

République Algérienne Démocratique et Populaire
MINISTRE DE L'INDUSTRIE ET DE LA RESTRUCTURATION
INSTITUT NATIONAL DE GENIE MECANIQUE
I.N.G.M. BOUMERDES

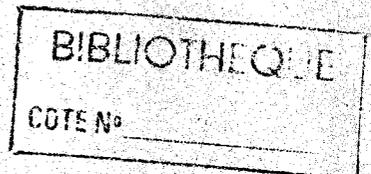
MEMOIRE DE MAGISTER

SPECIALITE: GENIE MECANIQUE

Présenté par :

CHEKILA Abdelfateh

Ingénieur d'Etat en Génie Maritime



**IDENTIFICATION DES SYSTEMES LINEAIRES
PAR LA METHODE DE CORRELATION AU
MOYEN DES SEQUENCES BINAIRES
PSEUDO-ALEATOIRES**

Soutenu publiquement le 30 Novembre 1997 devant le Jury d'Examen:

Dr. BOUCHERIT M^d Seghir	(Maître de conférences à l' E.N.P. Alger)	Président
Dr. OUAMEUR ALI Ahcène	(Chargé de cours à l' I.N.G.M. Boumerdès)	Rapporteur
Dr. ZELMAT Mimoun	(Maître de conférences à l' I.N.H. Boumerdès)	Examineur
Dr. BELAÏDI Abderahmane	(Chargé de cours à l' I.N.G.M. Boumerdès)	Examineur
BOUKHETALA Djamel	(Chargé de cours à l' E.N.P. Alger)	Examineur

République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'INDUSTRIE ET DE LA RESTRUCTURATION

INSTITUT NATIONAL DE GENIE MECANIQUE
I.N.G.M. BOUMERDES

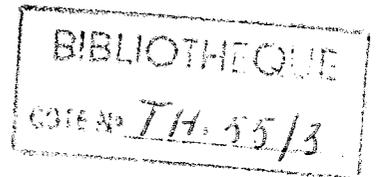
MEMOIRE DE MAGISTER

SPECIALITE: GENIE MECANIQUE

Présenté par :

CHEKILA Abdelfateh

Ingénieur d'Etat en Génie Maritime



IDENTIFICATION DES SYSTEMES LINEAIRES PAR LA METHODE DE CORRELATION AU MOYEN DES SEQUENCES BINAIRES PSEUDO-ALEATOIRES

Soutenu publiquement le 30 Novembre 1997 devant le Jury d'Examen:

Dr. BOUCHERIT M^d Seghir	(Maître de conférences à l' E.N.P. Alger)	Président
Dr. OUAMEUR ALI Ahcène	(Chargé de cours à l' I.N.G.M. Boumerdès)	Rapporteur
Dr. ZELMAT Mimoun	(Maître de conférences à l' I.N.H. Boumerdès)	Examineur
Dr. BELAIDI Abderahmane	(Chargé de cours à l' I.N.G.M. Boumerdès)	Examineur
BOUKHETALA Djamel	(Chargé de cours à l' E.N.P. Alger)	Examineur

N° : 05/97

AVANT PROPOS

Le travail de recherche exposé dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire E.E.A de l'Institut National de Génie Mécanique de Boumerdès.

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **OUAMEUR ALI AHCÈNE** qui m'a suggéré ce travail, je lui suis très reconnaissant de la confiance qu'il m'a toujours accordée et de ses conseils pertinents.*

*Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur **BOUCHERIT Mohamed Seghir** de l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail et de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury.*

*J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur **BOUKHETALA Djamel** pour la disponibilité dont il a fait preuve à mon égard et pour avoir bien voulu participer à ce Jury*

*Je remercie vivement Monsieur **ZELMAT Mounir** de l'intérêt qu'il m'a témoigné en acceptant, malgré ses nombreuses obligations, de faire partie du Jury.*

*Je voudrais remercier très vivement aussi Monsieur **BELAIDI Abderahmane** d'avoir accepté d'être membre du Jury et de s'intéresser à mon travail.*

*Je remercie aussi tous les enseignants et collègues du laboratoire E.E.A. qui, par leurs discussions et suggestions ont facilité la réalisation de ce travail, en particulier, Monsieur **LARBANI Meziane**, à qui je tiens à exprimer toute ma reconnaissance.*

Mes remerciements vont également à tous les responsables de l'Institut National de Génie Mécanique, qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

*A Messieurs **ZEGHOUD M., MENASRI N., HATNA A., BENSEFIA A.**, et à tous les amis de l'I.N.G.M. j'adresse mes remerciements pour leurs encouragements et leur sympathie.*

Ce travail doit également beaucoup à ceux qui par leur dévouement et leur coopération m'ont aidé, qu'ils trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance et surtout qu'ils m'excusent de n'avoir pu tous les citer nominativement.

SOMMAIRE

NOMENCLATURE	a et b
--------------------	--------

INTRODUCTION	1
--------------------	---

CHAPITRE 1: GENERALITES.

1-1 Principe de l'identification	6
1-2 Modèles dynamiques des systèmes linéaires invariants	7
1-3 Choix de la méthode d'identification	9
1-4 Convolution, Réponse impulsionnelle	10
1-5 Séquence de pondération	12
1-6 Corrélacion, Coefficient de corrélation	13
1-7 Fonction de corrélation	15
1-8 Fonction de corrélation et théorie de l'information	15

CHAPITRE 2: IDENTIFICATION PAR CORRELATION.

2-1 Principe	18
2-2 Avantages et inconvénients	22
2-3 Caractéristiques optimales du signal test	23
2-4 Séquences binaires pseudo-aléatoires (S.B.P.A)	24
2-4-1 Génération des séquences binaires de longueur maximale (S.B.L.M)	25
2-4-2 Propriétés des séquences binaires de longueur maximale	29

CHAPITRE 3: IDENTIFICATION PAR CORRELATION AU MOYEN DES SEQUENCES BINAIRES DE LONGUEUR MAXIMALE.

3-1 Principe	37
3-2 Identification de la séquence de pondération	39
3-3 Influence de la largeur de spectre de la séquence sur l'identification de la réponse impulsionnelle	40
3-4 Composante continue d'erreur d'identification	42

3-5 Répercussion des transitoires	43
3-6 Résultats de simulation numérique	45
3-7 Influence des perturbations sur l'identification	56
3-7-1 Répercussion des bruits	56
3-7-1-1 Espérance mathématique des erreurs d'identification	56
3-7-1-2 Variance des erreurs d'identification	57
3-7-1-3 Interprétation dans le domaine fréquentiel	60
3-7-1-4 Corrélation des erreurs d'identification	62
3-7-2 Influence de la valeur moyenne et de la valeur entre pics de la fonction d'autocorrélation de la séquence	68
3-7-3 Répercussion des dérives	69
3-7-3-1 Dérive linéaire	69
3-7-3-2 Dérive d'ordre élevé	72

CHAPITRE 4: INFLUENCE DU TRAITEMENT NUMERIQUE DES DONNEES.

4-1 Echantillonnage du signal sans bruit	78
4-2 Echantillonnage du signal en présence de bruit	79
4-3 Quantification du signal de sortie du système	85

CHAPITRE 5: IDENTIFICATION DES SYSTEMES EN BOUCLE FERMEE.

5-1 Introduction	90
5-2 Méthode matricielle	91
5-3 Résultats de simulation numérique	93

CHAPITRE 6: DETERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT A PARTIR DE LA REPONSE IMPULSIONNELLE.

6-1 La méthode du modèle	103
6-1-1 Principe	103
6-1-2 Notion de distance objet-modèle	104
6-1-2-1 La distance de structure	105

6-1-2-2 La distance d'état	105
6-1-3 Choix du critère et de la méthode d'estimation	106
6-2 Identification paramétrique à l'aide de la P.N.L	106
6-2-1 Définition de la programmation non linéaire (P.N.L)	106
6-2-2 Application de la P.N.L à l'identification des systèmes	107
6-3 Identification des paramètres de la fonction de transfert	108
6-3-1 Données du problème	108
6-3-2 Choix de l'algorithme d'optimisation	109
6-3-3 Optimisation avec contraintes	109
6-3-4 Quelques aspects pratiques de l'identification	110
6-3-4-1 Choix du modèle	110
6-3-4-2 Choix de l'ordre du modèle	110
6-3-4-3 Traitement du gain et des retards purs	112

CHAPITRE 7: APPLICATION:

IDENTIFICATION D'UN ASSERVISSEMENT DE POSITION.

7-1 Identification en boucle fermée.	114
7-1-1 Choix des paramètres de la S.B.P.A	115
7-1-2 Description du dispositif expérimental	117
7-1-3 Identification de la réponse impulsionnelle du système en boucle fermée	117
7-1-4 Estimation des paramètres de la fonction de transfert	121

CONCLUSION GENERALE. 125 |

ANNEXE I : Méthode de Marquardt-Levenberg
 128 |

ANNEXE II : Optimisation avec contraintes
 138 |

ANNEXE III : Etablissement analytique des diverses fonctions de transfert de
l'asservissement de position.
 141 |

BIBLIOGRAPHIE.
 148 |

- $\delta(t)$: impulsion de Dirac.
 $u(t)$: entrée du système (signal d'excitation).
 $Y(t)$: sortie du système (signal de réponse).
 $h(t)$: réponse impulsionnelle du système.
 $h_c(t)$: réponse impulsionnelle identifiée par la méthode de corrélation.
 $h_i(t)$: réponse impulsionnelle théorique.
 $h_f(t)$: réponse impulsionnelle identifiée du système en boucle fermée.
 $h_n(t)$: réponse impulsionnelle théorique du système en boucle fermée.
 $h_o(t)$: réponse impulsionnelle du système en boucle ouverte.
 $h_{ot}(t)$: réponse impulsionnelle théorique du système en boucle ouverte.
 $h_{occ}(t)$: réponse impulsionnelle en boucle ouverte obtenue par la méthode matricielle en présence d'une erreur continue sur la réponse en boucle fermée.
 h_k^* : séquence de pondération (réponse impulsionnelle du système discret).
 H_F : matrice de transfert du système discret en boucle ouverte.
 \underline{U}_n : vecteur de la séquence d'entrée du système .
 \underline{h}^* : vecteur de la séquence de pondération
 ρ : Coefficient de corrélation.
 $C_{uu}(\tau)$: fonction d'autocorrélation du signal d'entrée du système.
 $C_{uy}(\tau)$: fonction d'intercorrélation entrée-sortie du système.
 $R_{uu}(\tau), R_{uy}(\tau)$: fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation expérimentales.
 $X(t)$: séquence binaire pseudo-aléatoire (S.B.P.A).
 a : amplitude de la S.B.P.A.
 L : longueur de la S.B.P.A
 Δt : période de l'horloge du générateur de la S.B.P.A.
 Te : période d'échantillonnage de la réponse du système.
 $E [.]$: espérance mathématique.
 Φ_{xy} : densité spectrale énergétique de la S.B.P.A.
 $b(t)$: bruit ramené à la sortie du système.
 A_0 : sortie du système correspondant à son point de fonctionnement normal.
 G : gain statique du système.
 T_0 : durée de la réponse impulsionnelle.
 T_i : constante de temps du système.

- z : coefficient d'amortissement du système.
- $\overline{\varepsilon_b^2}$: variance de l'erreur sur la réponse impulsionnelle due aux bruits.
- $\overline{b^2}$: variance du bruit.
- S/B : rapport signal sur bruit.
- ν_0 : la fréquence maximale contenue dans le spectre du signal.
- $\nu_{N\acute{e}q}$: largeur de spectre équivalent de la S.B.P.A.
- $\nu_{b\acute{e}q}$: largeur de spectre équivalent du bruit.
- $\nu_{h\acute{e}q}$: bande passante équivalente du système.
- CC_{ce} : fonction de corrélation des erreurs obtenue par simulation de la réponse impulsionnelle.
- CE_{ce} : fonction de corrélation des erreurs estimée par les relations théoriques obtenues.
- $d(t)$: signal de dérive (perturbations de basses fréquences).
- $\varepsilon_d(\tau)$: erreur due aux dérives.
- $M_1(\tau)$: moment du 1^{er} ordre de la S.B.P.A.
- $H(p)$: fonction de transfert du système.
- \underline{P} : vecteur des paramètres du modèle (la fonction de transfert).
- C : critère à minimiser.
- \underline{Y} : vecteur des données estimées par le modèle (sortie modèle).
- \underline{Y} : vecteur des données mesurées (sortie système réelle).
- $\langle \underline{Y} \rangle$: vecteur des données estimées par le modèle linéarisé.
- $\underline{\Delta P}_i$: vecteur de correction des paramètres obtenu par la méthode de Newton-Gauss (après développement en série de Taylor).
- $\underline{\Delta P}_g$: vecteur de correction des paramètres obtenu par la méthode du gradient.
- λ : multiplicateur de Lagrange.
- γ : angle entre la direction négative du gradient et la direction de correction de la méthode de Newton-Gauss (angle entre $\underline{\Delta P}_i$ et $\underline{\Delta P}_g$).
- \underline{A}^* : matrice normalisée.
- $P(X)$: fonction de pénalisation.
- g_j : fonction de pénalisation associée à une contrainte « égalité ».
- h_j : fonction de pénalisation associée à une contrainte « inégalité ».
- α_j : facteur de pondération dans la fonction de pénalisation.

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Dans toutes les disciplines de l'ingénieur, la modélisation tient une place prépondérante: la compréhension et l'amélioration de tout fonctionnement passent nécessairement par cette phase. Cependant, la notion de modèle est essentiellement subjective, puisque le mécanicien verra le même phénomène sous un autre angle que l'automaticien, ou que l'économiste. C'est l'objectif de la modélisation (la conception, la compréhension, la commande, etc...) qui permet à l'ingénieur d'orienter son choix vers une classe de modèles donnée.

Les systèmes industriels sont de nature très complexe et en général il est extrêmement difficile d'établir leurs modèles à partir de l'étude des phénomènes physiques et chimiques présents dans le système. Dans ces conditions, plutôt que de tenter une impossible, et souvent inexploitable « mise en équations » du processus, la démarche habituelle de l'automaticien consistera à l'identifier, c'est à dire à en obtenir un modèle à partir de l'observation des entrées-sorties du système en fonctionnement. Le modèle ainsi obtenu est parfois dit « modèle de conduite » ou « modèle de comportement ».

L'identification d'un système, au sens employé ici, peut se définir comme la recherche d'un modèle qui représente avec une précision suffisante le comportement du système, compte tenu de son état et des actions qui le sollicitent. Le but de ce modèle étant généralement de permettre l'élaboration d'une stratégie de commande du système, le degré de précision nécessaire pour le modèle, dépend du type et des spécifications de cette commande. Ceci est à la base de la difficulté présentée par l'identification: souvent, en effet, ce n'est qu'une fois l'identification faite que l'on connaît les conditions d'utilisation.

Il existe un très grand nombre de méthodes d'identification entre lesquelles il est bien difficile de faire un choix lorsqu'on se trouve placé devant un cas concret. On distingue deux grandes classes de modèles: modèles paramétriques (fonction de transfert, équations d'état, etc...) et les modèles non-paramétriques (réponse impulsionnelle, réponse indicielle, etc...).

Les systèmes industriels complexes sont généralement caractérisés par de faibles connaissances a priori, ce qui implique que, au moins dans une première étape de l'identification, les meilleurs modèles à utiliser sont les modèles non-paramétriques.

D'autre part, ces systèmes sont caractérisés par des réponses lentes et, à cause des contraintes de fonctionnement et de linéarité du système, leur identification nécessite l'utilisation de signaux test de faible niveau. Ainsi l'identification par la méthode d'intercorrélation avec des séquences binaires pseudo-aléatoires permet l'identification des systèmes en introduisant de très faibles perturbations.

Une fois la réponse temporelle (modèle non-paramétrique) obtenue, on peut l'utiliser soit directement soit pour caractériser le système par un modèle paramétrique, d'un certain type et d'un certain ordre, sur lequel une identification des paramètres doit être réalisée ensuite.

Dans le présent travail nous avons étudié la méthode d'identification de la réponse impulsionnelle par intercorrélation avec des séquences binaires pseudo-aléatoires comme signaux test et la méthode de passage à la fonction de transfert en utilisant les méthodes de la programmation non linéaire.

Afin de faciliter la lecture et la compréhension de ce mémoire, nous avons commencé par un premier chapitre regroupant les notions de base utilisées. Etant donné que le point de départ, pour l'obtention de la réponse impulsionnelle par la méthode de corrélation, c'est l'équation de convolution, nous avons essayé de donner une formulation mathématique ainsi qu'une interprétation physique à ces deux notions de convolution et corrélation.

Dans le deuxième chapitre, nous avons exposé le principe de la méthode d'identification de la réponse impulsionnelle par corrélation, dans le cas général, en utilisant comme signal test une excitation aléatoire. Ainsi, après l'analyse de tous les avantages et les inconvénients qu'il y a à utiliser une excitation purement aléatoire, nous avons montré l'intérêt de l'utilisation des séquences binaires pseudo-aléatoires comme signaux test. Ces séquences ont été traitées et nous avons développé les principales propriétés des séquences binaires pseudo-aléatoires de longueur maximale.

L'application des séquences binaires de longueur maximale à l'identification de la réponse impulsionnelle par corrélation a fait l'objet du troisième chapitre.

Dans la pratique, les signaux mesurés sont toujours entachés d'erreurs, dues soit à l'imperfection des capteurs utilisés soit à l'existence de perturbations non contrôlables. Une analyse de l'influence de ces perturbations sur la réponse impulsionnelle identifiée, ainsi que l'estimation des erreurs dues à ces perturbations ont été abordés.

Malgré le progrès et le développement incessants des performances des systèmes d'acquisition et de traitement des signaux, le traitement numérique des données peut être une source d'erreurs; Ce traitement nécessite la réalisation de l'échantillonnage et de la quantification des signaux. Nous avons consacré le quatrième chapitre à l'analyse de l'influence de ces deux opérations sur la réponse impulsionnelle identifiée.

Dans certains cas, notamment pour l'identification des systèmes au cours de leur fonctionnement normal ou pour des raisons de stabilité, on se trouve obligé à réaliser l'identification des systèmes en boucle fermée. C'est la réalisation de ce type d'identification et l'obtention de la réponse impulsionnelle en boucle ouverte qui a fait l'objet du cinquième chapitre.

Le passage de la réponse impulsionnelle à la fonction de transfert, en utilisant les méthodes de programmation non linéaire, a été traité au sixième chapitre.

Le dernier chapitre a été consacré aux résultats obtenus par l'application de cette méthode à l'identification d'un servomécanisme de position.

CHAPITRE 1

GENERALITES

1-1 Principe de l'identification

L'identification est une approche expérimentale pour la détermination du modèle dynamique d'un système. Généralement elle comporte les quatre étapes suivantes, [1], [2] :

a- Acquisition des entrées-sorties sous un protocole d'expérimentation: Le problème consiste à choisir une expérience donnant le maximum d'informations.

b- Choix de la structure du modèle: Le choix d'un modèle candidat peut se faire à partir des lois physiques régissant le système dont les paramètres sont peu connus ou mal connus (boîtes grises), ou bien à partir du résultat de l'expérience sans connaissances a priori (boîtes noires).

c- Estimation des paramètres du modèle: il faut déterminer les valeurs numériques des coefficients de la structure choisie.

d- Validation du modèle identifié: le modèle mathématique obtenu n'est valable, en toute rigueur, que pour l'expérience utilisée; il faut donc vérifier s'il est compatible avec l'utilisation que l'on en fera.

L'identification d'un système est donc une procédure interactive où les choix doivent être remis en question lors d'un échec de la validation du modèle.

Une opération d'identification complète doit nécessairement comporter les quatre phases indiquées plus haut. Les méthodes spécifiques utilisées dans chaque phase dépendent du type de modèle recherché (paramétrique ou non-paramétrique, continu ou discret, etc...) et pour simplifier le travail d'identification, on décompose celui-ci en établissant une distinction entre modèle statique et modèle dynamique.

• Modèle statique.

L'étude et la conception d'un système physique sont faites sur la base de lois plus ou moins empiriques, ces lois sont généralement des fonctions de certaines variables et valables dans certains domaines. Si on suppose que les variables sont fixées à des valeurs constantes, on obtient un ensemble d'équations algébriques qu'on appellera **modèle statique**.

Le modèle statique se limite donc à définir le comportement du système lorsque celui-ci est en régime stable. Pour son élaboration on utilise des équations d'équilibre et des bilans matière et énergétiques qui sont relativement simples à établir. Des relevés statiques du procédé permettent finalement d'ajuster ce modèle statique

- **Modèle dynamique.**

La plupart des lois de la physique qui expriment l'évolution temporelle de grandeurs caractéristiques de l'objet étudié, sous l'influence d'autres grandeurs, sont du type équations différentielles ou équations aux dérivées partielles. Les modèles des systèmes physiques pour lesquels on considère l'évolution temporelle des variables, et qui sont régis par des lois de ce type, sont appelés **modèles dynamiques**.

1-2 Modèles dynamiques des systèmes linéaires invariants.

La détermination d'un modèle mathématique d'un processus nécessite en général divers hypothèses simplificatrices afin de limiter sa complexité. Dans chaque application, il apparaît nécessaire de faire un compromis entre la finesse et la précision du modèle à mettre en oeuvre d'une part, et la limite de complexité admissible, compte tenu des objectifs fixés, d'autre part.

Les équations non-linéaires aux dérivées partielles sont généralement la meilleure approximation du comportement réel des systèmes, mais pour la raison indiquée ci-dessus et pour d'autres raisons pratiques (notre connaissance des mathématiques, les moyens disponibles, etc ...), dans les applications pratiques de l'identification, on utilise des modèles exprimés par des équations différentielles ordinaires à coefficients constants. Les modèles exprimés par cette forme d'équations ou par des équations récurrentes sont appelés **modèles dynamiques linéaires**. La propriété fondamentale de ces systèmes linéaires s'exprime par le principe de superposition.

Les modèles peuvent aussi être classés, selon la nature de la variable temps, et on distingue les modèles continus et les modèles discrets.

a- Modèle continu.

Dans ce type de modèle, le temps est une variable qui évolue continûment sur l'intervalle d'évolution choisi, prenant en croissant toutes les valeurs situées dans cet intervalle.

b- Modèle discret.

Ce type de modèle est utilisé soit lorsque le processus étudié a naturellement un mode d'évolution séquentiel, soit lorsqu'on a adopté une représentation du processus qui correspond à une observation des variables à des instants discrets. On a dans ce cas une représentation dite **échantillonnée**, particulièrement bien adaptée aux divers types de calculs à effectuer dans les problèmes de commande de processus par ordinateur numérique.

En se bornant à des zones de fonctionnement où le système peut être considéré comme complètement observable et contrôlable et peut être décrit, avec une bonne précision, par une représentation linéaire invariante, la dynamique du système peut se caractériser entre autres par un des modèles suivants:

- Réponse impulsionnelle
- Réponse indicielle
- Réponse fréquentielle
- Equation aux différences
- Equation d'état
- Fonction de transfert
-

L'identification dynamique consiste alors à obtenir une de ces représentations servant à en déduire la réponse du système aux fonctions d'entrée appartenant à certaine classe (bornées, limitées en fréquence, ...). Pour réaliser cette identification, il est nécessaire de disposer des signaux d'entrée et de sortie du système. Comme fonctions d'entrée, on peut utiliser soit les signaux d'entrée correspondant au fonctionnement normal du procédé, soit des signaux test. Ce sont ces derniers que l'on préfère choisir car ils permettent les mesures nécessaires indépendamment du niveau d'activité du système.

1-3 Choix de la méthode d'identification

Il existe un très grand nombre de méthodes d'identification dynamique entre lesquelles il est bien difficile de faire un choix lorsqu'on se trouve placé devant un cas concret. Pour choisir un procédé d'identification les points suivants, entre autres, doivent être considérés:

a- Choix et précision du modèle en fonction de son utilisation:

En général, l'identification doit être réalisée directement sur le modèle qui sera utilisé par la suite. En effet, si bien des modèles différents peuvent contenir la même information, il peut arriver que l'un d'eux ne puisse pas être transposé et permettre d'obtenir une bonne estimation qu'un autre. Par exemple, lorsqu'il s'agit de la mise en oeuvre d'une régulation, le modèle le plus utile est généralement la réponse fréquentielle.

b- Facilité d'utilisation des connaissances a priori du système.

Lorsqu'on connaît assez bien les mécanismes physico-chimiques du système, l'équation différentielle est généralement le modèle le plus utile. L'identification peut alors se réduire à une détermination de coefficients, ce qui peut être réalisé en transformant l'équation différentielle en équation intégrale ou bien en se servant de méthodes utilisant des modèles ajustables ou encore au moyen de méthodes statistiques.

Les réponses impulsionnelle, indicielle et fréquentielle, quant à elles sont surtout utiles lorsque le système est mal connu.

c- Validité de l'approximation d'un système par un modèle de faible complexité.

Les systèmes complexes ayant un ordre élevé (souvent indéterminé), on est obligé de les approcher par un modèle d'ordre relativement petit, ce qui simplifie l'identification. Néanmoins remarquons que le modèle ainsi établi risque de donner de mauvais résultats lors de son utilisation pour la commande, bien qu'il représente avec une bonne précision le comportement entrée-sortie du système pour un certain type de fonctions d'entrée.

d- Signaux test optimaux.

Il s'agit de définir les propriétés ainsi que la facilité de génération des signaux qui font le mieux ressortir l'information à identifier. Parmi les signaux les plus connus on trouve l'impulsion (pratiquement non utilisée), l'échelon et la sinusoïde, cette dernière étant toutefois difficile à générer aux très basses fréquences des systèmes industriels.

Les signaux aléatoires ont paru intéressants surtout à cause de la perturbation réduite qu'ils introduisent dans le système. Néanmoins, ils sont loin d'être optimaux au sens défini plus haut et le temps d'identification étant fini, ils apportent une incertitude statistique sur l'identification.

Depuis plusieurs années, un grand intérêt est porté aux signaux déterministes comme les séquences pseudo-aléatoires.

1-4 Convolution, Réponse impulsionnelle [3].

La convolution est l'effet que produit un instrument de mesure qui donne d'un phénomène non pas une image nette, mais une image un peu floue. L'image d'un point dans un instrument d'optique n'est jamais réellement un point mais une tache; cette tache sera plus au moins large selon la qualité de l'appareil. Dans un tel instrument, deux points rapprochés ne pourront donner deux images distinctes que s'ils sont éloignés l'un de l'autre d'une distance supérieure à une distance minimale qui définit le pouvoir séparateur. Cette notion de convolution et de pouvoir séparateur se retrouve dans tous les domaines.

Dans le domaine électronique, on retrouve le même phénomène: une impulsion infiniment brève, injectée à l'entrée d'un amplificateur, ne donne jamais, en sortie, une impulsion infiniment brève mais un signal de durée finie, non nulle (d'autant plus brève que la bande passante de l'appareil est plus grande), (figure.1-1). Ce signal, réponse à une impulsion infiniment brève, est appelé **réponse impulsionnelle**.

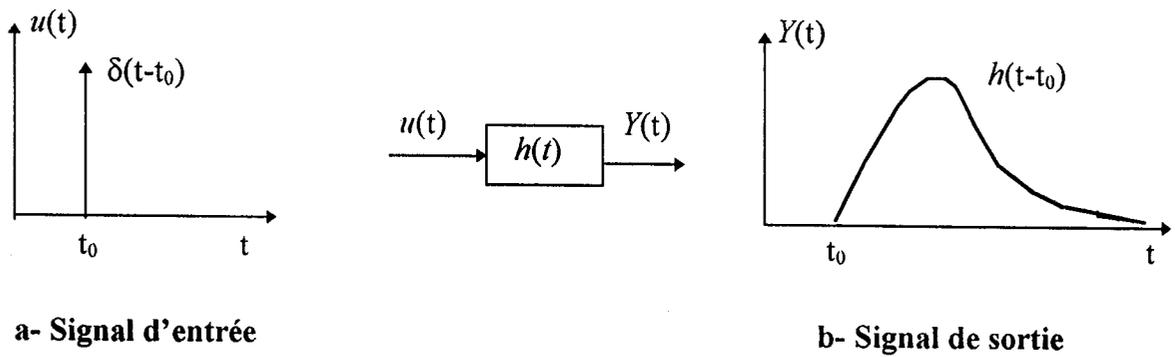


Fig. 1-1: Réponse impulsionnelle d'un système.

Connaissant la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système supposé linéaire (pour que le théorème de superposition soit applicable) et un signal d'entrée $u(t)$, peut-on déterminer, par le calcul, le signal de sortie $Y(t)$?

C'est le problème qui a pour solution l'équation de convolution :

$$Y(t) = u(t) * h(t) = \int_0^t u(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1-1)$$

Pour les systèmes réels physiques en vertu du principe de causalité, l'équation de convolution réelle s'écrit:

$$Y(t) = \int_{t=0}^t u(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1-2)$$

1-5 Séquence de pondération.

Lorsque le système est échantillonné, il est souvent très intéressant de caractériser le système par un modèle discret. A la réponse impulsionnelle des systèmes continus on peut associer, en discret, la séquence de pondération. En effet la réponse d'un système échantillonné est entièrement définie par l'équation de convolution discrète écrite aux instants d'échantillonnage $t = n.T_e$, [4] :

$$Y(nT_e) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_e) h^*(nT_e - kT_e) \quad (1-3)$$

qui peut s'écrire:

$$Y(nTe) = \sum_{k=0}^{\infty} u(nTe - kTe) h^*(kTe) \quad (1-4)$$

Le deuxième terme de ces équations est une convolution discrète, analogue à l'intégrale de convolution de l'équation (1-1).

La suite des nombres $h^*(kTe)$, $k=0, 1, 2, \dots, \infty$, constitue ce qu'on appelle **la séquence de pondération** du système. Pratiquement, lorsque le système considéré est stable, on peut admettre que $h(kTe) \approx 0$, lorsque $k > N$.

Dans ces conditions l'équation (1-4) devient:

$$Y(nTe) = \sum_{k=0}^N u(nTe - kTe) h^*(kTe) \quad (1-5)$$

Si on appelle \underline{U}_n un vecteur colonne de dimension $(N \times 1)$ dont les composantes sont $U(nTe - kTe)$, $k= 1, 2, \dots, N$, et \underline{h}^* le vecteur colonne de dimension $(N \times 1)$ dont les composantes sont $h^*(kTe)$, $k=1, 2, \dots, N$, c'est à dire la suite des nombres qui constituent la séquence de pondération, on peut écrire:

$$Y(nTe) = \underline{U}_n^T \underline{h}^* = \underline{h}^{*T} \underline{U}_n \quad (1-6)$$

Cette écriture est simple et se prête bien à un traitement sur calculateur numérique. La séquence de pondération \underline{h}^* est un modèle du système discret comme la réponse impulsionnelle $h(t)$ l'est pour un système continu.

On peut constater que, tandis que la réponse impulsionnelle $h(t)$ est la réponse du système à une impulsion de Dirac, la réponse impulsionnelle discrétisée \underline{h}^* est la réponse à une impulsion rectangulaire unitaire de largeur Te (période d'échantillonnage), soit:

$$h_i^* = \int_{(i-1)Te}^{iTe} h(t) dt \quad (1-7)$$

Si la fréquence d'échantillonnage est assez élevée, les modèles $h(t)$ et \underline{h}^* sont équivalents.

1-6 Corrélation, Coefficient de corrélation [3].

Si on a deux fonctions physiques $x(t)$ et $y(t)$ d'une même variable, le temps par exemple, dont on connaît l'histoire (par enregistrement par exemple) depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t_0+T , t_0 étant l'instant d'origine et $t_0 + T$ l'instant de la fin de l'échantillon, T représentant alors l'intervalle sur lequel on connaît l'histoire de la fonction, on peut se demander si de la connaissance de l'histoire d'une fonction et de la connaissance de l'histoire d'une autre fonction pendant le même intervalle, on peut déduire l'existence d'une relation entre les deux fonctions.

On admet que s'il existe « une relation » entre ces deux fonctions, il doit exister un coefficient « a » tel que l'écart quadratique moyen $\overline{z(t)^2} = \overline{[x(t) - a \cdot y(t)]^2}$ soit minimal .

Si on cherche la valeur de a qui rend minimale la fonction $\overline{z(t)^2}$, on trouve:

$$a = \frac{\overline{x(t)y(t)}}{\overline{y(t)^2}}$$

et dans ces conditions, l'écart quadratique moyen a pour valeur:

$$\overline{z(t)^2} = \overline{[x(t)]^2} \left[1 - \frac{\overline{x(t)y(t)^2}}{\overline{x(t)^2} \cdot \overline{y(t)^2}} \right]$$

si l'on pose:

$$\rho = \frac{\overline{x(t)y(t)}}{\sqrt{\overline{x(t)^2} \cdot \overline{y(t)^2}}} \quad (1-8)$$

ρ étant le coefficient de corrélation, on a:

$$\overline{z(t)^2} = \overline{[x(t)]^2} [1 - \rho^2] \quad (1-9)$$

L'écart quadratique moyen sera nul si $\rho=1$; en ce cas on dit que les deux processus $x(t)$ et $y(t)$ sont totalement corrélés. Si ρ est nul, l'écart quadratique moyen est maximal et on dit que les processus ne sont pas corrélés. Notons aussi que si deux fonctions sont indépendantes leur corrélation est nulle. On voit donc que ρ donne une idée sur la relation entre les deux processus, d'où le nom de **corrélation**.

On peut se demander s'il n'est pas préférable de comparer les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ après décalage dans le temps, ce qui revient à considérer $x(t)$ et $y(t-\tau)$. On aboutit alors à un coefficient de corrélation fonction du décalage τ :

$$C(t_0, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) y(t-\tau) dt$$

Si les fonctions que l'on intercorrèle sont stationnaires, $C(t_0, \tau)$ sera indépendant de t_0 et la fonction d'intercorrélacion s'écrira:

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t-\tau) dt$$

1-7 Fonction de corrélation.

La définition générale applicable quels que soient $x(t)$ et $y(t)$ (réels ou complexes) est

$$C_{xy}(\tau) = E[x(t) y^*(t-\tau)] \quad (1-10)$$

où $y^*(t-\tau)$ désignant la quantité complexe conjuguée de $y(t-\tau)$.

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont réels, chaque fonction est identique à sa conjuguée et on retrouve:

$$C_{xy}(\tau) = E[x(t) y(t-\tau)]$$

Les signaux physiques issus d'instruments de mesure étant réels, si on suppose vérifiée l'hypothèse ergodique on aura:

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t-\tau) dt \quad (1-11)$$

En fait, lorsque l'on mesure une fonction de corrélation, le calcul porte toujours sur une durée finie; la fonction de corrélation devrait donc s'écrire:

$$C_{xy}(\tau, T) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-\tau) dt \quad (1-12)$$

La grandeur $C_{xy}(\tau, T)$ n'est qu'une estimation de la fonction de corrélation $C_{xy}(\tau) = C_{xy}(\tau, \infty)$, pour simplifier les écritures, nous désignerons par $R_{xy}(\tau)$ l'estimation $C_{xy}(\tau, T)$ de la fonction de corrélation.

1-8 Fonction de corrélation et théorie de l'information [3].

Il est d'une importance capitale de bien noter que la fonction de corrélation $C_{xy}(\tau)$ est liée à l'énergie mutuelle d'interaction des processus décrits par les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$, t et t' différant d'une valeur positive, négative, ou nulle et les fonctions $x(t)$ et $y(t')$ pouvant être identiques (cas de l'autocorrélation).

Cette notion d'énergie mutuelle d'interaction est beaucoup plus valable que les mots ambigus ou imprécis de relation ou de dépendance.

En effet, l'histoire d'un phénomène entre les instants 0 et T peut toujours se mettre sous la forme $x=f_1(t)$, l'histoire d'un autre phénomène peut de la même manière s'écrire $y=f_2(t)$.

L'élimination de t entre ces deux équations va conduire à une relation entre $x(t)$ et $y(t)$, il serait donc absurde de dire que $x(t)$ et $y(t)$ sont indépendants, mais si le produit moyen est nul on peut affirmer qu'il n'y a pas globalement échange d'énergie, donc l'énergie mutuelle d'interaction est nulle; L'énergie qui passe d'un processus à l'autre pendant un intervalle de temps dt est compensée en moyenne par l'énergie échangée dans l'autre sens pendant un autre intervalle dt .

Cette relation profonde entre le coefficient de corrélation et l'énergie échangée est physiquement justifiée et tient à la nature même des choses. Il ne peut y avoir échange d'information sans transfert d'énergie; ce transfert d'énergie peut être extrêmement petit, mais il existe (sinon cela impliquerait des amplificateurs de gain en puissance infini).

Ceci signifie que si deux processus n'ont pas d'énergie mutuelle d'interaction, toute connaissance sur l'un d'eux ne peut rien nous apporter sur la connaissance de l'autre. Si donc deux processus ont un coefficient de corrélation nul, cela ne signifie pas qu'ils soient indépendants mais qu'en moyenne l'information qu'ils échangent est nulle.

CHAPITRE 2

**IDENTIFICATION
PAR CORRELATION**

2 - IDENTIFICATION PAR CORRELATION

A partir de la relation fondamentale de convolution

$$Y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (2-1)$$

On peut se proposer de retrouver $h(t)$, à partir d'un enregistrement d'entrée-sortie quelconque, $\{u(t), Y(t)\}$ tel que $t \in [T_1, T_2]$. C'est à dire résoudre l'équation (2-1) par rapport à $h(t)$; C'est ce qu'on appelle la déconvolution.

Parmi les méthodes utilisées pour résoudre complètement ou partiellement, selon le cas, ce problème ; il y a les méthodes de corrélation :

- Si l'entrée $u(t)$ est une réalisation d'un bruit blanc, on obtient directement la réponse impulsionnelle par une simple corrélation entrée-sortie.
- Si l'entrée est quelconque, les fonctions de corrélation définissent en quelque sorte des entrée-sorties équivalentes à partir desquelles le problème de déconvolution reste entier, mais qui présentent deux avantages: réduction de la longueur des signaux et réduction du niveau de bruit.

2-1 PRINCIPE [5].

Si les entrées $u(t)$ et $Y(t)$ sont des réalisations de signaux aléatoires stationnaires (les caractéristiques statistiques indépendantes de l'origine du temps), les fonctions de corrélation:

$$C_{uu}(\tau) = E(u(t)u(t + \tau)) \quad \text{et} \quad C_{uY}(\tau) = E(u(t)Y(t + \tau))$$

vérifient la relation de Wiener hopf:

$$C_{uY}(\tau) = h(\tau) * C_{uu}(\tau). \quad (2-2)$$

si, de plus $u(t)$ et $Y(t)$ sont des réalisations de signaux ergodiques (les moyennes statistiques égales aux moyennes temporelles), on a:

$$C_{uu}(\tau) = \lim_{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t)u(t + \tau) dt \right]$$

$$C_{uY}(\tau) = \lim_{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t)Y(t + \tau) dt \right]$$

Le principe fondamental de l'identification par corrélation consiste à calculer (par un procédé quelconque d'intégration analogique ou numérique) les fonctions de corrélation expérimentales :

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t)u(t + \tau) dt \tag{2-3}$$

$$R_{uY}(\tau) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t)Y(t + \tau) dt$$

où les bornes t_1 et t_2 sont choisies en fonction de la longueur des signaux disponibles et du décalage maximum envisagé τ_{\max} .

Si $[t_2 - t_1]$ et $[t_2 - t_1]$ sont assez grand, on peut alors écrire:

$$R_{uY}(\tau) = h(\tau) * R_{uu}(\tau) \tag{2-4}$$

Ceci revient à dire qu'on a remplacé le couple d'entrée-sortie (u, Y) par un couple équivalent (R_{uu}, R_{uY}) pour l'identification de $h(\tau)$.

On peut relever trois motivations à ces opérations :

- obtenir, dans certains cas, directement la réponse impulsionnelle ;
- réduire, dans tout les cas, la longueur des données de l'identification ;
- réduire le niveau de bruit.

a - Obtention de la réponse impulsionnelle

Si le signal d'entrée peut être, au moins approximativement, considéré comme un bruit blanc, c'est à dire :

$$R_{uu}(\tau) \cong Q \cdot \delta(\tau)$$

On aura donc

$$R_{uY}(\tau) \cong Q \cdot h(\tau)$$

d'ou` l'obtention directe de la réponse impulsionnelle par simple calcul expérimental d'une fonction de corrélation.

Si $u(t)$ n'est pas un bruit blanc, quel est l'intérêt de résoudre l'équation

$$R_{uY}(\tau) = h(\tau) * R_{uu}(\tau)$$

plutôt que l'équation $Y(t) = h(t) * u(t)$?

Les deux points suivants apportent la réponse:

b- Réduction de la longueur des enregistrements

Si $u(t)$ est strictement aléatoire $C_{uu}(\tau)$ sera étroite et pratiquement nul pour certaine valeur $|\tau| > \tau_{\max}$, ou` τ_{\max} peut être beaucoup plus petit que la longueur totale des enregistrements. Le traitement des signaux $R_{uu}(\tau)$ et $R_{uY}(\tau)$ en vue de l'identification pourra donc être plus réduit que celui des signaux primitifs $u(t)$ et $Y(t)$.

c- Réduction du niveau de bruit .

Dans le cas réel, il existe toujours des bruits additifs inconnus sur la sortie, soit

$$Y(t) = h(t) * u(t) + b(t).$$

la relation (2-2) devient:

$$C_{uY}(\tau) = h(\tau) * C_{uu}(\tau) + C_{ub}(\tau).$$

Si le bruit $b(t)$ est indépendant de l'excitation $u(t)$ (cas général lors d'une identification en boucle ouverte), on a :

$$C_{ub}(\tau) = 0.$$

en présence de bruit, on a donc approximativement encore

$$R_{uY}(\tau) = h(\tau) * R_{uu}(\tau).$$

Dans le cas d'un bruit $b(t)$ corrélé avec $u(t)$, la corrélation permet encore de l'éliminer mais il faut modifier un peu la méthode.

Au lieu d'effectuer les corrélations de $u(t)$ et $Y(t)$ avec $u(t)$ lui-même on remplace ce dernier par « un signal opératoire » $v(t)$. On a alors en effet :

$$C_{vY}(\tau) = h(\tau) * C_{vu}(\tau) + C_{vb}(\tau)$$

Pour présenter un intérêt, ce signal opératoire devra être d'une part, corrélé avec $u(t)$ et $Y(t)$, d'autre part indépendant de $b(t)$ (d'où $C_{vb}(\tau) = 0$), on aura alors la relation

$$R_{vY}(\tau) \approx h(\tau) * R_{vu}(\tau).$$

Cette méthode est appliquée dans l'identification en boucle fermée (fig.2-1):

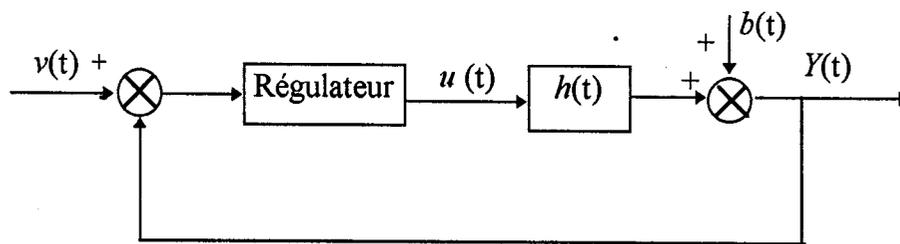


Fig. 2-1: Identification en boucle fermée

En raison de la boucle de retour, $b(t)$ et $u(t)$ sont corrélés, mais on pourra utiliser comme signal opératoire n'importe quelle excitation indépendante $v(t)$ introduite dans la boucle (excitation sur la consigne par exemple).

2-2 AVANTAGES ET INCONVENIENTS.

On pourrait penser, à la lumière des démonstrations précédentes, que l'identification par corrélation n'est envisageable que sous les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité des signaux. Par ailleurs, l'expérience (et le calcul théorique) montrant que les fonctions de corrélation expérimentales R_{uu} et R_{uY} sont extrêmement imprécises quand le temps d'intégration n'est pas très grand, on pourrait penser que, même en l'absence de bruit la relation:

$$R_{uY}(\tau) = h(\tau) * R_{uu}(\tau)$$

pourrait n'être vérifiée qu'avec une très mauvaise approximation.

On montre [5] qu'il n'en est rien et que, même en l'absence de toute considération de stationnarité et d'ergodicité, cette relation est vérifiée exactement (en l'absence de bruit) à condition que R_{uY} et R_{uu} soient calculées par des expressions cohérentes, c'est à dire calculer les fonctions de corrélation R_{uY} et R_{uu} avec les mêmes bornes d'intégration (à partir d'une même série de mesures).

Par ailleurs, on montre [6] que la relation précédente (2-4), pour une durée finie d'observation T , n'est autre que l'équation de Fredholm de première espèce, solution de l'équation de convolution donnant la réponse impulsionnelle optimale au sens d'une erreur quadratique moyenne minimale.

Le choix du critère quadratique présente l'avantage de conduire à un résultat simple et de permettre d'estimer assez facilement la répercussion des perturbations sur l'identification.

Lorsque le signal d'excitation $u(t)$ a un spectre très étendu (bruit blanc) par rapport à la bande passante du système, l'intercorrélation fournit directement, à un facteur près, la réponse impulsionnelle du système [7].

$$C_{uY}(\tau) = h(\tau) \cdot \Phi_{uu}(0)$$

il n'est donc pas nécessaire de réaliser une déconvolution.

Une première difficulté consiste à disposer d'un générateur de signaux test possédant les caractéristiques désirées ; surtout lorsqu'on travaille à des fréquences très basses ce qui est souvent le cas dans les systèmes industriels.

Lors de la mise en oeuvre pratique de la méthode de corrélation, on ne dispose des fonctions $u(t)$ et $y(t)$ que pendant une durée limitée de temps ce qui entraîne les conséquences suivantes [6]:

a - l'intercorrélation C_{ub}^T pendant ce temps fini n'est pas nulle , même si les deux signaux $u(t)$ et $b(t)$ ne sont pas corrélés . Il y a alors une répercussion du bruit $b(t)$ sur l'identification et on ne peut l'évaluer que dans un sens probabilistique.

b - la fonction C_{uu}^T risque de devenir une grossière approximation de la fonction d'autocorrélation C_{uu} . Si on veut en tenir compte il faut évaluer C_{uu}^T et un calcul de déconvolution doit être réalisé.

Ainsi le temps d'identification, fonction des caractéristiques du système et de la précision désirée, est en général très élevé.

D'autre part, cette méthode d'identification par corrélation avec une excitation aléatoire n'est pas facile à employer à cause de l'important volume de calcul qu'elle nécessite. Cependant sa faible sensibilité au bruit permet d'utiliser des signaux test de très bas niveau, ce qui rend acceptable l'hypothèse de linéarité et permet d'employer la méthode sur des systèmes industriels pour lesquels la non-perturbation du fonctionnement normal est souvent une condition impérative.

2-3 CARACTERISTIQUES OPTIMALES DU SIGNAL TEST.

En partant de l'étude critique qu'on vient de faire on peut constater que les inconvénients de la méthode sont essentiellement fonction des caractéristiques du signal test. En particulier ceci explique pourquoi l'identification par corrélation avec un signal test aléatoire est pratiquement abandonnée.

Parmi les caractéristiques optimales désirées pour le signal test on peut citer:

- a - Le signal test, $u(t)$, doit avoir un spectre assez étendu (4 à 6 octaves) par rapport à la bande passante du système, excitant ainsi avec la même énergie toutes les fréquences intéressantes du système. L'intercorrélation fournit alors la réponse impulsionnelle sans qu'une déconvolution soit nécessaire.
- b - Le signal $u(t)$ doit être centré. Ainsi l'état moyen du système ne sera pas modifié et le point de fonctionnement n'aura pas d'influence sur l'intercorrélation.
- c - Il doit être déterministe, le signal test peut être généré facilement suivant une loi prédéterminée, et les caractéristiques du signal seront exactement connues et répétitives.
- d- Il doit être binaire. La transmission du signal est réalisée de façon aisée et sans distorsion, et le calcul de corrélation est notablement simplifié.
- e- Il doit être périodique. L'identification en l'absence de bruit est alors exacte pour un temps fini de corrélation.

Toutes ces caractéristiques sont pratiquement remplies par les signaux binaires pseudo-aléatoires.

2-4 SEQUENCES BINAIRES PSEUDO-ALEATOIRES (S.B.P.A).

Si on considère que le caractère aléatoire d'une séquence d'événements est déterminé a priori par les conditions dans lesquelles la séquence est générée, les séquences binaires cycliques ne sont alors certainement pas aléatoires puisqu'elles sont générées suivant des lois déterministes.

Néanmoins, compte tenu de l'allure a posteriori des termes successifs de la séquence, on peut utiliser des tests statistiques qui indiquent la vraisemblance avec laquelle la séquence donnée peut être considérée comme un processus aléatoire. Ce critère a posteriori n'est ni nécessaire ni suffisant pour définir le caractère aléatoire d'une suite d'événements et les séquences vérifiant ces tests sont alors dénommées pseudo-aléatoires.

Ainsi les séquences que nous traiterons ici, bien que de nature déterministe, sont pseudo-aléatoires au sens où elles vérifient les propriétés suivantes:

- a- La valeur moyenne peut être considérée comme nulle.
- b- Le nombre de fois où l'on obtient n événements successifs identiques est égal à la moitié de celui correspondant à $n-1$ événements identiques successifs.
- c- Les événements successifs sont pratiquement non corrélés.

Parmi les quatre types de séquences binaires cycliques connues qui possèdent ces caractéristiques [8], celles que l'on dénomme séquences de longueur maximale présentent l'avantage de pouvoir être générées très simplement à l'aide d'un registre à décalage.

2-4-1 Génération des séquences binaires de longueur maximale (S.B.L.M).

Soit un registre à décalage (fig. 2-2) constitué de n étages (digits) et rétroalimenté à travers une fonction booléenne de ses digits. Ainsi la séquence générée par un tel registre à décalage dépend à la fois de la nature de la fonction $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et de l'état initial des digits. Selon le cas, pour un registre à décalage avec un nombre de digits donné, on peut obtenir soit des séquences de longueur maximale soit des séquences de longueur non maximale.

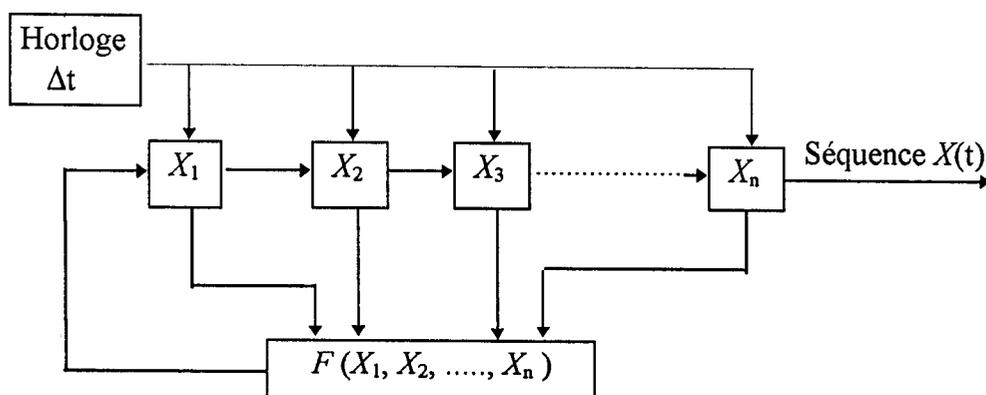
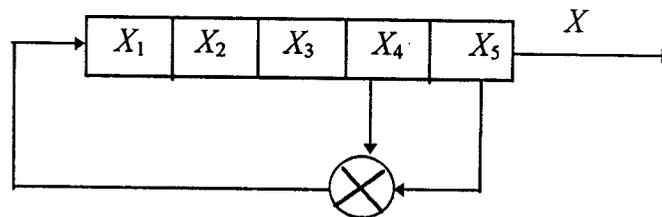


Fig.2-2: Générateur de S.B.P.A

Généralement le générateur le plus connu est celui avec la fonction booléenne $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ correspondant à la disjonction (addition modulo 2). Alors, pour un registre à décalage avec n étages, le nombre total des combinaisons possibles des n digits est égal à 2^n . Cependant, la combinaison où les digits du registre sont tous égaux à zéro entraîne une sortie constamment nulle, la période maximale qu'on peut obtenir est $2^n - 1$.

Ainsi toute séquence générée avec une période égale $L = 2^n - 1$ est appelée **séquence binaire de longueur maximale (S.B.L.M)**.

Comme exemple de génération des S.B.P.A par registre à décalage, prenons l'exemple de la figure ci-dessous (fig.2-3).

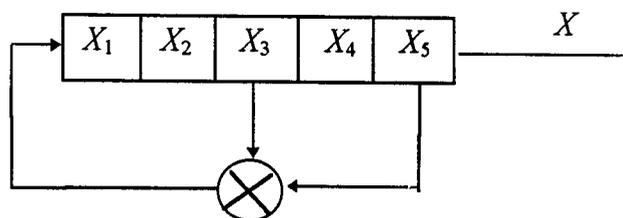


Etat initial du registre: 11111

$X = 111110000100011001010 \ 11111$

$L = 21$ (cas d'une séquence de longueur non maximale)

Fig.2-3-a: Séquence de longueur non maximale.



Etat initial du registre: 11111

$X = 1111100011011101010000100101100 \ 11111$

$L = 2^5 - 1 = 31$ (cas d'une séquence de longueur maximale)

Fig.2-3-b: séquence de longueur maximale.

On constate, pour ce générateur de séquences binaires constitué de cinq digits, et pour le même état initial des digits, que lorsque la disjonction est réalisée sur les bits x_4 et x_5 on obtient une séquence de longueur non maximale (fig. 2-3-a), par contre en faisant la disjonction des bits x_3 et x_5 on obtient une séquence binaire de longueur maximale (fig. 2-3-b).

Pour caractériser les S.B.L.M et les éléments du registre intervenant dans la contre réaction, un « polynôme caractéristique » est déterminé en fonction du nombre total des digits, permettant de préciser les bits de la fonction de disjonction nécessaire à l'obtention d'une S.B.L.M .

Ainsi pour notre exemple (fig. 2-3-b) on peut écrire

$$D^{-1} X_1 = X_3 \oplus X_5 = D^2 X_1 \oplus D^4 X_1$$

où : D est l'opérateur retard et \oplus l'addition modulo 2

comme $D^{-1}(DX_1) = D(D^{-1}X_1) = D^0 X_1 = X_1$

on aura $D^0 X_1 = D^3 X_1 \oplus D^5 X_1$

d'ou' finalement $(D^5 \oplus D^3 \oplus D^0) X_1 = 0$ (2-5)

$D^5 \oplus D^3 \oplus D^0$ est le polynôme caractéristique du générateur qui définit complètement la séquence de notre exemple: les exposants de ce polynôme indiquent le numéro d'ordre des digits intervenant dans la disjonction de contre réaction.

Il faut signaler qu'on peut obtenir plusieurs séquences de longueur maximale d'un seul générateur, on montre [8] que la condition nécessaire et suffisante pour que la séquence soit de longueur maximale est que son polynôme caractéristique soit irréductible et primitif:

- **Irréductible:** ne doit pas comprendre de facteurs (modulo 2) ce qui, en pratique, empêche la séquence de se reproduire avant que $2^n - 1$ états soient réalisés.
- **Primitif:** ne doit pas être un facteur de $(D^r \oplus D^0)$, quel que soit r inférieur à $2^n - 1$. Si la période ($2^n - 1$) est un nombre premier, la condition nécessaire et suffisante se réduit à l'irréductibilité du polynôme.

La recherche du polynôme irréductible et primitif nécessaire parmi plusieurs possibles combinaisons de polynômes serait un travail fastidieux, heureusement, des tables de tels polynômes existent dans la littérature [8], [9], [10].

On rencontre des tables de ces polynômes sous la forme définie ci-dessus, (équation 2-5) et des tables où le polynôme caractéristique est donné sous une notation de nombres octaux [3].

Nous donnons, à titre d'exemple, le tableau ci-dessous indiquant les polynômes caractéristiques jusqu'au degré 10.

le nombre de digits	polynôme caractéristique
2	$D^2 \oplus D^1 \oplus D^0$
3	$D^3 \oplus D^2 \oplus D^0$
4	$D^4 \oplus D^3 \oplus D^0$
5	$D^5 \oplus D^3 \oplus D^0$
6	$D^6 \oplus D^5 \oplus D^0$
7	$D^7 \oplus D^6 \oplus D^0$ et $D^7 \oplus D^4 \oplus D^0$
8	$D^8 \oplus D^4 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus D^0$
9	$D^9 \oplus D^5 \oplus D^0$
10	$D^{10} \oplus D^7 \oplus D^0$

2-4-2 Propriétés des séquences binaires de longueur maximale.

Nous nous limitons ici aux propriétés les plus intéressantes du point de vue de l'application des S.B.L.M à l'identification des systèmes [8].

- Pour un polynôme caractéristique donné du registre à décalage, soit (par exemple)

$$(D^0 + D^k + D^n)X = 0$$

on a $a_0(t) = a_k(t) \oplus a_n(t)$ (2-6)

où $a_i(t)$ représente le contenu du $i^{\text{ème}}$ étage après t décalages.

- Le contenu de chaque étage du registre satisfait le polynôme caractéristique, ainsi le contenu de l'étage numéro (r) après (t) décalage sera

$$a_r(t) = a_r(t-k) \oplus a_r(t-n) \quad (2-7)$$

tel que $a_r(-t)$ correspond à l'état précédent de l'étage (r) avant (t) décalages.

Aussi le contenu de l'étage (j) avant (k) décalages est égal au contenu actuel de l'étage ($j+k$)

$$a_j(-k) = a_{j+k}(0) \quad (2-8)$$

- Pour chaque S.B.L.M obtenue d'un registre à décalage, il existe une séquence inverse. La séquence inverse c'est la même, mais lue en sens inverse.

Si la disjonction est réalisée pour la séquence originelle sur les digits n, m, k, \dots etc. La disjonction sur les digits $n, (n-m), (n-k), \dots$ etc, engendre la séquence inverse. Ainsi pour notre exemple (fig.2-3-b) la séquence inverse s'obtient en réalisant la disjonction sur les digits (5) et (2).

- Dans une S.B.L.M le nombre des états logiques 1 dépasse le nombre des états logiques 0 par un.
- La disjonction (addition modulo 2) d'une S.B.L.M avec la même version de celle-ci retardée donne à son tour une nouvelle version retardée de la même séquence, soit

$$X_i \oplus X_j = X_k \quad (2-9)$$

Ce qui permet d'obtenir en temps réel n'importe quelle réalisation retardée de la séquence [8], évitant ainsi de garder en mémoire toute la séquence.

• Si on appelle une exécution chaque apparition successive de l'un des états logiques de la S.B.L.M, On peut remarquer qu'il y a $2^{(n-1)}$ ou $(L+1)/2$ exécutions dans une S.B.L.M tel que:

- La moitié des réalisations ont comme longueur 1 seul digit.
- Le un-quart des réalisations ont comme longueur 2 digits.
- Le un-huitième des réalisations ont comme longueur 3 digits,... etc.
- Il y a une égalité entre le nombre de réalisations, pour une longueur donnée, pour chaque état logique; sauf, qu'il existe une exécution de n états logique (1), et pas d'exécution de n états logiques (0). Cependant il y a une exécution de (n-1) états logiques (0) et pas une réelle exécution de (n-1) états logiques (1), soit pour notre exemple (Fig.2-3-b)

8 exécutions de longueur 1 digit.

4 exécutions de longueur 2 digits

2 exécutions de longueur 3 digits

1 exécutions de longueur 4 digits

1 exécutions de longueur 5 digits

Cette dernière propriété constitue un élément caractéristique très important des S.B.P.A pour l'identification des systèmes: pour bien identifier le gain statique du procédé, il faut que la durée d'au moins une des exécutions soit supérieure au temps de montée du procédé [2].

Afin que les propriétés de la séquence s'approchent au mieux de celles d'un bruit blanc, on peut utiliser les niveaux binaires +1 et -1 respectivement à la place de 1 et 0.

Il faut noter qu'avec les états binaires +1 et -1 la fonction disjonction (addition modulo 2) est équivalente au produit changé de signe, comme indiqué aux tableaux ci-dessous, ce qui simplifie la génération par calculateur numérique de ces séquences, et on obtient:

$$X_i \oplus X_j = X_k \Leftrightarrow -X_i \cdot X_j = X_k \tag{2-10}$$

$X_i \backslash X_j$	0	1
0	0	1
1	1	0

$X_i \backslash X_j$	-1	+1
-1	-1	+1
+1	+1	-1

$$X_i \oplus X_j = X_k$$

$$-X_i \cdot X_j = X_k$$

• **Valeur moyenne.**

La valeur moyenne de la S.B.L.M est exprimée par:

$$E[X] = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X_i = \frac{1}{L} \tag{2-11}$$

Si L est choisi suffisamment grand, la valeur moyenne peut être considéré comme nulle. C'est à dire la séquence est centrée.

• **Fonction d'autocorrélation**

La fonction d'autocorrélation de la séquence, compte tenu de la relation(2-10) s'exprime par

$$C_{XX}(k) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X_i X_{i-k} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (-X_j) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ -\frac{1}{L} & \text{pour } k \neq 0 \end{cases} \tag{2-12}$$

Comme les procédés étudiés sont en général continus, la séquence numérique est appliquée à un bloqueur d'ordre zéro à la sortie duquel on obtient un signal continu, dont l'allure est représentée sur la figure ci-dessous.

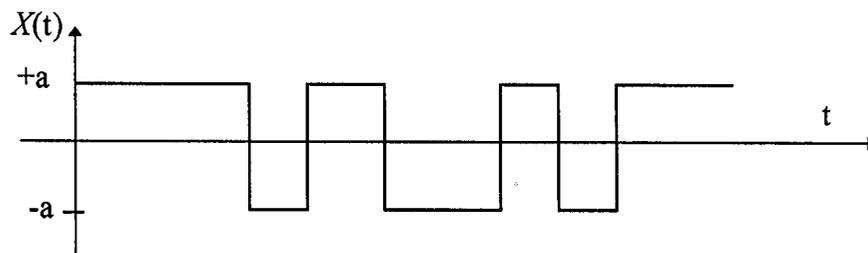


Fig. 2-4: S.B.P.A à la sortie d'un bloqueur d'ordre zéro.

La valeur moyenne du signal ainsi obtenu est:

$$E[X] = \frac{1}{L\Delta t} \int_0^{L\Delta t} X(t) dt = \frac{a}{L} \quad (2-13)$$

où Δt est la période de l'horloge qui commande le registre générateur de la séquence, et $\pm a$ sont les valeurs analogiques correspondant aux niveaux ± 1 .

La fonction d'autocorrélation devient

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{L\Delta t} \int_0^{L\Delta t} X(t)X(t-\tau)dt \quad (2-14)$$

• Si $|\tau| \geq \Delta t$, $X(t)$ et $X(t-\tau)$ correspondent à deux instants d'échantillonnage différents; on obtient [1], [8], [9]:

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{L\Delta t} \int_0^{L\Delta t} -a X(t) dt = \frac{-a^2}{L} \quad (2-15)$$

• Si $|\tau| < \Delta t$, en utilisant le fait que pour une séquence de longueur L il y a $(L-1)/2$ changements (passage de $+a$ à $-a$ ou le contraire) et $(L-1)/2$ coïncidences (X reste égale à $+a$ ou $-a$) on trouve [1], [8], [9]:

$$C_{xx}(\tau) = a^2 \left(1 - \frac{L+1}{L} \frac{|\tau|}{\Delta t} \right) \quad (2-16)$$

L'allure de la courbe se trouve comme indiqué sur la figure (Fig.2-5).

Il est à noter que l'idéal est d'obtenir une fonction d'autocorrélation avec:

$$\begin{cases} C_{xx}(iL) = a^2 & \text{pour } i \text{ entier} \\ \text{et} \\ C_{xx}(\tau) = 0 & \forall \tau \neq iL \end{cases}$$

et une valeur moyenne $E[X]$ nulle.

Malheureusement, si on peut annuler une de ces valeurs en ajoutant une certaine valeur continue à la séquence binaire, on ne peut pas annuler les deux simultanément, puisque l'intégrale de $C_{XX}(\tau)$ doit être proportionnelle au carré de la valeur moyenne de la séquence.

• *Densité spectrale énergétique.*

D'après la relation de Wiener-Khitchine, la densité spectrale énergétique d'une fonction $x(t)$ est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

$$\Phi_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2-17)$$

Comme $C_{XX}(\tau)$ est une fonction paire et périodique de période $T=L\Delta t$, l'équation précédente peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \Phi_{XX}(\omega) &= 2 \int_0^T C_{XX}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \\ &= 2 \int_0^{\Delta t} a^2 \left[1 - \frac{\tau(L+1)}{L\Delta t} \right] \cos(\omega\tau) d\tau + 2 \int_{\Delta t}^{L\Delta t} -\frac{a^2}{L} \cos(\omega\tau) d\tau \\ &= \left\{ -\frac{2a^2}{L\omega} \sin(\omega\Delta t) - \frac{2a^2(L+1)}{\omega^2 L\Delta t} [\cos(\omega\Delta t) - 1] - \frac{2a^2}{L\omega} \sin(\omega L\Delta t) + \frac{2a^2}{L\omega} \sin(\omega\Delta t) \right\} \end{aligned}$$

finalement, on obtient

$$\Phi_{XX}(\omega) = \left\{ \frac{2a^2(L+1)}{\omega^2 L\Delta t} [2\sin^2(\omega\Delta t/2)] - \frac{2a^2}{L\omega} \sin(\omega L\Delta t) \right\} \quad (2-18)$$

La fréquence fondamentale étant celle des impulsions de l'horloge est $2\pi/L\Delta t$. Du moment que la séquence de base change de niveaux à des intervalles discrets de temps, les fréquences dans la densité spectrale doivent être aussi discrètes. Le spectre est alors discret avec séparation harmonique de $\omega_0=2\pi/L\Delta t$ rad/sec.

Le second terme de l'équation ci-dessus est toujours nul et l'équation peut être réécrite sous la forme:

$$\Phi_{XX}(\omega) = \frac{a^2(L+1)\Delta t}{L} \sum_{r=1}^L \left[\frac{\sin(r\omega_0\Delta t/2)}{(r\omega_0\Delta t/2)} \right]^2 = \frac{a^2(L+1)\Delta t}{L} \sum_{r=1}^L \left[\frac{\sin(r\pi/L)}{(r\pi/L)} \right]^2 \quad (2-19)$$

Notons que pour $r \ll L$; $\frac{\sin(r\pi/L)}{(r\pi/L)} \approx 1$.

et la densité spectrale de puissance a une valeur de $\frac{a^2(L+1)\Delta t}{L}$ aux basses fréquences, et elle décroît de 3 db pour la fréquence donnée par $\left[\frac{\sin(r\pi/L)}{(r\pi/L)} \right]^2 \cong 0.7$, c'est à dire approximativement $r = \frac{L}{3}$ ou $\nu = \frac{1}{3\Delta t}$.

Ainsi la séquence S.B.L.M peut être assimilée à « un bruit blanc » pour des fréquences allant jusqu'à $1/3\Delta t$. La bande de fréquence effective couvrée par une S.B.L.M. est donc de $\nu=1/L\Delta t$ à $1/3\Delta t$.

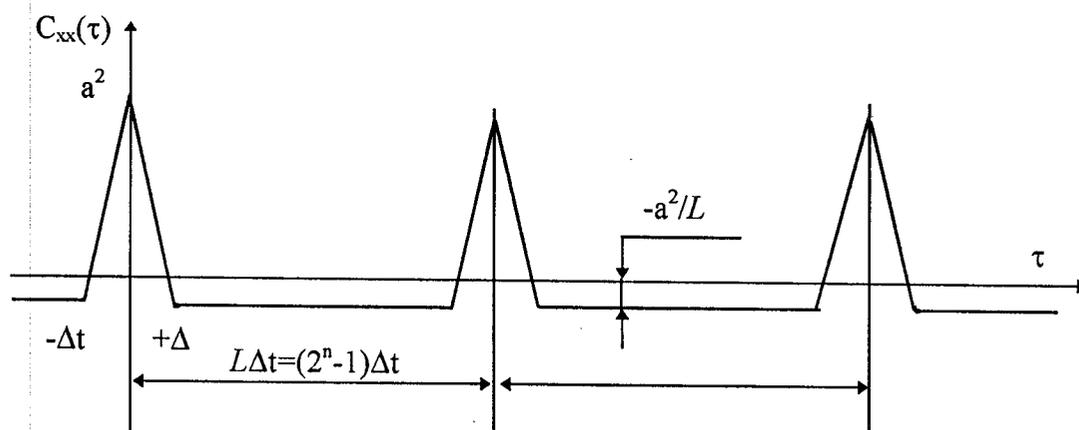


Fig.2-5: Fonction d'autocorrélation d'une S.B.L.M

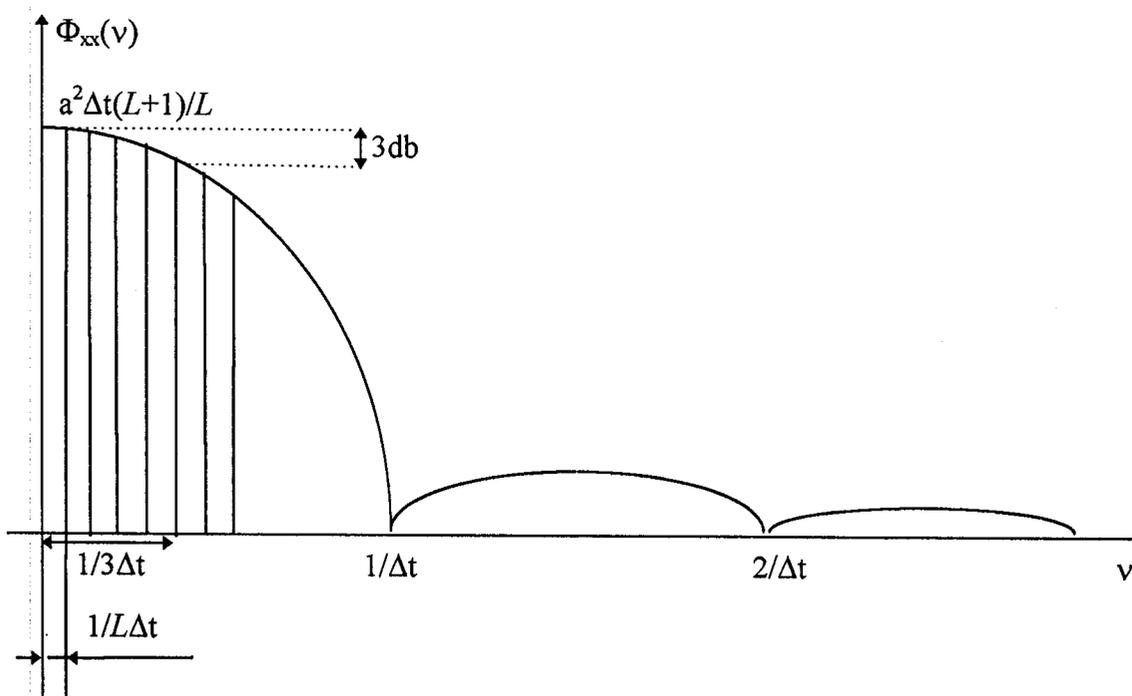


Fig.2-6: Densité spectrale énergétique d'une S.B.L.M

CHAPITRE 3

**IDENTIFICATION PAR CORRELATION
AU MOYEN DES SEQUENCES BINAIRES
DE LONGUEUR MAXIMALE**

3- IDENTIFICATION PAR CORRELATION AU MOYEN DES SEQUENCES BINAIRES PSEUDO-ALEATOIRES DE LONGUEUR MAXIMALE.

3-1 PRINCIPE.

Soit le système linéaire et invariant de la figure (3-1), où $X(t)$ représente l'entrée du système, $Y^*(t)$ la sortie correspondant à la réponse du système au signal d'entrée $X(t)$, $b(t)$ un bruit additif en sortie représentant la partie aléatoire résultante de tous les phénomènes non expliqués et du bruit de mesure, et $Y(t)$ la sortie mesurée.

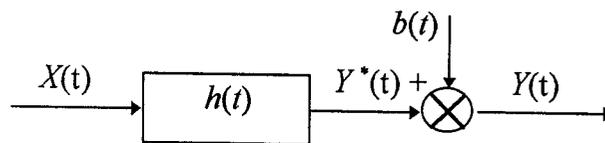


Fig. 3-1: système avec tous les bruits ramenés à la sortie.

On a montré (chapitre 2) qu'en utilisant comme signal d'entrée une S.B.L.M on a:

$$C_{YX}(\tau) = \int_0^{\infty} h(u) C_{XX}(u - \tau) du + C_{bX}(\tau) \quad (3-1)$$

en absence de bruit cette équation prend la forme

$$C_{YX}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) X(t - \tau) dt = \int_0^{\infty} h(u) C_{XX}(u - \tau) du \quad (3-2)$$

avec $\tau \geq 0$, (principe de causalité).

C'est l'équation de wiener-hopf, qu'il faut le rappeler, représente la solution de l'équation de convolution, donnant la valeur optimale de la réponse impulsionnelle estimée au sens de l'erreur quadratique moyenne [3], [9].

L'équation (3-2) permet, si l'on connaît exactement la fonction d'autocorrélation $C_{XX}(t)$, du fait que $X(t)$ est périodique, d'obtenir la réponse impulsionnelle $h(t)$ à partir de la mesure, en l'absence de bruit, de la fonction d'intercorrélation $C_{YX}(\tau)$.

L'identification de la réponse impulsionnelle par intercorrélation avec les S.B.L.M, outre l'intérêt de la périodicité du signal d'excitation, permet d'obtenir directement (sous certaines conditions) la réponse impulsionnelle à partir de la mesure de la fonction d'intercorrélation.

En effet sous la condition d'utiliser des séquences de longueur assez grande ($a/L \approx 0$) et de choisir Δt assez petit pour que $h(t)$ varie peu dans l'intervalle ($t-\Delta t < t < t+\Delta t$), on peut assimiler la fonction d'autocorrélation de la S.B.L.M à une série d'impulsions.

$$C_{XX}(\tau) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^2 \Delta t \frac{L+1}{L} \delta(\tau - nL\Delta t)$$

et en portant cette expression dans l'équation (3-2) il vient:

$$mh(\tau) + h(\tau + L\Delta t) + h(\tau + 2L\Delta t) + \dots = \frac{1}{a^2 \Delta t \frac{L+1}{L}} \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) X(t-\tau) dt$$

où m est un facteur qui tient compte de la distribution symétrique autour de l'origine du pic triangulaire d'autocorrélation [9]; m est égal à 1 pour $\tau \geq \Delta t$ et à 1/2 pour $\tau = 0$.

Si le système est asymptotiquement stable, c'est à dire $h(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, on peut choisir une période $L\Delta t$ assez grande, telle que $h(t) \approx 0$ pour $t > L\Delta t$ et on obtient ainsi:

$$h(\tau) = \frac{1}{ma^2 \Delta t \frac{L+1}{L}} \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) X(t-\tau) dt. \quad (3-3)$$

avec $0 \leq \tau < L\Delta t$.

L'identification de la réponse impulsionnelle se trouve donc ramenée à l'évaluation de la fonction d'intercorrélation.

Toutefois, dans la pratique, on a toujours une valeur de Δt non nulle et une valeur $L\Delta t$ finie d'une part, d'autre part le bruit et le traitement de l'information lors des calculs d'intercorrélation, sont souvent une source d'erreurs d'identification que nous étudierons par la suite en fonction des propriétés du système et du signal d'excitation.

3-2 IDENTIFICATION DE LA SEQUENCE DE PONDERATION.

Pour un système stable discrétisé, le vecteur \underline{h}^* a une dimension finie:

$$Y_K = \sum_{i=1}^N h_i^* \cdot X_{K-i}$$

avec $h_i^* = 0$ pour $i > N$.

Ainsi l'identification de ce modèle \underline{h}^* comporte l'estimation des N paramètres h_i^* . Les paramètres h_i^* qui rendent minimum l'erreur quadratique moyenne (entre les réponses du système et du modèle) sont définis par [5], [6]:

$$\sum_{j=1}^L Y_j \cdot X_{j-K} = \sum_{i=1}^N h_i^* \left(\sum_{j=1}^L X_j \cdot X_{j-K+i} \right)$$

qui n'est autre que la version numérique de l'équation de wiener-Hopf.

Si le signal d'excitation du système, $X(t)$ est une séquence binaire pseudo-aléatoire, avec $\Delta t = T_e$ et $L \geq N$, on obtient:

$$h_k^* = \frac{1}{\alpha^2(L+1)} \sum_{j=1}^L Y_j \cdot X_{j-k}$$

qui ne diffère de l'équation (3-3) que par le facteur m qui n'apparaît pas ici.

Il faut noter que les modèles $h(t)$ et \underline{h}^* peuvent être obtenus à partir d'un même algorithme en introduisant seulement un bloqueur d'ordre zéro et un échantillonnage (synchrone avec l'horloge Δt) sur la sortie $Y(t)$ du système avant de réaliser l'intercorrélation pour obtenir \underline{h}^* .

3-3 INFLUENCE DE LA LARGEUR DE SPECTRE DE LA SEQUENCE SUR L'IDENTIFICATION DE LA REponse IMPULSIONNELLE.

A cause de la nature périodique de la séquence S.B.L.M, la fonction d'autocorrélation de celle-ci est exactement connue; Pour un système de réponse impulsionnelle $h(t)$ donnée, on peut donc calculer l'intégrale de convolution. On obtient ainsi la fonction d'intercorrélation $C_{YX}(\tau)$ et on va vérifier jusqu'à quel point le pic triangulaire d'autocorrélation de la séquence peut être assimilé à une impulsion de Dirac.

En négligeant la valeur non nulle entre pics, on peut décomposer le pic triangulaire d'autocorrélation [8], selon le principe de superposition, en trois fonctions rampe (Fig.3-2), dont la somme est égale à la fonction d'autocorrélation de la séquence.

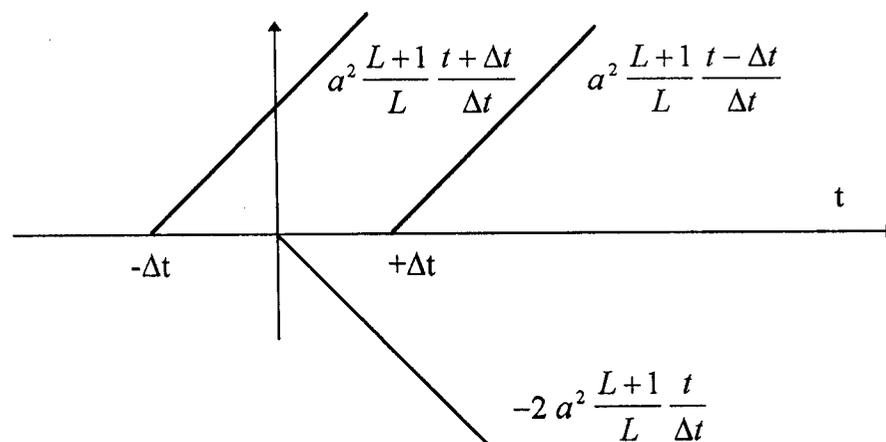


Fig.3-2: Décomposition du pic triangulaire d'autocorrélation.

Compte tenu de l'analogie entre l'équation de convolution et celle de Wiener-hopf, on peut écrire:

$$C_{YX}(\tau) = a^2 \frac{L+1}{L} \frac{1}{\Delta t} [R(\tau + \Delta t) - 2R(\tau) + R(\tau - \Delta t)]$$

$R(t)$ étant la réponse du système à la fonction rampe unitaire.

En développant $R(t)$ en série de Taylor, on obtient:

$$R(\tau + \Delta t) = R(\tau) + \Delta t R'(\tau) + (\Delta t^2/2!) R''(\tau) + (\Delta t^3/3!) R'''(\tau) + \dots$$

$$R(\tau - \Delta t) = R(\tau) - \Delta t R'(\tau) + (\Delta t^2/2!) R''(\tau) - (\Delta t^3/3!) R'''(\tau) + \dots$$

puisque $R''(t) = h(t)$, on aura:

$$C_{RX}(\tau) = \alpha^2 \Delta t (L+1/L) [h(\tau) + (\Delta t^2/12) h''(\tau) + (\Delta t^4/360) h^{(4)}(\tau) + \dots] \quad (3-4)$$

avec $\tau \geq \Delta t$.

pour $\tau = 0$, on a $R(-\Delta t) = 0$, $R(0) = 0$ et $R'(0) = 0$, on en déduit:

$$C_{YX}(0) = \frac{\alpha^2 L+1}{\Delta t L} R(\Delta t) = \frac{\alpha^2}{2} \Delta t \frac{L+1}{L} \left[h(0) + \frac{\Delta t}{3} h'(0) + \frac{\Delta t^2}{12} h''(0) + \dots \right] \quad (3-5)$$

Compte tenu des équations (3-3), (3-4) et (3-5) l'erreur d'identification de la réponse impulsionnelle relative à la valeur Δt de la séquence (spectre limité), possède l'expression suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{\Delta t}(\tau) = \frac{\Delta t^2}{12} h''(\tau) + \frac{\Delta t^4}{360} h^{(4)}(\tau) + \dots \quad \text{avec } \tau \geq \Delta t \\ \mathcal{E}_{\Delta t}(0) = \frac{\Delta t}{3} h'(0) + \frac{\Delta t^2}{12} h^{(2)}(0) + \dots \quad \text{avec } \tau = 0 \end{array} \right. \quad (3-6)$$

On remarque que pour ($\tau \geq \Delta t$) les termes d'erreurs ne font intervenir que les dérivées de la réponse impulsionnelle supérieures au second ordre. Ceci provient du fait que l'assimilation de la fonction d'autocorrélation de la séquence à une impulsion n'est valable que lorsque $h(t)$ est linéaire dans chaque intervalle $\tau - \Delta t < t < \tau + \Delta t$.

A l'origine, pour $\tau = 0$, le premier terme d'erreur fait apparaître la dérivée première, $h'(0)$, ce qui provient de la contrainte: $h(t) = 0$ pour $t < 0$.

Les équations (3-6) peuvent servir à estimer l'erreur $\varepsilon_{\Delta t}$ ou à choisir Δt , après une première estimation de $h(t)$, de façon que ces erreurs soient négligeables. On pourrait même corriger les erreurs de façon itérative, mais en présence de bruit cela pose bien de problèmes à cause de la difficulté de réaliser une estimation valable des dérivées.

D'autre part la valeur de Δt peut être choisi (a priori) de façon plus simple en considérant que la séquence se comporte approximativement comme un bruit blanc si on se limite aux fréquences inférieures à $1/3\Delta t$. on obtient alors la condition:

$$1/3\Delta t > \nu_0 \quad (3-7)$$

3-4 COMPOSANTE CONTINUE D'ERREUR D'IDENTIFICATION.

Soit A_0 la valeur constante de la sortie du système correspondant au point de fonctionnement. Alors la corrélation de la séquence avec la sortie du système fait apparaître le terme:

$$\frac{1}{T} \int_0^T A_0 X(t) dt = A_0 \frac{a}{L}$$

D'autre part, si on tient compte de la valeur entre pics de la fonction d'autocorrélation de la séquence, $-a^2/L$, l'intercorrélation devient

$$C_{YX}(\tau) = a^2 \Delta t \frac{L+1}{L} h(\tau) - \frac{a^2}{L} \int_0^\infty h(t) dt + \frac{a}{L} A_0$$

L'intercorrélation avec des séquences binaires pseudo-aléatoire fournit donc la réponse impulsionnelle désirée plus une composante continue d'erreur.

$$\varepsilon_c = \frac{1}{a^2 \Delta t \frac{L+1}{L}} \left(-\frac{a^2}{L} G + \frac{a}{L} A_0 \right) \quad (3-8)$$

G étant le gain statique du système.

Si on centre la séquence, en ajoutant une composante continue, $-a/L$, à la séquence il suffit de connaître G pour éliminer cette erreur systématique, et si on annule

$$C_{xx}(\Delta t) \text{ telque } \left(X(t) = X(t) - \frac{a}{L}(1 \pm \sqrt{L+1}) \right)$$

il suffit de connaître A_0 pour éliminer cette erreur systématique.

On peut aussi, en utilisant l'hypothèse de départ, $h(t) \approx 0$ pour $t \geq T_0$, s'affranchir de cette erreur continue; en réalisant une translation des ordonnées de $h(t)$ tel que, pour $t \geq T_0$, on obtient $h(t) \approx 0$.

De même, on peut éliminer cette erreur systématique, en utilisant la condition $h(0)=0$, néanmoins, suite aux erreurs assez importantes qui peuvent intervenir sur $h(0)$, on préfère utiliser la procédure précédente.

3-5 REPERCUSSION DES TRANSITOIRES.

En prenant comme origine de temps ($t=0$) l'instant où l'on introduit la séquence dans le système, on peut poser:

$$Y(t) = \int_t^{\infty} h(u)x(t-u)du + \int_0^t h(u)X(t-u)du \quad (3-9)$$

avec:

$x(t)$: signal appliqué au système pour $t < 0$

$X(t)$: séquence binaire appliquée depuis $t=0$.

Le premier terme du second membre de (3-9) peut introduire d'importantes erreurs sur l'identification de la réponse impulsionnelle par intercorrélacion. On évite cette source d'erreur en s'assurant que le signal $x(t)$ reste constant pendant un temps comparable à la durée du régime transitoire du système.

Maintenant si on compare le second terme de (3-9): $\int_0^t h(u)X(t-u)du.$

avec l'équation de convolution on en déduit que pour que l'identification par corrélation soit valable il faut que la séquence binaire soit appliquée sur le système depuis le temps, $t=-\infty$.

Pratiquement il suffit qu'avant de commencer le calcul d'intercorrélation la séquence soit appliquée depuis un temps assez long, par rapport à la durée du régime transitoire. Ainsi plusieurs auteurs, [6], [8] ont préconisés de commencer la corrélation seulement après le passage d'un premier cycle de la séquence.

3-6 RESULTATS DE SIMULATION NUMERIQUE

Dans cette partie nous allons présenter les résultats obtenus, par simulation de la méthode d'identification de la réponse impulsionnelle par corrélation avec des séquences binaires pseudo-aléatoires. Les systèmes simulés sont des systèmes de premier ordre, de deuxième ordre et de troisième ordre, avec et sans retards purs. La simulation numérique a été effectuée sous l'environnement MATLAB, sur un micro-ordinateur IPC 80486 DX2.

Les différents systèmes utilisés ont été simulés à partir de la transformée en Z de leurs fonctions de transfert précédés d'un bloqueur d'ordre zéros.

Les résultats obtenus sont indiqués sur les figures (3-3) à (3-14). Afin de pouvoir comparer avec la réponse impulsionnelle théorique $ht(t)$, dans chaque cas on a représenté la réponse impulsionnelle obtenue par corrélation $hc(t)$, après correction de l'erreur continue (équation 3-8). D'autre part, le calcul d'intercorrélation a été commencé après le passage d'un premier cycle de la séquence dans le système afin de permettre l'établissement du régime permanent. Nous avons donné sur la figure (3-15) l'organigramme du programme de simulation correspondant aux résultats des figures (3-5) et (3-6).

Tous les essais de simulation ont été effectués avec la fréquence d'échantillonnage égale à $10/\Delta t$ de façon à ce que la répercussion de l'échantillonnage sur la corrélation soit négligeable (voir chapitre 4). l'examen des différents résultats obtenus nous a permis d'arriver aux constatations suivantes [33]:

a- Erreur à l'origine.

La première constatation c'est l'erreur à l'origine ($t=0$), qui apparaît pratiquement pour tous les systèmes simulés, et demeure l'erreur la plus importante. Les différents essais réalisés par simulation montrent que cette erreur ne dépend que de la valeur de Δt : sur la figure (3-3), pour $\Delta t/T=1/2$, l'erreur à l'origine est de l'ordre de 30%, alors qu'elle est de l'ordre de 12% pour $\Delta t/T=1/40$.

Pour les systèmes avec retard, Fig.(3-4), Fig.(3-10) et Fig.(3-12), cette erreur disparaît et apparaît une erreur pour $hc(r.\Delta t)$.

b- Influence de la période de la S.B.P.A.

- On remarque que l'écart, entre la réponse impulsionnelle théorique et la réponse impulsionnelle obtenue par corrélation, diminue avec l'augmentation de la fréquence de l'horloge du générateur de la séquence binaire $1/\Delta t$, jusqu'à approximativement une valeur $T_{\max} / 10$, où T_{\max} c'est la constante de temps prédominante qu'on peut s'attendre à identifier. Au-delà de cette valeur l'influence de $1/\Delta t$ devient négligeable: inférieure à 1% pour tous les points de la réponse impulsionnelle.
- Pour les systèmes à retard, on constate que l'identification du retard r s'améliore avec l'augmentation du rapport $r/\Delta t$ et, sa valeur peut être déduite directement avec une précision de $\pm(1/2)\Delta t$.
- Pour tous les systèmes simulés, dès que la période de la séquence $L.\Delta t$ devient inférieure au temps de réponse du système, on remarque que les erreurs prennent de grandes valeurs. En particulier, pour les systèmes à pôles réels, cette période doit être supérieure à quatre fois la constante du temps la plus prédominante.

c- Influence de la durée d'intercorrélation.

Etant donné l'intérêt qu'il y a à diminuer au maximum le temps d'identification, nous avons essayé de réaliser l'intercorrélation pendant une durée inférieure à la période de la séquence. les résultats obtenus (Fig.3-14) par simulation ont montré que dans ces conditions les erreurs d'identification sont trop importantes.

d- Influence du régime transitoire.

Sur la figure (3-13) nous avons représenté les résultats obtenus, en réalisant l'intercorrélation après le passage d'un seul cycle de la S.B.P.A, de trois cycles et le résultat obtenu en réalisant l'intercorrélation dès l'introduction de la séquence dans le système.

On remarque que le résultat est le même pour les deux premiers cas: une bonne concordance entre les réponses impulsionnelles obtenues par corrélation et la réponse impulsionnelle théorique; alors que pour le dernier cas, il y a un écart entre les deux réponses, mais qui demeure assez faible pour pouvoir le négliger.

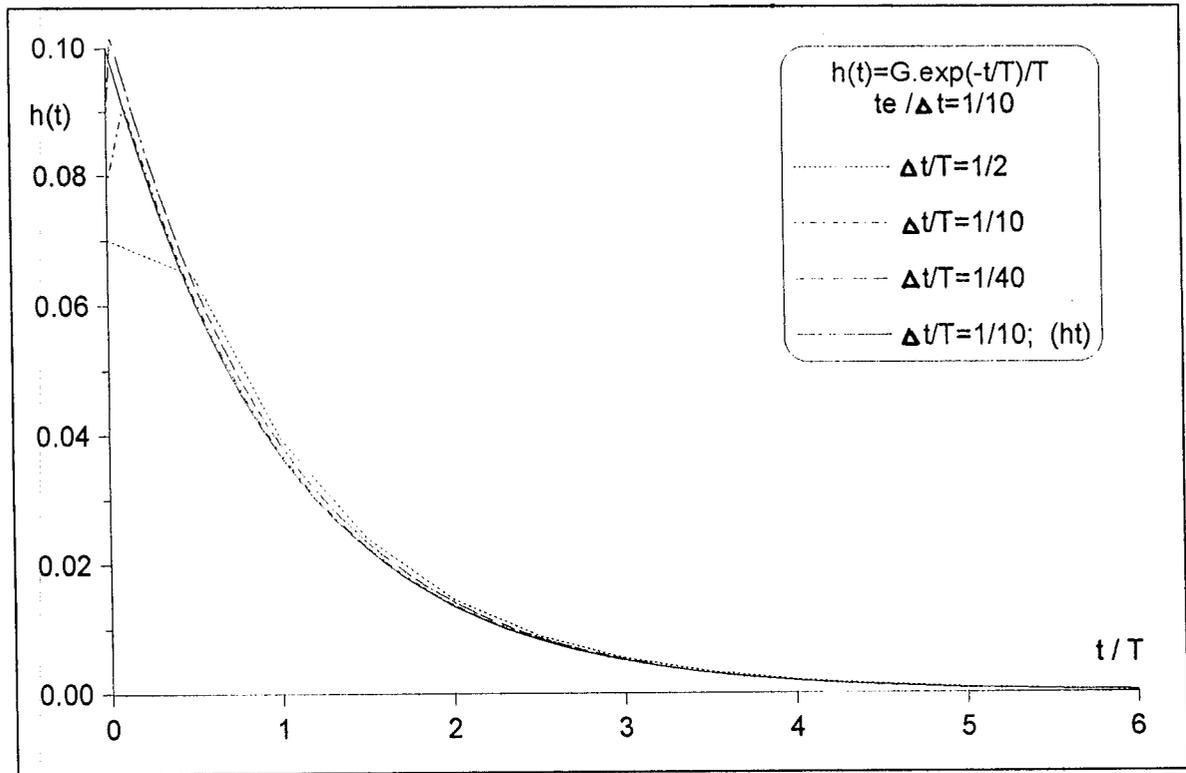


Fig. 3-3: Influence de la période de la séquence $L\Delta t$ (système du 1^{er} ordre)

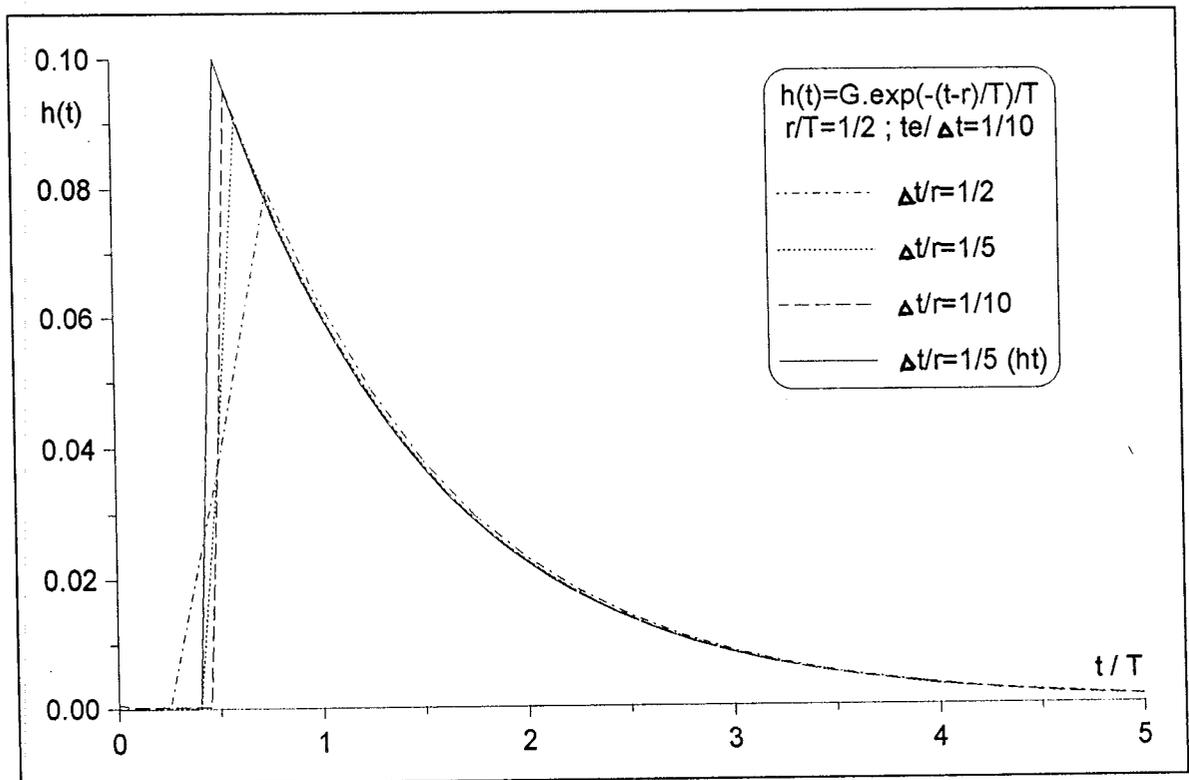


Fig. 3-4: Influence de la période de la séquence $L\Delta t$ (système du 1^{er} ordre avec retard)

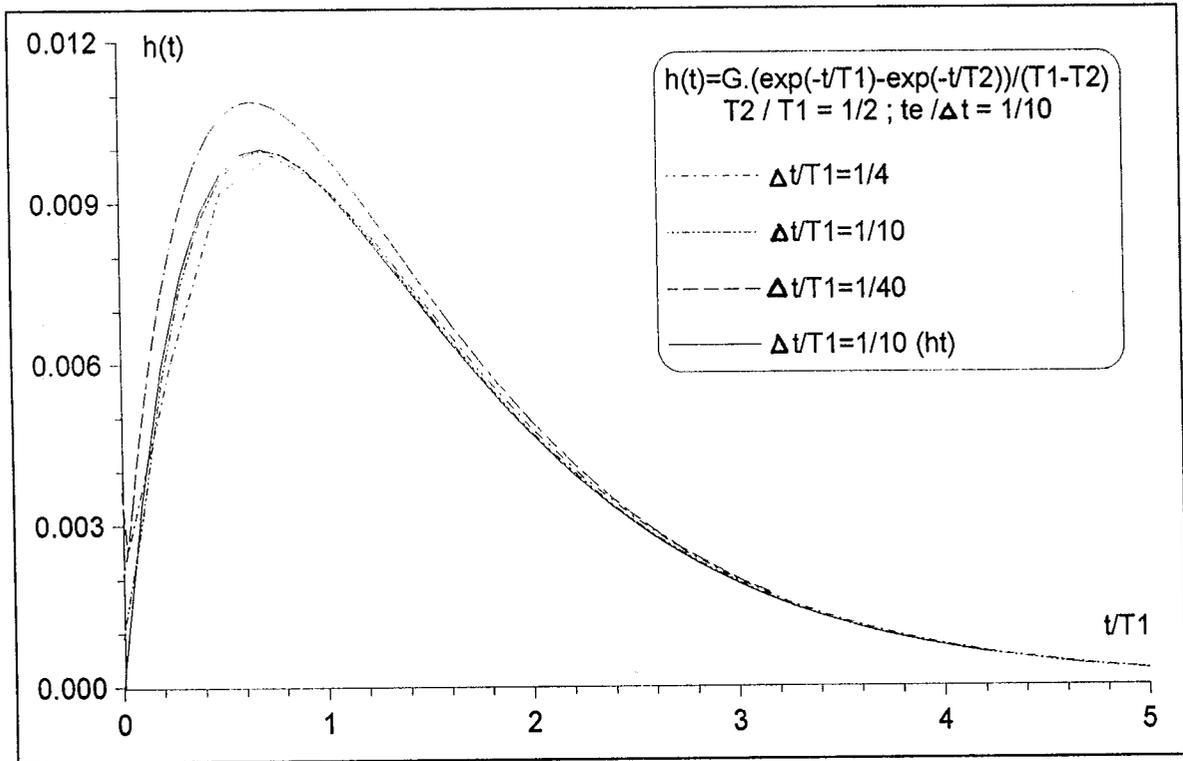


Fig. 3-5: Influence de la période de la séquence $L \cdot \Delta t$ (système du 2^{ème} ordre)

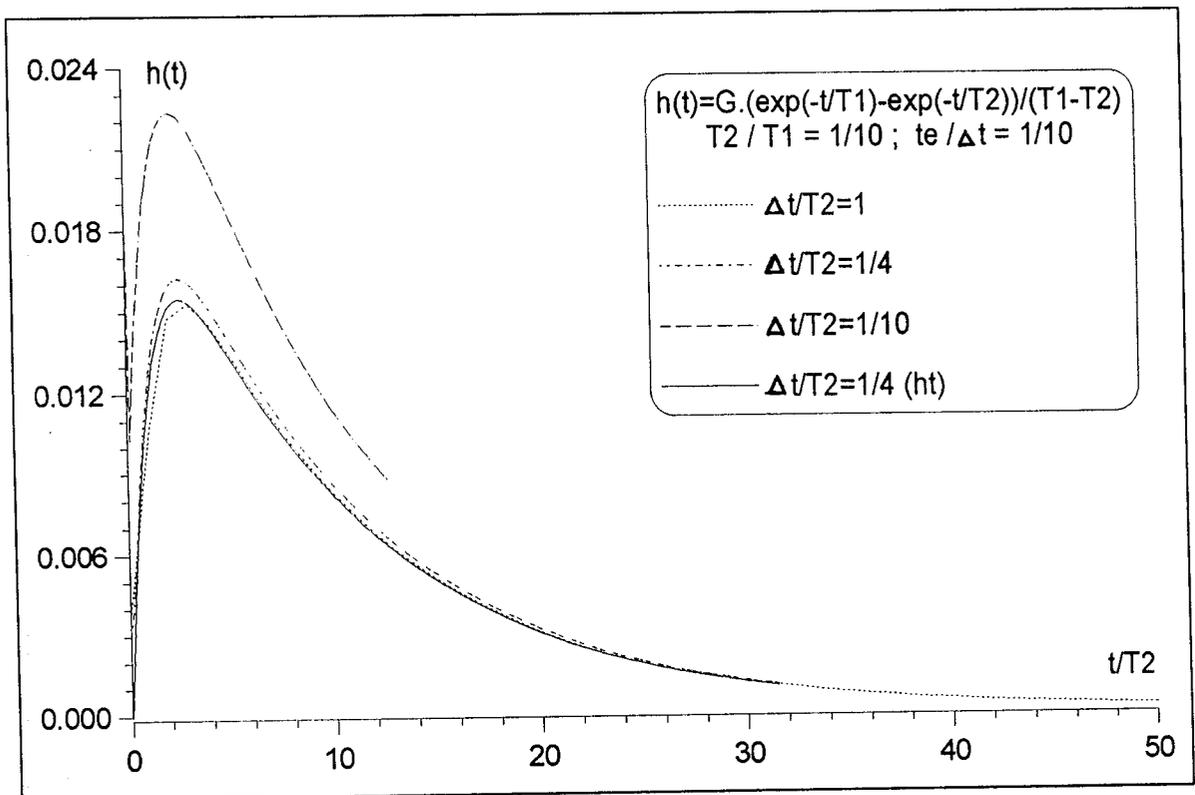


Fig. 3-6: Influence de la période de la séquence $L \cdot \Delta t$ (système du 2^{ème} ordre)

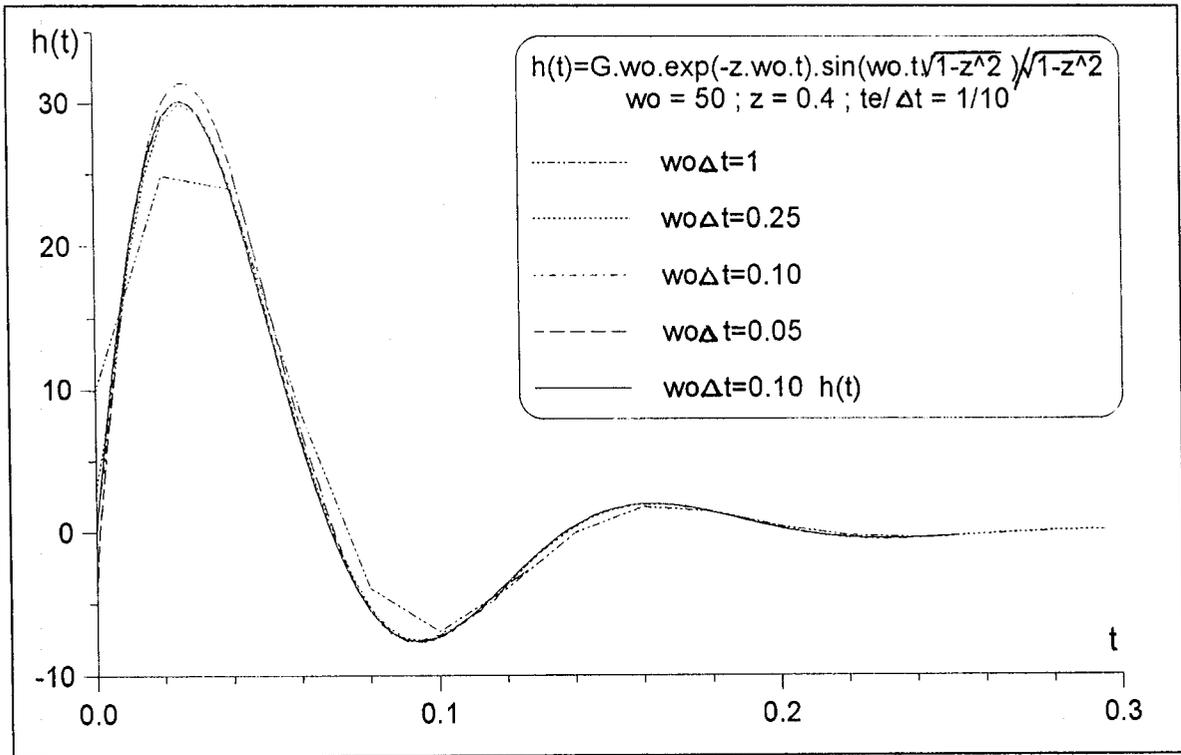


Fig. 3-7: Influence de la période de la séquence $L \cdot \Delta t$ (système du 2^{ème} ordre)

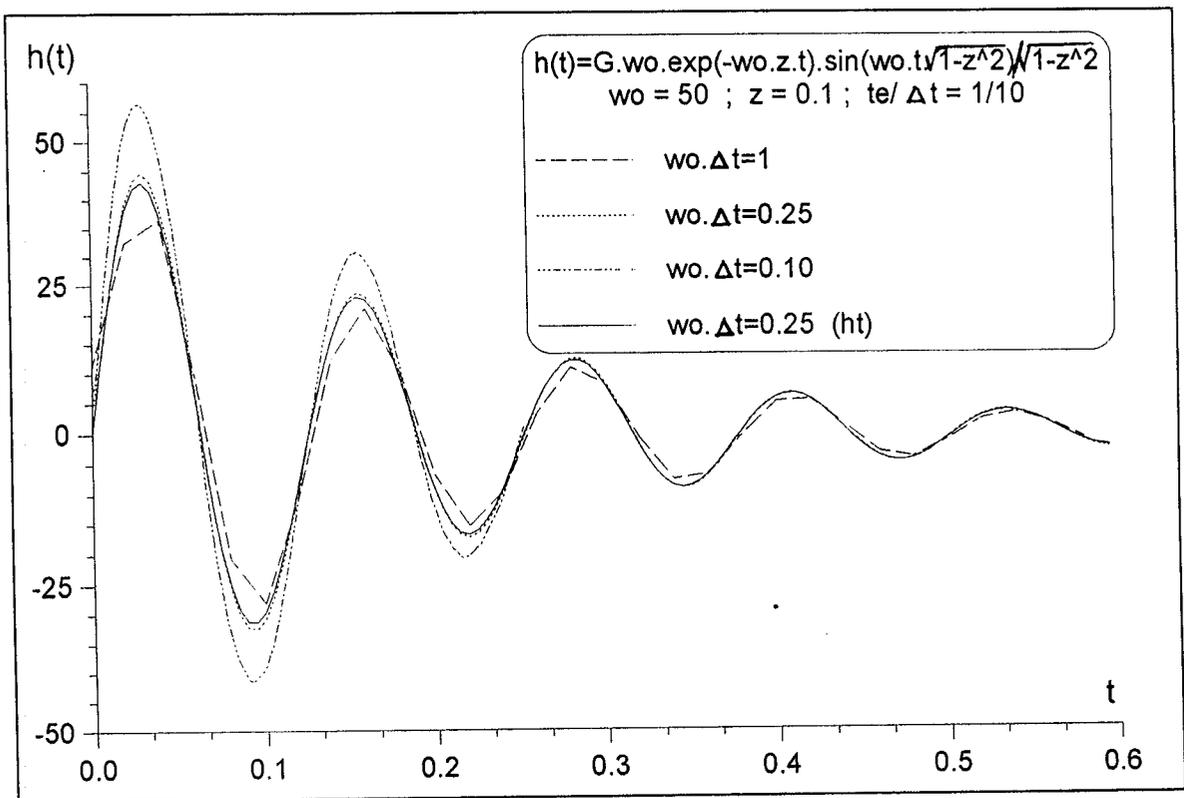


Fig. 3-8: Influence de la période de la séquence $L \cdot \Delta t$ (système du 2^{ème} ordre).

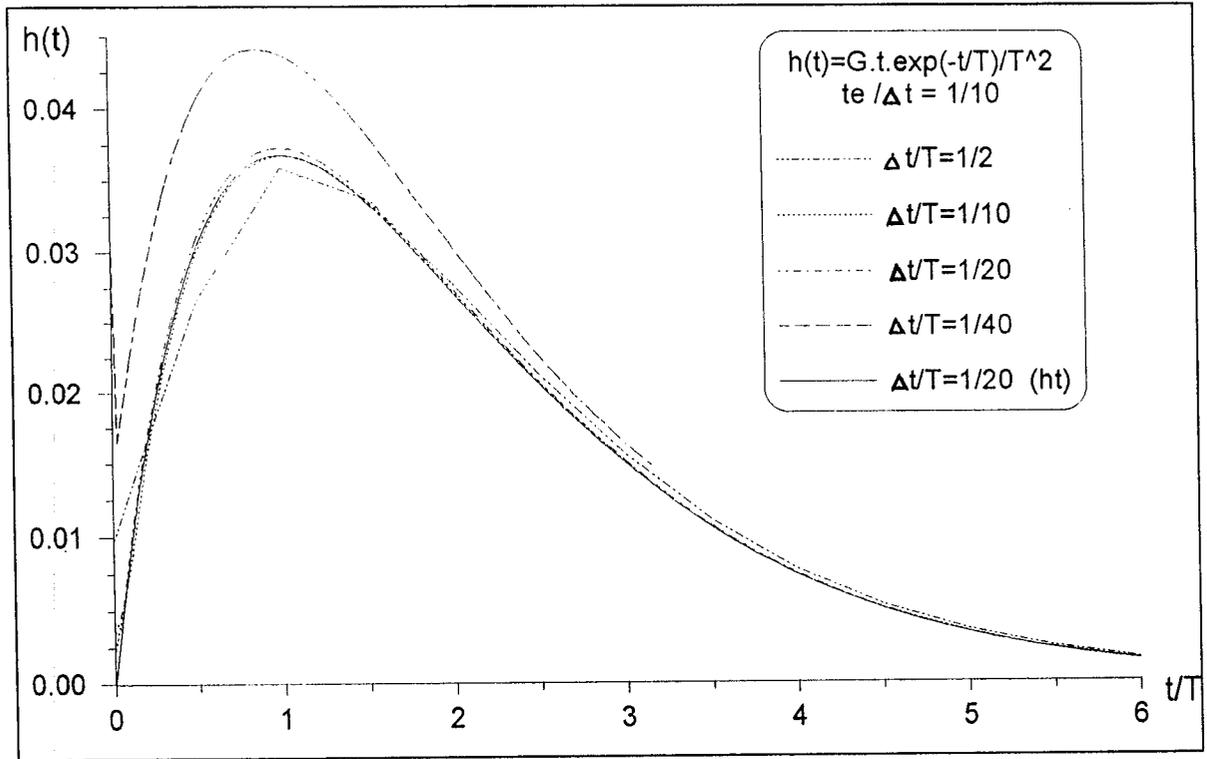


Fig. 3-9: Influence de la période de la séquence $L\Delta t$ (système du 2^{ème} ordre).

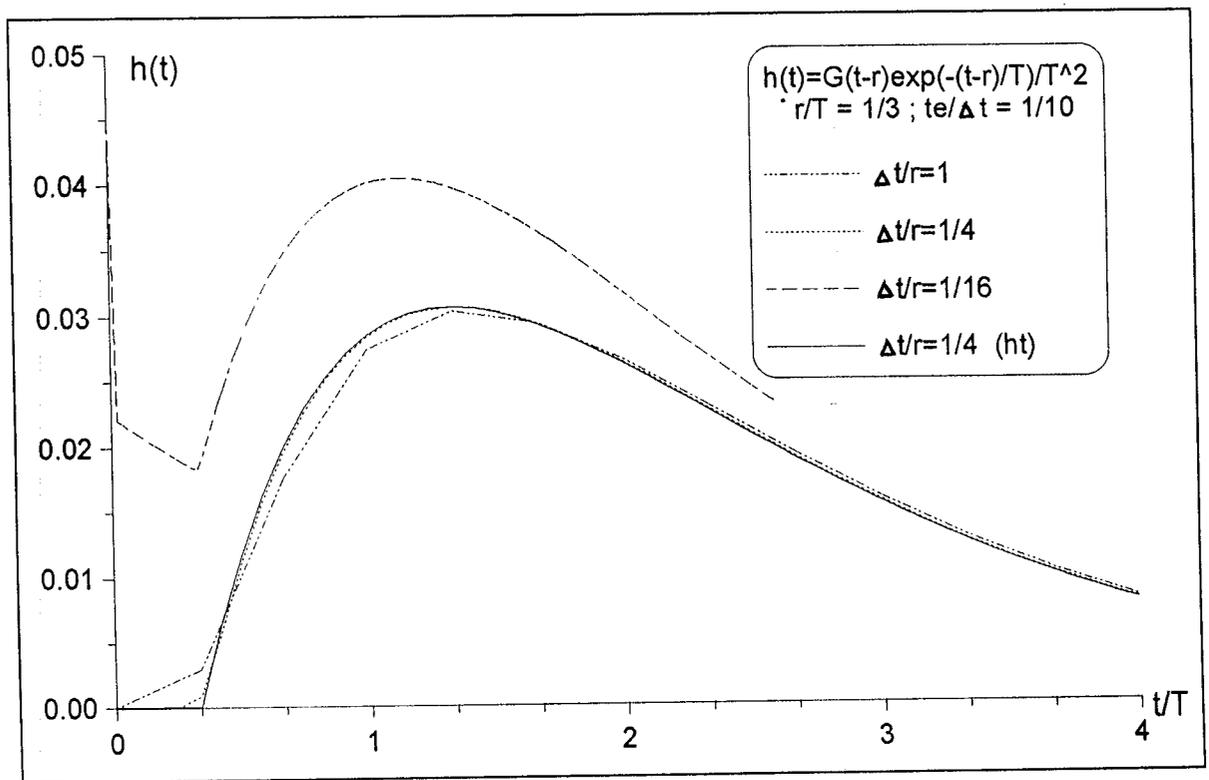


Fig. 3-10: Influence de la période de la séquence $L\Delta t$ (système du 2^{ème} ordre avec retard)

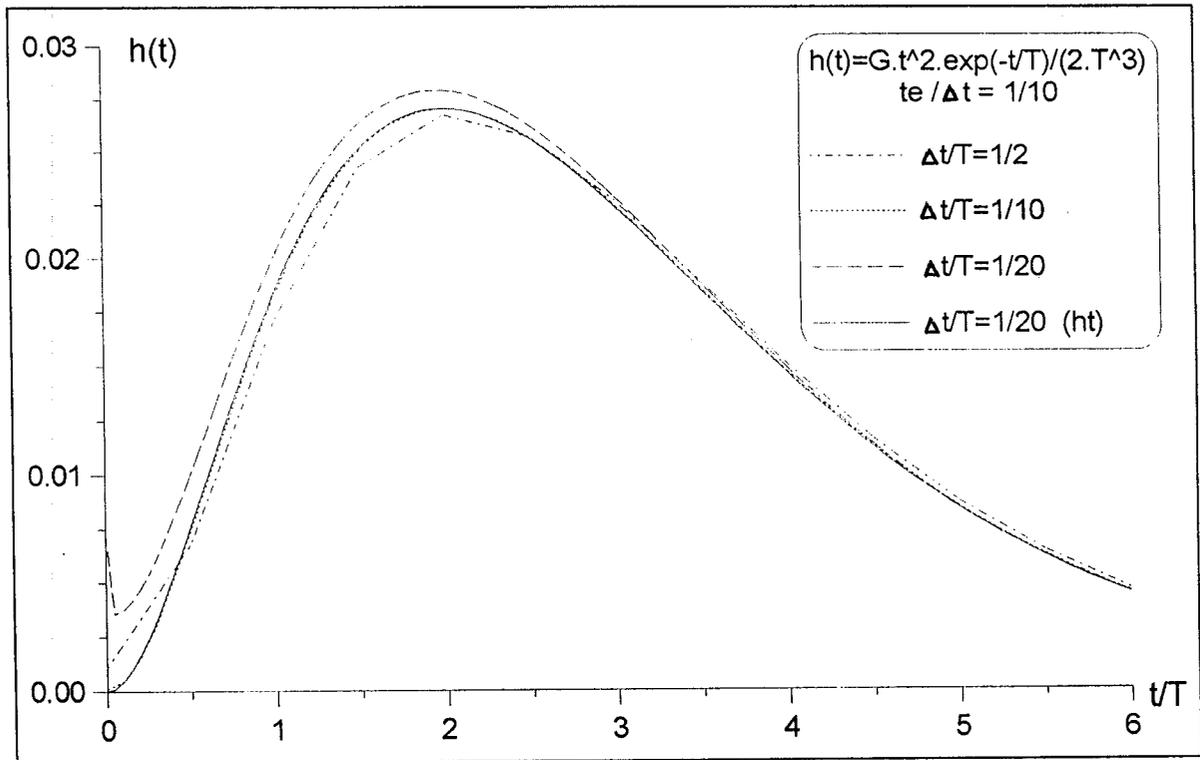


Fig. 3-11: Influence de la période de la séquence $L \cdot \Delta t$ (système du 3^{ème} ordre).

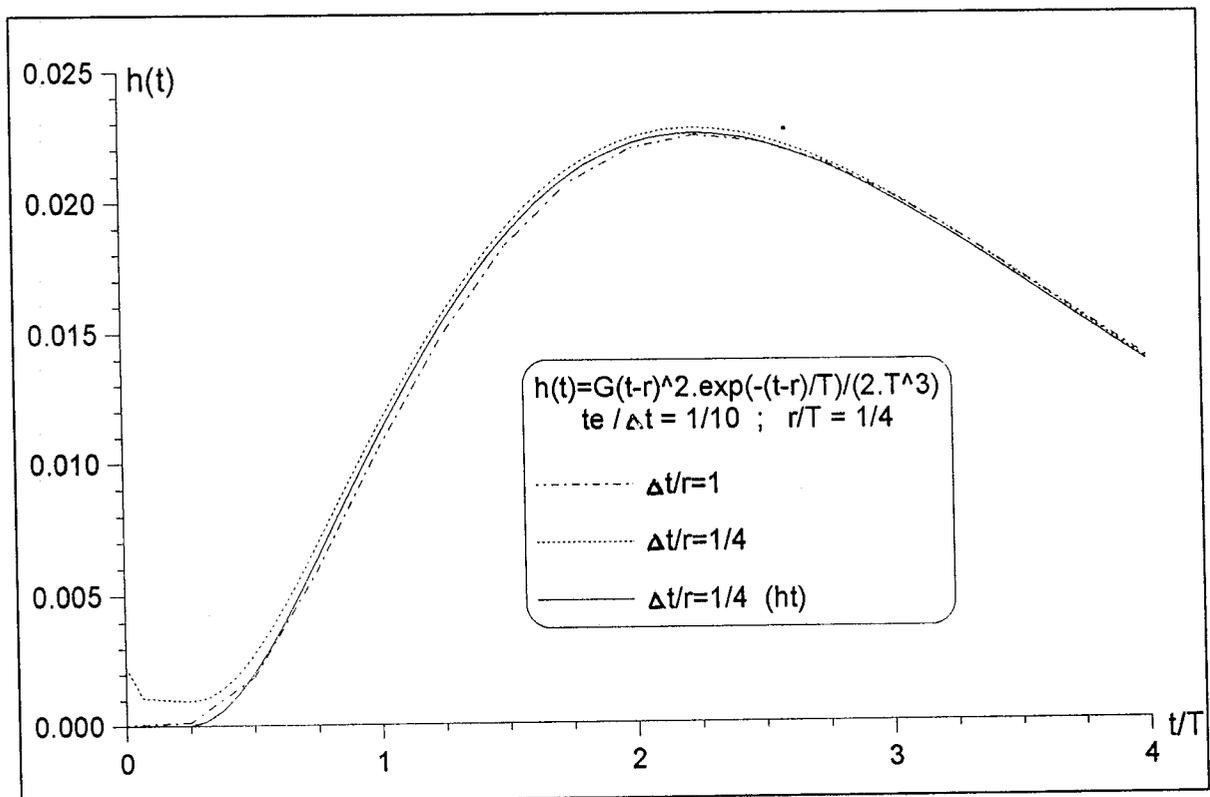


Fig. 3-12: Influence de la période de la séquence $L \Delta t$ (système du 3^{ème} ordre avec retard)

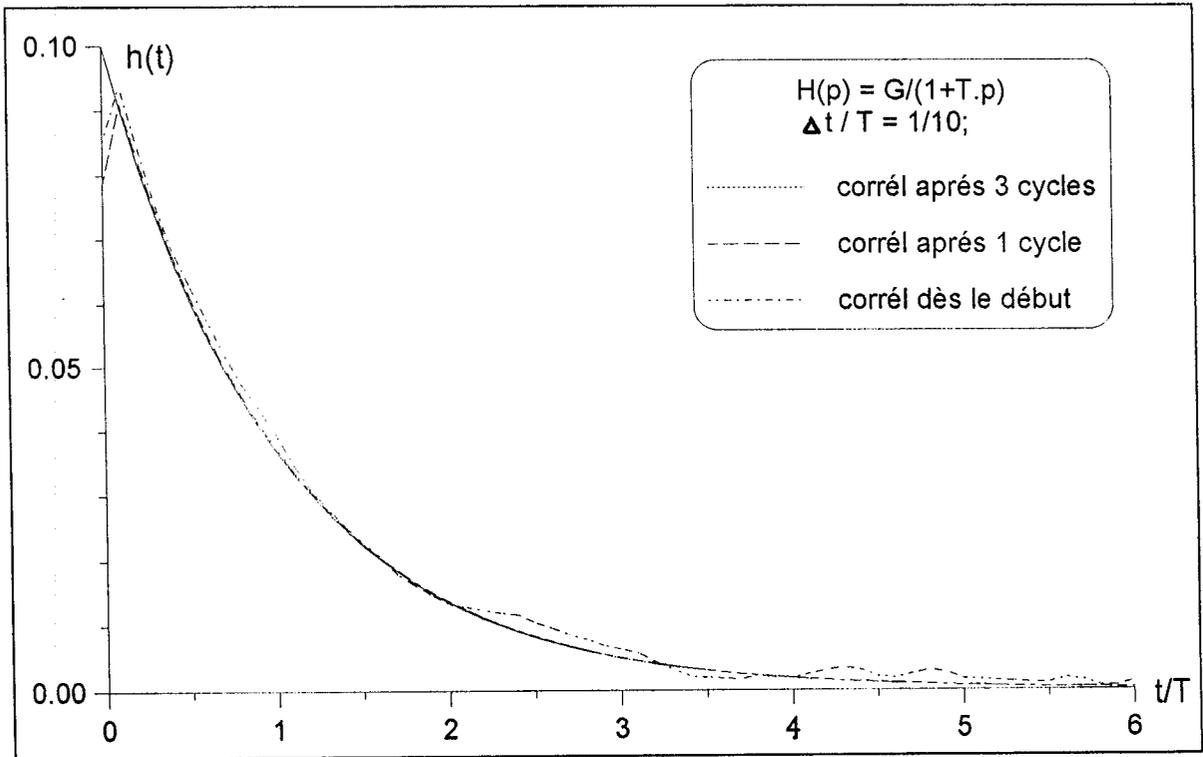


Fig. 3-13: Influence du régime transitoire

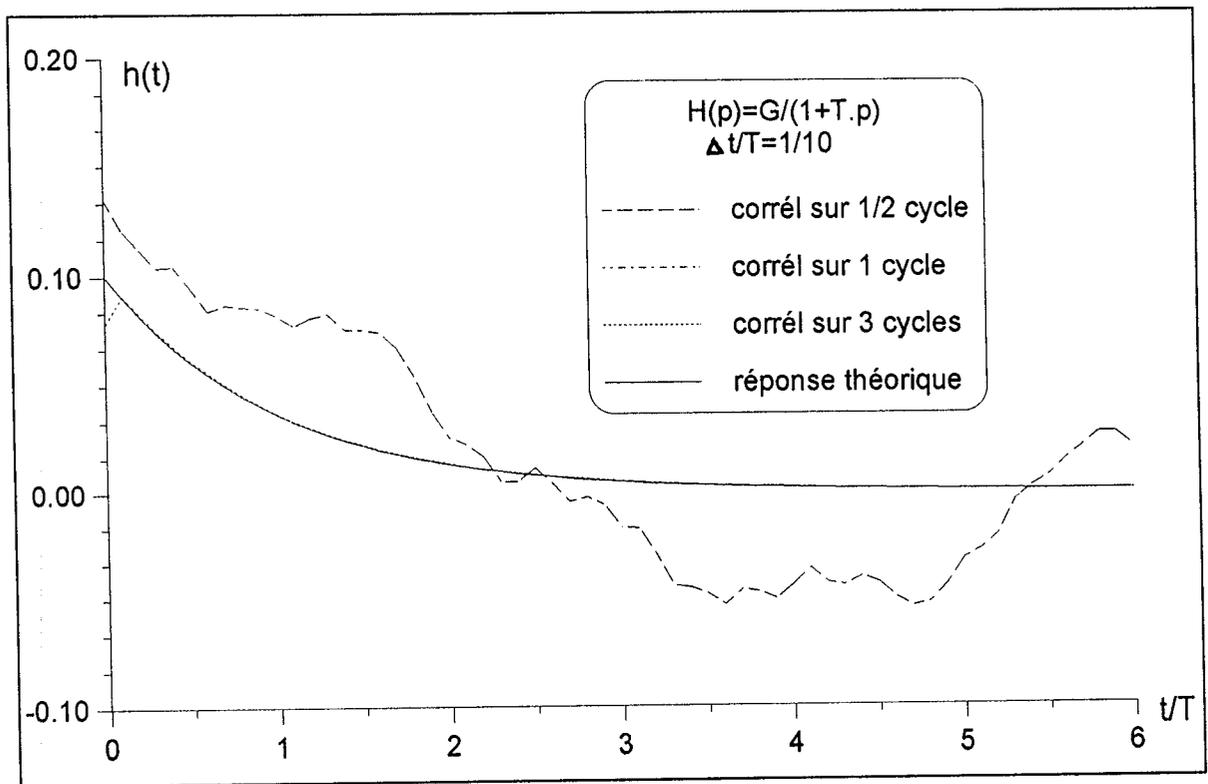
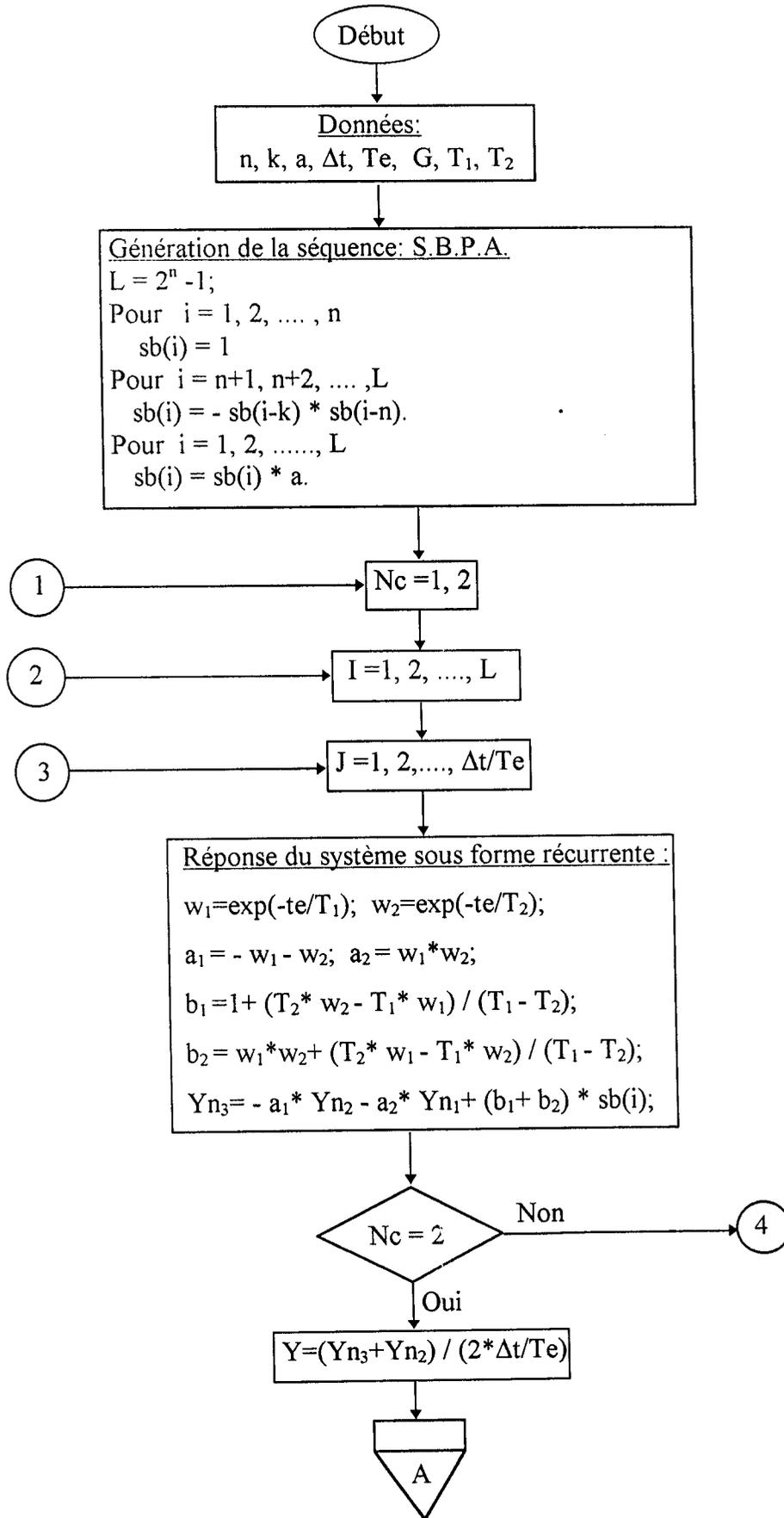


Fig. 3-14: Influence de la durée de corrélation.



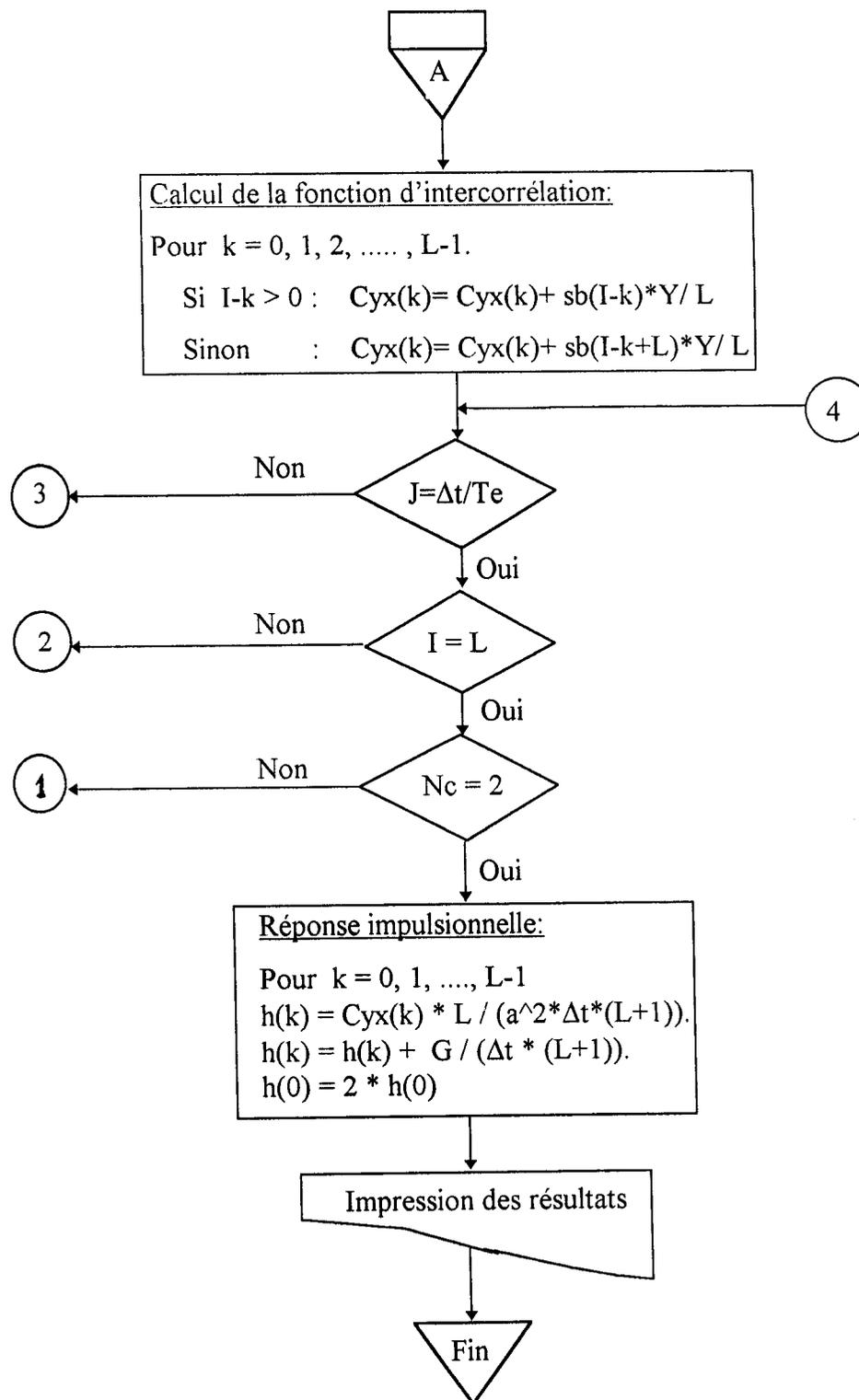


Fig. 3-15: Organigramme de l'identification par intercorrélation avec S.B.P.A (correspondant aux résultats des figures (3-5) et (3-6)).

3-7 INFLUENCE DES PERTURBATIONS SUR L'IDENTIFICATION DE LA REPONSE IMPULSIONNELLE.

3-7-1 Répercussion des bruits.

Les sources de bruit dans un système complexe étant très nombreuses; afin de simplifier l'étude, nous allons ramener tous les bruits à la sortie du système (fig. 3-16).

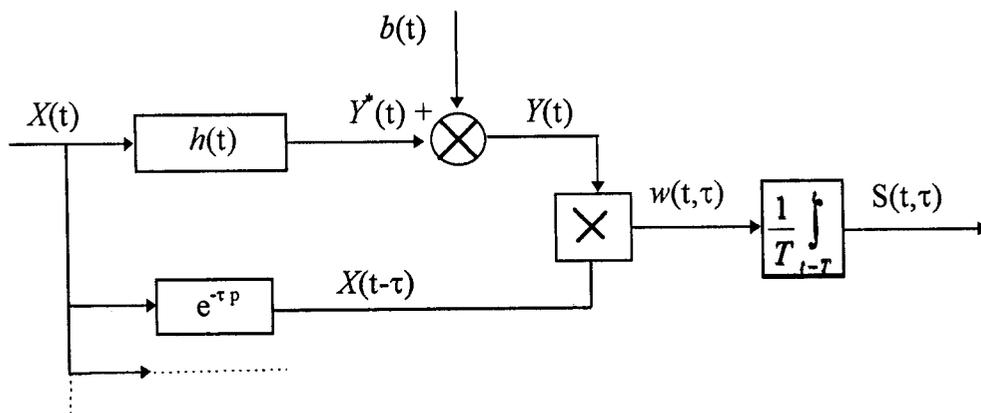


Fig. 3-16: Décomposition du corrélateur.

A partir du niveau et de la largeur de spectre du bruit propre au système, nous allons déduire les propriétés statistiques de l'erreur d'identification aux différents points de la réponse impulsionnelle. Nous admettrons les hypothèses suivantes:

- Le bruit est indépendant du signal d'excitation.
- Le bruit est stationnaire et centré.
- La largeur de spectre du bruit est au moins comparable à la bande passante du système.

3-7-1-1 Espérance mathématique des erreurs d'identification.

Compte tenu de la conception d'un corrélateur, on peut le décomposer en un élément non linéaire (multiplicateur) et un autre linéaire (filtre intégrateur), [6].

Pour examiner le signal de sortie du corrélateur, on va prendre en considération un des points de la fonction d'intercorrélation $S(t, \tau)$ correspondant au décalage τ ; (fig. 3-16).

Ainsi on peut écrire: $w(t, \tau) = Y(t) \cdot X(t - \tau)$

on a $Y(t) = Y^*(t) + b(t)$ avec $Y^*(t) = \int_0^{\infty} h(\lambda) X(t - \lambda) d\lambda$

$$\begin{aligned} \text{d'ou } w(t, \tau) &= X(t - \tau) \left[b(t) + \int_0^{\infty} h(\lambda) X(t - \lambda) d\lambda \right] \\ &= b(t) X(t - \tau) + \int_0^{\infty} h(\lambda) X(t - \lambda) X(t - \tau) d\lambda \end{aligned}$$

Puisque le filtre intégrateur conserve la valeur moyenne; Il suffit que $b(t)$ et $X(t)$ soient à corrélation nulle pour que l'espérance mathématique de la sortie du corrélateur coïncide avec la fonction d'intercorrélation désirée.

$$E\{S(t, \tau)\} = E\{w(t, \tau)\} = \int_0^{\infty} h(\lambda) C_{XX}(\tau - \lambda) d\lambda \quad (3-10)$$

pour toute valeur de τ .

Ceci sera donc vérifié en particulier si $b(t)$ et $X(t)$ sont indépendants et si $b(t)$ ou $X(t)$ est centré.

3-7-1-2 Variance des erreurs d'identification.

Pour une valeur de τ donné, on va d'abord examiner la covariance du signal $w(t, \tau)$.

$$\begin{aligned} C_{ww}(\theta) &= E\{w(t, \tau) \cdot w(t - \theta, \tau)\} = E\{b(t)X(t - \tau)b(t - \theta)X(t - \tau - \theta)\} + \\ &+ \int_0^{\infty} E\{b(t)X(t - \tau)X(t - \tau - \theta)X(t - \lambda_1 - \theta)\}h(\lambda_1)d\lambda_1 \\ &+ \int_0^{\infty} E\{b(t - \theta)X(t - \tau - \theta)X(t - \tau)X(t - \lambda_2)\}h(\lambda_2)d\lambda_2 \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E\{X(t - \tau)X(t - \lambda_2)X(t - \tau - \theta)X(t - \lambda_1 - \theta)\}h(\lambda_1)h(\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2 \end{aligned} \quad (3-11)$$

En gardant l'hypothèse d'indépendance de $b(t)$ et $X(t)$ avec $b(t)$ ou $X(t)$ centré, le deuxième et le troisième terme de (3-11) sont alors nuls.

D'autre part, si $X(t)$ est un signal périodique, comme c'est le cas pour les séquences binaires, le quatrième terme de (3-11) correspond au signal utile. En effet, ce terme, à la sortie du filtre intégrateur devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\theta|}{T}\right) d\theta \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E\{X(t-\tau)X(t-\lambda_2)X(t-\tau-\theta)X(t-\lambda_1-\theta)\} h(\lambda_1)h(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ & = E\left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} X(t-\tau)X(t-\lambda_2)h(\lambda_1)h(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \cdot \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\theta|}{T}\right) X(t-\tau-\theta)X(t-\lambda_1-\theta) d\theta \right\} \end{aligned} \quad (3-12)$$

Comme $(1-|\theta|/T)$ est une fonction paire, si le temps de corrélation T est un multiple entier de la période de la séquence $X(t)$, on en déduit:

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\theta|}{T}\right) X(t-\tau-\theta)X(t-\lambda_1-\theta) d\theta = C_{XX}(\lambda_1 - \tau)$$

et (3-12) devient alors

$$\begin{aligned} & E\left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} X(t-\tau)X(t-\lambda_2) C_{XX}(\lambda_1 - \tau) h(\lambda_1)h(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \right\} \\ & = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C_{XX}(\lambda_2 - \tau) C_{XX}(\lambda_1 - \tau) h(\lambda_1)h(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \quad (3-13)$$

On obtient ainsi le carré de la fonction d'intercorrélation.

Il faut noter ici que lorsque $X(t)$ est une fonction aléatoire non périodique, ce quatrième terme de (3-11) correspond au signal utile et à un terme additionnel qui représente l'indétermination statistique de l'identification due aux propriétés aléatoires du signal d'excitation [6].

Maintenant, si on considère Δt assez petit par rapport à la dynamique du système et si on néglige les valeurs non nulles de la moyenne et de la valeur entre pics de l'autocorrélation de la séquence, on peut poser

$$C_{SS}(\theta) = \left(a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t\right)^2 h^2(\tau) + \frac{1}{T} \int_{-T}^T C_{XX}(\theta+u) C_{bb}(\theta+u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) du \quad (3-14)$$

d'où finalement

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(\theta) = \frac{1}{\left(a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t\right)^2} \frac{1}{T} \int_{-T}^T C_{XX}(\theta+u) C_{bb}(\theta+u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) du \quad (3-15)$$

ε étant l'erreur, due au bruit, sur l'estimation de la réponse impulsionnelle.

Cette expression (3-15) permet de déduire la corrélation (fig.3-17) entre les erreurs d'identification (pour une même valeur de τ) correspondant à deux enregistrements de la sortie $Y(t)$ du système séparés dans le temps par l'intervalle θ .

Donc, on déduit que pour avoir deux identifications indépendantes, il faut disposer de deux enregistrements séparés par une durée $\theta \geq T$, c'est à dire disposer de deux enregistrements indépendants.

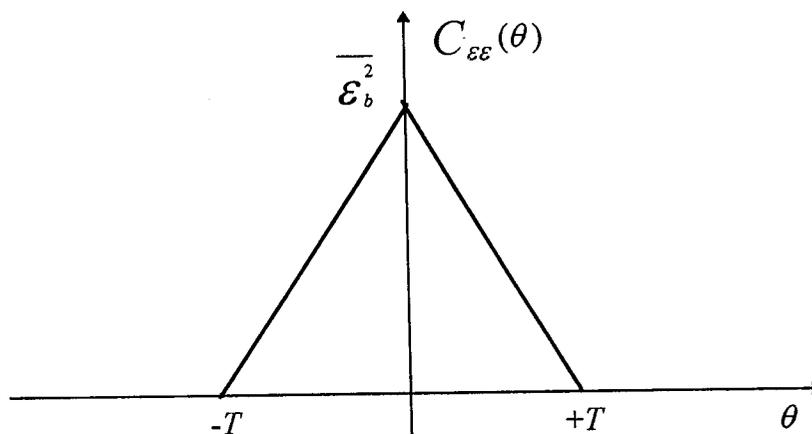


Fig.3-17: Corrélation des erreurs d'identification.

D'autre part, la relation (3-15) montre que la variance est indépendante de τ et, Selon la largeur de spectre du bruit, on a les résultats suivants [6]:

a- Le spectre de $b(t)$ est assez large par rapport à celui de $X(t)$.

$$\overline{\mathcal{E}_b^2} = \frac{\Phi_{bb}(0)}{a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t^2 T} \quad (3-16)$$

b- Le spectre de $X(t)$ est assez large par rapport à celui de $b(t)$.

$$\overline{\mathcal{E}_b^2} = \frac{\overline{b^2}}{a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t T} \quad (3-17)$$

c- Si la fonction d'autocorrélation du bruit $b(t)$ est

$$C_{bb}(\tau) = \overline{b^2} e^{-|\tau|/T_b}$$

la variance est
$$\overline{\mathcal{E}_b^2} = \frac{\overline{b^2}}{a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t^2} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|u|}{\Delta t}\right) e^{-|u|/T_b} \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) du$$

et puisque $\Delta t \ll T$ on obtient

$$\overline{\mathcal{E}_b^2} = \frac{\overline{b^2}}{a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t T} 2 \frac{T_b}{\Delta t} \left(1 - \frac{T_b}{\Delta t} \left(1 - e^{-\Delta t/T_b}\right)\right) \quad (3-18)$$

A partir de l'expression (3-18), on peut déduire que l'équation (3-16) est applicable lorsque $T_b/\Delta t \leq 1/10$ et que l'équation (3-17) l'est pour $T_b/\Delta t \geq 2$.

3-7-1-3 Interprétation dans le domaine fréquentiel.

En définissant la largeur de spectre équivalente d'un signal comme celle qu'aurait un signal de même énergie, possédant une densité spectrale constante et égale à la densité spectrale à fréquence nulle du signal donné [6], on peut poser:

$$\overline{b^2} = 2 \cdot V_{b\hat{e}q} \Phi_{bb}(0) \quad (3-19)$$

et

$$V_{X\hat{e}q} = \frac{\overline{X^2}}{2\Phi_{XX}(0)} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (3-20)$$

De façon analogue la largeur de bande équivalente d'un système est définie comme la largeur de spectre équivalente d'un bruit blanc de densité de puissance unitaire filtré par le système:

$$V_{h\hat{e}q} = \frac{1}{2G^2} \int_0^\infty h^2(t) dt$$

Alors le spectre de la séquence $X(t)$ étant assez large par rapport à la bande passante du système, on peut écrire:

$$\overline{Y^{*2}} = \overline{X^2} \cdot G^2 \frac{V_{h\hat{e}q}}{V_{X\hat{e}q}}$$

et on obtient le rapport signal sur bruit:

$$S/B = \frac{\overline{Y^2}}{\overline{b^2}} = \frac{\overline{X^2} \cdot G^2}{\overline{b^2}} \frac{V_{h\hat{e}q}}{V_{X\hat{e}q}} \quad (3-21)$$

Maintenant la variance des erreurs d'identification peut s'exprimer ainsi:

a- Le spectre de $b(t)$ est assez large par rapport à celui de $X(t)$.

de (3-16), (3-19) et (3-20), on déduit:

$$\overline{\mathcal{E}_b^2} = \frac{(2 V_{X\hat{e}q})^2 \overline{b^2}}{X^2 \cdot T \cdot 2 V_{b\hat{e}q}}$$

et en introduisant (3-21):

$$\overline{\mathcal{E}_b^2} = \frac{2G^2 V_{h\hat{e}q}}{S/B \cdot T} \frac{V_{X\hat{e}q}}{V_{b\hat{e}q}} \quad (3-22)$$

b- Le spectre de $X(t)$ est assez large par rapport à celui de $b(t)$.

de (3-17), (3-19), (3-20) et (3-21) on déduit :

$$\frac{\overline{\varepsilon_b^2}}{S/B.T} = \frac{2G^2 \cdot V_{héq}}{S/B.T} \quad (3-23)$$

L'équation (3-22) montre que tout se passe comme si les erreurs d'identification, correspondaient à une fonction aléatoire de largeur de spectre équivalente égale à celle du système et de densité spectrale :

$$\frac{G^2}{S/B} \frac{1}{T} \frac{V_{Xéq}}{V_{béq}}$$

ou le facteur $1/T$ correspond à un « filtre d'information » (la précision augmente proportionnellement au temps d'observation) et ou le facteur $V_{Xéq}/V_{béq}$ représente un filtrage fréquentiel dont l'action s'affaiblit jusqu'à disparaître (3-23) au fur et à mesure que la largeur de spectre du bruit diminue par rapport à celle de $X(t)$. L'introduction d'un filtre passe-bas sur $Y(t)$ n'améliorerait donc pas l'identification.

3-7-1-4 Corrélation des erreurs d'identification.

Jusqu'ici nous avons étudié la dépendance entre les erreurs d'identification correspondant à deux enregistrements de la sortie $Y(t)$. Dans ce qui suit, nous examinerons l'indépendance entre les erreurs des différents points (différentes valeurs de τ) de la réponse impulsionnelle; pour cela, nous allons calculer la fonction d'autocorrélation.

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta\tau) = \frac{1}{\left(a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t\right)^2} \frac{1}{T} \int_{-T}^T C_{xx}(\Delta\tau + u) C_{bb}(u + \Delta\tau) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) du \quad (3-24)$$

d'ou l'on déduit les résultats suivants:

a- Le spectre de $b(t)$ est assez large par rapport à celui de $X(t)$.

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta\tau) = \overline{\mathcal{E}_b^2} \left(1 - \frac{|\Delta\tau|}{\Delta t}\right) \quad \text{pour } |\Delta\tau| \leq \Delta t$$

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta\tau) = 0 \quad \text{pour } |\Delta\tau| > \Delta t$$
(3-25)

avec $\overline{\mathcal{E}_b^2}$ obtenu suivant (3-16).

b- Le spectre de $X(t)$ est assez large par rapport à celui de $b(t)$.

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta\tau) = \frac{\overline{\mathcal{E}_b^2}}{b^2} C_{bb}(\Delta\tau)$$
(3-26)

avec $\overline{\mathcal{E}_b^2}$ obtenu suivant (3-17).

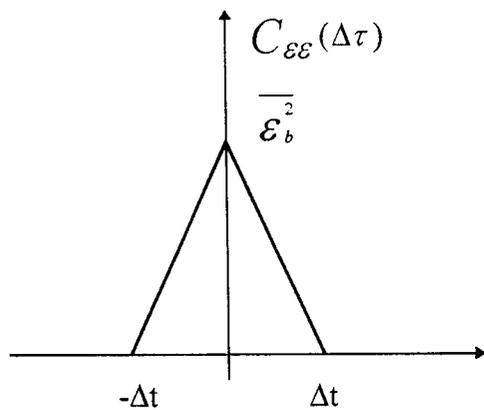


Fig. 3-18: $V_{b_{\varepsilon\varepsilon}} \gg V_{X_{\varepsilon\varepsilon}}$

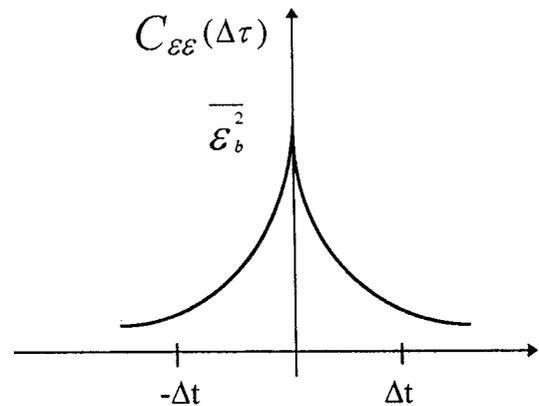


Fig. 3-19: $V_{b_{\varepsilon\varepsilon}} \ll V_{X_{\varepsilon\varepsilon}}$

Les figures (3-18) et (3-19) ci-dessus montrent l'allure de ces fonctions d'autocorrélation de l'erreur. Ces résultats montrent que seuls les points de la réponse impulsionnelle espacés d'au moins Δt peuvent être indépendants. Ainsi l'intercorrélacion réalisée pour des décalages $\Delta\tau < \Delta t$ n'augmente pas la qualité d'information, au contraire on augmente le volume de calcul.

D'autre part, lorsque le bruit possède un spectre peu étendu, une corrélation apparaît entre les erreurs des différents points espacés de $\Delta\tau = \Delta t$. On risque alors de faire une mauvaise identification même lorsque le niveau de bruit n'est pas très élevé.

On peut maintenant se poser la question suivante:

à partir de quelle largeur de spectre du bruit la corrélation des erreurs (pour $\Delta\tau = \Delta t$) est-elle négligeable ?

L'équation (3-24) nous permet de répondre à cette question si on connaît la fonction d'autocorrélation du bruit.

Ainsi, par exemple, lorsque $C_{bb}(\tau) = \overline{b^2} e^{-|\tau|/T_b}$.

On obtient

$$\frac{C_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta t)}{C_{\varepsilon\varepsilon}(0)} = \frac{T_b / \Delta t - e^{-\Delta t/T_b} (1 + 2T_b/\Delta t) + e^{-2\Delta t/T_b} (1 + T_b/\Delta t)}{2[1 - T_b / \Delta t (1 - e^{-\Delta t/T_b})]}$$

On peut en déduire que pour $T_b = \Delta t$ ce rapport est égal 20%: Il augmente donc rapidement avec $T_b/\Delta t$. lorsque $T_b = 1/6\Delta t$ le rapport est alors inférieur à 10% et les erreurs peuvent être considérées comme indépendantes.

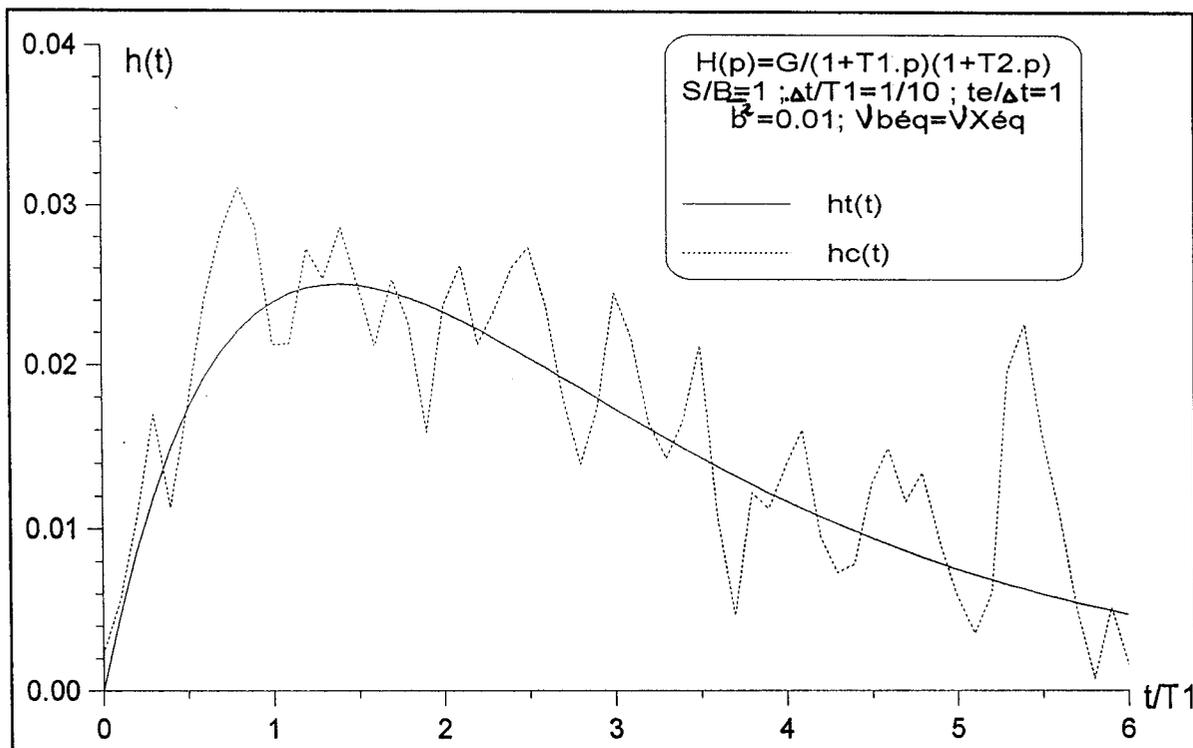


Fig. 3-20: Influence du bruit (système du 2^{ème} ordre)

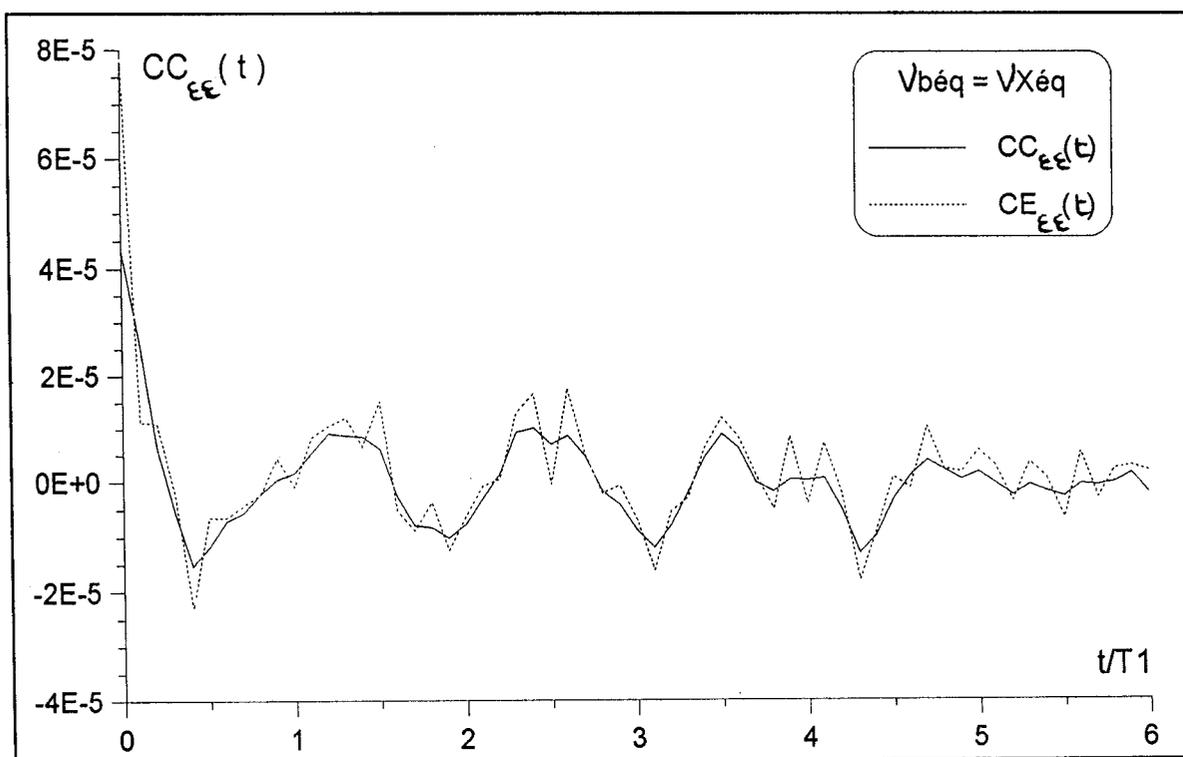


Fig. 3-21: Corrélation des erreurs de la figure (3-20).

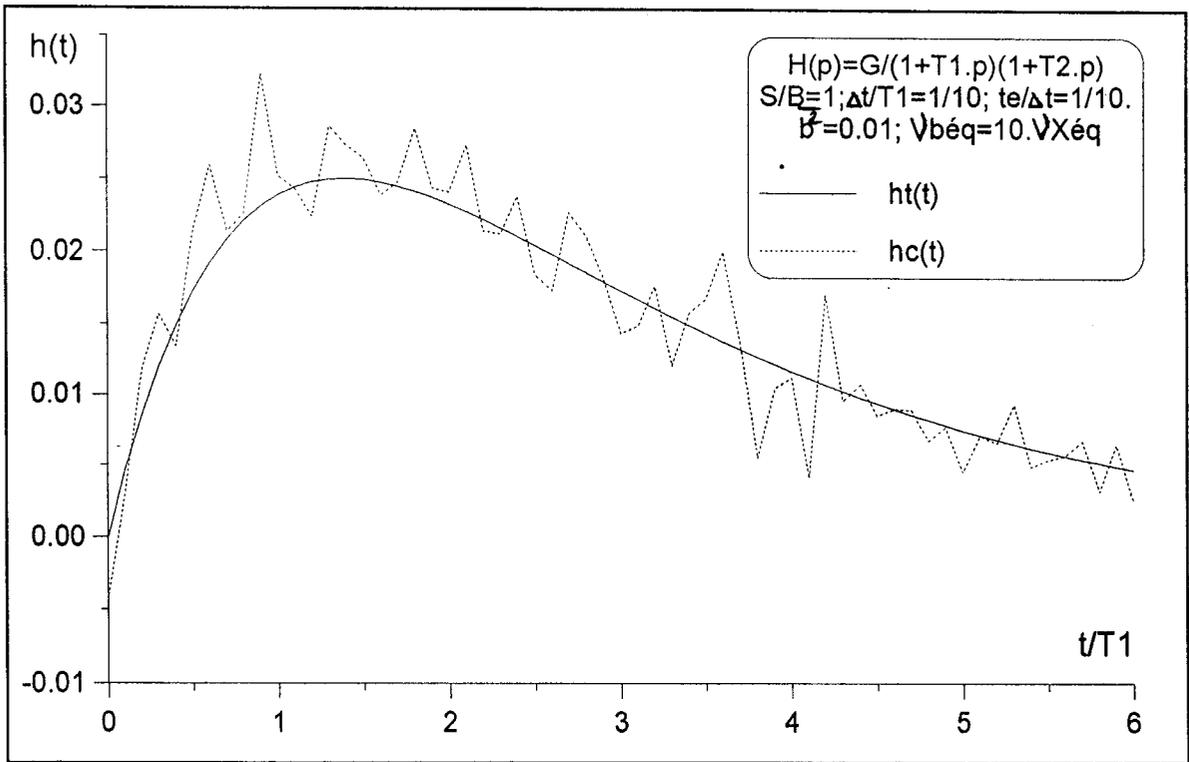


Fig. 3-22: Influence du bruit (système du 2^{ème} ordre)

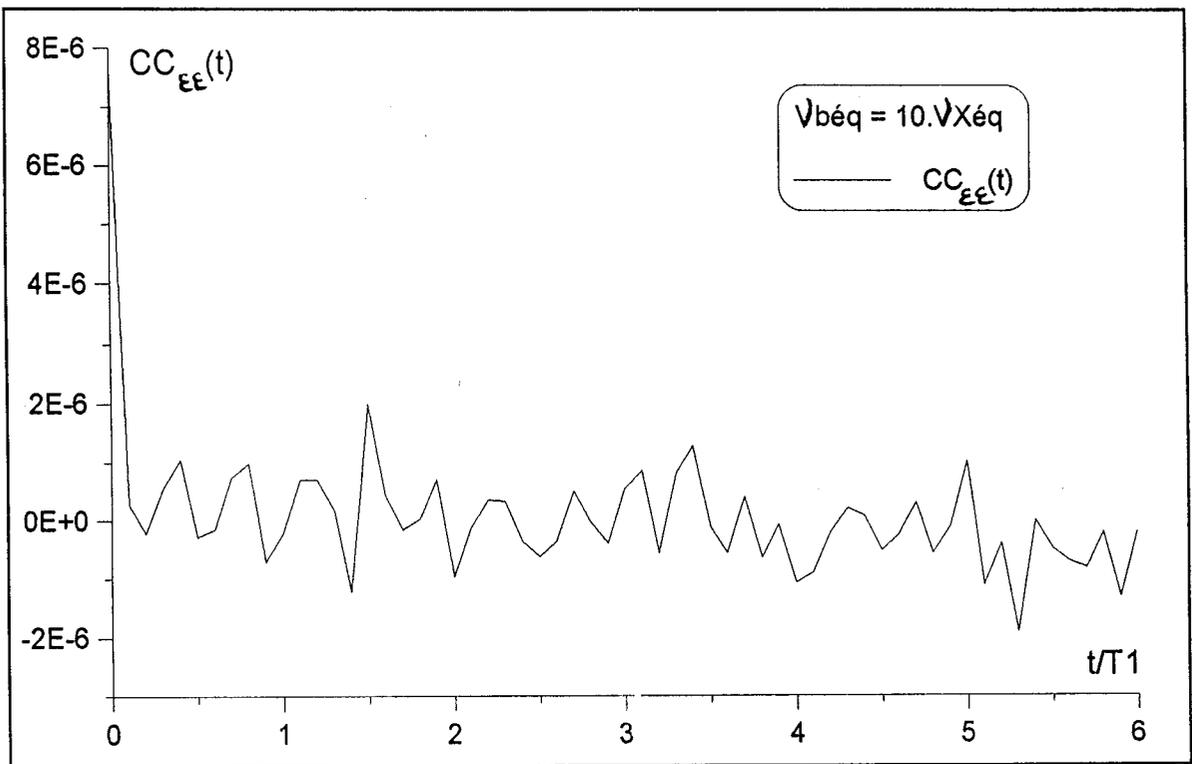


Fig. 3-23: corrélation des erreurs de la figure (3-22)

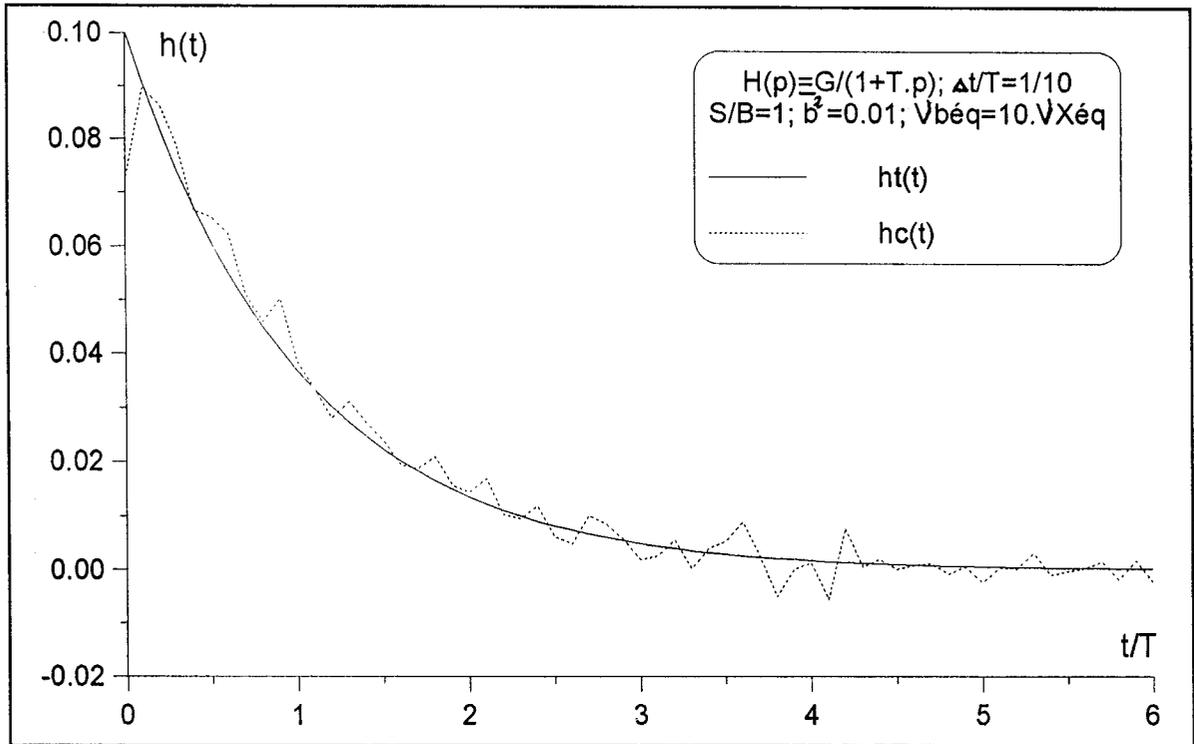


Fig. 3-24: Influence du bruit (système 1^{er} ordre).

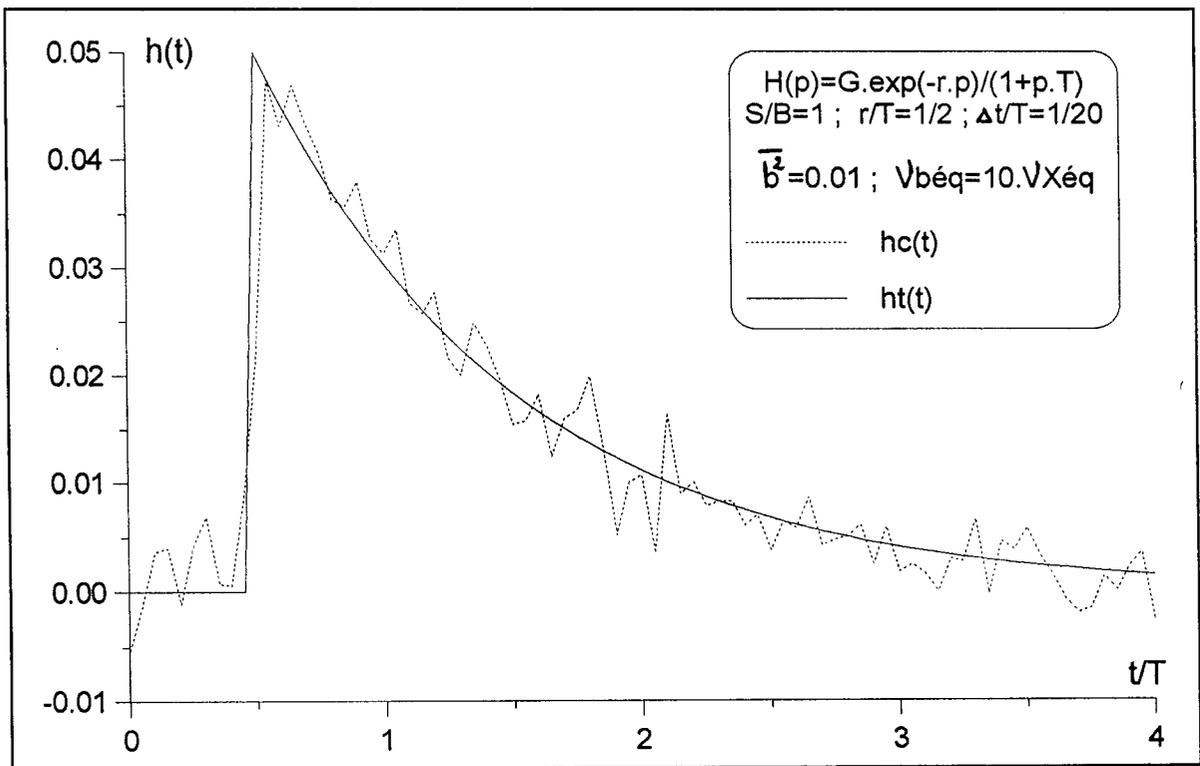


Fig. 3-25: Influence du bruit (système du 1^{er} ordre).

3-7-2 Influence de la valeur moyenne et de la valeur entre pics de la fonction d'autocorrélation de la séquence.

Jusqu'ici nous avons considéré une séquence binaire idéale avec:

$$E\{X(t)\} = 0 \quad ; \quad C_{XX}(\tau) = 0 \quad \text{pour } |\tau| > \Delta t$$

Si on tient compte de ces valeurs non nulles correspondant à une séquence binaire pseudo-aléatoire, la sortie du corrélateur (fig.3-16) devient:

$$S(t, \tau) = a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t h(\tau) - \frac{a^2}{L} G + \frac{a}{L} A_0 + \frac{1}{T} \int_{t-T}^t b(t) X(t-\tau) dt$$

et puisque le gain G et le point de fonctionnement A_0 du système ne sont pas connus, une erreur continue (§ 3-4) apparaîtra sur l'identification.

On évite cette erreur continue en considérant que $h(L\Delta t)=0$, ce qui est d'ailleurs une condition nécessaire pour que l'identification avec des séquences binaires soit valable.

Alors, lorsque le spectre de $b(t)$ est très étendu on obtient:

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta\tau) = \frac{\Phi_{bb}(0)}{a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t^2 T} \left(2 - \frac{|\Delta\tau|}{\Delta t}\right) \quad \text{pour } |\Delta\tau| \leq \Delta t.$$

et

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta\tau) = \frac{\Phi_{bb}(0)}{a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t T} \quad \text{pour } |\Delta\tau| > \Delta t.$$

(3-27)

au lieu de (3-25).

En réalité, lorsque $L\Delta t$ est assez grand, on peut admettre que les p derniers points de la réponse impulsionnelle estimée vérifient $h(\tau)=0$. La moyenne de ces p valeurs nous permet alors de réduire cette erreur continue.

Ainsi lorsque les erreurs sont indépendantes les une des autres, il suffirait que $p \cong 10$ pour pouvoir négliger $C_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta t)$ et pour que les équations (3-25) restent valables.

3-7-3 Répercussion des dérives.

Puisque l'observation du système n'a lieu que pendant une durée finie, les perturbations à très basse fréquence ne peuvent pas être considérées comme stationnaires. Le caractère optimal de l'identification par corrélation n'est plus valable et ces perturbations très lentes ou dérives, peuvent entraîner d'importantes erreurs sur l'identification.

Pour étudier l'influence de ces dérives nous allons admettre que:

a- Les perturbations des dérives restent suffisamment limitées pour que l'hypothèse de linéarité et d'invariance du système demeure valable et que l'on puisse ramener ces dérives à la sortie du système (fig.3-26).

b- Que l'on peut caractériser la dérive (pendant la durée finie d'observation) par une approximation polynomiale.

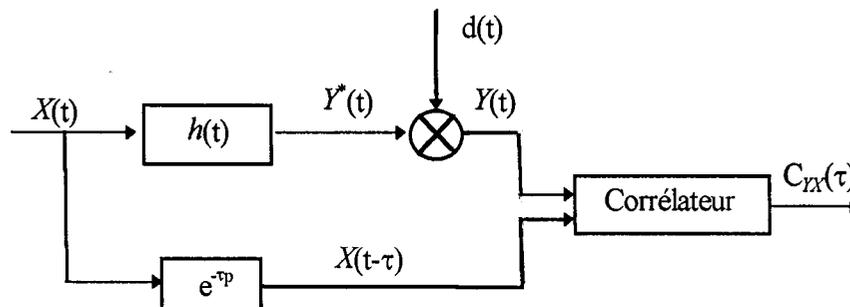


Fig. 3-26: Répercussion des dérives.

3-7-3-1 Dérive linéaire.

Lorsque la dérive peut être assimilée à une fonction rampe:

$$d(t) = A_1 \cdot t$$

l'intercorrélation (suivant le schéma de la figure 3-26) devient alors:

$$C_{YX}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} (Y^*(t) + d(t)) \cdot X(t - \tau) dt = a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t h(t) + \frac{A_1}{T} \int_0^{\tau} t \cdot X(t - \tau) dt$$

L'erreur introduite par la dérive est donc proportionnelle au premier moment de la séquence:

$$\mathcal{E}_d(\tau) = \frac{A_1}{a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t T} \int_0^{\tau} t \cdot X(t - \tau) dt \quad (3-28)$$

Dans les figures (3-28) et (3-29) on a représenté les moments du premier ordre normalisés:

$$M_1(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} \frac{t}{\Delta t} \frac{X(t - \tau)}{a} dt$$

pour quelques séquences binaires dont l'état initial est 111...1. on peut constater que les erreurs de dérive sont très corrélées entre elles ce qui risque d'entraîner une mauvaise identification même en présence d'une faible dérive.

Pour une dérive, $d(t) = A_1 t$, l'erreur sur la réponse impulsionnelle devient

$$\varepsilon_d(\tau) = \frac{1}{a \frac{L+1}{L} \Delta t} A_1 \Delta t M_1(\tau) = \frac{A_1}{a \frac{L+1}{L}} M_1(\tau) \quad (3-29)$$

L'erreur est donc indépendante de Δt et elle ne dépend de la longueur L que par l'intermédiaire de $M_1(\tau)$.

Lorsqu'on connaît la dérive, les figures (3-28) et (3-29) permettent de calculer son influence et de la réduire de la fonction d'intercorrélation pour obtenir la réponse impulsionnelle exacte.

Supposons qu'on puisse estimer cette dérive avec une erreur:

$$\Delta A_1 = \varepsilon / L \Delta t \quad (3-30)$$

ou ε est fonction du niveau de bruit ($\varepsilon = 2(\overline{b^2})^{1/2}$), de (3-29) et (3-30), on déduit:

$$\varepsilon_d(\tau) \cong \frac{M_1(\tau)}{L+1} 2 \left[\frac{\int_0^\infty h^2(t) dt}{\Delta t S/B} \right]^{1/2} \quad (3-31)$$

La figure (3-30) montre l'évolution de la valeur maximale de $M_1(\tau)/L+1$ en fonction de la longueur de la séquence.

On constate que pour une période $L\Delta t$ donnée, l'erreur suivant (3-31) est pratiquement indépendante de L et de Δt et que, d'une façon approchée, cette erreur est inversement proportionnelle à la racine carrée de $L\Delta t$.

Ainsi si le système est, par exemple, du premier ordre, on obtient à partir de (3-31).

$$\frac{\varepsilon_d(\tau)}{G/T_1} = \frac{M(\tau)}{L+1} \left[\frac{2T_1/\Delta t}{S/B} \right]^{1/2}$$

Pour $T_1/\Delta t=10$ et $L=63$, l'erreur de dérive linéaire est alors (après correction) de l'ordre de 15% pour $S/B=10$ et de 4% pour $S/B=100$.

Ceci montre donc que cette correction de la dérive linéaire n'est efficace que lorsque le niveau de bruit est très faible.

Une autre méthode de correction de dérive linéaire, théoriquement plus efficace, consiste à réaliser l'intercorrélation suivant le schéma de la figure (3-27).

En effet puisque $C_{YX}(\tau)$ est indépendant de t , et puisque un retard est équivalent à une avance $-\tau$ (ce qui est réalisable en numérique), on obtient:

$$\begin{aligned} C_{YX}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T (Y^*(t+\tau) + d(t+\tau)) X(t) dt \\ &= a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t h(\tau) + \frac{A_1}{T} \int_0^T t X(t) dt + \frac{A_1}{T} \tau \int_0^T X(t) dt \end{aligned} \quad (3-32)$$

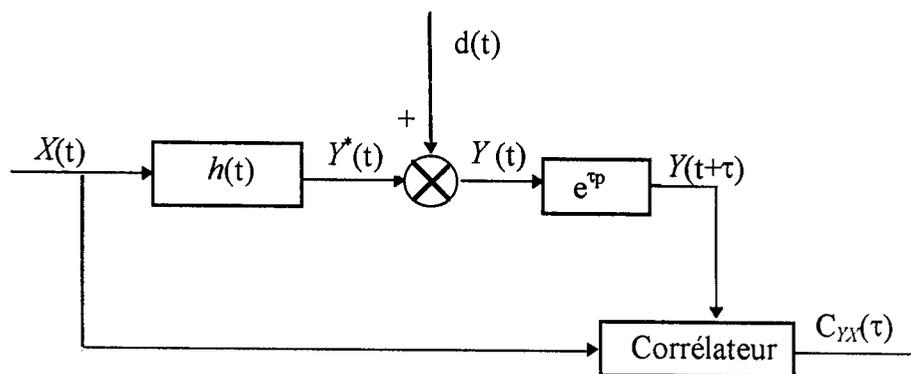


Fig.3-27

Le dernier terme fait apparaître ici un nouveau type d'erreur qui peut être facilement éliminé en centrant la séquence ($X(t) = X(t) - a/L$).

L'erreur de dérive devient alors:

$$\mathcal{E}_d = \frac{A_1}{a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t} \frac{1}{T} \int_0^T t X(t) dt = \frac{A_1}{a \frac{L+1}{L}} M_1(0)$$

L'erreur sur $h(\tau)$ est donc constante (elle ne dépend que de l'état initial de la séquence) ce qui ne gêne pas l'identification. Mieux encore, d'après la figure (3-28), l'état initial de la séquence peut être choisi de telle sorte que $M_1(0)$ soit négligeable.

Cette méthode a néanmoins l'inconvénient de nécessiter un temps d'identification double, $T \geq 2.L\Delta t$. La linéarité et l'invariance du système, et même la linéarité de la dérive deviennent alors des hypothèses plus hasardeuses [8].

3-7-3-2 Dérive d'ordre élevé.

Lorsque la dérive ne peut être approchée par une fonction linéaire du temps il faut introduire des nouveaux termes dans le développement polynomial:

$$d(t) = A_1.t + A_2.t^2 + A_3.t^3 + \dots$$

Cela entraîne sur l'identification l'apparition d'autres termes additionnels aux moments de 1er, 2ème,..... ordre de la séquence binaire.

Davies [8] et Douce, cité par Menendez [6] ont proposé une méthode (filtrage mathématique) qui permet d'annuler les effets de cette dérive sans connaître les coefficients A_i .

En mémorisant la sortie du système $Y(t)$ pendant une durée $3L\Delta t$, ils calculent les fonctions d'intercorrélation:

$$C_{YX}(\tau, t_0) = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t + t_0 + \tau) X(t + t_0) dt$$

pour $0 \leq t_0 < L\Delta t$ (t_0 étant l'instant de démarrage du calcul d'intercorrélation).

La répercussion de la dérive ne dépend que de l'instant initial t_0 . Alors, en réalisant une moyenne pondérée:

$$C_{YX}^*(\tau) = \frac{\int_0^T p(t_0) C_{YX}(\tau, t_0) dt_0}{\int_0^T p(t_0) dt_0}$$

$p(t_0)$ étant la fonction de pondération, il suffit que:

$$\int_0^T p(t_0) \left[\int_0^T d(t + t_0 + \tau) X(t + t_0) dt \right] dt_0 = 0$$

pour que l'intercorrélation $C_{YX}^*(\tau)$ ne soit pas influencée par la dérive.

Cette condition peut être remplie en prenant $p(t_0)$ égal à un polynôme en t_0 du même ordre que la dérive et dont les coefficients dépendent de l'ordre de la dérive et de l'état initial ($t=t_0=0$) de la séquence mais ne dépendent pas des coefficients A_i de la dérive.

Malheureusement, lorsqu'on utilise cette méthode, le temps d'identification est trop important ($T \geq 3L\Delta t$) pour une application à des procédés industriels soumis à des dérives.

En général, il semble qu'on a plus de chances d'obtenir un enregistrement de durée $L\Delta t$ avec une dérive négligeable qu'un enregistrement de durée $3L\Delta t$ sans modification du réglage de l'installation, et sans que la linéarité et l'invariance du système soient respectées.

D'autre part cette méthode [6], [8] entraîne une augmentation considérable, et du volume de calcul, et de la répercussion du bruit sur l'estimation de la réponse impulsionnelle (les auteurs indiquent une augmentation de 30%).

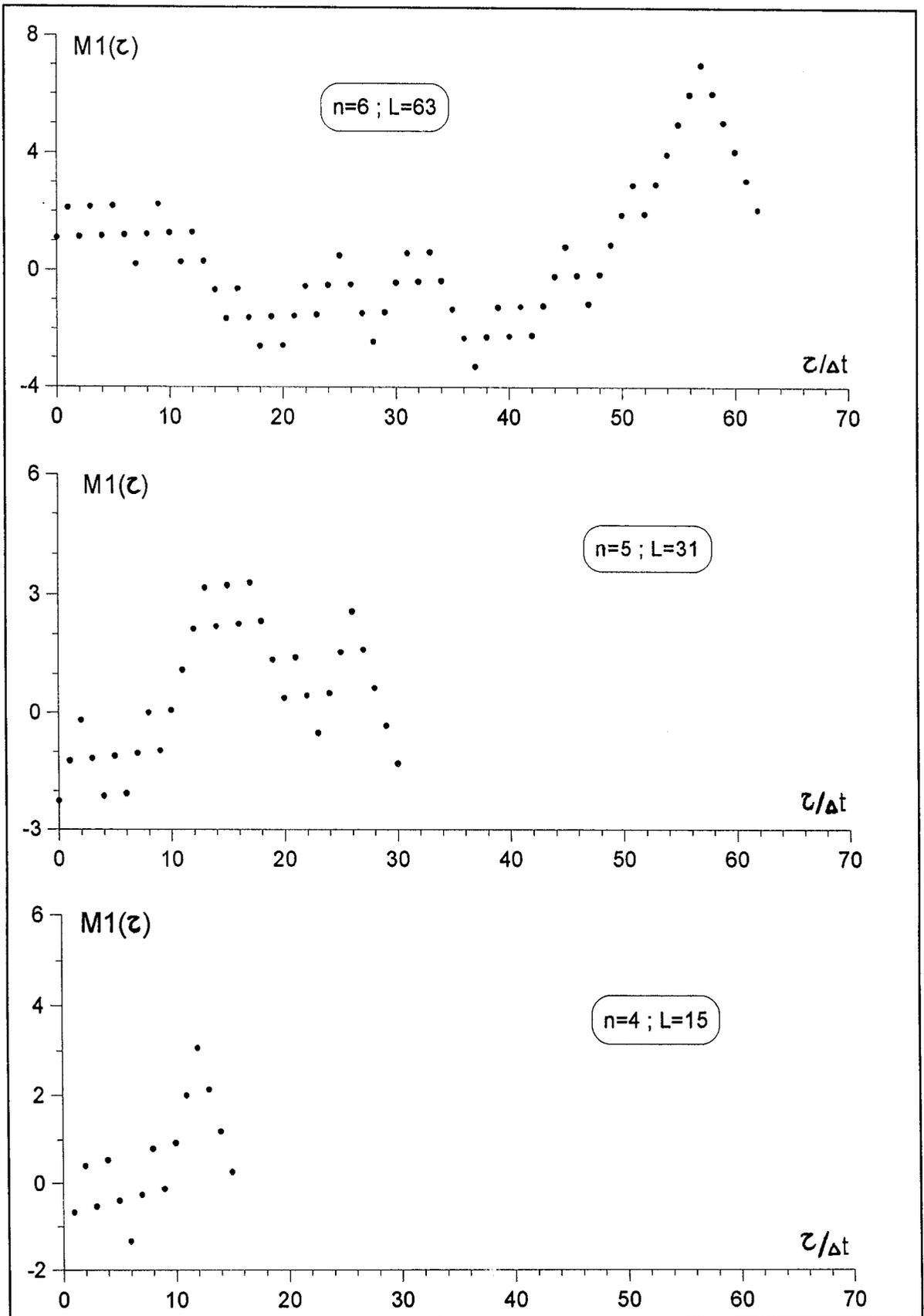


Fig. 3-28: Moments du 1^{er} ordre normalisés

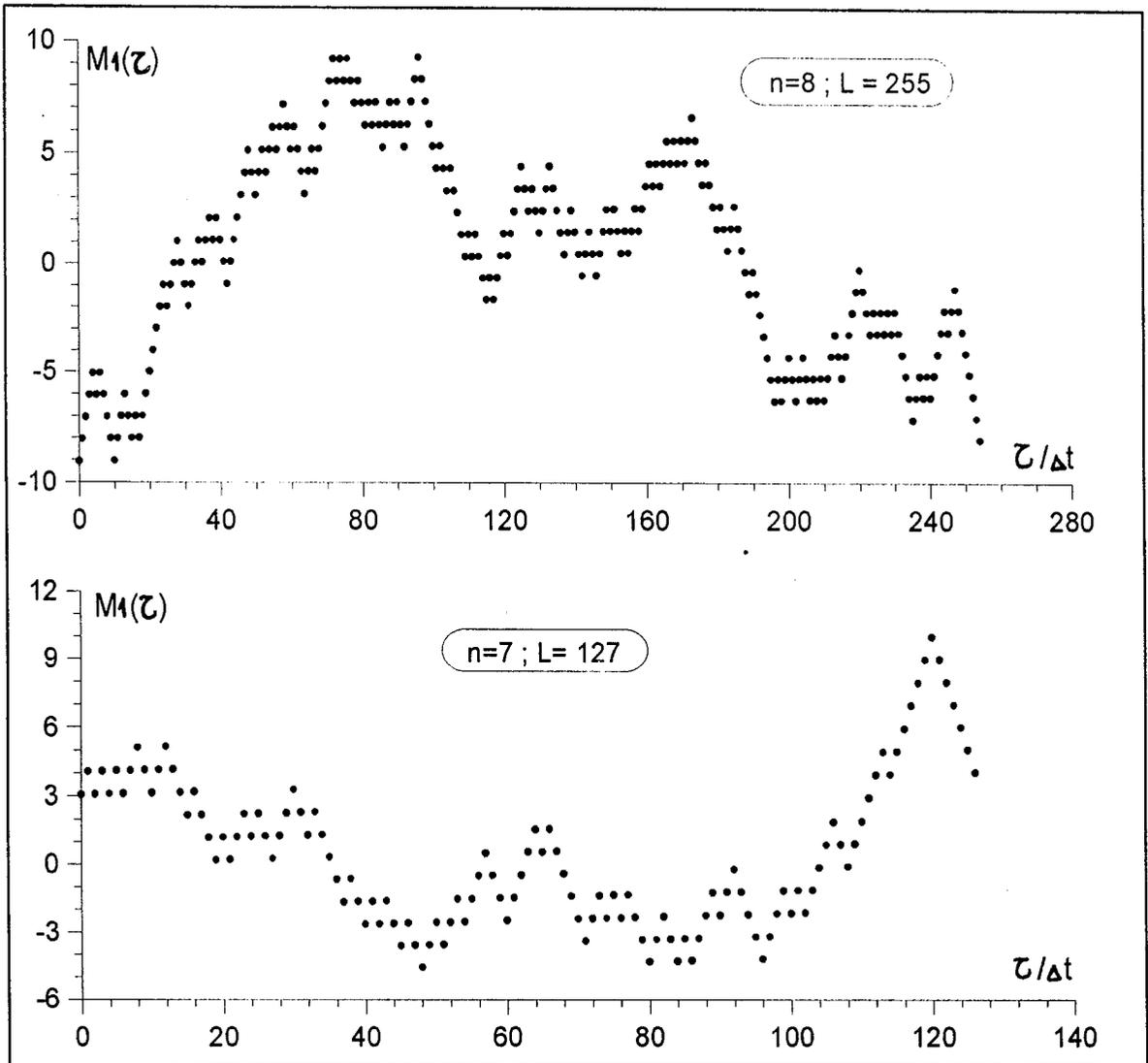


Fig. 3-29: Moments du 1^{er} ordre normalisés

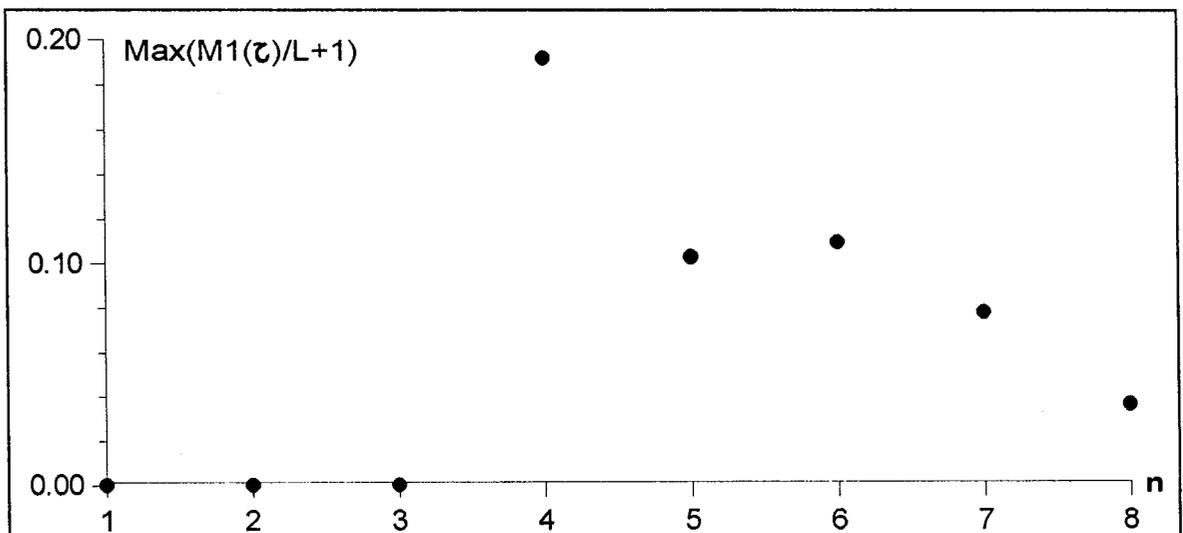


Fig. 3-30: Evolution de la valeur maximale du moment en fonction de la longueur de la S.B.L.M

CHAPITRE 4

**INFLUENCE DU TRAITEMENT
NUMERIQUE DES DONNEES**

4- INFLUENCE DU TRAITEMENT NUMERIQUE DES DONNEES.

Compte tenu de la nature binaire des séquences, les calculateurs numériques apparaissent comme un outil particulièrement bien adapté pour faire le calcul d'intercorrélation. Il est alors nécessaire de réaliser l'échantillonnage et la quantification du signal de sortie du système.

Nous allons étudier maintenant l'incidence de ces deux traitements numériques du signal sur l'identification de la réponse impulsionnelle par intercorrélation.

4-1 ECHANTILLONNAGE DU SIGNAL SANS BRUIT.

Dans l'échantillonnage du signal de sortie du système deux facteurs sont à considérer:

a- fréquence d'échantillonnage.

b- type d'extrapolateur.

Compte tenu du spectre de la séquence (Fig. 2-6) et du théorème de Shannon on peut considérer qu'il faut échantillonner à une fréquence au moins égale à $2/\Delta t$, bien que ceci dépende de la valeur relative de Δt par rapport à la dynamique du système.

Avec un extrapolateur d'ordre zéro, l'algorithme de corrélation est

$$C_{YX}(k \Delta t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X_{i-k} \frac{T_e}{\Delta t} \sum_{j=i \frac{\Delta t}{T_e}}^{(i+1) \frac{\Delta t}{T_e} - 1} Y_j \quad (4-1)$$

ou T_e est la période d'échantillonnage (considérée ici comme une fraction entière de Δt).

Par simulation numérique nous avons déterminé la répercussion de l'échantillonnage sur la réponse impulsionnelle dans le cas de systèmes du premier et du second ordre (Fig.4-3).

Si maintenant on réalise la reconstitution du signal avec une interpolation linéaire, l'algorithme de corrélation devient:

$$C_{YX}(k \Delta t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X_{i-k} \frac{T_e}{\Delta t} \sum_{j=i \frac{\Delta t}{T_e}}^{(i+1) \frac{\Delta t}{T_e} - 1} \frac{Y_j + Y_{j+1}}{2}$$

Les erreurs d'échantillonnage obtenues par simulation sont celles indiquées sur les figures (4-4).

On peut constater que les erreurs, lors d'une intégration par des trapèzes sont inférieures à celles obtenues avec une intégration par des rectangles. L'interpolation linéaire permet d'utiliser (pour une erreur donnée) une fréquence d'échantillonnage plus faible tout en gardant un algorithme aussi simple à mettre en oeuvre.

Les figures (4-3) et (4-4) permettent finalement de conclure que l'erreur d'échantillonnage sur la réponse impulsionnelle est négligeable (inférieure à 1%) lorsque $T_e < \Delta t$ et lorsqu'on utilise une interpolation linéaire.

4-2 ECHANTILLONNAGE DU SIGNAL EN PRESENCE DE BRUIT.

Lorsque la sortie du système est entachée d'un bruit dont le spectre est assez étendu par rapport à celui de la séquence, c'est en fonction de cette largeur de spectre du bruit qu'il faut choisir la fréquence d'échantillonnage.

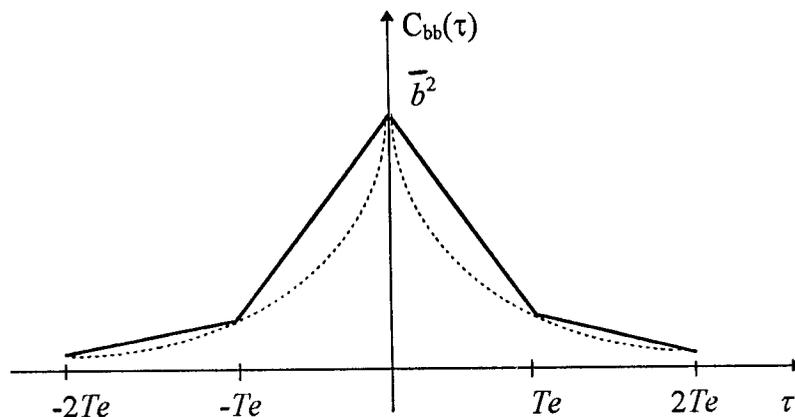


Fig. 4-1: Fonction d'autocorrélation du bruit.

En effet, la fonction d'autocorrélation du bruit, représentée en pointillé sur la figure (Fig. 4-1), devient après échantillonnage et reconstitution, celle indiquée en trait plein sur la même figure [6].

La variance est conservée mais la largeur de spectre est diminuée et la densité spectrale de puissance est augmentée.

A partir de cette fonction d'autocorrélation du bruit après échantillonnage, l'équation (3-15) nous permet de calculer l'augmentation des erreurs d'identification créée par l'échantillonnage du bruit.

En particulier, lorsque $1/V_{beq} \ll Te$, la fonction d'autocorrélation du bruit devient celle de la figure (4-2).

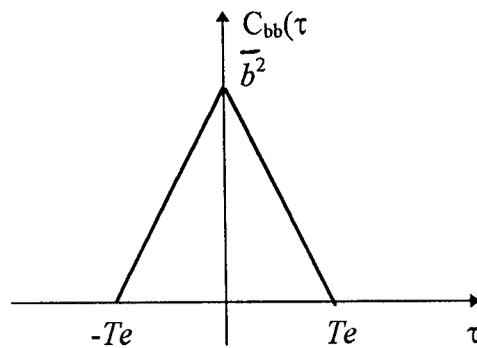


Fig.4-2

et si $Te \ll \Delta t$, de l'équation (3-22) on déduit:

$$\overline{\mathcal{E}_b^2} = \frac{2G^2 V_{heq} Te}{(S/B) \cdot T \cdot \Delta t} \quad (4-3)$$

où le facteur $Te/\Delta t$ montre clairement l'influence de l'échantillonnage qu'on peut vérifier sur la figure (4-5) obtenue par simulation.

Maintenant, si Te devient comparable à Δt (avec $Te \leq \Delta t$) l'équation (3-15) s'écrit:

$$\overline{\mathcal{E}_b^2} = \frac{1}{\left(a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t\right)^2} \cdot \frac{1}{T} \int_{-Te}^{Te} a^2 \frac{L+1}{L} \left(1 - \frac{|u|}{\Delta t}\right) \overline{b^2} \left(1 - \frac{|u|}{Te}\right) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) du$$

et on obtient:

$$\overline{\mathcal{E}_b^2} = \frac{\overline{b^2}}{a^2 \frac{L+1}{L} \Delta t \cdot T} \cdot \frac{Te}{\Delta t} \left(1 - \frac{Te}{3\Delta t} - \frac{Te}{3T} + \frac{Te^2}{6\Delta t T} \right) \quad (4-4)$$

ou` les deux derniers termes peuvent être négligés puisque Te est assez petit par rapport à T .

Lorsque $Te=\Delta t$ les erreurs sur les différents points $h(n\Delta t)$ de la réponse impulsionnelle vont être assez corrélées. L'équation (3-24) permet de calculer la corrélation $C_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta\tau)$ et on obtient:

$$\frac{C_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta t)}{C_{\varepsilon\varepsilon}(0)} = \frac{1}{4} \quad \text{pour } Te=\Delta t \quad (4-5)$$

mais pour $Te \leq \Delta t/2$ les erreurs sont pratiquement indépendantes.

En effet on peut déduire:

$$\frac{C_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta t)}{C_{\varepsilon\varepsilon}(0)} = \frac{1}{12} \quad \text{pour } Te=\Delta t/2 \quad (4-6)$$

Finalement si la fréquence d'échantillonnage maximale disponible est insuffisante par rapport à la dynamique du bruit, il faut introduire un filtre analogique avant l'échantillonnage pour que la répercussion du bruit ne se trouve pas augmentée (équation 4-3).

Supposons qu'on utilise un filtre du type $1/(1+T_F \cdot P)$: à quelle fréquence doit-on faire l'échantillonnage pour que l'influence du bruit ne se trouve pas augmentée ?

La fonction d'autocorrélation du bruit devient approximativement

$$C_{bb}(\tau) = \overline{b^2} e^{-|\tau|/T_F}$$

et compte tenu de la déformation introduite par l'échantillonnage (figure 4-1) l'équation (3-15) nous permet de déduire que pour $Te \leq T_F$ l'augmentation de $\overline{\mathcal{E}_b^2}$ est inférieure à 10%.

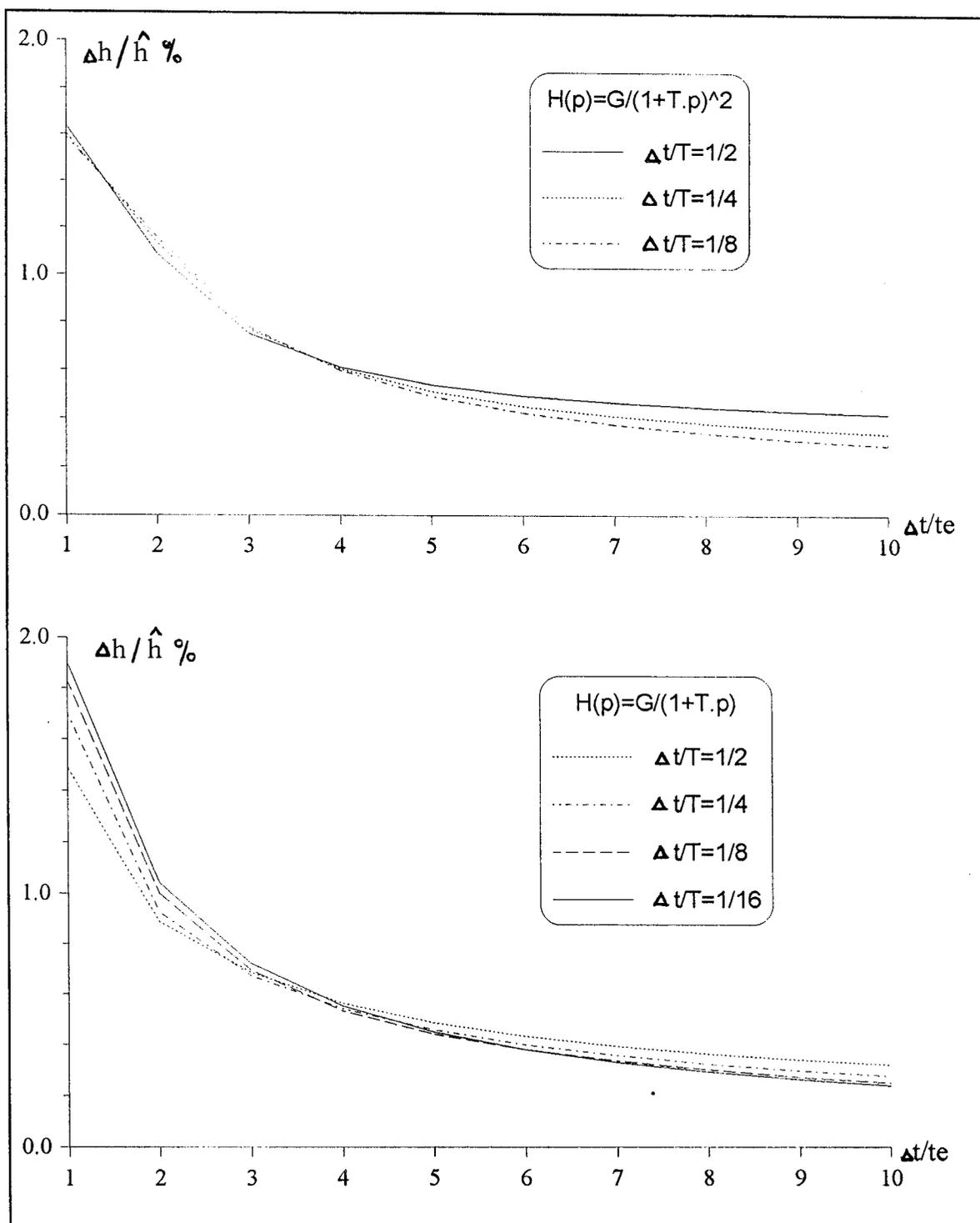


Fig. 4-3: Erreur d'échantillonnage avec extrapolateur d'ordre zéro.

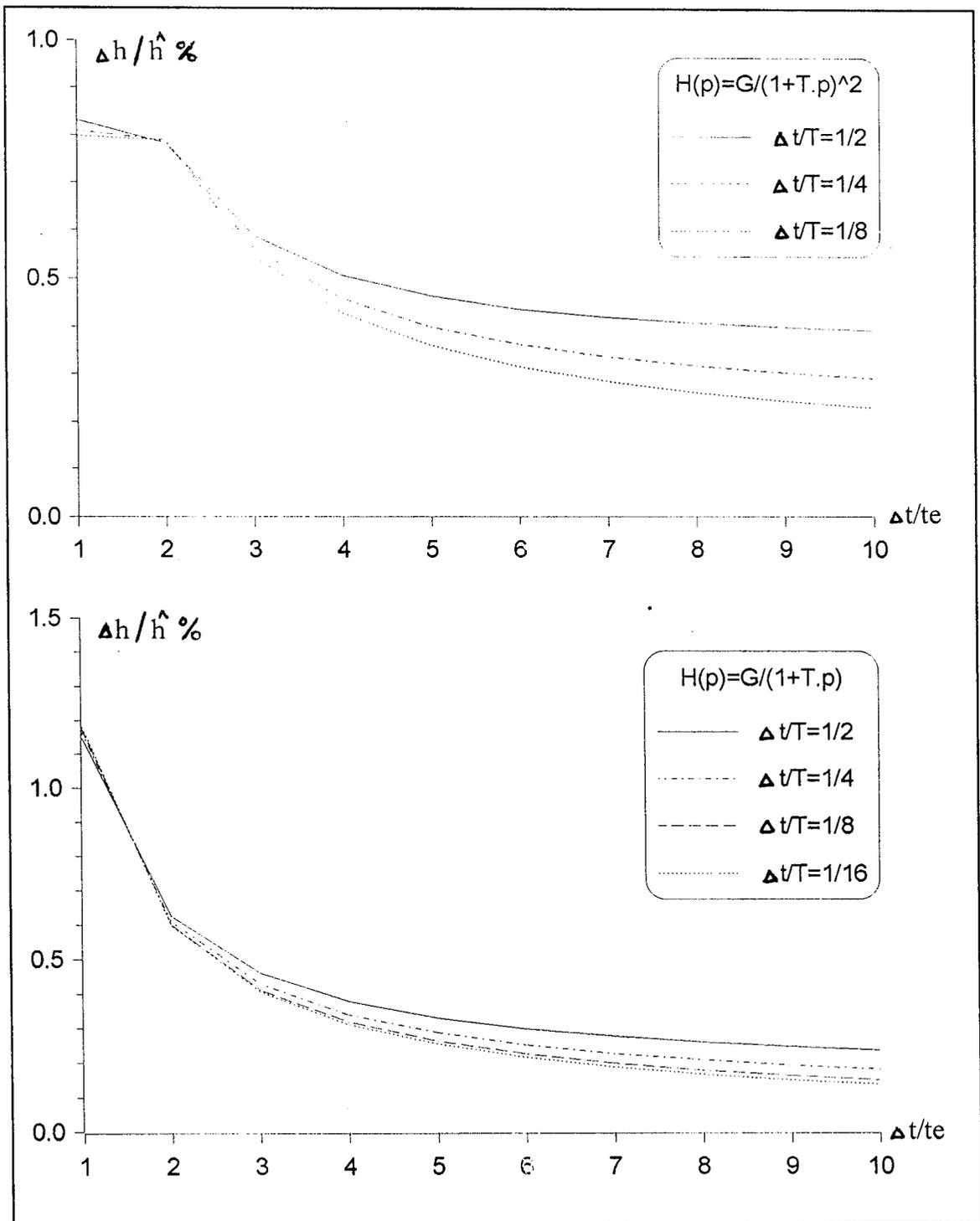
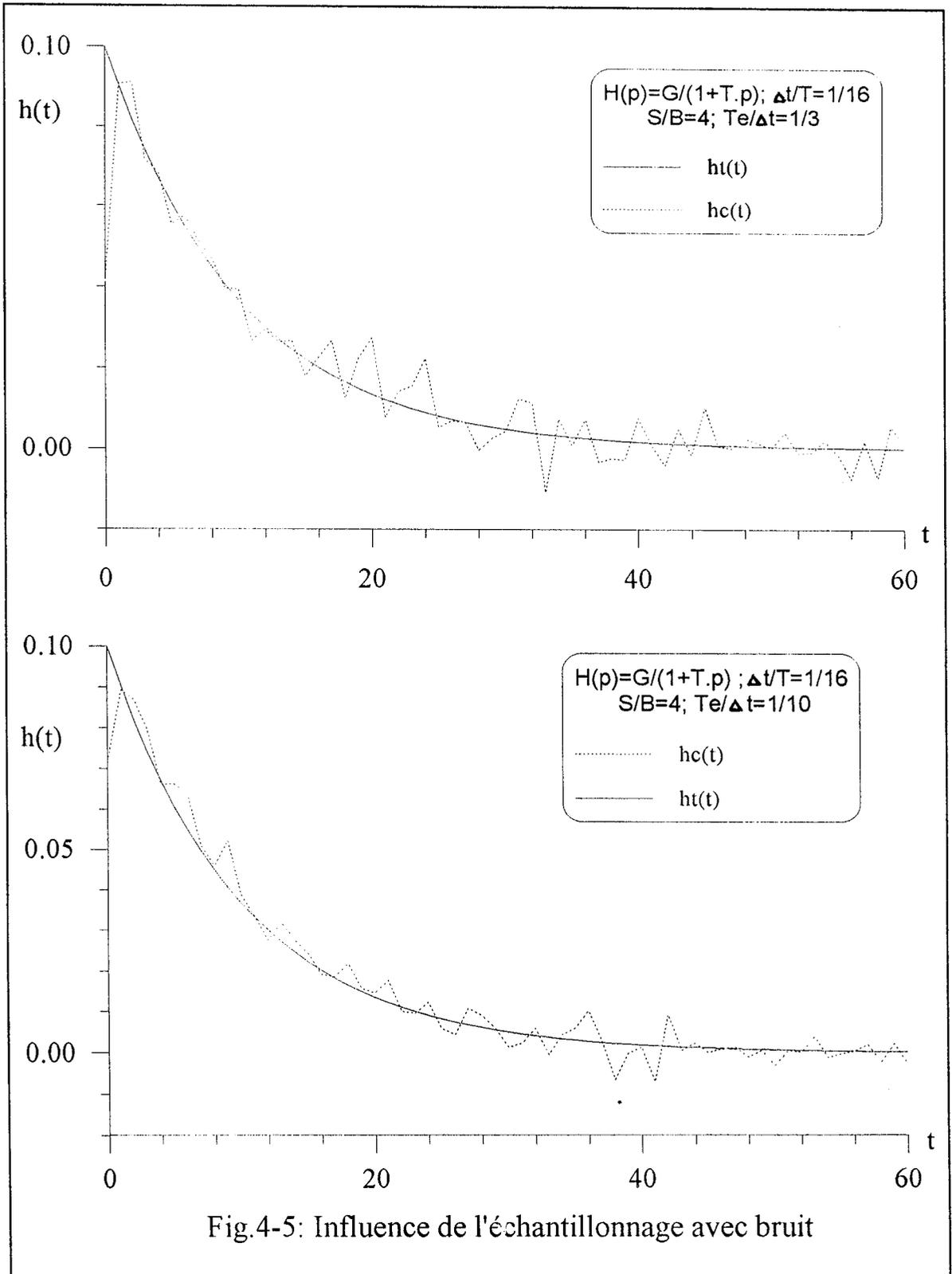


Fig. 4-4: Erreur d'échantillonnage avec interpolation linéaire.



4-3- QUANTIFICATION DU SIGNAL DE SORTIE DU SYSTEME.

La quantification est l'opération non linéaire qui remplace le signal $Y(t)$ par:

$$Y_Q = (n+1/2)q \quad \text{avec } nq \leq Y(t) < (n+1)q$$

La caractéristique de transfert étant celle indiquée dans la figure (4-6), et q étant le pas de quantification.

Le signal quantifié peut aussi être défini par:

$$Y_Q = nq \quad \text{avec } (n-1/2)q \leq Y(t) < (n+1/2)q$$

qui correspond au transfert indiqué sur la figure (4-7).

Etant donné que les calculateurs en temps réel permettent au moins trois chiffres significatifs sur les mesures et que la perturbation due aux séquences est normalement supérieure au millième de la pleine échelle, nous allons considérer ici seulement les cas où $\overline{Y^2} \geq q^2$.

Dans ces conditions, les deux types de quantification correspondant aux figures (4-6) et (4-7) sont équivalentes [11]. En fait la quantification aura lieu selon une caractéristique intermédiaire qui dépend du point de fonctionnement du système.

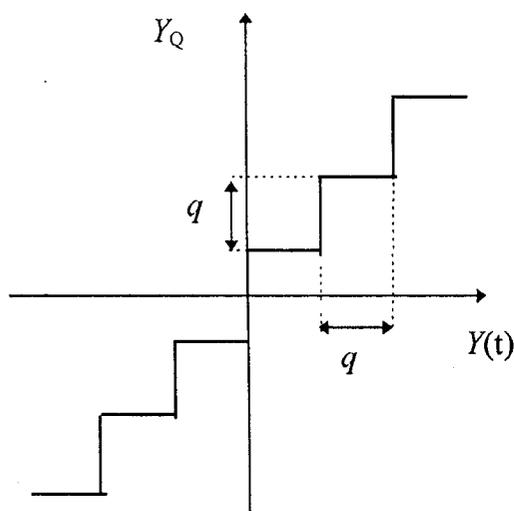


Fig.4-6

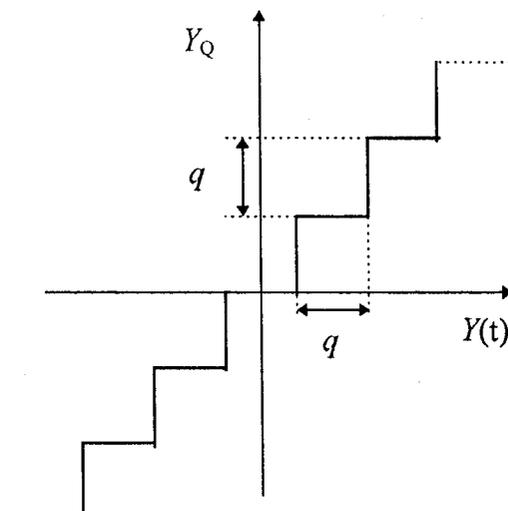


Fig.4-7

La valeur moyenne du signal $Y(t)$ sera transmise avec une erreur inférieure ou égale à $\pm q/2$. Cette erreur n'ayant pratiquement pas de répercussion sur l'identification, nous ne considérons par la suite qu'un signal $Y(t)$ centré.

Alors, si on ne s'intéresse qu'aux propriétés statistiques du second ordre et si $\overline{Y^2} \geq q^2$, on peut linéariser l'opération de quantification en considérant le signal quantifié $Y_Q(t)$ comme égal au signal $Y(t)$ plus un bruit de quantification $Q(t)$ indépendant et de densité de probabilité uniforme (Fig.4-8), [11].

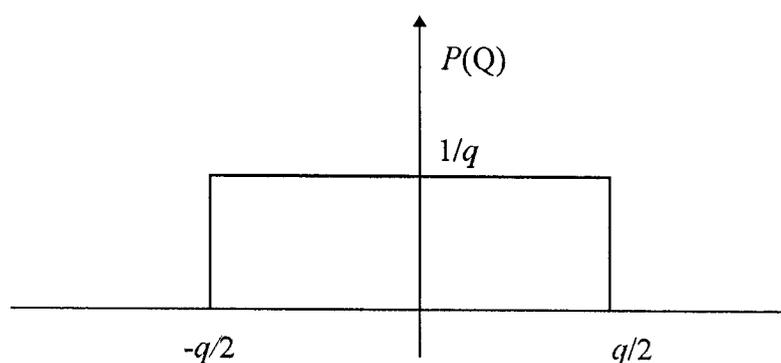


Fig.4-8

On peut donc déduire:

$$\overline{Q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} Q^2 p(Q) dQ = \frac{q^2}{12} \quad (4-7)$$

D'autre part, si la quantification est accompagnée d'un échantillonnage de période Te du signal $Y(t)$, La fonction d'autocorrélation du bruit de quantification devient celle de la figure (4-2) avec $\overline{b^2} = q^2 / 12$.

On peut alors calculer la répercussion de la quantification sur l'identification suivant une méthode similaire à celle développée en 4-2. Ainsi pour $Te \leq \Delta t$ on peut utiliser l'équation (4-4) et si on tient compte de la relation:

$$\overline{Y^2} = C_{YY}(0) = a^2 \Delta t \int_0^{\infty} h^2(t) dt$$

on obtient:

$$\overline{\mathcal{E}_q^2} \cong \frac{\int_0^\infty h^2(t) dt}{12 \frac{L+1}{L} T} \frac{q^2}{Y^2} \frac{Te}{\Delta t} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{Te}{\Delta t} \right) \quad (4-8)$$

Dans le cas particulier d'un système du premier ordre, de (4-8) on déduit:

$$\frac{\overline{\Delta h^2}}{h^2(0)} = \frac{T_1/T}{24 \frac{L+1}{L}} \frac{q^2}{Y^2} \frac{Te}{\Delta t} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{Te}{\Delta t} \right) \quad (4-9)$$

ou' T_1 est la constante de temps du système.

Sur la figure (4-9) on a représenté les erreurs de quantification, en fonction de $\overline{Y^2}/q^2$ et de la longueur de la séquence, obtenues par simulation numérique.

La valeur maximale de cette erreur de quantification peut être déduite approximativement en multipliant l'écart type $\overline{(\Delta h^2)}^{1/2}$, par un facteur égal à 2 ou 3.

Ces résultats montrent que l'influence de la quantification sur l'identification de la réponse impulsionnelle peut être généralement négligée même pour des rapports $\overline{Y^2}/q^2$ proches de l'unité.

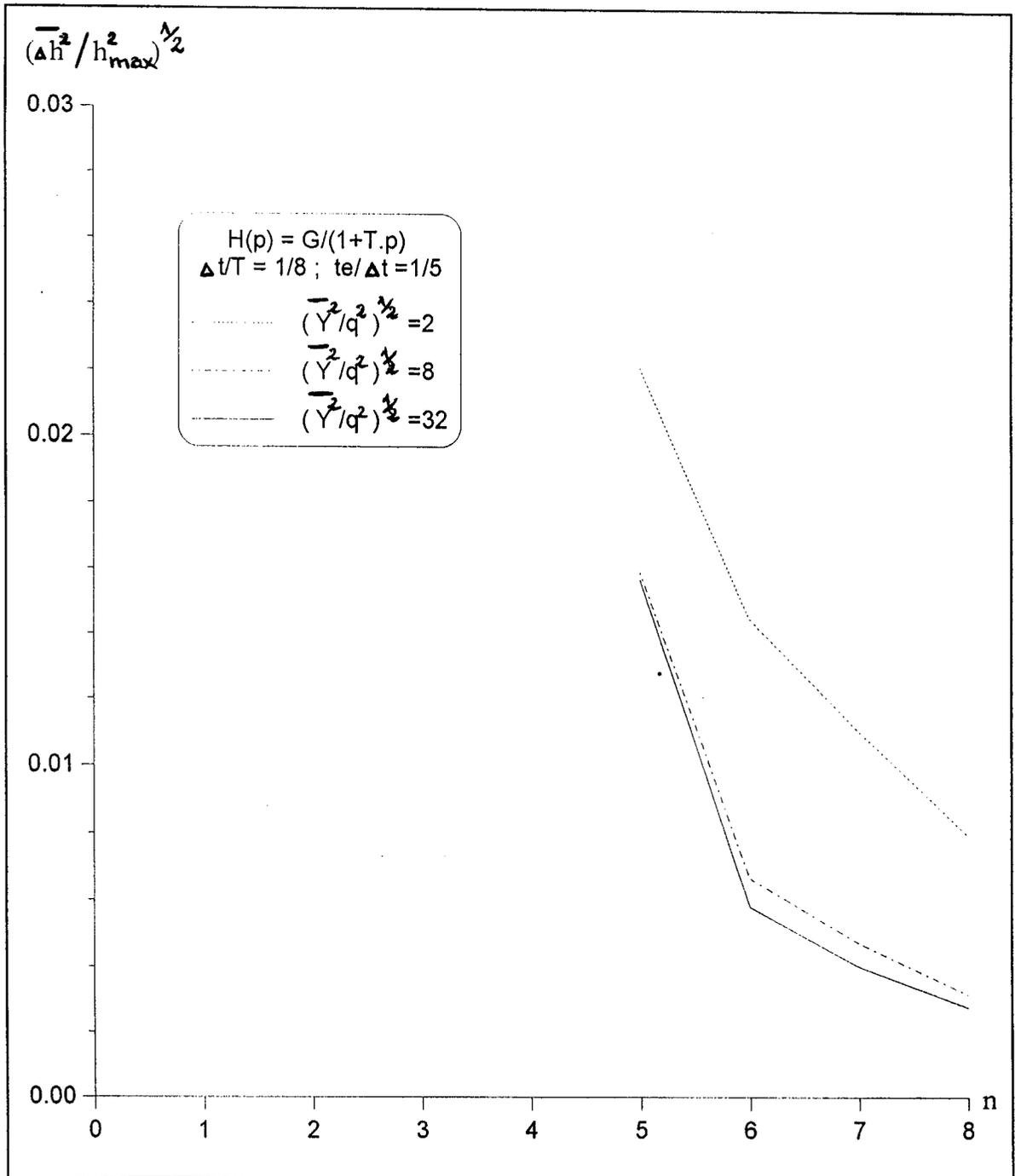


Fig. 4-9: Erreur de quantification

CHAPITRE 5

**IDENTIFICATION DES SYSTEMES
EN BOUCLE FERMEE**

5- IDENTIFICATION DES SYSTEMES EN BOUCLE FERMEE.

5-1- INTRODUCTION.

Lorsqu'on veut identifier un système qui ne peut fonctionner qu'en boucle fermée (pour des raisons de stabilité par exemple), il faut réaliser l'identification sans rompre la boucle d'asservissement.

Cette identification en boucle fermée présente par ailleurs un intérêt certain pour les systèmes entachés de dérives ou d'importantes perturbations à basse fréquence [26] (voir chapitre 3).

Si l'on excite le système bouclé avec une séquence binaire pseudo-aléatoire et si le signal d'écart $e(t)$ est accessible (Fig. 5-1), on peut identifier la réponse impulsionnelle du système en réalisant l'intercorrélation entre $e(t)$ et $Y(t)$. On perd alors d'une part tous les avantages qu'il y a à utiliser une séquence binaire; d'autre part, $e(t)$ et $b(t)$ ne sont plus indépendants.

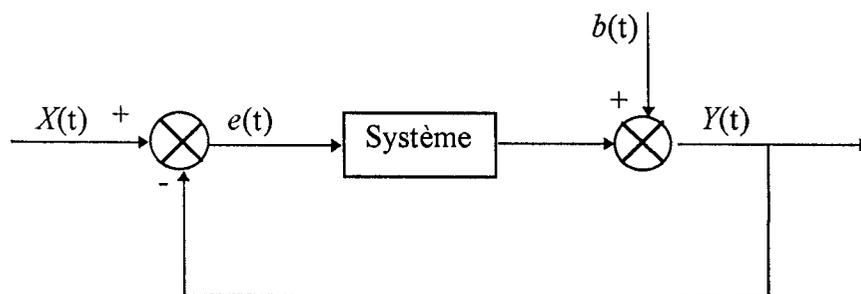


Fig.5-1: Système en boucle fermée.

Il est donc nécessaire d'identifier d'abord le système en boucle fermée, en réalisant l'intercorrélation entre $X(t)$ et $Y(t)$, pour en déduire ensuite la réponse du système en boucle ouverte.

Dans ce qui suit, nous allons décrire une méthode matricielle, qui a été proposée par Menendez [6] et, qui permet d'obtenir la réponse impulsionnelle en boucle ouverte à partir de la réponse impulsionnelle en boucle fermée.

5-2 METHODE MATRICIELLE.

Soit le système échantillonné de la figure (5-2), on peut poser:

$$Y(nTe) = \sum_{i=0}^n h_{n-i}^* X(iTe) \tag{5-1}$$

$$Y(nTe) = \sum_{i=0}^n h_{n-i}^* e(iTe) \tag{5-2}$$

avec $X(iTe) = 0$ pour $i < 0$

h_i et h_{Fi} sont respectivement les réponses impulsionnelles du système échantillonné en boucle ouverte et en boucle fermée.

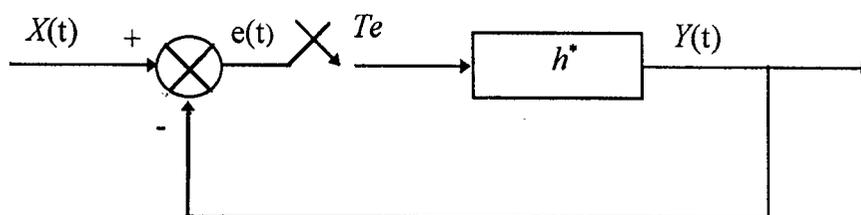


Fig. 5-2: Système échantillonné.

Sous forme matricielle l'équation (5-2) peut s'écrire:

$$\underline{Y} = \underline{H} \cdot \underline{E} \tag{5-3}$$

avec

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} ; \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} ; \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} h_0^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1^* & h_0^* & 0 & \dots & 0 \\ h_2^* & h_1^* & h_0^* & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n^* & h_{n-1}^* & h_{n-2}^* & \dots & h_0^* \end{bmatrix} \tag{5-4}$$

d'autre part on peut poser:

$$\underline{E} = \underline{X} - \underline{Y}$$

et avec (5-3), on obtient:

$$\underline{Y} = \underline{H} (\underline{X} - \underline{Y})$$

d'où

$$\underline{Y} = (\underline{I} + \underline{H})^{-1} \cdot \underline{H} \underline{X}$$

La matrice de transfert du système en boucle fermée, \underline{H}_F , peut alors s'exprimer:

$$\underline{H}_F = (\underline{I} + \underline{H})^{-1} \cdot \underline{H} \quad (5-5)$$

Le fait que pour les systèmes physiques $h^*(0) = 0$ permet de résoudre facilement l'équation (5-5). En effet écrite sous la forme:

$$\underline{H} = (\underline{I} + \underline{H}) \cdot \underline{H}_F \quad (5-6)$$

cette équation nous permet de poser les relations suivantes:

$$\begin{aligned} h_0^* &= 0 \\ h_1^* &= h_{F1}^* \\ h_2^* &= h_{F2}^* + h_1^* h_{F1}^* \\ h_3^* &= h_{F3}^* + h_2^* h_{F1}^* + h_1^* h_{F2}^* \\ h_4^* &= h_{F4}^* + h_3^* h_{F1}^* + h_2^* h_{F2}^* + h_1^* h_{F3}^* \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

à partir desquelles on peut calculer la réponse impulsionnelle en boucle ouverte, h^* , par un simple calcul itératif très facilement programmable.

Puisque pour deux systèmes en série, on a la relation $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$, une méthode similaire à celle qui vient d'être décrite peut être utilisée pour identifier un système en série avec un autre système de transfert connu, ainsi que pour identifier un système bouclé à retour non unitaire.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que le cas d'un système échantillonné, mais on peut aussi bien appliquer cette méthode à des systèmes continus en considérant un échantillonnage fictif à fréquence assez élevée pour que, avec $h_i^* = Te h(iTe)$, les équations numériques (5-1) et (5-2) puissent conduire à une bonne précision. Mieux encore, on peut utiliser la matrice de transfert \underline{h}^* (voir § 3-2) avec laquelle l'équation (5-1) est exactement vérifiée (puisque avec $Te = \Delta t$ la séquence binaire $X(t)$ reste constante entre deux instants d'échantillonnage successifs).

L'imprécision aux basses fréquences de l'identification en boucle fermée (§ 5-1) se traduit maintenant par le fait qu'une erreur continue sur la réponse en boucle fermée fait apparaître une importante erreur sur la queue de la réponse impulsionnelle en boucle ouverte. Si le système en boucle ouverte est stable ($\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$) ou s'il ne comporte qu'un intégrateur, l'erreur est très facilement détectée. On peut alors, lorsque la période de la séquence est supérieure au temps de réponse du système en boucle ouverte, corriger cette erreur de façon efficace avec un calcul itératif simple.

5-3 RESULTATS DE SIMULATION NUMERIQUE.

Afin de tester cette méthode d'identification des systèmes en boucle fermée, nous avons procédé à une série d'essais par simulation numérique sur des systèmes continus, dont les résultats sont représentés sur les figures (5-3) à (5-7). A titre d'illustration, nous avons donné sur la figure (5-8) l'organigramme du programme de simulation correspondant aux résultats de la figure (5-3).

Les réponses en boucle fermée, $h_F^*(k)$, correspondent aux fonctions d'intercorrélation réalisées sur le second cycle de la séquence et après correction de l'erreur continue.

Puisqu'il s'agit de systèmes continus, le signal d'écart $e(t)$ ne varie pas par paliers et en conséquence la relation (5-2) n'est vérifiée qu'approximativement. Cela crée de petites erreurs (qui diminuent avec Δt) qui s'accumulent sur le calcul des différents points successifs de la réponse en boucle ouverte.

C'est donc l'identification statique du système en boucle ouverte qui est principalement entachée d'erreurs, comme on peut vérifier sur les figures (5-3) à (5-5), cette erreur dépend de la valeur de Δt par rapport à la dynamique en boucle fermée.

La période de la séquence doit être bien supérieure au temps de réponse du système en boucle fermée, sinon d'importantes erreurs apparaissent sur la réponse en boucle ouverte (fig. 5-4C et fig. 5-5A).

De même, des erreurs très importantes sur la réponse en boucle ouverte ont lieu lorsqu'une erreur continue, ε_c , apparaît sur l'identification en boucle fermée. Les résultats indiqués (fig. 5-6) montrent qu'une erreur continue sur la réponse en boucle fermée supérieure à 1% ($\varepsilon_c/h_{Fmax}^* > 0.01$) entraîne une très mauvaise identification en boucle ouverte. On peut éviter cette erreur en ajoutant une composante continue à la réponse en boucle fermée jusqu'à ce que la queue de la réponse en boucle ouverte soit horizontale (fig. 5-6).

La figure (fig. 5-7) montre le résultat d'identification d'un système en boucle fermée dont la sortie est entachée d'un bruit Gaussien centré. On peut constater que la variance et l'indépendance des erreurs sont pratiquement conservées lors du calcul matriciel pour l'obtention de la réponse en boucle ouverte.

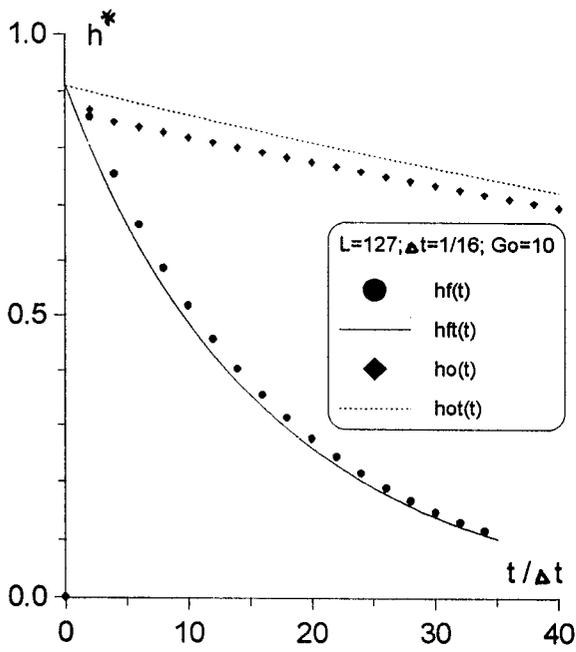


Fig. 5-3a

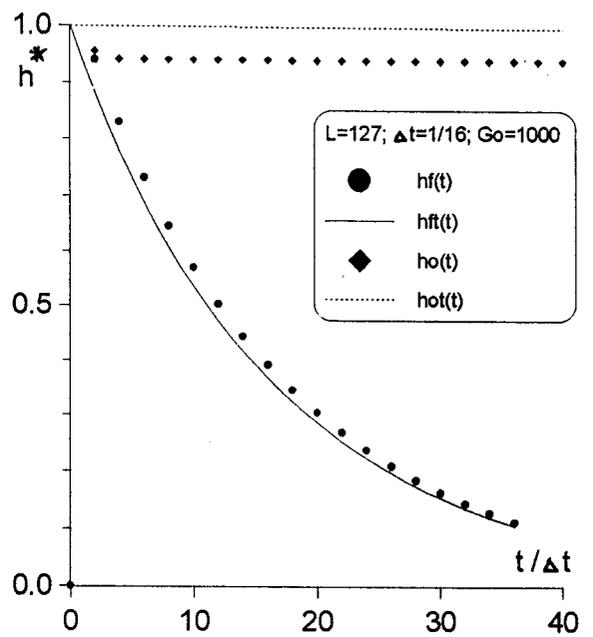


Fig. 5-3b

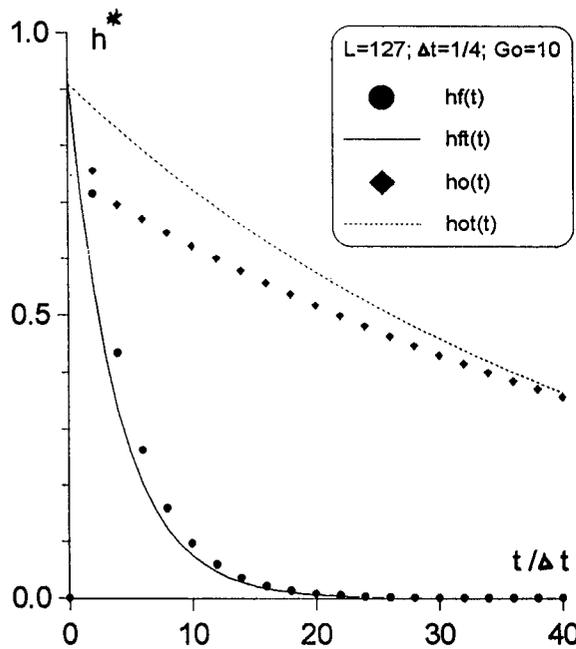
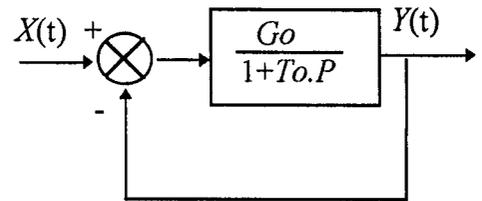


Fig. 5-3c



on prend $To = Go + 1$

d'ou' $H_r(P) = G/(1 + T_1.P)$

tel que

$$G = Go/(Go + 1) \text{ et } T_1 = To/(Go + 1).$$

Fig. 5-3: Identification en boucle fermée d'un système de 1^{er} ordre.

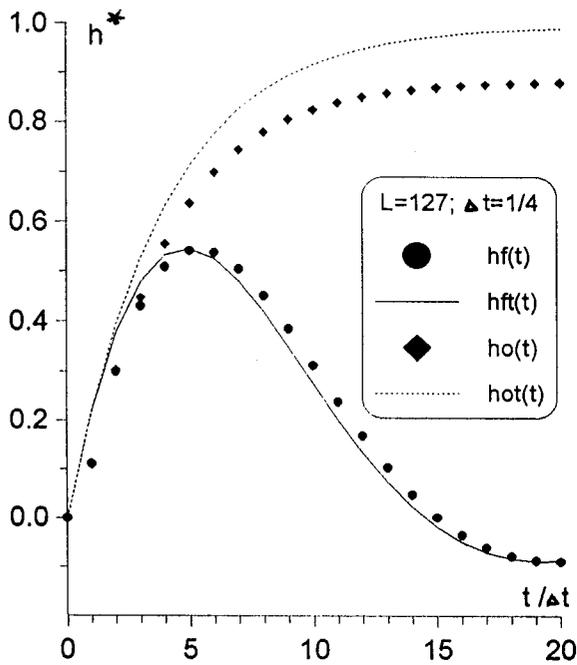


Fig. 5-4a

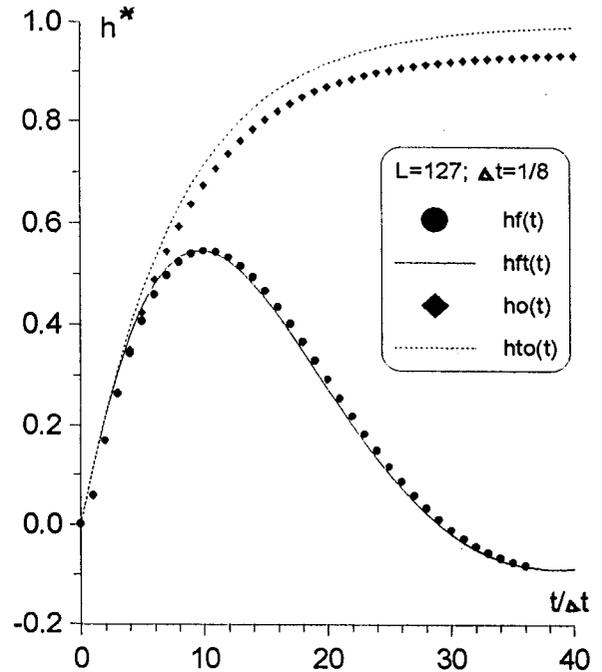


Fig. 5-4b

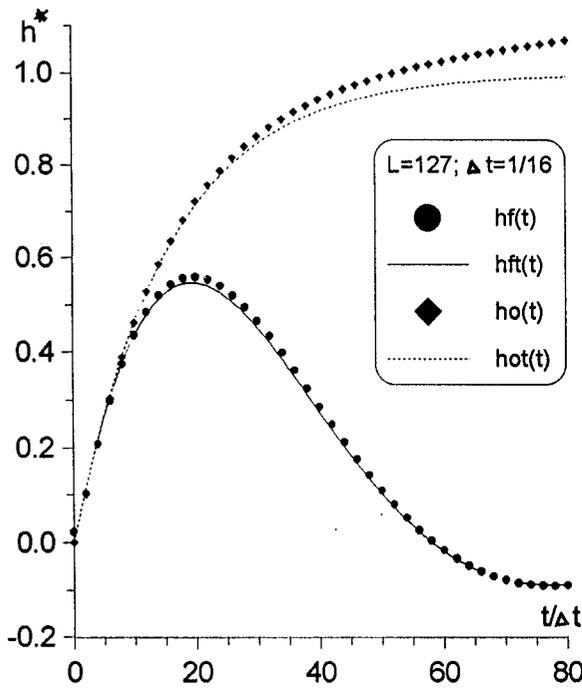
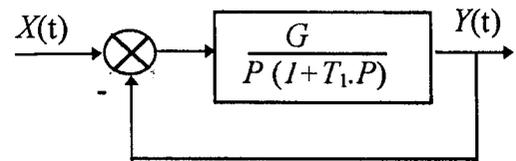


Fig. 5-4c.



$$H_F(P) = \omega_o^2 / (\omega_o^2 + 2\omega_o z.P + P^2)$$

tel que

$$\omega_o = \sqrt{G/T_1} \text{ et } z = 1/2.\omega_o.T_1$$

On prend $G = T_1 = 1$

Fig. 5-4: Identification en boucle fermée d'un système de 2^{ème} ordre

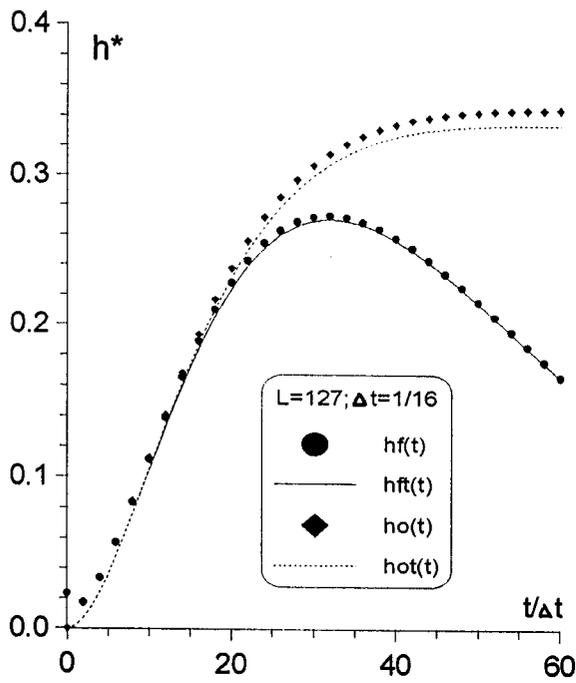


Fig. 5-5a

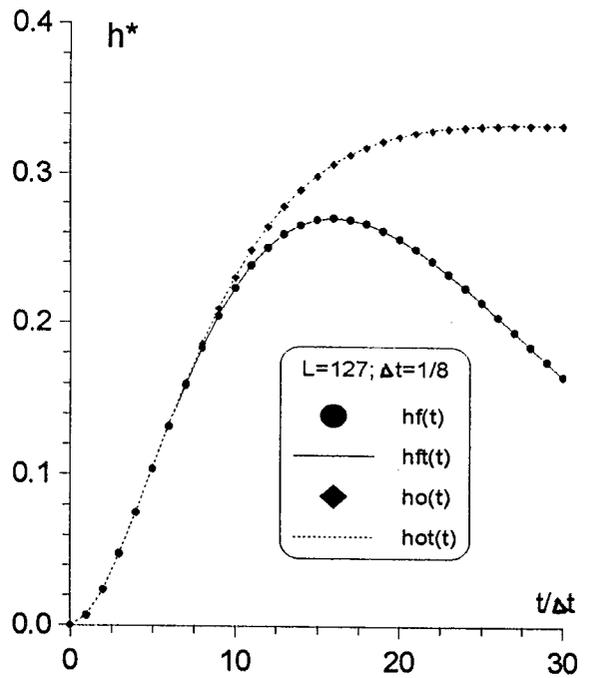


Fig. 5-5b

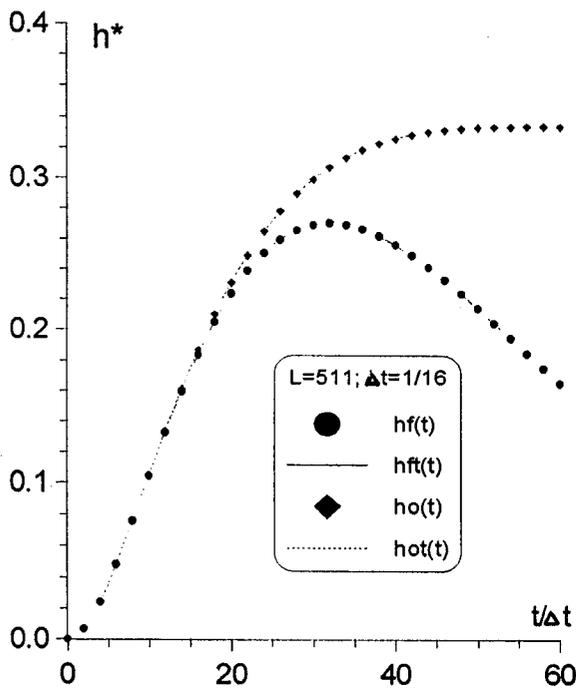
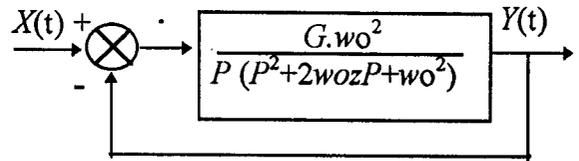


Fig. 5-5c.



On prend $G = 1/3$; $z = \sqrt{3}/2$; $wo = \sqrt{3}$

d'ou' $H_f(P) = 1/(1+P)^3$

Fig. 5-5: Identification en boucle fermée d'un système de 3^{ème} ordre.

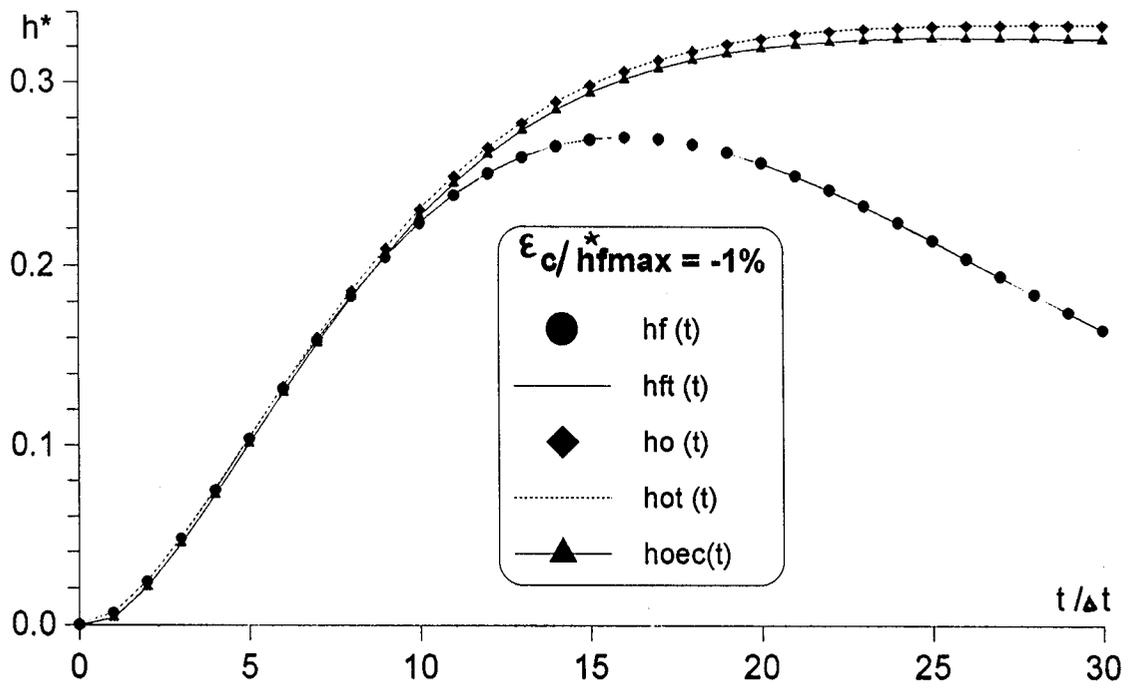
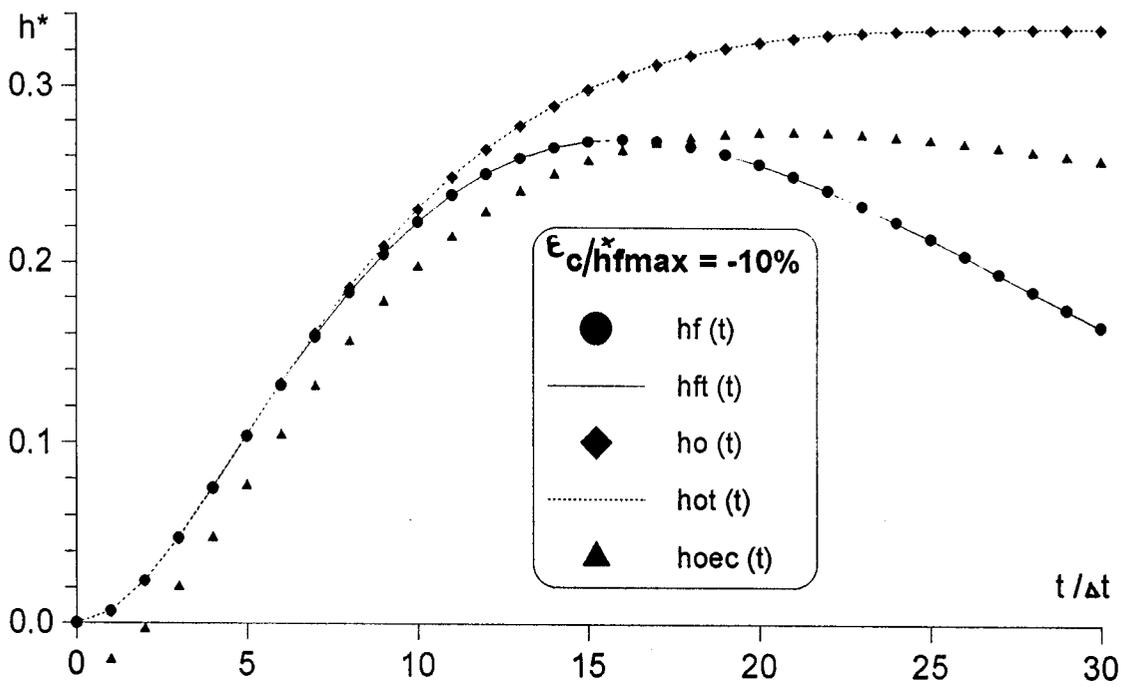


Fig. 5-6: Influence des erreurs continues sur l'identification en boucle fermée

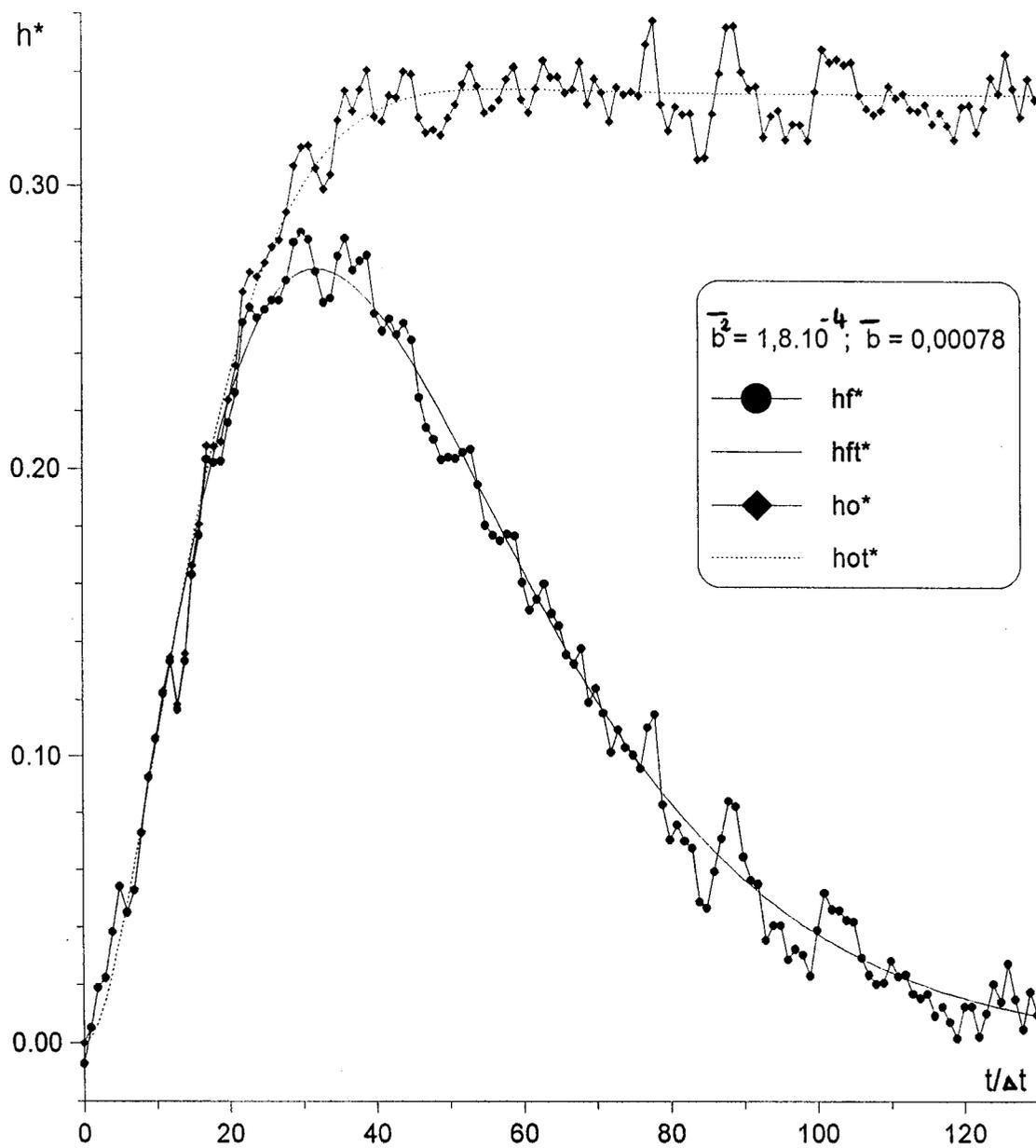
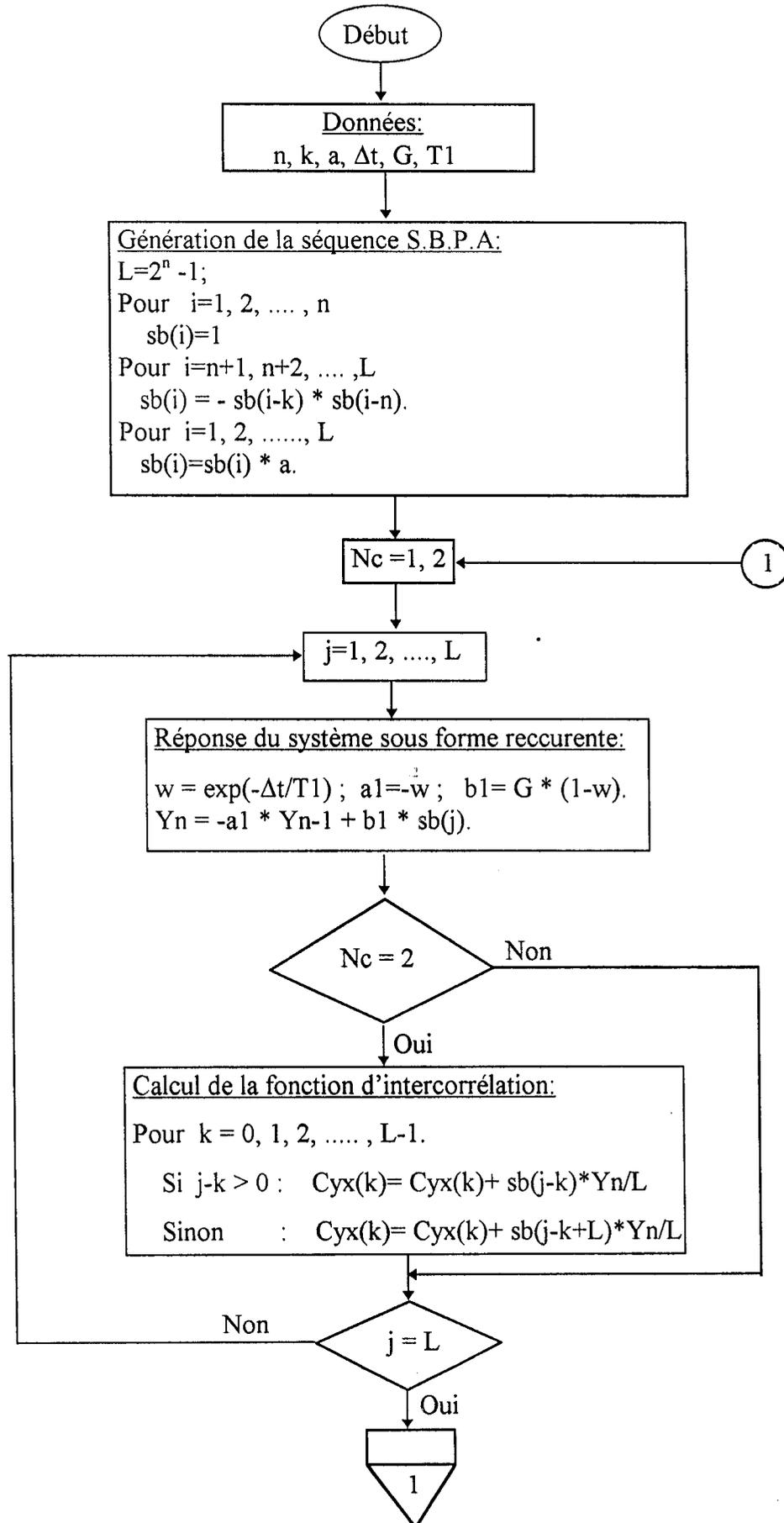


Fig. 5-7: Identification en boucle fermée en présence de bruit



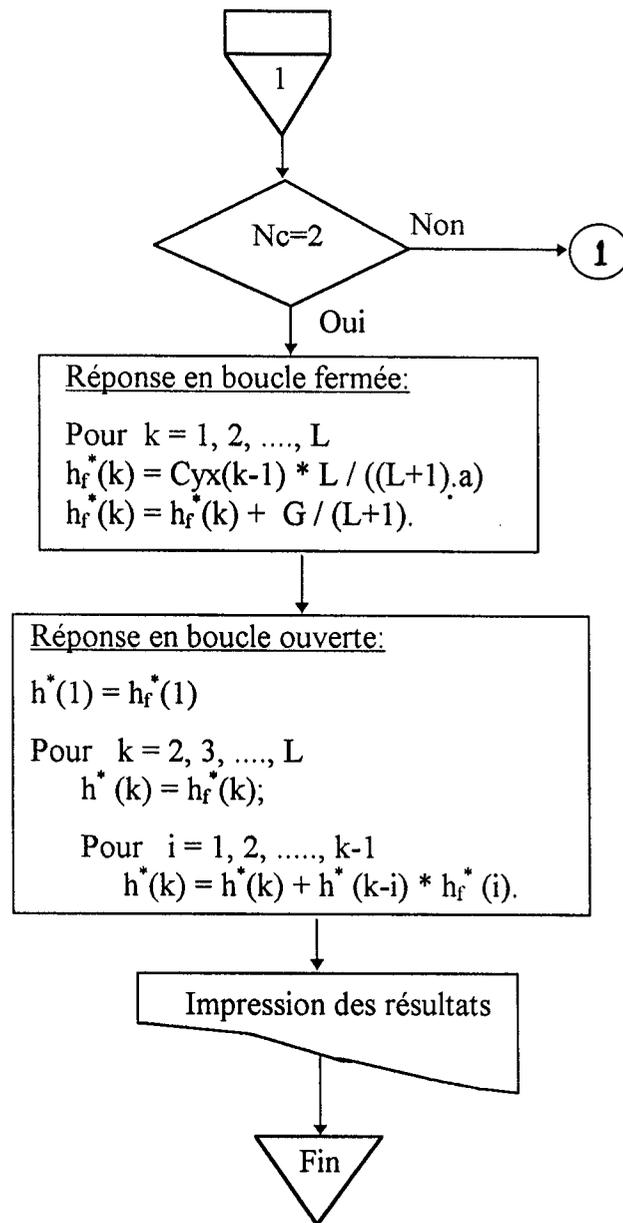


Fig. 5-8: Organigramme de l'identification en boucle fermée d'un système de 1^{er} ordre.
 (correspondant aux résultats de la figure 5-3)

CHAPITRE 6

**DETERMINATION DE LA FONCTION
DE TRANSFERT A PARTIR DE LA
REPONSE IMPULSIONNELLE**

6 - DETERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT A PARTIR DE LA REPONSE IMPULSIONNELLE.

Nous venons d'étudier une méthode permettant d'obtenir le modèle d'un système sous forme de sa réponse impulsionnelle (ou sa séquence de pondération). Cependant, on peut dire de façon générale que l'on préfère, pour calculer la commande du système, un modèle sous forme de fonction de transfert ou de variables d'état. Toutes ces représentations sont bien sûr équivalentes.

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer la fonction de transfert d'un système à partir de sa réponse impulsionnelle ou de sa séquence de pondération. Parmi ces méthodes, une grande variété passe par la réponse fréquentielle du système [8]; d'autres utilisent les propriétés des transformées de Fourier ou de Laplace, pour construire des algorithmes, soit basés sur des approximations par séries, soit permettant de déterminer directement les pôles de la fonction de transfert [10].

Notons aussi la possibilité de raisonner sur la réponse indicielle (qui n'est autre que l'intégrale de la réponse impulsionnelle) pour utiliser les méthodes permettant, à partir de cette dernière, l'obtention de la fonction de transfert [1], [10].

Cependant, La majorité de ces méthodes s'appliquent pour des cas bien déterminés. Par contre, la méthode dite du modèle ne nécessite que le choix d'une structure *à priori* pour la fonction de transfert, elle offre l'avantage de s'appliquer sur tous les types de systèmes et présente aussi beaucoup de souplesse dans le choix du modèle et la sélection de l'algorithme d'optimisation.

6-1 LA METHODE DU MODELE.

6-1-1 Principe.

Cette méthode cherche à établir une analogie de comportement entre le système physique et le modèle en agissant sur les coefficients de celui-ci; la structure du modèle est choisie préalablement.

La qualité de l'identification est évaluée par un critère mesurant la différence entre la réponse du système et celle du modèle; utilisée en temps différé, la méthode du modèle exploite toute la réponse du procédé. Les paramètres du modèle sont réajustés par itérations successives jusqu'à la valeur minimale du critère.

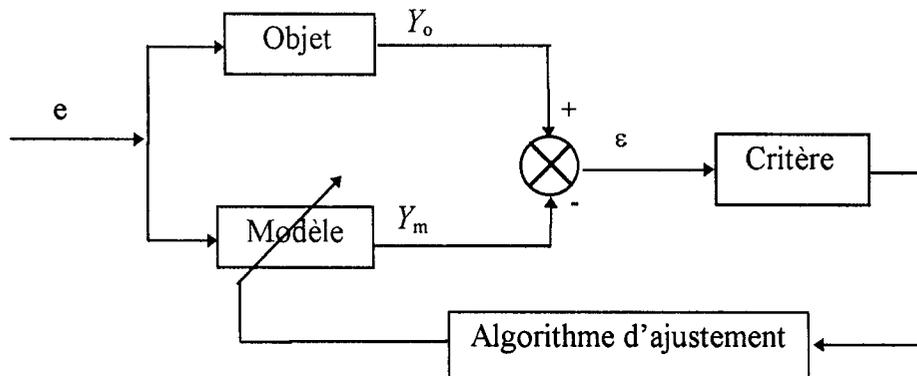


Fig. 6-1: Méthode du modèle.

Comme le montre la figure (6-1), la méthode du modèle constitue un système en boucle fermée. Le modèle est amélioré à chaque itération, si la convergence est assurée. L'évolution des paramètres est suivie aisément à chaque pas de calcul; La détection des erreurs s'en trouve facilitée.

6-1-2 Notion de distance objet-modèle.

La substitution d'un processus réel par un modèle amène donc à comparer deux comportements entrée-sorties: celui du processus physique (l'objet) et celui du système mathématique (le modèle). La validité du modèle est appréciée par la distance objet-modèle: dans l'espace paramétrique où un point représente le modèle, un autre le système; le critère est une distance entre les deux. Le problème posé par l'identification consiste à minimiser la distance procédé-modèle en agissant sur les coefficients de ce dernier. On définit habituellement les distances suivantes [9]:

- La distance de structure.
- La distance d'état.

6-1-2-1 La distance de structure.

Cette distance fait intervenir l'écart entre les paramètres de l'objet et ceux du modèle, soient:

P_{O_i} les paramètres du procédé (objet),

P_{m_i} les paramètres du modèle.

Pour un modèle comprenant n paramètres, La distance de structure sera par exemple:

$$D(o,m) = \sum_{i=1}^n (P_{O_i} - P_{m_i})^2$$

Cette distance est très significative de la qualité du modèle,

Malheureusement, cette distance de structure n'est pas mesurable directement, puisque les paramètres du procédé étant les inconnues du problème; on la mesure donc à travers ses effets sur la sortie. D'autre part, si le modèle est de représentation, la signification physique de cette distance devient moins claire.

6-1-2-2 La distance d'état.

Cette distance dépend de la différence des comportements temporels de la sortie du système et de celle du modèle. A partir de l'écart:

$$\varepsilon(i) = Y_o(i) - Y_m(i)$$

ou' $Y_o(i)$: sortie du procédé au $i^{\text{ème}}$ échantillonnage.

$Y_m(i)$: sortie du modèle au $i^{\text{ème}}$ échantillonnage.

Divers critères peuvent être définis, la formulation quadratique est la plus utilisée:

$$C = \sum_{i=1}^n \varepsilon(i)^2$$

ou' n : nombre de points d'échantillonnage.

6-1-3 Choix du critère et de la méthode d'estimation.

Pour juger la qualité de l'identification, nous avons retenu le critère quadratique, car il présente deux avantages: il a une interprétation physique évidente, et il est facile à traiter mathématiquement.

L'estimation proprement dite c'est la phase qui détermine les valeurs numériques optimales des paramètres du modèle, minimisant le critère choisi.

Le choix de l'algorithme d'optimisation dépend du modèle choisi et plus particulièrement de l'expression des paramètres dans le critère. Si l'expression des paramètres dans le critère est linéaire, les algorithmes seront fondés sur des méthodes statistiques (du type des moindres carrés), par contre si l'expression est non linéaire, les algorithmes seront architecturés autour de **la programmation non linéaire (P.N.L.)**.

6-2 IDENTIFICATION PARAMETRIQUE A L'AIDE DE LA P.N.L.

6-2-1 Définition de la programmation non linéaire.

La programmation non linéaire (P.N.L) recouvre l'ensemble des techniques dont l'objectif est la résolution des problèmes de minimisation de fonctionnelles non linéaires. Il existe de très nombreuses méthodes d'optimisation qui peuvent être classées en trois catégories:

- méthodes de recherche directe (heuristiques),
- méthodes du gradient (du 1^{er} ordre),
- méthodes du type Newton (du second ordre).

a- Les méthodes directes: elles sont basées sur la technique « d'essais-erreurs ». Elles s'appliquent à une large classe de fonctions; seule la continuité est supposée vérifiée. Aucune condition de dérivabilité n'est requise.

b- Les méthodes du gradient: Le gradient est la direction où, localement, une fonction différentiable augmente le plus rapidement. La méthode du gradient utilise les dérivées partielles de la fonction « objectif » pour le choix de la direction dans laquelle s'effectue l'exploration.

c- Les méthodes du second ordre: Dans le cas monovarié, la minimisation revient à résoudre l'équation $\frac{\partial f}{\partial X} = 0$.

Pour trouver la valeur de X qui minimise la fonction $f(X)$, il faut linéariser la fonction autour du point courant X_k et résoudre le problème de manière itérative:

$$X_{k+1} = X_k - \frac{\delta f}{\delta X} \left[\frac{\delta^2 f}{\delta X^2} \right]^{-1}$$

Cet algorithme, nommé méthode « du type Newton » nécessite le calcul des deux premières dérivées de $f(X)$. L'extension au cas multidimensionnel s'effectue en modifiant l'équation précédente:

$$X_{k+1} = X_k - \frac{\delta f}{\delta X} \left[\frac{\delta^2 f}{\delta X_i \delta X_j} \right]^{-1}$$

ce qui implique le calcul de la matrice des dérivées secondes (Hessien) et son inversion.

Malgré l'existence de nombreuses méthodes de P.N.L, aucune ne présente un caractère général et une convergence à toute épreuve.

6-2-2 Application de la P.N.L à l'identification des systèmes.

Pour réaliser une identification, l'automaticien dispose de n couples de valeurs représentant l'évolution de la sortie du procédé en fonction d'une entrée particulière. L'identification peut se ramener à un problème plus général: L'ajustement de données expérimentales à un modèle mathématique.

La programmation non linéaire n'est pas une technique propre à l'identification, mais l'utilisation faite par l'automaticien est particulière. A partir de la réponse d'un système (dans le cas présent c'est la réponse impulsionnelle), on choisit un modèle (dans notre cas c'est la fonction de transfert) représentant au mieux le procédé étudié. Pour obtenir la valeur des paramètres du modèle, on minimise à l'aide d'un algorithme de P.N.L, le critère quadratique.

Ce critère (somme des carrés des écarts entre les points de la courbe expérimentale et les points de la courbe du modèle) est fonction de la valeur des paramètres P_j du modèle:

$$C = C(\underline{P}).$$

Le problème d'optimisation consiste donc à minimiser C par rapport aux variables P_j .

6-3 IDENTIFICATION DES PARAMETRES DE LA FONCTION DE TRANSFERT.

6-3-1 Données du problème.

Considérons l'espace engendré par l'ensemble des paramètres structuraux relatifs au modèle proposé. Dans cette espace, dit paramétrique, l'objet est représenté par un point nominal « O » et le modèle par un point « M » porté par le vecteur \underline{P} représentant les différents paramètres du modèle. L'objectif est de ramener, par un processus itératif, le point M dans un hyper-ellipsoïde centré sur le point nominal O.

Toutefois, pour les systèmes réels on montre, dans [27] cité par [13], d'une part, que l'on ne peut descendre en dessous d'un certain intervalle de confiance, associé à un minimum non nul du critère C (ce minimum non nul exprime l'écart entre modèle et objet en termes de bruits, de non linéarités de non stationnarité, d'erreur d'ordre, ...) et, d'autre part, que l'optimum n'est pas obligatoirement au centre de cet intervalle de confiance.

Soit \underline{P}_i le vecteur des paramètres à l'itération (i); à l'itération (i+1), nous aurons:

$$\underline{P}_{i+1} = \underline{P}_i + \Delta \underline{P} \quad (6-1)$$

ou $\Delta \underline{P}$ est la variation des paramètres telle que la convergence vers la distance minimale soit la plus sûre et la plus rapide.

6-3-2 Choix de l'algorithme d'optimisation.

Le choix de l'algorithme d'estimation dépend en particulier de la précision demandée sur les paramètres à identifier, de la rapidité de convergence et surtout des connaissances *a priori* des caractéristiques du système à identifier.

Etant donnée la diversité des méthodes du point de vue robustesse et rapidité de convergence, dans l'application de la méthode du modèle à l'identification des systèmes à partir des entrées-sorties quelconques, plusieurs auteurs [14], [15], [17], pour pallier à des éventuels échecs de la procédure d'identification, utilisent une combinaison de certaines méthodes connues par leur robustesse (telle que la méthode du simplexe), avec d'autres méthodes connues par leur rapidité de convergence près de l'optimum, telle que la méthode de Newton-Gauss.

Dans le cas présent, pour l'obtention de la fonction de transfert, notre point de départ c'est la réponse impulsionnelle ; ce qui nous permet d'estimer des valeurs initiales des paramètres assez proches de l'optimum, en s'aidant directement de la forme de la réponse impulsionnelle obtenue par corrélation.

A partir de ces considérations, nous avons retenu la méthode de Marquardt- Levenberg [21] (annexe I); que nous pensons, à l'instar d'autres auteurs [13], [19] et [22], constituer une méthode de compromis. Elle est une combinaison astucieuse de la méthode du gradient et de celle de Newton-Gauss et qui permet d'éviter aussi leurs propres limitations.

6-3-3 Optimisation avec contraintes.

Parmi les modèles très utilisés, il y a le modèle de deuxième ordre avec pôles complexes; dont la fonction de transfert est une fonction du gain G , de la pulsation propre ω_0 et du coefficient d'amortissement z . Pour un modèle avec oscillations amorties on a $0 < z < 1$; la détermination de la fonction de transfert de tels systèmes nécessite alors une méthode d'optimisation avec contraintes.

La technique la plus simple pour traiter un problème de recherche de minimum sous contraintes est la technique des fonctions de pénalisation [17]. Cependant, à l'exception de la méthode d'UZAWA [25] (annexe II) que nous avons utilisé, nous ne disposons pas de la bibliographie traitant ce genre d'optimisation avec contraintes.

6-3-4 Quelques aspects pratiques de l'identification.

Lorsque l'on met en oeuvre les algorithmes d'identification, plusieurs aspects pratiques de cette procédure doivent être pris en considération, entre autres, on peut citer les points suivants:

6-3-4-1 Choix du modèle.

Pour choisir entre le modèle continu et le modèle discret, nous avons pris en considération les points ci-dessous; ce qui nous a amené à choisir le modèle continu de la fonction de transfert.

A- On peut facilement passer d'une fonction de transfert continue à une fonction de transfert échantillonnée à une période T_e quelconque par l'intermédiaire de la transformée en Z ; par contre il serait difficile de passer d'une fonction de transfert échantillonnée à une période T_{e1} à une fonction de transfert échantillonnée à une période T_{e2} au cas où on s'apercevrait qu'un premier choix de la période d'échantillonnage ne serait pas satisfaisant: il faudrait recommencer la procédure d'identification, ce qui est un inconvénient des modèles discrets.

B- le nombre de paramètres à identifier, pour un modèle de même ordre, est toujours plus élevé pour les modèles discrets. Cette augmentation du nombre de paramètres pourrait remettre en cause la convergence des algorithmes.

6-3-4-2 Choix de l'ordre d'un modèle.

Lorsque l'on choisit un modèle particulier, la question la plus délicate réside dans le choix de l'ordre de ce modèle. Il est bien évident qu'il n'existe pas de réponse générale à cette question, car l'ordre du système que l'on analyse n'a aucune existence (au sens philosophique) réelle.

Il s'agit donc de rechercher l'ordre suffisant du modèle permettant de traduire le comportement observé; cependant cet ordre ne doit pas être trop grand pour ne pas demander un volume de calcul trop important. A cet effet, il a été mis au point quelques critères permettant, *a posteriori*, de choisir un ordre optimal.

Soit « d » la dimension du vecteur des paramètres inconnus \underline{P}_n ou n est l'ordre du modèle, AIKAKE [28] cité par [1], a proposé deux critères (qui conduisent sensiblement aux mêmes résultats):

- le critère de l'Erreur de Prédiction Final (*EPF*):

$$C_N^{EPF}(n) = C_N(\hat{\underline{P}}_n) \frac{1+d/N}{1-d/N}$$

ou \underline{P}_n : vecteur des paramètres estimés

N : nombre de points (échantillons).

- le critère d'Information de Aikake (*IA*):

$$C_N^{IA}(n) = \log C_N(\hat{\underline{P}}_n) + 2 \frac{d}{N}$$

L'évolution qualitative de ces critères est indiquée (Fig. 6-2), ce qui permet de choisir l'ordre optimal comme étant celui à partir duquel l'augmentation de l'ordre n n'apporte plus d'amélioration sensible sur la valeur du critère.

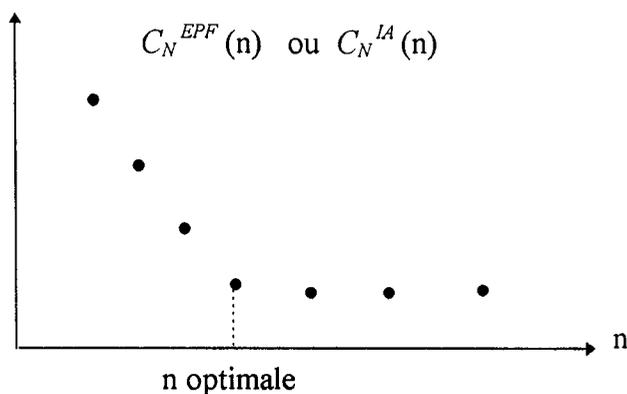


Fig. 6-2

6-3-4-3 Traitement du gain et des retards purs.

L'introduction des paramètres gain et retard pur dans les équations des modèles est possible mais l'augmentation de la complexité des expressions impliquerait un temps de calcul beaucoup plus important; l'augmentation du nombre de paramètres pourrait remettre en cause la convergence des algorithmes.

Pour alléger l'identification, on préfère déterminer ces paramètres hors des algorithmes de programmation non linéaire.

A- Détermination du gain.

Le gain peut être déterminé soit à partir de la réponse impulsionnelle (par intégration), soit directement d'après le régime permanent de la réponse indicielle. Pour améliorer la précision, la valeur du régime permanent est moyennée sur les derniers points de mesure. le gain du système est donc calculé rapidement et précisément.

B- Identification des retards purs:

Lors de l'identification et de la commande des procédés par ordinateur numérique, les informations ne sont prises en compte qu'aux instants d'échantillonnage; le retard (s'il existe) est donc choisi comme un multiple entier de la période d'échantillonnage. Pour le déterminer on effectue des essais successifs avec différentes valeurs du rapport retard pur/ période d'échantillonnage.

La valeur aboutissant au critère le plus faible est retenue. La réponse impulsionnelle du procédé fournissant une valeur d'initialisation précise, le nombre d'essais est rarement supérieur à trois. Cependant cette procédure est valable tant que le domaine de linéarité (la validité du modèle) est respecté; dans le cas contraire il vaut mieux utiliser une estimation visuelle et retenir les paramètres donnant la meilleure superposition des réponses du modèle et du procédé.

CHAPITRE 7

APPLICATION

7- IDENTIFICATION D'UN ASSERVISSEMENT DE POSITION.

Afin de tester cette méthode, nous l'avons appliqué à l'identification d'un servomécanisme de position « TERGANE 20 » (Fig. 7-1).

Ce servomécanisme est un banc d'essais pédagogique, représentant un modèle réduit d'un asservissement de position, destiné à l'application des études d'automatique. Il réalise un asservissement de position rectiligne dont l'organe d'action est un moteur électrique à courant continu et à aimant permanent; une poulie transforme ensuite le mouvement de rotation en déplacement rectiligne.

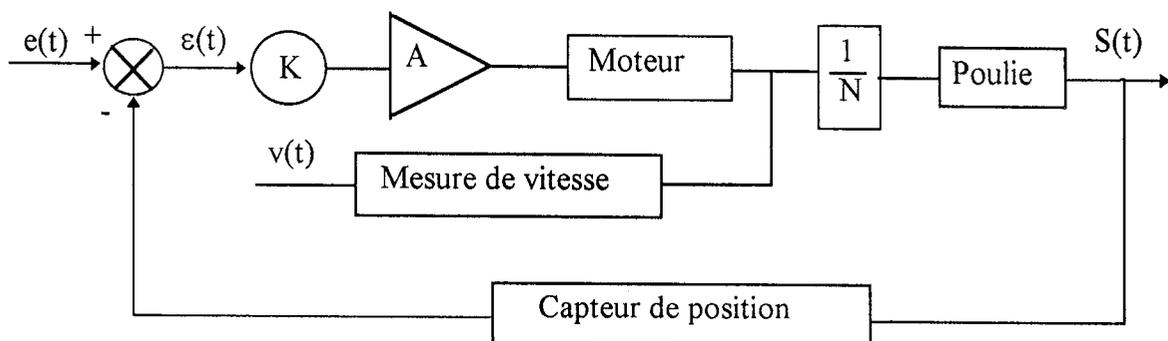


Fig. 7-1: Schéma de l'asservissement de position.

7-1 IDENTIFICATION EN BOUCLE FERMEE.

L'étude théorique (annexe III) montre que le système en boucle ouverte comporte un intégrateur, pour pouvoir l'identifier par la méthode de corrélation avec des séquences binaires, il est donc nécessaire de réaliser l'identification en boucle fermée.

Dans ce qui suit, nous allons décrire les différents essais d'identification dynamique réalisés sur le transfert: signal de consigne - sortie position.

7-1-1 Choix des paramètres de la séquence binaire.

L'étude faite montre que l'élément déterminant, pour la réussite de cette méthode d'identification, c'est bien le choix convenable des paramètres de la séquence binaire. Ainsi un grand soin doit être porté à ce choix.

A- Détermination de la période d'échantillonnage.

Le choix de la cadence d'échantillonnage doit être réalisé en fonction de la dynamique du procédé étudié. Les impératifs varient selon la tâche effectuée: une identification en temps différé laissant un peu plus de liberté dans la détermination de la cadence d'acquisition qu'une commande ou une identification en ligne (des contraintes de calcul pouvant alors intervenir).

Il y a un paradoxe dans la détermination du pas d'échantillonnage: L'identification est menée pour obtenir un modèle représentatif du comportement dynamique du système étudié; mais la qualité de l'identification est directement liée à la période d'acquisition, elle-même fonction de la dynamique recherchée. Il est donc nécessaire de connaître l'ordre de grandeur du régime transitoire et de trouver un compromis assurant une bonne représentation des phénomènes sans une quantité excessive d'informations.

Deux bornes - l'une théorique, l'autre pratique - permettent de cerner le domaine d'échantillonnage:

* limite théorique: le théorème de Shannon fixe la limite inférieure, celle-ci doit être au moins égale au double de la plus grande fréquence contenue dans le spectre du signal de mesure.

* limite pratique: les organes d'acquisition (convertisseur analogique digital, convertisseur digital analogique, multiplexeur, ...) imposent la borne supérieure.

En pratique, le spectre d'un processus réel est souvent inconnu, sa mesure nécessitant un analyseur de spectre, appareil complexe et peu courant dans l'industrie; l'application du théorème de Shannon est souvent impossible [14].

De plus, le théorème de Shannon s'appuie sur une analyse dans le domaine fréquentiel; dans le cas présent, les modèles recherchés utilisent une représentation temporelle; il convient donc de lier le pas d'échantillonnage à une caractéristique temporelle du procédé étudié. BARRAUD [29] cité par [14], envisage le cas des systèmes du 1^{er} ordre et du 2^{ème} ordre; cette seconde catégorie se subdivisant en trois parties (réponse apériodique, oscillatoire amortie, oscillante). La période d'échantillonnage est évaluée à partir du temps de réponse à 98% obtenu lors d'un essai indiciel. Le tableau ci-dessous indique le pas d'échantillonnage en fonction du type de réponse.

	Nature de la réponse	Valeur du temps de réponse à 98%	Valeur du pas d'échantillonnage	Observations
1 ^{er} Ordre	Apériodique	$tr = 4 T$	$\Delta t = tr / 20$	T: constante de temps associée
2 ^{ème} Ordre	Apériodique	$tr = 6 T$	$\Delta t = tr / 30$	T: constante de temps associée (pôle double)
2 ^{ème} Ordre	Oscillatoire amortie	$tra = 4 Ta$	$\Delta t = tra / 28$	tra: temps de réponse de l'amortissement $Ta = 1 / z.wo$

B- Choix de l'amplitude de la S.B.P.A.

De même que pour la période d'échantillonnage, le choix de l'amplitude de la séquence est limité par deux bornes:

- borne supérieure: limitant l'amplitude de la séquence par une valeur maximale, permettant d'une part, le bon fonctionnement du système, d'autre part le respect de la linéarité.
- borne inférieure: l'amplitude de la séquence ne doit pas être trop faible pour que le signal de sortie ne soit pas noyé dans le bruit.

Dans le cas présent, la seule contrainte imposée c'est le respect de la linéarité du système. Pour rester dans le domaine de linéarité du système, le constructeur [30] préconise l'utilisation de signaux test conservant en sortie vitesse une amplitude maximale (crête à crête) de 1 Volts.

7-1-2 Description du dispositif expérimental.

Le traitement de l'information a été effectué par un ordinateur de type PC DX2 80486, associé à une carte interface multifonctions de type PC-MES 2.

Pour gérer la carte d'acquisition, nous avons utilisé « PHYSCOPE » un logiciel universel d'acquisition et de traitement de données. Ce qui nous a permis de programmer l'acquisition des données en mode ENTRELACE: c'est à dire, La carte d'acquisition assure en même temps l'émission de l'excitation (S.B.P.A) et l'acquisition de la réponse du système.

Descriptif de la carte d'acquisition.

- * Type PC-MES2 d'EUROSMART.
- * 8 entrées analogiques.
 - convertisseur A/D de résolution 12 bits \pm 1LSB
 - temps de conversion: 25 μ s
- * 3 sorties analogiques
 - 2 convertisseur D/A de résolution 12 bits \pm 1LSB
 - temps de conversion: 1.5 μ s.
- * 8 entrées logiques.
- * 8 sorties logiques
- * Timer programmable de type 8244 Intel.

7-1-3 Identification de la réponse impulsionnelle du système en boucle fermée.

Pour choisir la longueur de la S.B.P.A. nous avons effectué une série d'essais en échelon, ce qui a montré que le temps de réponse du système est inférieur à une seconde.

Après avoir réalisé un certain nombre d'essais, avec des valeurs différentes de la longueur L , de l'amplitude a et de la période Δt de la S.B.P.A, nous avons obtenu des résultats assez proches. On s'intéresse ici à un essai typique réalisé avec $a = 0.5V$, $\Delta t = 5ms$ et $L = 127$.

L'intercorrélation réalisée pendant une période de la séquence, nous a permis d'obtenir la réponse h_f^* (fig. 7-5) du système en boucle fermée. Sur les figures (fig. 7-3) et (fig. 7-4) nous avons montré respectivement la séquence binaire ayant servi à l'excitation du système et la réponse de ce dernier.

Cette réponse montre que l'on peut diminuer la période de la séquence binaire. Toutefois, le fait quelle soit assez longue par rapport au temps de réponse du système, permet de réaliser une bonne estimation des erreurs d'identification à partir des erreurs qui apparaissent sur la queue de la réponse impulsionnelle. Celles-ci permettent d'autre part de corriger l'erreur continue de la réponse (§ 3-3).

Dans le cas présent, l'observation de la queue de la réponse h_f^* (fig. 7-5) permet de détecter la présence de bruits. Les erreurs estimées sur la queue de cette réponse ont une variance de $\overline{\Delta h^2} = 1,48 \cdot 10^{-5}$ et permettent ainsi d'espérer que l'erreur sur les différents points sera en valeur absolue inférieure à $3,8 \cdot 10^{-3}$ (soit 2,33 % de la valeur maximale de la réponse).

D'autre part, avec l'hypothèse de linéarité et d'invariance du système et en absence de dérives, on peut aussi calculer les erreurs d'identification à partir d'une estimation des caractéristiques du bruit sur la sortie du système.

En effet, à partir de l'enregistrement de la figure (fig. 7-2), on peut estimer la variance du bruit à $\overline{b^2} = 3,57 \cdot 10^{-4}$ et déduire alors de l'équation (3-15) que $\overline{\Delta h^2} = 1,12 \cdot 10^{-5}$, valeur qui est assez proche de celle estimée à partir de la queue de la réponse de la figure (fig. 7-5).

Ainsi, les réponses obtenues permettent d'estimer que la dynamique du système en boucle fermée peut être caractérisée par un modèle du second ordre à réponse oscillatoire amortie:

$$H(P) = \frac{G \cdot \omega_0^2}{P^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot z \cdot P + \omega_0^2}$$

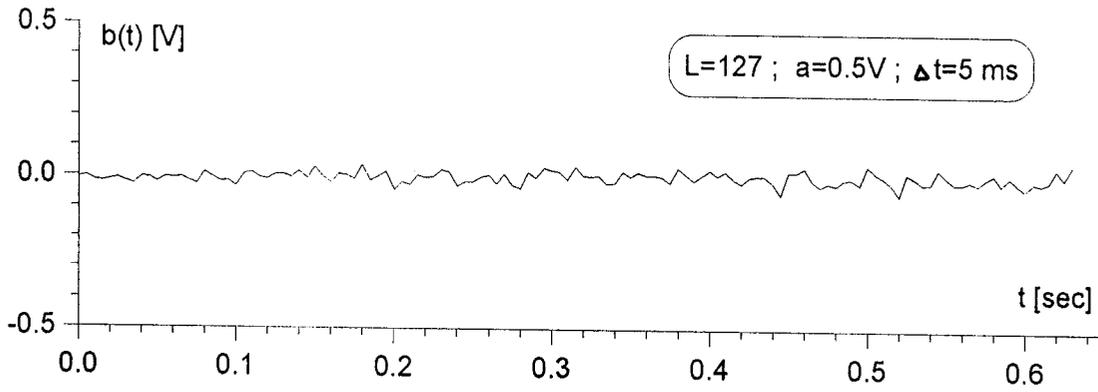


Fig. 7-2: Sortie du système avant l'application de la S.B.P.A.

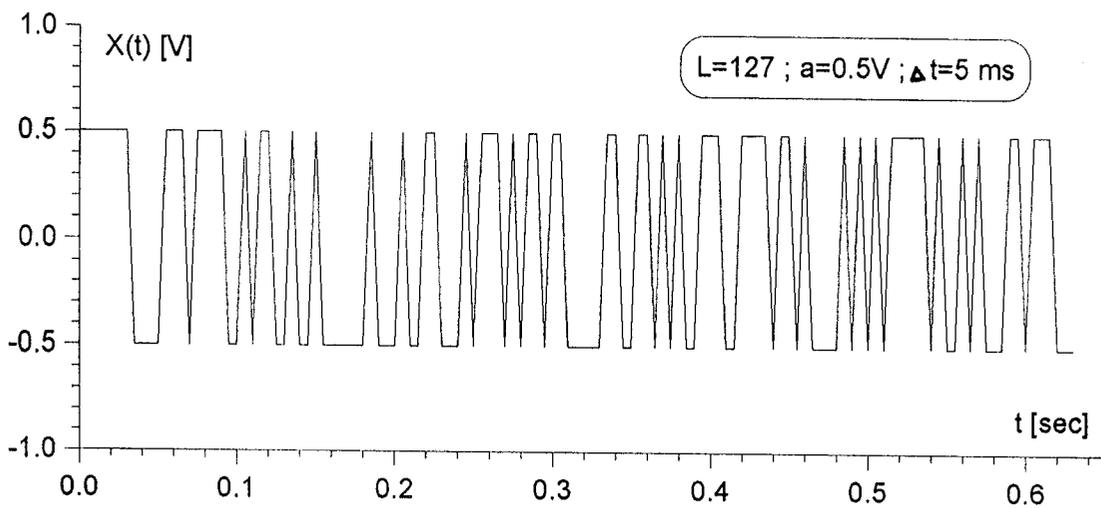


Fig.7-3: la séquence binaire ayant servi à l'excitation du système.

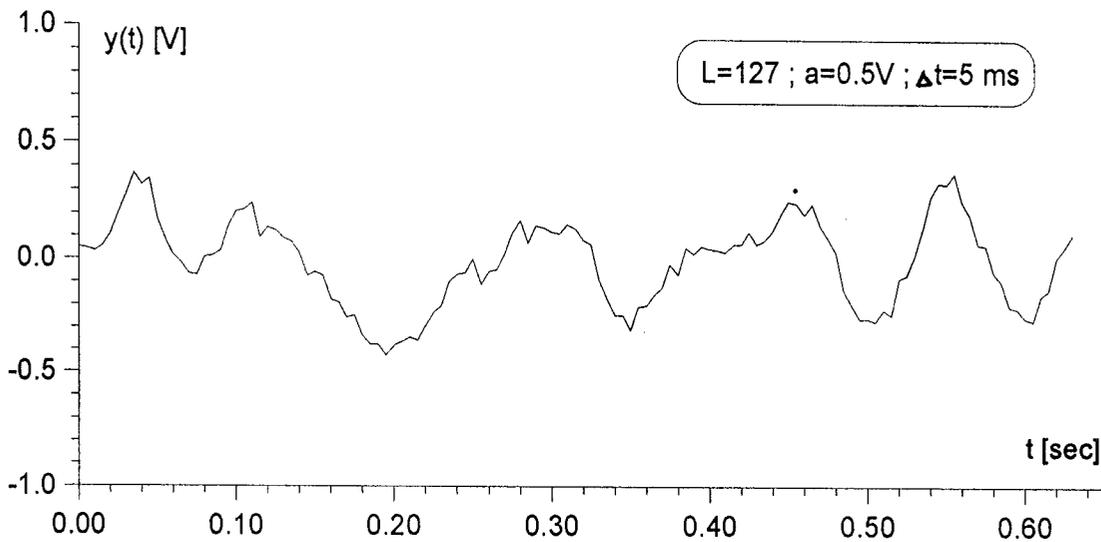


Fig. 7-4: Réponse du système à la S.B.P.A de la figure (7-3).

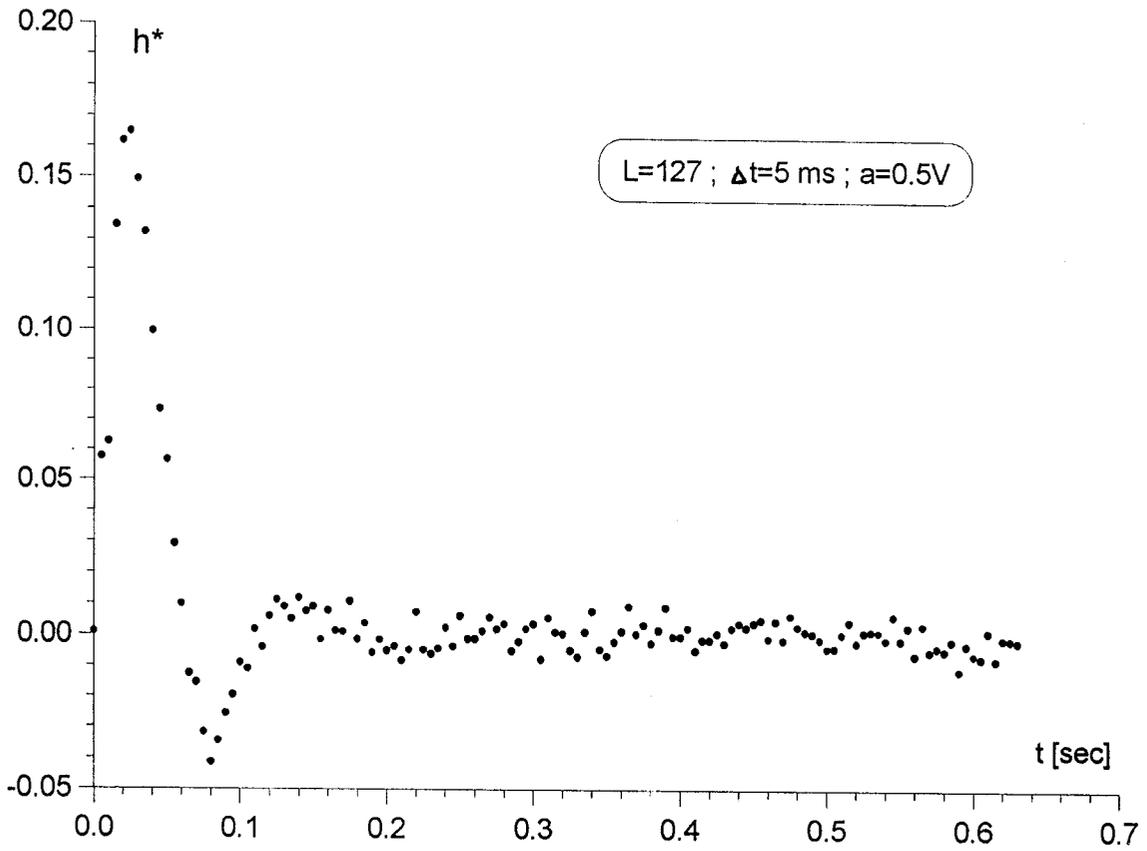


Fig. 7-5: Séquence de pondération du système en boucle fermée.

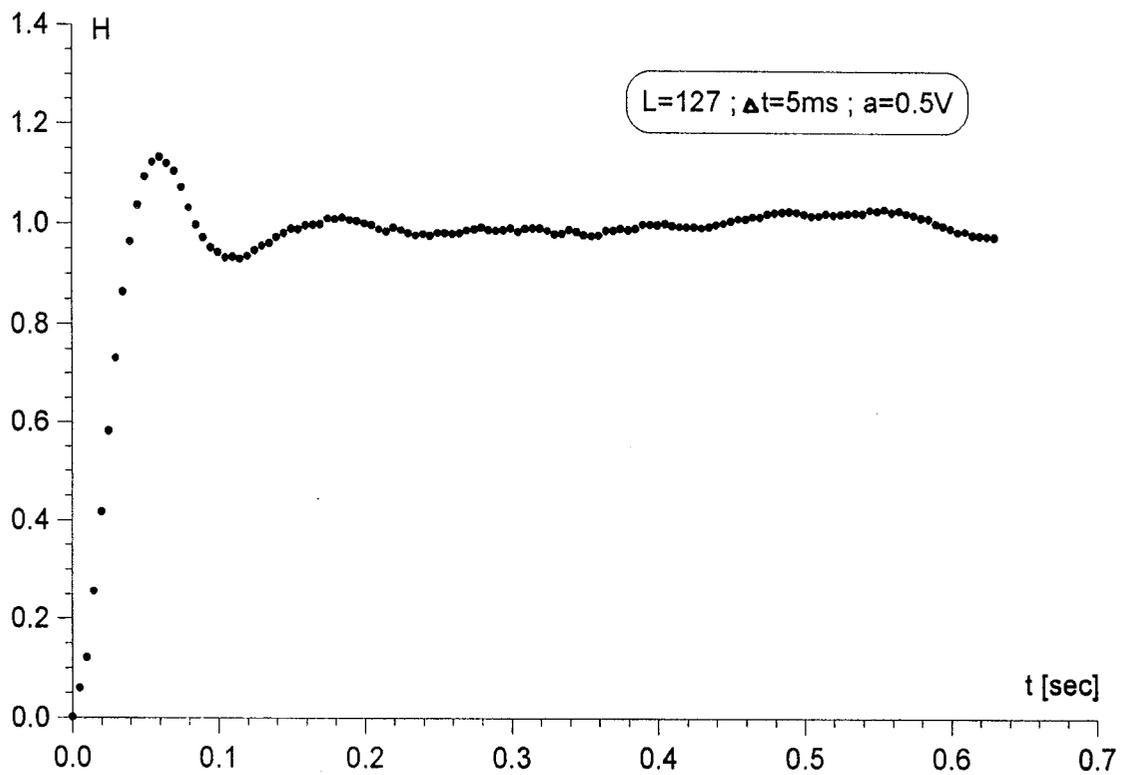


Fig. 7-6: Réponse indicielle du système en boucle fermée.

7-1-4 Estimation des paramètres de la fonction de transfert.

Etant donné que le modèle recherché est du 2^{ème} ordre à réponse oscillatoire amortie, les paramètres à identifier seront donc : le gain statique G , la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement z . Ce dernier paramètre étant compris entre un et zéro, on doit donc recourir à l'optimisation avec contraintes.

La condition, $0 < z < 1$, est équivalente à la contrainte « inégalité » suivante:

$$h(z) = z(z - 1) \leq 0. \quad (7-1)$$

Ainsi, en utilisant la technique des fonctions de pénalisation (§ 6-3-3), le critère modifié qui va être optimisé devient

$$C = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2 + \alpha z(z - 1) \quad (7-2)$$

Pour déterminer les valeurs initiales des paramètres à identifier, nous avons déterminé (par l'intégration de la réponse impulsionnelle) la réponse indicielle du système (fig. 7-6). Cette réponse nous a permis d'estimer, par des méthodes graphiques simples [12], [18], les valeurs initiales suivantes: $\omega_0=54$ rad/sec et $z=0,38$.

Afin d'alléger la procédure d'optimisation, nous avons préféré identifier le gain statique du système à partir de l'état stable de la réponse indicielle. Pour améliorer la précision, La valeur du régime permanent est moyennée sur les derniers points, ceci nous a permis d'estimer la valeur du gain $G=1$, valeur qui a été vérifiée a posteriori.

L'optimisation par la méthode de Marquardt-Levenberg (algorithme d'Andy Grace [32]) nous a permis d'obtenir les paramètres estimés suivants: $\omega_0=55,69$ rad/sec et $z=0,456$. Ces paramètres correspondent à l'écart quadratique minimal $C_{opt} = 250$.

La figure (fig. 7-7) montre la superposition de la réponse impulsionnelle identifiée par la méthode de corrélation $h_o(t)$ et celle du modèle optimal identifié $h_m(t)$. Nous notons la bonne concordance entre les deux courbes.

Une autre manière de validation du modèle identifié, consiste à soumettre celui-ci au même signal ayant servi à l'excitation du système réel, et à comparer la réponse de ce dernier $Y_o(t)$ avec celle du modèle $Y_m(t)$, (Fig. 7-8).

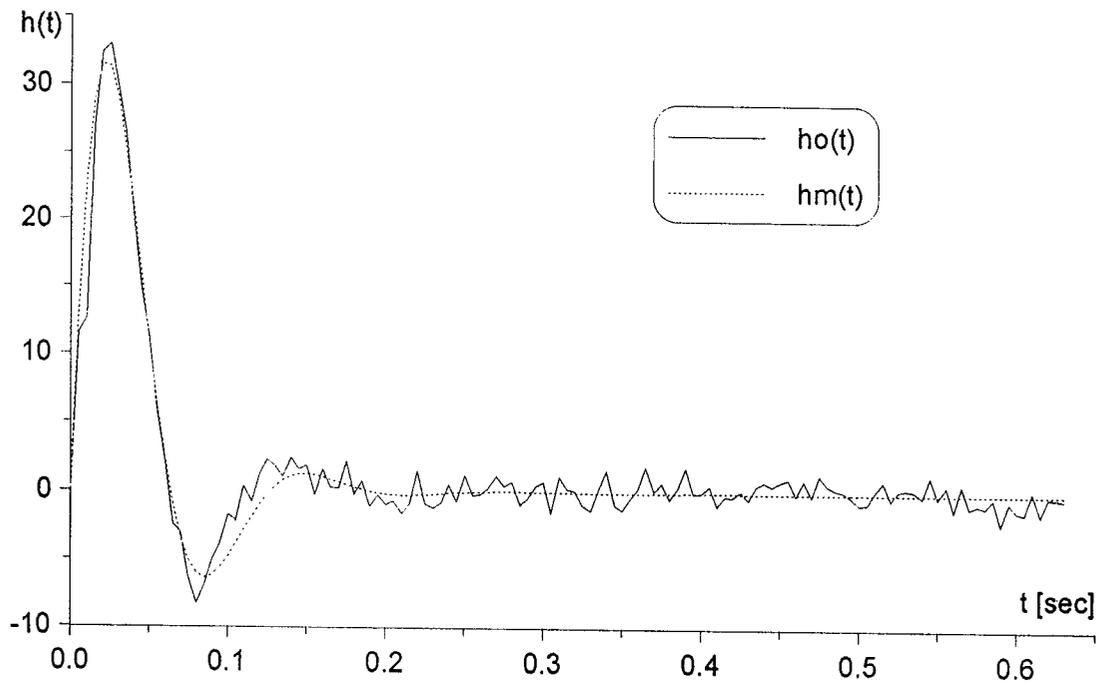


Fig. 7-7: Comparaison des réponses impulsionnelle de l'objet et du modèle identifié.

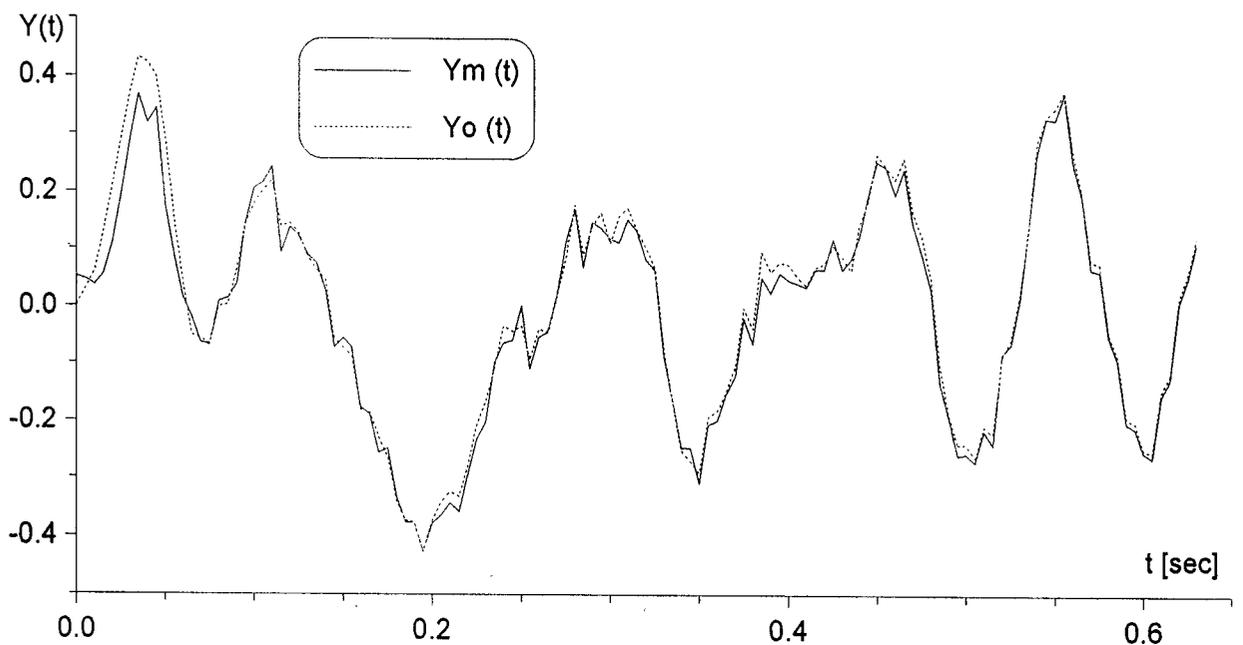


Fig. 7-8: Comparaison des réponses de l'objet et du modèle à la S.B.P.A de la figure (7-3).

CONCLUSION

CONCLUSION

L'étude que nous avons entreprise et les résultats pratiques obtenus montrent bien le grand intérêt de cette méthode d'identification par corrélation. Elle possède toutes les caractéristiques qui lui permettent d'être une méthode bien adaptée à l'identification des systèmes industriels.

Parmi les caractéristiques remarquables de cette méthode, on peut citer:

- La simplicité de la mise en oeuvre de cette méthode sur ordinateur numérique.
- La possibilité d'utiliser des séquences binaires de faible amplitude, permettant ainsi de réduire les perturbations introduites dans le système, par conséquent, le respect de l'hypothèse de linéarité.
- Temps d'identification réduit, légèrement supérieur au temps de réponse du système.

Cependant, il faut noter, comme nous l'avons supposé tout au long de notre étude, que cette méthode d'identification n'est utilisable que pour des systèmes stables ($t \rightarrow \infty$, $h(t) \rightarrow 0$).

Dans le cas déterministe, nous avons montré qu'un choix judicieux des paramètres de la séquence binaire permet d'obtenir d'excellents résultats. La plus importante erreur apparaît sous forme d'une composante continue, fonction du gain du système et de son point de fonctionnement; elle peut être facilement corrigée à partir de la queue de la réponse obtenue.

En présence de bruit, si le spectre de celui-ci est assez large par rapport à celui de la séquence binaire, cette méthode permet encore d'obtenir de bons résultats, même pour des rapports signal sur bruit proche de un. Cependant, la répercussion du bruit augmente au fur et à mesure que sa largeur de spectre diminue.

Signalons, toutefois qu'inconvénient majeur de cette méthode réside dans sa grande sensibilité aux dérives, dont la présence provoque des erreurs d'identification très importantes. Un moyen très efficace pour pallier à cet inconvénient, consiste à boucler (lorsqu'il est possible) le système et à réaliser ensuite une identification en boucle fermée.

Le passage de la réponse impulsionnelle à la fonction de transfert, par la méthode du modèle, présente un double avantage relativement à la méthode classique du modèle: le choix du type de modèle ainsi que son ordre se trouve facilité par la connaissance de la réponse impulsionnelle obtenue par corrélation; de même, en s'aidant par la forme de cette réponse, les valeurs initiales des paramètres à identifier, nécessaires au lancement du processus d'optimisation, peuvent être estimés très proche de l'optimum.

ANNEXES

I- Méthode de Marquardt - Levenberg [21].

La méthode du gradient est de convergence linéaire: elle est donc lente relativement à la convergence quadratique de la méthode de Newton-Gauss. Cependant, la méthode de Newton-Gauss nécessite un bon estimé $\underline{P}(0)$ de la solution \underline{P}^* , alors que la méthode du gradient se contente généralement d'un estimé moins précis. Il semble donc judicieux de générer l'estimé nécessaire à la méthode de Newton par la méthode du gradient.

La méthode de Marquardt-Levenberg présente l'avantage de condenser les deux algorithmes en un seul. Elle a donc l'intérêt de la méthode du gradient, de converger à partir d'estimés qui peuvent être éloignés du domaine de convergence des autres méthodes, et elle possède aussi l'intérêt de converger très vite dès que l'on est proche de la solution [16], [23].

En résumé, cette méthode est une combinaison astucieuse de la méthode du gradient et de celle de Newton-Gauss et qui évite aussi leurs propres limitations.

I-1 Données du problème.

Comme on l'a déjà mentionné (§ 6-2-1), les algorithmes de la P.N.L traitent le problème général d'ajustement de données expérimentales à un modèle mathématique.

Soit le modèle qui va être affecté aux données

$$E(Y) = f(x_1, x_2, \dots, x_m, p_1, p_2, \dots, p_k) = f(\underline{X}, \underline{P}) \quad (\text{I-1})$$

ou' x_1, x_2, \dots, x_m des variables indépendantes (entrées du modèle);

p_1, p_2, \dots, p_k les paramètres du modèle.

$E(Y)$ est la valeur estimée de la variable Y (sortie du modèle).

Soit à calculer les paramètres \underline{P} permettant de minimiser le critère quadratique suivant:

$$C = \sum_{i=1}^n [Y_i - \hat{Y}_i]^2 = \| \underline{Y} - \hat{\underline{Y}} \|^2 \quad (\text{I-2})$$

Ou' : Y_i est la valeur de Y obtenue par le modèle de l'équation (I-1) à la $i^{\text{ème}}$ point

\hat{Y}_i est la valeur expérimentale mesurée (sortie du système réel).

n: le nombre de points mesurés (échantillons).

Avant l'apparition de la méthode de Marquardt-Levenberg, pour résoudre le problème ci-dessus, les méthodes les plus utilisées étaient celle du gradient et celle de Newton-Gauss.

I-2 Méthode de Gauss-Newton.

Cette méthode est basée sur le développement de f en série de Taylor en se limitant aux termes linéaires de la série:

$$\langle Y(X_i, P_i + \Delta P_i) \rangle = f(X_i, P_i) + \sum_{j=1}^K \left(\frac{\partial f_i}{\partial P_j} \right) (\Delta P_i)_j \quad (\text{I-3})$$

ou

$$\langle \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{f}_0 + \mathbf{D} \underline{\Delta P}_t \quad (\text{I-4})$$

dans (I-3) et (I-4) le vecteur $\underline{\Delta P}_t$ est une petite correction de \underline{P} , l'indice t est utilisé pour indiquer que la petite variation $\underline{\Delta P}$ est calculée par cette méthode basée sur le développement en série de Taylor. Les parenthèses $\langle \rangle$ sont utilisées pour distinguer les estimations basées sur le modèle linéarisé de celles basées sur le modèle non linéaire. Ainsi la valeur du critère C obtenue en utilisant l'équation (I-3) est donnée par:

$$\langle C \rangle = \sum_{i=1}^n [Y_i - \langle Y_i \rangle]^2 \quad (\text{I-5})$$

Maintenant, $\underline{\Delta P}_t$ apparaît linéairement dans (I-3), et peut ainsi être déterminé par les méthodes classiques des moindres carrés en mettant

$$\frac{\partial \langle C \rangle}{\partial \Delta P_j} = 0 \quad \text{pour } j=1, \dots, k$$

tel que k est le nombre de paramètres.

Ainsi $\underline{\Delta P}_t$ est déterminée par la solution de l'équation

$$\underline{A} \cdot \underline{\Delta P}_t = \underline{g} \quad (\text{I-6})$$

ou

$$\underline{A} = \underline{D}^T \underline{D} \quad ; \quad \underline{D} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial P_j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \text{et } j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{I-7})$$

et

$$\underline{g} = \left(\sum_{i=1}^n (Y_i - f_i) \frac{\partial f_i}{\partial P_j} \right) = \underline{D}^T (\underline{Y} - \underline{f}_0), \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (\text{I-8})$$

En pratique, on trouve qu'il est plus commode de corriger \underline{P} par seulement une fraction de $\underline{\Delta P}_t$, sinon l'extrapolation peut être en dehors de la zone où f peut être représentée correctement par l'équation (I-3), ce qui pourrait provoquer la divergence des itérations. Malgré que plusieurs méthodes sont utilisées pour déterminer un pas convenable $k \underline{\Delta P}_t$ tel que $0 < k \leq 1$, la convergence reste non garantie.

I-3 Méthode du gradient.

Dans cette méthode la correction des valeurs actuelles des paramètres s'effectue dans la direction négative du gradient du critère C:

$$\underline{\Delta P}_g = - \left(\frac{\partial C}{\partial P_1}, \frac{\partial C}{\partial P_2}, \dots, \frac{\partial C}{\partial P_k} \right)^T \quad (\text{I-9})$$

Une grande variété de méthodes du gradient modifiées sont utilisées pour pallier au mauvais conditionnement de la surface du critère C, qui est à l'origine de la lenteur de convergence de ces méthodes. De même que pour la méthode de Newton-Gauss, il est nécessaire de contrôler soigneusement le pas de correction. Cependant, la lenteur de convergence reste plutôt la règle que l'exception.

L'analyse des propriétés de ces deux méthodes permet de conclure que, pour qu'une méthode puisse pallier aux inconvénients de la méthode de Gauss-Newton et de celle du gradient, elle doit prendre en considération les points suivants:

- Le vecteur de correction doit avoir une direction à l'intérieur d'un angle de 90° par rapport à la direction négative du gradient du critère C.
- A cause de la grande irrégularité de la surface de C, dans la majorité des problèmes la direction de $\underline{\Delta P}_t$ est presque souvent à 90° par rapport à la direction de $\underline{\Delta P}_g$.

A partir de ces considérations, une bonne méthode doit en quelque sorte interpoler entre $\underline{\Delta P}_1$ et $\underline{\Delta P}_g$ et, contrairement à ces deux méthodes, dans lesquelles le choix de la direction de correction doit précéder le choix d'un pas acceptable, dans l'algorithme de Marquardt la direction de correction et le pas sont déterminés simultanément.

I-4 Bases théoriques de l'algorithme de Marquardt.

Théorème 1: Soit $\lambda \geq 0$ choisie arbitrairement et soit $\underline{\Delta P}_0$ satisfaisant l'équation

$$(\underline{A} + \lambda \underline{I})\underline{\Delta P}_0 = \underline{g} \quad (\text{I-10})$$

alors $\underline{\Delta P}_0$ minimise C dans une sphère dont le rayon $\|\underline{\Delta P}\|$ satisfait la relation

$$\|\underline{\Delta P}\|^2 = \|\underline{\Delta P}_0\|^2.$$

Démonstration: pour déterminer $\underline{\Delta P}$ qui minimise

$$C(\underline{\Delta P}) = \|\underline{Y} - \underline{f}_0 - \underline{D} \cdot \underline{\Delta P}\|^2 \quad (\text{I-11})$$

sous la contrainte $\|\underline{\Delta P}\|^2 = \|\underline{\Delta P}_0\|^2$.

D'après la méthode de Lagrange, une condition nécessaire pour qu'un point soit stationnaire est la suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial \Delta P_1} = \frac{\partial u}{\partial \Delta P_2} = \dots = \frac{\partial u}{\partial \Delta P_k} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0 \quad (\text{I-12})$$

$$\text{ou} \quad u(\underline{\Delta P}, \lambda) = \|\underline{Y} - \underline{f}_0 - \underline{D} \cdot \underline{\Delta P}\|^2 + \lambda \left(\|\underline{\Delta P}\|^2 - \|\underline{\Delta P}_0\|^2 \right) \quad (\text{I-13})$$

et λ multiplicateur de Lagrange.

Ainsi, en déterminant les dérivées des relations (I-12) on obtient:

$$-\left[\underline{D}^T (\underline{Y} - \underline{f}_0) - \underline{D}^T \underline{D} \cdot \underline{\Delta P} \right] + \lambda \underline{\Delta P} = 0 \quad (\text{I-14})$$

et

$$\|\underline{\Delta P}\|^2 - \|\underline{\Delta P}_0\|^2 = 0 \quad (\text{I-15})$$

Pour une valeur donnée de λ , l'équation (I-14) est satisfaite pour $\underline{\Delta P}$ solution de l'équation

$$(\underline{D}^T \underline{D} + \lambda \underline{I}) \underline{\Delta P} = \underline{D}^T (\underline{Y} - \underline{f}_0) \quad (\text{I-16})$$

ce qui peut être facilement montré en multipliant l'équation (I-16) par $(\underline{D}^T \underline{D})^{-1}$ et sa réécriture sous la forme:

$$\underline{\Delta P} = (\underline{D}^T \underline{D})^{-1} \underline{D}^T (\underline{Y} - \underline{f}_0) - (\underline{D}^T \underline{D})^{-1} \lambda \underline{\Delta P} \quad (\text{I-17})$$

et après la substitution dans (I-14).

Du fait que $(\underline{A} + \lambda \underline{I})$ est définie positive, il est maintenant bien claire que ce point stationnaire est un minimum

Théorème 2: Soit $\underline{\Delta P}(\lambda)$ la solution de (I-10) pour une valeur donnée de λ . Alors $\|\underline{\Delta P}\|^2$ est une fonction décroissante continue de λ , tel que lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, on a $\|\underline{\Delta P}\|^2 \rightarrow 0$.

Théorème 3: Soit γ l'angle entre $\underline{\Delta P}_0$ et $\underline{\Delta P}_g$. Alors γ est une fonction continue, monotone et décroissante de λ , tel que lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ on a $\gamma \rightarrow 0$. Puisque $\underline{\Delta P}_g$ est indépendante de λ , alors $\underline{\Delta P}_0$ tend vers $\underline{\Delta P}_g$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

A partir de ces théorèmes on montre [21] que $d \cos \gamma / d\lambda$ est toujours positive ($\lambda > 0$), par conséquent γ est une fonction monotone décroissante de λ .

Pour de grandes valeurs de λ , la matrice $(\underline{A} + \lambda \underline{I})$ est dominée par la diagonale $\lambda \underline{I}$. Ainsi, de (I-10) on montre [21] que lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, $\underline{\Delta P}_0 \rightarrow \underline{g}/\lambda$, d'ou' $\underline{\Delta P}_0$ et \underline{g} deviennent aux limites proportionnels, tel que l'angle entre les deux s'approche de zéro. D'autre part, si dans (I-10) on a $\lambda=0$, alors (à l'exception du cas trivial ou' \underline{A} est diagonale) les vecteurs $\underline{\Delta P}_0$ et \underline{g} se rencontrent pour certain angle fini $0 < \gamma < \pi/2$. Par conséquent γ est une fonction continue, monotone et décroissante de λ tel que lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 0$.

I-5 Normalisation des mesures, facteur d'échelle.

La solution $\underline{\Delta P}_i$ est indépendante des échelles de \underline{P} (invariante aux transformations linéaires dans l'espace des paramètres \underline{P}), cependant il est bien connu que les propriétés des méthodes du gradient ne sont pas indépendantes des échelles de mesure. Il devient alors nécessaire de normaliser l'espace des paramètres \underline{P} , d'une manière convenable. Pour s'affranchir des problèmes numériques des procédures de calcul, dans les méthodes des moindres carrés, un choix très utilisé est le suivant:

On définit les matrices normalisées \underline{A}^* et \underline{g}^* ,

$$\underline{A}_{ij}^* = \left(\frac{A_{ij}}{\sqrt{A_{ii}} \sqrt{A_{jj}}} \right) \quad \text{et} \quad \underline{g}_j^* = \left(\frac{g_j}{\sqrt{A_{jj}}} \right) \quad (\text{I-18})$$

Ainsi pour l'algorithme de Newton-Gauss on résoudrait

$$\underline{A}^* \cdot \underline{\Delta P}^* = \underline{g}^* \quad (\text{I-19})$$

puis on calculerait
$$\Delta P_j = \frac{\Delta P_j^*}{\sqrt{A_{jj}}} \quad (\text{I-20})$$

I-6 Construction de l'algorithme.

A la lumière des considérations précédentes, à la $r^{\text{ème}}$ itération l'algorithme prend la forme suivante (Fig. I-1):

1- Construction et résolution de l'équation:
$$\left(\underline{A}^{*(r)} + \lambda^{(r)} \underline{I} \right) \underline{\Delta P}^{*(r)} = \underline{g}^{*(r)} \quad (\text{I-21})$$

2- Calcul de
$$\Delta P_j^{(r)} = \Delta P_j^{*(r)} / \sqrt{A_{jj}^{(r)}} \quad (\text{I-22})$$

3- Calcul du nouvel estimé
$$\underline{P}^{(r+1)} = \underline{P}^{(r)} + \underline{\Delta P}^{(r)} \quad (\text{I-23})$$

4- Le choix de $\lambda^{(r)}$ de façon que $C^{(r+1)} < C^{(r)}$ (I-24)

A partir des théorèmes précédents, il est bien claire qu'il existe toujours une valeur de $\lambda^{(r)}$ suffisamment grande pour satisfaire (I-24), à moins que $\underline{P}^{(r)}$ soit déjà un minimum de C . Cependant, nous avons intérêt à choisir une valeur $\lambda^{(r)}$ qui satisfait l'équation (I-24) et qui permet une convergence rapide proche de la convergence de Newton-Gauss.

A chaque itération, on désire minimiser C dans un voisinage très proche de celui où la fonction linéarisée donne une représentation adéquate de la fonction non linéaire, donc notre choix doit porter, tant que cela est possible, sur une petite valeur de λ . Ce choix est très pertinent surtout au cours des dernières étapes de la convergence, quand l'estimé du vecteur \underline{P} se trouve très proche du minimum, où les contours de C sont asymptotiquement elliptiques et il n'est exigé que le développement linéaire du modèle soit une bonne approximation que sur une petite région. Le choix de grandes valeurs de λ ne doit donc être utilisé que lorsqu'il est nécessaire pour satisfaire (I-24).

La stratégie proposée par Marquardt est définie comme suit:

- Soit $\nu > 1$ et soit $\lambda^{(r)}$ la valeur de λ obtenue des itérations précédentes, on calcul $C(\lambda^{(r)})$ et $C(\lambda^{(r)}/\nu)$.

1) Si $C(\lambda^{(r)}/\nu) \leq C^{(r+1)}$, on prend $\lambda^{(r+1)} = \lambda^{(r)}/\nu$.

2) Si $C(\lambda^{(r)}/\nu) > C^{(r+1)}$ et $C(\lambda^{(r)}) \leq C^{(r+1)}$, on prend $\lambda^{(r+1)} = \lambda^{(r)}$.

3) Si $C(\lambda^{(r)}/\nu) > C^{(r+1)}$ et $C(\lambda^{(r)}) > C^{(r+1)}$, on augmente λ par des multiplications successives par ν jusqu'à la vérification de

$$C(\lambda^{(r)} \cdot \nu^\omega) \leq C^{(r+1)} \quad (\text{I-25})$$

tel que ω la plus petite valeur de ω satisfaisant (I-25) et on prend $\lambda^{(r+1)} = \lambda^{(r)} \cdot \nu^\omega$

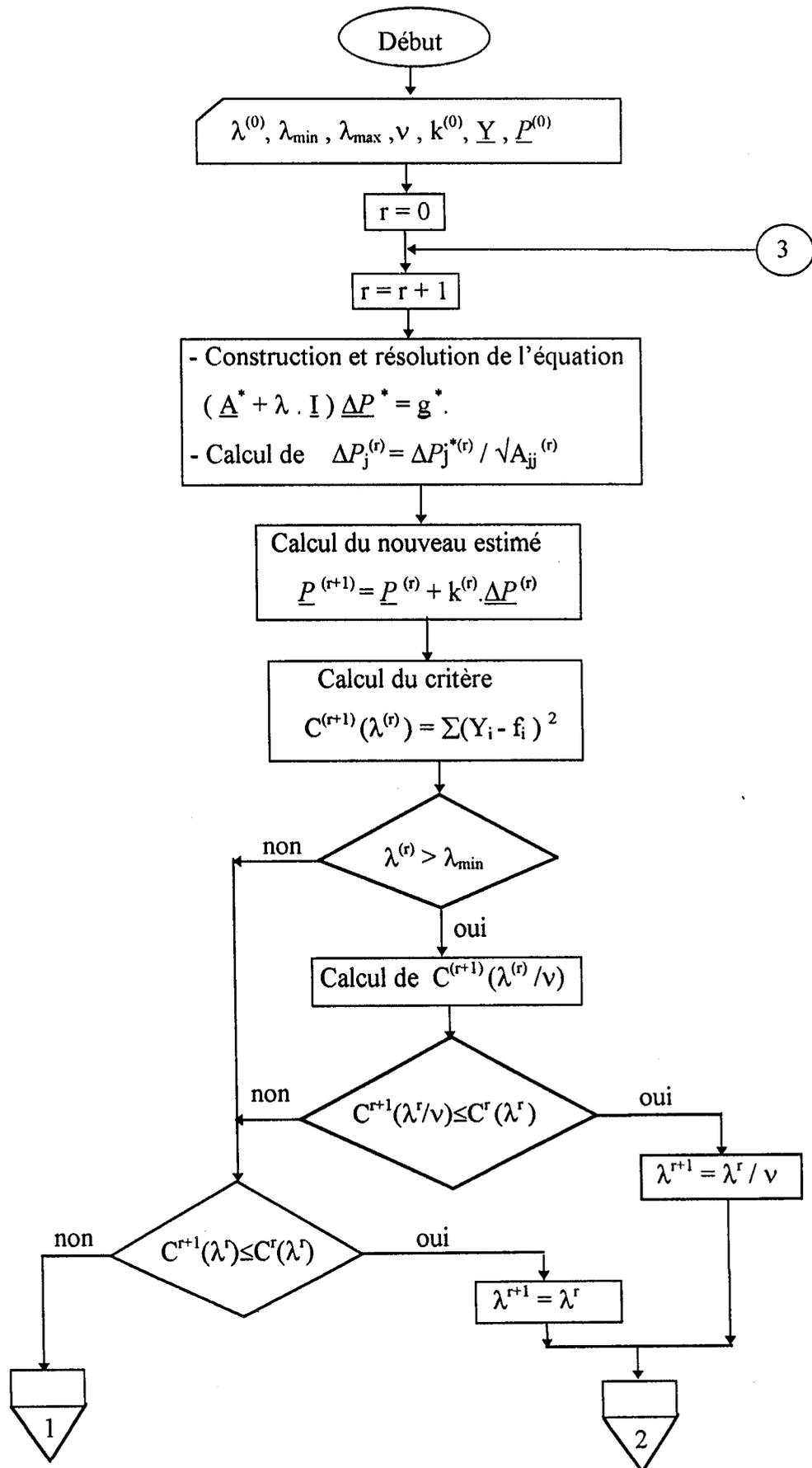
Remarques [21]:

1- Si la valeur de λ est déjà très petite par rapport à 1, allez immédiatement au test 2) ou 3) sans calculer $C(\lambda^{(r)}/\nu)$ et ignorer les comparaisons faisant intervenir $C(\lambda^{(r)}/\nu)$.

2- Dans certains problèmes où la corrélation entre les paramètres estimés est très grande (>0.99), il se peut que λ prenne de très grandes valeurs sans satisfaire (I-26). Dans de tels cas il est très adéquat d'arrêter le test 3) et de le remplacer par le test suivant :

$$\underline{P}^{(r+1)} = \underline{P}^{(r)} + k^{(r)} \cdot \underline{\Delta P}^{(r)} \quad \text{tel que } k^{(r)} \leq 1. \quad (\text{I-26})$$

Etant donné que l'angle $\gamma^{(r)}$ est une fonction décroissante de $\lambda^{(r)}$, on choisit un angle critère $\gamma_0 < \pi/2$ et on prend $k^{(r)}=1$ si $\gamma^{(r)} \geq \gamma_0$. Cependant, si le test 3) n'est pas vérifié même pour des valeurs de $\lambda^{(r)}$ allant jusqu'à $\gamma^{(r)} < \gamma_0$, il faut arrêter d'augmenter $\lambda^{(r)}$ d'avantage, et prendre $k^{(r)}$ suffisamment petit de façon à ce que $C^{(r+1)} < C^{(r)}$; ce qui est toujours possible tant que $\gamma^{(r)} < \gamma_c < \pi/2$. Un choix très commode consiste à prendre $\gamma_c = \pi/2$.



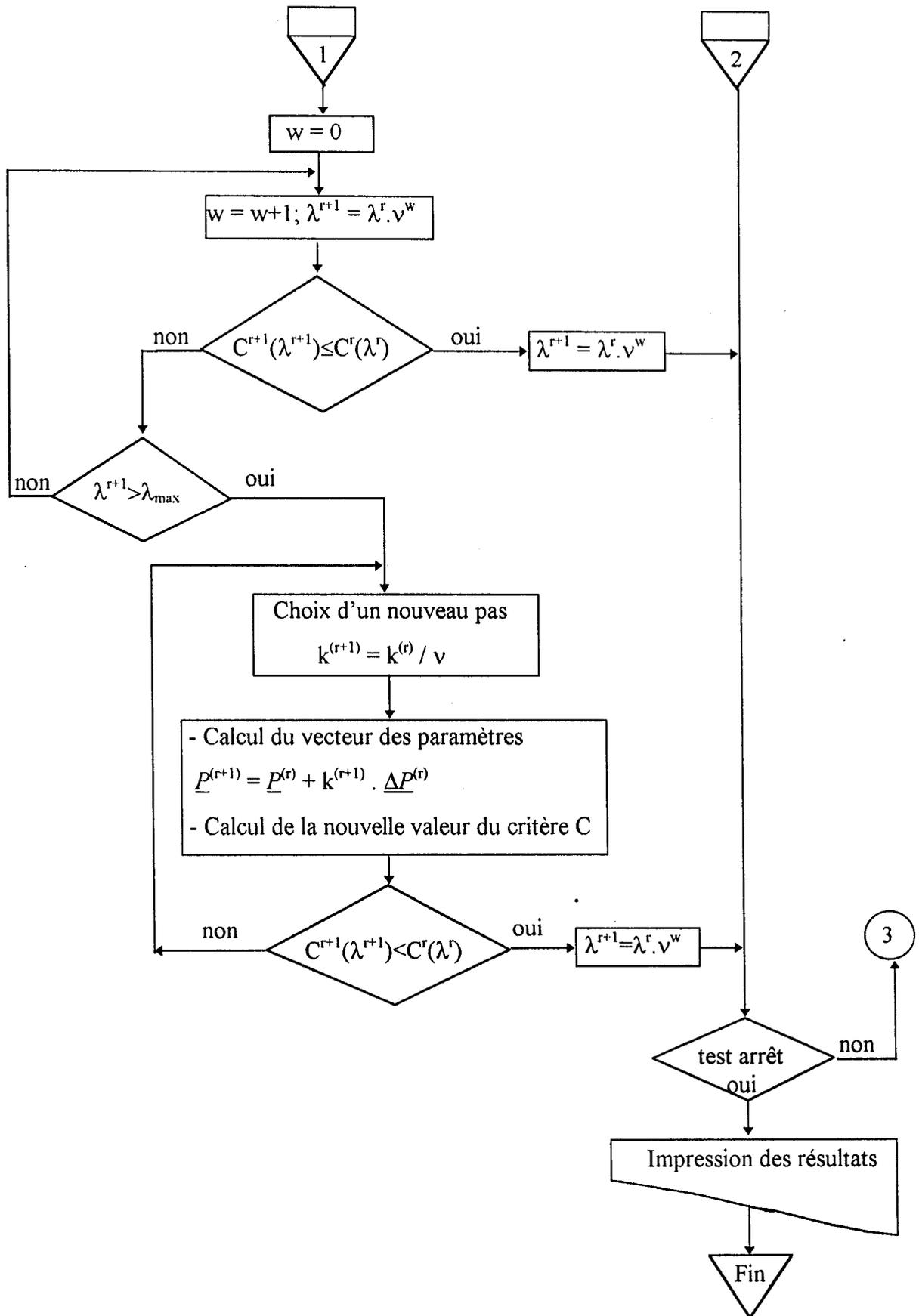


Fig. I-1: Organigramme de la méthode de Marquardt-Levenberg.

II OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES.

La technique la plus simple [17] pour traiter un problème de recherche de minimum sous contraintes est la technique des fonctions de pénalisation.

II-1 Fonctions de pénalisation

Supposons que l'on cherche à résoudre le problème suivant:

$$\underset{X \in D}{\text{Min}} F(X) \quad (\text{II-1})$$

le domaine D étant défini par les contraintes « égalité » et « inégalité » suivantes:

$$\begin{aligned} X \in D \Leftrightarrow & \quad g_j(X) = 0 & \quad j = 1 \text{ à } m \\ & \quad h_k(X) \leq 0 & \quad k = 1 \text{ à } p \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

La technique des fonctions de pénalisation consiste à modifier le critère en lui ajoutant une fonction de pénalisation $P(X)$. La recherche de minimum se fait alors sur le critère modifié:

$$\underset{X \in D}{\text{Min}} [F(X) + P(X)] \quad (\text{II-3})$$

Il existe de nombreuses possibilités de choix de la fonction $P(X)$, mais les plus utilisées sont les fonctions de pénalisation quadratiques, elles sont définies de la manière suivante [17]:

- à chaque contrainte « égalité » $g_j(x) = 0$, on associe la pénalisation

$$P_j(X) = \alpha_j [g_j(X)]^2 \quad (\text{II-4})$$

- à chaque contrainte « inégalité » $h_k(x) \leq 0$, on associe la pénalisation

$$P_k(X) = \alpha_k \delta_k [h_k(X)]^2 \quad (\text{II-5})$$

avec $\delta_k = 1$ si $h_k > 0$

et $\delta_k = 0$ si $h_k \leq 0$

Les coefficients α_j et α_k sont des facteurs de pondération positifs, et la fonction de pénalisation $P(X)$ est la somme des fonctions associées à chacune des contraintes.

$$P(X) = \sum_j P_j(X) + \sum_k P_k(X) \quad (\text{II-6})$$

En utilisant des fonctions de pénalisation quadratiques, on est donc amené à minimiser le critère suivant en l'absence de contraintes

$$F(X) + \sum \alpha_j [g_j(X)]^2 + \sum \alpha_{m+k} [h_k(X)]^2 \quad (\text{II-7})$$

Le rôle des fonctions de pénalisation est simple: elles interviennent pour augmenter la valeur de la fonction $F(X)$ lorsque l'on se trouve à l'extérieur du domaine D .

II-2 Méthode d'UZAWA [25].

Soit le problème primal (p) suivant: trouver u tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in U = \{v \in V; h_i(v) \leq 0 \quad 1 \leq i \leq m\} \\ J(u) \leq \min_{v \in V} J(v) \end{array} \right. \quad (\text{II-8})$$

Pour déterminer un algorithme permettant d'approcher une solution du problème précédent, la méthode d'Uzawa repose sur l'application de la méthode du gradient au problème dual (Q) suivant:

trouver α tel que:

$$\alpha \in R_+^m; \quad G(\alpha) \geq \min_{\mu \in R_+^m} G(\mu) \quad (\text{II-9})$$

ou'
$$G(\mu) = j(\mu) + \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i(\mu).$$

A partir de la solution du problème dual (Q) on montre que la méthode d'Uzawa est une méthode d'approximation de la solution du problème primal (p) [25]. Partant d'un élément $\alpha^0 \in \mathbb{R}^m$ arbitraire, cette méthode itérative est basée sur la construction d'une suite de couples $(\alpha^k, u^k) \in \mathbb{R}^m \times V$, $k \geq 0$, par les formules de récurrence suivantes (pour alléger l'écriture, on pose $u^k = u_{\lambda k}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{calcul de } u^k : J(u^k) + \sum_{i=1}^m \alpha_i^k h_i(u^k) \leq \min_{v \in V} \left\{ J(v) + \sum_{i=1}^m \alpha_i^k h_i(v) \right\}; \\ \text{calcul de } \alpha_i^{k+1} : \alpha_i^{k+1} = \max \left\{ \alpha_i^k + \rho h_i(u^k), 0 \right\} \quad 1 \leq i \leq m \end{array} \right. \quad (\text{II-10})$$

tel que $0 < \rho < 1$.

On montre [25] que la suite (u^k) converge vers la solution u^* du problème de minimisation sans contraintes:

$$u \in U, \quad J(u) + \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i(u) \leq \min_{v \in V} \left\{ J(v) + \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i(v) \right\}$$

c'est à dire la solution du problème primal (p).

On peut dire que la méthode d'Uzawa remplace un problème de minimisation avec contraintes par une suite de problèmes de minimisation sans contraintes.

ETABLISSEMENT ANALYTIQUE DES DIVERSES FONCTIONS DE TRANSFERT DES ELEMENTS DE L'ASSERVISSEMENT DE POSITION.

Le schéma de l'asservissement de position « TERGANE 20 » est donné à la figure (Fig. 7-1); les éléments constitutifs de cet asservissement sont retranscrits sur une platine de commande, divisée en blocs fonctionnels (voir Fig. III-4), [30].

A- Capteur de position.

La fonction de transfert du capteur de position peut être approximée par une constante réelle β avec:

$$\beta = \text{Variation de tension} / \text{Variation de position}$$

β s'exprime en V/cm.

B- Atténuateur et Préamplificateur.

La fonction de transfert de ces deux éléments est un nombre réel K.A, affiché manuellement avec A= 10 ou 100, et K continûment variable de 0 à 1.

C- Amplificateur de puissance et moteur.

L'amplificateur de puissance a un gain égal à 1 en tension. Son rôle est de fournir le courant nécessaire à l'alimentation de l'induit.

Le moteur à courant continu est caractérisé par les données suivantes (Fig. III-1):

Φ_0 Constante de flux et constante de couple supposées égales.

R Résistance de l'induit

L Inductance de l'induit.

J Inertie du moteur chargé.

a Coefficient de frottements visqueux mécanique.

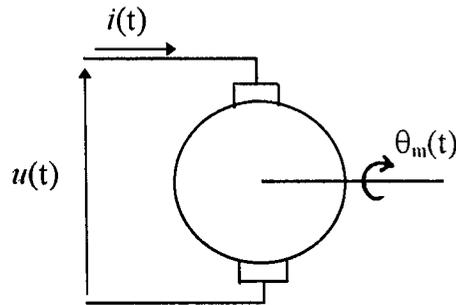


Fig. III-1

Les variables sont:

- La tension $u(t)$ appliquée aux bornes de l'induit.
- Le courant $i(t)$ absorbé par l'induit.
- La vitesse angulaire de l'arbre moteur $\Omega(t)$.
- La position angulaire de l'arbre $\theta_m(t)$.
- Le couple mécanique $\Gamma(t)$.

Les équations temporelles du moteur sont alors les suivantes:

Equation électrique:

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \Phi_0 \Omega(t) \quad (\text{III-1})$$

Equation mécanique:

$$\Gamma(t) = J \frac{d\Omega(t)}{dt} + a\Omega(t) \quad (\text{III-2})$$

Equation de couplage.

$$\Gamma(t) = \Phi_0 i(t) \quad (\text{III-3})$$

Eliminons $i(t)$ et $\Gamma(t)$ des équations (III-1), (III-2) et (III-3) pour établir la relation différentielle liant $u(t)$ à $\Omega(t)$:

de (III-2) et (III-3) on a:

$$i(t) = \frac{J}{\Phi_0} \cdot \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{a}{\Phi_0} \Omega(t) \quad (\text{III-4})$$

et de (III-4) et (III-1) on a

$$u(t) = R \left[\frac{J}{\Phi_0} \cdot \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{a\Omega(t)}{\Phi_0} \right] + L \left[\frac{J}{\Phi_0} \cdot \frac{d^2\Omega(t)}{dt^2} + \frac{a}{\Phi_0} \cdot \frac{d\Omega(t)}{dt} \right] + \Phi_0 \Omega(t) \quad (\text{III-5})$$

d'ou` nous obtenons:

$$u(t) = \left[\frac{aR + \Phi_0^2}{\Phi_0} \right] \Omega(t) + \left[\frac{RJ + aL}{\Phi_0} \right] \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{LJ}{\Phi_0} \cdot \frac{d^2\Omega(t)}{dt^2} \quad (\text{III-6})$$

De plus, on a $\Omega(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$

L'expression de la fonction de transfert correspondante est alors:

$$\frac{\theta_m(p)}{U(p)} = \frac{\Phi_0}{p(LJp^2 + (RJ + aL)p + aR + \Phi_0^2)}$$

Soit encore:

$$\frac{\theta_m(p)}{U(p)} = \frac{\Phi_0 / (aR + \Phi_0^2)}{p \left(\frac{LJ}{aR + \Phi_0^2} p^2 + \frac{R(J + aL/R)}{aR + \Phi_0^2} p + 1 \right)} \quad (\text{III-7})$$

Lorsque le rapport L/R est faible devant $RJ/(aR + \Phi_0^2)$ l'expression ci-dessus peut être approchée par:

$$\frac{\theta_m(p)}{U(p)} = \frac{\Phi_0 / (aR + \Phi_0^2)}{p \left(1 + \frac{RJ}{aR + \Phi_0^2} p \right) \left(1 + \frac{L}{R} p \right)} \cong \frac{K_v}{p(1 + \tau p)} \quad (\text{III-8})$$

ou` K_v est appelée constante de vitesse (en rd/s/v)

et τ est appelée constante de temps (en s).

D- Réducteur.

Sur la figure ci-contre (Fig. III-2), n_1 et n_2 représentent le nombre de dents respectif des deux engrenages. Le jeu de ces engrenages est négligeable. Dans ces conditions, la fonction de transfert du réducteur est:

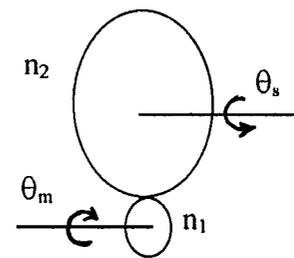


Fig. III-2.

$$\frac{\theta_s}{\theta_m} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{N}$$

Une caractéristique du réducteur est de ramener, au niveau de l'arbre moteur, une inertie supplémentaire égale à J_c / N^2 où J_c est l'inertie de la charge.

En général l'inertie ramenée au niveau du moteur est négligeable, et en conséquence seule l'inertie du rotor intervient dans le calcul.

E- Poulie.

La poulie (Fig. III-3) transforme le mouvement de rotation θ_s en un déplacement rectiligne $s(t)$:
avec Δs , ρ en cm si $\Delta\theta_s$ est exprimé en radians.

La fonction de transfert de la poulie est donc égale à : $\Delta s / \Delta\theta_s = \rho$.

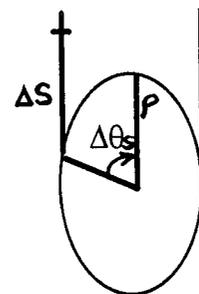


Fig. III-3.

F- Capteur de vitesse.

La fonction de transfert de ce capteur peut être considérée comme un nombre réel $\pm \lambda g$, où $\pm \lambda$ est affiché à l'aide du commutateur et de l'atténuateur gradué, et g est la sensibilité de la mesure exprimée en $v/rd/s$.

G- Fonction de transfert du système en boucle ouverte.

A partir des fonctions de transfert des divers éléments décrits ci-dessus, on obtient la fonction de transfert du système en boucle ouverte:

$$H_o(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 \cdot p)}$$

ou ` K représente la constante de vitesse et T_1 la constante de temps.

H- Fonction de transfert du système en boucle fermée.

Etant donné que la chaîne est à retour unitaire, la fonction de transfert du système en boucle fermée est de la forme:

$$H_F(p) = \frac{K / T_1}{p^2 + \frac{1}{T_1} p + \frac{K}{T_1}}$$

ou

$$H_F(p) = \frac{\omega_o^2}{p^2 + 2z\omega_o p + \omega_o^2}$$

ou ` z est le coefficient d'amortissement et ω_o la pulsation propre.

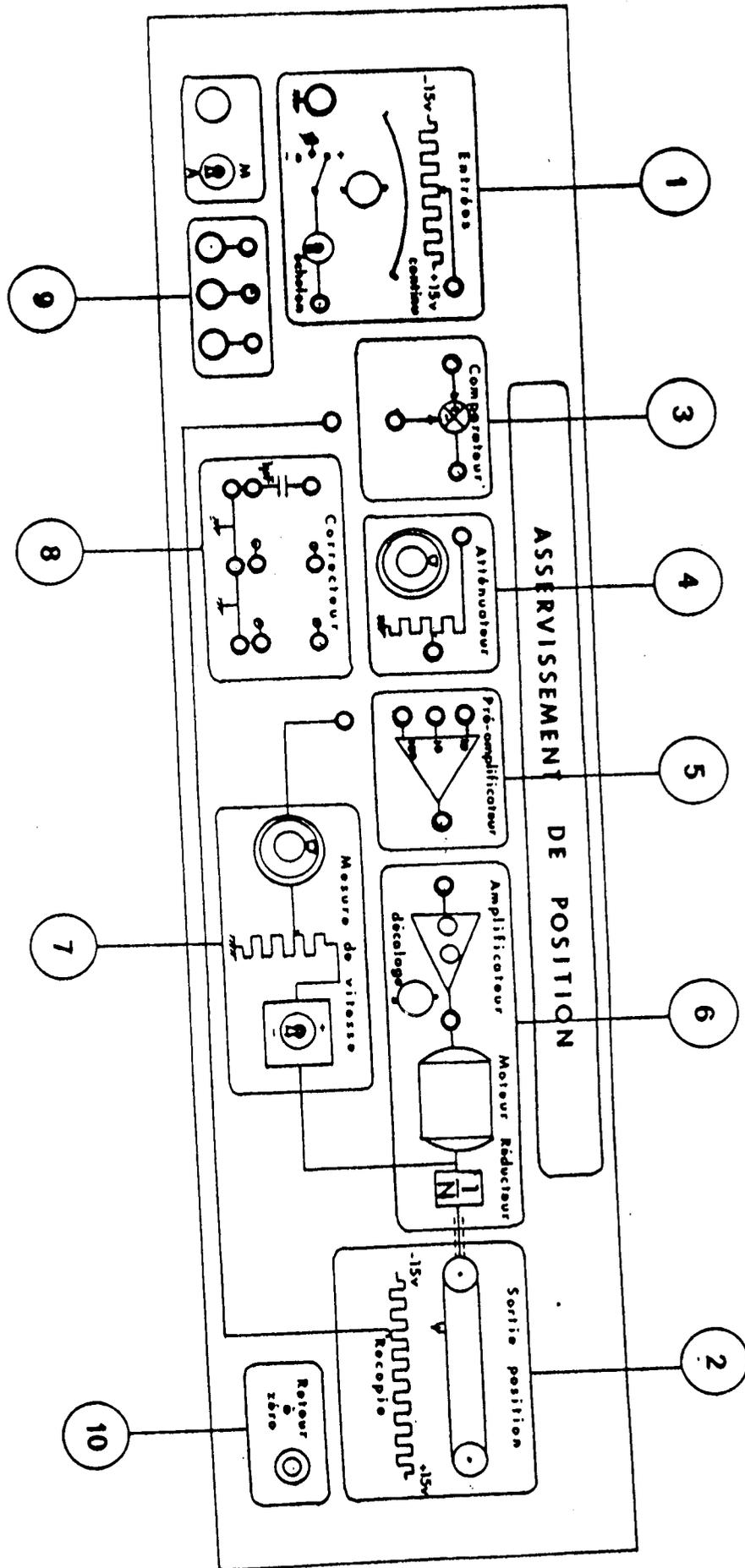


Fig. III-4

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- P. BORNE et Collaborateurs. « Modélisation et identification des processus », éditions Technip 1992.
- [2]- I. D. LANDAU. « Identification et commande des systèmes » . Hermes 1988.
- [3]- J. MAX et Collaborateurs. « Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures ». 2^{ème} édition, Masson 1977.
- [4]- Y. SEVELY; J. L. ABATUT; F. ROUBELLAT. « Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés ». Dunod, Paris 1973.
- [5] - Ph. DELARMINAT, Y. THOMAS. « Automatique des systèmes linéaires. Tome 2 - Identification . » Flammarions Sciences, 1977.
- [6] - A. MENENDEZ MARTINEZ. « Identification de la réponse impulsionnelle d'un système par intercorrélation au moyen de séquences binaires pseudo-aléatoires ».Thèse de Docteur- Ingénieur, Université de Grenoble, 1970.
- [7] - N.K. SINHA, G. P. RAO (eds.), « Identification of continuous-time systems », pp575-587. kluwer Academic Publishers, Netherrlands, 1991.
- [8] - W. D. T. DAVIES. « System identification for self adaptive control ». Wiley and sons Ltd, New York, 1970.
- [9] - C. FOULARD; S. GENTIL; J. S. SANDRAZ. « Commande et régulation par calculateur numérique », Editions Eyrolles, 1982.
- [10]- L. POVY. « Identification des processus », Dunod 1975.
- [11]- M. BELLANGER. « Traitement numérique du signal théorie et pratique ». Masson 1987.
- [12] - PH. DELARMINAT, Y. THOMAS. « Automatique des systèmes linéaires. Tome 1 - Signaux et systèmes » Flammarions Sciences, 1975.

- [25]- P. J. CIARLET. « Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation ». Ed. Masson. 1982.
- [26]- DO TU HAI. « Identification des processus par corrélation ». Service de Régulation et Automatique. Université de Liège. 1970.
- [27]- J. RICHALET, A. RAULT, R. POULIQUEN. « Identification des processus par la méthode du modèle ». Gordon & Breach, London, 1971.
- [28]- H. AIKAKE. « Maximum likelihood identification of Gaussian autoregressive moving average models ». Biometrika, vol.60, pp.255-265, 1973.
- [29]- A. Y. BARRAUD. « A propos du calcul des systèmes linéaires équivalents discrets/continus ». Note interne, Laboratoire d'Automatique de Grenoble. Décembre, 1980.
- [30]- Y. TANGUY et TURELLE. « TERGANE 20 - Manuel didactique asservissement continu: Applications ». TEREL. 1976.
- [31]- TEREL « Guide technique, Asservissement de position TERGANE 20. » Editions Mentor Sciences. 1982.
- [32]- SIMULINK for Windows, Version 1.2 , MATLAB 3.5a., MATH WORKS, Inc. Copyright 1984-1992.
- [33]- A. F. CHEKILA." Identification de la réponse impulsionnelle par la méthode de corrélation au moyen de séquences binaires pseudo-aléatoires."; Proc. du 5^{ème} Séminaire National de Mécanique, Boumerdès, Décembre 1996. Vol. II, pp. 103-108.