L'effet de cône	47
IV.5.2 L'effet gyroscopique	47
IV.5.3 La traînée	47
IV.5.4 Le moment de torsion	47

Chapitre V. Simulation numérique du rotor anti-couple

Introduction	48
V.1 Présentation du rotor anticouple.....	48
V.1.1 Géométrie du rotor.....	49
V.1.2 Propriétés du matériau.....	49
V.1.3 Caractéristiques des paliers.....	50
V.1.4 Caractéristiques des pales	51
V.1.5 Élément type de maillage	52
V.1.6 Les conditions aux limites	53
V.2 Résultats et interprétation.....	54
V.2.1 Diagramme de Campbell.....	54
V.2.2 Rapport d'amortissement.....	55
V.2.3 Les fréquences propres.....	56
V.2.4 Orbite modale.....	58
V.2.5 Réponse en force harmonique.....	58
V.2.6 Réponse au balourd.....	59
V.2.7 Les contraintes du rotor	62
V.2.8 Critère de Von Mises	64
V.2.9 Les déplacements du rotor.....	65
V.2.10 Les modes propres des pales	66
V.2.11 Les déplacements des pales	67
V.2.12 Déplacement nodal.....	69
V.2.13 Evolution de la contrainte élémentaire.....	71
V.2.14 Analyse passagère de rotor anticouple.....	72

Conclusion générale et perspectives..... 73

Références bibliographiques 75

Annexe I Matrices élémentaires de disque

79

Annexe II Matrices élémentaire de l'arbre

80

Annexe III Tableaux numériques (mode3).....

85

INTRODUCTION GENERALE

Les rotors sont définis comme tout élément tournant autour d'un axe. Le champ des rotors est donc vaste. Ils sont présents dans de nombreux domaines : l'aéronautique, l'automobile, le nucléaire, ou encore l'industrie pétrolière. Dans notre étude, on se focalisera sur les rotors horizontaux à support mobile, plus précisément sur les rotors anti-couple d'un hélicoptère.

Les études essentielles en dynamique des rotors concernent le tracé du diagramme de Campbell, qui représente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, et le calcul des réponses à balourd, principalement lors du passage des vitesses critiques.

Pour réaliser de telles études, on dispose aujourd'hui de nombreux outils de modélisation comme la méthode des matrices de transfert, des éléments finis, de l'expansion polynomiale généralisée ou encore des fonctions de transfert distribuées. Toutes ces méthodes permettent de prendre en compte les particularités que présente la dynamique des rotors vis-à-vis de la dynamique des structures. On peut citer par exemple l'existence de moments gyroscopiques responsables de la variation de la fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation ou celle de forces circulatoires qui rendent le mouvement instable à partir d'une certaine vitesse, et ce même dans le cadre purement linéaire.

Les machines tournantes sont devenues depuis de nombreuses années des éléments indispensables pour l'industrie moderne. D'une manière générale, les rotors d'hélicoptère, les turbomachines ont pour but d'assurer un échange d'énergie entre un rotor tournant à vitesse constante et un débit permanent de fluide. Dans les centrales électriques, les groupes turboalternateurs permettent la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique. Les machines tournantes sont aussi des composants pour la plupart des véhicules : turboréacteur pour un avion, turbocompresseur automobile, turbines de bateaux ou de sous-marins, rotor anti-couple de l'hélicoptère.

Les performances de ces systèmes sont améliorées afin d'augmenter leur rendement, de diminuer leur poids ou leur bruit. Pour cela, l'amplitude de déformation de l'arbre doit être maîtrisée et ses fréquences de résonance connues afin d'éviter une trop grande vibration du système. En effet, une trop grande amplitude de vibration engendre un moindre rendement, un bruit trop important, et peut même aboutir à l'endommagement du système: rupture par fatigue, endommagement des paliers, frottement rotor/stator. L'étude de la dynamique des machines tournantes est donc plus que jamais d'actualité, afin de concevoir de nouvelles turbomachines plus performantes ou dans l'optique de contrôler leur fonctionnement, il est nécessaire de prévoir le comportement en torsion et en flexion des rotors. Dans certains cas comme pour l'étude des rotors couplés par engrenage, le couplage flexion-torsion a également été l'objet de travaux. Ici, seuls les mouvements de flexion sont pris en compte. L'étude concerne les monorotors tournant à vitesse constante, De manière classique, une étude en flexion porte sur la détermination des vitesses critiques, l'évaluation de la réponse en régime permanent à des forces extérieures, et la recherche de possibles instabilités. Le comportement dynamique d'un rotor monté sur un support fixe est actuellement bien maîtrisé, même si des développements sont encore réalisés. Depuis peu, des études se sont intéressées au comportement des rotors dont le support est en mouvement (translation et/ou rotation) permanent ou transitoire. Diverses études théoriques ont été développées en considérant un rotor dont le support est rigide ou flexible.

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent la modélisation du comportement dynamique en flexion de rotors anti-couple dont le support rigide est en mouvement. L'étude est développée

en deux parties :

La partie théorique concerne la formulation générale des équations pour un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque (3 translations et 3 rotations), les différentes hypothèses de modélisation sont exposées. Les caractéristiques des différents éléments qui composent un rotor sont présentées : énergie cinétique et énergie de déformation d'un arbre, énergie cinétique d'un disque, travail des forces extérieures dues aux paliers, énergie cinétique d'un balourd, un type de rotor simple est développé à partir de la méthode de Rayleigh-Ritz afin d'étudier des phénomènes de base. Les équations du mouvement sont obtenues par application des équations de Lagrange. Afin de traiter des systèmes réels, une modélisation par éléments finis est développée.

La partie numérique concerne le rotor anti-couple de l'hélicoptère, les résultats sont obtenus par une résolution pas-à-pas du modèle éléments finis, la simulation numérique nous permet d'observer et mettre en évidence: le diagramme de Campbell, les modes propres, le rapport d'amortissement, l'orbite des noeuds de l'analyse modale.

Chapitre I

Recherche bibliographique

Le comportement dynamique des rotors a une utilisation vaste et importante dans le domaine industriel, l'analyse typique des systèmes rotor-dynamiques inclut la détermination des fréquences normales des vibrations libres, modes de mouvement giratoire et des caractéristiques de stabilité des modes propres. Les vitesses critiques du système de rotor sont des vitesses tournantes de rotation fournissent des excitations qui coïncident avec des fréquences normales du système, produisant de ce fait à l'état de résonance.

Les premiers travaux sur la prévision des vitesses critiques des rotors ont été présentés par Jeffcott [29], le modèle a été amélioré par la présentation des effets gyroscopiques et des vitesses critiques des systèmes simples de rotor.

La méthode des matrices de transfert (Myklestad [41], Prohi [46]) a laissé sa place à de différentes méthodes plus précises. Un des modèles souvent employé est le modèle de Jeffcott.

Dans Ishida [27], ce modèle est utilisé pour étudier les oscillations non stationnaires d'un rotor lorsque celui-ci accélère en passant une vitesse critique. Ecker [15] développe une méthode pour supprimer les vibrations d'un rotor sans balourd, simplement excité par son amortissement interne et les forces agissant entre le rotor et le stator. La limitation du modèle de Jeffcott réside dans le fait que celui-ci ne prend pas en compte les effets gyroscopiques. Par conséquent, les fréquences de résonance de ce modèle de rotor sont indépendantes de sa vitesse de rotation. La méthode de Rayleigh-Ritz est aussi beaucoup utilisée car elle permet d'obtenir un modèle simple de rotor à deux degrés de liberté (Tondi [54], Lalanne [35]), mais elle est peu précise dès qu'il s'agit d'étudier des systèmes réels.

Durant ces dernières années, le modèle le plus utilisé est développé à partir de la méthode des éléments finis (Nelson [31], Tran [55]). Grâce à cette méthode, il est possible de déterminer avec précision les fréquences propres et les facteurs d'amortissement ainsi que la réponse à diverses excitations. De plus, cette méthode est modulaire car chaque élément du rotor est défini séparément.

Horkildsen [24] a inclus l'inertie rotatoire et le moment gyroscopique, pour la première fois.

Des éléments peuvent donc être ajoutés ou retirés selon les phénomènes qui veulent être mis en évidence. La méthode des éléments finis a ainsi été utilisée pour étudier les phénomènes d'amortissement en dynamique des rotors (Kassaï [31]) et pour l'étude de l'influence d'un couple axial sur le comportement des rotors (Dufour [13]). Cette méthode a également été appliquée à l'étude des rotors dont l'arbre tourne à vitesse variable (Lacroix [34], Al Majid [1]). De nombreux résultats concernant la dynamique des rotors dont le support est fixe pour les modèles de Rayleigh-Ritz et éléments finis sont présentés dans Lalanne [35].

Des études récentes se sont également intéressées à des systèmes rotor-paliers-fondation flexibles. C'est le cas par exemple de Bonello [6] qui développe un modèle de rotor sur fondation flexible grâce à une technique basée sur l'impédance mécanique des éléments du système. Cette technique prend en compte à la fois un modèle théorique et des caractéristiques expérimentales. Edwards [16] utilise la même technique pour identifier expérimentalement l'excitation et les paramètres du support pour un système rotor-paliers-fondation afin de réduire ses vibrations.

Récemment, étant donnée l'évolution des normes de sécurité sur les tremblements de terre, une direction de recherche privilégiée est le comportement des rotors dont le support est soumis à un séisme. Différents modèles de rotor sont utilisés lors de l'étude d'une réponse à un séisme. Ils sont plus ou moins précis selon que le rotor et/ou les paliers sont rigides ou non, et selon que

sont prises en compte les rotations du support ou non. Samali [50] étudie les vibrations aléatoires d'un rotor soumis à un séisme. Son modèle prend en compte les 6 composants de mouvement possibles pour le support (3 translations et 3 rotations), mais considère le rotor comme un arbre rigide posé sur des paliers flexibles. Suarez [52] et Singh [51] prennent en compte la flexibilité de l'arbre pour développer les équations du mouvement à l'aide de la méthode des éléments finis pour un rotor dont le support est soumis à 6 composants de mouvement. Néanmoins, ils ne prennent pas en compte certains termes paramétriques et autres pouvant causer des complications analytiques afin de pouvoir réaliser une analyse modale et une réponse par une méthode spectrale. Dans Subbiah [53], les équations sont résolues à partir d'une densité spectrale de puissance. Une méthode spectrale est également utilisée par Beley [3] sur un système rotor-paliers-fondation prenant en compte la flexibilité du support. Les équations développées dans Suarez [52] et Beley [2] sont presque identiques à celles présentées dans ce mémoire mais certains termes sont manquants et les modèles développés ne prennent pas en compte les possibles asymétries de l'arbre et du disque.

Les exigences accrues en matière de conception des machines industrielles orientent également les recherches vers l'étude des instabilités en dynamique des rotors. Les équations à coefficients périodiques, dont la forme la plus simple est l'équation de Mathieu, ont fait l'objet de nombreux travaux (Campbell [7]). Dans le laboratoire, ils ont concerné essentiellement les tiges de forage dans lesquelles l'outil génère des excitations paramétriques (Berlioz [3], Berlioz [4], Dufour [13]). Des études sur les machines tournantes ont par exemple été réalisées sur les vibrations non-stationnaires d'un rotor, posé sur paliers non-linéaires, en rotation constante Yamamoto ([57], [58]) ou durant son accélération Ishida [26]. La méthode multiéchelle a prouvé son efficacité dans l'étude des instabilités des équations différentielles comportant des termes paramétriques. El Shafei [17] utilise cette méthode pour résoudre les équations de Reynolds sur un palier lisse fini, et Kreider [32] l'utilise pour étudier la résonance interne de 2eme ordre d'une poutre sous flambage. Ma [37], Yamamoto [56] et Huang [25] étudient la stabilité d'une poutre en rotation à vitesse variable, appliquant cette méthode sur un système de deux équations avec des termes croisés. Mais la première application de cette méthode sur des systèmes gyroscopiques à termes paramétriques vient de Nayfeh [42] et Nayfeh [43].

Depuis de nombreuses études ont été réalisées à l'aide de la méthode multiéchelle sur différents modèles de rotor. Par exemple, Ji [28] traite des vibrations d'un rotor posé sur des paliers non linéaires. Cette étude est basée sur l'application des multiéchelles sur un rotor de type Timoshenko. Des simulations numériques sont réalisées sur le système libre et en oscillation forcée.

Des travaux ont également été réalisés sur les instabilités d'un rotor asymétrique (Ganesan [18], Ganesan [19]). Le modèle utilisé étant cette fois un rotor de type Jeffcott (ne prenant pas en compte l'effet gyroscopique), différentes études ont été effectuées selon la présence d'amortissement ou non.

Une compréhension fine des problèmes vibratoires associés aux systèmes tournants constitue à l'heure actuelle un enjeu majeur dans le domaine industriel. Afin d'optimiser le comportement dynamique des rotors et de dimensionner au mieux de tels systèmes, il est nécessaire de comprendre et prédire précisément leur comportement vibratoire (Ehrich 1992, Vance 1988) L'un des points clé réside par exemple dans la prédiction et le placement juste des premières vitesses critiques. En effet, les vitesses critiques sont fonction de la rigidité dynamique des systèmes tournants et la présence d'efforts gyroscopiques crée une dépendance entre la vitesse de rotation et les pulsations propres de telles structures: ceci implique que la détermination juste des vitesses critiques est un des éléments primordiaux lors du dimensionnement de tels systèmes dynamiques.

I.1. La modélisation dynamique des corps élastiques

I.1.1 Cinématique d'une particule du solide

Considérons un corps flexible Ω de frontière $\delta\Omega$. Dans sa configuration de référence, chaque particule est décrite par un vecteur $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ dont les coordonnées sont mesurées dans le repère inertiel orthonormé $O(X_1, X_2, X_3)$

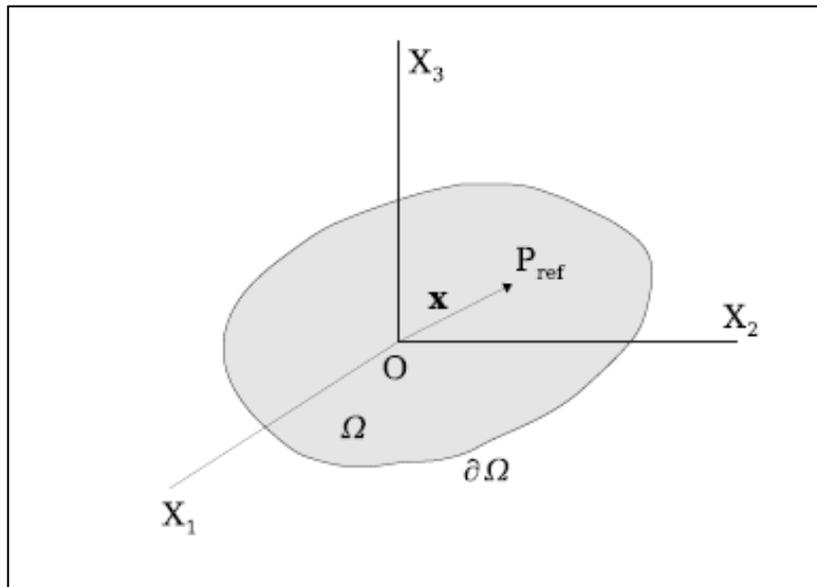


Figure.I.1 Configuration de référence

A l'instant initial ($t = 0$), le corps est soumis à un champ de déplacements initial $u_0(\mathbf{x})$. La particule repérée dans la configuration de référence par le vecteur \mathbf{x} occupe la position $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$:

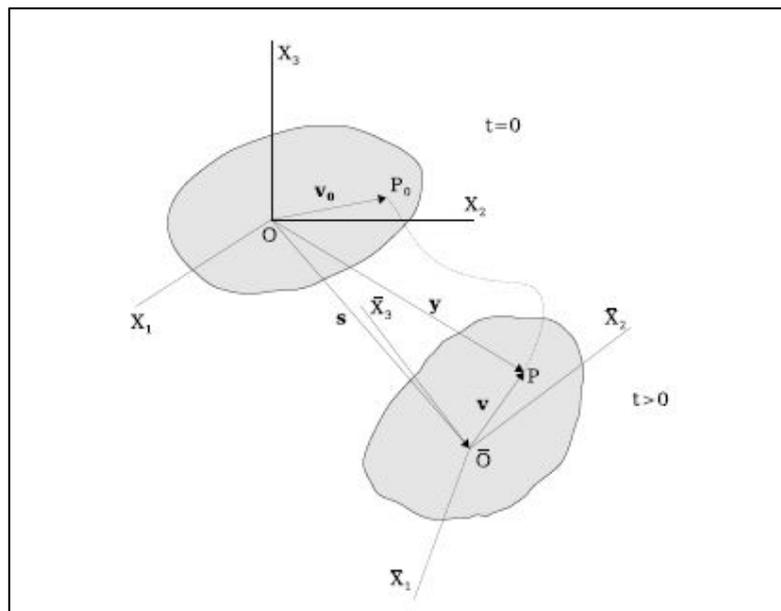


Figure.I.2 Configuration déformée

$$V_0(X) = X + U_0(X) \quad (1.1)$$

Considérons maintenant un mouvement du corps, comme illustré en figure I.2. A l'instant $t > 0$, le corps est déformé, dans une position quelconque. Soit $\bar{O}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ le repère corotationnel. Sa position par rapport au repère inertiel est donnée par le vecteur translation $s(t)$ et la vitesse angulaire autour d'un axe quelconque est $w(t) = [w_1, w_2, w_3]^t$. Cet axe sera spécifié ultérieurement pour définir l'axe de rotation de notre système tournant. Dans la configuration déformée, la particule est maintenant au point P et sa position par rapport au repère inertiel est donnée par le vecteur $y(x, t)$ tandis que dans le repère corotationnel nous avons:

$$V(X, t) = X + U(X, t) \quad (1.1)$$

Où $u(x, t)$ est le vecteur déplacement résultant de la déformation dynamique du corps.

Dans le repère inertiel, le vecteur $y(x, t)$ est donné par :

$$y(x, t) = s(t) + R(t) \mathbf{y}(x, t) = s(t) + R(t) (x + u(x, t)) \quad (1.2)$$

où $R(t)$ est une matrice de changement de repère. Elle est orthogonale ($R^t R = I$ et $R^t = R^{-1}$).

La dérivée temporelle de $y(x, t)$ est:

$$\dot{y} = \dot{s} + \dot{R}(x + u) + R\dot{u} \quad (1.3)$$

où $\dot{R} = R\Omega$ est la dérivée temporelle de R , avec donnée par une matrice antisymétrique définie par les composantes de w :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

I.1.2 Dynamique d'un corps déformable

Les équations du mouvement du système peuvent être établies de deux façons:

— La première consiste à écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un volume infinitésimal du corps auquel on ajoute la loi de comportement du matériau et les conditions aux limites. Le système ainsi obtenu correspond à la formulation forte de l'équation du mouvement. La forme faible est obtenue en intégrant l'équation aux dérivées partielles sur le volume du corps, pondérée par des fonctions tests.

— La deuxième approche est la méthode énergétique. Après avoir écrit les énergies cinétiques et potentielles du corps, la fonction de dissipation de Rayleigh et le travail virtuel des forces volumiques et surfaciques, les équations de Lagrange donnent l'équation du mouvement sous la forme:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial F_d}{\partial \dot{q}} = 0 \quad , \quad L = T - U \quad (1.5)$$

L'énergie cinétique est donnée par:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{y}' \dot{y} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}' \dot{u} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{u}' \dot{u} d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u' \Omega^2 u d\Omega - \int_{\Omega} \rho u' \Omega (R' \dot{s} + \Omega x) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}' (R' \dot{s} + \Omega x) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho (\dot{s}' \dot{s} + 2 \dot{s}' R \Omega x - x' \Omega^2 x) d\Omega \end{aligned} \quad (1.6)$$

L'énergie de déformation et le travail virtuel des forces volumiques et surfaciques sont groupées dans l'énergie potentielle sous la forme:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon' C \varepsilon d\Omega - \left(\int_{\Omega} u' f d\Omega + \int_{\partial\Omega} u' t d(\partial\Omega) \right) = \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u)' C (\nabla u) d\Omega - \left(\int_{\Omega} u' f d\Omega + \int_{\partial\Omega} u' t d(\partial\Omega) \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Où C est la matrice d'élasticité et $\varepsilon = \nabla u$ est le vecteur de déformations (considérées petites), où ∇ est l'opérateur différentiel qui a pour expression opérateur gradient :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

La fonction de dissipation, en supposant une loi de comportement viscoélastique $\sigma = C(\varepsilon + \eta_b \dot{\varepsilon})$, est exprimée par:

$$F_d = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta_b (\nabla \dot{u})^t C (\nabla \dot{u}) d\Omega \quad (1.9)$$

Si les déplacements u sont exprimés par une approximation de Rayleigh-Ritz en produits de fonctions de forme et coordonnées généralisées $u = H(x) q(t)$, on peut réécrire les équations (1.5), (1.6) et (1.8) sous la forme:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^t M \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^t G \dot{q} - \frac{1}{2} q^t N q - q^t \int_{\Omega} \rho H^t \Omega (R^t \dot{s} + \Omega x) d\Omega \\ + \dot{q}^t \int_{\Omega} \rho H^t (R^t \dot{s} + \Omega x) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{s}^t \dot{s} + 2 \dot{s}^t R \Omega x - x^t \Omega x) d\Omega \quad (1.10)$$

$$U = \frac{1}{2} q^t K_q - \left(q^t \int_{\Omega} H^t f d\Omega + q^t \int_{\partial\Omega} H^t t d(\partial\Omega) \right) \quad (1.11)$$

$$F_d = \frac{1}{2} \dot{q}^t D \dot{q} \quad (1.12)$$

Finalement, en utilisant les équations de Lagrange, on trouve l'équation du mouvement du système dans le repère mobile sous forme matricielle :

$$M \ddot{q} + (D + G) \dot{q} + (K + P + N) q = r + F \quad (1.13)$$

où M est la matrice de masse, D la matrice d'amortissement, G la matrice gyroscopique, K la matrice de raideur, P la matrice d'accélération angulaire, N la matrice d'accélération centrifuge (ou assouplissement centrifuge), r le vecteur des excitations indirectes dues à l'entraînement du système de coordonnées et F le vecteur des excitations par les forces volumiques et surfaciques. Nous avons:

$$M = \int_{\Omega} \rho H^t H d\Omega \quad (1.14)$$

$$D = \int_{\Omega} \eta_b (\nabla H)^t C (\nabla H) d\Omega \quad (1.15)$$

$$G = \int_{\Omega} \rho H^t \Omega H d\Omega \quad (1.16)$$

$$P = \int_{\Omega} \rho H^t \dot{\Omega} H d\Omega \quad (1.17)$$

$$N = \int_{\Omega} \rho H' \Omega^2 H d\Omega \quad (1.18)$$

$$K = \int_{\Omega} (\nabla H)' C (\nabla H) d\Omega \quad (1.19)$$

$$r = - \int_{\Omega} \rho H' (R' \ddot{s} + \dot{\Omega} x + \Omega^2 x) d\Omega \quad (1.20)$$

$$F = \int_{\Omega} H' f d\Omega + \int_{\partial\Omega} H' t d(\partial\Omega) \quad (1.21)$$

Pour des systèmes complexes, on doit faire appel à des méthodes de discrétisation capables de bien représenter les différents éléments composant le système tournant, comme la méthode des éléments finis. En s'appuyant sur les potentiels et les énergies cinétiques définies précédemment, on établit une formulation éléments finis adaptée à la problématique.

I.2 Quelques phénomènes importants en dynamique des rotors

On va maintenant aborder quelques-uns des aspects importants concernant la dynamique des rotors. On verra plus particulièrement les notions de vitesses critiques, d'instabilités liées à l'amortissement tournant et le rôle que peuvent jouer les dissymétries sur la dynamique des rotors.

I.2.1 Les vitesses critiques

Parmi les phénomènes classiquement observés en dynamique des rotors, on a la notion de vitesse critique. Selon Nelson [45], l'une des premières citations concernant la notion de vitesse critique remonte à la fin du XVIII^{ème} siècle lors d'essais expérimentaux réalisés par Dunkerley. Il définit alors la vitesse critique comme la vitesse où, de manière analogue à la résonance d'une structure élastique non tournant, les vibrations de la machine atteignent des niveaux élevés. Aujourd'hui le concept de vitesse critique a évolué et se rattache d'un point de vue théorique à la notion de valeurs propres du système tournant : la vitesse critique correspond à la vitesse où l'excitation par balourd coïncide avec une des fréquences propres du système.

Pour les machines constituées d'organes avec des moments d'inertie polaires importants, l'on constate une forte dépendance des modes propres vis-à-vis de la vitesse de rotation due aux effets gyroscopiques. Ainsi, on observe le dédoublement des modes propres du système (pour le cas d'un système axisymétrique) dû aux forces gyroscopiques comme suit :

- Une précession directe où le rotor tourne dans le même sens que son mouvement de précession. Alors, sous les effets gyroscopiques, la fréquence de résonance associée croît.
- Une précession rétrograde, où le rotor tourne en sens inverse de son mouvement de précession, ce qui engendre un effet d'assouplissement et donc une chute de la vitesse critique.

Ces notions sont illustrées en figure I.3, où nous avons représenté l'évolution des fréquences propres d'un rotor en fonction de la fréquence de rotation. Ce graphique, appelé diagramme de Campbell, constitue l'un des outils de base pour la détermination des vitesses critiques du système. Le diagramme indiqué en figure I.3 est caractéristique d'un rotor axisymétrique. La fréquence propre à 22 Hz au repos est double : du fait de la symétrie, il existe deux modes de vibration de déformées identiques qui sont dans 2 plans orthogonaux qui s'intersectent sur l'axe

longitudinal du rotor. Lorsque les forces gyroscopiques augmentent, la séparation des modes donne naissance à un mode direct excitable par la force de balourd et un mode rétrograde non sollicité par l'excitation synchrone.

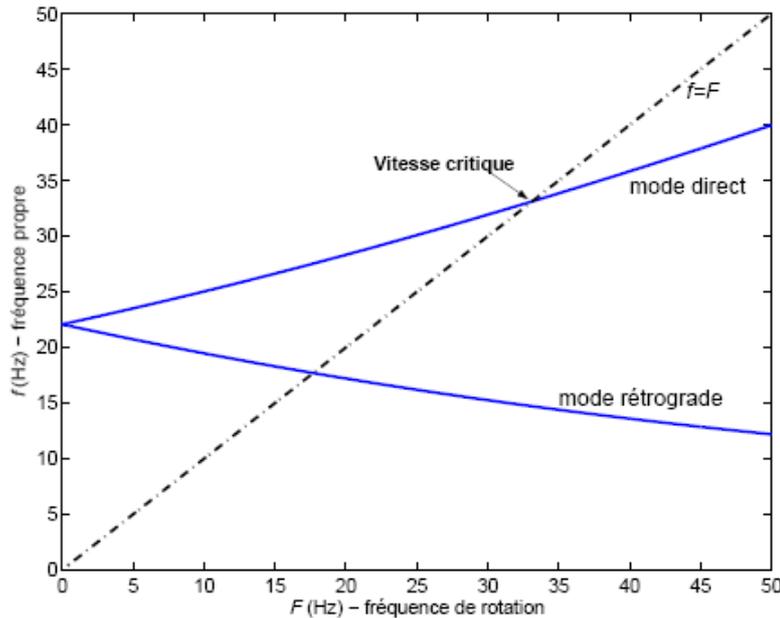


Figure I.3 Diagramme de Campbell pour un rotor axisymétrique

I.2.2 L'instabilité due à l'amortissement tournant

L'amortissement correspond à l'un des facteurs déterminants pour le dimensionnement des systèmes et plus particulièrement pour l'étude de la stabilité des machines tournantes. En effet, l'amortissement (particulièrement celui des parties tournantes) peut être responsable de phénomènes instables à haute vitesse, pouvant conduire à la rupture d'éléments composant le rotor. Il est donc indispensable de pouvoir estimer les proportions d'amortissement amenées, tant sur les parties fixes que sur les parties tournantes, afin de garantir l'intégrité du système. L'amortissement tournant des rotors est l'un des facteurs déstabilisants des machines tournantes. Il provient de l'amortissement interne des arbres, des interfaces entre les disques et les arbres, des joints d'accouplement constitués d'éléments en caoutchouc, etc. (Bigret [5]). Ces phénomènes donnent naissance à des forces tangentielles, nommées forces centrifuges, dans la direction de la précession et dans le sens opposé à la force d'amortissement externe. Lorsque ces forces, proportionnelles au déplacement (de manière antisymétrique) et à la vitesse de rotation, deviennent supérieures aux forces externes d'amortissement, une instabilité se développe. Le compromis entre les forces circulatoires et l'amortissement externe (parties fixes) peut être explicité dans le cas simple d'un modèle de rotor Jeffcott. Si le rotor possède un amortissement non tournant C_s supposé visqueux et un amortissement tournant C_r également visqueux (Crandall [9]), la fréquence de rotation Ω_i où l'instabilité démarre est donnée par:

$$\Omega_i = \Omega_{vc} \left(1 + \frac{c_s}{c_r} \right) \quad (1.22)$$

où v_c est la vitesse critique du système considéré. L'équation (1.21) montre que l'instabilité apparaît à des vitesses supérieures à la vitesse critique et que l'ajout d'amortissement externe augmente la fréquence Ω .

I.2.3 Les dissymétries

Couramment les rotors sont conçus comme étant axisymétriques. Néanmoins, le stator peut avoir des caractéristiques fonctionnelles qui invalident cette hypothèse. Dans ce cas, la dynamique de la machine présentera quelques différences par rapport au cas axisymétrique. Les modes doubles laissent place à deux modes simples de fréquences distinctes menant, comme dans le cas axisymétrique, à un mode direct et un mode rétrograde (Lalanne et Ferraris [36]). Dans ce cas de figure, les modes rétrogrades sont sollicités par l'excitation synchrone et le nombre de vitesses critiques est multiplié par 2, par rapport au cas axisymétrique.

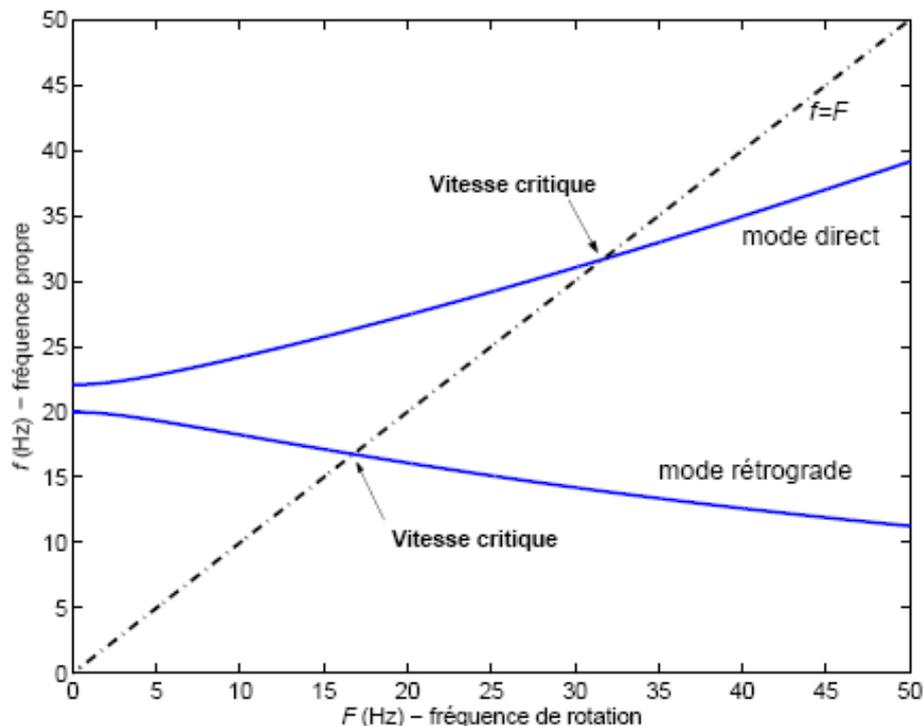


Figure I.4 Diagramme de Campbell pour un rotor avec des supports orthotropes

Sur les réponses à balourd, l'influence de la dissymétrie peut être analysée à l'aide d'un modèle Jeffcott avec des paliers orthotropes. On montre (Genta [21], Childs [8]) qu'à faible vitesse de rotation, le rotor est en précession directe. Au voisinage et au-delà de la première vitesse critique, le comportement devient de type rétrograde avant de redevenir direct pour des vitesses de rotation supérieures à la deuxième vitesse critique.

En comparaison avec un rotor à supports isotropes, où les orbites sont circulaires pour toutes les fréquences de rotation, un rotor à supports anisotropes génère des orbites elliptiques. L'arbre subit alors des contraintes axiales normales qui nuisent à la durée de vie de la machine.

Aussi, les rotors avec des supports anisotropes peuvent être utilisés pour augmenter la fréquence où l'instabilité apparaît. Childs [8] montre par exemple que l'instabilité originare de l'amortissement interne est décalée grâce à la dissymétrie des supports.

Un autre phénomène lié à l'anisotropie des supports est la manifestation simultanée de précessions directes et rétrogrades le long de l'arbre. Muszinska [40] a observé expérimentalement les précessions simultanées sur un rotor vertical dont l'arbre est fléchi. Dans cette étude, la manifestation des précessions simultanées est affectée par l'amplitude de la flexion de l'arbre et aussi par la distribution de balourds. Des résultats identiques (Dias et al.

[10]) ont été obtenus pour un rotor horizontal supporté par des roulements et des paliers. Ces études ont été confirmées par des simulations numériques.

De même, Rao et al. [48],[49] ont étudié expérimentalement et numériquement un rotor Jeffcott horizontal supporté par deux paliers hydrodynamiques identiques, en montrant que la variation du jeu radial des paliers (le paramètre qui contrôle l'anisotropie) est la variable qui pilote la manifestation des précessions simultanées : ils observent alors la précession rétrograde au niveau du disque et la précession directe ailleurs.

Enfin, certaines machines tournantes peuvent présenter une asymétrie du rotor. Il s'agit par exemple des générateurs à deux pôles ou des systèmes à hélices à deux pales. L'étude de ce type de rotor a attiré l'attention de plusieurs chercheurs (Sakata et al.[49], Kang et al [30], Genta [21]), qui ont montré que ce type de systèmes engendre une dynamique très riche dont le phénomène caractéristique est l'existence d'une vitesse critique secondaire. Cette vitesse critique apparaît à une vitesse proche de la moitié de la vitesse critique synchrone, plus précisément sur l'intersection de la courbe d'évolution fréquentielle du mode directe avec la droite d'excitation $f - 2F$. Celle-ci est alors excitée par une force latérale constante, comme le poids du rotor. D'un point de vue de l'apparition ou non d'instabilité, les anisotropies tournantes font apparaître des plages de fréquences instables qui peuvent être éliminées par l'ajout d'amortissement externe (Genta [20]).

I.3. Notion de non linéarité des rotors

Dans le domaine de la dynamique, les systèmes mécaniques qui possèdent des parties tournantes sont souvent des structures complexes du point de vue technologique. Couramment, les outils de conception et d'analyse de ces machines sont souvent basés sur le comportement linéaire du système.

Les caractéristiques dynamiques de telles structures, du fait de leur complexité, s'appuient principalement sur une approche modale, qui permet de découpler les équations du mouvement en les transformant en un ensemble d'oscillateurs à un degré de liberté dont les solutions sont ensuite superposées pour construire la solution finale du problème (Meirovitch [39]). D'autre part, diverses techniques de réduction de la dimension du système sont disponibles, comme la réduction de Guyan, Craig et Bampton et la troncature modale (Géradin [22], Meirovitch [38]). Les différents organes intervenant dans une machine tournante peuvent être classifiés de la façon suivante:

- les arbres, constituant les éléments principaux des machines tournantes;
- les éléments de support et positionnement (paliers hydrauliques, paliers à roulements, paliers magnétiques, etc.);
- les éléments de transmission de mouvement (engrenages, joints d'accouplement, embrayages, etc.);
- les éléments fonctionnels (roues aubagées, broches, hélices, etc.).

Ces éléments en liaison avec le rotor sont en général de nature non-linéaire. Afin de prendre en compte ces éléments lors de l'utilisation des outils traditionnels d'analyse et de conception, on utilise des propriétés linéarisées correspondant à des comportements extrêmes de ces organes. Pour bien analyser le comportement global de la machine prenant en compte la complexité amenée par les éléments non linéaires, il est nécessaire de développer des outils spécifiques permettant de rendre compte de cette dynamique.

Chapitre II

Formulation des équations de mouvement

Introduction

Ce chapitre a pour but de développer les équations du mouvement afin de prévoir le comportement dynamique d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque connu. Les caractéristiques de chaque élément composant un rotor sont d'abord développées. La méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour mettre en place un modèle permettant de traiter des cas simples et de mettre en évidence des phénomènes de base. Un modèle éléments finis est développé dans le souci de traiter des systèmes réels. Les équations du mouvement du rotor sont obtenues par application des équations de Lagrange.

II.1. Hypothèses

D'une manière générale, un rotor est constitué d'un arbre reposant sur des paliers, et comportant un ou plusieurs disques. Dans cette étude, les sollicitations prises en compte sont le balourd et les déplacements imposés du support supposé rigide. Les équations du mouvement sont obtenues à partir des énergies cinétiques et de déformation des différents composants du rotor et de l'application des équations de Lagrange. La démarche utilisée est semblable à celle développée dans Lalanne [35] pour la prévision du comportement dynamique de rotors dont le support est fixe.

Les hypothèses suivantes sont retenues :

- l'arbre est déformable
- les disques sont rigides
- le rotor tourne à une vitesse constante
- les possibles asymétries de l'arbre et des disques ne sont pas prises en compte

Ces hypothèses correspondent à la majorité des rotors industriels. Les cas de disque souple et de variations rapides de vitesse conduisent à des développements spécifiques (Al Majid [1]) qui ne sont pas traités dans cette étude.

L'établissement des équations du mouvement (Duchemin [11], Duchemin [12]) nécessite les étapes suivantes :

- Calcul des différentes énergies des composants du système : énergies cinétiques du disque, de l'arbre et du balourd, énergie de déformation de l'arbre, et travail virtuel des forces extérieures.
 - Choix d'un modèle : la méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour l'étude des phénomènes de base, et celle des éléments finis pour l'étude de systèmes réels.
-
- Application des équations de Lagrange sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (2.1)$$

où $N(1 \leq i \leq N)$ est le nombre de degrés de liberté, les q_i sont les coordonnées généralisées et les F sont les forces généralisées. Le symbole d désigne la dérivée par rapport au temps.

- Mise en place de méthodes numériques pour la résolution des équations du mouvement.

II.2. Détermination des énergies des éléments de rotor

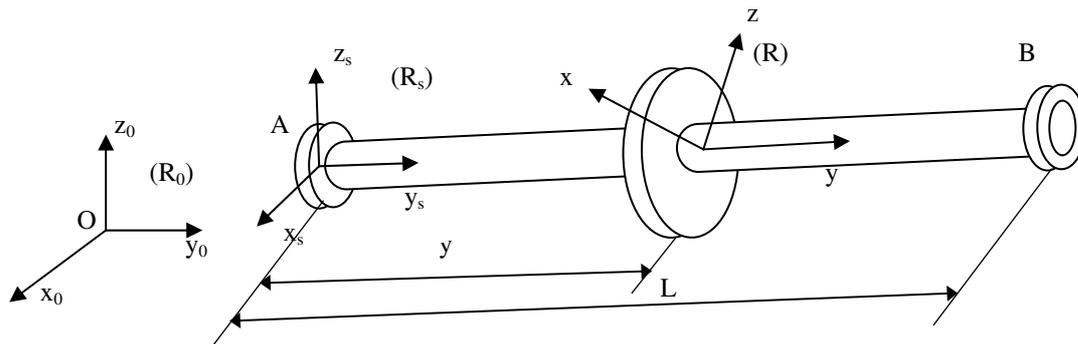


Figure.II.1 Définition des repères

Afin de prendre en compte la mobilité du support, trois repères principaux sont définis :

$R_0(x_0, y_0, z_0)$ est le repère galiléen, $R_s(x_s, y_s, z_s)$ est le repère lié au support indéformable, et $R(x, y, z)$ est le repère courant, tournant, lié au rotor .

Pour l'expression des énergies cinétiques de l'arbre et du disque, les vecteurs vitesse et rotation du repère R par rapport au repère R_0 doivent être calculés.

II.2.1. Calculs des vitesses

De manière classique en dynamique des rotors, la rotation du repère R lié à l'arbre déformé par rapport au repère R_s est définie par les angles ψ , θ , ϕ . L'orientation du repère R est définie par :

- une rotation d'un angle ψ (précession) autour de z_s (repère intermédiaire $R_1(x_1, y_1, z_1)$)
- une rotation d'un angle θ (nutation) autour du nouvel axe x_1 (repère intermédiaire $R_2(x_2, y_2, z_2)$)
- une rotation d'un angle ϕ (rotation propre) autour de l'axe final $y // y_2$ (repère final $R(x, y, z)$).

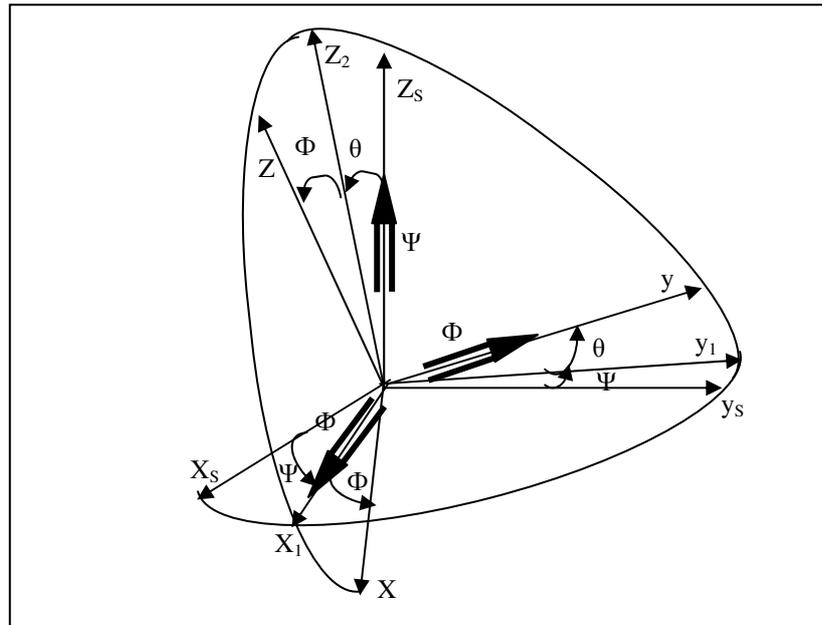


Figure.II.2 Repères intermédiaires définissant le passage du repère R_S lié au support au repère R lié à l'arbre déformé

Le vecteur rotation de R par rapport à R_S exprimé dans R s'écrit :

$$\vec{\Omega}_R^S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{R_1} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}_R \quad (2.2)$$

$$\vec{\Omega}_R^S = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}_R \quad (2.3)$$

Le mouvement du support est défini par les coordonnées x_A , y_A , et z_A du vecteur O_A exprimées dans le repère R_0 , et par les angles α , β , γ et ψ permettant de passer du repère R_0 au repère R_S par :

- une rotation d'un angle α autour de z_0 (repère intermédiaire $R'(x', y', z')$)
- une rotation d'un angle β autour du nouvel axe x' (repère intermédiaire $R''(x'', y'', z'')$)
- une rotation d'un angle γ autour de l'axe final $y''=y'''$ (repère final $R_S(x_S, y_S, z_S)$).

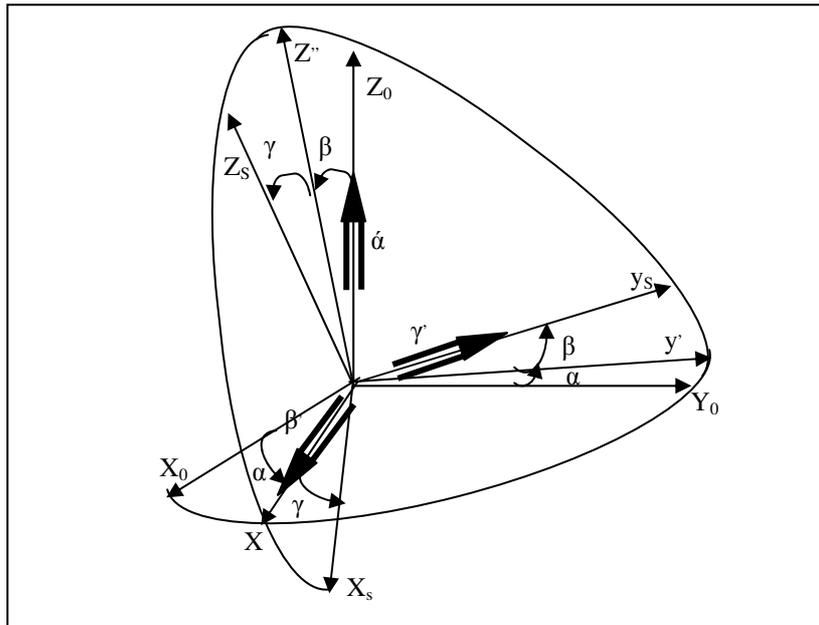


Figure.I.3 Repères intermédiaires définissant le passage du repère galiléen R_0 au repère R_S lié au support

Le vecteur rotation de R_S par rapport à R_0 exprimé dans R_S s'écrit :

$$\vec{\Omega}_S^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}_{R'} + \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R''} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_S} \quad (2.4)$$

$$\vec{\Omega}_S^0 = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \cos \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix}_{R_S} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_S \\ \dot{\beta}_S \\ \dot{\gamma}_S \end{bmatrix}_{R_S} \quad (2.5)$$

Par la suite, afin de faciliter la manipulation des équations et d'améliorer la clarté des résultats, les calculs sont effectués à l'aide des coordonnées $\dot{\alpha}_S, \dot{\beta}_S, \dot{\gamma}_S$ du vecteur rotation de R_0 par rapport à R_S exprimé dans R_S . De même, pour paramétrer les mouvements de translation du support, les coordonnées X, Y, Z du vecteur \vec{OA} exprimées dans le repère R_S sont utilisés.

Le vecteur position OA s'écrit :

$$\vec{OA} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} X_A \cos \alpha + Y_A \sin \alpha \\ -X_A \sin \alpha + Y_A \cos \alpha \\ Z_A \end{bmatrix}_{R'} \quad (2.6)$$

$$= \begin{bmatrix} (X_A \cos \alpha + Y_A \sin \alpha) \cos \gamma - (Z_A \cos \beta + (X_A \sin \alpha - Y_A \cos \alpha) \sin \beta) \sin \gamma \\ Z_A \sin \beta - (X_A \sin \alpha - Y_A \cos \alpha) \cos \beta \\ (X_A \cos \alpha + Y_A \sin \alpha) \sin \gamma + (Z_A \cos \beta + (X_A \sin \alpha - Y_A \cos \alpha) \sin \beta) \cos \gamma \end{bmatrix}_{R_S} \\ = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{R_S} \quad (2.7)$$

A partir des équations de mouvement du support exprimées dans le repère galiléen, les coordonnées des vecteurs rotation et position du repère R par rapport à R₀ peuvent être obtenues facilement. Pour les développements suivants, les équations sont exprimées en fonction de $\dot{\alpha}_s, \dot{\beta}_s, \dot{\gamma}_s$ et X, Y, Z et de leurs dérivées par rapport au temps.

Le vecteur rotation de R par rapport au repère R₀ :

$$\vec{\Omega}_R^0 = \vec{\Omega}_S^0 + \vec{\Omega}_R^S = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_s \\ \dot{\beta}_s \\ \dot{\gamma}_s \end{bmatrix}_{R_S} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}_R \quad (2.8)$$

$$\vec{\Omega}_R^0 = \begin{bmatrix} (\dot{\alpha}_s \cos \psi + \dot{\beta}_s \sin \psi + \dot{\theta}) \cos \phi - ((\dot{\alpha}_s \sin \psi - \dot{\beta}_s \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \cos \theta) \sin \phi \\ -(\dot{\alpha}_s \sin \psi - \dot{\beta}_s \cos \psi) \cos \theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \sin \theta + \dot{\phi} \\ (\dot{\alpha}_s \cos \psi + \dot{\beta}_s \sin \psi + \dot{\theta}) \cos \phi - ((\dot{\alpha}_s \sin \psi - \dot{\beta}_s \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \cos \theta) \sin \phi \end{bmatrix}_R \quad (2.9) \\ = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_R$$

La vitesse de rotation du rotor est suivant l'axe y ; ψ et θ représentent les déformées angulaires de l'arbre dans les directions x et z ; ϕ représente sa position angulaire par rapport au support. L'arbre ne subit que de petites déformations (domaine élastique), ψ et θ sont donc considérés comme des angles infiniment petits.

D'après les hypothèses, le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \Omega \text{ et } \phi = \Omega t \quad (2.10)$$

Lors du mouvement, la ligne moyenne de l'arbre ne reste pas confondue avec la droite AB. Soient (u, y, w) les déplacements de l'arbre au point C dans le repère R_S , u et w sont variables alors que y est considéré comme constant puisque seuls les mouvements de flexion de l'arbre sont étudiés.

Le vecteur de déplacement \overrightarrow{AC} :

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} u(y,t) \\ y \\ w(y,t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Le vecteur vitesse du point C dans le repère R_S s'écrit:

$$\vec{v}^0(C) = \frac{d^0}{dt} \overrightarrow{OC} = \frac{d^S}{dt} \overrightarrow{OC} + \vec{\Omega}_S^0 \wedge \overrightarrow{OC} \quad (2.12)$$

avec:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} X + u(y,t) \\ Y + y \\ Z + w(y,t) \end{bmatrix}_{R_S} \quad (2.13)$$

$$\vec{v}^0(C) = \begin{bmatrix} \dot{X} + \dot{u} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} + \dot{w} \end{bmatrix}_{R_S} + \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_S \\ \dot{\beta}_S \\ \dot{\gamma}_S \end{bmatrix}_{R_S} \wedge \begin{bmatrix} X + u \\ Y + y \\ Z + w \end{bmatrix}_{R_S} \quad (1.14)$$

Il vient:

$$\vec{v}^0(C) = \begin{bmatrix} \dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_S(Z + w) - \dot{\gamma}_S(Y + y) \\ \dot{Y} + \dot{\gamma}_S(X + u) - \dot{\alpha}_S(Z + w) \\ \dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S(Y + y) - \dot{\beta}_S(X + u) \end{bmatrix}_{R_S} = \begin{bmatrix} u_c \\ v_c \\ w_c \end{bmatrix}_{R_S} \quad (2.15)$$

Les expressions des énergies cinétiques de l'arbre et du disque peuvent être calculées à partir des expressions du vecteur rotation $\vec{\Omega}_R^0$ et de la vitesse du point c par rapport au repère R_0 .

II.2.2. Disque

Le disque supposé parfaitement rigide est caractérisé par son énergie cinétique uniquement. Le disque de centre C est situé à la position arbitraire y . Son énergie cinétique s'écrit :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\vec{V}^0(C))^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_R^0 I_C \vec{\Omega}_R^0 \quad (2.16)$$

ou M_D est la masse du disque et I_C sont tenseur d'inertie principal, exprimé dans le repère lie au disque:

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{D_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{D_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_z} \end{bmatrix}_R \quad (2.17)$$

Remarque: le disque est symétrique, $I_{D_x} = I_{D_z} = I_{Dm}$. Alors :

L'énergie cinétique s'écrit:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (u_C^2 + v_C^2 + w_C^2) + \frac{1}{2} (I_{Dm} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dm} \omega_z^2) \quad (2.18)$$

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (u_C^2 + v_C^2 + w_C^2) + \frac{1}{2} [I_{Dm} (\omega_x^2 + \omega_z^2) + I_{Dy} \omega_y^2] \quad (2.19)$$

Pour un disque placé à la position y , il vient:

$$\begin{aligned} T_D = & \frac{M_D}{2} \{ 2[\dot{\alpha}_s(\dot{Z} + \dot{w}(y)) + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s(X + u(y))] - \dot{\gamma}_s(\dot{X} + \dot{u}(y)) + \dot{\beta}_s(Z + w(y)) - \dot{\gamma}_s Y \} \\ & + [\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2] y^2 + (\dot{X} + \dot{u}(y)) + \dot{\beta}_s(Z + w(y)) - \dot{\gamma}_s Y)^2 + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s(X + u(y)) - \dot{\alpha}_s(Z + w(y)))^2 \\ & + (\dot{Z} + \dot{w}(y) + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s(X + u(y)))^2 \} \\ & + \frac{I_{Dm}}{2} \{ [\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2] + (\dot{\theta}(y))^2 + \dot{\psi}(y)^2 + \theta(y)^2 (\dot{\beta}_s^2 - \dot{\gamma}_s^2) + \psi(y)^2 (\dot{\beta}_s^2 - \dot{\alpha}_s^2) \\ & + 2[\dot{\alpha}_s \dot{\theta}(y) + \dot{\gamma}_s \dot{\psi}(y) + \dot{\beta}_s(\psi(y)\dot{\theta}(y) - \theta(y)\dot{\psi}(y)) + \dot{\beta}_s(\dot{\alpha}_s \psi(y) - \dot{\gamma}_s \theta(y)) + \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s \psi(y)\theta(y)] \} \\ & + \frac{I_{Dy}}{2} \{ (\dot{\beta}_s + \Omega + \dot{\gamma}_s \theta(y) - \dot{\alpha}_s \psi(y))^2 + (\dot{\beta}_s + \Omega)[2\dot{\psi}(y)\theta(y) - \dot{\beta}_s(\psi(y)^2 + \theta(y)^2)] \} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cette expression fait apparaître les termes classiques de la dynamique des rotors :

- $\frac{I_{Dy}}{2} \Omega^2$: terme constant représentant l'énergie de rotation du disque. Il n'a pas d'influence sur les équations du mouvement.

- $\frac{M_D}{2} (\dot{u}(y)^2 + \dot{w}(y)^2)$: énergie cinétique d'un élément en translation dans un plan.
- $\frac{I_{Dm}}{2} (\dot{\theta}(y)^2 + \dot{\psi}(y)^2)$: énergie cinétique de rotation d'un élément autour des axes x et z.
- $I_{Dy} \Omega \dot{\psi}(y) \theta(y)$: effet gyroscopique (Coriolis).

Les autres termes dus au mouvement d'ensemble du rotor.

Il est à noter une certaine symétrie des termes qui composent l'énergie cinétique d'un disque :

- Les déplacements u et w interviennent de manière équivalente ainsi que les angles d'Euler ψ et θ . Ceci s'explique par le fait que le disque possède un axe de symétrie dans la direction y_s .
- De la même manière, $\dot{\alpha}_s$ et $\dot{\gamma}_s$ ont la même influence sur les équations. Avec par exemple le terme $\frac{I_{Dm}}{2} (\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2)$, tandis que $\dot{\beta}_s$ a un rôle prépondérant (rotation du support dans la direction de l'arbre). Le terme $I_{Dm} \dot{\beta}_s (\dot{\alpha}_s \psi(y) - \dot{\gamma}_s \theta(y))$ en est une parfaite illustration.
- Deux exceptions à cette symétrie sont à remarquer : le terme $I_{Dy} (\dot{\beta}_s + \Omega) \dot{\psi} \theta$ auquel ne correspond pas terme $I_{Dy} (\dot{\beta}_s + \Omega) \dot{\psi} \dot{\theta}$. Cette dissymétrie se retrouve d'ailleurs pour un support fixe. Elle est due au paramétrage et en particulier au choix des angles d'Euler.

II.2.3. Arbre

L'arbre est considéré comme déformable. Il est nécessaire de calculer à la fois son énergie cinétique et son énergie de déformation.

Energie cinétique

L'énergie cinétique élémentaire d'un arbre dT_a peut être déduite par extension de l'énergie cinétique du disque en considérant une section d'arbre infiniment mince, d'épaisseur dy , de section S (supposée constante), de masse volumique ρ et d'inerties de section I_x et I_z (également supposées constantes).

Il suffit de prendre comme masse élémentaire : $dMa = \rho S dy$ et comme inerties principales dans le repère local :

$$\begin{aligned}
 dI_{Dx} &= \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) dm = \left(\iint_{(S)} z^2 dS \right) \rho dy = \rho I_x dy \\
 dI_{Dy} &= \iiint_{(V)} (x^2 + z^2) dm = \left(\iint_{(S)} x^2 dS + \iint_{(S)} z^2 dS \right) \rho dy = \rho (I_x + I_z) dy \\
 dI_{Dz} &= \iiint_{(V)} (y^2 + x^2) dm = \left(\iint_{(S)} x^2 dS \right) \rho dy = \rho I_z dy
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

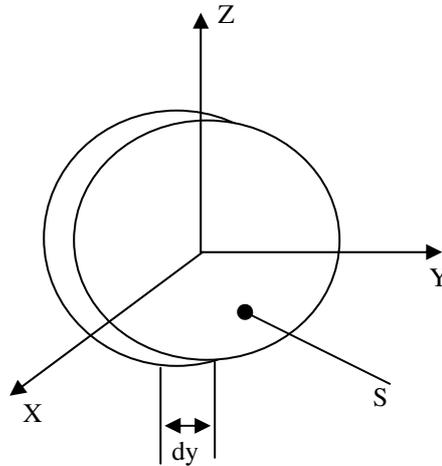


Figure.II.4 Section d'arbre infiniment mince

L'énergie cinétique élémentaire d'une section d'arbre infiniment mince s'écrit alors :

$$dT_a = \left(\frac{1}{2} \rho S (u_c^2 + v_c^2 + w_c^2) + \frac{1}{2} (\rho I_x \omega_x^2 + \rho (I_x + I_z) \omega_y^2 + \rho I_z \omega_z^2) \right) dy \quad (2.22)$$

On posant comme précédemment : , $I_x = I_z = I_m$. il vient :

$$dT_a = \left(\frac{1}{2} \rho S (u_c^2 + v_c^2 + w_c^2) + \frac{1}{2} \rho I_m (\omega_x^2 + 2\omega_y^2 + \omega_z^2) \right) dy \quad (2.23)$$

Afin d'obtenir l'énergie cinétique d'un arbre de longueur L, il suffit d'intégrer sur la longueur de l'arbre :

$$T_a = \int_0^L dT_a \quad (2.23)$$

soit :

$$T_a = \frac{1}{2} \left(\rho S \int_0^L (u_c^2 + v_c^2 + w_c^2) dy + \rho I_m \int_0^L (\omega_x^2 + 2\omega_y^2 + \omega_z^2) dy \right) \quad (2.24)$$

L'énergie cinétique complète d'un arbre s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
T_a = & \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \{ 2[\dot{\alpha}_s (\dot{Z} + \dot{w}(y)) + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s (X + u(y))] - \dot{\gamma}_s (\dot{X} + \dot{u}(y)) + \dot{\beta}_s (Z + w(y)) - \dot{\gamma}_s Y \}^2 \\
& + [\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2] y^2 + (\dot{X} + \dot{u}(y) + \dot{\beta}_s (Z + w(y)) - \dot{\gamma}_s Y)^2 + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s (X + u(y)) - \dot{\alpha}_s (Z + w(y)))^2 \\
& + (\dot{Z} + \dot{w}(y) + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s (X + u(y)))^2 \} dy \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_m \{ [\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2] + (\dot{\theta}(y)^2 + \dot{\psi}(y)^2) + \theta(y)^2 (\dot{\beta}_s^2 - \dot{\gamma}_s^2) + \psi(y)^2 (\dot{\beta}_s^2 - \dot{\alpha}_s^2) \\
& + 2[\dot{\alpha}_s \dot{\theta}(y) + \dot{\gamma}_s \dot{\psi}(y) + \dot{\beta}_s (\psi(y) \dot{\theta}(y) - \theta(y) \dot{\psi}(y)) + \dot{\beta}_s (\dot{\alpha}_s \psi(y) - \dot{\gamma}_s \theta(y)) + \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s \psi(y) \theta(y)] \} dy \\
& + \int_0^L \rho I_m \{ (\dot{\beta}_s + \Omega + \dot{\gamma}_s \theta(y) - \dot{\alpha}_s \psi(y))^2 + (\dot{\beta}_s + \Omega) [2\dot{\psi}(y) \theta(y) - \dot{\beta}_s (\psi(y)^2 + \theta(y)^2)] \} dy
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Cette expression fait apparaître des termes classiques en dynamique des rotors :

- $\rho I_m L \Omega^2$: terme constant représentant l'énergie de rotation de rotation de l'arbre. Il n'a pas d'influence sur les équations du mouvement.
- $\frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}(y)^2 + \dot{w}(y)^2) dy$: expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.
- $\frac{\rho I_m}{2} \int_0^L (\dot{\psi}(y)^2 + \dot{\theta}(y)^2) dy$: effet secondaire de l'inertie de rotation.
- $2 \rho I_m \Omega \int_0^L \dot{\psi}(y) \theta(y) dy$: effet gyroscopique.

Les autres termes sont dus au mouvement du rotor. Les mêmes remarques pour le disque peuvent être faites quant à la symétrie des équations obtenues.

Energie de déformation

L'énergie de déformation n'est pas affectée par le mouvement du support car elle ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre par rapport au support. Dans ce calcul, seules les déformations dues à la flexion sont prises en compte (les effets du cisaillement sont négligés). $u^*(y,t)$ et $w^*(y,t)$ sont les déplacements des points de la ligne moyenne dans le repère local R lié à l'arbre.

$$\begin{aligned}
u^* &= u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\
w^* &= u \sin \Omega t + w \cos \Omega t
\end{aligned} \tag{2.26}$$

La déformation en flexion d'un point de l'arbre de coordonnées x et z dans R est $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_{n1}$ avec :

déformation linéaire :
$$\varepsilon_l = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (2.27)$$

déformation non linéaire :
$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (2.28)$$

l'énergie de déformation est donnée par :
$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon \sigma d\tau \quad (2.29)$$

où τ est le volume de l'arbre et σ est la contrainte de flexion .
la relation entre contraintes et déformations est : $\sigma = E \varepsilon$, donc :

$$U = \frac{E}{2} \int_{\tau} (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) d\tau \quad (2.30)$$

A cause de la symétrie de l'arbre par rapport aux axes x et z :

$$\int_{\tau} (\varepsilon_l \varepsilon_{nl}) d\tau = 0 \quad (2.31)$$

Le troisième terme de l'intégrale (2.30) représente l'effet d'une force axiale et n'est pas pris en compte dans cette étude. En utilisant (2.27) :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (2.32)$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (2.33)$$

Par symétrie, le troisième terme de (2.33) est nul et, en introduisant les inerties de section :

$$I_x = \iint_S z^2 dS \quad \text{et} \quad I_z = \iint_S x^2 dS \quad (2.34)$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2.35)$$

En remplaçant u^* et w^* par leurs valeurs (2.26) :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2.36)$$

On sépare les termes symétrique et antisymétriques comme précédemment : $I_x = I_z = I_m$.

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_m \left[\left(\cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin \Omega t \cos \Omega t \right) + \left(\sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin \Omega t \cos \Omega t \right) \right] dy \quad (2.37)$$

L'énergie de déformation de l'arbre s'écrit donc :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_m \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2.38)$$

II.2.4. Balourd

Le balourd est constitué d'une masse ponctuelle m_u placée dans le plan du disque à une distance d de son centre. Le centre du disque est en C, la masse de balourd en D. Le point A représente le centre géométrique de l'arbre non déformé.

Energie cinétique de balourd :

$$T_u = \frac{1}{2} m_u (\vec{V}^0 D)^2 \quad (2.39)$$

$$\vec{V}^0(D) = \frac{d^0}{dt} O\vec{D} = \frac{d^s}{dt} O\vec{D} + \vec{\Omega}_s^0 \wedge O\vec{D} \quad (2.40)$$

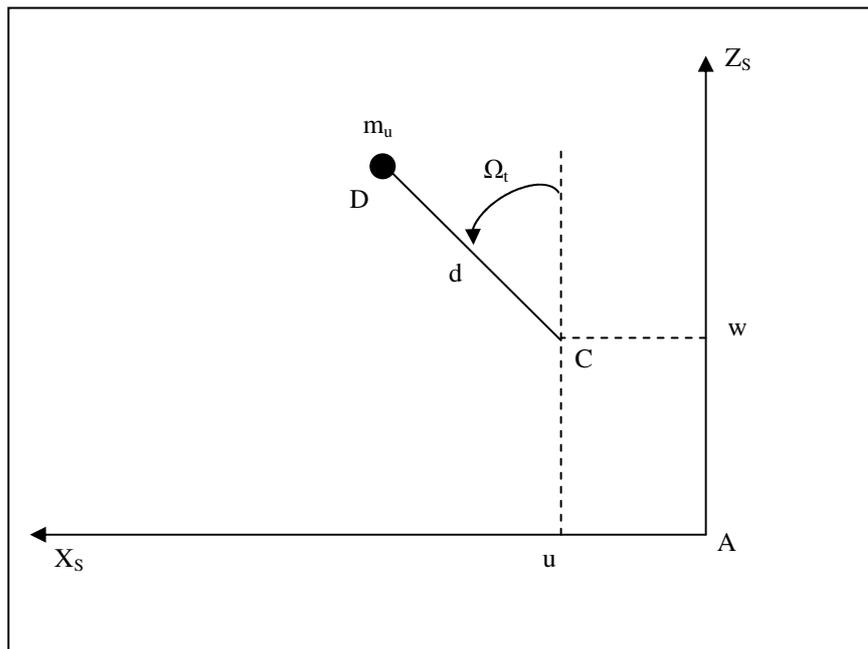


Figure.II.5 Masse de balourd

Dans le repère R_s les coordonnées de la masse sont :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} X(t) + u(y, t) + d \sin \Omega t \\ Y(t) + y \\ Z(t) + w(y, t) + d \cos \Omega t \end{bmatrix}_{R_s} \quad (2.41)$$

La vitesse du point D dans le repère R_s s'écrit :

$$\vec{V}^0(D) = \begin{bmatrix} \dot{X} + \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t + \dot{\beta}_s(Z + w + d \cos \Omega t) - \dot{\gamma}_s(Y + y) \\ \dot{Y} + \dot{\gamma}_s(X + u + d \sin \Omega t) - \dot{\alpha}_s(Z + w + d \cos \Omega t) \\ \dot{Z} + \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t + \dot{\alpha}_s(Y + y) - \dot{\beta}_s(X + u + d \sin \Omega t) \end{bmatrix}_{R_s} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} (\vec{V}^0(D))^2 &= (\dot{X} + \dot{u} + d(\Omega + \dot{\beta}_s) \cos \Omega t + \dot{\beta}_s(Z + w) - \dot{\gamma}_s(Y + y))^2 \\ &\quad + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s(X + u) - \dot{\alpha}_s(Z + w) + d(\dot{\gamma}_s \sin \Omega t - \dot{\alpha}_s \cos \Omega t))^2 \\ &\quad + (\dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_s(Y + y) - \dot{\beta}_s(X + u) - d(\Omega + \dot{\beta}_s) \sin \Omega t)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_u &= \frac{1}{2} m_u (\vec{V}^0(D))^2 \\ &= \frac{1}{2} m_u \{ 2[\dot{\alpha}_s(\dot{Z} + \dot{w}(y) + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s(X + u(y))) - \dot{\gamma}_s(\dot{X} + \dot{u}(y) + \dot{\beta}_s(Z + w(y)) - \dot{\gamma}_s Y)]y \\ &\quad + [\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2]y^2 + (\dot{X} + \dot{u}(y) + \dot{\beta}_s(Z + w(y)) - \dot{\gamma}_s Y)^2 + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s(X + u(y)) - \dot{\alpha}_s(Z + w(y)))^2 \\ &\quad + (\dot{Z} + \dot{w}(y) + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s(X + u(y)))^2 \} \\ &\quad + \frac{1}{2} m_u d^2 ((\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + (\dot{\gamma}_s \sin \Omega t - \dot{\alpha}_s \cos \Omega t)^2) \\ &\quad + m_u d \{ (\dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_s(Z + w) - \dot{\gamma}_s(Y + y))(\Omega + \dot{\beta}_s) \cos \Omega t \\ &\quad + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s(X + u) - \dot{\alpha}_s(Z + w))(\dot{\gamma}_s \sin \Omega t - \dot{\alpha}_s \cos \Omega t) \\ &\quad - (\dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_s(Y + y) - \dot{\beta}_s(X + u))(\Omega + \dot{\beta}_s) \sin \Omega t \} \end{aligned}$$

Le terme $\frac{1}{2} m_u f_1(y, t)$ est négligeable devant le terme $\frac{1}{2} M_D f_1(y, t)$ de l'énergie cinétique du disque. De plus, le terme $\frac{1}{2} m_u \Omega^2 d^2$ est une constante et n'a pas d'influence sur les équations du rotor.

L'énergie cinétique du balourd peut donc s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned}
 T_u = & \frac{1}{2} m_u d^2 \left((\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + (\dot{\gamma}_s \sin \Omega t - \dot{\alpha}_s \cos \Omega t)^2 \right) \\
 & + m_u d \left\{ (\dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_s (Z + w) - \dot{\gamma}_s (Y + y)) (\Omega + \dot{\beta}_s) \cos \Omega t \right. \\
 & + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s (X + u) - \dot{\alpha}_s (Z + w)) (\dot{\gamma}_s \sin \Omega t - \dot{\alpha}_s \cos \Omega t) \\
 & \left. - (\dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_s (Y + y) - \dot{\beta}_s (X + u)) (\Omega + \dot{\beta}_s) \sin \Omega t \right\}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

II.2.5. Paliers

Un palier comporte des caractéristiques de raideur et d'amortissement dans les deux plans, plus des termes croisés. Les forces induites par ces paliers sont dues au déplacement de l'arbre (repère R) par rapport au support (repère Rs). Elles ne dépendent donc pas du mouvement du repère Rs par rapport au repère R₀.

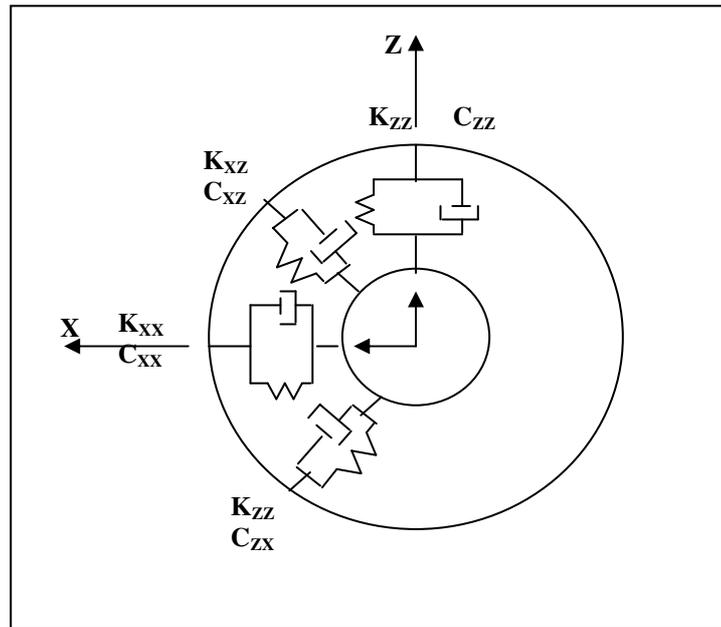


Figure.II.6 Amortissement et raideur de palier

Le travail virtuel des forces agissant sur l'arbre s'écrit :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta W \tag{2.44}$$

Où F_u et F_w sont les forces généralisées :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{XX} & k_{XZ} \\ k_{ZX} & k_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ W \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{XX} & c_{XZ} \\ c_{ZX} & c_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{W} \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

II.3. Type de rotor simple

Le but de ce chapitre est de développer un modèle simple de rotor permettant d'examiner les phénomènes particuliers pouvant survenir lorsque le support est en mouvement. La modélisation est effectuée à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz. Le rotor étudié est composé d'un arbre de longueur L supportant un disque avec un balourd situé à $y = l$. Le rotor est appuyé-appuyé à ses deux extrémités et les paliers sont considérés comme infiniment rigides. Les possibles asymétries de l'arbre et du disque sont prises en considération.

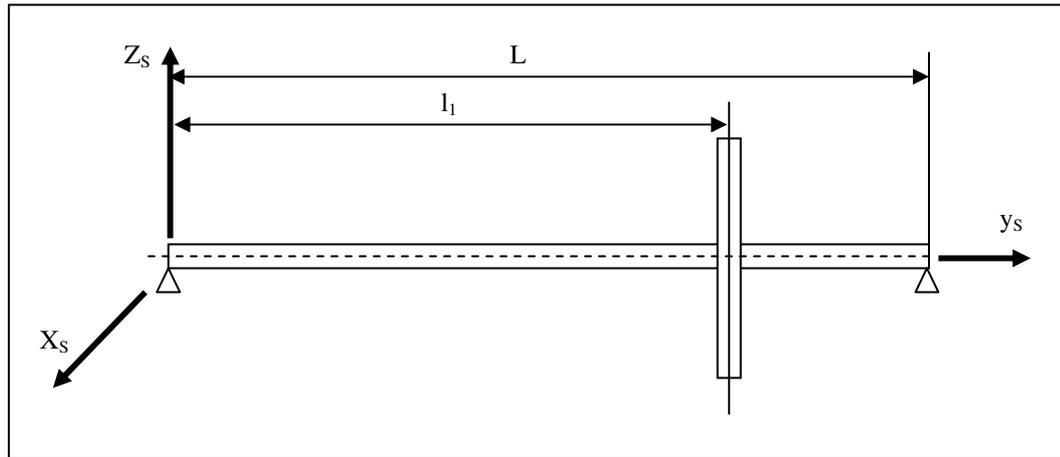


Figure.II.7 Rotor simple

II.3.1. Détermination des équations

La méthode de Rayleigh-Ritz permet d'exprimer les déplacements dans les directions x et z respectivement par :

$$\begin{aligned} u(y,t) &= f(y)q_1(t) = f(y)q_1 \\ w(y,t) &= f(y)q_2(t) = f(y)q_2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

où $f(y)$ est la déformée modale choisie, et q_1 et q_2 sont les coordonnées généralisées indépendantes.

Comme les angles sont petits, ils peuvent être approximés par :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} q_2 = g(y)q_2 \\ \Psi &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df(y)}{dy} q_1 = -g(y)q_1 \end{aligned} \quad (2.47)$$

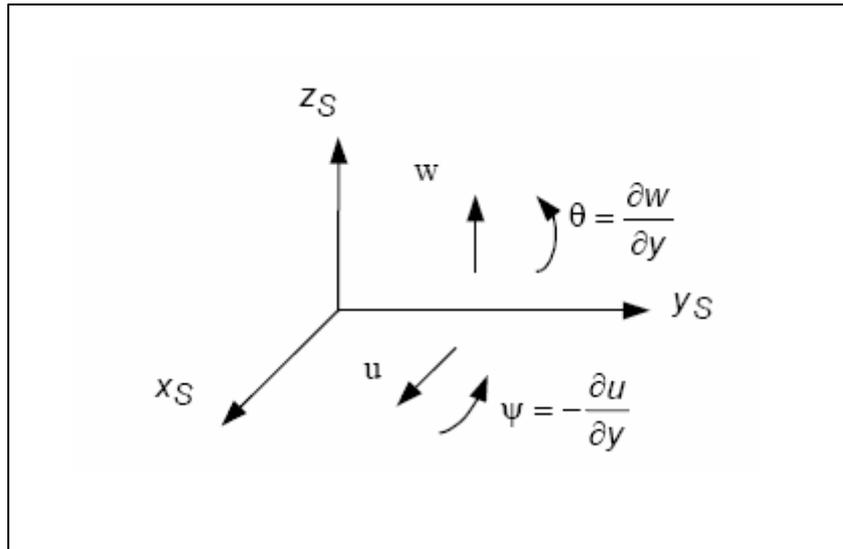


Figure.II.8 Degré de liberté d'une poutre.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} &= \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_1 = h(y) q_1 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} &= \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_2 = h(y) q_2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dans le cas d'un rotor appuyé-appuyé, la fonction $f(y)$ est choisie égale à la déformée dynamique d'une poutre appuyée-appuyée. Seuls les deux premiers modes seront étudiés par cette méthode :

- Premier mode : $f(y) = \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$
- Deuxième mode : $f(y) = \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)$

Selon la position l_1 du disque, les déformées correspondent plus ou moins aux déformées réelles du système. Par exemple, si le disque est placé au quart de l'arbre, le premier mode n'a pas exactement la forme d'un demi sinus, et le deuxième mode n'a pas la forme d'un sinus.

Ces différences peuvent entraîner des écarts sur les fréquences de résonance observées, en particulier sur le deuxième mode. Toutefois, ce modèle est utilisé pour observer les phénomènes de base et la précision des résultats n'est pas une priorité.

II.3.2. Energie cinétique du rotor

En remplaçant les variables u, w, ψ, θ par les fonctions définies précédemment (2.46 - 2.47) dans les énergies cinétiques d'un disque, d'un arbre et d'un balourd (2.20, 2.25, et 2.48), il vient les expressions suivantes :

- Pour un disque placé à la position l_1 , l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}
T_D = & \frac{M_D}{2} \{ 2[\dot{\alpha}_s(\dot{Z} + f(l_1)\dot{q}_2 + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s(X + f(l_1)q_1)) - \dot{\gamma}_s(\dot{X} + f(l_1)\dot{q}_1 + \dot{\beta}_s(Z + f(l_1)q_2) - \dot{\gamma}_s Y)] \\
& + [\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2]l_1^2 + (\dot{X} + f(l_1)\dot{q}_1 + \dot{\beta}_s(Z + f(l_1)q_2) - \dot{\gamma}_s Y)^2 + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s(X + f(l_1)q_1) - \dot{\alpha}_s(Z + f(l_1)q_2))^2 \\
& + (\dot{Z} + f(l_1)\dot{q}_2 + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s(X + f(l_1)q_1))^2 \} \\
& + \frac{I_{Dm}}{2} \{ [\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2] + ((g(l_1)\dot{q}_2)^2 + (-g(l_1)\dot{q}_1)^2) + (g(l_1)q_2)^2(\dot{\beta}_s^2 - \dot{\gamma}_s^2) + (-g(l_1)q_1)^2(\dot{\beta}_s^2 - \dot{\alpha}_s^2) \\
& + 2[\dot{\alpha}_s(g(l_1)\dot{q}_2) + \dot{\gamma}_s(-g(l_1)\dot{q}_1) + \dot{\beta}_s((-g(l_1)q_1)(g(l_1)\dot{q}_2) - (g(l_1)q_2)(-g(l_1)\dot{q}_1)) \\
& + \dot{\beta}_s(\dot{\alpha}_s(-g(l_1)q_1) - \dot{\gamma}_s(g(l_1)q_2)) + \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s(-g(l_1)q_1)(g(l_1)q_2)] \} \\
& + \frac{I_{Dy}}{2} \{ \dot{\beta}_s + \Omega + \dot{\gamma}_s(g(l_1)q_2) - \dot{\alpha}_s(-g(l_1)q_1) \}^2 + (\dot{\beta}_s + \Omega) \{ 2(-g(l_1)\dot{q}_1)(g(l_1)q_2) - \dot{\beta}_s((g(l_1)\dot{q}_2)^2 + (-g(l_1)\dot{q}_1)^2) \} \}
\end{aligned} \quad (2.49)$$

- Pour l'arbre, l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}
T_a = & \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \{ 2[\dot{\alpha}_s(\dot{Z} + f(y)\dot{q}_2 + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s(X + f(y)q_1)) - \dot{\gamma}_s(\dot{X} + f(y)\dot{q}_1 + \dot{\beta}_s(Z + f(y)q_2) - \dot{\gamma}_s Y)] \\
& + [\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2]y^2 + (\dot{X} + f(y)\dot{q}_1 + \dot{\beta}_s(Z + f(y)q_2) - \dot{\gamma}_s Y)^2 + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s(X + f(y)q_1) - \dot{\alpha}_s(Z + f(y)q_2))^2 \\
& + (\dot{Z} + f(y)\dot{q}_2 + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s(X + f(y)q_1))^2 \} dy \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_m \{ [\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2] + ((g(y)\dot{q}_2)^2 + (-g(y)\dot{q}_1)^2) + (g(y)q_2)^2(\dot{\beta}_s^2 - \dot{\gamma}_s^2) + (-g(y)q_1)^2(\dot{\beta}_s^2 - \dot{\alpha}_s^2) \\
& + 2[\dot{\alpha}_s(g(y)\dot{q}_2) + \dot{\gamma}_s(-g(y)\dot{q}_1) + \dot{\beta}_s((-g(y)q_1)(g(y)\dot{q}_2) - (g(y)q_2)(-g(y)\dot{q}_1)) \\
& + \dot{\beta}_s(\dot{\alpha}_s(-g(y)q_1) - \dot{\gamma}_s(g(y)q_2)) + \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s(-g(y)q_1)(g(y)q_2)] \} dy \\
& + \int_0^L \rho I_m \{ \dot{\beta}_s + \Omega + \dot{\gamma}_s(g(y)q_2) - \dot{\alpha}_s(-g(y)q_1) \}^2 + (\dot{\beta}_s + \Omega) \{ 2(-g(y)\dot{q}_1)(g(y)q_2) - \dot{\beta}_s((g(y)\dot{q}_2)^2 + (-g(y)\dot{q}_1)^2) \} \} dy
\end{aligned} \quad (2.50)$$

- Pour le balourd, l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}
T_u = & \frac{1}{2} m_u d^2 \left((\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + (\dot{\gamma}_s \sin \Omega t - \dot{\alpha}_s \cos \Omega t)^2 \right) \\
& + m_u d \{ (\dot{X} + \dot{q}_1 f(l_1) + \dot{\beta}_s(Z + \dot{q}_2 f(l_1)) - \dot{\gamma}_s(Y + y))(\Omega + \dot{\beta}_s) \cos \Omega t \\
& + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s(X + q_1 f(l_1)) - \dot{\alpha}_s(Z + q_2 f(l_1)))(\dot{\gamma}_s \sin \Omega t - \dot{\alpha}_s \cos \Omega t) \\
& - (\dot{Z} + \dot{q}_2 f(l_1) + \dot{\alpha}_s(Y + y) - \dot{\beta}_s(X + q_1 f(l_1)))(\Omega + \dot{\beta}_s) \sin \Omega t \}
\end{aligned} \quad (2.51)$$

On définit les constantes caractéristiques du rotor utilisé dans la méthode de Rayleigh-Ritz :

$$\begin{aligned}
 M_T &= M_D + \int_0^L \rho S dy & M_3 &= M_D l_1 + \int_0^L \rho S y dy \\
 M_1 &= M_D f(l_1) + \int_0^L \rho S f(y) dy & M_4 &= M_D l_1^2 + \int_0^L \rho S y^2 dy \\
 M_2 &= M_D f^2(l_1) + \int_0^L \rho S f^2(y) dy & M_5 &= M_D l_1 f(l_1) + \int_0^L \rho S y f(y) dy \\
 I_{mT} &= I_{Dm} + \int_0^L \rho I_m dy & I_{yT} &= I_{Dy} + 2 \int_0^L \rho I_m dy \\
 I_{m1} &= I_{Dm} g(l_1) + \int_0^L \rho I_m g(y) dy & I_{y1} &= I_{Dy} g(l_1) + 2 \int_0^L \rho I_m g(y) dy \\
 I_{m2} &= I_{Dm} g^2(l_1) + \int_0^L \rho I_m g^2(y) dy & I_{y2} &= I_{Dy} g^2(l_1) + 2 \int_0^L \rho I_m g^2(y) dy \\
 I_{aT} &= \int_0^L \rho I_m dy & k &= E \int_0^L I_m h^2(y) dy
 \end{aligned}$$

D'où l'énergie cinétique totale du rotor s'écrit :

$$\begin{aligned}
 T &= T_D + T_a + T_u \\
 &= \frac{M_T}{2} \left[(\dot{X} + \dot{\beta}_s Z - \dot{\gamma}_s Y)^2 + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s X - \dot{\alpha}_s Z)^2 + (\dot{Z} + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s X)^2 \right] \\
 &\quad + M_3 \left[-\dot{\gamma}_s (\dot{X} + \dot{\beta}_s Z - \dot{\gamma}_s Y) + \dot{\alpha}_s (\dot{Z} + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s X) \right] + \frac{M_4}{2} (\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) \\
 &\quad + M_1 \left[(\dot{X} + \dot{\beta}_s Z - \dot{\gamma}_s Y)(\dot{q}_1 + \dot{\beta}_s q_2) + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s X - \dot{\alpha}_s Z)(\dot{\gamma}_s q_1 - \dot{\alpha}_s q_2) + (\dot{Z} + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s X)(\dot{q}_2 - \dot{\beta}_s q_1) \right] - \\
 &\quad + \frac{M_2}{2} \left[(\dot{q}_1 + \dot{\beta}_s q_2)^2 + (\dot{\gamma}_s q_1 - \dot{\alpha}_s q_2)^2 + (\dot{q}_2 - \dot{\beta}_s q_1)^2 \right] + M_5 \left[-\dot{\gamma}_s (\dot{q}_1 + \dot{\beta}_s q_2) + \dot{\gamma}_s (\dot{q}_2 + \dot{\beta}_s q_1) \right] \\
 &\quad + \frac{I_{mT}}{2} (\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2) + I_{m1} \left[-\dot{\beta}_s^2 (\dot{\gamma}_s q_2 + \dot{\alpha}_s q_1) - \dot{\gamma}_s \dot{q}_1 + \dot{\alpha}_s \dot{q}_2 \right] \\
 &\quad + \frac{I_{m2}}{2} \left[\dot{\beta}_s^2 (q_1^2 + q_2^2) - \dot{\alpha}_s^2 q_1^2 - \dot{\gamma}_s q_2^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{\beta}_s (\dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2) - 2\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s q_1 q_2 \right] \\
 &\quad + \frac{I_{yT}}{2} (\dot{\beta}_s + \Omega)^2 + I_{y1} (\dot{\beta}_s + \Omega)(\dot{\gamma}_s q_2 + \dot{\alpha}_s q_1) + \frac{I_{y2}}{2} \left[(\dot{\gamma}_s q_2 + \dot{\alpha}_s q_1)^2 - 2(\dot{\beta}_s + \Omega) \left(\dot{q}_1 q_2 + \frac{\dot{\beta}_s}{2} (q_1^2 + q_2^2) \right) \right] \\
 &\quad + \frac{I_{aT}}{2} \left[(\dot{\alpha}_s^2 - \dot{\gamma}_s^2) \cos 2\Omega t - 2\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s \sin 2\Omega t \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_u d^2 \left((\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + (\dot{\gamma}_s \sin \Omega t - \dot{\alpha}_s \cos \Omega t)^2 \right) \\
 &\quad + m_u d \left\{ (\dot{X} + \dot{q}_1 f(l_1) + \dot{\beta}_s (Z + \dot{q}_2 f(l_1)) - \dot{\gamma}_s (Y + y)) (\Omega + \dot{\beta}_s) \cos \Omega t \right. \\
 &\quad + (\dot{Y} + \dot{\gamma}_s (X + q_1 f(l_1)) - \dot{\alpha}_s (Z + q_2 f(l_1))) (\dot{\gamma}_s \sin \Omega t - \dot{\alpha}_s \cos \Omega t) \\
 &\quad \left. - (\dot{Z} + \dot{q}_2 f(l_1) + \dot{\alpha}_s (Y + y) - \dot{\beta}_s (X + q_1 f(l_1))) (\Omega + \dot{\beta}_s) \sin \Omega t \right\}
 \end{aligned}$$

(2.52)

Cette expression de l'énergie cinétique totale du rotor est celle utilisée par la suite dans l'application des équations de Lagrange. Les constantes caractéristiques du rotor M_T , M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 , I_{mT} , I_{m1} , I_{m2} , I_{yT} , I_{y1} , I_{y2} , I_{aT} sont définies.

II.3.3. Energie de déformation

En introduisant les expressions (2.48) dans (2.38) :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_m (q_1^2 + q_2^2) h^2(y) dy \quad (2.53)$$

et en posant :

$$k = E \int_0^L I_m h^2(y) dy \quad (2.54)$$

L'énergie de déformation s'écrit :

$$U = \frac{k}{2} (q_1^2 + q_2^2) \quad (2.55)$$

II.3.4 Equations du mouvement

Après application des équations de Lagrange, un système de deux équations de la forme suivante est obtenu :

$$[M] \{\ddot{q}\} + ([C] + [C^*]) \{\dot{q}\} + ([k] + [k^*]) \{q\} = \{F\} + \{F^*\} \quad (2.56)$$

est le vecteur des coordonnées généralisées. $\{q\} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$

Les matrices $[M]$, $[C]$, et $[K]$ sont les matrices classiques obtenues dans le cas d'un rotor fixe :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_2 + I_{m2} & 0 \\ 0 & M_2 + I_{m2} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega I_{y2} \\ -\Omega I_{y2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Le vecteur $\{F\}$ est la contribution du balourd dans le cas d'un rotor dont le support est fixe :

$$[F] = \begin{bmatrix} m_u d f(l_1) \Omega^2 \sin \Omega t \\ m_u d f(l_1) \Omega^2 \sin \Omega t \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Le vecteur $\{F^*\}$ représente les termes supplémentaires dus au mouvement du support :

$$[F^*] = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

ou :

$$\begin{aligned} f_1 = m_u d f(l_1) & \left[-(\ddot{\beta}_s + \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s) \cos \Omega t + (\dot{\beta}_s^2 + 2\Omega \dot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s^2) \sin \Omega t \right] \\ & + (M_5 + I_{m1})(\ddot{\gamma}_s - \dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s) + I_{y1} \dot{\alpha}_s (\Omega + \dot{\beta}_s) \\ & + M_1 [\dot{\gamma}_s (2\dot{Y} + \dot{\gamma}_s X - \dot{\alpha}_s Z) - \dot{\beta}_s (2\dot{Z} + \dot{\alpha}_s Y - \dot{\beta}_s X) - \ddot{X} - \ddot{\beta}_s Z + \ddot{\gamma}_s Y] \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} f_2 = m_u d f(l_1) & \left[(\ddot{\beta}_s - \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s) \sin \Omega t + (\dot{\beta}_s^2 + 2\Omega \dot{\beta}_s + \dot{\alpha}_s^2) \cos \Omega t \right] \\ & - (M_5 + I_{m1})(\ddot{\alpha}_s - \dot{\gamma}_s \dot{\beta}_s) + I_{y1} \dot{\gamma}_s (\Omega + \dot{\beta}_s) \\ & + M_1 [-\dot{\alpha}_s (2\dot{Y} + \dot{\gamma}_s X - \dot{\alpha}_s Z) - \dot{\beta}_s (2\dot{X} + \dot{\beta}_s Z - \dot{\gamma}_s X) - \ddot{Z} + \ddot{\beta}_s X + \ddot{\alpha}_s Y] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Les autres matrices sont dues au mouvement d'entraînement du rotor :

$$[C^*] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\beta}_s (2M_2 + 2I_{m2} - I_{y2}) \\ -\dot{\beta}_s (2M_2 + 2I_{m2} - I_{y2}) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

avec :

$$\begin{aligned} k_{11} &= \dot{\alpha}_s^2 (I_{m2} - I_{y2}) - \dot{\beta}_s^2 (M_2 + I_{m2} - I_{y2}) - \dot{\gamma}_s^2 M_2 + \dot{\beta}_s \Omega I_{y2} \\ k_{22} &= \dot{\gamma}_s^2 (I_{m2} - I_{y2}) - \dot{\beta}_s^2 (M_2 + I_{m2} - I_{y2}) - \dot{\alpha}_s^2 M_2 + \dot{\beta}_s \Omega I_{y2} \\ k_{12} &= (\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s + \ddot{\beta}_s) (M_2 + I_{m2} - I_{y2}) \\ k_{21} &= (\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s - \ddot{\beta}_s) (M_2 + I_{m2}) - I_{y2} \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s \end{aligned} \quad (2.66)$$

conclusion

Les équations générales d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement imposé ont été développées dans ce chapitre. Le modèle développé avec la méthode de Rayleigh-Ritz est intéressant en raison de sa simplicité : seulement deux équations de mouvement. Les résolutions pas-à-pas sont donc très rapides.

Chapitre III

Modélisation des rotors par Eléments Finis

Introduction

Les premiers travaux utilisant ce type de modélisation ont été publiés par Nelson et McVaugh [44]. Ils prennent en compte les effets d'inertie de rotation, de charges axiales et d'efforts gyroscopiques. Cette modélisation a été complétée par Zorzi et Nelson [59] pour prendre en compte l'amortissement interne des parties tournantes. Plusieurs travaux ont suivi (Genta [20], Hashish et Sankar [23], Ku [33] et Özgt'Lven et Özkan [59]), confirmant la maturité et la fiabilité de cette technique.

En s'appuyant sur une démarche analogue à la précédente, nous allons définir rapidement la procédure de construction des matrices élémentaires dans un repère fixe en s'appuyant sur les énergies cinétiques et potentielles des différents organes et sur le travail virtuel des forces données (Lalanne [36]).

Pour aboutir à cette modélisation, nous allons expliciter les matrices élémentaires associées à chaque organe majeur des systèmes tournants : le disque, l'arbre, les paliers et le balourd.

III.1. Formulation éléments finis

Dans ce chapitre, les équations générales du mouvement sont développées à l'aide de la méthode des éléments finis. Les matrices élémentaires des différents éléments du rotor sont explicitées (disque, arbre, balourd et palier) et la forme générale des équations de mouvement est présentée.

III.1.1. Disque

Les résultats présentés ici concernent le cas le plus courant d'un disque symétrique. Le disque est modélisé par un nœud et possède quatre degrés de liberté: deux translations u et w , et deux rotations θ et ψ , respectivement autour des axes x et z .

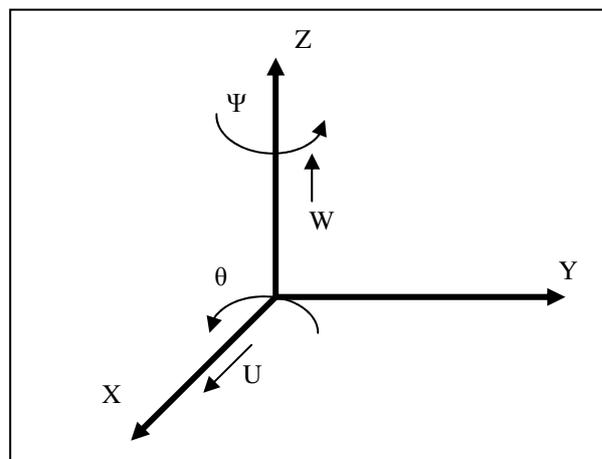


Figure.III.1 Degrés de liberté d'un élément de disque

Le vecteur des déplacements nodaux est pris de la forme :

$$\delta = [u, w, \theta, \Psi]^T \quad (3.1)$$

et les matrices de masse, d'amortissement et de raideur ainsi que le vecteur force des éléments de disque sont obtenus en appliquant les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = [M_d] \{\ddot{\delta}\} + ([C_d] + [C_d^*]) \{\dot{\delta}\} + [K_d^*] \{\delta\} - \{F_d\} \quad (3.2)$$

où $[M_d]$ et $[C_d]$ sont les matrices classiques (matrices de masse et d'effets gyroscopiques) pour un rotor dont le support est fixe :

$$M_d = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dm} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$G_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \Omega \\ 0 & 0 & I_{Dy} \Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Les autres matrices $[C_d^*]$, $[K_d^*]$ et le vecteur $\{F_d^*\}$ sont dus au mouvement du support :

$$C_d^* = \begin{bmatrix} 0 & 2M_D \dot{\beta}_S & 0 & 0 \\ -2M_D \dot{\beta}_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\dot{\beta}_S I_{Dm} - I_{Dy} \dot{\beta}_S \\ 0 & 0 & -2\dot{\beta}_S I_{Dm} + I_{Dy} \dot{\beta}_S & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$K_d^* = \begin{bmatrix} -M_D(\dot{\gamma}_S^2 + \dot{\beta}_S^2) & M_D(\dot{\alpha}_S \dot{\gamma}_S + \dot{\beta}_S) & 0 & 0 \\ M_D(\dot{\alpha}_S \dot{\gamma}_S^2 - \dot{\beta}_S) & -M_D(\dot{\alpha}_S^2 + \dot{\beta}_S^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (I_{Dm} - I_{Dy})(\dot{\gamma}_S^2 - \dot{\beta}_S^2) + I_{Dy} \dot{\beta}_S \Omega & I_{Dy} \dot{\alpha}_S \dot{\gamma}_S + (-\dot{\alpha}_S \dot{\gamma}_S + \dot{\beta}_S) I_{Dm} \\ 0 & 0 & (\dot{\alpha}_S \dot{\gamma}_S + \dot{\beta}_S)(I_{Dy} - I_{Dm}) & (I_{Dm} - I_{Dy})(\dot{\alpha}_S^2 - \dot{\beta}_S^2) + I_{Dy} \dot{\beta}_S \Omega \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$F_d^* = - \begin{bmatrix} M_D \left[\ddot{X} - 2\dot{\gamma}_s \dot{Y} + 2\dot{\beta}_s \dot{Z} - (\dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2)X + (\dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s - \dot{\gamma}_s)(y+Y) + (\dot{\beta}_s + \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s)Z \right] \\ M_D \left[\ddot{Z} - 2\dot{\beta}_s \dot{X} + 2\dot{\alpha}_s \dot{Y} - (\dot{\beta}_s - \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s)X + (\dot{\alpha}_s + \dot{\beta}_s \dot{\gamma}_s)(y+Y) - (\dot{\beta}_s^2 + \dot{\alpha}_s^2)Z \right] \\ I_{Dm} (\ddot{\alpha}_s + \dot{\beta}_s \dot{\gamma}_s) - I_{Dy} \dot{\gamma}_s (\dot{\beta}_s + \Omega) \\ I_{Dm} (\ddot{\gamma}_s - \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s) + I_{Dy} \dot{\alpha}_s (\dot{\beta}_s + \Omega) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

III.1.2 Arbre

Les résultats présentés concernent le cas le plus courant d'un arbre symétrique.

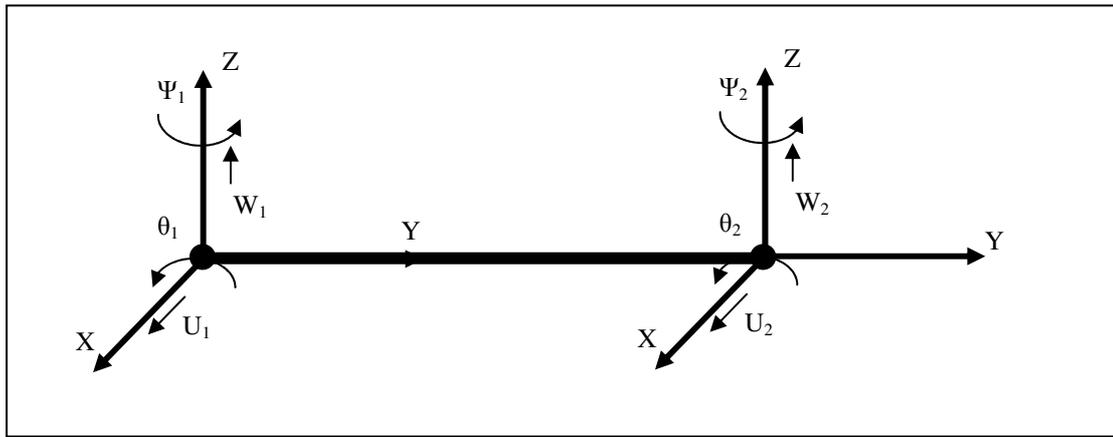


Figure.III.2 Degrés de liberté d'un élément d'arbre

Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^T \quad (3.8)$$

Ce vecteur est séparé en deux vecteurs de déplacement correspondant chacun à une direction :

$$\begin{aligned} \delta_u &= [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T \\ \delta_w &= [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les déplacements sont exprimés à partir de :

$$\begin{aligned} u &= N_1(y) \delta_u \\ w &= N_2(y) \delta_w \end{aligned} \quad (3.10)$$

où \$N_1\$ et \$N_2\$ sont les vecteurs des fonctions de forme classiques d'un élément de poutre en flexion (Zienkiewicz [42]) :

$$\begin{aligned}
N_1(y) &= \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \\
N_2(y) &= \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

et en utilisant les relations entre déplacements et pentes :

$$\begin{cases} \theta = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \Psi = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \tag{3.12}$$

Les matrices élémentaires de l'arbre sont de taille 8*8. Elles sont obtenues en remplaçant u, w, θ , et ψ par leurs expressions dans l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de l'arbre, puis en appliquant les équations de Lagrange.

Energie cinétique :

L'application des équations de Lagrange à l'énergie cinétique de l'arbre conduit à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = [M_a] \{\dot{\delta}\} + [C_a] \{\dot{\delta}\} + [K_a] \{\delta\} - \{F_a\} \tag{3.13}$$

Les matrices M_a , C_a , et K_a , et le vecteur F_a s'écrivent :

$$M_a = \rho S M1 + \rho I_m M2 \tag{3.14}$$

$$C_a = 2\rho \{ \dot{\beta}_s S C1 - I_m \Omega C2 \} \tag{3.15}$$

$$K_a = \rho S (K1 + \ddot{\beta}_s C1 + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s K2) + \rho I_m [K3 - (\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) M4 + 2\dot{\beta}_s (\dot{\beta}_s + \Omega) M2] \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
F_a &= \left\{ \rho S \left[\ddot{X} + 2\dot{\beta}_s \dot{Z} - 2\dot{\gamma}_s \dot{Y} + (\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) Z + (\dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s - \dot{r}) Y - (\dot{\gamma}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) X \right] V1 \right. \\
&\left[\ddot{Z} + 2\dot{\alpha}_s \dot{Y} - 2\dot{\beta}_s \dot{X} + (\dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s - \ddot{\beta}_s) X + (\ddot{\alpha}_s + \dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s) Y - (\dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2) Z \right] V2 \\
&+ (\dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s - \dot{\gamma}_s) V3 + (\ddot{\alpha}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\beta}_s) V4 \} \\
&+ \rho I_m \{ (\dot{\alpha}_s \dot{\beta}_s - \dot{\gamma}_s) V5 + (\ddot{\alpha}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\beta}_s) V6 - 2(\dot{\beta}_s + \Omega)(\dot{\alpha}_s V5 + \dot{\gamma}_s V6) \}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Energie de déformation :

L'énergie de déformation de l'arbre est obtenue en appliquant (3.10) dans l'équation (2.38). Pour un arbre symétrique, la modélisation éléments finis mène à l'écriture suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = EI_m K_{ul} \{\delta\} \quad (3.18)$$

Les matrices $M_1, M_2, M_4, C_1, C_2, K_1, K_2, K_3$ et K_{ul} , ainsi que les vecteurs V_1 à V_6 , nécessaires pour le calcul des matrices élémentaires d'un arbre.

III.1.3 Balourd

L'application des équations de Lagrange à l'énergie cinétique d'un balourd (2.43) donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = m_u d \begin{bmatrix} (\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) \cos(\Omega t) - [(\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \dot{\gamma}_s^2] \sin(\Omega t) \\ (-\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) \sin(\Omega t) - [(\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \dot{\alpha}_s^2] \cos(\Omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Avec :

$$\delta = [u, w, \theta, \psi]^T$$

Par convention, cette expression correspond à un balourd situé sur l'axe z_s à $t = 0$. En pratique, l'influence de plusieurs masses de balourds agissant simultanément dans différents plans et pour différents angles par rapport à z_s doit pouvoir être prise en compte.

Pour un balourd situé à un angle α par rapport à l'axe z_s à $t = 0$, les forces élémentaires suivantes seront introduites dans le terme de droite des équations :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\psi \end{bmatrix} = m_u d \begin{bmatrix} (\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) \cos(\Omega t + \alpha) - [(\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \dot{\gamma}_s^2] \sin(\Omega t + \alpha) \\ (-\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) \sin(\Omega t + \alpha) - [(\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \dot{\alpha}_s^2] \cos(\Omega t + \alpha) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

III.1.4 Paliers

Les matrices élémentaires dues aux paliers sont directement tirées des équations (2.45) :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} & 0 & 0 \\ c_{zx} & c_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

La première matrice est une matrice de raideur et la seconde une matrice d'amortissement.

III.2 Equations du mouvement

Afin de mettre en évidence l'influence des mouvements du support et pour permettre l'assemblage des matrices de l'arbre et des disques, les termes constants des différentes matrices sont regroupés. Seules les matrices de masse sont constantes quel que soit le mouvement du support. Elles ne sont pas rappelées ici.

Ainsi, pour un disque, les matrices d'amortissement et de raideur sont définies de la manière suivante:

$$C_d + C_d^* = C_{d1} + \dot{\beta}_s C_{d2} \quad (3.22)$$

$$K_d^* = \dot{\alpha}_s^2 K_{d1} + \dot{\beta}_s^2 K_{d2} + \dot{\gamma}_s^2 K_{d3} + \dot{\beta}_s K_{d4} + \ddot{\beta}_s K_{d5} + \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s K_{d6} \quad (3.23)$$

Pour un arbre, les matrices d'amortissement et de raideur sont définies de la manière suivante ((3.15) et (3.16)):

$$C_a = C_{a1} + \dot{\beta}_s C_{a2} \quad (3.24)$$

$$K_a = K_{a1} + \dot{\alpha}_s^2 K_{a2} + \dot{\beta}_s^2 K_{a3} + \dot{\gamma}_s^2 K_{a4} + \dot{\beta}_s K_{a5} + \ddot{\beta}_s K_{a6} + \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s K_{a7} \quad (3.25)$$

Ainsi, après assemblage des matrices et en regroupant les termes constants, un système d'équations de la forme suivante est obtenu

$$M_{\ddot{q}} + \{C_1 + \dot{\beta}_s C_2\} \dot{q} + \{K_1 + \dot{\alpha}_s^2 K_2 + \dot{\beta}_s^2 K_3 + \dot{\gamma}_s^2 K_4 + \dot{\beta}_s K_5 + \ddot{\beta}_s K_6 + \dot{\alpha}_s \dot{\gamma}_s K_7\} q = F(t) \quad (3.26)$$

où M , C_1 et K_1 sont les matrices classiques de la dynamique des rotors dans le cas d'un support fixe. Les matrices additionnelles C_2 , K_2 , K_3 , K_4 , K_5 , K_6 , K_7 représentent l'influence des mouvements du support. Le vecteur $F(t)$ comporte les forces engendrées par le mouvement sur le disque et sur l'arbre, ainsi que la contribution du balourd.

III.3 Résolution des équations du mouvement

La méthode de résolution utilisée est une méthode pas-à-pas. La méthode de Newmark est choisie en raison de sa stabilité. Il s'agit d'un schéma d'intégration à un pas. Le déplacement et la vitesse sont développés en série de Taylor à l'aide des 2 paramètres indépendants a et b ainsi que du pas de temps t

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + ((1 - a)\ddot{q}(t) + a\ddot{q}(t + \Delta t))\Delta t \quad (3.27)$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t \dot{q}(t) + ((1 - b)\ddot{q}(t) + b\ddot{q}(t + \Delta t))\frac{\Delta t^2}{2} \quad (3.28)$$

Le choix des paramètres a et b gouverne la convergence de la méthode. Les combinaisons de leurs valeurs donnent lieu à plusieurs méthodes dont les plus utilisées sont :

- $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$: approximation linéaire de l'accélération sur t
- $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$ approximation constante de l'accélération qui est égale à la valeur moyenne de l'accélération sur t . Il s'agit en fait de la méthode des trapèzes.

Ces derniers coefficients sont utilisés ici car ils permettent d'avoir un schéma inconditionnellement stable. Les équations (3.27) et (3.28) deviennent alors :

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + \left(\frac{1}{2} \ddot{q}(t) + \frac{1}{2} \ddot{q}(t + \Delta t) \right) \Delta t \quad (3.29)$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t \dot{q}(t) + \left(\frac{1}{4} \ddot{q}(t) + \frac{1}{4} \ddot{q}(t + \Delta t) \right) \Delta t^2 \quad (3.30)$$

L'équation (3.30) permet d'exprimer l'accélération au temps $(t + \Delta t)$:

$$\ddot{q}(t + \Delta t) = \frac{4}{\Delta t^2} (q(t + \Delta t) - q(t) - \Delta t \dot{q}(t)) - \ddot{q}(t) \quad (3.31)$$

En introduisant l'équation (3.31) dans l'équation (3.29) il vient :

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \frac{2}{\Delta t^2} (q(t + \Delta t) - q(t)) - \dot{q}(t) \quad (3.32)$$

D'après l'expression (3.26) le système d'équations du mouvement a la forme suivante :

$$M\ddot{q}(t) + C(t)\dot{q}(t) + K(t)q(t) = F(t) \quad (3.33)$$

En reportant les expressions (3.31) et (3.32) dans le système (3.33) au temps $(t + \Delta t)$ en regroupant les termes en $q(t + \Delta t)$, il vient :

$$\left(\frac{4M}{\Delta t^2} + \frac{2C(t + \Delta t)}{\Delta t} + K(t + \Delta t) \right) q(t + \Delta t) = F(t + \Delta t) + M \left(\frac{4}{\Delta t^2} q(t) + \frac{4}{\Delta t} \dot{q}(t) + \ddot{q}(t) \right) + C(t + \Delta t) \left(\frac{2}{\Delta t} q(t) + \dot{q}(t) \right) \quad (3.34)$$

Comme le mouvement est imposé (donc connu), les matrices $C(t)$ et $K(t)$ et le vecteur $F(t)$ sont connus à chaque instant t . Connaissant le déplacement, la vitesse et l'accélération à l'instant t , il est alors possible de calculer le déplacement à l'instant $(t + \Delta t)$.

Conclusion

Le modèle obtenu à l'aide de la méthode des éléments finis est plus adapté pour modéliser les systèmes réels car il est plus précis et permet d'étudier l'ensemble des modes de vibration du rotor. Il est également modulaire car chaque élément du rotor possède ses propres caractéristiques. Des éléments peuvent donc être ajoutés ou enlevés au gré de l'utilisateur qui peut également ajouter des raideurs, des amortissements ou des forces extérieures en chaque nœud.

Chapitre IV

Hélicoptères et rotor anti-couple

Introduction

Hélicoptère, véhicule de locomotion aérienne plus lourd que l'air, dont la portance n'est pas assurée par des ailes fixes comme celles des avions classiques, mais par un ou plusieurs rotors motorisés, mis en rotation autour d'un arbre vertical au-dessus du fuselage. Les hélicoptères peuvent s'élever ou descendre à la verticale, rester stationnaires, et évoluer vers l'avant, vers l'arrière, ou latéralement. L'hélicoptère a été le premier type d'appareil plus lourd que l'air capable de décoller et de voler verticalement. Il diffère de l'autogire, autre type d'appareil à voilure tournante, en ce que son rotor fournit la portance, la propulsion, et l'essentiel des forces contrôlant le vol.

Depuis le IV^e siècle av. J.-C., les Chinois faisaient voler de petits jouets sur le principe de l'hélicoptère pour fasciner les enfants. Par l'intermédiaire du commerce, on sait que ce jouet est arrivé jusqu'en Europe. En effet, il apparaît dans une peinture de 1463. Le livre "Pao Phu Tau" du IV^e siècle trace également l'ébauche d'un aéronef à ailes rotatives.

En Europe, le premier à s'intéresser au concept d'hélicoptère fut le savant italien Léonard de Vinci. Un de ses dessins, daté de 1486, montre une machine volante à aile tournante, basée sur le principe de la vis d'Archimède. Cependant, en l'absence de connaissances en aérodynamique et sans motorisation adéquate, il restera à l'état de projet.

Il faudra attendre la fin du XVIII^e siècle pour qu'une véritable avancée se produise : en 1754 le Russe Lomonossov essaie devant un aréopage scientifique un modèle complexe à deux rotors coaxiaux contrarotatifs, mûs par un mécanisme d'horlogerie, et démontre l'existence d'une force de sustentation. Le 26 avril 1784, les Français Launoy et Bienvenu font voler devant l'Académie royale des sciences un petit modèle très simple mû par un mécanisme de ressort à arc. En 1877, un autre Italien, Enrico Forlanini parvient à faire voler un petit hélicoptère à vapeur. Dix ans plus tard le Français Trouve fait décoller un modèle doté d'un moteur électrique, dont l'alimentation est obtenue depuis le sol par de fins fils de cuivre.

Les premiers essais significatifs d'hélicoptères emportant un homme sont réalisés en 1907, d'une part par Louis Breguet et Charles Richet à Douai, d'autre part par Paul Cornu à Coquainvilliers, près de Lisieux. C'est la bascule historique entre des modèles de petite taille et des machines faites pour emporter leur pilote. Puis le Danois Jens Christian Ellehammer en 1912, l'Argentin Raoul Pateras, marquis de Pescara, et le Français Étienne Oehmichen à partir de 1920, réussissent à voler de mieux en mieux jusqu'à ce qu'Oehmichen batte Pescara sur le poteau en couvrant un kilomètre en circuit fermé le 4 mai 1924 à Arbouans (près de Montbéliard). Louis Breguet et René Dorand réussirent à faire voler durant les années trente un appareil très réussi, le "Gyroplane Laboratoire", qui atteint 100 km/h et vola plus d'une heure. Cependant, l'hélicoptère restera un véhicule expérimental jusqu'aux années 1940.

Entre temps, de nombreux pionniers se sont lancés dans l'aventure, dont les Allemands Heinrich Focke en 1937, Anton Flettner en 1939 et l'Américain d'origine russe Igor Sikorsky en 1939 avec son VS-300.

IV.1 Utilisations

Les particularités qui font l'intérêt de l'hélicoptère sont sa capacité à décoller et atterrir verticalement, son accès possible aux lieux étroits et la possibilité de se déplacer lentement et dans tous les axes (en particulier latéralement et à reculons). Il est donc doué d'une manœuvrabilité adaptée à un certain nombre de situations spécifiques comme :

- le combat militaire : reconnaissance, lutte anti-chars, lutte anti-aéronefs, appui-protection aux troupes au sol ou aux autres hélicoptères, transport de troupes ou de matériel, etc. ;
- la lutte contre les incendies
- le transport civil
- l'évacuation de blessés, que ce soit sur terre, en mer ou en montagne
- la surveillance de police et l'observation
- le transport de marchandises
- l'utilisation pour des prises de vue spécifiques au cinéma, à la télévision ou encore en photographie

Il existe plusieurs formules de construction d'hélicoptères. La plus répandue, dont le premier à breveter un projet qui l'utilisait a été l'allemand Heinrich Focke est composé de deux parties essentielles :

- le rotor principal, dont l'axe est vertical. Il assure la sustentation (résultat de la portance, de la vitesse de rotation et de l'incidence des pales), le vol en translation (possible dans toutes les directions, avant, arrière et latérale) et le contrôle d'attitude en tangage et en roulis de l'hélicoptère
- le rotor de queue ou rotor anti-couple, dont l'axe est sensiblement horizontal. Il empêche l'hélicoptère de tourner sur lui même lorsque le rotor principal tourne et permet d'assurer le contrôle en lacet

Voici quelques autres formules de construction d'hélicoptères :

- avec deux rotors de sustentation en tandem (l'un derrière l'autre, leur principal promoteur a été l'états-unien Frank Piasecki. Ce système dans lequel les rotors tournent en sens inverse permet d'annuler le couple de réaction du rotor sur la cellule
- avec deux rotors de sustentation coaxiaux (tournant autour du même axe) comme les appareils du constructeur russe Kamov
- avec des rotors de sustentation dits "engrenants", dont la rotation est synchronisée de manière que leurs pales se croisent sans se toucher pendant la rotation, comme les machines du constructeur allemand Anton Flettner reprises par l'Américain Kaman réalisateur du K-Max qui de par leur conception font également l'économie d'un rotor anti-couple.

IV.2 Principe de fonctionnement

Les pales du rotor principal sont généralement entraînées par le moteur au moyen d'une boîte de transmission. Cependant on a aussi essayé d'utiliser la force de réaction des gaz d'échappement en extrémité des pales comme sur le Djinn.

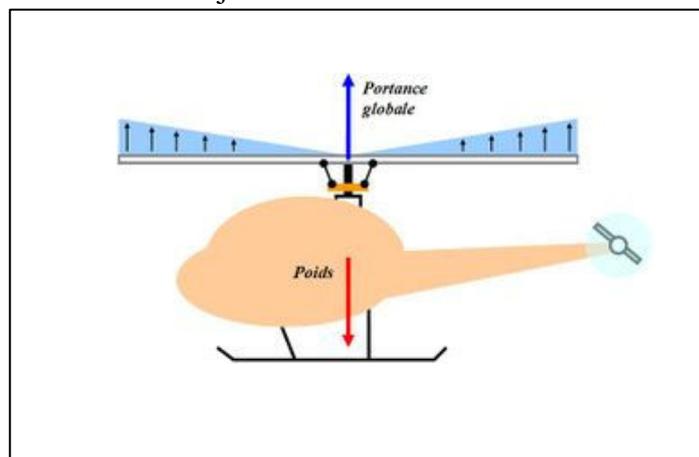


Figure. IV.1 Vol stationnaire

Elles ont un profil asymétrique ou symétrique et agissent en rotation suivant le même principe que les ailes d'un avion. Le rotor tournant toujours à vitesse angulaire constante, c'est la variation de l'angle d'incidence des pales (angle formé entre la corde de la pale et le vent relatif) qui provoque une modification de la position de l'aéronef : pour monter, on augmente l'incidence (sur un avion, on cabre l'appareil) et pour descendre, on la diminue (sur un avion, on le fait piquer). Cette variation d'incidence est identique sur chacune des pales (modification générale de l'incidence – appelé ou encore le pas – des pales) et se fait au moyen de la commande de pas général (aussi appelée pas collectif) tenue par la main gauche du pilote.

IV.3 Le retour des queues

Toute rotation du rotor principal entraîne un couple de réaction qui a tendance à faire tourner la cellule autour de lui et en sens inverse (3^e loi de Newton). Pour contrer cet effet indésirable, on place (pour les hélicoptères à un seul rotor principal), à l'extrémité de la poutre de queue un rotor secondaire plus petit et tournant dans un plan sensiblement vertical appelé rotor anti-couple. Le couple de réaction variant en fonction de l'incidence des pales du rotor principal (la résistance au vent est d'autant plus grande que l'angle que forme celui-ci avec la corde des pales augmente), la force à appliquer doit elle aussi pouvoir être réglée par l'intermédiaire du rotor anti-couple qui est commandé par deux pédales (le palonnier) situées aux pieds du pilote. Selon le sens dans lequel le pilote agit sur le palonnier (enfoncement de la pédale gauche ou de la pédale droite) il augmente l'incidence des pales, ce qui va davantage contrer le couple du rotor principal (« tirer » la queue), ou il diminue cette incidence et qui aura pour effet de laisser « filer » celle-ci. Le mouvement de giration en vol stationnaire est commandé à l'aide du palonnier. Selon que le rotor principal tourne dans le sens horaire comme sur les hélicoptères de conception française ou en sens antihoraire (hélicoptères de conception étasunienne ou allemande avant la fusion avec Aérospatiale pour créer Eurocopter), le rotor anti-couple sera situé d'un côté ou de l'autre de la poutre de queue ou bien son souffle sera dirigé dans un sens ou dans l'autre, s'il est encastré dans un fenestron.

IV.4 Vol stationnaire

Le rotor de l'hélicoptère étant entraîné à vitesse constante, les déplacements verticaux de l'hélicoptère sont obtenus par la seule modification du pas des pales. A ce stade du vol, la portance des pales reste identique sur un tour du rotor. Il existe une position où la portance globale s'oppose exactement au poids de l'appareil : l'hélicoptère peut rester immobile. Si elle lui est inférieure, l'appareil descend. Si elle est supérieure, il monte.

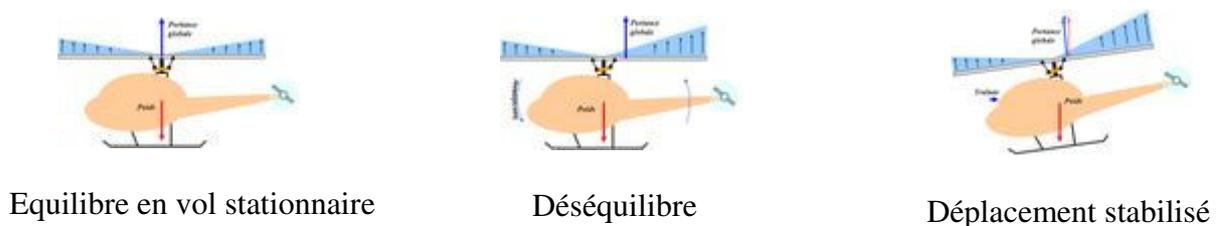


Figure.IV.3 Mouvements de l'hélicoptère

IV.5 Vol en translation

Pour que l'hélicoptère avance il faut une force à composante horizontale. Si on augmente la portance des pales lorsqu'elles passent derrière le rotor, l'équilibre précédent est rompu par décalage des forces poids et portance; l'appareil alors bascule vers l'avant. De ce fait, la portance n'est plus verticale. Il reste toutefois une composante verticale principale qui s'oppose au poids permettant le maintien en l'air, et la composante horizontale motrice engendre le mouvement d'avancement, donc accélération jusqu'à une vitesse où la traînée globale (résistance à l'avancement de l'hélicoptère) s'équilibrera avec la composante motrice. Le pilote possède 3 systèmes principaux de commandes, le levier du cyclique (manche), le collectif, et les pédales de palonnier. Le manche contrôle l'angle du rotor principal en inclinant la tête du rotor sur lequel sont fixées les pales à l'aide de biellettes de pas dans la direction du déplacement désiré par l'intermédiaire du plateau cyclique fixe et tournant. Le collectif contrôle l'angle de pas commun de toutes les pales, en conjonction avec le plateau cyclique qui modifie la portance générée par le rotor. Le palonnier augmente ou diminue la portance du rotor de queue qui doit varier en fonction de la puissance mise en jeu sur le rotor principal, donc de la position du collectif.

Dimensions:

- diamètre rotor principal: • 13 mètres
- diamètre rotor anti-couple • 2 mètres
- longueur: • 12.9 mètres
- hauteur: • 5,4 mètres

Poids:

- poids en charge: • 6,4 tonnes
- poids maxi au décollage: • 9,1 tonnes
- emport carburant interne: • 1,9 tonnes
- capacité d'emport • 14 hommes ou 12 civières

Propulsion et performances:

- moteurs: • 2 turbines Rolls-Royce/Turboméca RTM322
- puissance: • 2 x 1700 ch
- vitesse maximum: • 291 km/h
- plafond opérationnel: • 2 600 mètres

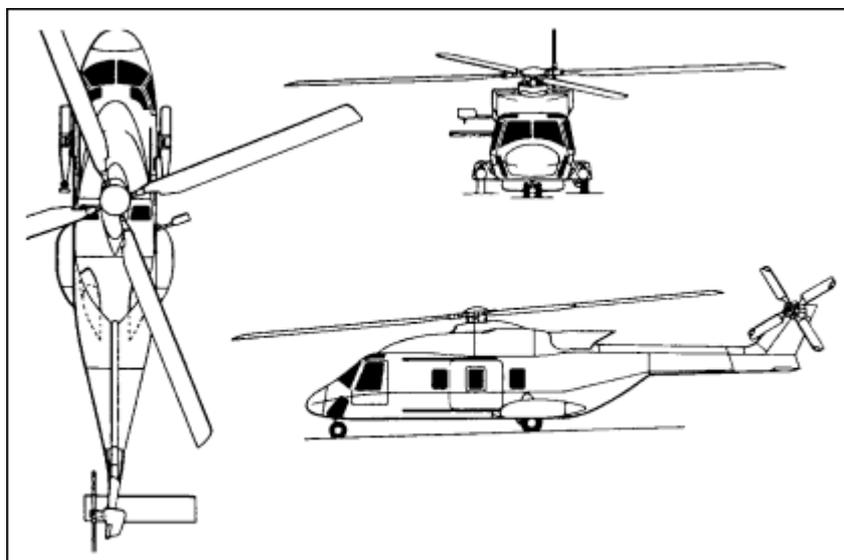


Figure.IV.2 Plan d'un hélicoptère EC-665

IV.6 Force et phénomène aérodynamique

L'hélicoptère est l'engin volant qui met en jeu le plus de forces et de lois physiques. Il a toujours suscité une énorme volonté de la part des passionnés pour en améliorer les caractéristiques, que ce soient Léonard de Vinci ou de grands bureaux d'étude au sein d'entreprises aéronautiques. Un hélicoptère classique possède deux ensembles de rotors. Le premier, appelé communément disque rotor, installé horizontalement, produit la portance et la poussée. Ce rotor peut comporter de 2 à 8 pales en fonction du type d'hélicoptère.

Un second ensemble, plus petit, monté verticalement à l'extrémité de la queue, est le rotor d'anti-couple.

La fonction du rotor de queue consiste à contrer le couple produit par le rotor principal. Certains hélicoptères n'ont pas de rotor d'anti-couple, mais un deuxième rotor principal qui tourne dans le sens opposé du premier. L'aérodynamisme concerne le mouvement de l'air et les forces agissant sur des objets en déplacement dans l'air. En effet, l'aérodynamisme met en relation un objet (aéronef), le mouvement (vent relatif) et l'air (atmosphère). La dynamique du vol de l'hélicoptère ne peut être expliquée que si l'on prend en compte différents phénomènes, lois et forces physiques appliqués à l'appareil. Les principales lois du déplacement de Newton qui influencent le plus le vol sont :

1. L'inertie - Le principe d'inertie se base sur la loi physique selon laquelle un corps, une fois mis en mouvement, garde toutes les valeurs déterminant le mouvement - vitesse relative, direction, etc. - tant que n'intervient aucune autre force le soumettant à d'autres valeurs.
2. Action / Réaction - Pour chaque force appliquée à un objet il existe une force réactive opposée et égale à celle-ci (troisième loi de Newton).

IV.7 Les phénomènes permettant le vol de l'hélicoptère

IV.7.1 Le vent relatif

a- La notion de vent relatif

La notion vent relatif est essentielle pour comprendre l'aérodynamique des systèmes à rotor car le vent a une influence sur la poussée créée par la pale. Le vent relatif est formé par le mouvement d'une pale au travers de l'air.

b- Le flux induit

Lorsqu'un hélicoptère est en stationnaire, un vent relatif est créé par la rotation des pales. Le mouvement des pales étant horizontal, le flux d'air sera dirigé vers le bas. Les pales se déplacent en suivant une trajectoire constante et passent par des points déjà rencontrés par les pales précédentes.

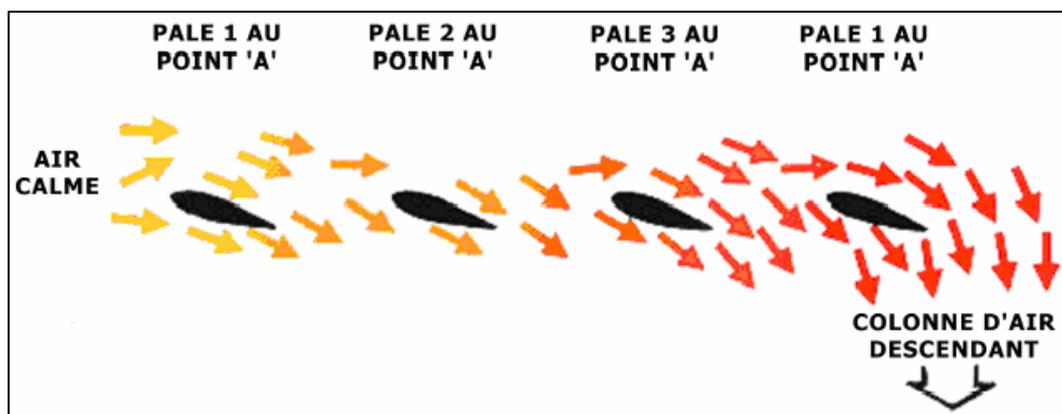


Figure.IV.3 Mouvement d'air descendant au passage des pales

Le courant d'air descendant ainsi créé s'appelle le flux induit. Il est le plus important lors de vols stationnaires; il varie beaucoup en fonction de la vitesse de déplacement.

IV.7.2 La force aérodynamique totale

a- La circulation de l'air autour d'une pale

La force aérodynamique totale résulte du flux d'air circulant sur et sous la pale. L'endroit où se divise le flux d'air en deux est appelé le point d'impact :

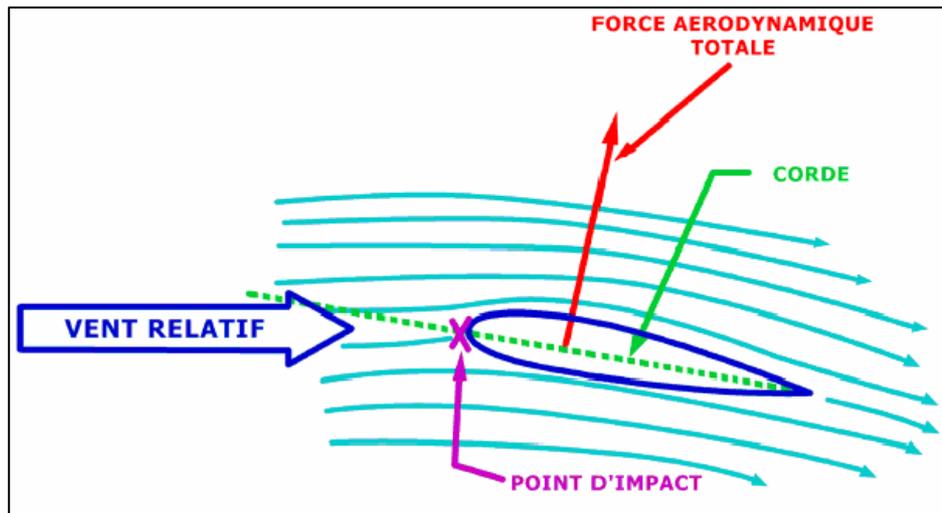


Figure.IV.4 Flux d'air autour d'une aile

Le schéma ci-dessus illustre la circulation de l'air autour d'une aile. A l'extrémité de la pale le flux d'air est dévié vers le bas. Or, d'après la troisième loi de Newton, toute action provoque une réaction égale et opposée. Ainsi une force égale et opposée agit sur l'aile et s'ajoute à la force aérodynamique. Cette force est créée par l'air circulant au dessus de l'aile.

b- Définition de la force aérodynamique totale

La force aérodynamique totale (aussi appelée force résultante) qui est la somme des forces décrites précédemment, peut être divisée en deux : la traînée et la poussée. La poussée agit dans une direction perpendiculaire au vent relatif, et la traînée est une force résistante qui s'oppose au mouvement de l'aile dans l'air. La traînée est parallèle à la direction de la vente relative.

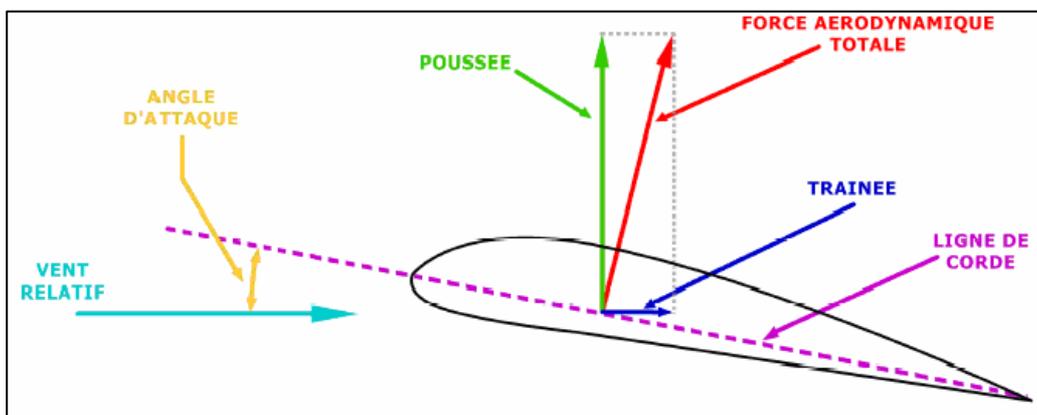


Figure.IV.5 Forces agissant sur une aile

c- Autres facteurs agissant sur la poussée

De nombreux facteurs contribuent à la poussée de l'hélicoptère. Une augmentation de vitesse entraîne une poussée plus importante. La poussée n'évolue pas de manière proportionnelle à la vitesse. Plus l'angle d'attaque est important, plus la poussée est importante jusqu'au décrochage (lorsque l'angle devient trop important, la portance étant réduite, l'hélicoptère peut ne plus être tenu en l'air). La forme et la surface d'une pale sont donc deux facteurs essentiels qui détermineront la poussée et la traînée produites. Tout changement de conception de ces éléments aura une conséquence directe sur le vol de l'appareil. De plus, l'augmentation de poussée provoque généralement une augmentation de traînée.

IV.7.3 La vitesse des pales

a- La variation de la poussée

Lors d'un stationnaire, un courant d'air est créé au dessus des pales. La vitesse des pales près du mat de rotor est moins grande que celle au bout car la distance parcourue est inférieure. La vitesse de la pale varie énormément selon le rayon parcouru. Or la montée varie selon le carré de la vitesse. Ce qui suppose qu'au point A (au milieu de la pale), la montée vaut seulement le quart de la montée à l'extrémité de la pale.

b- Les pales vrillées

C'est pour cette raison que les pales sont conçues vrillées. L'angle d'attaque qui influence la montée sera supérieur au niveau du rotor par rapport à l'extrémité de la pale. Cette conception permet de répartir au mieux la force de poussée le long de la pale.

IV.7.5 La force centrifuge

La force centrifuge dans l'hélicoptère est créée par la rotation et la masse des éléments du rotor principal. Cette grande force a tendance à éloigner les éléments de leur centre de rotation. Elle a une charge de l'ordre de 6 à 12 tonnes à la base de chaque pale pour des hélicoptères de 2 à 4 passagers et peut atteindre 40 tonnes pour de plus gros hélicoptères.

Lorsqu'un hélicoptère est au sol, ses pales s'affaissent à cause de leur poids et de leur envergure. Lorsque le rotor commence à tourner, les pales se soulèvent grâce à la force centrifuge. A vitesse de croisière, elles sont complètement déployées même si l'appareil ne décolle pas encore où que l'angle d'attaque est encore nul.

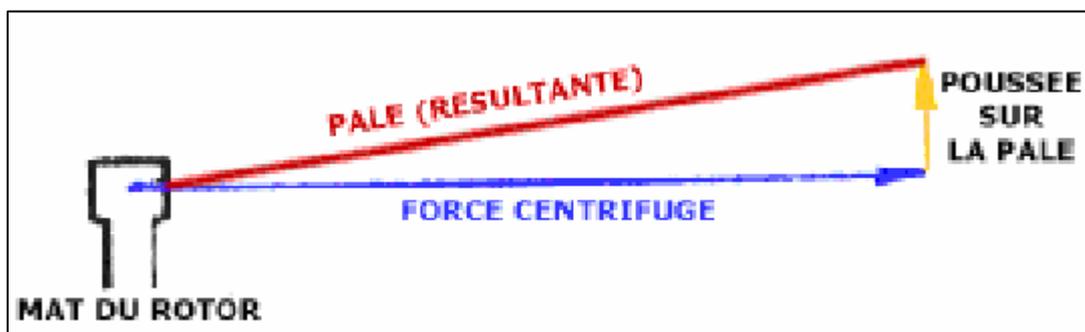


Figure.IV.6 La force centrifuge, poussée et résultante

IV.8 Les effets néfastes sur le vol de l'hélicoptère

IV.8.1 L'effet de cône

Lorsque l'hélicoptère décolle ou vole, les pales dépassent leur état horizontal et forment un cône. Cet effet de cône dépend de la vitesse de rotation des pales, du poids de l'appareil et de la force de gravité. En supposant le poids et la gravité constants, moins les pales tournent vite, plus l'effet de cône est important. Un effet de cône excessif engendre un effort anormal sur les pales et une mauvaise poussée à cause de la réduction du disque balayé par les pales.

IV.8.2 L'effet gyroscopique

L'effet gyroscopique est un phénomène que l'on peut remarquer dans tout objet en rotation. Cet effet, provoqué par une force, produit lui-même une force de même direction, qui se manifeste après une rotation de 90°.

IV.8.3 La traînée

La traînée est la force qui s'oppose au mouvement d'un hélicoptère dans l'air. Néanmoins, cette force est caractérisée par différentes composantes :

a- La traînée totale

La traînée totale est le résultat de la somme entre la traînée du profil, la traînée induite et la traînée parasite. Cette force est fonction de la vitesse des pales.

b- La traînée du profil

La traînée du profil est créée par le frottement des pales au contact de l'air. Cette traînée varie peu lors du changement d'angle d'attaque, mais elle a tendance à augmenter modérément avec la vitesse.

c- La traînée induite

La traînée induite est consécutive à la montée de l'appareil. Elle augmente avec l'angle d'attaque. C'est la principale traînée qui s'oppose au mouvement de l'hélicoptère lorsque l'on décompose la force aérodynamique totale.

d- La traînée parasite

La traînée parasite est provoquée par les parties non aérodynamiques comme par exemple le cockpit, les trains d'atterrissage, la queue etc. Cette traînée augmente avec la vitesse.

IV.8.4 Le moment de torsion

a- Conséquence sur le fuselage :

En vol, le fuselage de l'hélicoptère tend à tourner dans le sens opposé des pales. Cet effet, qui confirme la loi de Newton sur l'action et la réaction, est appelé moment de torsion. Cette torsion n'a aucun effet sur les hélicoptères à 2 rotors principaux car ils tournent dans des sens opposés et l'effet s'annule. Par contre, cela pose un problème qu'il faut régler sur les hélicoptères à rotor principal unique.

b- Le rotor d'anti-couple

Pour contrer cet effet sur les hélicoptères à rotor principal unique, un rotor d'anti-couple a été placé au bout de la queue de l'appareil. On l'appelle aussi rotor de queue. Il a une vitesse proportionnelle au rotor principal et est entraîné par ce dernier. Il est aussi utilisé pour changer volontairement le sens et la direction du nez de l'engin. Ainsi, cinq à trente pour cent de la puissance moteur est utilisée pour faire tourner le rotor de queue.

Chapitre V

Simulation numérique du rotor anti-couple

Introduction

Dans ce chapitre on a présenté une simulation numérique de rotor anti-couple d'hélicoptère pour la détermination des fréquences propres et des modes propres.

L'analyse modale est une méthode d'étude des comportements vibratoires de la structure de composants. Elle est utilisée pour enregistrer, analyser et évaluer la fréquence propre et le mode d'oscillation, ainsi que pour optimiser la structure de ces composants. En simulant les fréquences qui agissent sur certains éléments, par exemple sur des plates-formes de mesure de force, on peut déterminer la fréquence propre du système de mesure en fonction de la masse, de la rigidité et de l'amortissement. L'objectif de l'analyse modale est de concevoir les systèmes de mesure de telle sorte que, sur une plage de fréquence donnée, aucune fréquence de résonance ne soit générée qui pourrait fausser le signal pendant la saisie de mesures.

V.1 Présentation du Rotor Anti-couple

On a développé un modèle éléments finis qui comporte quinze nœuds, répartis sur l'arbre illustré sur la figure suivante :

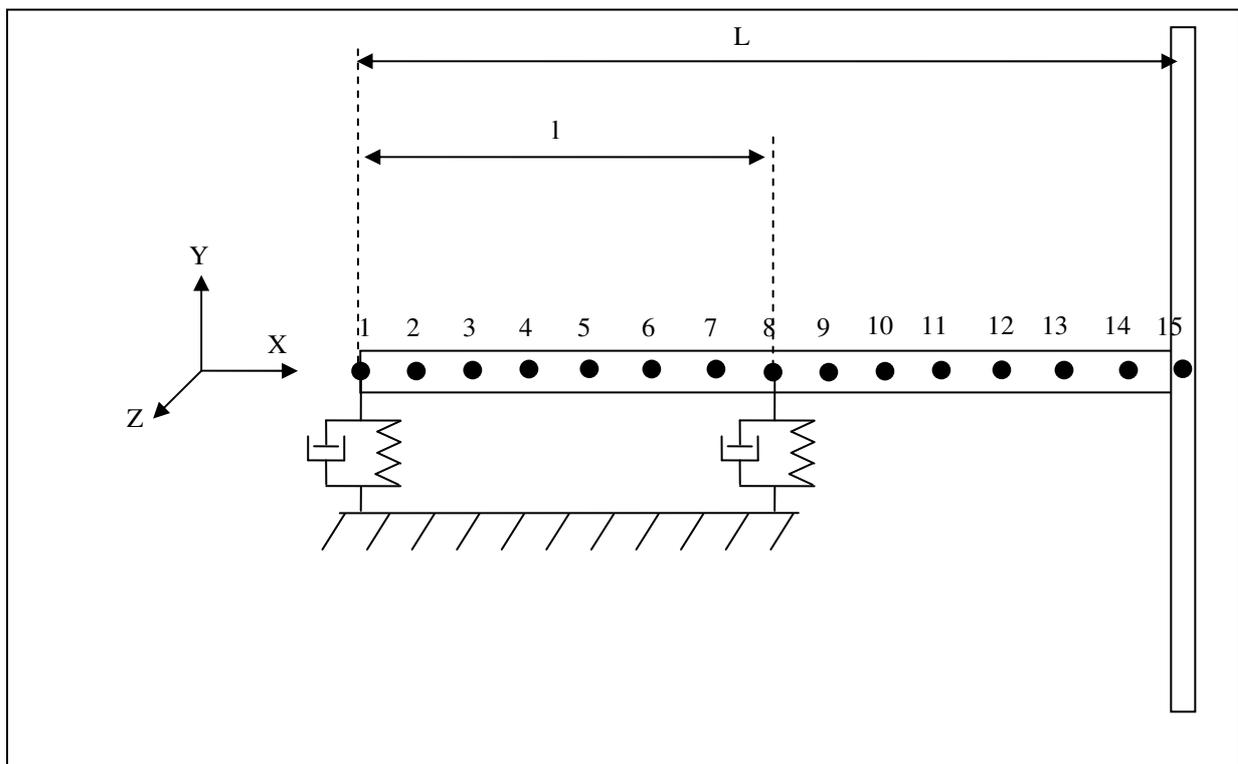


Figure.V.1 Schématisation du rotor anti-couple à quinze nœuds

V.1.1 Géométrie du rotor

Les valeurs numériques utilisées sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll} L = 1.4 \text{ m} & D_1 = 0,01 \text{ m} \\ l_1 = 0.7 \text{ m} & D_2 = 2 \text{ m} \end{array}$$

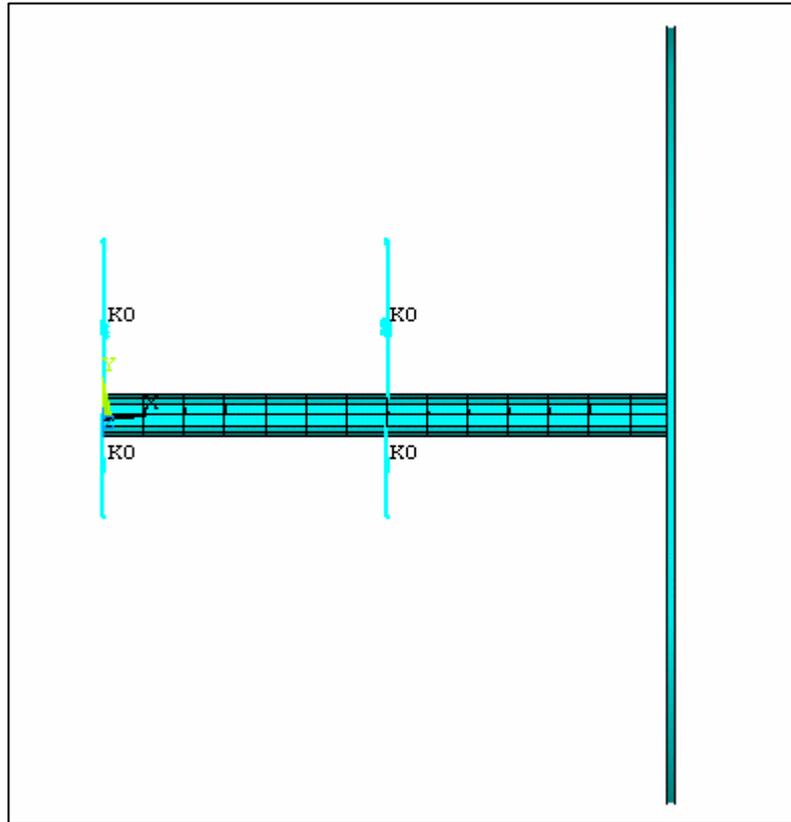


Figure.V.2 Modèle éléments finis
22 éléments, 38 noeuds

V.1.2 Propriétés du matériau

Les pales : verre époxy

$$\begin{array}{l} E = 73 \text{ GPa} \\ \rho = 2540 \text{ kg/m}^3 \\ \nu = 0.3 \end{array}$$

Arbre : Superalliage à base de Cr (Cr, Mo, Ni)

$$\begin{array}{l} E = 247 \text{ GPa} \\ \rho = 7850 \text{ kg/m}^3 \\ \nu = 0.3 \end{array}$$

Matériau similaire : a une propriété spéciale pour faire la liaison entre l'arbre et le disque, sa densité est égale à 1.

$$\begin{array}{l} E = 210 \text{ GPa} \\ \rho = 1 \text{ kg/m}^3 \\ \nu = 0.3 \end{array}$$

V.1.3 Caractéristiques des paliers

Pour les deux paliers similaires on a les constants de raideur et d'amortissement suivants :

Palier 1 : placé sur le nœud 1

$$\begin{aligned}K_{xx} &= 10^7 \text{ N/m} \\ K_{yy} &= 10^9 \text{ N/m} \\ C_{xx} &= 1000 \text{ N.s/m} \\ C_{yy} &= 2000 \text{ N.s/m}\end{aligned}$$

Palier 2 : placé sur le nœud 2

$$\begin{aligned}K_{xx} &= 10^7 \text{ N/m} \\ K_{yy} &= 10^9 \text{ N/m} \\ C_{xx} &= 1000 \text{ N.s/m} \\ C_{yy} &= 2000 \text{ N.s/m}\end{aligned}$$

Les deux paliers sont placés respectivement sur les nœuds 1 et 2 :

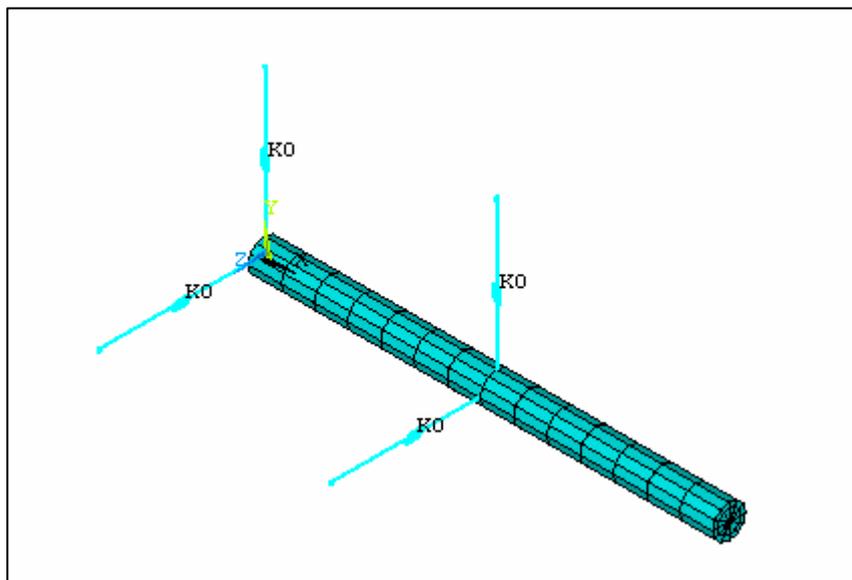


Figure.V.3 Paliers 1 et 2 du rotor anti-couple

V.1.4 Caractéristiques des pales

On a l'arbre contient 4 ailettes

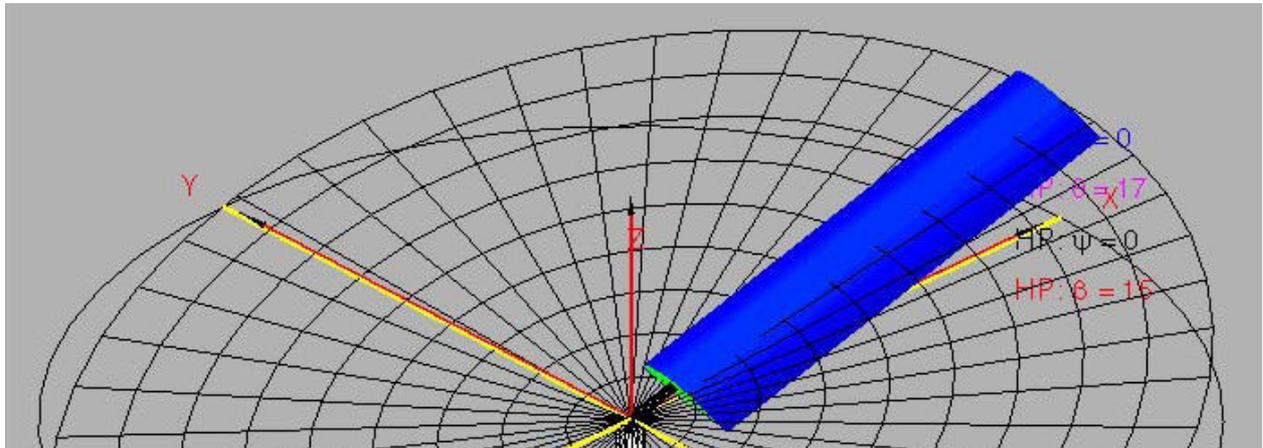


Figure. V.4 Rotor anti-couple à 4 ailettes

On a les angles d'Euler : θ , ψ , β

La géométrie de la pale est créée dans catia par la suite les données sont importées au logiciel de calcul Ansys pour faire le maillage.

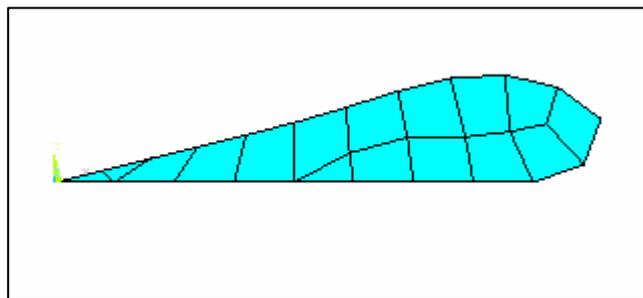


Figure.V.5 Maillage de la section de la pale Profile d'aile

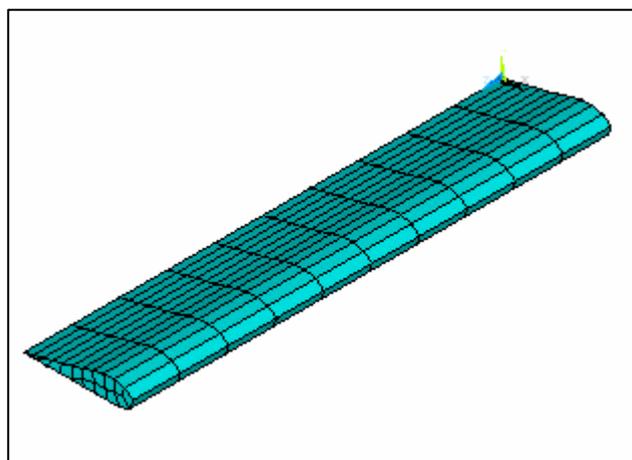


Figure.V.6 Pale modèle éléments finis

Les moments d'inertie

$$I_{XX} = 12.739 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{YY} = 13.133 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{ZZ} = 0.4270 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_0 = 1273.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_p = 3.7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

La masse $M=152 \text{ kg}$

Le volume $V= 0.06 \text{ m}^3$

Centre de masse: $X_C= 0.145\text{m}$ $Y_C= 0.017\text{m}$ $Z_C= 0.5 \text{ m}$

V.1.5 Élément type de maillage

Maillage de l'arbre :

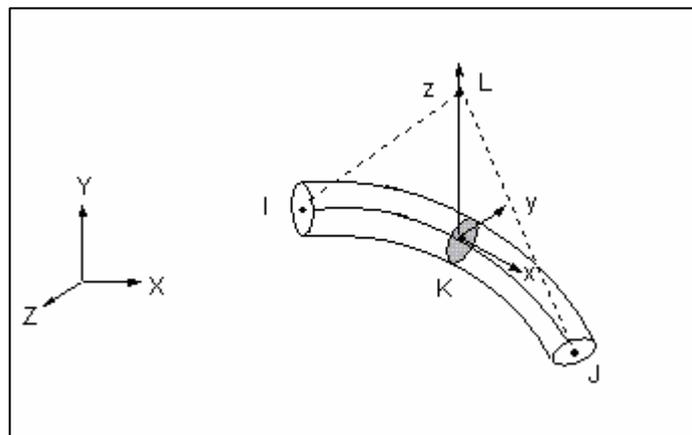


Figure.V.7 Élément de maillage type BEAM189

BEAM 189 : Élément 3D quadratique (3 nœuds), contient 6 degrés de liberté (3 translations x, y, z ; et 3 rotations autour des axes x, y, z), cet élément peut être utilisé dans le cas linéaire ou non linéaire.

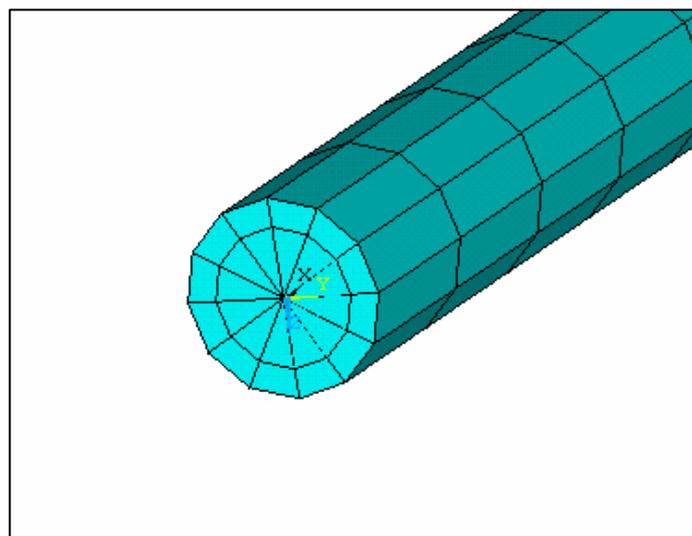


Figure.V.8 Maillage de l'arbre

Maillage de disque : Pipe 16

Maillage de l'élément type : BEAM 188 : élément 3D linéaire (2 nœuds).

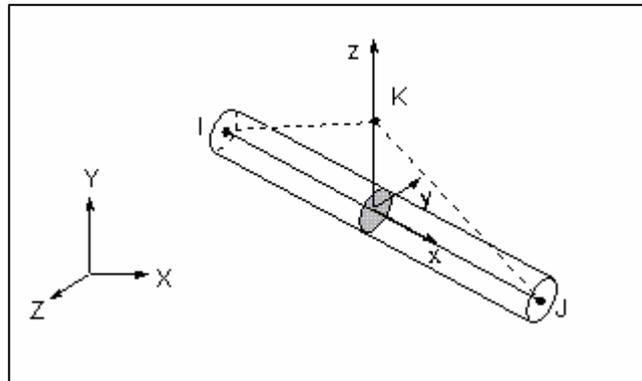


Figure.V.9 Elément de maillage type BEAM189

Maillage de la pale:

Section: PLANE42 élément plane 2D, définie par 4 nœuds, 2 degrés de liberté (translation x, y)

Volume: SOLIDE45 élément 3D, 8 nœuds, 3 degrés de liberté (translation x, y, z)

V.1.6 Les conditions aux limites

Au niveau des quatre nœuds, cités ci-dessous, constituant les paliers, tous les degrés de liberté sont éliminés

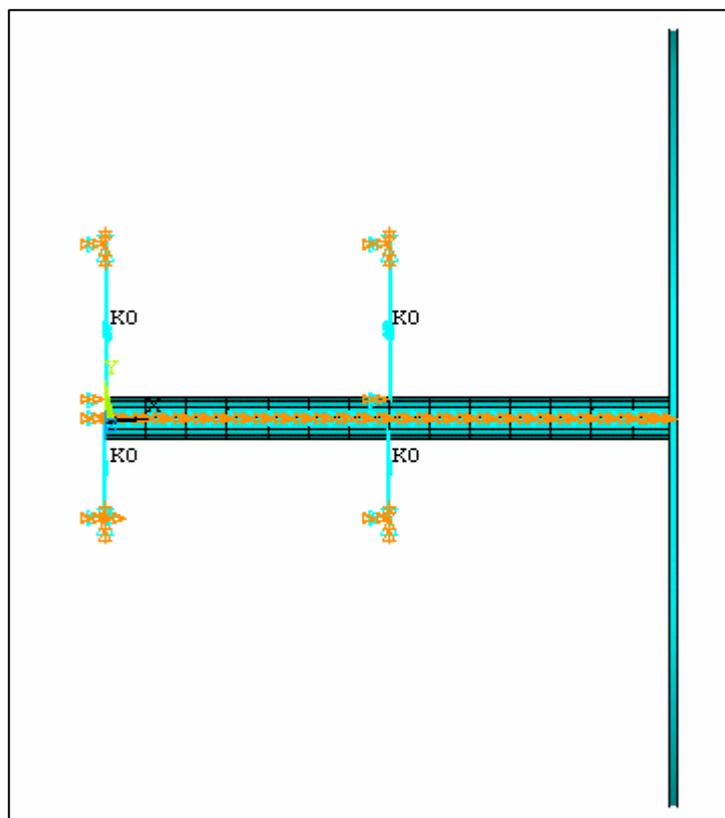


Figure.V.10 Les conditions aux limites présentées sur le dispositif

On a :

- Support des paliers fixes : les nœuds 20, 21, 22, 23 des paliers

$$-UX = 0$$

$$-UY = 0$$

$$-UZ = 0$$

$$-ROTX = 0$$

$$-ROTY = 0$$

$$-ROTZ = 0$$

- Les autres nœuds :

$$-UX = 0$$

$$-UY = 1$$

$$-UZ = 1$$

$$-ROTX = 0$$

$$-ROTY = 1$$

$$-ROTZ = 1$$

Conditions aux limites des pales

Pour la pale on annule tous les degrés de liberté de la section crée en avant.

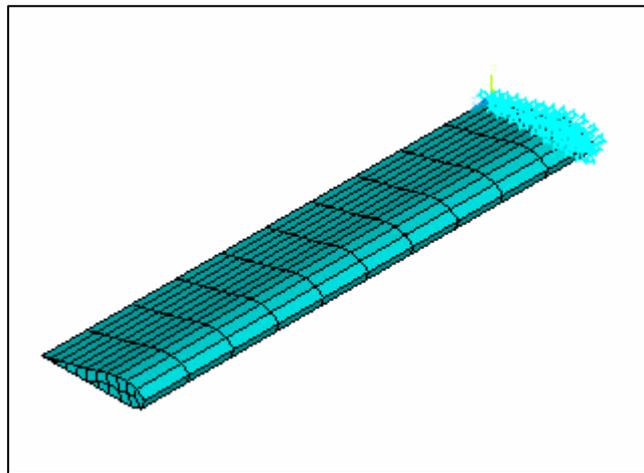


Figure.V.11 Conditions aux limites

V.2 Résultats et interprétation

V.2.1 Diagramme de Campbell

On a pris les lignes harmoniques suivantes :

Ligne harmonique 1 = 1

Ligne harmonique 2 = 2

Ligne harmonique 3 = 5

Ligne harmonique 4 = 10

Ligne harmonique 5 = 20

La vitesse de rotation est de 10 à 8000 tr/mn.

On a pris en compte l'effet gyroscopique.

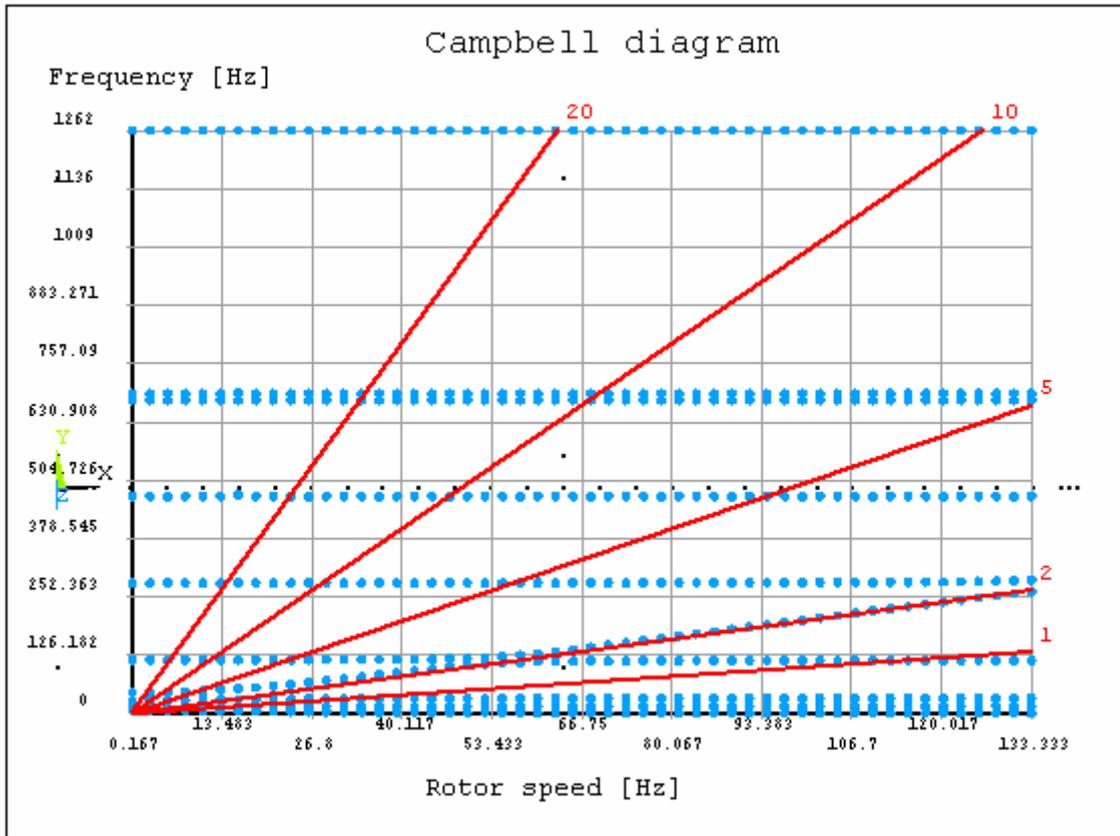


Figure.V.12 Diagramme de Campbell

On a extrait les vitesse critique a l'aide des fréquences d'excitation:

- Vc1= 405 tr/min
- Vc2= 809 tr/min
- Vc3= 1908 tr/min
- Vc4= 6820 tr/min

Vitesse de rotation de rotor anti-couple: 2700 tr/min

V.2.2 Rapport d'amortissement

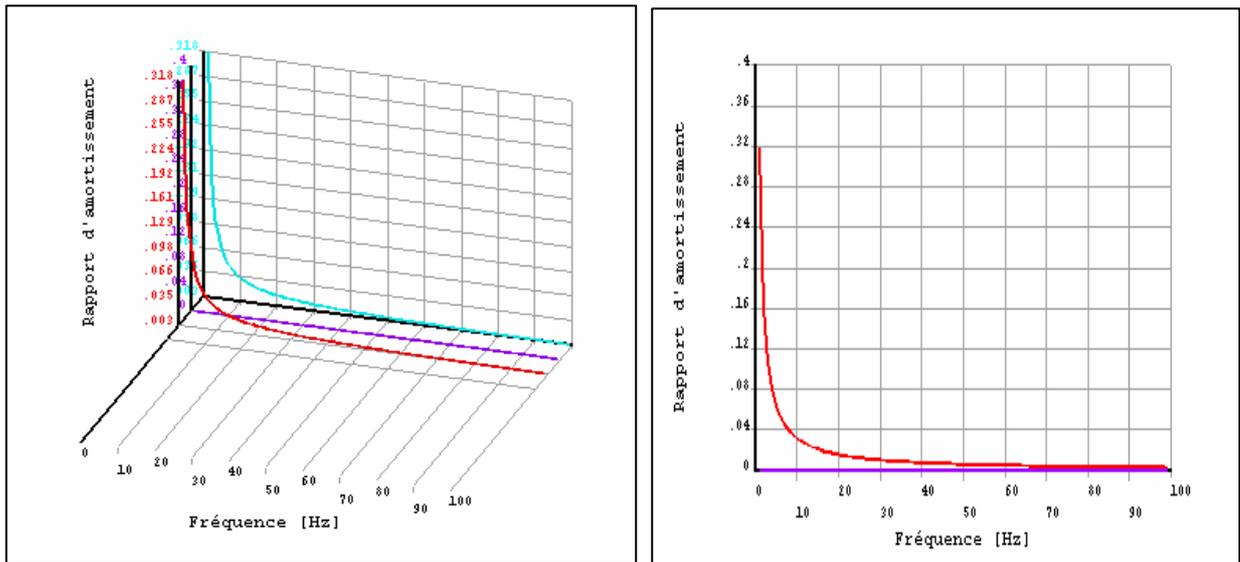


Figure.V.13 Evolution du rapport d'amortissement en fonction de la fréquence

V.2.3 Les fréquences propres

On a extrait 20 modes propres, on représente ce qui est intéressant :

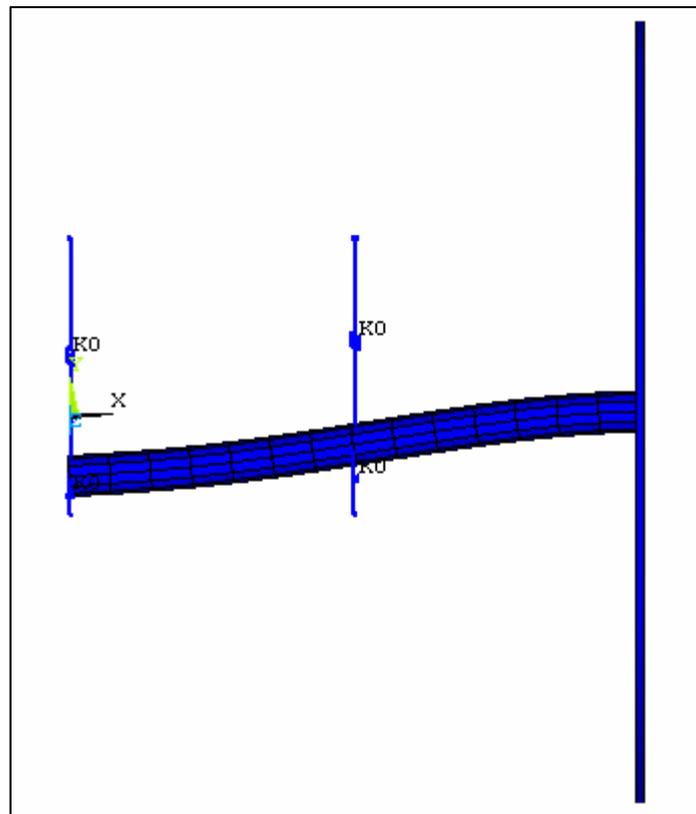


Figure.V.14 Mode 1(partie réelle)

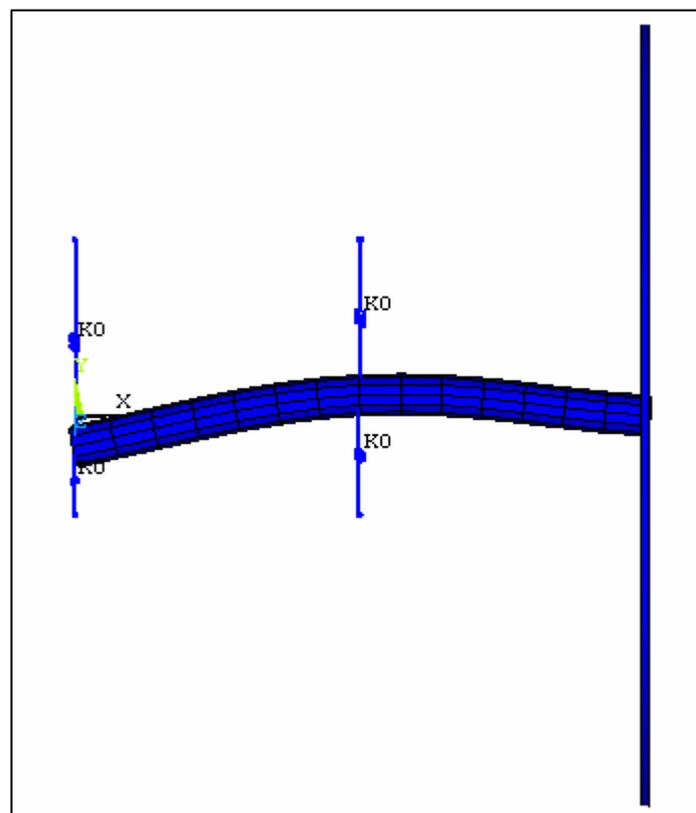


Figure.V.15 Mode 2 (partie imaginaire)

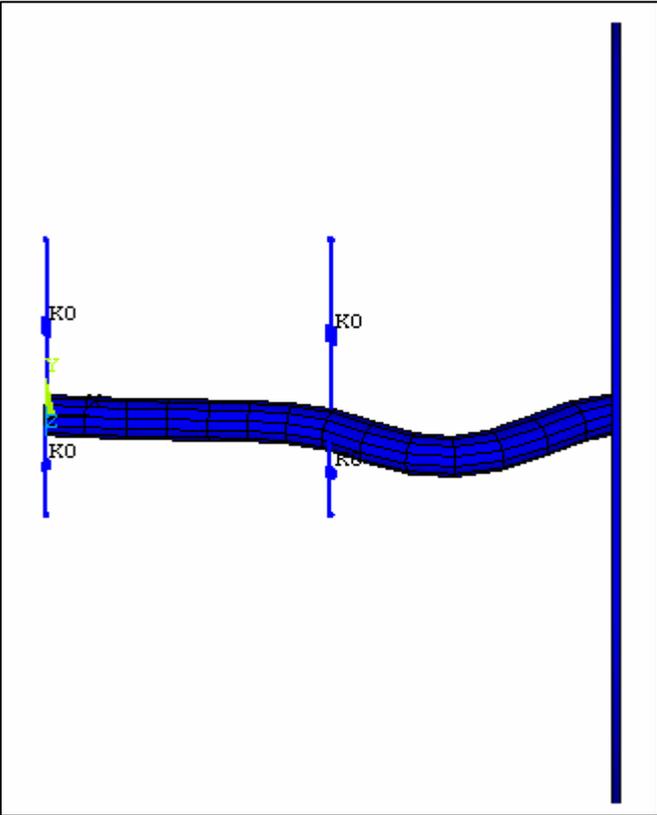


Figure.V.16 Mode 3(partie imaginaire)

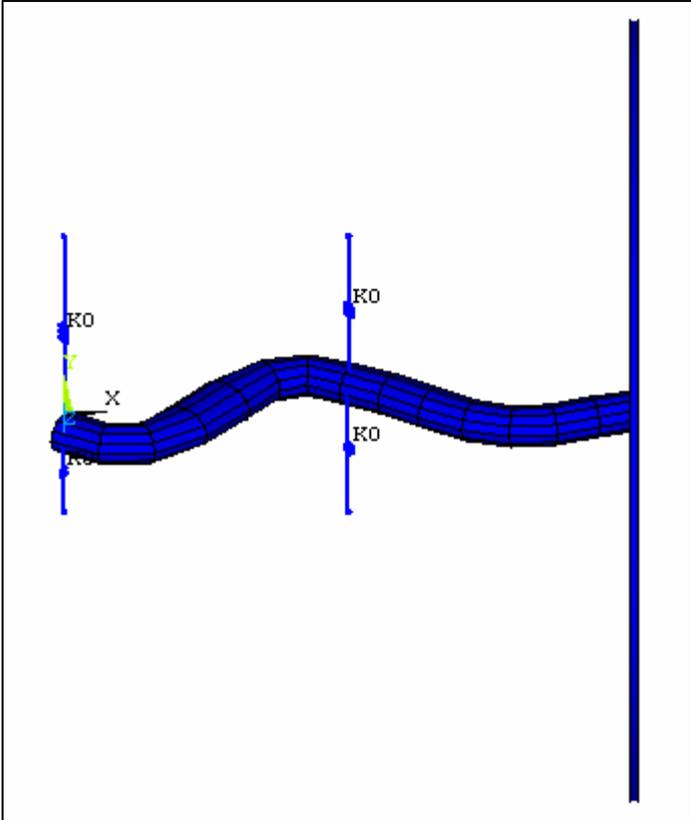


Figure.V.17 Mode 4 (partie réelle)

V.2.4 Orbite modale

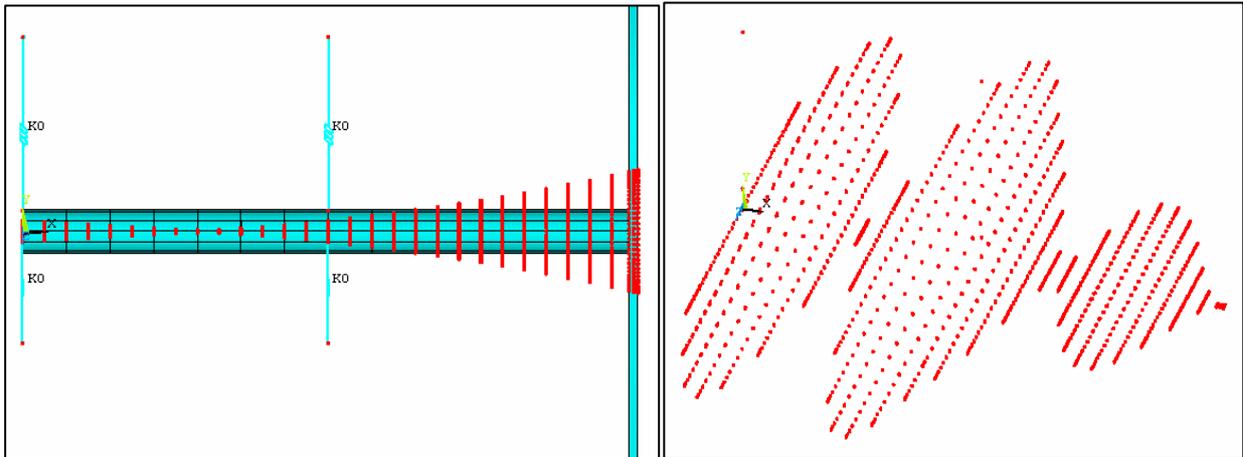


Figure.V.18 Orbite modale du rotor anti-couple

V.2.5 Réponse en force harmonique

On a appliqué deux forces harmoniques suivant les deux directions y,z de valeurs égales $F_y = F_z = 100$ N.

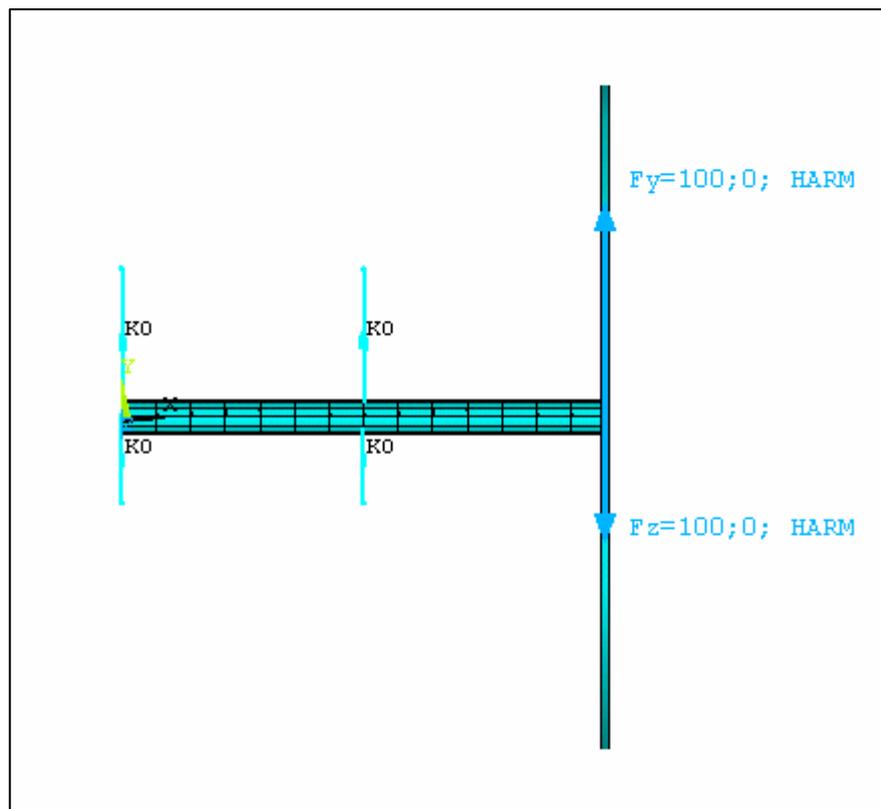


Figure.V.15 Présentation des forces harmoniques

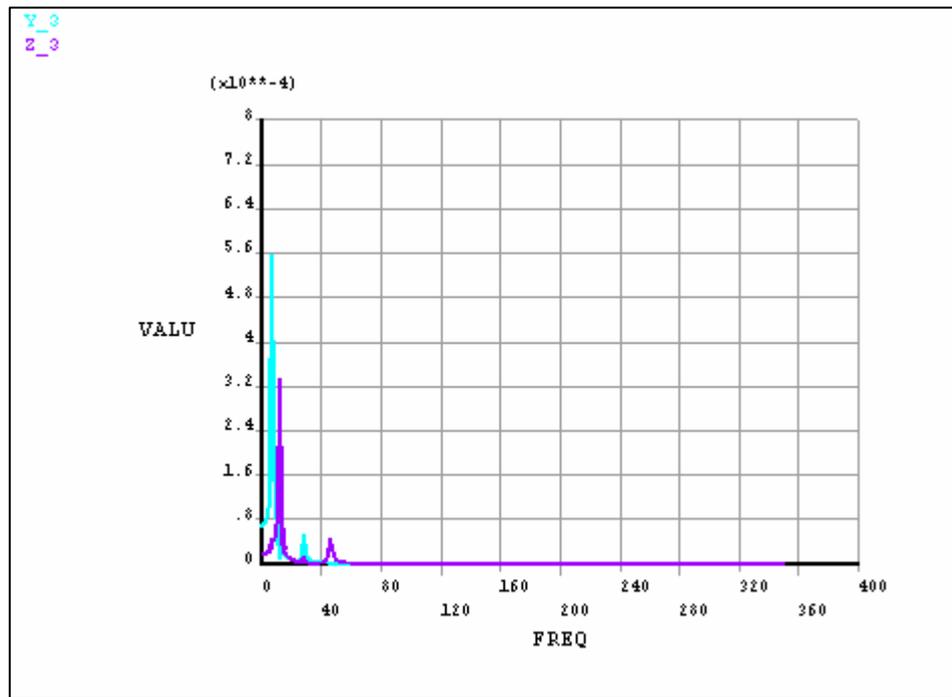


Figure.V.19 Spectre de réponse harmonique

On observe l'apparition des pics en amplitude suivant y, (amplitude $A=5.6 \cdot 10^{-4}$, $f=10$ Hz) et suivant z, (amplitude $A=3.3 \cdot 10^{-4}$, $f=15$ Hz). Ces résultats représentent un phénomène de balourd se produisant à l'application de deux forces harmoniques.

V.2.6 Réponse au balourd

On a provoqué un balourd de mu 0.0001 kg

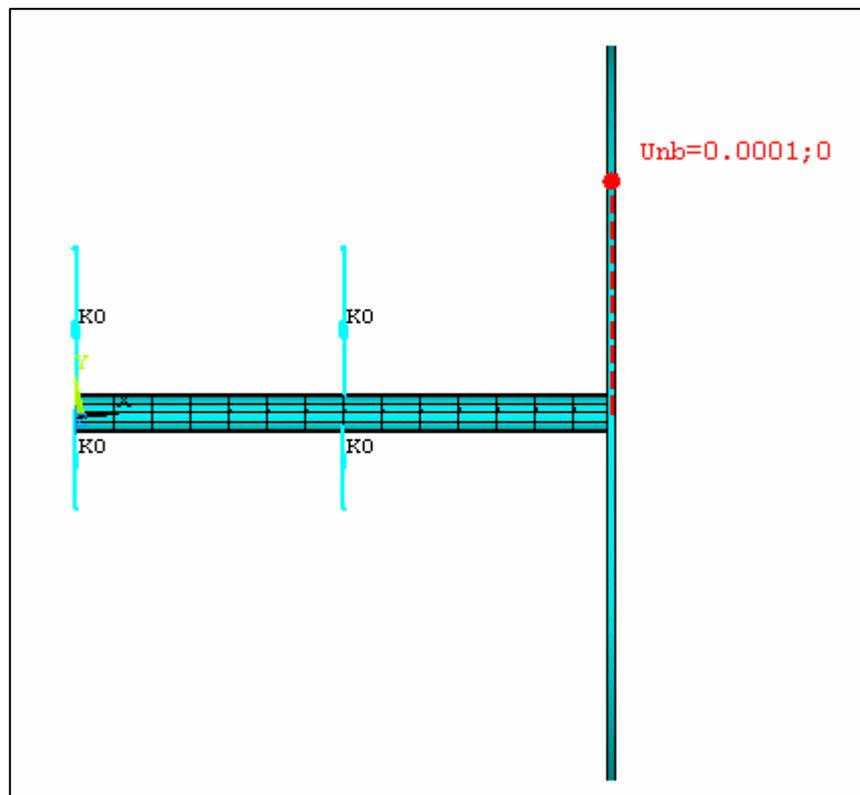


Figure.V.20 Balourd sur le disque

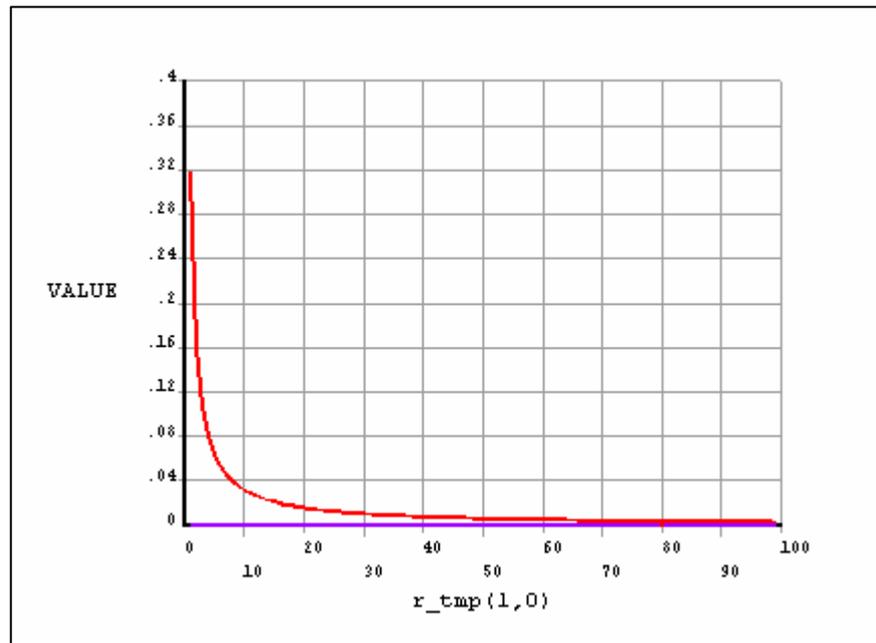
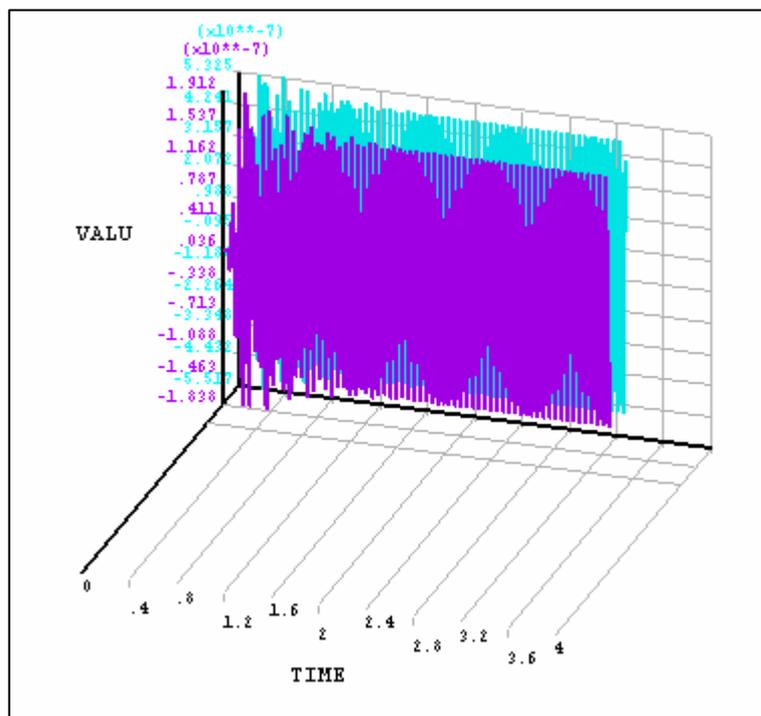


Figure.V.21 Amortissement en réponse au balourd

Figure.V.22 Graphe variable (U_y , U_z)

On observe des amplitudes maximales dans l'intervalle de régime transitoire. Ceci est expliqué par le passage du rotor par des vitesses critiques

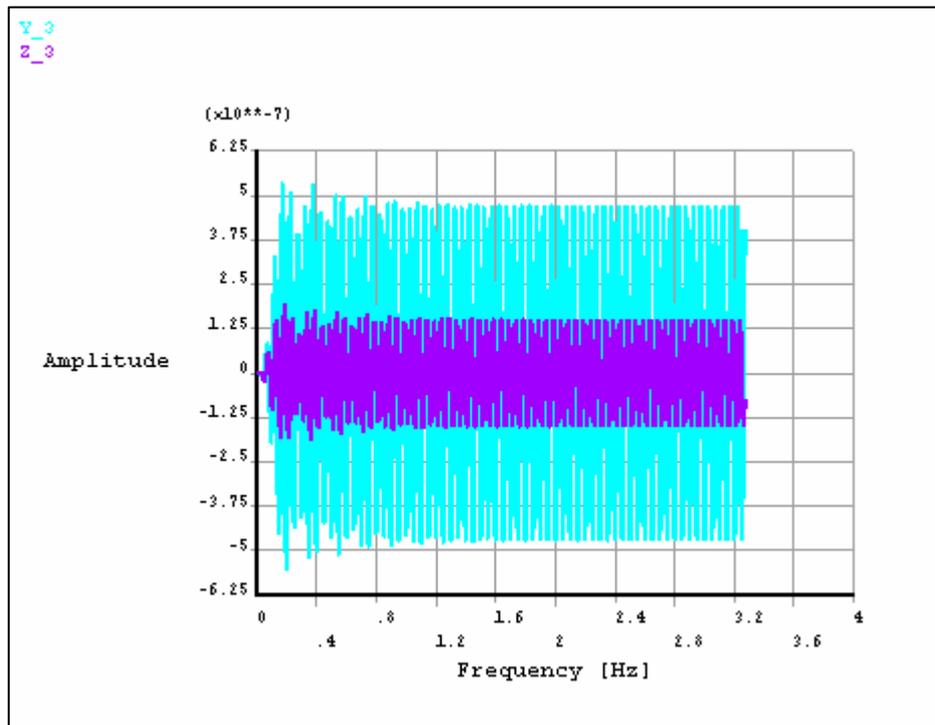


Figure.V.23 Amplitude en fonction de la fréquence

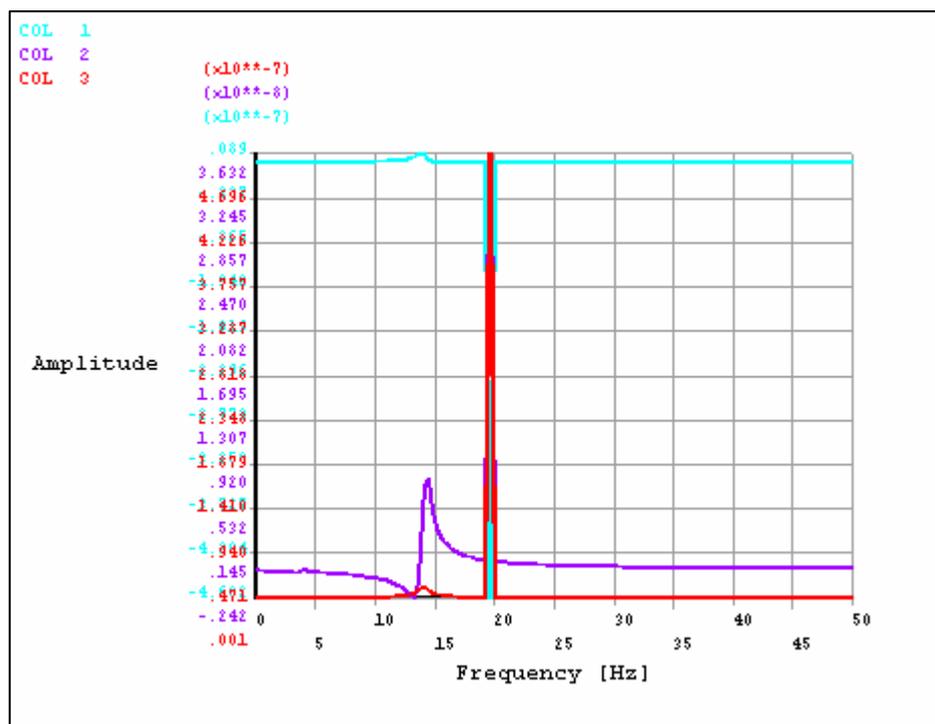


Figure.V.24 Spectre en réponse de balourd

Ce graphe représente le spectre obtenu suivant les trois directions (x, y, z). On remarque clairement que le phénomène de balourd dans ce cas est favorisé suivant la direction x à la fréquence de rotation 20 Hz avec des amplitudes importantes.

V.2.7 Les contraintes du rotor

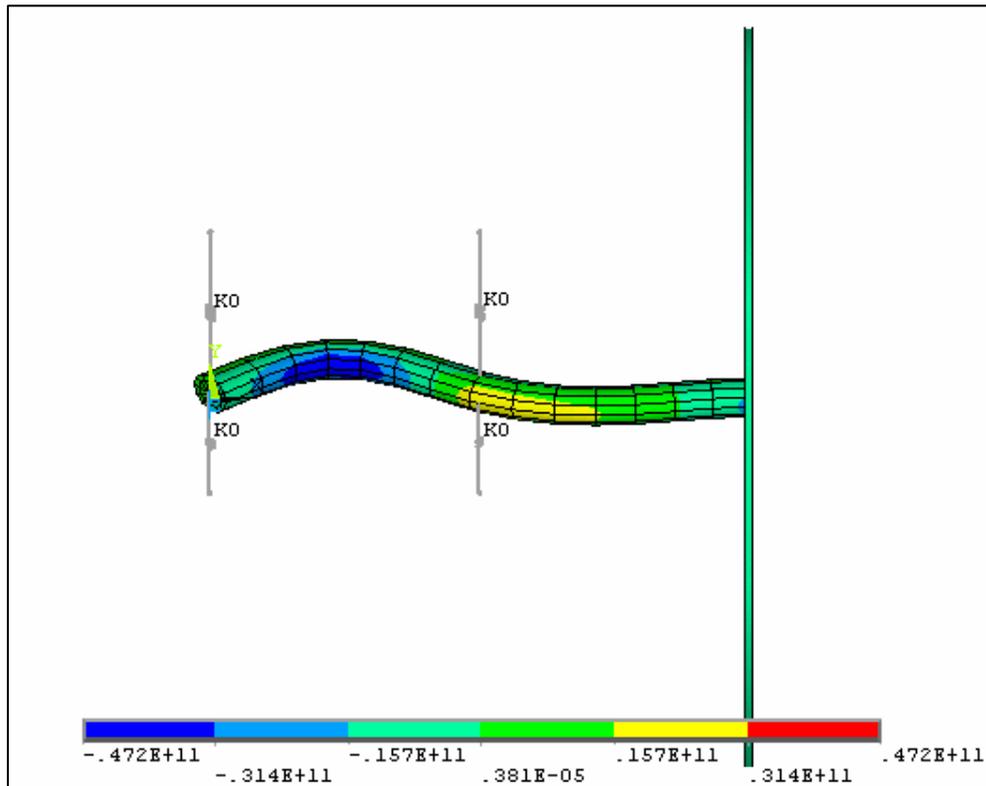


Figure.V.25 Contrainte suivant x

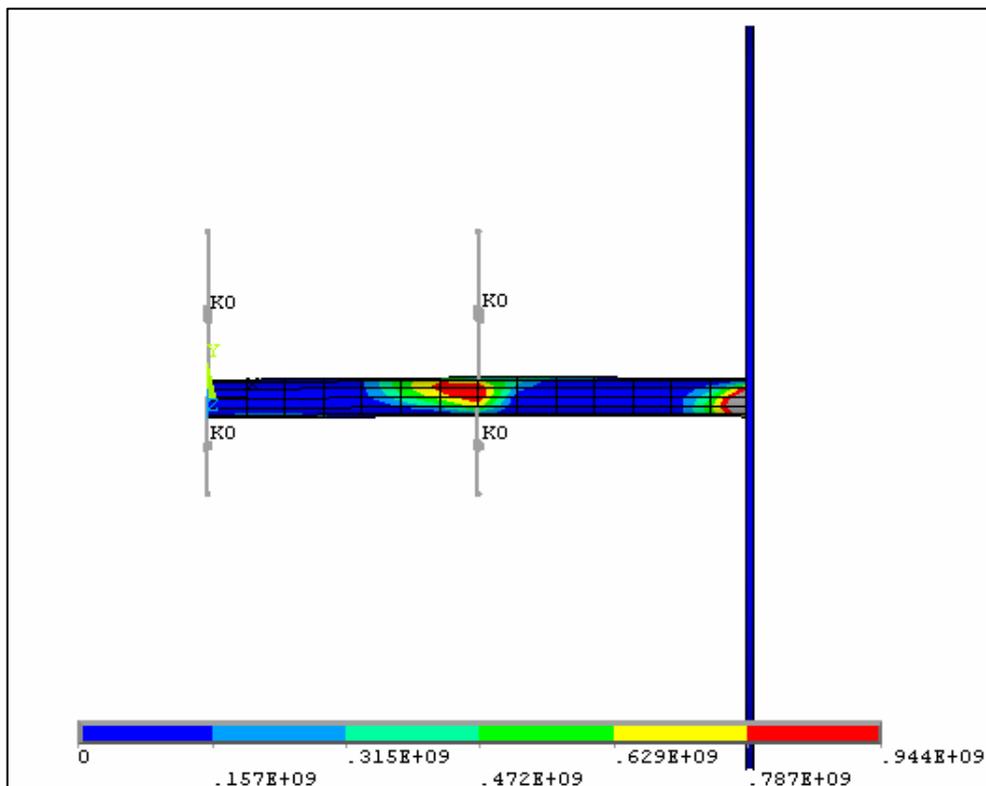


Figure.V.26 Contrainte principale suivant x

On remarque une concentration de contrainte au niveau du deuxième palier quant à la contrainte principale suivant x et au niveau de la connexion arbre pales de valeur $\sigma = 0.944$ Gpa.

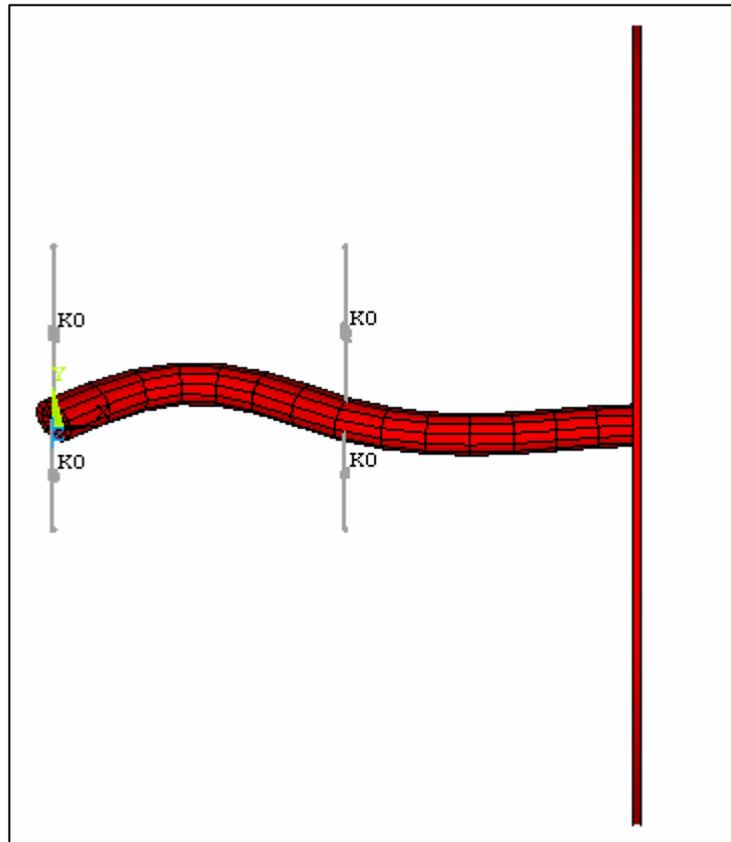


Figure.V.27 Contrainte principale suivant y

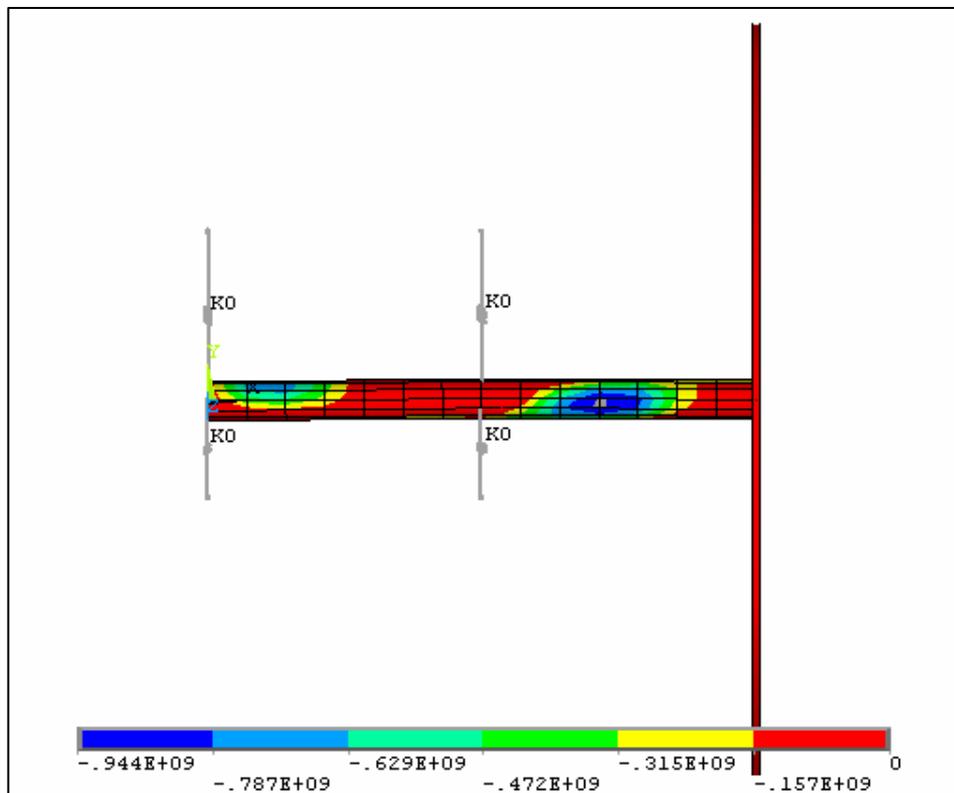


Figure.V.28 Contrainte principale suivant z

La contrainte principal z est importante entre le disque et le deuxième palier (en compression).

V.2.8 Critère de Von Misés

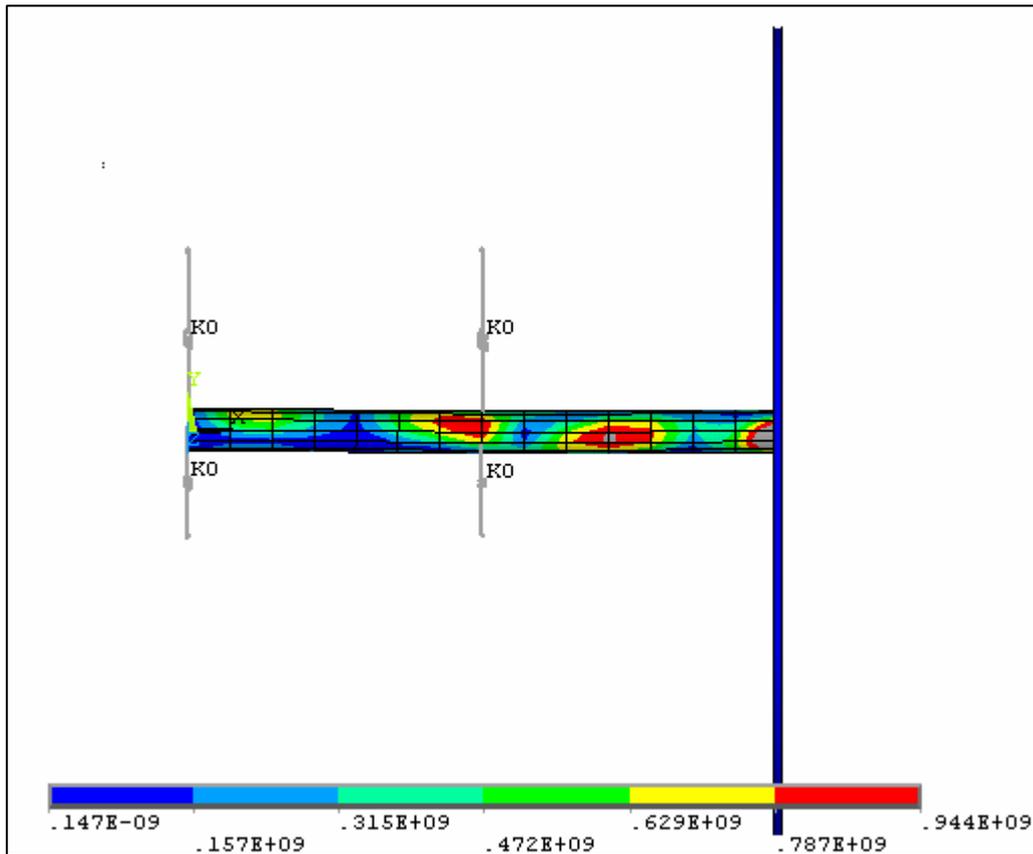


Figure.V.29 Critère de Von Misés mode 1

Il existe plusieurs zones critiques le long de l'arbre quant au mode de vibration 1.

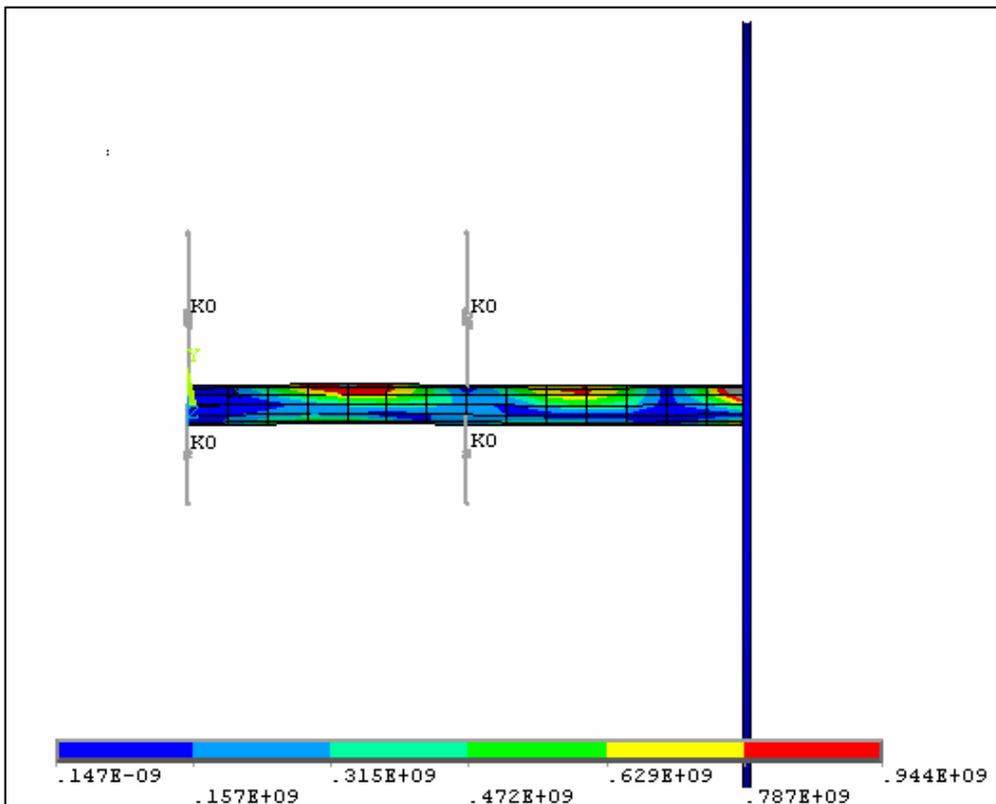


Figure.V.30 Critère de Von Misés mode 2

V.2.9 Les déplacements du rotor

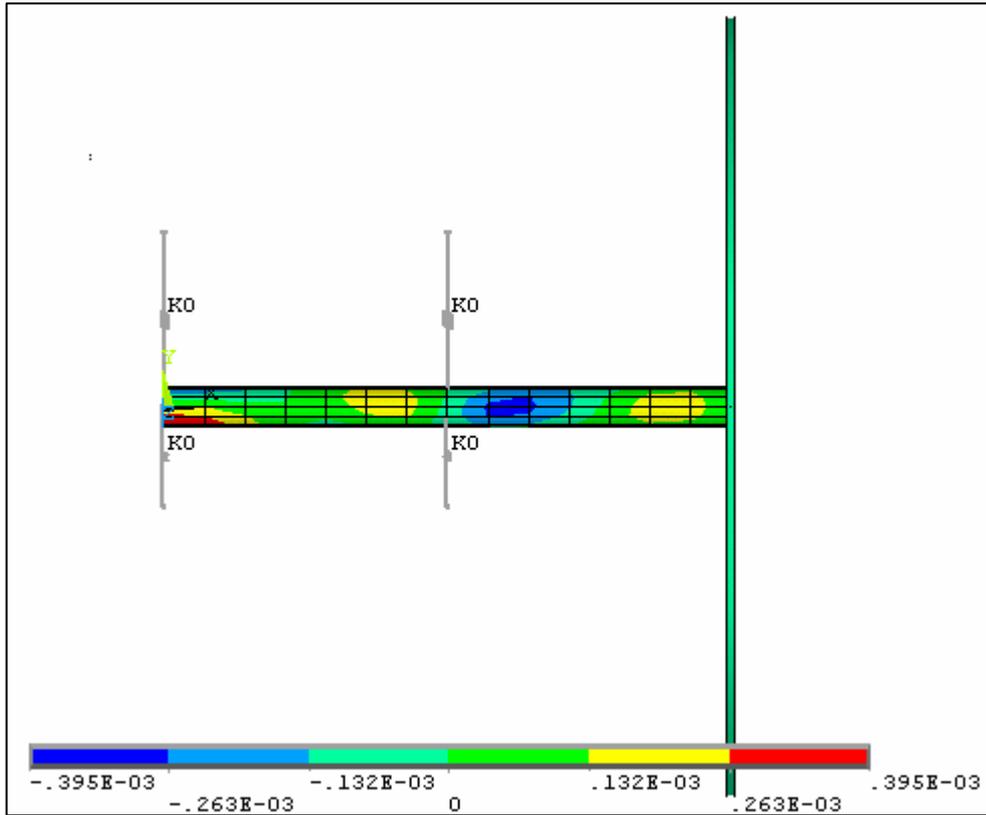


Figure.V.31 Déplacement suivant x

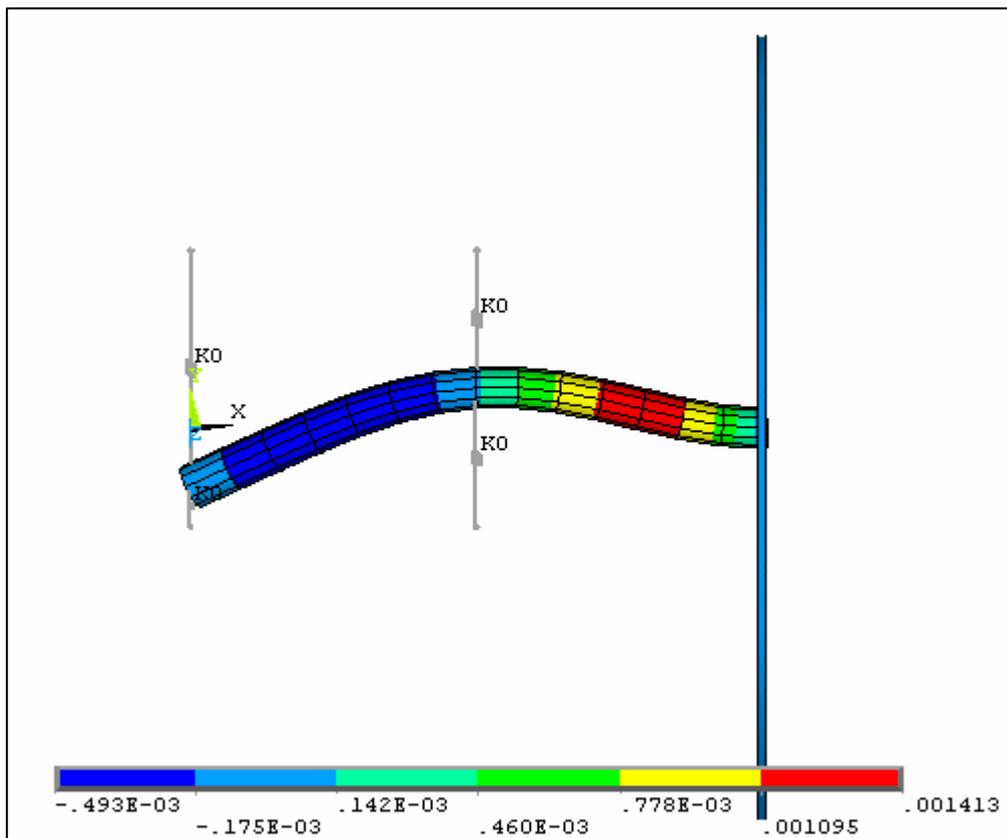


Figure.V.32 Déplacement suivant z

V.2.10 Les modes propres des pales

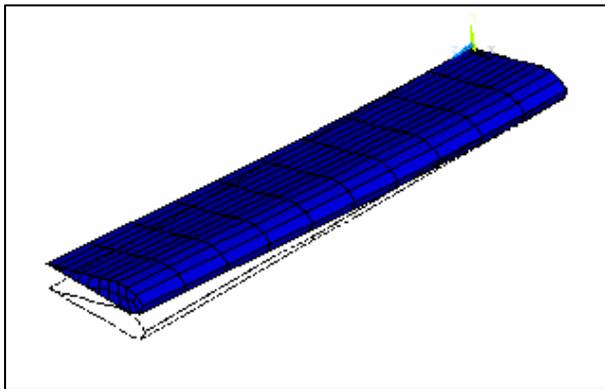


Figure. V.33 Mode 1

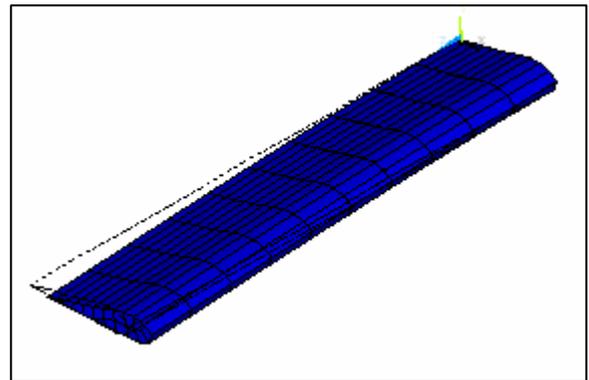


Figure. V.34 Mode 2

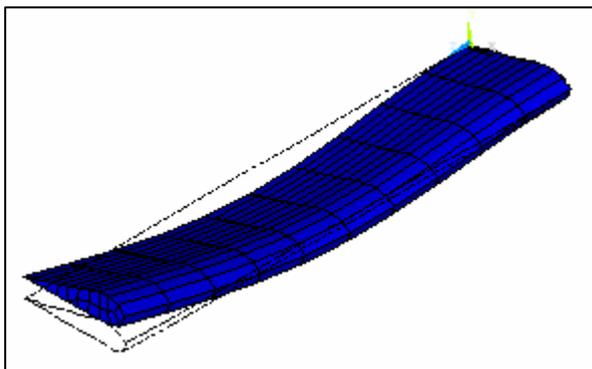


Figure. V.35 Mode 3

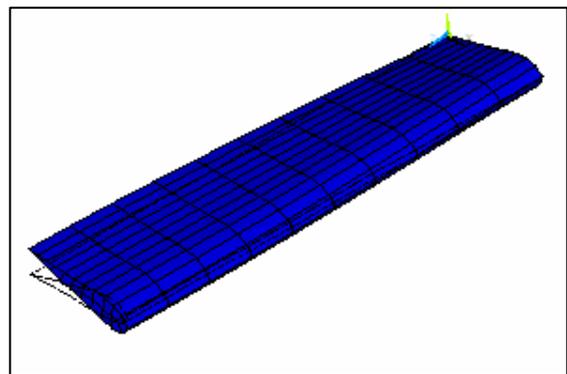


Figure. V.36 Mode 4

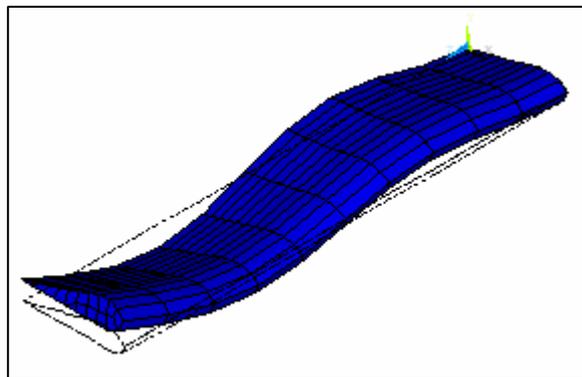


Figure. V.37 Mode 5

V.2.11 Les déplacements des pales

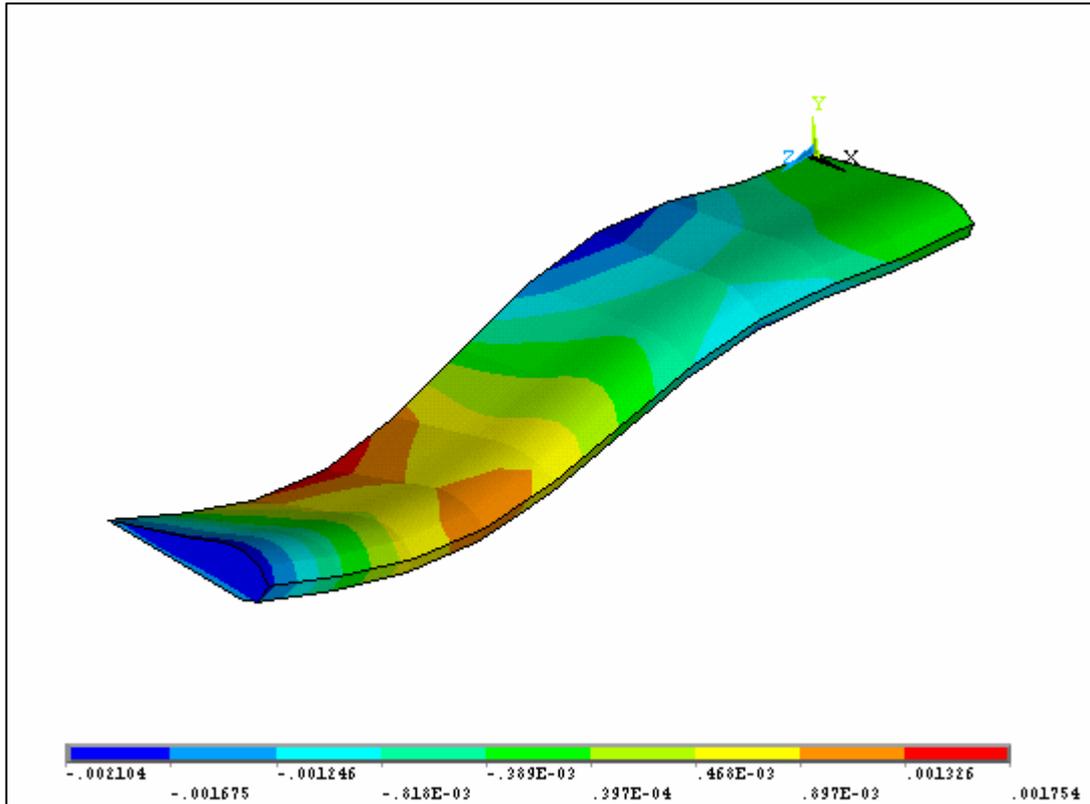


Figure. V.38 Déplacement suivant x (mode 5).

On choisi le mode 5 pour visualiser la répartition des déplacements

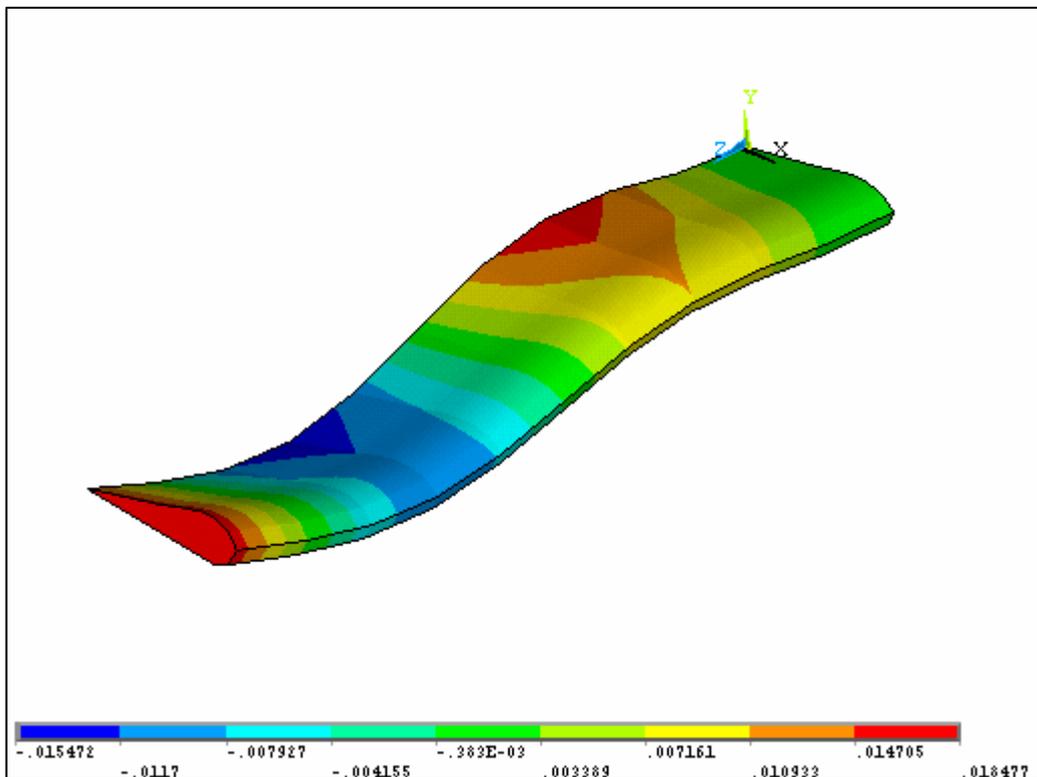


Figure. V.39 Déplacement suivant y

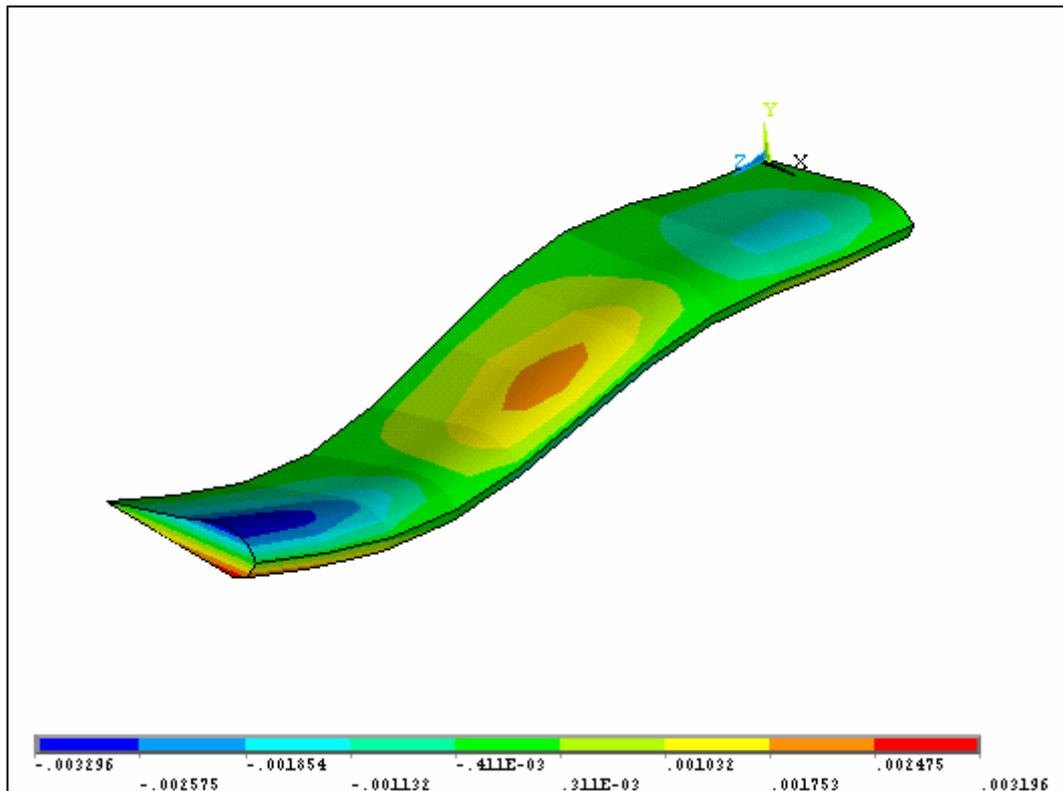


Figure. V.40 Déplacement suivant z

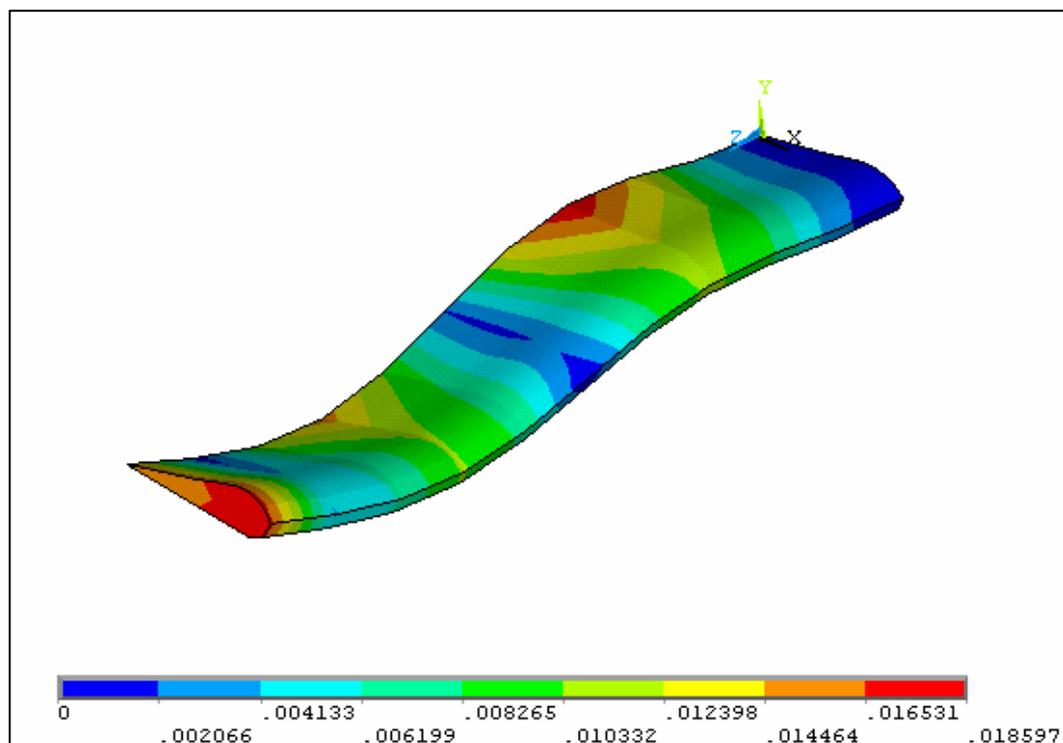


Figure. V.41 Déplacement total

Les déplacements le long de la pale sont représentés par la figure ci-dessus. On remarque une symétrie de la distribution de déplacement par rapport au point d'inflexion.

V.2.12 Déplacement nodal

Mode 3 FREQ= 15.679

Les déplacements des nœuds sont les suivant :

- UX : Déplacement suivant X
- UY : Déplacement suivant Y
- UZ : Déplacement suivant Z
- USUM : La somme des déplacements

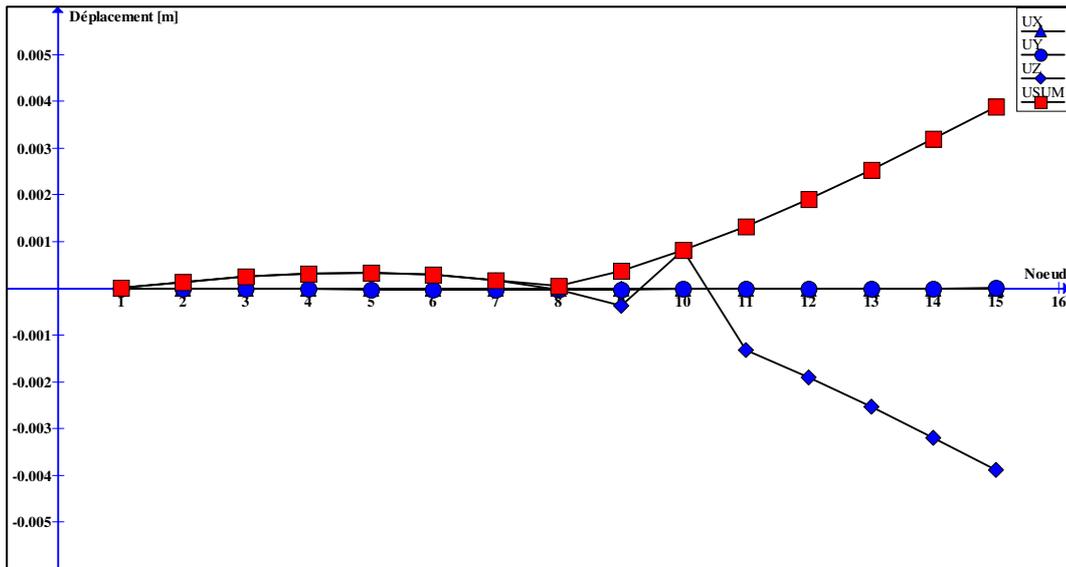


Figure.42 Déplacement nodale (Mode 3)

On remarque que le déplacement est nulle au niveau des paliers, et atteindre une valeur maximale (USUM= 0.38787E-2) a l'extrémité coté disque.

Déplacement maximal en valeur absolue

- UX= 0
- UY= 0.32288E-4 au nœud 8
- UZ= 0.38787E-2 au nœud 15
- USUM= 0.38787E-2 au nœud 15

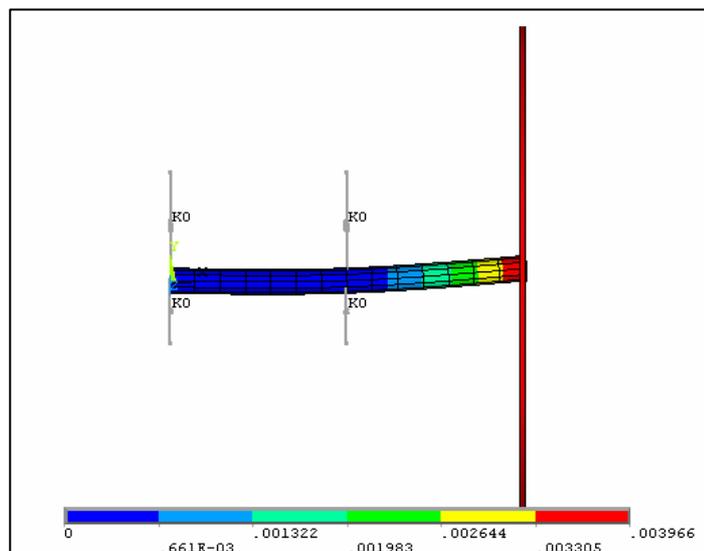


Figure.43 La somme des déplacements USUM

a. Les forces nodales (mode3) :

Les valeurs des forces (Fx, Fy, Fz) de chaque nœud sont représentées sur le tableau suivant :

Nœud	Fx	Fy	Fz
1	0	32314.	-82233.
2	0	0.21418E+06	21004.
3	0	38762.	6372.5
4	0	-74983.	37108.
5	0	0.13450E+06	74883.
6	0	5511.9	70896.
7	0	39105.	10909.
8	0	0.11130E+06	-32124.
9	0	-18015.	0.12076E+06
10	0	11331.	0.10761E+06
11	0	0.11137E+06	0.10597E+06
12	0	0.15336E+06	-88958.
13	0	85364.	-0.21727E+06
14	0	0.11467E+06	-41847.
15	0	-0.53450E+06	-0.46217E+06

Tableau.1 Forces nodales des nœuds

Les Forces totales (mode 3) :

$$F_{XT} = 0 \text{ N}$$

$$F_{YT} = 0 \text{ N}$$

$$F_{ZT} = -0.46566E-9 \text{ N}$$

b. Les Moments nodale (mode 3)

Les moments totaux des nœuds sont les suivant :

$$M_{XT} = -0.44176E-28 \text{ N.m}$$

$$M_{YT} = -73274 \text{ N.m}$$

$$M_{ZT} = 0.10408E+07 \text{ N.m}$$

V.2.13 Évolution de la contrainte élémentaire

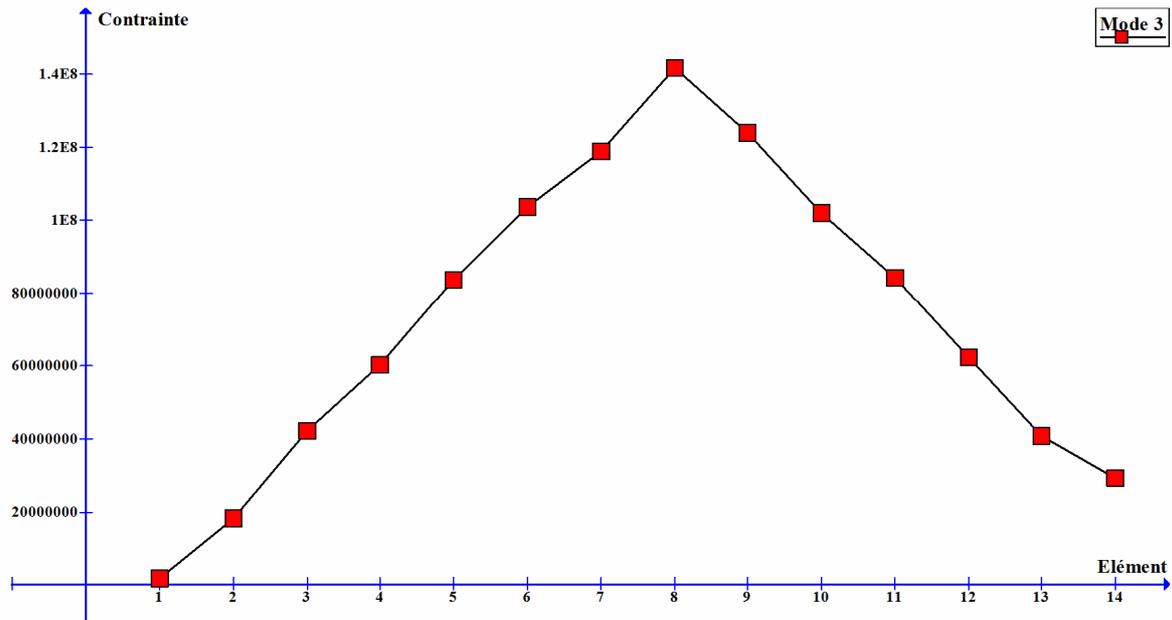


Figure.44 Evolution de la contrainte élémentaire

La contrainte à une valeur min au niveau du palier 1 de (0.18401E+07 Pa) puis augment jusqu'au une valeur max (0.14177E+09) au niveau du palier 2, puis diminue jusqu'au élément 14 d'une valeur (0.29243E+08)

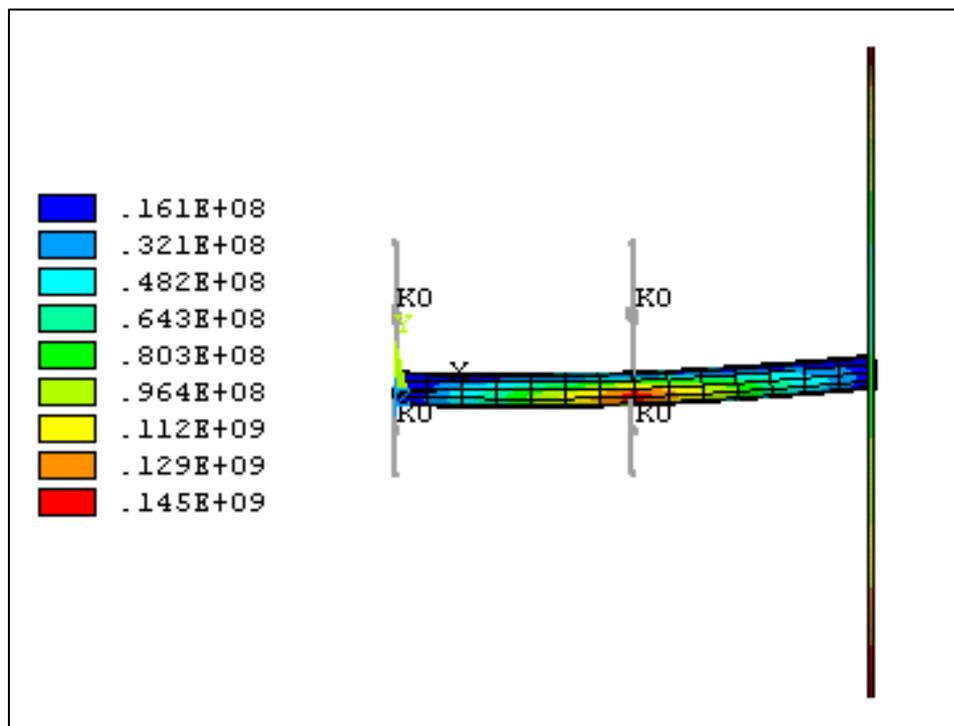


Figure.V.45 Contrainte mode 3

V.2.14 Analyse passagère de rotor anti-couple

Analyse de démarrage

Transition par la résonance : Chargement

Déséquilibre

0.0001 kg*m

L'accélération angulaire constante du rotor est 30 [rad/sec²].

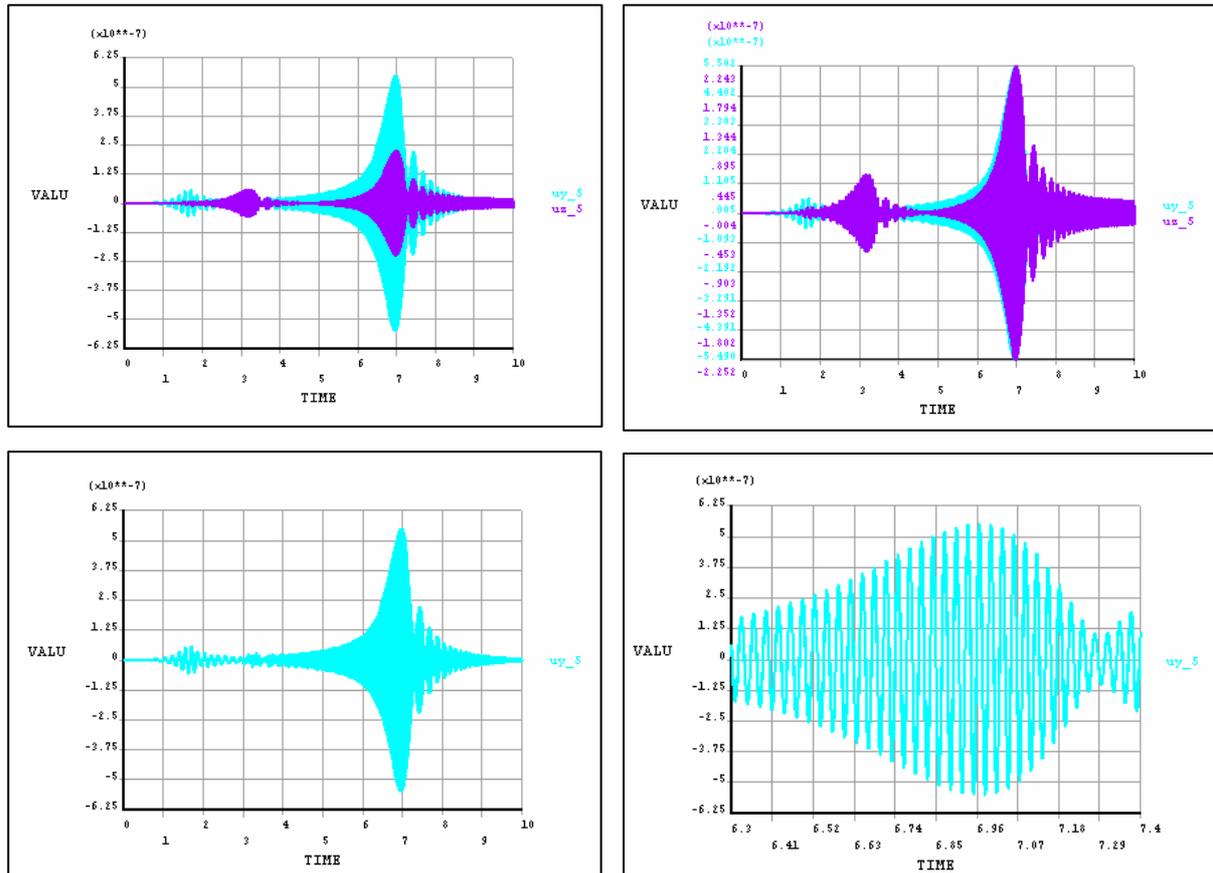


Figure.46 Déplacement suivant y et z

Cette démarche permet de voir le passage de la vitesse de résonance lors de la montée ou la descente de la vitesse de rotation, on visualise les déplacements suivant les axes y, z, les déplacements prennent une valeur maximale ($U_y = 5.65 \cdot 10^{-7}$, $U_x = 2.2 \cdot 10^{-7}$) à l'instant ($t = 7$ s) ;

Conclusion

Dans ce chapitre, on a représenté les résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis appliquée au rotor anti-couple. Les différents modes et distributions de contraintes dans le corps du rotor sont représentés dans le but de déterminer les zones de fonctionnement critique de l'arbre et des pales. A ce niveau les différentes réponses aux balourds sont ainsi déterminées dans les trois dimensions sachant que le mécanisme étudié travaille cinématiquement en 3D de l'espace.

La pale est modélisée afin de visualiser les différents modes en déplacement et vibrations accompagnant son fonctionnement.

La complexité de l'étude de ce type de mécanisme réside dans l'effet d'accoupler entre les différents organes mécaniques lui constituant.

Ces résultats permettent de décrire le comportement dynamique en flexion du rotor anti-couple.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Les calculs des différentes énergies et travaux virtuels des différents éléments d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque ont été développés. Cela a permis de définir les équations du mouvement. On a utilisé deux méthodes pour simuler le comportement des rotors en flexion :

- La méthode de Rayleigh-Ritz utilisée pour mettre en évidence des phénomènes de base en raison de sa simplicité : seulement deux équations du mouvement. Les résolutions pas-à-pas sont donc efficaces et certains mouvements basiques peuvent être résolus analytiquement. Les inconvénients de ce modèle sont qu'il ne permet d'étudier qu'un mode à la fois et que l'imprécision est importante lorsque la déformée du mode est mal connue. De plus, il considère les paliers comme infiniment rigides.
- La méthode des éléments finis est utilisée pour modéliser les systèmes réels car elle est plus précise et permet d'étudier l'ensemble des modes de vibration du rotor. Des éléments peuvent donc être ajoutés ou enlevés au gré de l'utilisateur qui peut également ajouter des raideurs, des amortissements ou des forces extérieures en chaque noeud. Le désavantage évident de cette méthode est que les calculs sont lourds.

Les équations générales d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement imposé ont été développées. Le modèle développé avec la méthode de Rayleigh-Ritz est intéressant en raison de sa simplicité : seulement deux équations de mouvement. Les résolutions pas-à-pas sont donc très rapides. Le modèle obtenu à l'aide de la méthode des éléments finis est plus adapté pour modéliser les systèmes réels car il est plus précis et permet d'étudier l'ensemble des modes de vibration du rotor. Il est également modulaire car chaque élément du rotor possède ses propres caractéristiques. Des éléments peuvent donc être ajoutés ou enlevés au gré de l'utilisateur qui peut également ajouter des raideurs, des amortissements ou des forces extérieures en chaque noeud. Les comparaisons entre simulations numériques démontrent que le modèle éléments finis proposé permet d'obtenir de très bonnes prédictions sur le comportement dynamique en flexion de rotor anti-couple.

Les résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis appliquée au rotor anti-couple. Les différents modes propres et distributions de contraintes dans le corps du rotor sont représentés dans le but de déterminer les zones de fonctionnement critique de l'arbre et des

pales. A ce niveau les différentes réponses aux balourds sont ainsi déterminées dans les trois dimensions sachant que le mécanisme étudié travaille cinématiquement en 3D de l'espace.

La pale est modélisée afin de visualiser les différents modes en déplacement et vibrations accompagnant son fonctionnement.

La complexité de l'étude de ce type de mécanisme réside dans l'effet d'accoupler entre les différents organes mécaniques lui constituant.

Ces résultats permettent de décrire le comportement dynamique en flexion du rotor anti-couple. L'étude de la dynamique de rotor sert beaucoup de nos jours pour l'analyse des machines tournantes. C'est donc la direction dans laquelle devrait s'orienter les prochaines recherches expérimentales effectuées au laboratoire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Al Majid A., Allezy A., Dufour R. *Metric of MD OF systems in high transient motion*, Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences, 26 September, 2003 Chicago, Illinois, USA, DETC2003/VIB-48613, 6 p.
- [2] Beley-Sayettat A. *Effet des dissymétries et effet sismique en dynamique des rotors*, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1994, 159 p.
- [3] Berlioz A., Der Hagopian J., Dufour R., Draoui E. *Dynamic behavior of a drill-string. Experimental investigation of lateral instabilities*, ASME, Journal of Vibration and Acoustics, 1996, vol. 118, pp. 292-298.
- [4] Berlioz A., Dufour R., Ferraris G. *Etude des phénomènes vibratoires dans les trains de tige de forage pétrolier*, Mécanique Industrielle et Matériaux, 1996, vol. 49, n° 4, pp. 193-195.
- [5] Bigret R.. *Stabilité des Machines Tournantes et des Systèmes*. Cetim, 1998. 1990.
- [6] Bonello P., Brennan M. J. *Modelling the dynamical behaviour of a supercritical rotor on a flexible foundation using the mechanical impedance technique*, Journal of Sound and Vibration, 2001, vol. 239, n° 3, pp. 445-466.
- [7] Campbell R. *Théorie Générale de l'Equation de Mathieu (et de quelques autres équations essentielles de la mécanique)*, Paris, Masson et Cie, 1955, 271p.
- [8] Childs.D. *Turbomachinery Rotordynamics : Phenomena, Modeling, and Analysis*. Wiley Interscience, 1993.
- [9] Crandall.H. *Non linear Dynamics and Stochastic Mechanics*, chapter Rotordynamics, pages 1-44. CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [10] Dias-Jr M., S. J. Idehara, A. L. A. Mesquita, and U. A. Miranda. *On the simultaneous forward and backward whirling of flexible rotors : Numerical analysis and experimental verification*, 30/09/2002, sydney, australia. In *IFTtoMM - Sixth International Conference on Rotor Dynamics*, Sydney, Australia, 2002.
- [11] Duchemin M., Berlioz A., Ferraris G. *Modélisation du comportement dynamique des rotors embarqués*, Actes du colloque de Giens 2001, pp. 385-392.
- [12] Duchemin M., Berlioz A., Ferraris G. *Comportement dynamique d'un rotor soumis à un choc simulation - expérimentation*, Actes du 15eme congrès français de mécanique, Nancy 2001.
- [13] Dufour R. *Influence d'un couple axial sur le comportement dynamique des rotors flexibles*, Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 1985, 112 p.
- [14] Dufour R., Berlioz A. *Parametric instability of a beam due to axial excitations and to boundary conditions*, ASME, Journal of Vibration and Acoustics, 1998, vol. 120, pp. 461-467.

- [15] Ecker H., Pumphisse1 T., Tondi A. *A study on parametric excitation for suppressing self-excited rotor vibrations*, IFToMM, In : “Proceedings of the sixth international conference on rotor dynamics”, Sidney, Australia, 30 September - 4 October 2002, pp. 85-92, ISBN 0-7334-1963-1.
- [16] Edwards S., Lees A. W., Friswell M. I. *Experimental identification of excitation and support parameters of a flexible rotor-bearings-foundation system from a single rundown*, Journal of Sound and Vibration, 2000, vol. 232, n° 5, pp. 963-992. 103
- [17] El-Shafei A. *Perturbation solution of Reynolds equation for finite journal bearing*, IFToMM, In : “Proceedings of the sixth international conference on rotor dynamics”, Sidney, Australia, 30 September - 4 October 2002, pp. 588-598, ISBN O-7334-1963-1.
- [18] Ganesan R., Sankar T. S. *Resonant oscillations and stability of asymmetric rotors*, ASME, Dynamics and vibration of Time-Varying Systems and Structures, 1993, DE-Vol. 56, pp. 131-137.
- [19] Ganesan R., Sankar T. S. *Non-stationary vibrations of rotor systems with non symmetric clearance*, ASME, Dynamics and vibration of Time-Varying Systems and Structures, 1993, DE-Vol. 56, pp. 295-301.
- [20] Genta G. Whirling of unsymmetrical rotors, a finite element approach based on complex coordinates. *Journal of Sound and Vibration*, 124(1) :27—53, 1988.
- [21] Genta G.. *Vibration of Structures and Machines: Practical Aspects*. Springer-Verlag, 1999.
- [22] Gérardin M. and D. Rixen. *Théorie des Vibrations - Application à la Dynamique des Structures*. Masson, 1992.
- [23] Hashish E. and T. C. Sankar. Finite element and modal analyses of rotor-bearing systems under stochastic loading conditions. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 106(1) :80—89, 1984.
- [24] Horkildsen T. 1972 MSE Engineering Report, Arizona University. Solution of a Distributed Mass and Unbalanced Rotor System Using a consistent Mass Matrix Approach
- [25] Huang Y. M., Lin M. S. *On the dynamics of a beam rotating at non constant speed*, ASME, Rotating Machinery and Vehicle Dynamics, 1991, DE-Vol. 35, pp. 147-154.
- [26] Ishida Y., Murakami S., moue T. *Non stationary oscillations of a nonlinear rotor system with internal resonance during acceleration through critical speed*, JSME International Journal, Series 3: Vibration, Control Engineering, Engineering for Industry, September 1992, Vol. 35, n° 3, pp. 360-368.
- [27] Ishida Y., Ikeda T., Yamamoto T., Murakami S. *Nonstationary oscillations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics during acceleration through critical speed*, Memoirs of the School of Engineering, Nagoya University, October 1 992, Vol. 44, n°1, pp. 1-70.
- [28] Ji Z., Zu J. W. *Method of multiple scales for vibration of rotor-shaft systems with nonlinear bearing pedestal model*, Journal of Sound and Vibration, 1998, Vol. 218, n° 2, pp. 293-305.

- [29] JEFFCOTT. H. 1919 Phil Mag., Series 6, 37, 304. The Lateral Vibration of Loaded shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed The Effect of Want of Balance.
- [30] Kang Y., Y. P. Shih, and A. C. Lee. Investigation on the steady-state responses of asymmetric rotors. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 114 :194—208, 1992.
- [31] Kassai A. *Contribution à l'étude dynamique des rotors amortis*, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1989, 159 p.
- [32] Kreider W., Nayfeh A. H., Chin C. M. *Two-to-one internal resonances in buckled beams*, ASME, Design Engineering Technical Conferences, 1995, DE-Vol. 84-1, Volume 3—Part A, pp. 345-356.
- [33] Ku. D. M. Finite element analysis of whirl speeds for rotor-bearing systems with internal damping. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(5) :599—610, 1998.
- [34] Lacroix J. *Comportement dynamique d'un rotor au passage des vitesses critiques*, Thèse de doctorat de l'INSA-Lyon, 1988, 161 p.
- [35] Lalanne M., Ferraris G. *Rotordynamics prediction in engineering*, 2nd Edition, Chichester, John Wiley, 1998, 254 p.
- [36] Lalanne M. and Ferraris G. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. John Wiley and Sons, 1990.
- [37] Ma C. K., Haddow A. G. *Nonlinear dynamics of a spinning beam*, ASME, Design Engineering Division, 1989, DE-Vol. 18, n° 5, pp. 313-320.
- [38] Meirovitch L.. *Computational Methods in Structural Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1980.
- [39] Meirovitch L.. *Principles and Techniques of Vibrations*. Pearson Education, 1996.
- [40] Muszynska A.. Forward and backward precession of a vertical anisotropic ally supported rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1) :207—222, 1996.
- [41] Myklestad N. O. *A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibration of airplane wings and other types of beams*, J. of Aeronaut. Sci., 1944, pp. 153-162.
- [42] Nayfeh A. H., Mook D. T. *Non-linear oscillations*, New York : Wiley Interscience, 1979, '704p.
- [43] Nayfeh A. H. *Introduction to perturbation techniques*, J Wiley, New-York, 1993, 519p, ISBN O-471-31013-1.
- [44] Nelson H. D., Mac Vaugh J. M. *The dynamic of rotor bearing systems using finite elements*, ASME J. of Eng. for md., 1976, Vol. 5, pp.593-599.
- [45] Nelson F.C. *A review of the origins and current status of rotor dynamics*. In *IFTOMM - Sixth International Conference on Rotor Dynamics*, Sydney, Australia, 2002.

- [46] Prohi, M. A. *A general method for calculating critical speeds of flexible rotors*, ASME Journal of Applied Mechanics, 1945, Vol. 12, pp. A142-A148.
- [47] Rao C, R. B. Bhat, and G. D. Xistris. Experimental verification of simultaneous forward and backward whirling at different points of a jeffcott rotor supported on identical journal bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 198(3) :379—388, 1996.
- [48] Rao C, R. B. Bhat, and G. D. Xistris. Simultaneous forward and backward whirling in a jeffcott rotor supported on dissimilar hydrodynamic bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 203(4) :707—716, 1996.
- [49] Sakata M, M. Endo, K. Kishimoto, and N. Hayashi. Secondary critical speed of flexible rotors with inertia slots. *Journal of Sound and Vibration*, 87(1) :61—70, 1983.
- [50] Samali B., Kim K. B., Yang J. N. *Random vibration of rotating machines under earthquake excitations*, Journal of Engineering Mechanics, June 1986, Vol. 112, n° 6, pp. 550-565.
- [51] Singh M. P., Chang T. S., Suarez L. E. *A response spectrum method for seismic design evaluation of rotating machines*, ASME, October 1992, vol. 114, pp. 454-460.
- [52] Suarez L. E., Rohanimanesh M. S., Singh M. P. *Seismic response of rotating machines*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1992, vol. 21, pp. 2 1-36.
- [53] Subbiah R., Bhat R. B., Sankar T. S. *Response of rotors subjected to random support excitations*, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, October 1985, Vol. 107, pp. 453-459.
- [54] Tondi A. *Some problems of rotor dynamics*, London, Chapman and Hall, 1965, 433 p.
- [55] Tran D. M. *Etude du comportement dynamique des rotors flexibles*, Thèse Université C. Bemard, Lyon, 1981.
- [56] Yamamoto T., Ota H., Kono K. *On the vibrations of a rotor with rotating inequality and with variable rotating speed*, Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, May 1972, Vol. 24, n°1, pp. 1-80.
- [57] Yamamoto T., Ishida Y. *On the vibrations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics*, Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, May 1978, Vol. 30, n°1, pp. 59-109.
- [58] Yamamoto T., Ishida Y., Ikeda T. *Vibrations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics and unsymetry*, Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, November 1983, Vol. 35, n°2, pp. 131-204.
- [59] Zorzi E. S. and H. D. Nelson. Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping. *ASME Journal of Engineering for Power*, pages 71—76, 1977.
- [60] Ôzgtiven H. N. and Z. L. Ôzkan. Whirl speeds and unbalance response of multibearing rotors using finite elements. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 106 :72—79, 1984.

Annexe I

Matrices élémentaires de disque

Vecteur modal $\delta = [u, w, \theta, \psi]^T$

$$M_d = \begin{bmatrix} MD & 0 & 0 & 0 \\ & MD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ID_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ID_m \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 0 & 2MDQ & 0 & 0 \\ -2MDQ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2qID_m - ID_y(q + \Omega) \\ 0 & 0 & -2qID_m + ID_y(q + \Omega) & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_d = \begin{bmatrix} -MD(r^2 + q^2) & MD(pr + \dot{q}) & 0 & 0 \\ MD(pr + \dot{q}) & -MD(p^2 + q^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (ID_m - ID_y)(r^2 - q^2) + ID_y q \Omega & ID_y pr + ID_m(\dot{q} - pr) \\ 0 & 0 & (pr + \dot{q})(ID_y - ID_m) & (p^2 + q^2)(ID_m - ID_y) + ID_y q \Omega \end{bmatrix}$$

$$F_d = \begin{bmatrix} MD[\ddot{X} - 2r\dot{Y} + 2q\dot{Z} - (r^2 + q^2)X + (pq - \dot{r})(Y + y) + (\dot{q} + rp)Z] \\ MD[\ddot{Z} - 2q\dot{X} + 2p\dot{Y} - (\dot{q} - pr)X + (\dot{p} - qr)(Y + y) - (q^2 + p^2)Z] \\ ID_m(\dot{p} - qr) - ID_y r(q + \Omega) \\ ID_m(\dot{r} - pq) + ID_y p(q + \Omega) \end{bmatrix}$$

Annexe II**Matrices élémentaires de l'arbre**

Energie cinétique:

$$M_a = \rho S M1 + \rho I_m M2$$

$$C_a = 2\rho \{ \dot{\beta}_s S C1 - I_m \Omega C2 \}$$

$$K_a = \rho S (K1 + \ddot{\beta}_s C1 + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s K2) + \rho I_m [K3 - (\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) M4 + 2\dot{\beta}_s (\dot{\beta}_s + \Omega) M2]$$

Avec :

$$M2 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3L \\ \text{Sym} & & & & & 36 & -3L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$M3 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3L \\ \text{Sym} & & & & & -36 & 3L & 0 \\ & & & & & & -4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$M4 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ & & & 0 & 0 & 3L & 3L & 0 \\ & & & & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & \text{Sym} & & & & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & & 0 & -4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$C1 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & 0 & 0 & 22L & -54 & 0 & 0 & -13L \\ & & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ & & & 0 & 0 & -13L & 3L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 156 & -22L & 0 \\ & \text{Antisym} & & & & 0 & 0 & -22L \\ & & & & & & 0 & 4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$C2 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ & & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & \text{Antisym} & & & 0 & 0 & -3L & \\ & & & & & 0 & 4L^2 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$K1 = \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 156c_1 & 0 & 0 & -22Lc_1 & 54c_1 & 0 & 0 & 13Lc_1 \\ & 156c_2 & -22Lc_2 & 0 & 0 & -54c_2 & 13Lc_2 & 0 \\ & & -4L^2c_2 & 0 & 0 & -13Lc_2 & 3L^2c_2 & 0 \\ & & & 4L^2c_1 & 13Lc_1 & 0 & 0 & 3L^2c_1 \\ & & & & -156c_1 & 0 & 0 & -22Lc_1 \\ & Sym & & & & -156c_2 & -22Lc_2 & 0 \\ & & & & & & -4L^2c_2 & 0 \\ & & & & & & & -4L^2c_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ou } \begin{cases} c_1 = \dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2 \\ c_2 = \dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2 \end{cases}$$

$$K2 = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & & 0 & -4L^2 & 13L & 0 & 0 & 3L^2 \\ & & & 0 & 0 & -13L & 3L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 156 & -22L & 0 \\ & Sym & & & & 0 & 0 & 22L \\ & & & & & & 0 & -4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$K3 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36c_2 & 0 & 0 & -3Lc_2 & -36c_2 & 0 & 0 & -3Lc_1 \\ & 36c_1 & 3Lc_1 & 0 & 0 & -36c_1 & 3Lc_1 & 0 \\ & & 4L^2c_1 & 0 & 0 & -13Lc_1 & -L^2c_1 & 0 \\ & & & 4L^2c_2 & 3Lc_2 & 0 & 0 & -L^2c_2 \\ & & & & 36c_2 & 0 & 0 & 3Lc_2 \\ & Sym & & & & 36c_1 & -3Lc_1 & 0 \\ & & & & & & 4L^2c_1 & 0 \\ & & & & & & & -4L^2c_2 \end{bmatrix}$$

$$K4 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36c_3 & 0 & 0 & -3Lc_3 & -36c_3 & 0 & 0 & -3Lc_3 \\ & -36c_4 & -3Lc_4 & 0 & 0 & 36c_4 & -3Lc_4 & 0 \\ & & -4L^2c_4 & 0 & 0 & 3Lc_4 & L^2c_4 & 0 \\ & & & 4L^2c_3 & 3Lc_3 & 0 & 0 & -L^2c_3 \\ & & & & 36c_3 & 0 & 0 & 3Lc_3 \\ & \text{Sym} & & & & -36c_4 & 3Lc_4 & 0 \\ & & & & & & 4L^2c_1 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2c_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ou } \begin{cases} c_1 = \dot{\alpha}_s^2 - \dot{\beta}_s^{21} \\ c_2 = \dot{\gamma}_s^2 - \dot{\beta}_s^2 \end{cases}$$

$$V1 = \frac{L}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -L \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ L \end{bmatrix}$$

$$V2 = \frac{L}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ L \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -L \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V3 = \frac{L^2}{60} \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -2L \\ 21 \\ 0 \\ 0 \\ 3L \end{bmatrix}$$

$$V4 = \frac{L^2}{60} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 2L \\ 0 \\ 0 \\ 21 \\ -3L \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Energie de déformation:

$$K_u = EI_m K_u 1$$

$$Ku1 = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & -3L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & Sym & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$Ku2 = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 6L & -12 & 0 & 0 & 6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & L^2 & 0 \\ & & & -4L^2 & -6L & 0 & 0 & -2L^2 \\ & & & & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & Sym & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & -4L^2 \end{bmatrix}$$

$$Ku3 = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & 0 & -2L^2 \\ & & & 0 & 0 & 6L & -2L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 12 & -6L & 0 \\ & Sym & & & & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & & 0 & -4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Annexe III

Tableaux numériques pour mode 3

Déplacement nodal

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 3
 FREQ= 15.679 LOAD CASE= 0
 IMAGINARY COMPONENT

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	-0.10163E-05	0.11181E-04	0.11227E-04
2	0.0000	-0.32288E-04	-0.37690E-04	0.49629E-04
3	0.0000	0.75156E-05	-0.38787E-02	0.38787E-02
4	0.0000	-0.28015E-05	0.77838E-04	0.77888E-04
5	0.0000	-0.12789E-04	0.13764E-03	0.13823E-03
6	0.0000	-0.91848E-05	0.19409E-03	0.19430E-03
7	0.0000	-0.16733E-04	0.24245E-03	0.24303E-03
8	0.0000	-0.21549E-04	0.28279E-03	0.28361E-03
9	0.0000	-0.16890E-04	0.31500E-03	0.31545E-03
10	0.0000	-0.17662E-04	0.33756E-03	0.33802E-03
11	0.0000	-0.26978E-04	0.34087E-03	0.34193E-03
12	0.0000	-0.27200E-04	0.33148E-03	0.33260E-03
13	0.0000	-0.28905E-04	0.29733E-03	0.29873E-03
14	0.0000	-0.30046E-04	0.24761E-03	0.24943E-03
15	0.0000	-0.28750E-04	0.17675E-03	0.17908E-03
16	0.0000	-0.25210E-04	0.82799E-04	0.86552E-04
18	0.0000	-0.31171E-04	-0.19228E-03	0.19479E-03
19	0.0000	-0.24660E-04	-0.37871E-03	0.37951E-03
20	0.0000	-0.19332E-04	-0.58177E-03	0.58209E-03
21	0.0000	-0.19161E-04	-0.81125E-03	0.81147E-03
22	0.0000	-0.18397E-04	-0.10547E-02	0.10548E-02
23	0.0000	-0.15653E-04	-0.13243E-02	0.13244E-02
24	0.0000	-0.56376E-05	-0.16039E-02	0.16039E-02
25	0.0000	-0.71911E-05	-0.19000E-02	0.19000E-02
26	0.0000	-0.21809E-07	-0.22140E-02	0.22140E-02
27	0.0000	-0.90475E-06	-0.25270E-02	0.25270E-02
28	0.0000	0.20062E-05	-0.28627E-02	0.28627E-02
29	0.0000	-0.20336E-05	-0.31985E-02	0.31985E-02
30	0.0000	0.15060E-05	-0.35406E-02	0.35406E-02
32	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
33	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
34	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
36	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
37	0.0000	0.0000	-0.38138E-02	0.38138E-02
38	0.0000	0.67186E-05	-0.39507E-02	0.39507E-02

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 3
 FREQ= 15.679 LOAD CASE= 0
 IMAGINARY COMPONENT

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
MAXIMUM ABSOLUTE VALUES				
NODE	0	2	38	38
VALUE	0.0000	-0.32288E-04	-0.39507E-02	0.39507E-02

Forces nodales (mode 3)

PRINT F SUMMED NODAL LOADS

***** POST1 SUMMED TOTAL NODAL LOADS LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 3
FREQ= 15.679 LOAD CASE= 0
IMAGINARY COMPONENT

THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	FX	FY	FZ
1		32314.	68569.
2		0.11130E+06	-32124.
3		-0.53450E+06	-0.46217E+06
4		-0.13815E+06	-82233.
5		0.21418E+06	21004.
6		-0.19364E+06	-29204.
7		38762.	6372.5
8		0.16003E+06	35095.
9		-74983.	37108.
10		-0.15007E+06	-81111.
11		0.13450E+06	74883.
12		-32154.	-0.11223E+06
13		5511.9	70896.
14		33449.	23259.
15		39105.	10909.
16		-0.18972E+06	-7739.7
18		83040.	-94854.
19		-18015.	0.12076E+06
20		-95374.	-66399.
21		11331.	0.10761E+06
22		31217.	-0.13451E+06
23		0.11137E+06	0.10597E+06
24		-0.19298E+06	-33475.
25		0.15336E+06	-88958.
26		-0.13222E+06	0.20323E+06
27		85364.	-0.21727E+06
28		-0.11027E+06	0.11347E+06
29		0.11467E+06	-41847.
30		53648.	0.12121E+06
32		-10.163	
33		-322.88	
34			11181.
36			-37690.
37		0.52031E+08	0.39201E+07
38		-0.51582E+08	-0.35298E+07

***** POST1 SUMMED TOTAL NODAL LOADS LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 3
FREQ= 15.679 LOAD CASE= 0
IMAGINARY COMPONENT

THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	FX	FY	FZ
TOTAL VALUES			
VALUE	0.0000	0.0000	-0.46566E-09

Moment nodale (mode 3)

PRINT M SUMMED NODAL LOADS

***** POST1 SUMMED TOTAL NODAL LOADS LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 3

FREQ= 15.679 LOAD CASE= 0

IMAGINARY COMPONENT

THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	MX	MY	MZ
1	-0.50679E-13	-1280.3	996.97
2	0.17338E-12	-906.00	-3334.7
3	-0.28051E-13	-1546.1	3275.7
4	-0.44876E-13	-1381.9	-2318.6
5	0.17720E-12	566.74	331.90
6	-0.14988E-12	1516.7	808.51
7	0.29471E-13	891.12	-3874.3
8	0.11279E-12	299.79	2497.5
9	-0.10698E-12	-1466.6	3789.2
10	-0.57053E-13	-154.23	-2475.7
11	0.48916E-13	-509.53	-1822.7
12	0.83646E-13	691.78	350.53
13	-0.66551E-13	1981.9	-657.06
14	0.74796E-14	-840.44	1382.0
15	0.25202E-13	-1504.2	2288.2
16	-0.16795E-12	-1717.3	-1656.2
18	0.17281E-12	3540.2	2090.2
19	-0.13875E-12	1448.8	2723.4
20	-0.21248E-13	706.14	737.83
21	-0.98266E-13	-727.19	-2017.7
22	0.16488E-12	365.92	-728.73
23	-0.39242E-14	1102.4	2704.5
24	-0.14495E-12	-1245.7	916.11
25	0.23200E-12	2395.8	53.881
26	-0.32791E-12	-522.78	-74.723
27	0.29869E-12	-1145.6	-203.71
28	-0.21685E-12	3405.9	-2246.1
29	0.14853E-12	541.09	-1488.4
30	-0.72815E-13	-2496.3	3992.1
37	0.17235E-12	-0.58836E+08	-0.89347E+08
38	-0.15062E-12	0.58761E+08	0.90382E+08

TOTAL VALUES

VALUE -0.50487E-28 -73274. 0.10408E+07