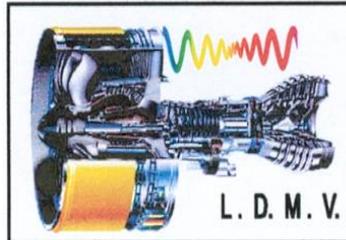




FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE MAINTENANCE INDUSTRIELLE
LABORATOIRE DYNAMIQUE DES MOTEURS ET VIBROACOUSTIQUE



MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Génie Mécanique

Option : DYNAMIQUE DES MOTEURS ET VIBROACOUSTIQUE

Mémoire

Etude expérimentale et numérique d'une structure fissurée sous contrainte de fatigue

Présenté par : **Melle SAIB Meriem**

Soutenu publiquement le:

Devant le Jury composé :

Mr. Saci Rachid	Professeur	UMBB, Boumerdès	Président
Mr. Nour Abdelkader	Professeur	UMBB, Boumerdès	Encadreur
Mr. Khalfi Ali	Professeur	U.D.L.Sidi Bel Abbes	Examineur
Mr. Necib Brahim	Professeur	U.M. Constantine	Examineur

Année universitaire 2011/2012

Remerciements

Ce travail de recherche a été réalisé au laboratoire Dynamique des moteurs et vibroacoustique à la faculté des sciences de l'ingénieur (UMBB) sous la direction du professeur NOUR.

J'exprime ma sincère et profonde gratitude à Monsieur NOUR, professeur qui par sa compétence a su à la fois m'informer, me conseiller, et me laisser une grande autonomie pour mener bien ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur SACI Rachid Professeur à l'université de Boumerdes qui ma fait l'honneur d'avoir examiné et présidé le jury de thèse,

A Monsieur KHALFI Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes, Monsieur SI-CHAÏB Professeur à l'université de Boumerdes (UMBB) et Monsieur NECIB Professeur à l'université de Constantine d'avoir accepté la tâche d'examiner le manuscrit.

Enfin, je remercierai Melle CHAHRAZED pour sa gentillesse, sa disponibilité et pour son aide à la réalisation des essais de fatigue au laboratoire.

Un grand merci aux personnes de l'atelier (I.N.G.M Boumerdes) pour leur aide dans la réalisation des mâchoires.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة التفرع في المواد هشة 2D تحت تأثير التعب الميكانيكي باستخدام طريقة العناصر المحدودة الممتدة لمحاكاة انتشار التشققات عبر الاقتداء النمط الأول والنمط المختلط. أجرينا اختبارات تجريبية على النمط الأول في مختبر محركات الديناميكية و الاهتزازات. النتائج المتحصل عليها بطريقة المحاكاة تتفق جيدا مع الاختبارات التجريبية.

الكلمات الرئيسية: التشققات الخطية، التشققات المختلطة، زاوية التفرع، طريقة (X-FEM)

Résumé

L'objectif de ce travail est de étudier la bifurcation et propagation des fissures dans les matériaux fragile en 2D sous chargement cyclique par la méthode des éléments finis étendus en mode I et mode mixte. Des essais expérimentaux en mode I, on été effectués au Laboratoire de recherche Dynamique des Moteurs et vibroacoustique. Les résultats numériques de ce modèle sont en bon accord avec ceux de l'expérimentaux.

Mot clés : rupture linéaire ; rupture en mode mixte ; angle de bifurcation ; méthode des éléments finis étendus (X-FEM).

Abstract

The objective of this work is study the bifurcation and the propagation of 2-D mixed-mode crack in a brittle material under cyclic loading, we use extended finite element method to simulate the propagation of fatigue crack by modeling mode I and mixed mode. Experimental tests as in mode I, it was carried out at the dynamic laboratory of the engines and vibroacoustic. The numerical results of this model are in good agreement with the experimental.

Key words: linear fracture, Mixed-mode crack, Bifurcation angle; extended finite element method (X-FEM)

Sommaire

Sommaire

Liste des figures	1
Liste des tableaux	3
Notations	4
Introduction	6
CHAPITRE I: Mécanique de la rupture linéaire	
1.1. Introduction.....	8
1.2. Mécanique linéaire de la rupture.....	8
1.2.1 Généralité.....	8
1.2.2. Les trois modes d'ouverture d'une fissure.....	8
1.2.3. Facteurs d'intensité des contraintes.....	9
1.2.4. Calcul des facteurs d'intensité des contraintes.....	10
1.2.5. Analyse asymptotique.....	13
1.2.6. Chargement mixte I et II	15
1.2.7. Critère de bifurcation des fissures	17
1.3. Propagation de fissures par fatigue	21
1.3.1 Mécanismes de fatigue.....	24
1.3.2 Caractérisation de la propagation de fissure.....	24
1.3.3 Modélisation de la fatigue.....	25
1.4. Conclusion.....	28
CHAPITRE II : Méthode X-FEM en mécanique de la rupture linéaire	
2.1. Introduction.....	29
2.2. Méthodes d'approximation en mécanique	29
2.2.1. La méthode des éléments finis	30
2.2.2. Méthode des éléments finis étendue (X-FEM).....	32
2.2.3. Méthode de partition de l'unité.....	33
2.3. Application à la mécanique de la rupture.....	34
2.3.1 Représentation de la discontinuité.....	35
2.3.2 Enrichissement en pointe de fissure.....	36
2.3.3 Enrichissement local.....	37
2.4 Fonction de niveau ou level-set	38

2.4.1. Level sets pour la fissuration.....	38
2.4.2 Base locale en fond de fissure.....	40
2.5 Exemple d'une poutre en compression.....	40
2.5.1 Formulation.....	41
2.6. Conclusion.....	45

CHAPITRE III : Etude expérimentale et numérique de mode I

3.1. Introduction.....	46
3.2. Etude expérimentale (mode I).....	46
3.2.1. Moyens expérimentaux.....	46
3.2.2. Conditions d'essai	48
3.2.3. Propagation des fissures par fatigue	49
3.3. Application à un cas de rupture par fatigue en mode I.....	49
3.3.1. Propriété mécanique des éprouvettes.....	49
3.3.2. Géométrie de l'éprouvette utilisée.....	50
3.3.3. Méthode de mesure de la vitesse de propagation d'une fissure en fatigue.....	51
3.4. Résultats d'essai.....	52
3.4.1. Vitesses de propagation.....	52
3.4.2. Nombre N de cycles et longueur de fissure a.....	53
3.5. Simulation numérique en mode I.....	54
3.6. Conclusion.....	56

CHAPITRE VI : Etude numériques de propagation de fissure en mode mixte

4.1. Introduction	57
4.2. Simulation de fissure en Mode mixte par X-FEM.....	57
4.2.1. Propriétés du matériau.....	57
4.2.2. Conditions aux limites et chargements.....	57
4.2.3. Caractéristiques de la modélisation.....	58
4.2.4. Direction de propagation de la fissure.....	59
4.2.5. Grandeurs testées et résultats.....	61
3.7. Conclusion.....	64
Conclusion et perspective générale.....	65
Bibliographie.....	67

Liste des figures

Figure 1.1	Fissure dans un milieu continu.	8
Figure 1.2	Trois modes d'ouverture d'une fissure	9
Figure 1.3	application de la méthode de superposition	10
Figure 1.4	Champ des contraintes au voisinage de la fissure	13
Figure 1.5	fissure dans une plaque finie sous un chargement mixte	15
Figure 1.6	Angle de bifurcation d'une fissure	19
Figure 1.7	Critère du taux de restitution d'énergie	20
Figure 1.8	Sollicitation de fatigue a amplitude constante	22
Figure 1.9	Représentation d'une loi de propagation de fissure sous fatigue	25
Figure 2.1	Transformation liant l'élément de référence (à gauche) à un élément de la discrétisation de Ω	30
Figure 2.2	Illustration du choix de la valeur de $H(\underline{x})$ (ici $H(\underline{x}) = -1$)	35
Figure 2.3	fonction saut	36
Figure 2.4	maillage X-FEM typique	37
Figure 2.5	Level sets et distance à la fissure	38
Figure 2.6	Level sets pour la représentation d'une fissure 3D	39
Figure 2.7	Coordonnées polaires dans la base locale	40
Figure 2.8	problème continu (a), modélisation par éléments finis standards (b), modélisation par éléments finis enrichis (c)	41
Figure 2.9	éléments poutre et degrés de liberté associés	42
Figure 2.10	Fonctions de formes pour la méthode X-FEM (a) et pour la méthode éléments finis standard (b)	44
Figure 3.1	La machine d'essai de fatigue INSTRON	47
Figure 3.2	régulateur FastTrack 8800	48
Figure 3.3	Eprouvette à une fissure débouchante	50
Figure 3.4	Principe de détermination la vitesse de propagation d'une fissure en fatigue	51
Figure 3.5	variation de la vitesse de propagation en fonction de ΔK	52

Figure 3.6	courbe d'évolution de la longueur de la fissure en fonction de nombre de cycles	53
Figure 3.7	Trajet de fissuration pour un mode I pur	54
Figure 3.8	maillage et déformé de la plaque fissuré	54
Figure 3.9	contrainte σ_{xx} en <i>Pa</i>	55
Figure 3.10	contrainte σ_{yy} en <i>Pa</i>	56
Figure 4.1	simplification de modèle de l'éprouvette	58
Figure 4.2	Maillage pour le modèle simplifié	59
Figure 4.3	résultats de simulation pour les trois angles de chargement 30°, 45° et 60° droite à gauche.	60
Figure 4.4	déformation maximale sous un chargement 30°	62
Figure 4.5	déformation maximale sous un chargement 60°	62
Figure 4.6	contrainte maximale sous un chargement de 30° en <i>MPa</i>	63
Figure 4.7	contrainte maximale principale sous un chargement de 60° en <i>MPa</i>	63

Liste des tableaux

Tableau 3.1	propriétés mécanique et paramètres principaux pour l'essai de fatigue	49
Tableau 3.2	Facteurs d'intensité de contrainte normalisé K_{In} pour une fissure débouchante	52
Tableau 3.3	facteur d'intensité de contrainte K_{In} (mode I)	55
Tableau 4.1	facteur d'intensité de contrainte ΔK_{eq} pour un chargement mixte de 60°	61
Tableau 4.2	facteur d'intensité de contrainte ΔK_{eq} pour un chargement mixte de 30°	61

Notations

σ_{ij} : Tenseur de contrainte

ε_{ij} : Tenseur de déformation

K_α : Facteur d'intensité de contrainte

K_{In} : Le facteur d'intensité de contrainte normalisé

$f_{ij}^\alpha(\theta)$ et $g_{ij}^\alpha(\theta)$: Fonction de répartition angulaire

$K(x)$: Fonction de poids

λ et μ : Coefficients de lamé

E : Module d'Young

κ : Constante de Kolosov

ν : Coefficient de poisson

σ_{max} : Contrainte maximale

σ_{min} : Contrainte minimale

R : le rapport des contraintes

f : La fréquence

da/dN : vitesse de propagation

K_{max} : Facteur d'intensité maximal

K_{min} : Facteur d'intensité minimal

ΔK_{seuil} : Seuil de propagation

N : Nombre de cycle

a : la longueur de fissure

ΔK_{eq} : Facteur d'intensité équivalent

C : Coefficient de la droite de Paris

m : Exposant de la droite de Paris

M^e : Paramètre de mixité élastique

C^* : Coefficient pour le mode mixte

β : Constante de matériau

U_i : Les déplacements nodaux

$H(\underline{x})$: Fonction de Saut

K_{ij} : Coefficients de la matrice de rigidité

n : Exposant d'écroutissage

σ_Y : Limite élastique

F : Paramètre de chargement

θ : L'angle de bifurcation

φ : L'angle de chargement

K_{Ic} : La ténacité

F.I.C : facteur d'intensité de contrainte

FEM : méthode des éléments finis

X-FEM : méthode des éléments finis étendue

DDL : degré de liberté

Introduction générale

Introduction

La présence de défauts dans les structures affaiblit leur résistance mécanique, peut entraîner leur ruine, et être à l'origine de catastrophes graves. Afin d'éviter celles-ci, ingénieurs et scientifiques doivent donc être capable de prédire le comportement des structures fissurées, et d'en garantir l'intégrité.

Selon les cas, la présence de fissures peut être constatée lors d'inspection si le composant est accessible au contrôle, ou supposée lorsque l'on souhaite évaluer la sûreté d'un composant.

La mécanique de la rupture est la science qui étudie le comportement des structures fissurées. Elle fournit les outils nécessaires pour l'analyse de l'intégrité de structures. Il s'agit d'un domaine scientifique relativement récent puisqu'il est apparu après la première guerre mondiale, notamment avec les études de Griffith en 1920 et d'Irwin en 1957 [1].

Du point de vue numérique, la propagation de fissure est un problème complexe puis qu'il nécessite de suivre la géométrie de la fissure au cours du temps. On a alors recours à des procédés de type remaillage et projection de champs, coûteux en temps de calcul, et dont la validité théorique pose un certain nombre de questions. On a vu ces dernières années se développer des méthodes permettant de prendre en compte implicitement des discontinuités ; comme la méthode des éléments finis étendus. Grace à des fonctions d'interpolation enrichies, on peut alors représenter implicitement une discontinuité mobile -comme une fissure- sans remaillage.

On propose d'utiliser la méthode des éléments finis étendus pour simuler la propagation de fissure en fatigue en modélisant le mode I et mode mixte. Des essais expérimentaux en mode I ont été effectués au Laboratoire de recherche Dynamique des Moteurs et vibroacoustique montrer la potentialité de méthode.

Le plan de ce mémoire va découler de ce découpage du problème et présentera, après une description des techniques existantes, les développements numériques apportés. Le premier chapitre dresse un aperçu d'un point de vue théorique en ce qui concerne la propagation de fissure en fatigue. Le second chapitre est concentré sur la méthode des éléments finis étendus (ou eXtended Finite Element Methode). C'est en effet, cette méthode moderne que nous avons choisi, elle était

implanté dans le logiciel de calcul ABAQUS. Au vu des avantages qu'elle présente pour la simulation numérique de propagation de fissure.

Le cadre expérimental de ce travail est décrit au chapitre III. On commence par la présentation de la machine de fatigue INSTRAN 8800 au laboratoire Mécanique et vibroacoustique à la faculté des sciences de l'ingénieur, et du processus d'exploitation des résultats expérimentaux. Comme dans tous les problèmes de simulation numérique, il nous paraît essentiel de pouvoir nous appuyer sur des résultats expérimentaux qui nous permettront d'évaluer la pertinence de méthode X-FEM.

Pour finir, nous synthétisons les principaux résultats de cette étude au sein d'un chapitre de conclusion. De nombreuses perspectives sont également évoquées car le sujet reste très ouvert.

Cadre de l'étude

On se place dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, qui correspond au cas de matériaux fragiles. Dans ce cadre, le modèle de l'élasticité linéaire est employé.

On suppose de plus que le matériau est homogène isotrope, et que les fissures sont traversantes. Le front de fissure est supposé droit, perpendiculaire au plan moyen de la plaque. L'évolution de la fissure est quasi-statique, afin de pouvoir négliger les effets d'inertie.

chapitre I

Mécanique de la rupture linéaire

1.1. Introduction

Ce chapitre présente les bases de la mécanique de rupture nécessaires pour aborder la simulation numérique de propagation de fissure. Nous travaillerons sur un solide initialement fissuré soumis à des sollicitations cyclique.

Tout d'abord les notions essentielles de la mécanique de la rupture fragile en statique sont exposées. Ensuite Les paramètres décrivant la rupture et les critères de bifurcation sont définis. Enfin le problème de propagation de fissure par fatigue.

1.2. Mécanique linéaire de la rupture

1.2.1. Généralité

Localement, la rupture est caractérisée par la séparation irréversible d'un milieu continu (Ω) en deux parties distinctes. On définit alors une fissure comme étant la surface géométrique (S) de séparation (Fig1.1). [2]

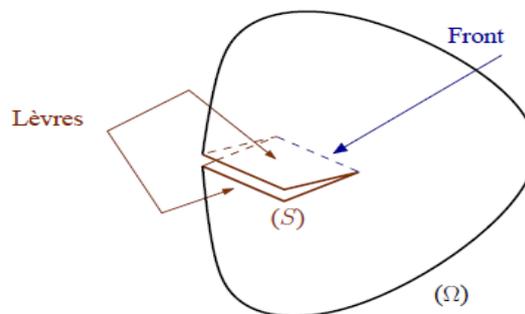


Figure 1.1 : Fissure dans un milieu continu.

1.2.2. Les trois modes d'ouverture d'une fissure

Il a été montré que toutes les sollicitations sur la fissure peuvent être ramenées à la superposition de trois modes élémentaires (Fig1.2):

- le mode I (mode d'ouverture) où les lèvres de la fissure se déplacent dans des directions opposées, perpendiculairement au plan de fissuration,
- le mode II (mode de cisaillement dans le plan) où les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan, dans une direction perpendiculaire au front de fissure,
- le mode III (mode de cisaillement hors plan) où les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan, dans une direction parallèle au front de fissure.

Notons que dans le cas des modes II et III, les lèvres de fissures restent en contact et entraînent donc des frottements qui diminuent l'énergie disponible pour la propagation de fissure. Ces deux modes sont ainsi généralement moins dangereux que le mode I.

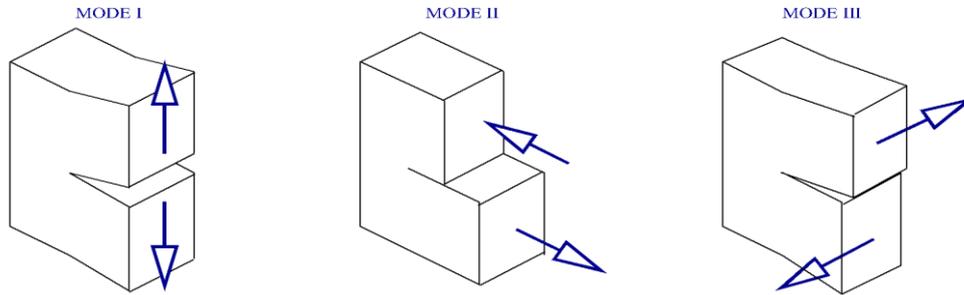


Figure 1.2 : Trois modes d'ouverture d'une fissure

Le cas réel est une superposition de ces modes et on parle alors de mode mixte.

On supposera par ailleurs que le mode I positif est toujours présent (ouverture) et donc on considéra les lèvres de la fissure comme étant libres d'effort.

1.2.3. Facteurs d'intensité des contraintes

Introduits par Irwin en 1957, les facteurs d'intensité de contraintes correspondent à des cinématiques particulières du mouvement des fissures. Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, les contraintes et les déformations au voisinage d'une fissure admettent un développement asymptotique dont le terme singulier s'écrit : [3]

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = K_\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^\alpha(\theta) \\ \varepsilon_{ij} = K_\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^\alpha(\theta) \end{cases} \quad \alpha = 1,2,3 \quad 1.1$$

K_α est le Facteur d'Intensité des Contraintes (FIC) en mode α , avec $\alpha=I, II$ ou III . Les fonctions f et g donnent la répartition angulaire ; leurs expressions en contraintes et déformations planes. Lorsque l'on se trouve en mode I pur, l'état local de contraintes et de déformations peut être caractérisé à l'aide du seul paramètre K_I .

Les FIC caractérisent la force de la singularité du champ des contraintes à l'extrémité de la fissure. Ils sont proportionnels aux discontinuités des déplacements des lèvres de la fissure, et ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs et de la géométrie de la fissure.

1.2.4. Calcul des facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité des contraintes s'expriment en fonction du champ des contraintes au voisinage de la fissure, et ce champ de contraintes étant parfaitement accessible numériquement, ce calcul ne devrait pas poser de problèmes à priori. Pourtant, nous allons voir qu'une bonne précision sur ces facteurs est difficile à obtenir.

Il existe un bon nombre de solutions ; la méthode la plus couramment utilisée consiste à ramener le problème traité à une suite de problèmes déjà résolus dont les solutions sont connues. Le principe utilisé est toujours celui de *superposition des solutions* qui, bien évidemment, résulte de l'*élasticité linéaire*.

a) Principe de superposition

Supposons un solide bidimensionnel fissuré soumis à différents efforts : charges ou moments imposés. Si la solution n'existe pas, il est possible de décomposer le problème en deux parties. [7]

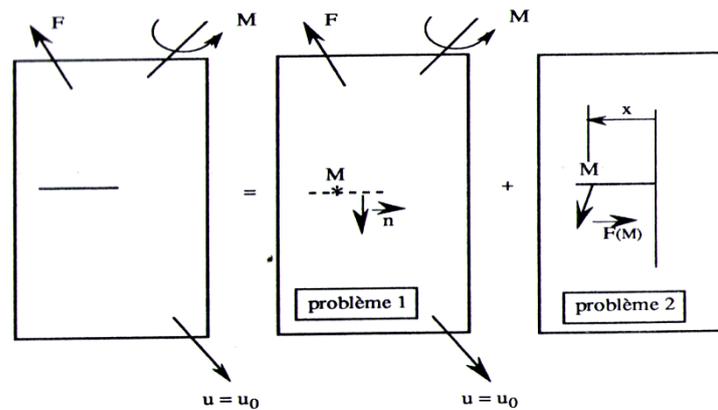


Figure 1.3 : application de la méthode de superposition

On cherche tout d'abord la solution du problème sans fissure avec les mêmes conditions aux limites (problème 1). Cela permet de connaître, en tout point, la distribution des contraintes et des déformations. A tout point M , sur les lèvres de la fissure, on associe une force $F(M)$ telle que :

$$F(M) = \sum_j \sigma_{ij} n_j \quad 1.2$$

Où n est le vecteur normal au plan de la fissure et tourné vers celle-ci. Cette force peut, elle-même, être décomposée en trois parties :

$F_I(M)$: Force normale au plan de la fissure.

$F_{II}(M)$: Force dans plan et parallèle au plan de la fissure.

$F_{III}(M)$: Force normale au plan du problème.

On ajoute alors la solution du problème 2 qui est le suivant. Avec des conditions aux limites de déplacements ou de forces nulles sur le contour extérieur : trouver le facteur d'intensité de contrainte pour une fissure soumise à un chargement $F(M)$.

La solution de ce problème peut être connue pour certaines formes particulières de la fonction $F(M)$; par exemple $F(M)$ constant, linéaire, parabolique.

On peut alors approcher la fonction $F(M)$ par un polynôme $F(M) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots$ où x est la distance du point M à la pointe de fissure considérée. Cela conduit à une solution de la forme $A_0K_{I0} + A_1K_{I1} + A_2K_{I2}$ où $K_{I0,I2,I3}$ sont les solutions pour les distributions élémentaires $F(M) = 1, x, x^2$, respectivement.

Une autre méthode de résolution consiste à rechercher la valeur de $K_I(x)$ produite par une force unité, placée à une distance x de l'extrémité de la fissure. Pour une distribution $F(x)$,

On peut alors écrire :

$$K_I = \int_{\text{fissure}} F(x)K(x) dx \quad 1.3$$

La fonction $K(x)$ s'appelle fonction de poids.

b) Solution de Muskhelishvili

Le système qui est considéré ici. Il s'agit d'un panneau "infini", contenant une fissure de longueur $2a$ selon l'axe x_1 , et sollicité en traction uniforme selon l'axe x_2 . Dans la pratique, un modèle de ce type pourra être raisonnablement utilisé dès lors que les dimensions de la fissure seront de 10 à 20 fois plus faibles que celle de la plaque. Il existe une solution analytique exacte de ce problème, sur l'axe $x_2 = 0$, en supposant un état de contraintes planes:

$$\text{Si } x_1 \geq a \quad \begin{cases} \sigma_{22} = \sigma_{\infty} / (1 - (a/x_1)^2)^{1/2} \\ \varepsilon_{22} = \left(\frac{\sigma_{\infty}}{E}\right) \left(\nu + \frac{1-\nu}{(1-(a/x_1)^2)^{1/2}}\right) \end{cases} \quad 1.4$$

$$\text{Si } 0 < x_1 < a \quad [u_2] = 2u_2 = \left(\frac{4a\sigma_{\infty}}{E}\right) (1 - (a/x_1)^2)^{1/2}$$

La formule du déplacement u_2 sur la frontière de la fissure montre que l'ouverture des lèvres de la fissure est représentée par une ellipse. Le changement de variable $x_1 = a + r$ montre qu'il existe au voisinage de la pointe de fissure une singularité en $r^{1/2}$ lorsque r tend vers 0. $\sigma_{22} \propto \sigma_{\infty} (a/2r)^{1/2}$

c) Solution asymptotique de Westergaard

Le problème précédent peut également être abordé en introduisant la "fonction d'Airy" $\psi(x_1, x_2)$ telle que : $\sigma_{11} = \psi_{,22}$; $\sigma_{22} = \psi_{,11}$; $\sigma_{12} = \psi_{,12}$. Les équations d'équilibre sont alors automatiquement vérifiées.

En élasticité linéaire, le report de ces égalités dans les conditions de compatibilité $2\varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{22,22}$ conduit à chercher ψ comme solution de l'équation biharmonique $\Delta\Delta\psi = 0$. Ce problème se résout par la méthode des fonctions complexes. On obtient ainsi la solution asymptotique au voisinage de la pointe de fissure. Irwin a montré que le premier terme du développement limité est le même, à un facteur multiplicatif près, pour tous les problèmes correspondant à un mode d'ouverture donné. La sollicitation d'une fissure linéaire dans un milieu plan perpendiculairement à son axe correspond au mode I ; on introduit ainsi le *facteur d'intensité de contrainte en mode I*, K_I tel que:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{22} \sqrt{2\pi r}) \quad 1.5$$

1.2.5. Analyse asymptotique

On considère un matériau homogène et isotrope dont le comportement est élastique linéaire. On note λ et μ ces coefficients de Lamé, E son module d'Young, κ constante de Kolosov et ν son coefficient de Poisson. Les phénomènes étudiés seront bidimensionnels.

a) Champs de contrainte et déplacement

On donne les résultats correspondant successivement aux modes I, II, III et mode mixte.

Où r et θ sont les coordonnées polaires d'un point P par rapport au front de fissure (Figure 1.4). Ainsi la singularité du champ de contraintes est connue dès que l'on connaît l'expression des F.I.C. [4]

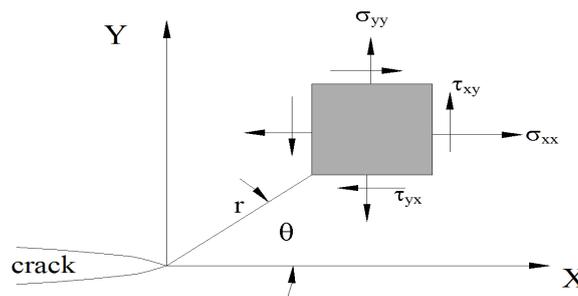


Figure 1.4: Champ des contraintes au voisinage de la fissure

Mode I

Contraintes

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \text{ en déformation plane} \quad 1.6$$

$$\sigma_{zz} = 0, \text{ en contrainte plane}$$

Déplacements

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad 1.7$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\kappa = 3 - 4\nu, \text{ en déformation plane}$$

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1-\nu}, \text{ en contrainte plane}$$

Mode II

Contraintes

$$\sigma_{xx} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right) \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad 1.8$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \text{ en déformation plane}$$

$$\sigma_{zz} = 0, \text{ en contrainte plane}$$

Déplacements

$$u_x = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad 1.9$$

$$u_y = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(-\cos \frac{\theta}{2} \right) \left(\kappa - 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Mode III

Contraintes

$$\sigma_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad 1.10$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

Déplacements

$$u_z = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad 1.11$$

1.2.6. *Chargement mixte I et II*

La plupart des structures et des pièces sont soumis plus d'un chargement ou d'un mode. Si nous considérons un problème d'une fissure débouchante dans une plaque comme représenté sur le schéma (fig 1.5), la croissance coplanaire signifie que la fissure accroîtrait sous un angle $90^\circ - \varphi$ des degrés de l'effort appliqué. Dans la pratique, la fissure tend à propager dans une direction orthogonale à l'effort normal appliqué.[8] , [9]

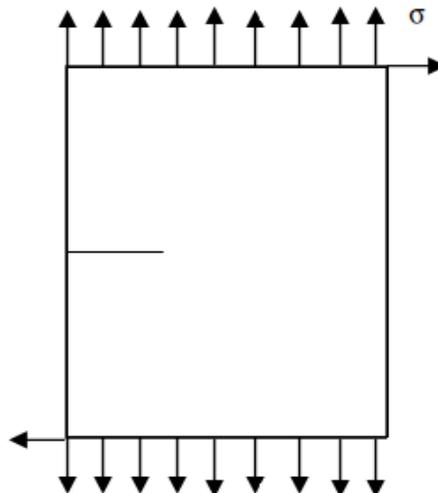


Figure 1.5: fissure dans une plaque finie sous un chargement mixte

C'est parce que la propagation de fissure cherche le chemin de moindre résistance (le chemin de la force d'entraînement maximum) et n'a pas besoin d'être confiné à son niveau initial. On a proposé un certain nombre de critères pour expliquer de tels effets parmi eux, le plus largement répandu sont croissance de fissure auront lieu dans la direction du taux de rejets d'énergie est maximum; la progression de la fissure se produit dans une direction perpendiculaire à l'effort principal maximum; la progression de la fissure se produit où la densité d'énergie de tension est le minimum.

Les contraintes et le déplacement d'une fissure en mode mixte (mode I et II) ; se donnent par l'équation (1.12, 1.13). [4]

Contrainte

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{array} \right. \quad 1.12$$

Déplacement

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + \cos \theta + 2) \sin \frac{\theta}{2} \\ u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + \cos \theta - 2) \sin \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \quad 1.13$$

Avec :

$$\kappa = 3 - 4\nu, \text{ en déformation plane}$$

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1-\nu}, \text{ en contrainte plane}$$

1.2.7. Critère de bifurcation des fissures

Après avoir déterminé les facteurs d'intensité de contraintes numériquement ou analytiquement d'une part, et la ténacité K_{Ic} expérimentalement d'autre part, le critère de bifurcation doit déterminer (θ_0): [16]

θ_0 : L'angle de bifurcation par rapport à l'axe de fissure.

Si les facteurs d'intensité de contraintes sont tels qu'une combinaison de ces facteurs rend la fissure instable et la fait propager. Pour la fissuration en mode I, lorsque $K_I \geq K_{Ic}$, la fissure devient instable.

Pour le cas d'un mode mixte (mode I + mode II) de fissuration, le critère de bifurcation exige donc une relation entre K_I et K_{II} , d'une part, et K_{Ic} d'autre part, cette relation s'écrit sous forme : $F(K_I, K_{II}, K_{Ic}) = 0$

Dans l'absence d'un critère qui fait l'unanimité, et afin d'effectuer la comparaison avec les résultats expérimentaux, nous avons retenu trois critères de bifurcation parmi les plus largement répandus :

Le premier est basé sur une interprétation physique du phénomène « *critère de la contrainte normale maximum* ».

Le deuxième s'établit à partir de la densité de l'énergie de déformation « *critère de minimum de la densité locale de l'énergie de déformation* ».

Le troisième peut s'énoncer sous deux formes, physique ou énergétique « *critère de maximum du taux de restitution d'énergie* ».

a) Critère de la contrainte normale maximale

Le critère de la contrainte normale maximale (ou critère de la contrainte circonférentielle maximale), introduit par Erdogan et Sih [Erdogan et al. 1963] est un critère local, basé sur la connaissance du champ des contraintes en pointe de fissure. Ce critère est l'un des plus utilisés. [13]

Dans le cas élastique, le critère $\sigma_{\theta\theta max}$ est le plus communément utilisé. D'après ce critère la direction de la propagation de la fissure est perpendiculaire à la direction du maximum des contraintes tangentielles. Considérant l'équation de la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ suivante (voir Figure 1.6) :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \left(\cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) - 3K_{II} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad 1.14$$

Où r et θ sont les coordonnées polaires à la pointe de la fissure

L'énoncé de ce critère est le suivant : « La bifurcation s'amorce à l'extrémité de la fissure dans la direction ($\theta = \theta_0$) perpendiculaire à la direction de la plus grande contrainte tangentielle $\sigma_{\theta\theta}$ et pour une valeur de correspondance à $\sigma_{\theta\theta} \sqrt{2\pi r} = K_{IC}$.

Ceci se traduit par :

$$\sigma_{\theta\theta} |_{\theta=\theta_0} > 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} < 0 \quad 1.15$$

Compte tenu des équations 1.14 on déduit :

$$\frac{\cos \theta_0}{2} [K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1)] = 0 \quad 1.16$$

Cette équation a deux solutions triviales $\theta_0 = \mp \pi$ et, $K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0$

D'où θ_0 l'angle de bifurcation, peut être déduit comme suit :

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \quad 1.17$$

On considère que lorsque $\theta = \theta_0$, $\sigma_{\theta\theta} \sqrt{2\pi r} = K_{IC}$ et en intégrant la solution dans les équations 1.14, on obtient :

$$\frac{K_I}{K_{IC}} \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - \frac{K_{II}}{K_{IC}} \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \theta_0 = 1 \quad 1.18$$

Cette condition correspond alors à la rupture fragile par fissuration brutale dans la direction θ_0 en milieu élastique linéaire.

Il a été reproché à ce critère de n'utiliser que l'état de contrainte avant bifurcation ; Williams et Erwing ont modifié ce critère en faisant intervenir une longueur(s) infinitésimale de bifurcation.

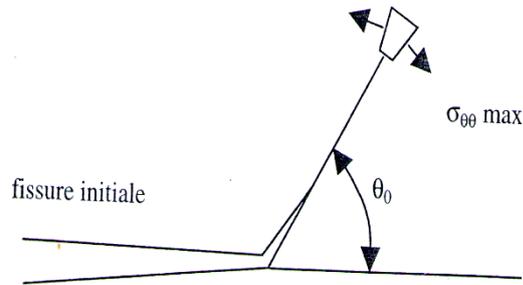


Figure 1.6 : Angle de bifurcation d'une fissure

6) Critère du minimum de la densité locale de l'énergie de déformations

L'inconvénient des critères locaux tels que le critère de la contrainte normale maximale, est que notre connaissance des champs mécaniques au voisinage immédiat de la pointe de fissure est parfois approximatif. Il pourrait être intéressant de se placer un peu plus loin du fond de fissure pour calculer la direction de propagation. Sih considère que l'énergie de déformation s'oppose à la croissance de la fissuration [Sih et al. 1974]. La fissure s'orientera donc dans la direction θ_0 pour laquelle cette énergie est minimale. La rupture intervient quand ce minimum atteint une valeur critique.[12]

En élasticité linéaire, la densité de l'énergie de déformation s'écrit sous la forme suivante :

$$U_0(\varepsilon) = \frac{S(\theta)}{r} = \frac{1}{\pi \cdot r} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I \cdot K_{II} + a_{22}K_{II}^2) \quad 1.19$$

Avec :

$$a_{11} = \frac{1}{16\mu} (3 - 4\nu - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\mu} (2 \sin \theta)(\cos \theta - 1 + 2\nu)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\mu} [4(1 - \nu)(1 - \cos \theta) + (3 \cos \theta - 1)(1 + \cos \theta)]$$

μ Étant le coefficient de Lamé.

On cherche θ_0 l'angle de bifurcation tel que :

$$\frac{dS}{d\theta} = 0 \Rightarrow S_{min} = S(\theta_0)$$

La rupture est obtenue selon ce critère pour :

$$\frac{4\mu}{1-2\nu} \left[a_{11} \left(\frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^2 + 2a_{12} \left(\frac{K_I K_{II}}{K_{Ic}^2} \right) + a_{22} \left(\frac{K_{II}}{K_{Ic}} \right)^2 \right] = 1 \quad 1.20$$

Ce critère pose des problèmes pratiques. D'une part, il fournit plusieurs angles de bifurcation, ce qui nécessite la connaissance approximative du chargement local et d'avoir une idée de la direction de propagation ; d'autre part, le minimum relative de la fonction $S(\theta)$ sont peu marquées, ce qui rend délicate la recherche de θ_0 dans les cas de chargements complexes. En plasticité, ce critère n'a pas encore été appliqué.

c) Taux de restitution d'énergie

Tout comme pour le critère précédent, on s'éloigne du fond de fissure pour éviter les perturbations dues à la singularité, et on calcule le taux de restitution d'énergie sur la couronne d'intégration entourant la pointe de fissure.

Ce critère reprend la notion de taux de restitution d'énergie G déjà utilisée par Griffith, mais il se place dans un cadre d'étude plus générale, celui de la fissure présentant une bifurcation.[28]

En élasticité et pour une fissure ayant déjà une bifurcation, les angles définissent des facteurs d'intensité de contraintes pour l'extrémité de la branche secondaire, soit $K_I^*(\theta)$ et $K_{II}^*(\theta)$ lorsque s tend vers zéro.(voire figure 1.7)

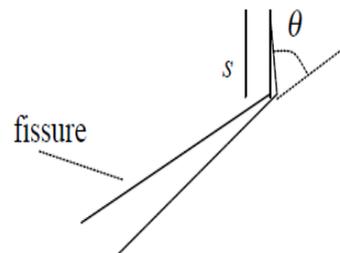


Figure1.7 : Critère du taux de restitution d'énergie

Ces deux facteurs de bifurcation sont exprimés en fonction de K_I et K_{II} selon les expressions suivantes :

$$\begin{Bmatrix} K_I^*(\theta) \\ K_{II}^*(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} \quad 1.21$$

k_{11} , k_{12} , k_{21} et k_{22} dépendent uniquement de θ .

Le critère est fondé sur l'expression du taux de restitution d'énergie pour une bifurcation d'angle (θ), soit en contrainte planes :

$$G = \frac{1}{E} [K_I^{*2}(\theta) + K_{II}^{*2}(\theta)] \quad 1.22$$

La détermination de l'angle de bifurcation peut alors s'obtenir par deux conditions rigoureusement équivalentes :

- La propagation correspond au maximum de G , soit : $\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0$
- La propagation s'effectue localement en mode $K_I^*(\theta)$ pur, soit : $K_{II}^*(\theta) = 0$;

Hassain et Al ont proposé une solution à ce problème plan, où le taux de restitution s'écrit comme suit, en négligeant la variation du travail des efforts extérieurs :

$$G(\theta) = \frac{4}{E} \left(\frac{1}{3 + \cos^2 \theta} \right)^2 \left(\frac{1 - \frac{\theta}{\pi}}{1 + \frac{\theta}{\pi}} \right)^{\frac{\theta}{\pi}} [(1 + 3\cos^2 \theta) K_I^2 + 8\sin \theta \cos \theta K_I K_{II} + (9 - 5\cos^2 \theta) K_{II}^2] \quad 1.23$$

La rupture est obtenue selon ce critère pour :

$$4 \left(\frac{1}{3 + \cos^2 \theta_0} \right)^2 \left(\frac{1 - \frac{\theta_0}{\pi}}{1 + \frac{\theta_0}{\pi}} \right)^{\frac{\theta_0}{\pi}} \cdot \left[(1 + 3\cos^2 \theta_0) \left(\frac{K_I}{K_{IC}} \right)^2 + 8\sin \theta_0 \cos \theta_0 \frac{K_I K_{II}}{K_{IC}^2} + (9 - 5\cos^2 \theta_0) \left(\frac{K_{II}}{K_{IC}} \right)^2 \right] = 1 \quad 1.24$$

On rappelle l'expression obtenue pour K_{Ieq} :

$$K_{Ieq} = \cos^3 \left(\frac{\theta_c}{2} \right) K_1 - \frac{3}{2} \cos \left(\frac{\theta_c}{2} \right) \sin(\theta_c) K_2$$

Avec θ_c l'angle de bifurcation

1.3. Propagation de fissures par fatigue

La mécanique de la rupture est un outil efficace qui permet aux concepteurs et aux ingénieurs de prendre en compte l'apparition des défauts dans les matériaux et d'éviter ainsi toute rupture brutale. Dans le cas de charges statiques ou monotones et en s'appuyant sur la ténacité du matériau considéré, les charges maximales que la structure contenant des

défauts peut supporter peuvent être calculées. Inversement, lorsque l'on connaît la valeur de charge agissant sur la structure, on peut déduire la taille critique des défauts tolérables.

Or, il suffit de considérer les structures qui nous entourent pour constater qu'elles sont soumises, en service, à des charges d'amplitude variable dans le temps, qu'il s'agisse des ailes ou du train d'atterrissage d'un avion, des pièces de toutes les machines tournantes...

L'application et le retrait d'une charge, même si sa valeur est inférieure à la charge maximale admissible calculée par l'approche de mécanique de la rupture, répétés un grand nombre de fois, peuvent entraîner la rupture de la structure. Il s'agit du phénomène de fatigue. [5]

La charge appliquée est une contrainte qui peut varier de façon sinusoïdale, périodique ou aléatoire. Cependant, par souci de simplicité on effectue les essais de fatigue, au laboratoire, en utilisant des chargements qui varient de façon simple (sinusoïdale ou triangulaire). Dans ce cas, les variables caractéristiques de l'essai sont (Fig.1.8):

- les contraintes maximale σ_{max} et minimale σ_{min} ;
- l'amplitude de contrainte $\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min})$;
- la contrainte moyenne ou contrainte statique ;
- le rapport des contraintes $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$;
- la période T (ou la fréquence $f=1/T$)

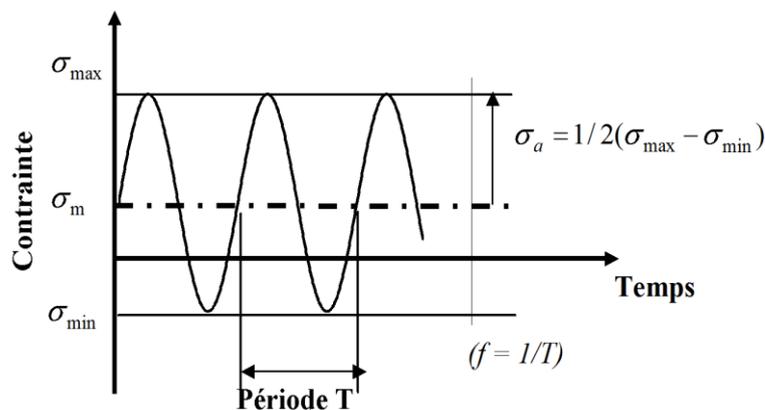


Figure 1.8 : Sollicitation de fatigue à amplitude constante

Selon l'amplitude de la contrainte, on peut définir deux grands domaines : la fatigue endurance et la fatigue oligocyclique:

Fatigue endurance : l'amplitude de contrainte est faible. Macroscopiquement, la déformation reste pratiquement élastique. La durée de vie de la pièce (Nombre de cycles nécessaires pour entraîner la rupture) est en général supérieure à 10⁴ ou 10⁵ cycles.

Fatigue oligocyclique : l'amplitude de contrainte est importante. Elle provoque à chaque cycle une déformation plastique. La durée de vie de la pièce est beaucoup plus courte ($N < 10^4$ cycles).

L'application d'un chargement cyclique (d'amplitude constante ou variable) à une pièce se traduit par l'apparition d'un dommage qui comprend trois stades

Stade I: si le chargement est en dessous d'un certain seuil, la fissure ne se propage pas au niveau macroscopique. C'est un stade de croissance rapide des micro- fissures qui atteignent des longueurs de l'ordre de quelques microns en surface après quelques millions de cycles.

Stade II: la fissure se propage «le plus souvent » dans un plan perpendiculaire à la direction de l'effort appliqué. C'est un stade de progression plus lente de la fissure en surface dont la durée dépend de l'amplitude de la contrainte.

Stade III: il correspond au cas de chargements élevés (progression rapide qui précède de peu la rupture) pour lesquels une déchirure se produit dans le matériau. Les vitesses de propagation très élevées observées dans ce domaine conduisent rapidement à la rupture de la pièce.

1.3.1. *Mécanismes de fatigue*

On s'intéresse ici aux mécanismes de fatigue, et notamment à la propagation de fissure par fatigue. La rupture de pièce ou de structure par fatigue peut être divisée en trois stades: l'amorçage, la propagation d'une fissure principale (ou de quelques fissures) et la rupture finale brutale.

L'amorçage se produit préférentiellement dans les zones où il y a concentration de contraintes: changement brusque de section ou de géométrie, inclusions ou défauts de surface. Toutefois, l'amorçage peut se produire dans les endroits parfaitement polis et ne présentant aucune zone de concentration de contrainte. Pour les matériaux cristallins ductiles, on constate que, à partir d'un certain nombre de cycles, des bandes de glissement persistantes apparaissent à l'endroit de localisation des déformations. L'observation de ces bandes révèle la formation d'extrusions et intrusions qui constituent des amorces de microfissures. Le stade d'amorçage se termine avec la formation d'une fissure principale, qui se propage selon le plan perpendiculaire à l'axe de la contrainte principale.

Une fois qu'elle est formée, la fissure principale se propage à l'intérieur du matériau. Le stade de propagation commence. Notons que sous de fortes amplitudes de contraintes, la durée de propagation peut représenter jusqu'à 90% de la durée de vie totale. Notre attention sera fixée, en particulier, sur le stade de fissuration.

Lorsque le facteur d'intensité de contraintes atteint la valeur critique K_c de ténacité, on observe la rupture finale brutale du composant.

1.3.2. *Caractérisation de la propagation de fissure*

Les mécanismes de fatigue montrent qu'il faut bien souvent tenir compte non seulement de la possibilité d'amorçage de fissures, mais également évaluer leur propagation éventuelle, afin de s'assurer que les fissures n'atteignent pas la longueur critique qui entraînera inévitablement une rupture brutale de la pièce. Pour cela, il est nécessaire de disposer de données quantitatives caractérisant la vitesse de propagation d'une fissure de fatigue.

Dans les années 1960, Paris et al ont montré qu'il existe une relation entre la vitesse de fissuration (da/dN) et le facteur d'intensité de contraintes K . Puisque la valeur de la contrainte varie, on définit l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes:

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} \quad 1.25$$

Où K_{max} et K_{min} sont les valeurs extrêmes de K pendant le cycle. En échelle bilogarithmique, la vitesse de propagation (da/dN) en fonction de ΔK à l'allure donnée dans la (Fig.1.9), sur laquelle on distingue trois régimes.

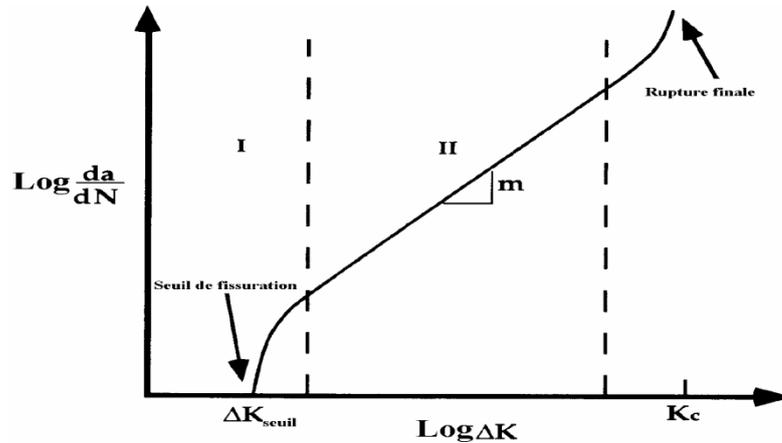


Figure 1.9: Représentation d'une loi de propagation de fissure sous fatigue

Le régime I est caractérisé le seuil de propagation. La vitesse de propagation tend vers zéro pour une valeur ΔK_{seuil} appelée seuil de propagation.

Le régime II, appelé régime de Paris, rentre tout à fait dans le cadre de nos travaux. Ce régime est caractérisé par l'accélération progressive de la vitesse de propagation lorsque ΔK augmente.

Le régime III correspond à une accélération très rapide de la vitesse de fissuration. Le facteur d'intensité de contraintes est proche de la valeur critique K_c correspondant à la rupture finale.

1.3.3. Modélisation de la fatigue

De façon globale, il existe deux approches pour rendre compte du phénomène de fatigue : [10]

- La première repose sur l'utilisation des courbes de Wöhler qui donnent le nombre de cycles à rupture en fonction de l'amplitude constante du chargement appliqué à chaque cycle. Pour déterminer la durée de vie de structures soumises à des sollicitations variables,

on ajoute une loi de dommage cumulatif, par exemple celle de Miner. Celle-ci repose sur l'hypothèse suivante : l'application de n_i cycles au niveau de chargement F_i , auquel le nombre moyen de cycles à rupture est N_i (donnée par les courbes de Wöhler), entraîne un accroissement du dommage égal à n_i/N_i et la rupture survient lorsque $\sum n_i/N_i = 1$.

L'inconvénient principal de cette méthode est qu'elle ne permet pas de faire la distinction entre phase d'amorçage et phase de propagation de la fissure.

– La seconde approche consiste à utiliser la mécanique de l'endommagement en phase d'initiation (afin de faire apparaître une fissure puisque la théorie de GRIFFITH est incapable) et la mécanique de la rupture (Loi de PARIS et ses nombreuses variantes) pour la phase de propagation.

Cependant les lois obtenues sont souvent limitées à un mode et à un niveau de chargement particulier, à un matériau ou à une catégorie de matériaux spécifiques.

a) Lois de Paris

De nombreuses lois ont été proposées pour décrire l'évolution de la propagation de fissures de fatigue dans le régime B de la figure 1.9.

À ce jour, la loi phénoménologique de PARIS reste toujours la plus abondamment utilisée par les ingénieurs. Cette dernière relie le taux de fissuration à la variation du F.I.C. par une loi puissance.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad 1.26$$

Où C et m sont des paramètres expérimentaux dépendant du matériau et des conditions d'essai (rapport de charge, environnement ...).

a : est la longueur de fissure et N le nombre de cycles.

b) Modèle proposé de propagation de fissure en mode mixte

Afin d'évaluer l'influence de mode mixte sur la propagation de fissure, on propose un modèle numérique. On l'établit sur la base de la loi de Paris

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eq})^m \quad 1.27$$

ΔK_{eq} est facteur d'intensité équivalent qui peut obtenu selon la formule a proposé par Tanaka. [16] ,[29]

$$\Delta K_{eq} = [\Delta K_I^4 + 8\Delta K_{II}^4]^{0.25} \quad 1.28$$

Selon les résultats expérimentaux effectués dans ce travail, l'exposant m dans la lois paris constante quand la fissure se propage sous le chargement mixte. Cependant, le coefficient C varie en fonction de mode de la rupture. Par conséquent, l'influence de mode mixte sur le taux de propagation de fissure peut être prise en considération par une représentation approximative du coefficient C . Alors on utilise le coefficient C^* ce qui est en fonction de paramètre de mixité élastique M^e .

$$C^* = C \cdot f(M^e) \quad 1.29$$

D'après SIH en 1974 M^e est définit par la formule suivante :[28]

$$M^e = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left| \frac{K_I}{K_{II}} \right| \quad 1.30$$

C coefficient pour le mode I ; C^* coefficient pour le mode mixte.

Selon les résultats expérimentaux, le coefficient C^* peut être écrit comme suit :

$$C^* = C \cdot f(M^e) = C[1 + \beta(M^e - 1)^2] \quad 1.31$$

Pour le mode I pur, $M^e = 1$, $C^* = C$. Dans l'équation 1.30, β est une constante ajuster de l'expérimentale.

Dans ce travail $\beta = 3$ sembler adapter bien les données expérimentales pour toutes les éprouvettes CTS (the Compact Tension Shear). Jusqu'à ici la loi Paris prolongé pour une fissure sous un mode de chargement mixte est exprimée comme suit :

$$\frac{da}{dN} = C^* (\Delta K_{eq})^m \quad 1.32$$

Dans cette formule, le constant m et C sont mesurés à partir des essais de fatigue purement en mode I. Pour chaque longueur de fissure, ΔK_I et ΔK_{II} peuvent être calculer numériquement.

Cependant, la loi de Paris n'est pas universellement applicable. Les travaux d'Elber ont montré que le rôle de la fermeture doit être pris en compte pour décrire le comportement d'une fissure de fatigue. Ce phénomène consiste en la remise en contact des lèvres de la fissure lorsque la charge cyclique devient faible. La partie du cycle de chargement au cours de laquelle la fissure est fermée est considérée comme inopérante pour le mécanisme de propagation.

1.4. Conclusion

Les méthodes de la Mécanique de la rupture sont particulièrement utiles car elles permettent d'estimer les effets des défauts. Elles aident à choisir les procédures d'inspection des structures lors de la fabrication ainsi que les niveaux d'acceptation des fissures qui peuvent être détectées durant ces inspections.

Un intérêt particulier doit être porté sur les modèles de propagation des fissures par fatigue. En effet, les lois de fatigue utilisées sont essentiellement d'origine phénoménologique, leur forme et les paramètres à identifier peuvent changer d'un problème à l'autre.

chapitre II

Méthode X-FEM en mécanique de la rupture linéaire

2.1. Introduction

La simulation numérique en mécanique de la rupture est essentiellement basée sur l'utilisation de la méthode des éléments finis. Classiquement, pour un problème de propagation de fissure, un premier calcul est réalisé sur un maillage initial, puis un nouveau maillage est déterminé en prenant en compte l'avancée de la fissure suivant la loi de propagation choisie. Un nouveau calcul s'en découle, et le procédé est itéré pour chaque pas de propagation.

Un inconvénient majeur et immédiat est la nécessité de remailler à chaque pas de propagation [30]. Le processus de remaillage peut être facilement automatisé en 2D, et dans certains cas en 3D, mais un remaillage 3D de qualité s'avère coûteux en temps et en argent. En effet avec un mailleur automatique, un raffinement local approprié au niveau de la zone de fissuration entraîne souvent un nombre excessif d'éléments partout sur le reste de la structure. Un processus de raffinement est généralement utile, solution performante mais nécessitant une intervention humaine coûteuse ; et ce d'autant plus que la forme géométrique de la fissure est complexe (fissures hélicoïdales par exemple). Le problème de la réalisation du maillage devient quasi-inconcevable lorsque plusieurs fissures 3D coexistent au sein d'un même maillage. En plus de ces difficultés pratiques, la projection de grandeurs (contraintes, variables internes) d'un maillage à l'autre pose des problèmes théoriques fondamentaux (vérification des équations de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, de la masse). Parallèlement aux difficultés liées à la propagation, les méthodes avec maillage s'avèrent peu efficaces pour des études paramétriques où l'on s'intéresse à l'influence de la position et de la forme de la fissure.

2.2. Méthodes d'approximation en mécanique

L'objectif de cette section est de présenter différentes méthodes de discrétisation numérique adaptées à la résolution de problèmes de fissuration. Nous nous intéresserons en particulier à deux types de méthodes : (i) les méthodes éléments finis classiques, (ii) les méthodes d'éléments finis fondées sur la partition de l'unité (dont fait partie la méthode X-FEM). Ce paragraphe ne prétend pas fournir une synthèse exhaustive de ces méthodes, mais donne une vision générale des méthodes permettant de traiter le problème qui nous intéresse ici. Nous insisterons cependant plus particulièrement sur les méthodes de partition de l'unité puisque ce sont celles sur lesquelles nous mettrons l'accent par la suite.

2.2.1. La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est maintenant très largement utilisée en mécanique. Depuis ses débuts, celle-ci a fait l'objet de développements continus de la part de la communauté du calcul des structures. De nombreux ouvrages lui sont dédiés, comme Bathe (1996) [33], Zienkiewicz et Taylor (1991) [34].

Considérons un domaine Ω décomposé en \mathcal{N}_e sous-domaines géométriques Ω_e de forme simple, comme des triangles ou des quadrangles en 2D. Ces formes simples sont appelées *éléments* et constituent le maillage de Ω :

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{N}_e} \Omega_e \quad 2.1$$

Afin de simplifier les calculs et les évaluations des quantités, on introduit classiquement des éléments de référence (ou éléments parents) de forme simple. Pour chaque éléments Ω_e , la transformation permettant de passer de l'espace de référence à l'espace réel est mise en place par l'intermédiaire de fonctions de forme. Un exemple de transformation est donné sur la figure 2.1 pour un élément triangulaire. Le champ de déplacement \mathbf{u} (ou tout autre champ) est approché sur la structure par un champ \mathbf{u}^h construit à partir des valeurs nodales du champ de déplacement \mathbf{u}^i aux nœuds de la discrétisation et de fonctions d'interpolation $N^i(x)$ généralement polynomiales :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_e} u^i N^i(x) \quad 2.2$$

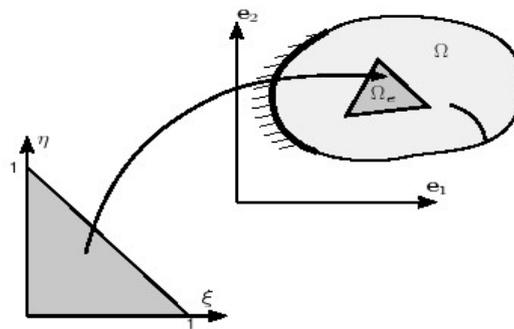


Figure 2.1 : Transformation liant l'élément de référence (à gauche) à un élément de la discrétisation de Ω

L'intérêt de la méthode des éléments finis vient du support compact des fonctions de forme. Ainsi, $N^i(x)$ est non nulle seulement sur le *support* du nœud i , c'est-à-dire l'ensemble des éléments connectés à ce nœud. L'approximation \mathbf{u}^h du champ de déplacement peut alors se réécrire plus simplement :

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{noeuds}} u^i N^i(x) \quad 2.3$$

Où \mathcal{N}_{noeuds} représente l'ensemble des nœuds de l'élément contenant le point x . Le champ de déplacement peut alors être évalué en n'importe quel point de la structure par la connaissance d'un ensemble fini de valeurs nodales.

Dans la suite de ce travail, nous n'écrirons pas l'interpolation du champ de déplacement sous la forme (2.2), mais sous la forme :

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_{\alpha=1}^n u^\alpha N^\alpha(x) \quad 2.4$$

Où n est le nombre de coefficients décrivant l'approximation du déplacement sur l'élément (degrés de liberté), u_α est le $\alpha^{ième}$ coefficient de cette approximation et N^α est la fonction de forme vectorielle qui lui est associée.

Les fonctions de formes N^α classiquement utilisées en éléments finis vérifient la propriété de *partition de l'unité* [20].

$$\sum_{\alpha=1}^n N^\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad 2.5$$

La méthode des éléments finis a permis la résolution d'un grand nombre de problèmes en élasticité linéaire, non linéaire, en acoustique, mais aussi des problèmes de mécanique des fluides... Les performances de la méthode sont cependant restreintes par le degré des fonctions utilisées comme base éléments finis et les problèmes contraints tels que les problèmes d'incompressibilité sont difficiles à résoudre. À cela s'ajoute une contrainte d'ordre technique qui provient du temps passé à générer un maillage. Cette génération est robuste en 2D, mais elle peut s'avérer difficile en 3D lorsque l'on traite des problèmes industriels dont la géométrie est complexe.

Les performances de convergence de la méthode peuvent être améliorées en augmentant le degré des fonctions de forme éléments finis (raffinement p). Cependant dans le cas de problèmes de fissuration, le raffinement p n'est d'aucune aide car la perte de convergence provient de la nature même de la solution recherchée : cette dernière est singulière et ne peut donc pas être représentée par des polynômes réguliers.

2.2.2. Méthode des éléments finis étendue (X-FEM)

Etant donné que le trajet de fissure est a priori inconnu en mode mixte, les simulations numériques développées ici seront effectuées en utilisant la méthode des éléments finis étendue (X-FEM) où les fissures ne sont pas explicitement décrites par le maillage. [22] [23]

L'idée de la méthode X-FEM est de n'utiliser la propriété de partition de l'unité que localement, afin de ne pas alourdir l'approximation éléments finis. Les premiers travaux sur cette méthode datent de 1999 avec une première approche de Belytschko et Black (1999) [35] en mécanique linéaire de la rupture : tous les nœuds dont le support est coupé par la fissure sont enrichis par des fonctions provenant du développement asymptotique du déplacement en fond de fissure. Ce type d'enrichissement provient des travaux de Fleming *et al.* (1997) [36] sur les méthodes sans maillage. Cependant, des problèmes de conditionnement de la matrice éléments finis apparaissent.

La méthode X-FEM apparaît en tant que telle en 1999 (Moës *et al.*, 1999) [21]: c'est à cette occasion qu'est introduite la fonction Heaviside qui permet une généralisation du concept de double nœuds utilisé en éléments finis. Cette méthode a été appliquée par la suite à un grand nombre de domaines :

- Les problèmes de fissuration 2D ;
- Les problèmes de domaines troués ;
- Les problèmes d'inclusions matérielles;
- Les Ecoulements à plusieurs phases;
- La modélisation des discontinuités en temps ;
- La simulation de problèmes d'interaction fluide-structure

En effet, même si la méthode X-FEM permet d'éviter le remaillage du aux discontinuités internes a la structure, le maillage doit cependant être suffisamment fin pour représenter en détail ces discontinuités, d'où la nécessité, dans certains cas, de ces approches multi-échelles.

X-FEM est une méthode éléments finis basée sur la *partition de l'unité*. L'idée en est de *capturer* la solution autour de la pointe de fissure en réalisant une interpolation du déplacement tenant compte de la solution analytique du problème.

2.2.3. Méthode de partition de l'unité

Nous venons de voir que l'ordre de convergence des solutions éléments finis était réduit lorsque la solution du problème est non régulière. La diminution de la taille des éléments (raffinement h) ou l'augmentation de l'ordre des polynômes de la base éléments finis (raffinement p) ne sont d'aucun secours. L'idée de la méthode de partition de l'unité est d'introduire dans la base éléments finis des fonctions d'interpolation adaptées à la nature du problème telles que des polynômes harmoniques pour les problèmes de Laplacien, des solutions trigonométriques en acoustique ou des solutions asymptotiques en pointe de fissure en mécanique de la rupture. Celles-ci doivent permettre une amélioration de la solution. Ce type d'approche peut être obtenu en utilisant la propriété de partition de l'unité des fonctions de forme éléments finis. Les premiers travaux sur cette approche ont été proposés par Babuska et Melenk (1997, 1996).[20]

Nous présentons maintenant les fondements de cette méthode. *Pour simplifier les notations de ce paragraphe, la fonction $u(x)$ à approcher n'est pas vectorielle, mais scalaire.*

Soit un domaine Ω discrétisé par un ensemble \mathcal{N} de N nœuds associés à N fonctions de formes notées N_i . La méthode des éléments finis utilise ces fonctions de formes pour approximer le champ de déplacement à l'aide des déplacements nodaux U_i :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) U_i \quad 2.6$$

$u(\underline{x})$: définit une approximation éléments finis standard du champ de déplacement.

Il a été démontré que si les N_i constituent une partition de l'unité du domaine Ω , c'est-à-dire que :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad 2.7$$

Sous cette condition alors on peut enrichir la base de fonctions de forme en utilisant une fonction d'enrichissement φ telle que :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) U_i + \sum_{j \in \mathcal{N}^e} N_j(\underline{x}) U_j^e \varphi(\underline{x}) \quad 2.8$$

Où \mathcal{N}^e est un sous-ensemble de \mathcal{N} où l'on place un degré de liberté *enrichi* U_j^e .

De plus, le domaine d'influence de fonction s'enrichissement φ est 'ensemble des éléments connectés aux nœuds appartenant à \mathcal{N}^e ; ces nœuds sont dits « enrichis ». cela revient à enrichir le déplacement standard par le champ de déplacement $\varphi(\underline{x})$. Avec cette manière d'écrire, si l'on choisit les grandeurs U_i (les degrés de liberté « standards ») égales à 0 et U_j^e (les degrés de liberté enrichis) égales à 1, le champ de déplacement discrétisé correspond au champ de déplacement $\varphi(\underline{x})$ souhaité :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) \quad 2.9$$

Si l'on veut décrire une fissure, le champs de déplacement est discontinu ; alors la fonction d'enrichissement doit être discontinue également. Cette propriété s'exploite avec la méthode des éléments finis étendus.

2.3. Application à la mécanique de la rupture

La méthode de partition de l'unité est à la base de la méthode des éléments finis étendus. L'approximation éléments finis classique ne permet pas de modéliser une discontinuité de déplacement introduite par la présence d'une fissure. Ceci parce que les fonctions de forme N_i sont continues. Pour capturer une discontinuité, la seule possibilité est alors d'introduire une discontinuité du domaine. La méthode des éléments finis étendus propose d'enrichir l'approximation avec des fonctions d'enrichissement discontinues et singulières en vertu du principe de partition de l'unité. La discontinuité n'est alors plus nécessairement portée par le maillage.[24] ;[25]

Les fonctions d'enrichissement, comme leur nom l'indiquent, vont être mises à profit pour enrichir le modèle éléments finis. On leur attribue trois rôles essentiels :

- Représenté la discontinuité
- Localiser la pointe de fissure
- « capturer » la solution en pointe de fissure

2.3.1. Représentation de la discontinuité

Pour représenter la discontinuité du champ de déplacement, on utilise une fonction d'enrichissement discontinue $H(\underline{x})$, dite fonction « **saut** ».

En accord avec Moës [21], on a :

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } (\underline{x} - \underline{x}^*) \cdot \underline{e}_n > 0 \\ -1 & \text{si } (\underline{x} - \underline{x}^*) \cdot \underline{e}_n < 0 \end{cases} \quad 2.10$$

Où \underline{x}^* est le point le plus proche de \underline{x} sur la fissure (figure 2.2). L'orientation du repère curviligne est purement arbitraire. La fonction $H(x)$ prend donc les valeurs +1 ou -1 suivant le coté de la fissure sur lequel on se place.

La fonction $H(\underline{x})$ est représentée sur (figure2.3) dans une configuration particulière.[15]

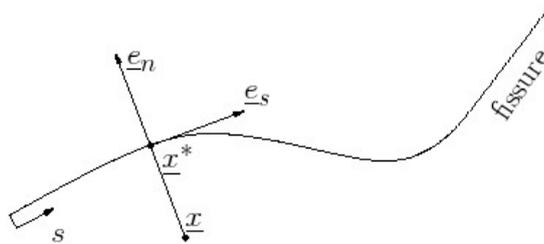


Figure 2.2 : Illustration du choix de la valeur de $H(\underline{x})$ (ici $H(\underline{x}) = -1$)

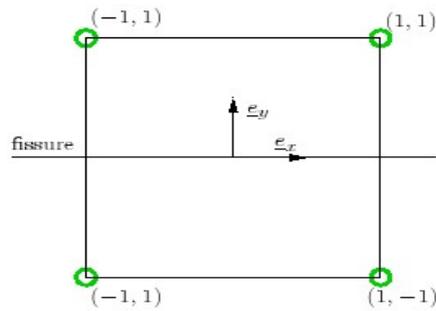


Figure 2.3: fonction saut

2.3.2 Enrichissement en pointe de fissure

La fonction $H(\underline{x})$ est insuffisante pour localiser la pointe de fissure. On introduit alors de nouvelles fonctions d'enrichissement qui nous serviront non seulement à localiser la pointe de fissure mais aussi à « capturer » la singularité du champ de déplacement. Ces fonctions d'enrichissement, dites fonctions « singulières », sont des fonctions asymptotiques de type Westergaard, dérivées à partir de l'expression du champ de déplacement autour de la pointe de la fissure, pour les éléments contenant une pointe de fissure ; les nœuds connectés à ces éléments auront 4 degrés de liberté supplémentaires chacun. Elles s'expriment ainsi :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(r, \theta) &= \sqrt{r} \cos(\theta/2) \\
 \gamma_2(r, \theta) &= \sqrt{r} \sin(\theta/2) \\
 \gamma_3(r, \theta) &= \sqrt{r} \sin(\theta/2) \sin(\theta) \\
 \gamma_4(r, \theta) &= \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin(\theta)
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Elles sont toutes les quatre fonctions de r et θ , les coordonnées polaires dans le repère lié à la pointe de fissure (figure 1.4) . C'est à l'aide de ces deux variables que la pointe de fissure est localisée. Par ailleurs, on remarque que les solutions asymptotiques peuvent être obtenues par combinaisons linéaire de ces quatre fonctions singulières. Ceci permet de « capturer » la solution dans le voisinage de la pointe de fissure en enrichissant le modèle éléments finis par une approximation plus « physique ».

Remarquons d'autre part que parmi ces quatre fonctions d'enrichissement, seul γ_2 présente une discontinuité en π et $-\pi$. Ceci est nécessaire pour représenter une discontinuité s'annulant en pointe de fissure.

Les fonctions d'enrichissement singulières sont représentées sur la figure 2.4 dans une configuration particulière.

2.3.3 Enrichissement local

Enrichir tous les nœuds aurait l'effet pénalisant de multiplier le nombre de degrés de liberté par 6 (1 ddl classique, 1 ddl saut et 4 ddl singuliers). Pour cette raison, seuls certains nœuds sont enrichis.

Si l'élément est entièrement traversé par la fissure, alors ses nœuds sont enrichis avec la fonction saut (notés \circ sur les schémas). Si l'élément contient la pointe de fissure, ses nœuds sont enrichis avec les fonctions singulières (notés \square sur les schémas). Dans le cas où un nœud est susceptible d'être enrichi des deux manières, seul un l'enrichissement singulier aura lieu. La figure 2.4 représente un maillage enrichi typique. [14].

L'ensemble des nœuds enrichis par la fonction saut se note \mathcal{N}_{saut} et les nœuds enrichis par les fonctions singulières forment l'ensemble \mathcal{N}_{sing} . Dans le cas particulier des éléments finis étendus, l'approximation du champ de déplacement est donnée par l'expression 2.12 :

$$\underline{u}^h(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\underline{x}) \underline{u}_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{saut}} N_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \underline{a}_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{sing}} \sum_{j=1}^4 N_i(\underline{x}) \gamma_i(\underline{x}) \underline{b}_{ji} \quad 2.12$$

Les \underline{u}_i sont les degrés de liberté classiques, les \underline{a}_i sont les degrés de liberté saut et les \underline{b}_{ji} sont les degrés de liberté singulier.

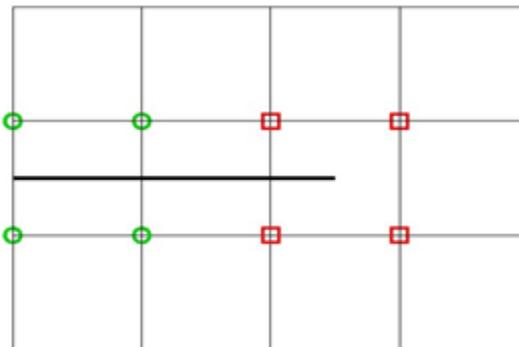


Figure 2.4 : maillage X-FEM typique

2.4. Fonction de niveau ou level-set

La méthode de level-set est une méthode souple pour calculer et analyser l'évolution d'une interface (S) dans deux ou trois dimensions, qui a été introduite par Osher et Sethian [17]. L'interface est traversé une région ouverte(Ω).

La vitesse de l'interface en évolution peut dépendre position de fonctionnement, temps, la géométrie d'interface et physique du problème fondamental. La fonction de niveau sera employée pour représenter l'interface matérielle de la géométrie d'une fissure (figure1.1).

L'idée est de définir une fonction $\phi(x, t)$ régulière telle que le sous-espace $\phi(x, t) = 0$ représente l'interface.

La fonction de level-set est une fonction continue, où x est un point dans le domaine (Ω).

La fonction de level-set a des propriétés suivantes

$$\phi(x, t) < 0 \text{ pour } x \in \Omega \quad 2.13$$

$$\phi(x, t) > 0 \text{ pour } x \notin \Omega$$

$$\phi(x, t) = 0 \text{ pour } x \in \Gamma_t \text{ (plan de fissure)} \quad 2.14$$

Cette méthode s'applique aisément aux problèmes de trous ou de bimatériaux lorsque l'interface n'est pas maillée en 2D.

2.4.1. Level sets pour la fissuration

Dans le cas de la fissuration, il est nécessaire d'introduire deux level sets (Stolarska en 2D [32]et MOË en 3D[19]).

- une level set normale (lsn) qui représente la distance à la surface de la fissure (surface étendue par prolongement à tout le domaine),
- une level set tangente (lst) qui représente la distance au fond de fissure.

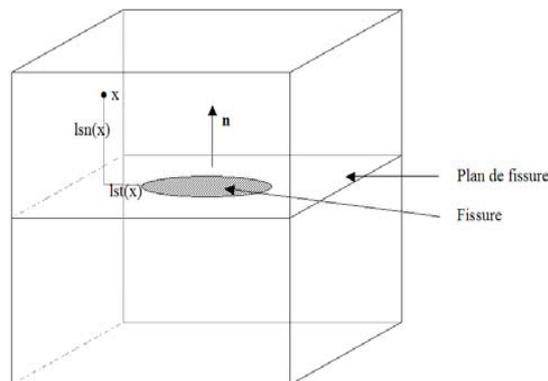


Figure 2.5 : Level sets et distance à la fissure.

L'iso-zéro de la level set normale définit la surface de la fissure, étendue par continuité à tout le domaine. L'intersection des iso-zéros des deux level sets définit le fond de fissure. De plus, le signe de la level set tangente est choisi de telle sorte que la surface de la fissure Γ_{cr} corresponde à l'espace engendré par $(l_{sn} = 0) \cap (l_{st} < 0)$. Le signe de la level set normale est choisi arbitrairement. Les points x pour lesquels $l_{sn}(x)$ est négatif sont dits « au-dessous » de la fissure (figure 2.6).

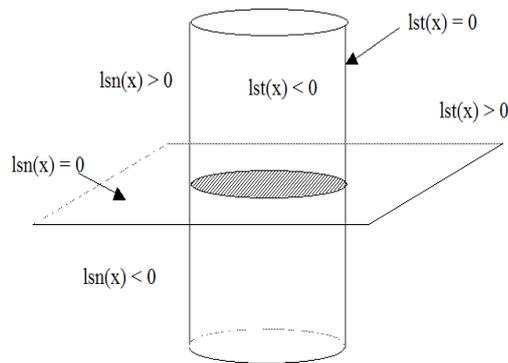


Figure 2.6 : Level sets pour la représentation d'une fissure 3D.

La phase de propagation de la fissure se traduit simplement par la propagation des level sets. La propagation d'une level set nécessite trois étapes successives [17] :

- extension de la vitesse connue sur l'iso-zéro vers le domaine entier,
- propagation de la level set à partir de ce champ de vitesse,
- réinitialisation de la fonction level set afin de conserver une fonction distance signée.

La propagation d'une fissure représentée par deux level sets présente quelques particularités. Le vecteur vitesse est connu seulement sur le front de fissure, c'est-à-dire une courbe. La fissure ne peut que grandir, pas se déplacer. Deux fonctions level sets doivent être propagées et on souhaite que leurs gradients restent orthogonaux. L'enchaînement des étapes peut être résumé comme ceci :

- propagation de l_{sn} et réinitialisation de l_{sn} ,
- propagation de l_{st} ,
- orthogonalisation du gradient de l_{st} versus gradient de l_{sn} ,
- réinitialisation de l_{st} .

Remarque

Malgré un cadre mathématique bien maîtrisé, de nombreux problèmes numériques apparaissent lors de la mise en place informatique. Ce point est donc assez délicat, notamment sur les questions d'arrêt des itérations de re-orthogonalisation, car les étapes d'orthogonalisation (pour avoir des gradients des level sets orthogonaux) et de réinitialisation (pour retrouver une vraie fonction distance) ne sont pas compatibles pour des fissures courbes ou non-planes.

2.4.2 Base locale en fond de fissure

L'expression 2.11 fait intervenir (r, θ) , coordonnées polaires dans la base locale au fond de fissure (Figure 2.7) ces coordonnées peuvent être exprimées aisément grâce aux level sets, puisque : [18]

$$r = \sqrt{lsn^2 + lst^2}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad 2.15$$

Dans la pratique, cette formule pour calculer l'angle θ n'est pas utilisée directement. Une formule plus évoluée, permet d'obtenir des valeurs de θ dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

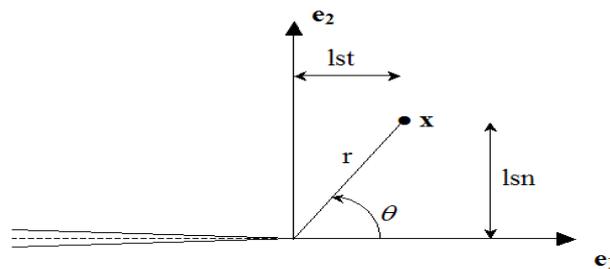


Figure 2.7 : Coordonnées polaires dans la base locale.

2.5 Exemple d'une poutre en compression

Cet exemple a pour but d'illustrer de manière simplifiée le fonctionnement d'un enrichissement de type saut. Le problème est celui d'une poutre bi-encastree en compression et coupée en son milieu (figure 2.8a). pour le résoudre, nous allons utiliser les éléments finis classiques et les éléments finis étendus, ce qui nous permettra par la suite de comparer les deux méthodes.

Notons que dans cet exemple, la coupure coïncide avec un nœud. Ceci n'est qu'un cas particulier destiné à alléger les notations. Gardons simplement à l'esprit que la méthode X-FEM permet également de placer la coupure à l'intérieur d'un élément.

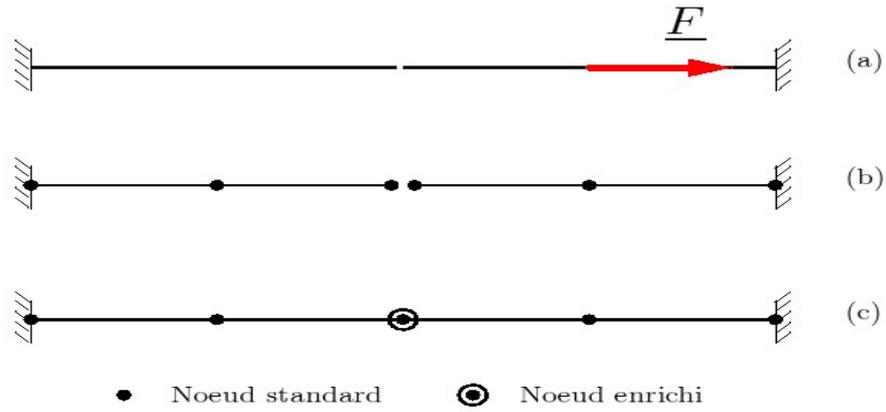


Figure 2.8: problème continu (a), modélisation par éléments finis standards (b),
modélisation par éléments finis enrichis (c)

2.5.1 Formulation

Pour résoudre le problème, nous allons utiliser le principe des puissances virtuelles en statique appliqué à une poutre en traction/compression :

$$0 = - \int_0^l N(x) \frac{du^*(x)}{dx} dx + \int_0^l f_d(x) u^*(x) dx \quad 2.16$$

$$0 = - \int_0^l ES \frac{u(x)}{dx} \frac{du^*(x)}{dx} dx + \int_0^l f_d(x) u^*(x) dx \quad 2.17$$

Le principe des puissances virtuelles pour le problème discrétisé s'écrit alors :

$$ES \int_0^l u_i^* \frac{N_i(x)}{dx} u_j \frac{N_j(x)}{dx} dx = \int_0^l f_d(x) u_i^* N_i(x) dx = 0 \quad 2.18$$

Où les N_i représentent les fonctions de formes associées aux degrés de liberté u_i et u_i^* .

Le terme de gauche représente la puissance virtuelle des efforts internes, il peut se mettre sous la forme suivante :

$$u_i^* \underbrace{\left(\int_0^l ES N_{i,x} N_{j,x} dx \right)}_{K_{ij}} u_j$$

Les valeurs K_{ij} sont les coefficients de la matrice de rigidité globale $\underline{\underline{K}}$.

Le terme de droite, quand à lui, représente la puissance virtuelle des efforts externes, il s'écrit :

$$u_i^* \underbrace{\left(\int_0^l f_d(x) N_{i,x} dx \right)}_{F_i} \quad 2.19$$

Où le vecteur des forces généralisé \underline{F} a pour composantes F_i .

On obtient alors le problème linéaire bien connu :

$$KU = F \quad 2.20$$

Le calcul de K et F nécessite la connaissance des fonctions de forme. Celles qui sont utilisées dans notre problème sont représentées sur la figure 2.8. Pour la modélisation X-FEM, les degrés de liberté utilisés sont $\{u_0, u_1, u_2, a_2, u_3, u_4, \}$, où a_2 est le degré de liberté enrichi. Pour le modèle éléments finis classiques, les degrés de liberté sont $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \}$.

On peut désormais calculer les matrices de rigidité élémentaires des éléments de la figure 2.8, qu'ils soient standards (K_s), enrichis à gauche (K_g) ou à droite (K_d). Par la suite, les valeurs notées X seront relative à X-FEM, celles notées F seront relatives à la méthode classique.

On obtient :

$$K_s = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad K_d = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad K_g = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.21$$

Associés avec les vecteurs de déplacements nodaux :

$$U_s = \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} \quad U_d = \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ a_{i+1} \end{pmatrix} \quad U_g = \begin{pmatrix} u_i \\ a_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} \quad 2.22$$

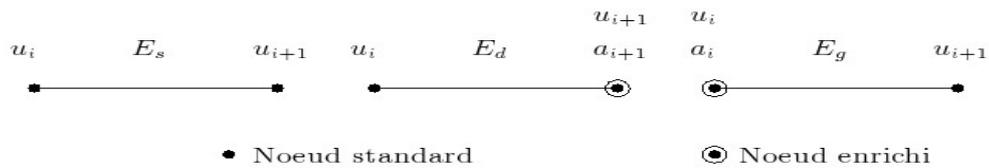


Figure 2.9 : éléments poutre et degrés de liberté associés

On peut dès lors réaliser l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires pour les modélisations X-FEM et classique que l'on notera respectivement K_X et K_F .

$$K^F = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.23$$

$$K^X = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.24$$

On voit dans l'expression de K^F deux « sous-matrices » de rigidité globales. Ceci montre bien que les deux tronçons de poutre sont découplés géométriquement. Dans K^X ce découplage n'existe pas. La discontinuité est « noyée » dans la matrice.

La résolution du problème passe par l'équation suivante :

$$\begin{cases} K_X U_X = F_X & (\text{pour la méthode } X - FEM \\ K_F U_F = F_F & (\text{pour la méthode classique}) \end{cases} \quad 2.25$$

On suppose que $ES/L_{el} = 1$ pour alléger les notations et on adopte la méthode de substitution pour traiter les déplacements imposés (on supprime les lignes et les colonnes relatives aux déplacements imposés nul. Le problème à résoudre pour une modélisation éléments finis classique devient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} U^F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \quad 2.26$$

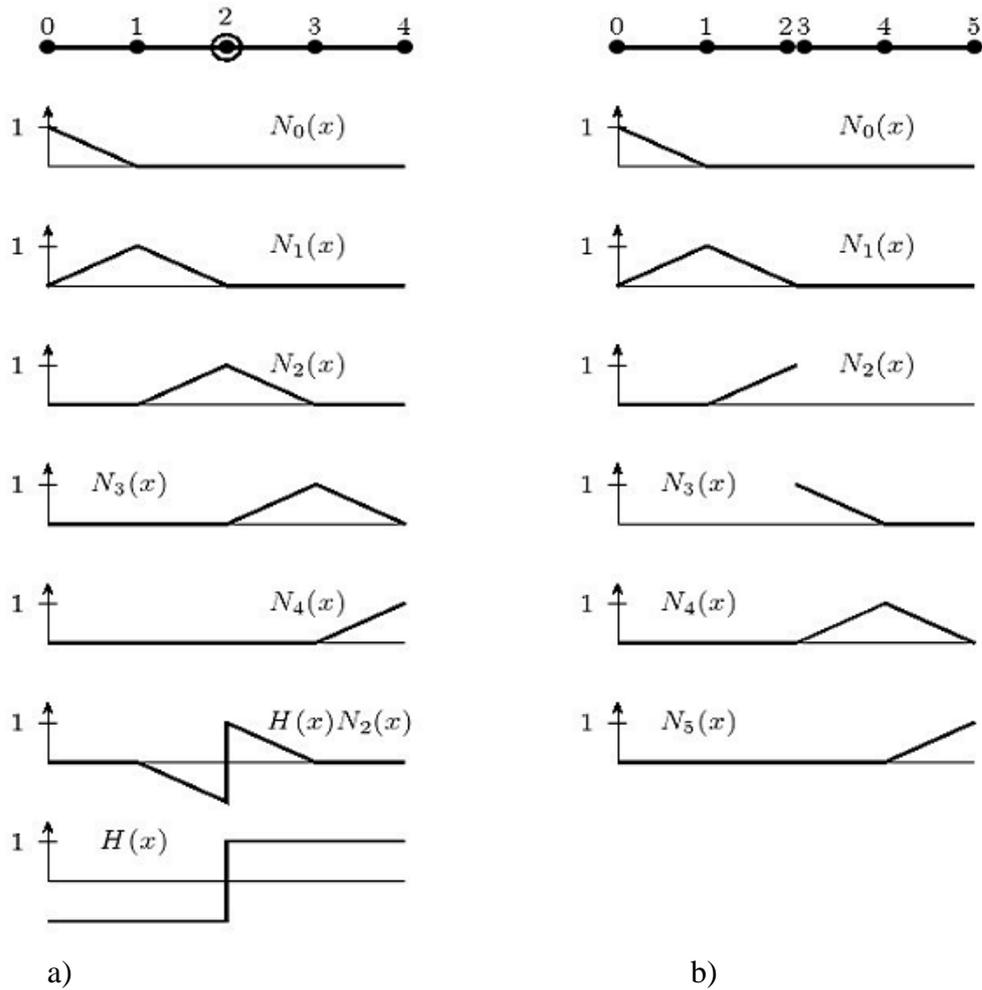


Figure 2.10 : Fonctions de formes pour la méthode X-FEM (a) et pour la méthode éléments finis standard (b)

Le problème modélisé par X-FEM s'écrit quand à lui :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} U^X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \quad 2.27$$

On obtient alors facilement.

$$U^F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ F/2 \end{pmatrix} \text{ et } U^X = \begin{pmatrix} 0 \\ F/2 \\ F/2 \\ F/2 \end{pmatrix} \quad 2.28$$

Ces deux résultats donnent un champ de déplacement identique. On voit qu'au niveau de la coupure, les éléments finis classiques nous donnent une valeur pour chacun des nœuds : $u_g = 0$ à gauche de la coupure, $u_d = F$ à droite de la coupure. Les éléments finis enrichis nous fournissent le même résultat : $u_g = F/2 - F/2 = 0$ et $u_d = F/2 + F/2 = F$. On voit ici que dans le premier cas, la coupure était représentée par une discontinuité dans le maillage et que la méthode X-FEM permet de la représenter non plus sur le maillage, mais sur les fonctions de forme. Ceci n'a pas beaucoup d'intérêt lorsque l'on traite un problème unidimensionnel, mais la méthode devient très utile en 2D ou en 3D lorsque l'on veut faire propager une fissure sans remailler la structure. Il suffit alors de modifier les fonctions de formes et non plus le maillage.

2.6. Conclusion

Nous avons présenté un rapide tour d'horizon des méthodes de discrétisation classiquement utilisées en mécanique, en s'attardant plus particulièrement sur les fondements de la méthode X-FEM.

La méthode de niveau et son accouplement avec X-FEM fournit un outil satisfaisant pour résoudre des problèmes extérieurs libres et des problèmes avec des singularités telles que les problèmes de fissure.

chapitre III

Etude expérimentale et numérique de mode I

3.1. Introduction

Une série d'essais a été effectuée au Laboratoire de recherche Dynamique des Moteurs et vibroacoustique dans le but de contribuer à la mise au point et la validation des résultats numériques quand on a obtenu par X-FEM. Seul le mode I ont été testées sur une plaque fissurée.

Pour atteindre ces résultats, nous avons utilisé le logiciel ABAQUS. Ce logiciel basé sur la méthode des éléments finis et X-FEM.

On prolonge la fissure sur une petite distance (suffisamment grand pour éviter les problèmes numériques) suivant la direction précédemment définie.

3.2. Etude expérimentale (mode I)

Cet exemple est celui d'une plaque carré en traction qui possède une fissure perpendiculaire à la direction de la traction. C'est un cas de mode I pur L'objectif de cet exemples pour lesquels la valeur de K_I est connue et répertoriée dans le tableau est de comparer la qualité des valeurs de K_I prédites d'une part par une méthode des éléments finis étendus X-FEM et les résultats expérimentaux quand on a obtenu.

3.2.1. Moyens expérimentaux

La machine INSTRON est de série 8801, parmi les systèmes d'essai servohydrauliques, a été développée pour relever le défi d'exigence d'essais variés tant statiques que dynamiques. La série 8801 offre des solutions complètes pour satisfaire aux besoins d'essais avancés de matériaux et de composants, comme idéalement pour des essais de fatigue et de la mécanique de la rupture. La conception compacte du cadre de charge 8801 le rend idéal pour être installé dans tout environnement de laboratoire, en général sans nécessiter de planchers renforcés ni de plafonds plus élevés.

a) Cadres d'essai conçus pour la Précision et la Performance

La raideur élevée et l'alignement précis des cadres d'essai de la série 8801 assurent une mise en charge appropriée des éprouvettes à la fois en traction comme en compression, garantissant des résultats encore plus fiables. Le choix de plusieurs capacités de charge permet l'optimisation de la performance dynamique de nos applications. La série 8801 est disponible pour des capacités axiales de charges de $\pm 50 \text{ kN}$ ou $\pm 100 \text{ kN}$.

La figure 3.1 présente une photographie de la machine montée sur le dispositif de traction.



Figure 3.1 : Machine d'essai de fatigue INSTRON

6) régulateurs et Interfaces

Le régulateur FastTrack 8800 est le coeur de la série 8801. La technologie de régulation adaptative brevetée par Instron, la résolution 19-bits sur toute la gamme des capteurs, le réglage automatique de la boucle d'asservissement, la régulation d'amplitude sont des caractéristiques permettant au FastTrack 8800 d'offrir précision, reproductibilité et intégrité de nos données. Le choix des interfaces utilisateurs comprend une console indépendante et une interface logiciel FastTrack Console basés sur le système d'exploitation flexible Windows (figure 3.2)

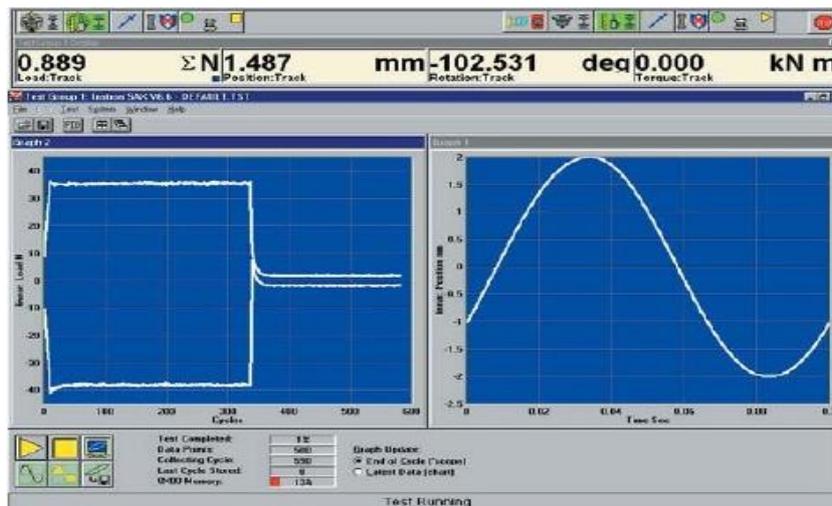


Figure 3.2 : régulateur FastTrack 8800

3.2.2. Conditions d'essai

Les essais ont été conduits sous chargement d'amplitude constante à rapport $R=0.1$, et une fréquence de 24 Hz. La charge appliquée est 12kN.

a) Contraintes appliquées

En service ou au cours d'essai de laboratoire, les efforts appliqués peuvent être des sollicitations de type simples, par exemple de traction-compression, de flexion ou de torsion, ou résulter d'une combinaison de ces sollicitations.

Au cours de cet essai de fatigue, la contrainte appliquée variera suivant une fonction du temps approximativement sinusoïdale.

6) Contrainte nominale

La contrainte prise en charge au cours de l'essai de fatigue est une contrainte nominale. Elle est calculée par rapport à la section nette de la pièce ou de l'éprouvette considérée, à l'aide de formules usuelles de la résistance des matériaux et relative au domaine élastique. Elle ne fait pas intervenir la concentration de contrainte due à des entailles, ou à d'autres causes. La contrainte calculée est exprimée en newton par millimètre carré (N/mm²) ou en pascal (1Pa = 1 N/mm²).

3.2.3. Propagation des fissures par fatigue

La vitesse de propagation d'une fissure en fatigue exprimée en fonction de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte, caractérise la résistance à la propagation stable d'une fissure sous chargement cyclique pour un matériau donné.

Cette caractéristique du matériau a différentes applications :[26]

- Choix d'un matériau en fonction des conditions de chargement et l'environnement.
- Détermination de durée de vie d'une structure.

3.3. Application à un cas de rupture par fatigue en mode I

3.3.1. Propriété mécanique des éprouvettes

Le matériau utilisé est un alliage d'aluminium (Al 7075 T651). C'est un alliage à haute résistance mécanique, son comportement à la rupture est faiblement ductile (plasticité confinée). Dans un première approche, il est donc valide de se placer dans le cadre de la mécanique de la rupture linéaire pour étudier son comportement sous un chargement de fatigue. Il comporte du zinc (5 à 6% massique), ses propriétés mécaniques ainsi que les paramètres principaux de l'essai sont rassemblés dans **le tableau 3.1**

Module de Young	$E(GPa)$	71.9
Coefficient de Poisson	ν	0.3
Limite élastique	$\sigma_Y = (MPa)$	359
Coefficient d'écrouissage	(MPa)	438
Exposant d'écrouissage	n	30.3
Coefficient de la droite de Paris	$C (10^{-7})$	3.25
Exposant de la droite de Paris	m	3.42

Tableau 3.1 : propriétés mécanique et paramètres principaux pour l'essai de fatigue

3.3.2. Géométrie de l'éprouvette utilisée

Le choix de l'éprouvette dépend de l'essai que l'on veut effectuer et de la machine dont on dispose. Elle est rectangulaire avec une simple fissure débouchante d'une plaque en traction. Le côté de la plaque vaut h , la largeur W et la longueur de l'entaille a .

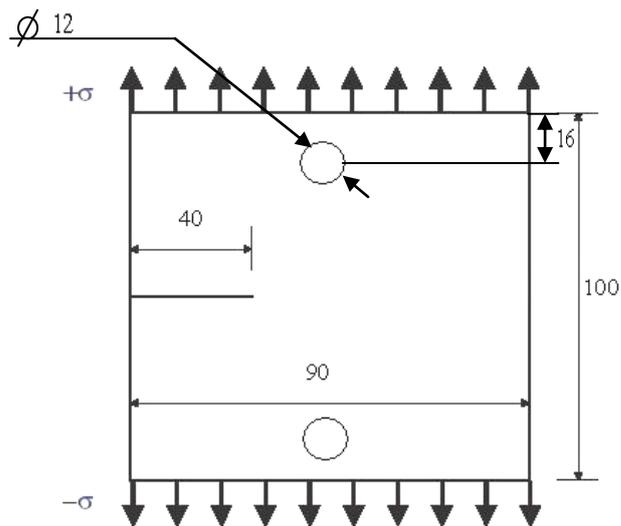
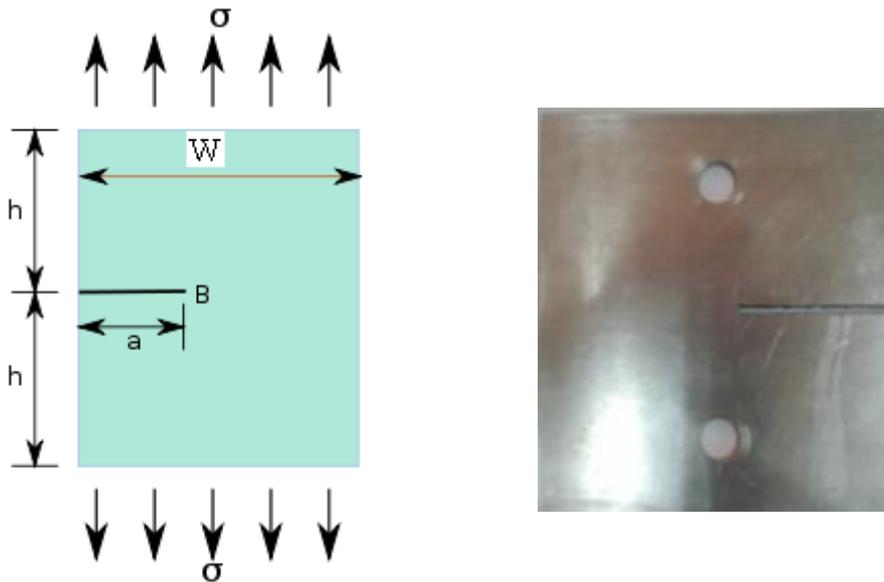


Figure 3.3 : Eprouvette a une fissure débouchante

3.3.3. Méthode de mesure la vitesse de propagation d'une fissure en fatigue

La mesure des vitesses de propagation d'une fissure est réalisée sur une éprouvette classique de mécanique de la rupture, pré fissuré en fatigue. La longueur de la fissure est mesurée optiquement ou par une autre méthode en fonction de nombre de cycles. Ces données font ensuite l'objet d'une analyse numérique pour déterminer la vitesse de propagation exprimée en fonction de nombre de cycles $\frac{da}{dN}$. Pour chaque longueur de fissure, pour laquelle la vitesse de propagation a été calculée ; on calcule l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte ΔK le principe de cette mesure est indiqué sur la (figure 3.4).

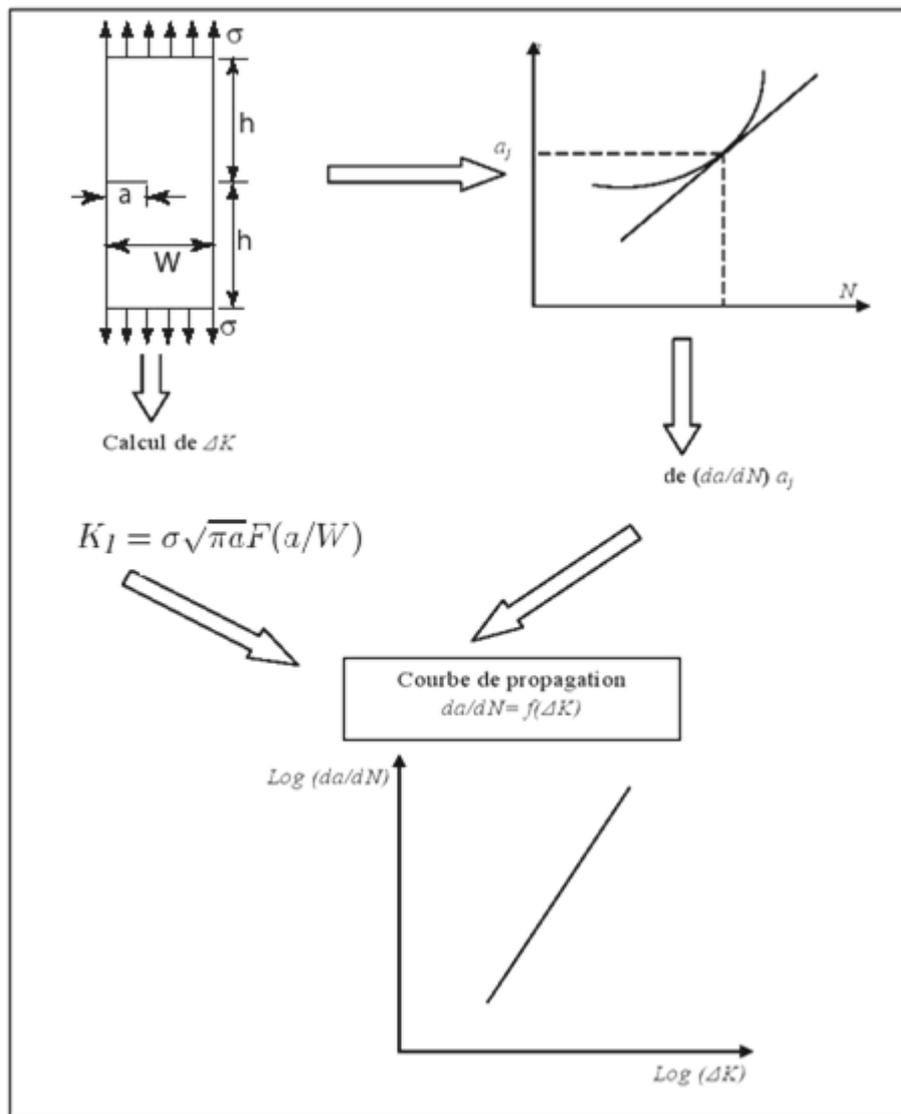


Figure 3.4 : Principe de détermination la vitesse de propagation d'une fissure en Fatigue

3.4. Résultats d'essai

3.4.1. Vitesses de propagation

Les vitesses de propagation mesurées le long du front sont retracées dans un diagramme classique $da/dN = f(\Delta K)$ pour comparer le comportement de la fissure avec la lois de Paris.

Le facteur d'intensité des contrainte est estime par l'équation 3.1 pour une éprouvette a une dimension $h \times b$ contient une fissure de longueur a , si les dimension de la plaque sont telle que $h/W \geq 0.3$ on aura :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[\frac{1 + 3 \frac{a}{W}}{2 \sqrt{\pi \frac{a}{W}} \left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}} \right] \quad 3.1$$

$K_{In} = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}}$; avec K_{In} est le facteur d'intensité de contrainte normalisé

	$\frac{a}{W} = 0.45$	$\frac{a}{W} = 0.5$	$\frac{a}{W} = 0.55$	$\frac{a}{W} = 0.6$	$\frac{a}{W} = 0.65$	$\frac{a}{W} = 0.7$	$\frac{a}{W} = 0.75$
K_{In}	2.423	2.821	3.340	4.031	4.986	6.362	8.471

Tableau 3.2 : Facteurs d'intensité de contrainte normalisé K_{In} pour une fissure débouchante

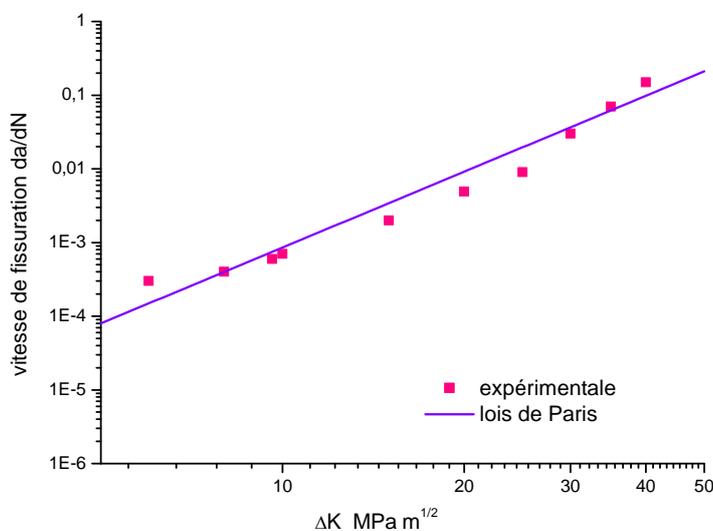


Figure 3.5 : variation de la vitesse de propagation en fonction de ΔK

On observe un bon accord entre les résultats expérimentaux et l'étude analytique par la loi de Paris.

L'essai montre que la vitesse de fissuration augmente en fonction de facteur d'intensité de contrainte

3.4.2. Nombre N de cycles et longueur de fissure a

Le nombre N de cycles est noté automatiquement par programme pendant le processus des expériences. La correspondance la longueur de fissure a est mesurée sur la surface de rupture en employant la méthode d'inscription.

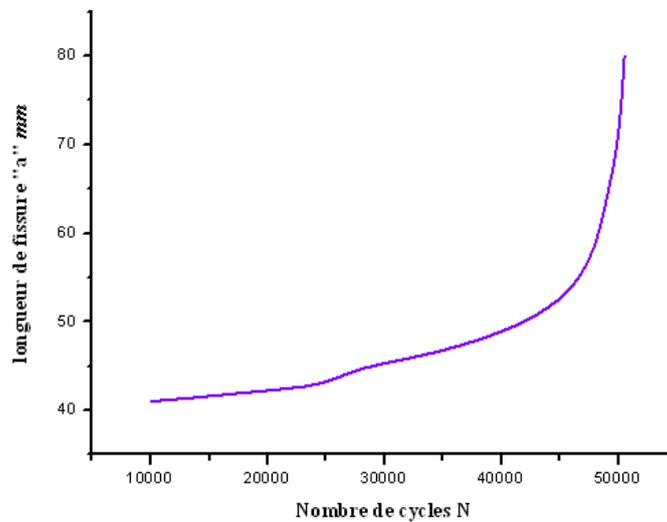


Figure 3.6: courbe d'évolution de la longueur de la fissure en fonction de nombre de cycles

La figure montre l'évolution de la longueur de fissure en fonction de nombre de cycle appliqués. D'après le graphe la vie de cette éprouvette ne dure que 50000 cycle avant la rupture.

On notera qu'entre 10000 et 40000, il y a une zone de stabilisation pour la vitesse de propagation mais 40000 et 50000 cycle, c'est la zone de danger. La fissure peut atteindre la rupture à n'importe quel moment.



Figure 3.7 : Trajet de fissuration pour un mode I pur

Concernant l'évolution temporelle de la fissure, on remarque que le trajet est perpendiculaire à la force appliquée (figure 3.7)

3.5. Simulation numérique en mode I

L'échantillon utilisés dans l'étude expérimentale ont été modélisés par X-FEM (figure 3.8). Dans le but de faire une comparaison entre les résultats expérimentaux avec ceux de numérique, les calculs ont été établis pour les sept cas en faisant varier la longueur de la fissure a , telle que : $a/W = 0.45, 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75$.

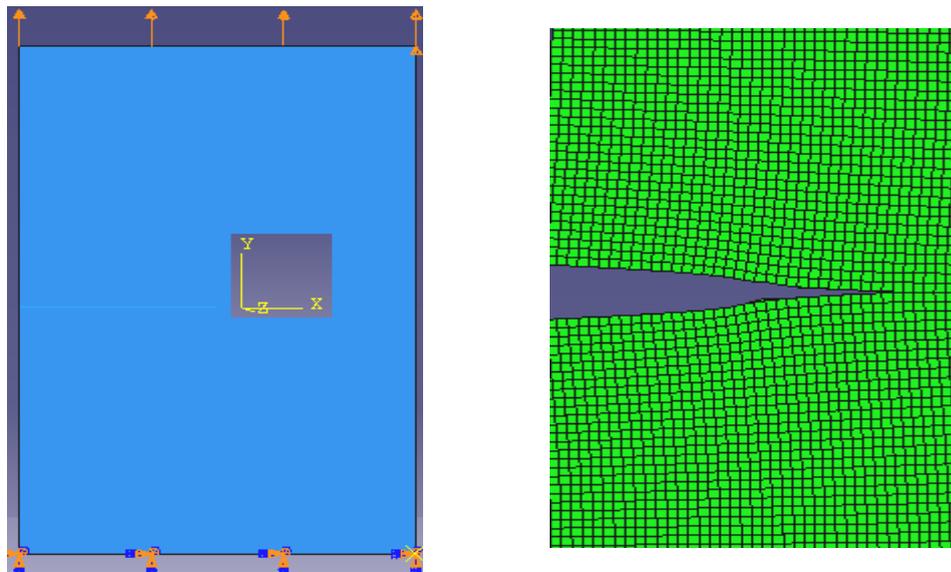


Figure 3.8 : maillage et déformé de la plaque fissuré

La figure 3.8 représente l'état initial et la déformée du maillage par la méthode X-FEM.

L'analyse des résultats a été faite avec 41 éléments quadratiques, les fissures ne sont pas maillées mais définies à partir de fonctions de niveaux. Un maillage surfacique de la fissure (fond et lèvres), indépendant du maillage de calcul. On constate que :

- Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis étendus sont précis. En effet, la plus grande différence entre ces résultats et ceux de l'expérimentale ne dépasse pas 0.4 . (tab 3.3)

	$\frac{a}{W} = 0.45$	$\frac{a}{W} = 0.5$	$\frac{a}{W} = 0.55$	$\frac{a}{W} = 0.6$	$\frac{a}{W} = 0.65$	$\frac{a}{W} = 0.7$	$\frac{a}{W} = 0.75$
K_{In} exp	2.423	2.821	3.340	4.031	4.986	6.362	8.471
K_{In} X-FEM	2.4241	2.822	3.342	4.035	4.992	6.375	8.498
Erreur relative(%)	0.045	0.060	0.073	0.11	0.14	0.22	0.32

Tableau 3.3 : facteur d'intensité de contrainte K_{In} (mode I)

Les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} sont présentées respectivement sur les figures (3.9) et (3.10).

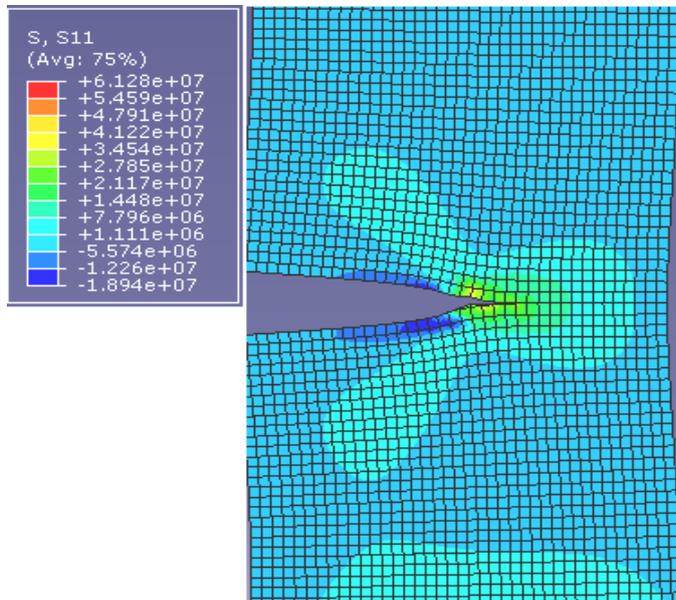


Figure 3.9 : contrainte σ_{xx} en Pa

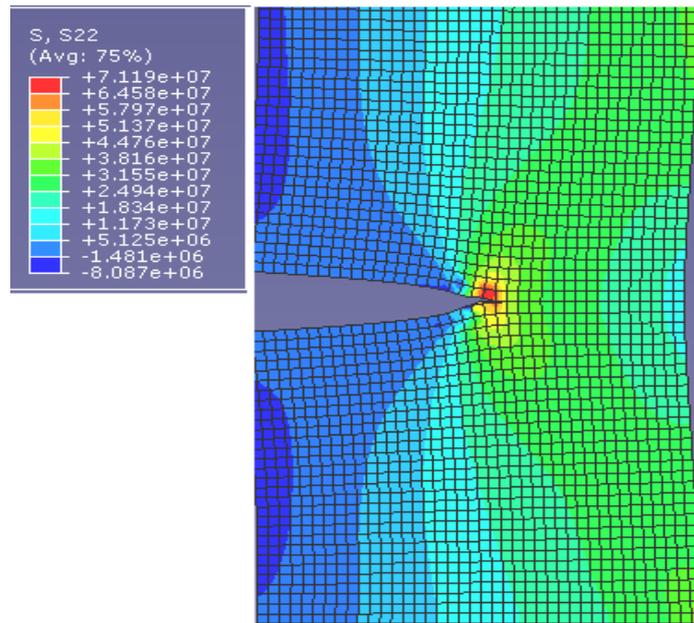


Figure 3.10 : contrainte σ_{yy} en Pa

D'après les figure en remarque que les contraintes suivant y influent moins sur la fissure que ceux suivant de x

3.6. Conclusion

On observe pour le mode I que la méthode X-FEM donne des bons résultats, alors on doit vérifier cette efficacité pour le mode mixte dans le chapitre prochain.

chapitre VI

Etude numériques de propagation
de fissure
en mode mixte

4.1. Introduction

Dans cette section, on présente quelques exemples afin de montrer l'efficacité de cette méthode pour la modélisation de fissure en mode mixte. Nous focaliserons notre intérêt à la prévision des trajets de propagation de fissures et l'angle de bifurcation sous un chargement en mode mixte dans le cadre classique de la mécanique linéaire de la rupture fragile.

4.2. Simulation de fissure en Mode mixte par X-FEM

On considère des plaques rectangulaires soumises à la traction sous chargement mixte de différents angles. Il s'agit d'un exemple de mode mixte dont les résultats expérimentales sont connus dans le cas (30°, 60°). [27]

4.2.1. Propriétés du matériau

Le matériau possède les propriétés élastiques suivantes :

- Module d'Young : $E = 72GPa$
- Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$
- paramètre de mixité élastique $M^e = 0,83$
- constante $\beta = 3$
- coefficient pour le mode mixte pour 60° : $C^* = 9.81 \times 10^{-7}$
- coefficient pour le mode mixte pour 30° : $C^* = 14.5 \times 10^{-7}$
- Exposant de la droite de Paris $m = 2$

4.2.2. Conditions aux limites et chargements

Une traction est imposée sur les deux cotés supérieure et inférieure, de manière à ce que la fissure soit soumise à du mode mixte (figure 4.1).

Angle	30°	60°
Force F_x	12 kN	12kN
Force F_y	6.9 kN	20.7kN

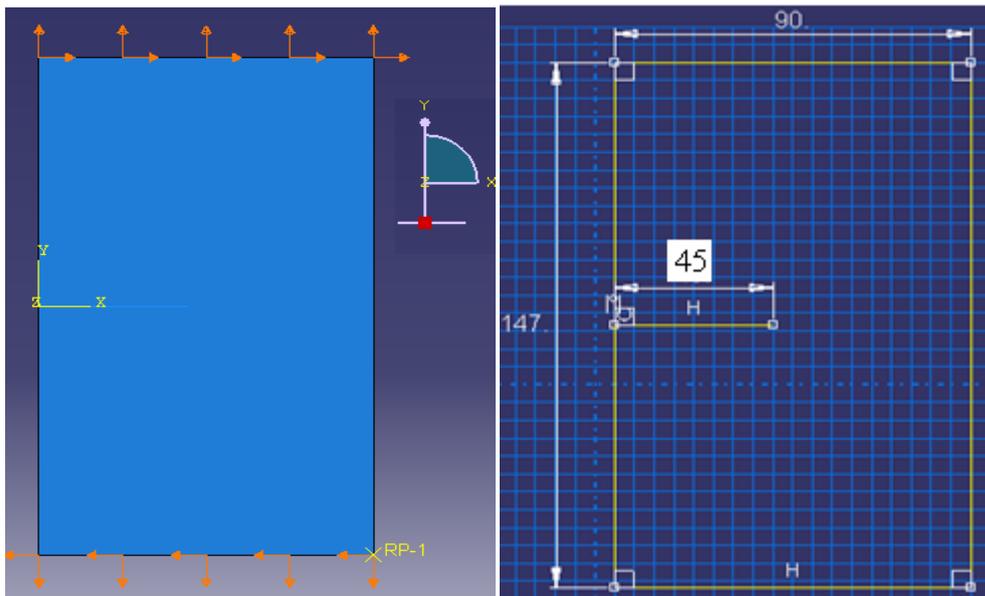


Figure 4.1 : simplification de modèle de l'éprouvette

4.2.3. Caractéristiques de la modélisation

Une fois que l'éprouvette peut être maillée, la densité du maillage est choisie et le maillage est généré par le mailleur ABAQUS CAE. Un contrôle de qualité est effectué sur le maillage. Ce contrôle s'appuie sur les critères de base de la méthode d'éléments finis. Le maillage qualifié est alors utilisé pour l'analyse MEF. Dans le cas contraire, si la densité dépasse une valeur fixée au préalable et si la qualité du maillage n'est toujours pas assurée, l'analyse s'arrête.

L'exemple suivant consiste en une éprouvette Compact Tension Shear (CTS), soumise à une propagation en fatigue en mode mixte. Une étude numérique et expérimentale de ce spécimen est présentée dans les références [11] et [06]. Dans cet exemple, on veut comparer les résultats obtenus par l'expérimentale à l'article et cette méthode X-FEM.

Les formules de facteurs d'intensité des contraintes (élastique) pour ce type de géométrie sont données dans les équations suivantes [31] :

$$K_I = \frac{F}{wt} \sqrt{\pi a} \frac{\cos \alpha}{1 - a/w} \sqrt{\frac{0.26 + 2.65(a/(w - a))}{1 + 0.55 \left(\frac{a}{(w - a)}\right) + 0.08 \left(\frac{a}{(w - a)}\right)^2}} \quad 4.1$$

$$K_{II} = \frac{F}{wt} \sqrt{\pi a} \frac{\cos \alpha}{1 - a/w} \sqrt{\frac{-0.23 + 1.40(a/(w - a))}{1 - 0.67 \left(\frac{a}{(w - a)}\right) + 2.08 \left(\frac{a}{(w - a)}\right)^2}}$$

Où F est le paramètre de chargement, w et t sont respectivement la largeur et l'épaisseur de l'éprouvette, a la longueur de fissure et α est l'angle de chargement. Etant donné qu'on ne s'intéresse ici qu'au cas mode mixte

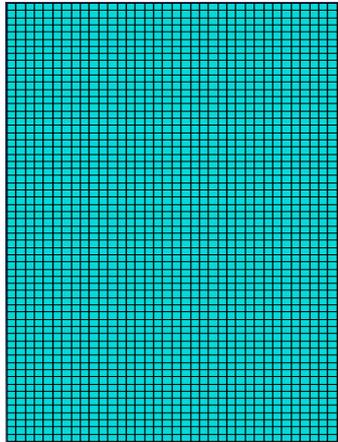


Figure 4.2 : Maillage pour le modèle simplifié

4.2.4. Direction de propagation de la fissure

Dans le cas d'une fissure sollicitée en mode mixte le trajet est quelconque et la plupart du temps complexe. La connaissance du trajet de fissure a priori soit à partir de données expérimentales. Dans le cas général où le trajet est inconnu, deux méthodes sont classiquement utilisées : les méthodes de remaillage et la méthode X-FEM.

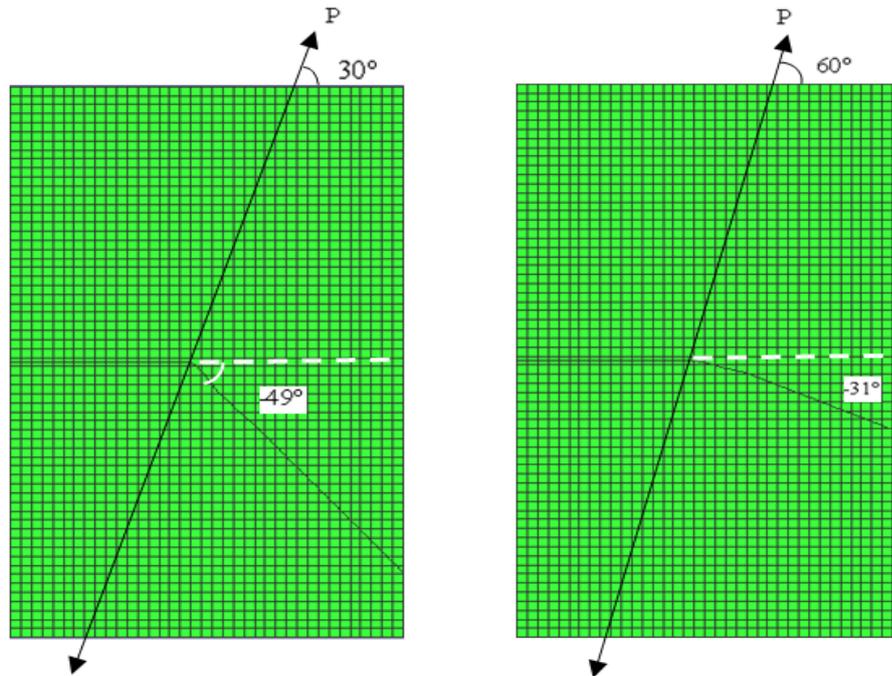


Figure 4.3 : résultats de simulation pour les deux angles de chargement 30° et 60° droite à gauche.

Lorsqu'une fissure est sollicitée en mode mixte, on observe généralement une bifurcation qui se caractérise par un changement de la direction de propagation.

Les fissures se développent dans direction de -31° , -49° respectivement dans des résultats numériques et -36° , -46° respectivement dans des résultats expérimentaux quand ils sont soumis à un chargement de 60° , 30° .

D'après la figure 3.13, il peut constater que les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux bien qu'on ait observé une différence de 5° et 3° entre les prévisions numériques et les résultats d'essai.

4.2.5. *Grandeurs testées et résultats*

On teste les valeurs de K_I et K_{II} , on les compare avec le référence [29]

a	51	53.4	56.4	60.2	65.5
ΔK_{eq} référence	6.451	8.713	10.271	13.352	14.91
K_I X-FEM	6.2	8.7	10.3	13.4	15.0
K_{II} X-FEM	2.4	1.9	0.8	0.4	0.1
ΔK_{eq} X-FEM	6.46	8.73	10.30	13.40	15.00
Erreur relative(%)	0.13	0.19	0.28	0.35	0.60

Tableau 4.1 : facteur d'intensité de contrainte ΔK_{eq} pour un chargement mixte de 60°

a	51	53.4	56.4	60.2	65.5
ΔK_{eq} référence	4.767	11.786	18.271	19.96	27.34
K_I X-FEM	4.6	11.8	18.3	20.0	27.4
K_{II} X-FEM	1.72	0.65	0.31	0.12	0.09
ΔK_{eq} X-FEM	4.77	11.80	18.30	20.00	27.4
Erreur relative(%)	0.06	0.11	0.15	0.20	0.21

Tableau 4.2: facteur d'intensité de contrainte ΔK_{eq} pour un chargement mixte de 30°

Les tableaux 4.1 et 4.2 représentent, respectivement, l'erreur relative entre la solution numérique obtenue et celle de référence.

Cette méthode de maillage a montré une grande souplesse et de très bons résultats sans avoir eu besoin du raffiner le maillage au fond de fissure.

A chaque fois la longueur de fissure augmente la précision diminue.

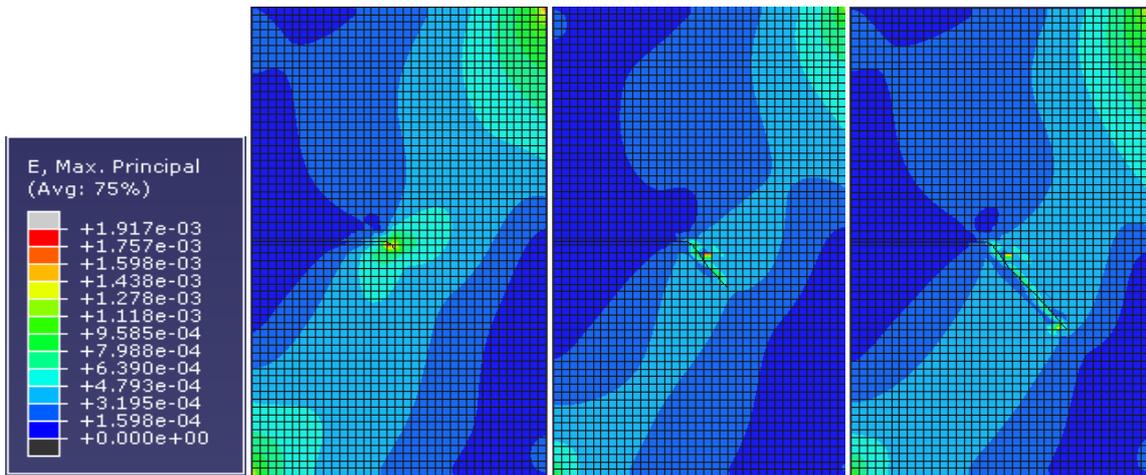


Figure 4.4 : déformation maximale sous un chargement 30°

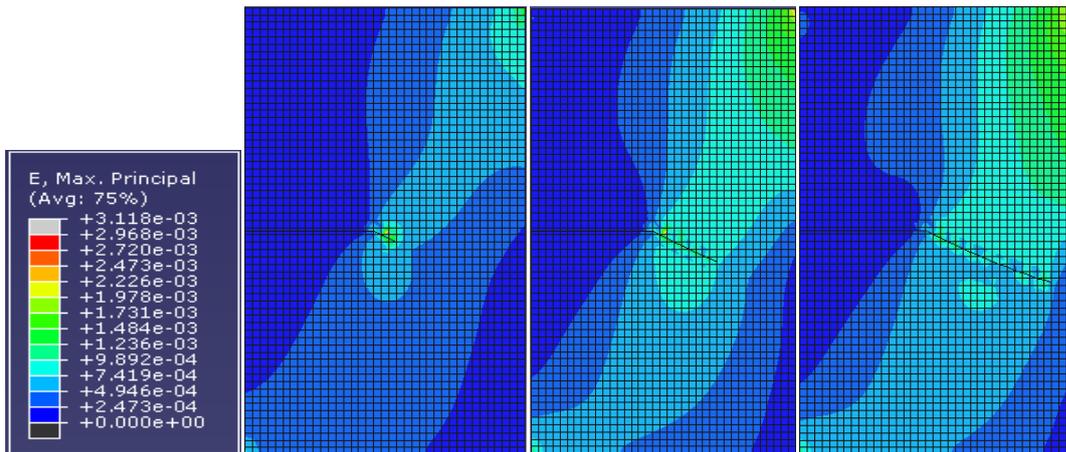


Figure 4.5 : déformation maximale sous un chargement 60°

Les figures 4.4 et 4.5 présentent le champ de déformation maximale. Selon le calcul, la valeur maximale avec l'angle 30° est 9.58×10^{-4} . On la trouve au bout de la fissure et au début de propagation. Cette valeur est diminuée sur les deux cotés de la fissure au cours de la propagation jusqu'à 6.39×10^{-4} .

CHAPITRE VI : Etude numériques de propagation de fissure en mode mixte

On remarque dans les deux cas de chargement que les grandes déformations se trouvent sur la ligne perpendiculaire de trajet de fissure.

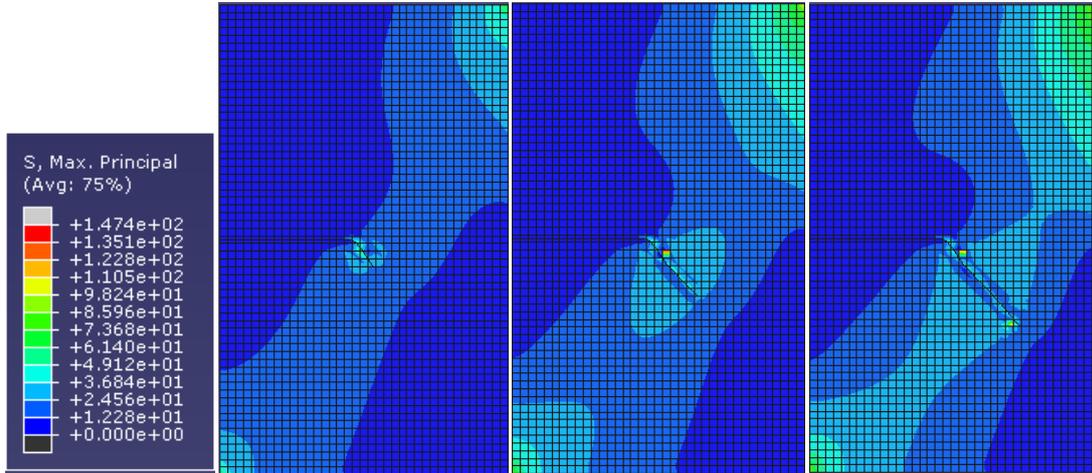


Figure 4.6 : contrainte maximale sous un chargement de 30° en MPa

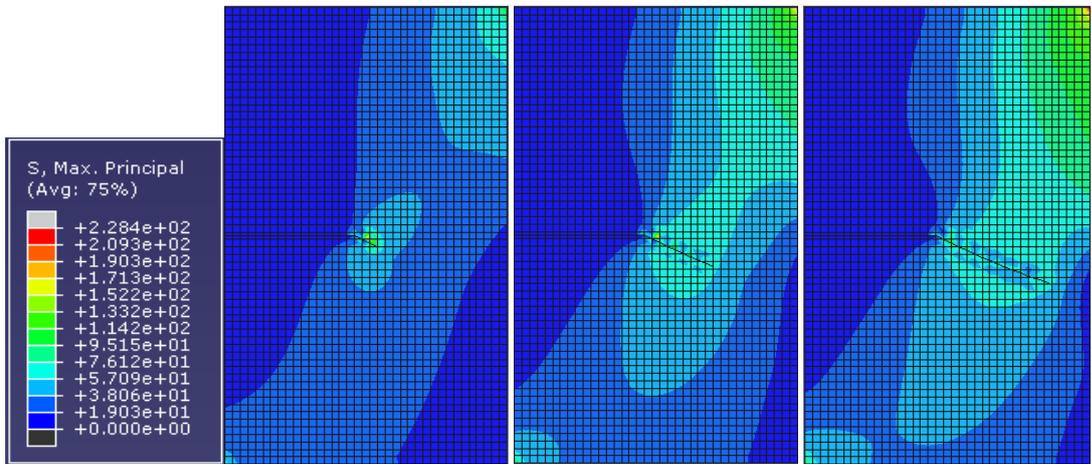


Figure 4.7 : contrainte maximale principale sous un chargement de 60° en MPa

Les figure 4.6, et 4.7 présentent les contraintes maximales ; avec le chargement de 30°, selon le calcul la valeur maximale au début (73.6 MPa) se trouve au fond de la fissure et au cours de la propagation, elle continue d'augmenter jusqu'à la rupture.

On trouve que cette contrainte est distribuée dans une forme perpendiculaire au trajet de la fissure.

4.3. *Conclusion*

L'avantage de la méthode X-FEM est de pouvoir faire un calcul de propagation avec un maillage unique. Comme ce maillage doit être fin dans une zone assez étendue. Elle permet de simuler efficacement la propagation arbitraire de fissure sans avoir à remailler la structure. Les exemples d'application montrent l'efficacité de cette méthode.

Conclusion générale

Conclusion et perspective générale

A travers ce mémoire, nous espérons avoir montré la nécessité expérimentales et études numériques en mécanique de la rupture linéaire.

Le premier chapitre a permis de fixer le cadre dans lequel s'inscrit notre sujet de recherche. D'un point de vue théorique, l'analyse asymptotique en mécanique de la rupture linéaire a défini les paramètres décrivant la rupture. Des critères ont été adoptés afin de déterminer les directions de bifurcations.

Le deuxième chapitre s'est donc concentré sur l'outil de simulation numérique basé sur la méthode des éléments finis étendue et dédié à l'étude de propagation de fissure en mode I et mixte. On a aussi explicité comment l'utilisation de fonctions de niveau pouvait gérer l'évolution de la fissure au cours de temps.

Le troisième et dernier chapitre a présenté le travail effectué durant ce mémoire avait pour but de fournir des données expérimentales vis-à-vis d'outil de simulation numérique dans notre laboratoire.

D'après cette étude numérique et expérimentale sur la propagation de fissure en fatigue dans Aluminium sous le mode I et mixte, on peut retenir que :

1) la direction de propagation de fissure en fatigue change immédiatement l'orientation initiale d'entaille quand la direction de charge est modifiée. En outre, l'angle de bifurcation « θ » diminue lorsque l'angle de chargement augmente.

2) Dans un cas élastique, la fissure se propage suivant le mode I ou mode mixte dans une direction perpendiculaire aux contraintes principales de traction ce que nous donne la direction globale de la fissure.

3) L'avantage de la méthode X-FEM implantée dans le code de calcul ABAQUS est de pouvoir faire un calcul de propagation avec un maillage unique. Par conséquent la méthode X-FEM n'impose aucune condition sur l'évolution de fissure au fond de la géométrie et permet une représentation implicite de la fissure grâce à cette fonction de niveaux.

En particulier, il est possible en tout point du maillage d'obtenir des informations sur la déformation et le champ déplacement au point de fissure.

Le problème lie à la propagation des fissures en mode I et mixte encore un domaine de recherche ouvert.

D'autres applications peuvent être aussi envisagées en utilisant différentes fonctions d'enrichissement qui correspondent à des problèmes physiques différents : par exemple pour caractériser la colle dans un assemblage ou pour décrire la rupture non linéaire.

Bibliographie

Bibliographies

- [1]: **Irwin GR**, « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate », *Journal of Applied Mechanics*, 1957, vol.24, pp. 361-364.
- [2]: **Naman recho**. « Rupture par fissuration des structures ». Edition Hermès, Paris, 1995
- [3]: **Dominique François, andrés Pineau, andré Zaoui**. « Comportement mécanique des matériaux ». Edition Hermès, Paris.
- [4]: **Jia li, Naman Recho** , « Méthodes asymptotique en mécanique de la rupture ». Edition Hermès Lavoisier, paris, 1996
- [5]: **Claude Bathias, André Pineau**. « Fatigue des matériaux et des structures 2 ».
- [6]: **Sander M, Richard HA**, « Effects of block loading and mixed mode loading on the fatigue crack growth». In: Blom AF, editor. *Fatigue*, vol. 5. Stockholm: EMAS; 2002. p. 2895–902.
- [7]: **H.D.BUI** : « Mécanique de la rupture fragile » - Masson, 1978.
- [8]: **Richard HA, Linnig W, Henn K**. «Fatigue crack propagation under combined loading». *Forensic Eng* 1991;3:99–109.
- [9]: **Richard H.A. and Benitz K**, «A loading device for the creation of mixed mode in fracture mechanics». *Int. J. Fractures*, **22**, R55, 1983
- [10]: **Biner SB**. « Fatigue crack growth studies under mixed-mode loading ». *Int J Fatigue* 2001;23(Suppl.):S259–S63.
- [11]: **Sander M, Richard HA**, « Lifetime predictions for real loading situations concepts and experimental results of fatigue crack growth ». *Int J Fatigue* 2003;25:999–1005.
- [12]: **G.C. Sih**, «Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems », *Int. J. Fract.* 10 (3) (1974) 305–321.
- [13]: **F. Erdogan and G.C. Sih**, «On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear», *J Basic Eng*, **85** (1963), pp. 519–525
- [14]: **N. Sukumar, J.-H. Prévost**, « Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. Part I »: Computer implementation, *International Journal of Solids and Structures* 40 (26) (2003) 7513-7537

- [15]: **E. Béchet, H. Minnebo, N. Moës, B. Burgardt**, « Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64 (8) (2005) 1033-1056.
- [16]: **Tanaka K, Hoshide T, Yamada A, Taira S**. « Fatigue crack propagation in biaxial stress fields ». *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 1979;2:181–94.
- [17]: **Osher.S, Sethian JA**. « fronts propagating with curative dependent speed: algorithms based on Hamilton-jacobi formulation ». *Journal of computational Physics*, 1988, vol. 79, pp.12-49.
- [18]: **G. R. Irwing**. « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate». *Journal of Applied Mechanics*, 24 :361–364, 1957.
- [19]: **N. Moës and T. Belytschko**. « Extended finite element method for cohesive crack growth ». *Engineering Fracture Mechanics*, 69 :813–833, 2002.
- [20]: **I. Babuska and J.M. Melenk**. « The partition of unity method ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :727–758, 1997.
- [21]: **N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko**. « A finite element method for crack growth without remeshing ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.
- [22]: **N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, and T. Belytschko**. « Extended finite element method for three-dimensional crack modeling ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 :1549–1570, 2000.
- [23]: **N. Sukumar and J.-H. Prévost**. « Modelling quasi-static crack growth with the extended finite element method. part i : Computer implementation ». *International Journal of Solids and Structures*, 40 :7513–7537, 2003.
- [24]: **J. Dolbow**. «An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics ». PhD thesis, Northwestern University - Evanston, Illinois, 1999.
- [25]: **J. Dolbow, N. Moës, and T. Belytschko**. « Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method ». *Finite Element in Analysis and Design*, 36 :235–260, 2000.
- [26]: **S. Chabanet, D. Steglich, J. Besson, V. Heitmann, D. Hellmann, and W. Brocks**. « Predicting crack growth resistance of aluminium sheets ». *Computational Material Science*, 26 :1–12, 2003.

- [27]: **X.B. Zhang , S. Ma and N. Recho**. « Bifurcation and propagation of a mixed-mode crack in a ductile material ». *Eng Fract Mech* 73 (2006) 1925–1939.
- [28]: **Sih GC**. « Strain energy density factor applied to mixed-mode crack problem ». *Int J Fracture* 1974;10:305–21.
- [29]: **S. Ma, X.B. Zhang and N. Recho**. « The mixed-mode investigation of the fatigue crack in CTS metallic specimen ». *International Journal of Fatigue* 28 (2006) 1780–1790.
- [30]: **David Lebaillif, Naman Recho**, « Prevision de la rupture en milieu élastique par remaillage », 9ème Colloque National AIP PRIMECA, La Plagne - 5-8 avril 2005.
- [31]: **L.P. Borrego, F.V. Antunes**. « Mixed-mode fatigue crack growth behaviour in aluminium alloy », *International Journal of Fatigue* 28 (2006) 618–626.
- [32]: **Stolarska N, Chapp DL, Moes N**. «Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method », *International Journal of numerical Methods in engineering*, 2001, vol (51), pp. 943-960.
- [33]: **BATHE**. «Finite Element Procedure », Prentice All, 1996. 24, 92, 101.
- [34]: **Zienkiewicz et Taylor** . « The Finite Element Method », Vol 1, 2, 3. McGraw-Hill, London, 1991. 24, 45.
- [35]: **T. Balytschko, Y. Black** . « Elastic crack Growth in Finite Elements with Minimal remeshing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:993-1013, 2001.
- [36]: **M. Fleming, Y.A. Chu, B. Moran et T. Belytschko** : « Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997. 30, 42, 63.