

République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'hamed BOUGARA Boumerdès



Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département : Maintenance Industrielle
Laboratoire : Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique



Mémoire de Magister
Filière : Génie Mécanique
Option: Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique

Thème

**Identification et modélisation des
contraintes cycliques du couple
d'engrenages : cas de la Boite de
Transmission Principale**

Présenté par : **DJEDID Toufik**

Soutenu le : 23 Juin 2008
Devant le jury composé de :

MM. S. RECHAK	Professeur	ENP Alger	Président
A. NOUR	Professeur	UMB Boumerdès	Encadreur
B. NECIB	Professeur	UMM Constantine	Examineur
A. KHALFI	Professeur	UDL Sidi Bel Abbès	Examineur
M.O. SI-CHAIB	Maître de Conférences	UMB Boumerdès	Examineur

Année universitaire 2007 /2008

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier en premier lieu Allah, le tout puissant, de m'avoir donné autant de courage, de patience et de volonté pour atteindre ce but.

Je tiens à remercier mon encadreur monsieur Nour Abdelkader de m'avoir proposé ce thème, pour ces encouragements pendant toute la période de préparation de ce mémoire et pour sa disponibilité et le matériel qu'il nous a mis sous disposition.

Je remercie vivement monsieur Rechak Said d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement le Professeur Khalfi Ali de l'université Djillali Liabbès de Sidi Bel Abbès et le Professeur Necib Brabim de l'université Mohamed Mentouri de Constantine d'avoir accepté de faire parti du jury d'évaluation de ce mémoire, et pour leur déplacement et le temps qu'ils ont consacré à l'étude de ce document.

Je remercie notre cher enseignant monsieur M.O. Si-chaib pour sa participation au jury et pour ses critiques pertinentes.

Je remercie monsieur Bey Mohamed pour toute la documentation qu'il m'a fournie et pour ses conseils et orientations.

J'adresse un grand merci à mes collègues en post-graduation : ahmed chellil, ahmed malki, mohand, Mourad, Abdelmalek, Samir, hamid et nadia.

Je remercie très vivement les membres de ma famille pour leur compréhension, encouragement et aide pendant toute la période de préparation de ce mémoire, et surtout mes chers parents.

Je remercie messieurs Tales Azzaddine et Hassani Chafik pour l'intérêt qu'ils ont fait à ce sujet, les encouragements et les remarques qu'ils m'ont faites.

Je remercie tous les agents de la bibliothèque de l'INGM, de la bibliothèque centrale de l'UMBB, de la bibliothèque de l'institut Mécanique de l'USDB et de la bibliothèque de la Polytechnique d'Alger pour leurs efforts et patience.

A

mes parents. . .

تُعالِجُ فِي هَذِهِ الْمَذْكُورَةِ نَمُودَجَ الْإِجْهَادَاتِ عَلَى الْمُسْتَنْنَاتِ الْمَخْرُوطِيَّةِ ذَاتِ الْمُكَدَّاتِ الْحَزْرُوتِيَّةِ بِتَطْبِيقِ طَرِيقَةِ الْعَنَاصِرِ الْمُنتَهِيَّةِ مِنْ أَجْلِ ذَلِكَ، إِعْتَمَدْنَا أَوَّلًا عَلَى نَمُودَجِ مُحَاكَاةِ عَمَلِيَّةِ الْقَطْعِ الْمُطَبَّقَةِ مِنْ طَرَفِ الشَّرَكَةِ «Gleason»، وَ الْمَطُورَ مِنْ طَرَفِ الرُّوسِيِّ فَايْدُورْ ل. لِيتِن، وَ هَذَا بِهَدَفِ تَحْدِيدِ الشَّكْلِ الْهَنْدَسِيِّ لِهَذَا النَّوعِ مِنَ الْمُسْتَنْنَاتِ. هَذَا النَّمُودَجُ يَعْتَمِدُ عَلَى مَعَايِيرِ وَ ضَوَابِطِ آلَةِ الْقَطْعِ الْمُطَبَّقَةِ خِلَالَ عَمَلِيَّةِ الْقَطْعِ، بِالإِضَافَةِ إِلَى الْأُبْعَادِ الْهَنْدَسِيَّةِ الْعَامَّةِ لِلزَّوْجِ مِنَ الْمُسْتَنْنَاتِ الْمَرَادُ تَحْقِيقُهُ. وَ ثَانِيًا، طَبَّقْنَا نَمُودَجَ مُحَاكَاةِ التَّمَاسِ بَيْنَ سَيِّئِينَ، هَذِهِ الطَّرِيقَةُ الْمُعَقَّدَةُ تُسَمَّى «تَحْلِيلُ التَّمَاسِ بَيْنَ الْأَسِنَّةِ (TCA)» مُطَوَّرَةً مِنْ طَرَفِ الشَّرَكَةِ الْمَذْكُورَةِ آنِفًا، وَ تَأْخُذُ بَعِينَ الْإِعْتِبَارِ كُلَّ الْعَنَاصِرِ السَّابِقَةِ الذِّكْرُ إِضَافَةً إِلَى مُعْطِيَّاتِ الْعُيُوبِ الْوُظُفِيَّةِ الْمُحْتَمَلَةِ عَلَى الْمَحَوْرَيْنِ الْحَامِلَيْنِ لِلْمُسْتَنْنَاتِ. وَفَقَ هَذَيْنِ الْعُنْصُرَيْنِ، اسْتَطَعْنَا تَحْلِيلَ الْأَحْوَالِ الْإِجْهَادِيَّةِ لِزَوْجِ مِنَ الْأَسِنَّةِ فِي حَالَةِ تَمَاسٍ بِإِقْحَامِ الْكَثِيرِ مِنْ حَالَاتِ عَدَمِ التَّرَاصُفِ بَيْنَ الْحَامِلَيْنِ.

كَلِمَاتُ مِفْتَاحِيَّة: مُسْتَنْنَاتٌ مَخْرُوطِيَّةٌ ذَاتُ مُكَدَّاتٍ حَزْرُوتِيَّةٍ، مُحَاكَاةٌ، قَطْعٌ، تَمَاسٌ بَيْنَ الْأَسِنَّةِ، إِجْهَادَاتٌ، ط ع م.

Résumé

On traite dans ce mémoire la modélisation des contraintes sur les engrenages spiroconiques par application de la méthode des éléments finis. Pour ce faire, on a tout d'abord adopté le modèle de simulation de l'opération de taillage de la firme *Gleason*, développé par le russe *Litvin L.Faydor*, dans le but de déterminer la géométrie de ce type d'engrenage. Ce modèle repose sur les paramètres et réglages machine appliqués lors du processus de taillage, et les dimensions générales du couple d'engrenages à réaliser. En deuxième lieu, on a appliqué le modèle de simulation du contact entre le couple de dents spiroconiques, appelé *Tooth Contact Analysis (TCA)* et développé par *Gleason System* dans sa complexité. Ce modèle prend en considération tous les paramètres cités ci-dessus en plus des défauts fonctionnels possibles sur les arbres concourants du couple d'engrenages. Avec ces deux approches, nous avons pu analyser les états de contraintes du couple de dents en contact, en introduisant plusieurs cas de défauts d'alignement.

Mots clés : Engrenages spiroconique, Simulation, Taillage, Contact entre dents, Contraintes, MEF.

Abstract

We study in this thesis the spiral bevel gears stress analysis using finite element method. In this aim, we have firstly adopted the model of cutting process simulation of *Gleason System*, developed by the russian *Litvin L.Faydor*, in order to determine the geometry of this type of gears. This model is based on parameters and installment settings of the cutting machine applied during the cutting process and the general dimensions of the pair of gears to be cut. And secondly, we have applied the simulation model of bearing contact between one pair of spiral bevel gear tooth, called *Tooth Contact Analysis (TCA)* and developed by *Gleason System* in its complexity. This model takes all parameters mentioned previously plus the possible errors of alignment on the intersecting axes of the pair of gears. These two approaches allowed us to investigate the stress analysis of two pair of tooth in contact introducing several cases of misalignment.

Key words : Spiral bevel gears, Simulation, Cutting, Tooth contact analysis, Stress, FEM.

Notations et abréviations

δ : angle primitif
 δ_a : angle de tête
 δ_f : angle de pied
 d : diamètre primitif
 d_a : diamètre de tête
 d_f : diamètre de pied
 b : largeur de denture
 h_a : saillie de la denture
 h_f : creux de la denture
 θ_a : angle de saillie
 θ_f : angle de creux
 h : hauteur totale de la dent
 β_m : angle de spirale moyen
 $N_{1 \text{ ou } 2}$: nombre de dents du pignon (1) ou de la roue (2)
 $m_{c1 \text{ ou } c2}$: rapport de modification de roulement
 C et D : coefficients de modification de roulement
 $\Delta X_{B1 \text{ ou } B2}$: positionnement horizontal
 $\Delta E_{m1 \text{ ou } m2}$: positionnement vertical
 $\Delta X_{D1 \text{ ou } D2}$: recule machine
 $\gamma_{m1 \text{ ou } m2}$: angle de pied machine
 $S_{r1 \text{ ou } r2}$: distance radiale du centre de la fraise par rapport au centre machine
 $q_{1 \text{ ou } 2}$: angle de berceau
 $s_{p \text{ ou } g}$ et $\theta_{p \text{ ou } g}$: coordonnées des points de la surface conique de l'outil
 $\lambda_{f \text{ ou } w}$ et $\theta_{p \text{ ou } g}$: coordonnées des points de la surface torique de l'outil
 $\psi_{1 \text{ ou } 2}$: angle de rotation du pignon ou de la roue
 $\psi_{c1 \text{ ou } c2}$: angle de rotation du berceau au cours de taillage du pignon ou de la roue
 $\Sigma^{(a)}_{p \text{ ou } g}$: surface conique, de l'outil, génératrice de la partie active du flanc de la dent
 $\Sigma^{(b)}_{p \text{ ou } g}$: surface torique génératrice de la partie raccordement du flanc de la dent
 $R_{p \text{ ou } g}$: rayon de la fraise de taillage
 $\alpha_{p \text{ ou } g}$: angle de pression de l'outil
 $\rho_{f \text{ ou } w}$: rayon de l'arrête circulaire de la lame de taillage
 P_w : largeur d'entre pointes de la lame de la fraise
 R_1 : repère lié au pignon
 R_2 : repère lié à la roue
 $R_{p \text{ ou } g}$: repère lié à la fraise de taillage
 $R_{c1 \text{ ou } c2}$: repère lié au berceau
 $R_{m1 \text{ ou } m2}, R_{a1 \text{ ou } a2}, R_{b1 \text{ ou } b2}$: repères liés à la machine de taillage

X_i, Y_i et Z_i : coordonnées d'un point dans le repère R_i

$r^{(a)}_{1 \text{ ou } 2}$: vecteur position d'un point de surface de la partie active de la dent, exprimé dans $R_{1 \text{ ou } 2}$

$r^{(b)}_{1 \text{ ou } 2}$: vecteur position d'un point de surface de la partie raccordement de la dent, exprimé dans $R_{1 \text{ ou } 2}$

$V_{m1}^{(p1)}$: vecteur de la vitesse relative au point de contact exprimé dans le repère R_{m1}

$\omega_i^{(p \text{ ou } g)}$: vecteur vitesse rotation au cours de taillage, exprimé dans le repère R_i

ω_{c1} : vecteur vitesse angulaire du berceau au cours de taillage

$\omega_{1 \text{ ou } 2}$: vecteur vitesse angulaire du berceau au cours de taillage (sans désigner le repère)

M_{ij} : matrice de passage du repère R_j au repère R_i

L_{m1c1} et L_{c1p} : sous matrices (3×3) des deux matrices M_{m1c1} et M_{c1p}

$f^{(a)}_{1p \text{ ou } 2g}$: équation d'engrènement de la dent avec la surface conique de l'outil

$f^{(b)}_{1p \text{ ou } 2g}$: équation d'engrènement de la dent avec la surface torique de l'outil

$N^{(a)}_{p \text{ ou } g}$: vecteur normal à la surface conique de l'outil

$N^{(b)}_{p \text{ ou } g}$: vecteur normal à la surface torique de l'outil

$n^{(a)}_{p \text{ ou } g}$: normale unitaire à la surface conique de l'outil

$n^{(b)}_{p \text{ ou } g}$: normale unitaire à la surface torique de l'outil

CEVM : contrainte équivalente de Von Misés

CPri : i^{ème} contrainte principale (i=1,2,3)

IC : intensité de contrainte

Liste des figures

Figure I-1 Roue plate génératrice.....	3
Figure I-2 Roue plate, différents types de dentures coniques.....	4
Figure I-3 Méthode des roulettes.....	5
Figure I-4 Méthode des enveloppes.....	5
Figure I-5 Denture spirale Gleason.....	6
Figure I-6 Types de dentures spirales Gleason.....	6
Figure I-7 Denture Klingelnberg.....	7
Figure I-8 Denture Klingelnberg-Oerlikon.....	7
Figure I-9 Types de hauteurs des dentures.....	8
Figure I-10 Machine de taillage <i>Gleason</i>	9
Figure I-11 Comparaison de la surface générée avec la développante spiraloïde.....	10
Figure I-12 Déviations de la saillie au creux de la dent.....	10
Figure I-13 Flancs de la denture représentés par 10x10 points chacun.....	11
Figure I-14 Outil coupant avec cotés droits.....	11
Figure I-15 Outil à profils actifs droits et de raccordement circulaires.....	12
Figure I-16 Outil à profils elliptiques pour procédé Formate.....	12
Figure I-17 Modèle 2D d'une dent d'engrenage cylindrique droit.....	13
Figure I-18 Modèle d'une dent	13
Figure I-19 Conditions aux limites.....	13
Figure I-20 Modèle EF de trois couples de dents.....	14
Figure I-21 Conditions aux limites pour un ensemble de dents.....	14
Figure II-1 Couple d'engrenage conique général.....	16
Figure II-2 Principe de taillage des engrenages spiroconiques.....	18
Figure II-3 Repères utilisés et paramètres machine pour le taillage de la roue.....	19
Figure II-4 Positionnement de la fraise de taillage.....	20
Figure II-5 Représentation de l'outil de taillage de la roue.....	21
Figure II-6 Repères utilisés et paramètres machine pour le taillage du pignon.....	26
Figure II-7 Positionnement de la fraise de taillage du pignon	27
Figure II-8 Représentation de l'outil de taillage du pignon.....	28
Figure II-9 Positions axiale et radiale d'un point de la surface de la dent sur le plan (ZR).....	34
Figure III-1 Illustration de la tangence des surfaces Σ_1 et Σ_2	36
Figure III-2 Défauts d'alignement entre le pignon et la roue.....	37
Figure III-3 Définition des différents repères et désalignements.....	39
Figures III-(a- de 1 à 10) Résultats numériques du contact du pignon.....	43-47
Figures III-(b- de 1 à 10) Résultats numériques du contact de la roue.....	43-47
Figure IV-1 Points des surfaces de la dent du pignon.....	53
Figure IV-2 Rotation des deux flancs, concave de la dent du pignon.....	54
Figure IV-3 Volumes étudiés des deux dents.....	54
Figure IV-4 Partie raccordement de la dent.....	55
Figure IV-5 Élément fini utilisé pour le maillage des dents.....	55

Figure IV-6 Maillage de la dent du pignon.....	56
Figure IV-7 Conditions aux limites appliquées.....	56
Figures IV-8 (a- de 1 à 10) Visualisation de la contrainte équivalente de Von Misés sur le pignon.....	57-66
Figures IV-8 (b- de 1 à 10) Visualisation de la contrainte équivalente de Von Misés sur la roue.....	57-66
Figures IV-8 (c- de 1 à 10) Visualisation de la première contrainte principale sur le pignon.....	57-66
Figures IV-8 (d- de 1 à 10) Visualisation de la première contrainte principale sur la roue.....	57-66
Figures IV-8 (e- de 1 à 10) Visualisation de la deuxième contrainte principale sur le pignon.....	57-66
Figures IV-8 (f- de 1 à 10) Visualisation de la deuxième contrainte principale sur la roue.....	57-66
Figures IV-8 (g- de 1 à 10) Visualisation de la troisième contrainte principale sur le pignon.....	57-66
Figures IV-8 (h- de 1 à 10) Visualisation de la troisième contrainte principale sur la roue.....	57-66
Figure IV-9 Contrainte au point d'application de la force.....	67
Figure IV-10 Numérotation des nœuds étudiés.....	67
Figure IV-11 Contrainte équivalente de Von Misés au pied de la dent du pignon.....	68
Figure IV-12 Contrainte principale maximale au pied de la dent du pignon.....	68
Figure IV-13 Intensité de contrainte au pied de la dent du pignon.....	69
Figure IV-14 Contrainte équivalente de Von Misés au pied de la dent de la roue.....	69
Figure IV-15 Contrainte principale maximale au pied de la dent de la roue.....	70
Figure IV-16 Intensité de contrainte au pied de la dent de la roue.....	70
Figure IV-17 Contrainte CEVM maximale au pied de la dent du pignon en fonction du type de désalignement.....	72
Figure IV-18 Contrainte CEVM maximale au pied de la dent de la roue en fonction du type de désalignement.....	72
Figure IV-19 Moyennes des CEVM sur le couple pignon-roue en fonction du type de désalignement.....	73

Liste des tableaux :

Tableau IV-1 Caractéristiques générales du couple d'engrenage spiroconique.....	51
Tableau IV-2 Paramètres et réglages machine pour le taillage de la roue.....	51
Tableau IV-3 Paramètres et réglages machine pour le taillage du pignon.....	51

SOMMAIRE

Introduction générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre I

Synthèse Bibliographique

Introduction.....	3
1 Roue plate génératrice.....	3
2 Méthodes d'obtention des dentures spiroconiques.....	4
2-1 Méthode des ROULETTES.....	4
2-2 Méthode des ENVELOPPES.....	5
3 Types d'engrenages à denture spirale.....	5
3-1 Denture spirale Gleason.....	5
3-2 Denture spirale Klingelnberg.....	6
3-3 Denture spirale Klingelnberg-Oerlikon.....	7
4 Machine de taillage Gleason universelle.....	8
5 Géométrie.....	9
6 Application de la MEF.....	12
Conclusion.....	14

Chapitre II

Simulation de la géométrie des engrenages spiroconiques

Introduction.....	15
1 Caractéristiques géométriques générales.....	15
2 Bases du modèle de simulation.....	17
2-1 Coordonnées homogènes.....	17
2-2 Principe de taillage.....	18
3 Surface de la roue	19
3-1 Description des systèmes de coordonnées.....	19
3-2 Surface de l'outil	20

3-3 Famille de surfaces de l'outil.....	23
3-4 Equation d'engrènement.....	25
3-5 Equations des surfaces de la dent.....	25
4 Surface du pignon.....	26
4-1 Description des systèmes de coordonnées.....	26
4-2 Surface de l'outil.....	27
4-3 Famille des surfaces de l'outil.....	30
4-4 Equation d'engrènement.....	31
4-5 Equations des surfaces de la dent.....	33
5 Technique de résolution.....	33
Conclusion.....	35

Chapitre III

Simulation du contact entre un couple de dents spiroconiques

Introduction.....	36
1 Contact ponctuel en 3D.....	36
2 Positionnement géométrique du pignon et de la roue.....	37
3 Définition des repères.....	38
4 Modèle de simulation.....	39
5 Visualisation des résultats numériques.....	42
6 Discussion des résultats.....	48
Conclusion.....	49

Chapitre IV

Résultats numériques, analyse des contraintes et des déformations par la MEF

Introduction.....	50
1 Exemple numérique.....	50
2 Résolution du problème de la surface.....	52
2-1 Organigramme de résolution.....	52
2-2 Résultats de la surface.....	52
3 Réorientation des flancs concave et convexe.....	53

4 Volume de la dent.....	54
5 Maillage de la dent.....	55
6 Conditions aux limites.....	56
7 Résultats de la MEF.....	56
8 Remarques et conclusions.....	67
9 Evaluation des contraintes au pied de la denture.....	67
9-1 Interprétations.....	71
Conclusion.....	74
Conclusions générale.....	75
Bibliographie.....	77
Annexe A : Coordonnées des points de contact.....	82
Annexe B : Fonctions coordonnées des points de surfaces des deux dentures du pignon et de la roue.....	87
Annexe C : Résultats de la déformation au pied de la denture	90

Introduction générale

Les engrenages spiroconiques sont des éléments de transmission de puissance à axes perpendiculaires, le plus souvent, travaillant sous des conditions mécaniques très dures en charge et en vitesse à transmettre. C'est un type d'engrenages coniques à denture spirale, ne possédant pas de forme analytique proprement établie et travaillant cinématiquement en trois dimensions de l'espace. La première machine taillant ce type d'engrenage a été inventée en 1910 utilisant le principe d'indexage continu [4]. Tandis que les études traitant de ce type d'engrenage reviennent à une technologie très récente dont les investigations ne cessent à développer remarquablement les méthodes et les outils impliqués à l'analyse théorique et pratique de son élaboration, comportement statique et dynamique, phénomènes accompagnant son comportement et enfin l'optimisation et l'amélioration principalement de sa géométrie [3,5,6]. Cette dernière représente la difficulté majeure de l'étude des engrenages spiroconiques, elle n'est déterminée que par passage par la simulation de l'opération de taillage, dont le principe de la méthode, que nous allons développer ultérieurement, se base sur le suivi de la trajectoire de chaque point générateur de la surface de l'outil taillant, et par la suite déterminer dans l'espace une surface limitée par les conditions opérationnelles de taillage.

Il existe trois firmes leaders concepteurs des engrenages spiroconiques et donc des machines de taillage :

- Gleason (USA), dont la génératrice de la denture est de type *cicular-cut*,
- Klingelnberg (Allemagne), dont la génératrice de la denture est de type *palloid system*,
- Klingelnberg-Oerlikon (Allemagne-Suisse), dont la génératrice de la denture est de type *cyclo-palloid system*.

Le présent travail est une contribution à l'étude des engrenages spiroconiques ; taillage, géométrie, contact et analyse des contraintes par la méthode des éléments finis. Ce type d'engrenage est utilisé principalement dans le domaine aéronautique [38,41] et dans les véhicules lourds à cause de ces performances en puissance, résistance et durée de vie. C'est le meilleur par excellence des engrenages de renvoi d'angle, sa forme en spirale lui permet le fonctionnement dans des conditions difficiles de charge et de défauts fonctionnels tels que les désalignements des arbres traités dans ce travail et illustrés par un exemple numérique.

Le premier chapitre est une recherche bibliographique introductive permettant la définition de l'engrenage spiroconique, par sa mise en forme (ou procédé de taillage), ces types et ces firmes leaders dans le monde. Un aperçu très rapide est exposé dans ce chapitre des études anciennes et récentes réalisées par les engrenagistes les plus connus dans ce domaine. Notons essentiellement ceux de Litvin (**Illinois at Chicago**) [6,9,14-16,19,21,25] et de Handschuh (**NASA**) [18,24,26-28,37,41,43], dont la méthode et le processus sont traités.

Une détermination détaillée de la géométrie est représentée dans le deuxième chapitre, par un modèle mathématique de simulation de l'opération de taillage

impliquant tous les paramètres et réglages de la machine, caractéristiques géométriques et données cinématiques accompagnant le processus. Les surfaces du couple de dents du pignon et de la roue sont établies par leurs parties actives et raccordements de leurs côtés concaves et convexes. Les quatre parties étant traitées séparément selon la méthode présentée dans ce chapitre. Cette méthode a été proposée, et en train de se développer jusqu'à maintenant, par le professeur russe Faydor L.Litvin.

Le troisième chapitre évoque la méthode de détermination du contact développée par la firme **Gleason**, appelée TCA (**Tooth Contact Analysis**). C'est une procédure mathématique qui a démontré son efficacité quant à la simulation d'un problème de contact complexe en trois dimensions.

La méthode repose sur la simulation de l'engrènement et sur le principe de tangence continue entre profils de dents en contact. La méthode est expliquée et appliquée à travers un exemple pratique.

Après avoir déterminé le modèle géométrique, le quatrième chapitre est consacré aux résultats numériques obtenus par application de la méthode des éléments finis. Une évaluation de la distribution de contrainte dans le corps de la dent (pignon et roue) est faite pour plusieurs cas de fonctionnements. La contrainte au pied de la dent est déduite pour tous les cas étudiés, et les résultats en déformation ont été annexés à ce mémoire.

Chapitre I

Synthèse Bibliographique

Introduction

Le présent chapitre est une collecte bibliographique condensée permettant la mise en relief des engrenages spiroconiques, en commençant par la définition de la denture conique selon le principe de la roue génératrice imaginaire, les différents types de spirales taillées par les différents constructeurs et leurs méthodes d'obtention (théoriques et pratiques). La machine de taillage *Gleason* est représentée par sa partie opérative générale et sa cinématique, ce qui est très important pour la détermination de la géométrie des engrenages spiroconiques.

Un exposé des différents modèles réalisés sur les engrenages spiroconiques s'avérant très nécessaire pour une bonne compréhension des phénomènes modélisés, leurs causes et effets et les moyens impliqués dans leurs investigations. Les phénomènes les plus étudiés sur les engrenages spiroconiques sont : l'erreur de transmission, la simulation de contact par la méthode *Tooth Contact Analysis* et la modélisation des contraintes dans le corps de la dent seule, dans un couple de dents en prise ou dans un nombre de dents en contact.

1 Roue plate génératrice

La compréhension de la conception des engrenages coniques passe par la considération du concept de la roue plate génératrice (figure I-1). La roue plate génératrice est une roue conique imaginaire dont le cône primitif est devenu un plan, c'est-à-dire le demi angle au sommet du cône est devenu égal à 90° . Une roue plate tourne autour d'un axe qui est normal à son plan primitif.



Figure I-1 Roue plate génératrice

La figure I-2 représente une roue plate génératrice, tournant autour de l'axe passant par son centre et perpendiculaire à son plan [17]. La forme de la roue plate

génératrice dans le plan permet de définir trois principaux types de dentures coniques [1,23,48,52] :

- ✚ Denture droite : dent prismatique passant par O,
- ✚ Denture hélicoïdale: dent prismatique décalée par rapport à O,
- ✚ Denture spirale : dent de surface d'égale pente, formée par les segments également inclinés par rapport à P, s'appuyant sur une courbe directrice v caractérisant le type de denture.

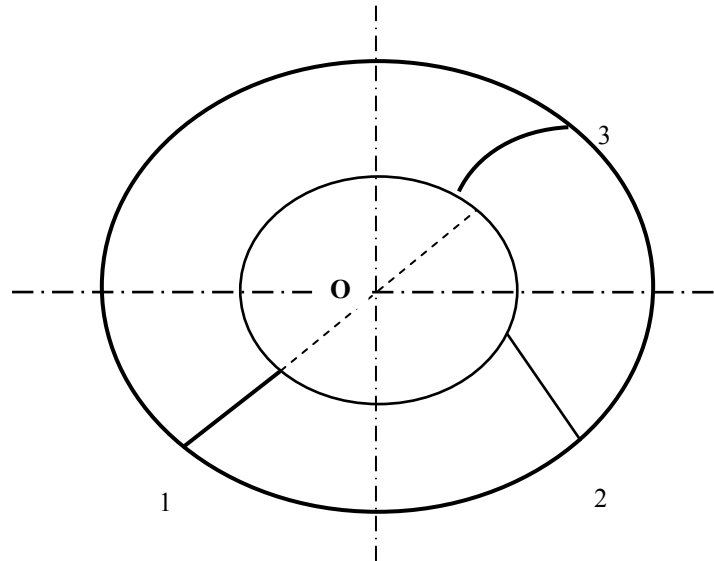


Figure 1-2 Roue plate, différents types de dentures coniques.

2 Méthodes d'obtention des dentures spiroconiques

Deux méthodes d'obtention des surfaces de denture conjuguées pignon et roue existent en pratique [23,52]:

2-1 Méthode des ROULETTES

Principe de la méthode (figure I-3) : dans cette méthode, les cônes primitifs C_1 et C_2 du pignon et de la roue, de sommet S, sont tangents suivant la génératrice SI. Les dentures conjuguées du pignon et de la roue sont obtenues, par génération, à partir du même ensemble générateur : cet ensemble est matérialisé par sa surface primitive P roulant sans glisser sur C_1 et C_2 suivant SI, et la surface génératrice N liée invariablement à P. Les deux dentures conjuguées du pignon et de la roue sont engendrées par N, en faisant rouler sans glisser P soit sur le cône C_1 , soit sur le cône C_2 . La surface engendrée par les arrêtes tranchantes matérialise N. C'est ce principe qui est utilisé ici pour la génération des dentures du pignon et de la roue. Notons que la présence de ce mouvement composé nécessite la prise en considération de l'équation d'engrènement de la roue lors du calcul de la géométrie de la denture de cette dernière, contrairement à la méthode suivante.

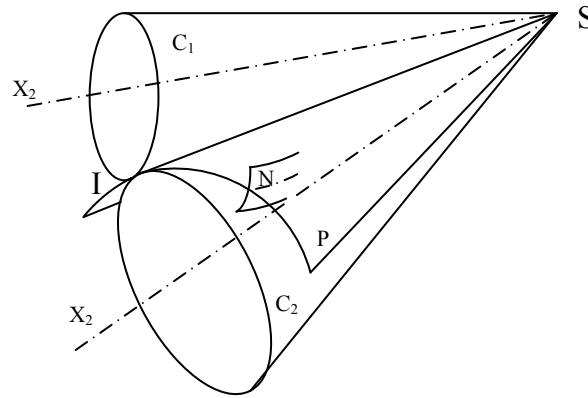


Figure I-3 Méthode des roulettes

2-2 Méthode des ENVELOPPES

Principe de la méthode (figure I-4) : dans ce cas, la denture est engendrée par un ensemble générateur (P-N) matérialisant exactement la roue : c'est-à-dire que P est le cône primitif de la roue, et N est la surface de denture de cette roue. Le procédé de taillage « FORMATE » de la firme Gleason utilise cette méthode.

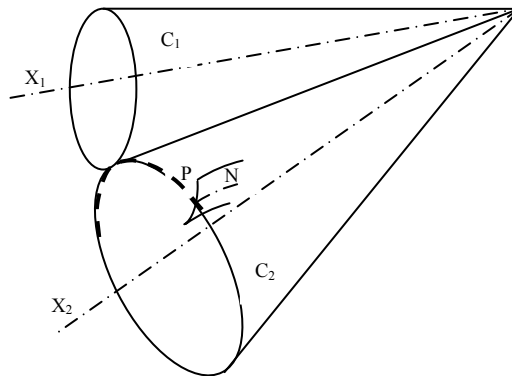


Figure I-4 Méthode des enveloppes

3 Types d'engrenages à denture spirale

Il existe trois grandes firmes de construction des machines de production des engrenages spiroconiques. Donc, il existe trois types d'engrenages spiroconiques dont la différence principale se résume dans la méthode théorique appliquée pour le taillage des profils de denture.

3-1 Denture spirale Gleason

La forme de cette denture sur la roue plate génératrice est un arc de cercle d'où l'appellation de ce procédé *circular-cut* [43,45] (figure I-5).

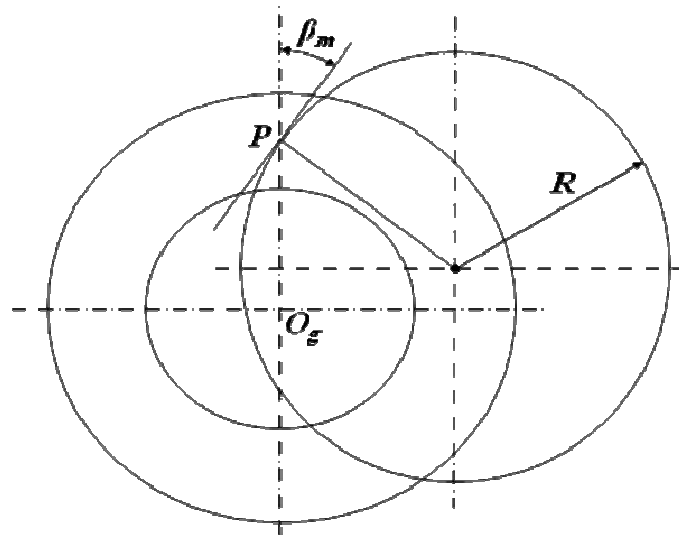


Figure I-5 Denture spirale Gleason

La firme Gleason a développé trois types d'engrenages coniques à denture spirale qui sont brièvement :

✚ **Denture Zerol** : Figure I-6-a

Dont les axes du pignon et de la roue ont concourants et l'angle de spirale moyen est nul pour le pignon et la roue.

✚ **Denture spiroconique** : Figure I-6-b

Les axes du pignon et de la roue sont concourants. La denture est utilisée de préférence pour des gammes de rapports de vitesse entre 1/1 et 3/1.

✚ **Denture hypoïde** : Figure I-6-c

Les axes du pignon et de la roue ne sont pas concourants et sont décalés d'une distance E . La denture est utilisée de préférence pour des gammes de rapports de vitesse supérieurs à 3/1.

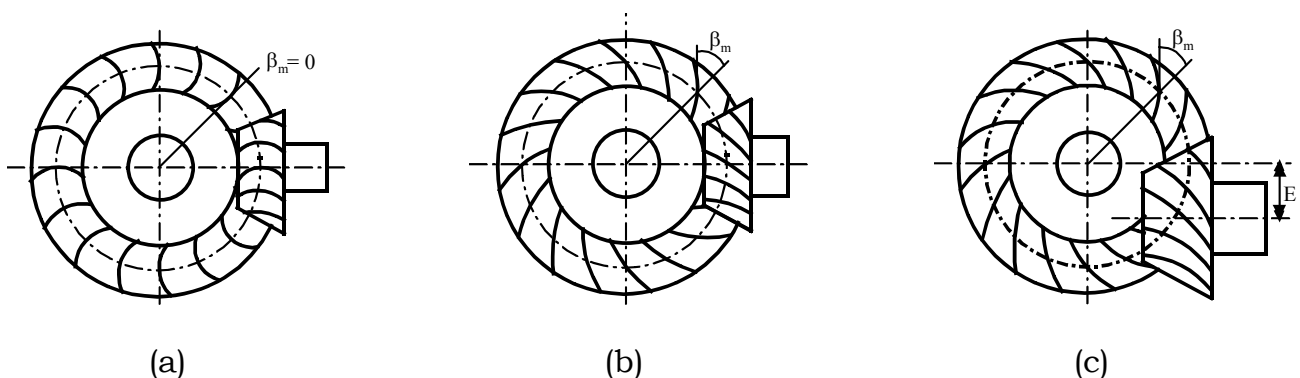


Figure I-6: Types de dentures spirales Gleason :

(a) denture Zerol, (b) denture Spiroconique, (c) denture Hypoïde [22,34,48,50].

3-2 Denture spirale Klingelnberg (figure I-7)

La forme de cette denture sur la roue plate génératrice est approximativement une développante de cercle (*palloid system*) de cercle de base R [8,13,45].

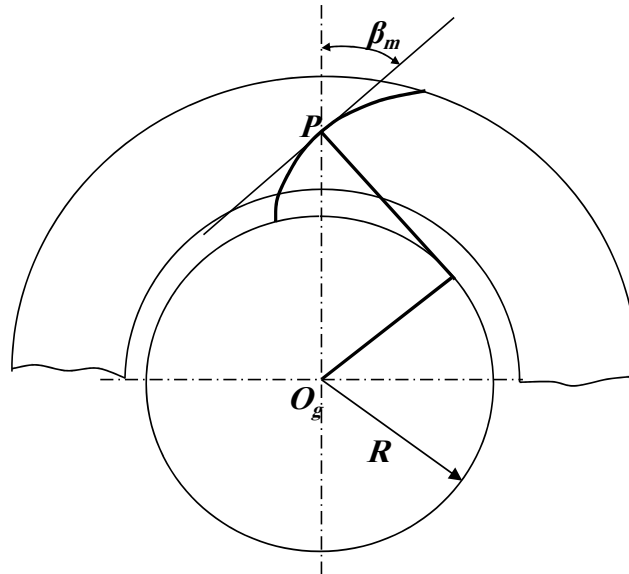


Figure I-7 Denture Klingelnberg

3-3 Denture Klingelnberg-Oerlikon [45]

La forme de cette denture sur la roue plate génératrice est épicycloïde allongée (*cyclo-palloid system*). L'outil est lié rigidement au cercle de ray ρ . Ce dernier roule sans glissement sur le cercle de rayon r (rayon de base). Voir figure I-8 :

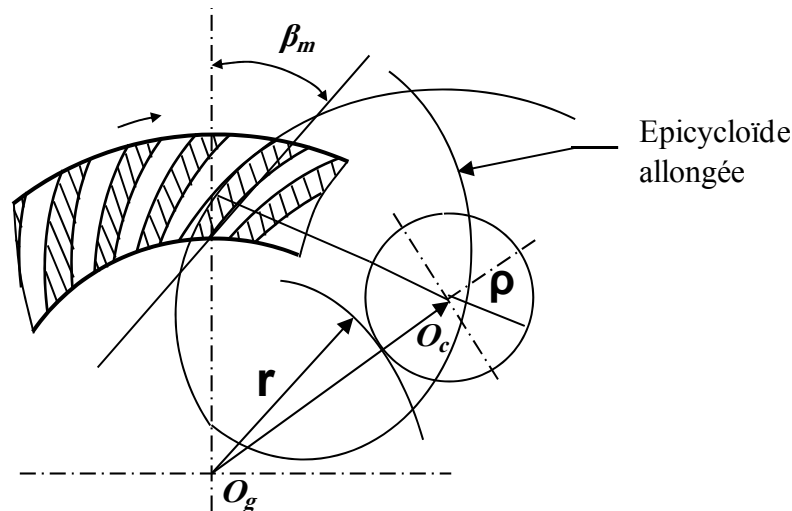


Figure I-8 Denture Klingelnberg-Oerlikon

Types de hauteurs de denture : Une différence importante entre les engrenages spiroconiques Gleason et Klingelnberg-Oerlikon peut être soulignée, c'est la nature de la hauteur de la denture suivant la largeur de cette dernière.

✚ Denture à hauteur variable : Figure I-9-a

Gleason a adopté une hauteur de dent variable dont l'axe des fraises pendant le taillage est parallèle à l'axe du berceau, mais n'est pas perpendiculaire à la génératrice primitive. La hauteur diminue linéairement du gros bout au petit bout de la dent.

🚧 Denture à hauteur constante : Figure I-9-b

Ce type de denture est adopté par Klingelnberg et Klingelnberg-Oerlikon. L'axe des fraises est parallèle à l'axe du berceau et perpendiculaire à la génératrice primitive. Cette dernière est parallèle à la génératrice de pied de la dent.

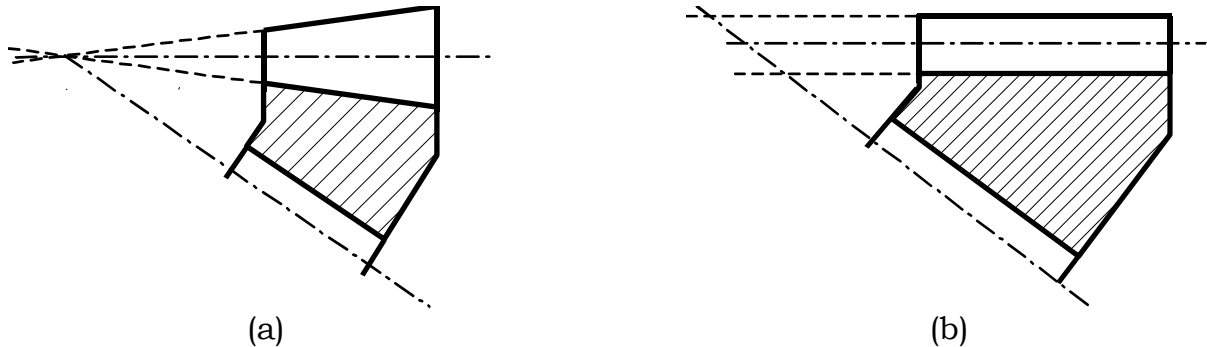


Figure I-9 Types de hauteurs des dentures **(a)** denture à hauteur variable, **(b)** denture à hauteur constante.

4 Machine de taillage Gleason universelle

La figure I-10 montre un schéma général en perspective d'une machine Gleason universelle [22,34,37,43,47] permettant l'utilisation des fraises de taillage de type *Face mill* et *Face hob* et le taillage des engrenages spiroconiques et hypoïdes . La machine est constituée principalement de :

- Un berceau (1) animé d'un mouvement de rotation autour de son axe horizontal et permettant le positionnement de l'axe de rotation de l'excentrique par rapport au centre de la machine (12),
- Un excentrique (13) d'axe horizontal parallèle à celui du berceau permettant l'ajustement de la distance radiale entre le centre de la fraise et le centre machine,
- Des glissières (10) permettant le réglage en position horizontale (11) du chariot (8) portant la poupée (5) animée des mouvements de positionnement vertical et de recule (6 et 7 respectivement) sur laquelle s'implante la tête porte pièce et la pièce à tailler (4), la poupée est posée sur une base coulissante animée du mouvement angulaire (9).
- La fraise de taillage (3) s'appuyant sur la face verticale de la tête porte-fraise. La fraise fait un mouvement de rotation uniforme (mouvement de coupe) autour de son axe. Le tout est supporté par le bâti (2).

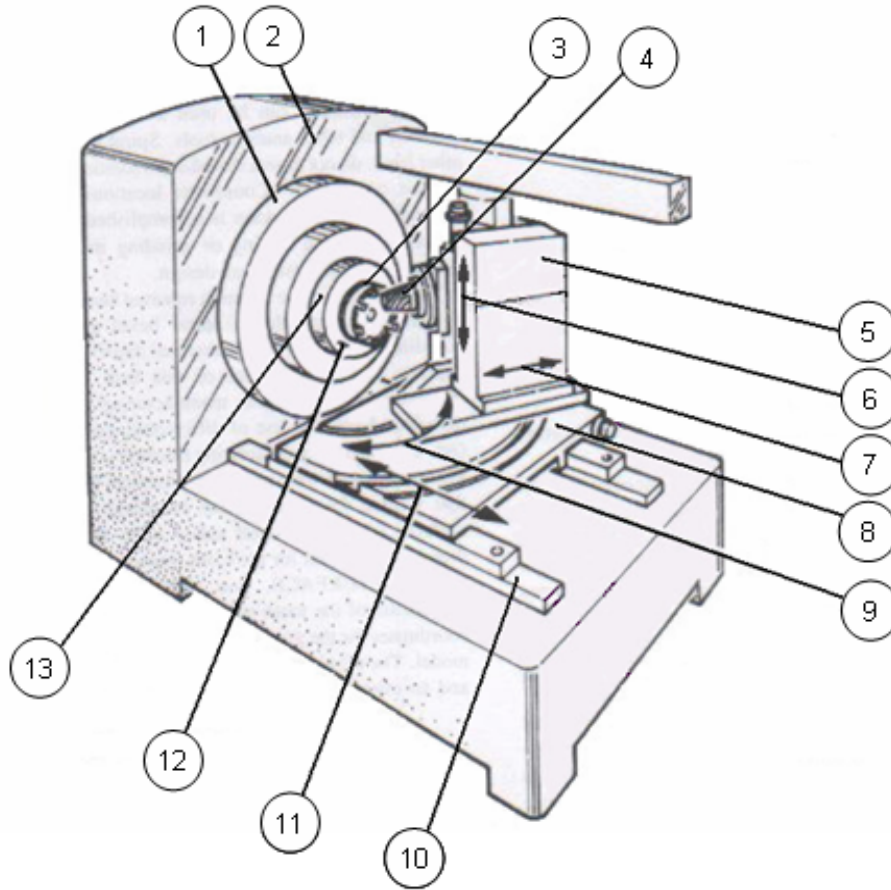


Figure I-10 Machine de taillage *Gleason*.

5 Géométrie

Les engrenages spiroconiques sont des éléments de machine très complexes, principalement par leur géométrie. Peu de chercheurs ont tenté de proposer des modèles mathématiques définissant la géométrie des engrenages spiroconiques dont le modèle successif par excellence est celui de Litvin qui se base sur la simulation de l'opération de taillage en suivant la trajectoire des points générateurs de l'outil de taillage et en prenant en compte de tous les paramètres significatifs et des mouvements accompagnant l'opération.

Subba Rao et al [33] ont proposé en une comparaison de la forme de la denture spiroconique obtenue par simulation mathématique du taillage avec une forme en développante spiraloïde obtenue par déplacement de courbe en développante sphérique suivant la spirale sur le cône de base. Ce déplacement dépend du type de la forme de la spirale désirée (logarithmique, *circular-cut* ou en développante de cercle). Les auteurs ont utilisé une spirale *circular-cut* et une forme de développante spiraloïde ayant comme coordonnées les équations suivantes :

$$x_p = l \cos \alpha_b (1 - \tau^2 \sin^2 \alpha_b / 2)$$

$$y_p = l \sin \alpha_b \cos(\sigma + \tau) (1 - \tau^2 \sin^2 \alpha_b / 2) + l \tau \sin \alpha_b \sin(\sigma + \tau) \sqrt{1 - \tau^2 \sin^2 \sigma / 4}$$

$$z_p = l \sin \alpha_b \sin(\sigma + \tau) (1 - \tau^2 \sin^2 \alpha_b / 2) - l \tau \sin \alpha_b \cos(\sigma + \tau) \sqrt{1 - \tau^2 \sin^2 \sigma / 4}$$

Les points obtenus par cette forme analytique (x_p, y_p, z_p) et les points obtenus par simulation de taillage (x_q, y_q, z_q) sont exprimés dans le même système de coordonnées et la différence $TP - TB$ est calculée, telle que :

$$TP = \sqrt{(x_t - x_q)^2 + (y_t - y_q)^2 + (z_t - z_q)^2}$$

$$TB = \sqrt{(x_t - x_p)^2 + (y_t - y_p)^2 + (z_t - z_p)^2}$$

avec (x_t, y_t, z_t) coordonnée du point T sur le cône de base (figure I-11), données par :

$$x_t = l \cos \alpha_b$$

$$y_t = l \sin \alpha_b \cos(\sigma + \tau)$$

$$z_t = l \sin \alpha_b \sin(\sigma + \tau)$$

Nous représentons ici (figure I-12) les résultats obtenus par les auteurs sur l'exemple qui ont étudié en exprimant la déviation en (mm) le long de la largeur de la dent.

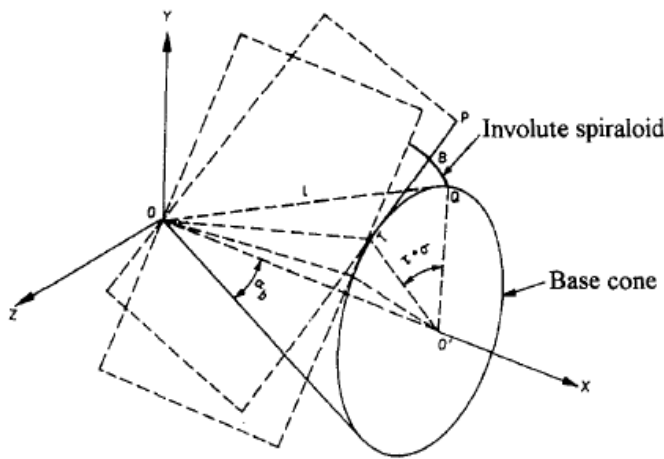


Figure I-11 Comparaison de la surface générée avec la développante spiraloïde.

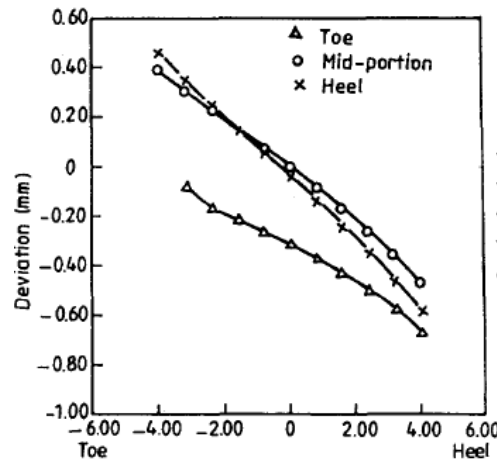


Figure I-12 Déviations de la saillie au creux de la dent [33].

Les auteurs ont pu déterminer sur un exemple numérique la différence très grande entre les deux modèles (analytique et simulé) pour des éléments devant travailler dans des conditions très exigeantes et comme il est souligné en [36,38,48,56], le comportement des engrenages spiroconiques est très sensible aux variations de la surface. Ce modèle analytique n'a pas été adopté par les chercheurs.

Handchuh [37,43], Bibel [32,35] ont étudié les engrenages spiroconiques par les éléments finis dont la géométrie considérée ne prend pas en compte le profil de raccordement. La simulation de taillage réalisée ne tient en compte que des parties actives (concave et convexe) et le raccordement entre partie active et cône de pied est considérée circulaire (rayon imposée). Hanschuh et Litvin [37,43] ont présenté les deux flancs de la dent par 100 points chacun (figure I-13).

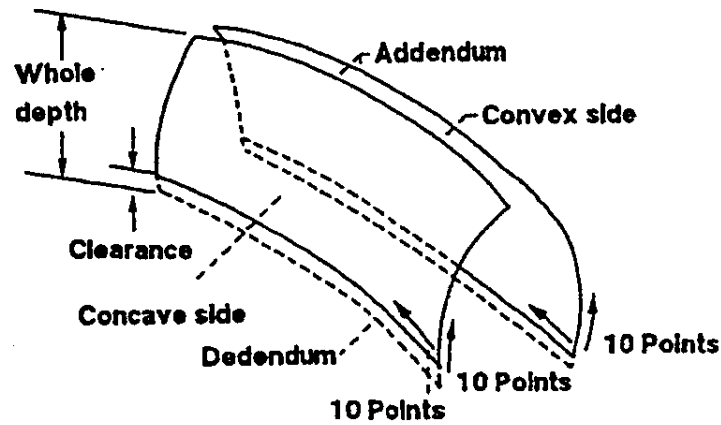
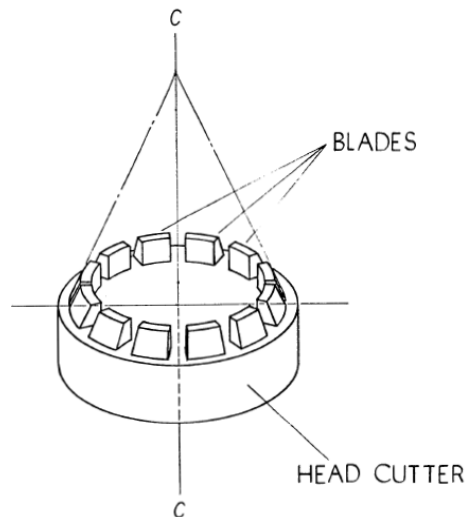


Figure I-13 Flancs de la denture représentés par 10x10 points chacun

La partie raccordement qui n'est pas considérée dans des modèles de simulation de taillage est un résultat direct de l'outil de taillage ayant des profils droits (figure I-14).



c-c : axe de la fraise de taillage.

Figure I-14 Outil coupant avec cotés droits.

D'autres auteurs ont tenu en compte dans leurs modèles la simulation de la partie raccordement en utilisant des outils de taillage à arcs de cercle sur les extrémités des deux côtés comme il est représenté sur la figure I-15. C'est cet outil qui est utilisé dans la procédure exposée en prochain chapitre.

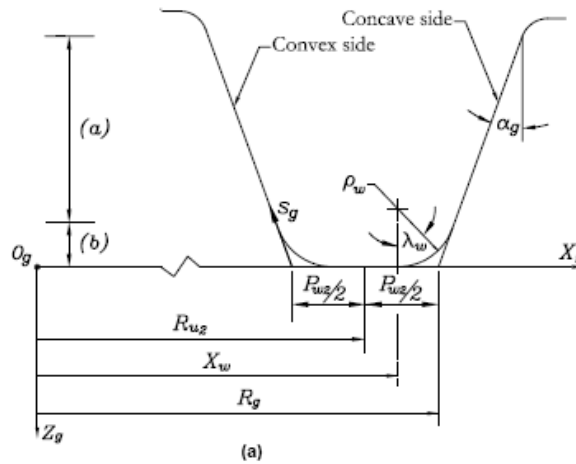


Figure I-15 Outil à profils actifs droits et de raccordement circulaires.

Litvin et al [9] ont proposé un outil de forme circulaire pour les parties de raccordement et elliptique pour les parties actives (figure I-16), et ce pour le procédé Formate utilisant le principe de taillage sans génération à division discontinue [50]. Récemment cet outil est utilisé dans le taillage avec génération [6].

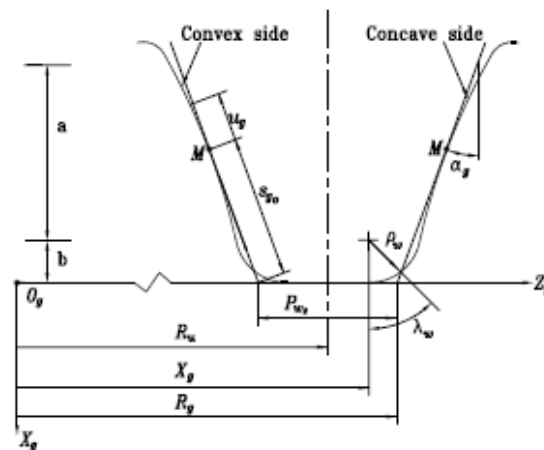


Figure I-16 Outil à profils elliptiques pour procédé Formate.

6 Application de la MEF

Les premières investigations réalisées sur les engrenages en impliquant la méthode des éléments finis ont été faites par Roland Mathis [58] et Chabert et al [57] (figure I-17). Ces études ont porté sur les engrenages cylindriques à dentures droites vue : la possibilité de les étudier en deux dimensions, contact suivant une ligne parallèle à la génératrice et formes des profils en développante de cercle et trochoïde de raccordement bien établies, malgré que cette dernière n'était pas remarquablement introduite dans la géométrie. Le maillage se faisait manuellement en utilisant des éléments triangulaires ou quadrilatéraux.

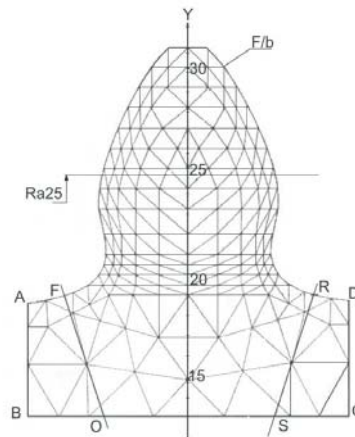


Figure I-17 Modèle 2D d'une dent d'engrenage cylindrique droit [58]

Les premiers travaux réalisés sur les engrenages spiroconiques en appliquant la MEF étaient réalisés par Madrosky [48] en 1987, ensuite par Handschuh [37,43] où il a établi un modèle 3D d'une dent dans l'environnement PATRAN (voir figure I-18). Ils ont utilisé des éléments finis hexaédriques à 20 nœuds.

La majorité des études ne prend qu'une seule dent dans l'analyse des engrenages spiroconiques, et ce à cause de :

- ✓ La symétrie axiale du corps d'engrenages par rapport à un motif denture. Ce qui permet la généralisation des résultats obtenus sur une seule dent à tout l'engrenage,
- ✓ La difficulté de prise en considération de deux ou trois dents en contact simultanément. Néanmoins, des études récentes tiennent en compte de ce point.

Les conditions aux limites considérées pour le modèle d'une dent sont généralement celles représentées sur la figure I-19, et la charge appliquée est ponctuelle compte tenu de la nature du contact entre les dentures spiroconiques, sauf dans le cas où l'ellipse de contact est à considérer.

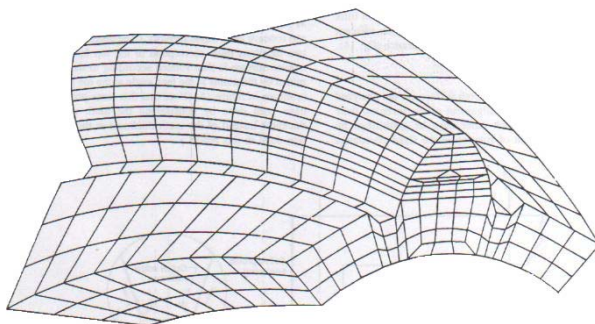


Figure I-18 Modèle d'une dent [37]

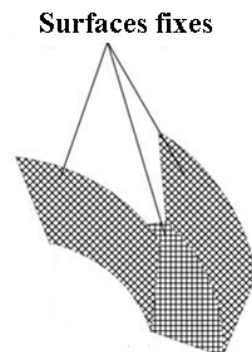


Figure I-19 Conditions aux limites.

Litvin et al [6,9,14,16,19] ont réalisés des modèles éléments finis dans le code de calcul ABACQUS en modélisant le contact entre le pignon et la roue, en considérant trois couples de dents (trois dents du pignon et trois dents de la roue (figure I-20)),

et où les auteurs ont démontré que la portée de contact résultant est en accord avec les résultats de la méthode TCA (chapitre III). Les conditions aux limites dans ce cas sont illustrées sur la figure I-21.

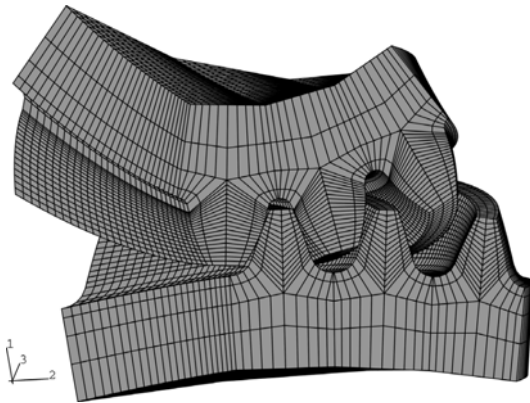


Figure I-20 Modèle EF de trois couples dents.

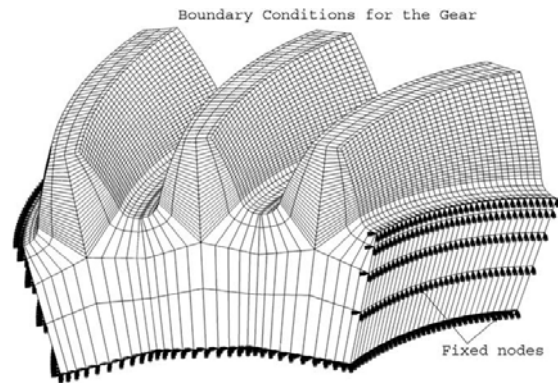


Figure I-21 Conditions aux limites de pour un ensemble de dents.

Conclusion

Dans ce chapitre est présenté un aperçu rapide sur les méthodes de génération ou de taillage des engrenages spiroconiques sans implication des détails technologiques de la machine et les aspects opérationnels ou pratiques des différentes opérations de taillage. Néanmoins, ces derniers sont étudiés dans le prochain chapitre consacré à la géométrie, où la simulation de taillage nécessite l'analyse des différents mouvements cinématiques et les caractéristiques de la machine.

La modélisation volumique des engrenages spiroconiques passe par la simulation de l'opération de taillage ; théorie développée par Faydor L. Litvin, se basant sur les caractéristiques et réglages machine, les dimensions et proportions générales de la denture à tailler et toute la cinématique accompagnant le processus de taillage.

L'application de la méthode des éléments finis aux engrenages spiroconiques est exposée par quelques travaux anciens et récents réalisés principalement par Handschuh et Litvin où des modèles EF ont été élaborés, en tenant compte d'une denture ou d'un ensemble de dents.

Chapitre II

Simulation de la géométrie des engrenages spiroconiques

Introduction

Les engrenages spiroconiques sont complexes principalement par leur géométrie. Une étude par éléments finis nécessite la connaissance de la matière de la pièce, mais aussi de sa géométrie que ce soit dans le plan ou dans l'espace. Cette dernière quant aux engrenages spiroconiques a vu beaucoup d'améliorations et de progrès ces dernières années, notamment au niveau de la conception et de la prédiction des différents comportements accompagnant une transmission de puissance où les exigences sont : poids optimum, résistance accrue, niveau de vibration et de bruit sonore très bas et d'autres critères. La majorité de ces critères est acquise, primordialement par l'optimisation de la géométrie. Un modèle de simulation de la géométrie d'un couple d'engrenages spiroconiques, développé par Litvin [41,43,49] et Fong [40,42] et d'autres chercheurs est étudié dans ce chapitre.

1 Caractéristiques géométriques générales

Les engrenages spiroconiques sont classés parmi les engrenages à axes concourants [1,23,34,52]. Ce type d'engrenages permet de transmettre le mouvement entre deux arbres concourants, avec un rapport de vitesse rigoureux. Les conditions d'engrènement imposent que les deux roues doivent avoir le même module et que les sommets des deux cônes soient confondus. Ce dernier impératif oblige le concepteur à un centrage très précis des deux roues pour assurer un fonctionnement correct. Il faut donc prévoir au montage un réglage axial des deux roues.

Définitions

- Cône primitif, angle primitif (δ) : cône décrit par l'axe instantané de rotation du mouvement relatif de la roue conjuguée par rapport à la roue considérée. Le demi-angle au sommet de ce cône est l'angle primitif.
- Cône de tête, angle de tête (δ_a) : cône enveloppe des sommets des dents. Le demi-angle au sommet de ce cône est l'angle de tête.
- Cône de pied, angle de pied (δ_f) : cône enveloppe des bases des dents. Le demi-angle au sommet de ce cône est l'angle de pied.
- Cône complémentaire : cône dont les génératrices sont perpendiculaires à celles du cône primitif, à l'extrémité externe de la largeur de denture.
- Diamètre primitif (d) : diamètre du cercle intersection du cône primitif et du cône complémentaire (cercle primitif).
- Diamètre de tête (d_a) : diamètre du cercle, intersection du cône de tête et du cône complémentaire (cercle de tête).

- Diamètre de pied (d_f) : diamètre du cercle intersection du cône de pied et du cône complémentaire (cercle de pied).
- Largeur de denture (b) : largeur de la partie dentée de la roue mesurée suivant une génératrice du cône primitif.
- Saillie (h_a) : distance entre le cercle primitif et le cercle de tête mesurée suivant une génératrice du cône complémentaire.
- Creux (h_f) : distance entre le cercle primitif et le cercle de pied mesurée suivant une génératrice du cône complémentaire.
- Angle de saillie (θ_a) : différence entre l'angle de tête et l'angle primitif.
- Angle de creux (θ_f) : différence entre l'angle de pied et l'angle primitif.
- Pas : longueur de l'arc de cercle primitif compris entre deux profils homologues consécutifs.
- Hauteur de dent (h) : distance entre le cercle de tête et le cercle de pied, mesurée suivant une génératrice du cône complémentaire.

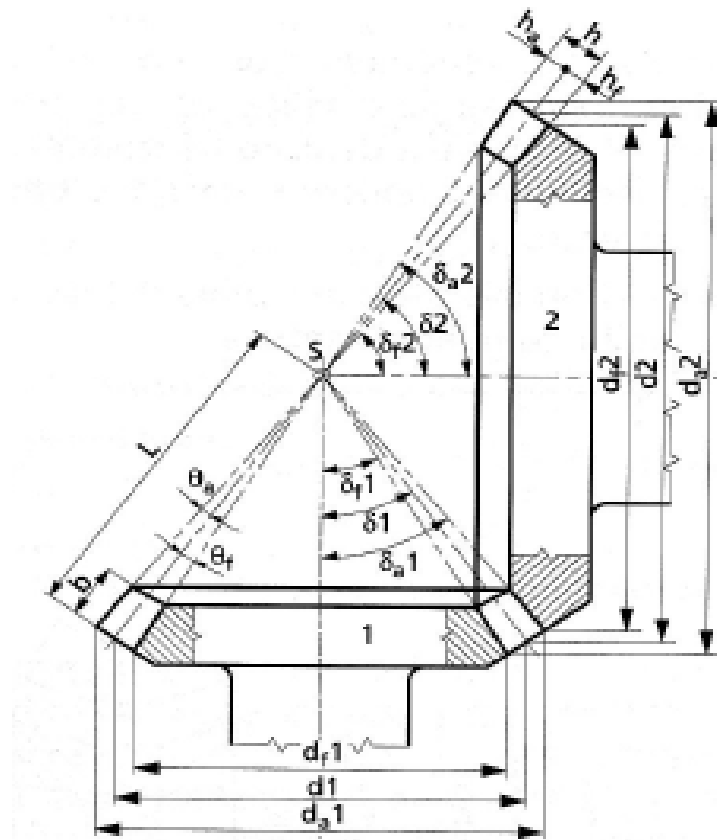


Figure II-1 Couple d'engrenage conique général

2 Bases du modèle de simulation

Le modèle de simulation mathématique utilisé dans cette procédure pour la détermination des points des surfaces des dents de la roue et du pignon est celui de Litvin exposé en détails dans les références [6,9,10,11,14,15,16,19,20,21, 25,31,51..]. Ce modèle prend en considération les paramètres et les réglages machine significatifs, détaillés un peu plus loin, et repose sur le concept des coordonnées homogènes et sur le processus de taillage.

2-1 Coordonnées homogènes

Le concept des coordonnées homogènes permet la transformation linéaire d'un point $P(x, y, z)$ en un point P' de coordonnées (x', y', z') données par un système d'équations algébriques :

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + d_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + d_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + d_3 \end{cases} \quad (2-1)$$

Ce système est représenté en notation matricielle par la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-2)$$

Le système (2-2) est une transformation linéaire générale permettant la représentation de toute transformation linéaire par une matrice carrée. Cette représentation des coordonnées est dite représentation en coordonnées homogènes.

Les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace seront ainsi représentées par un vecteur à quatre composantes, dont les trois premières sont les coordonnées du point et la quatrième composante est un terme unité pour homogénéisation de la notation. Par conséquent, en coordonnées homogènes, toute transformation linéaire de l'espace est caractérisée par une matrice carrée 4×4 .

La représentation en coordonnées homogènes permet d'effectuer des rotations et des translations des vecteurs, simplement par multiplication des matrices de transformation correspondantes. La matrice résultante est une matrice carrée homogène du même ordre.

En coordonnées homogènes, les coordonnées d'un point exprimé dans un repère R_j seront exprimées dans un repère R_i comme suit :

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & t_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & t_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-3)$$

où (x_i, y_i, z_i) et (x_j, y_j, z_j) sont les coordonnées d'un point exprimées dans les repères R_i et R_j respectivement.

t_1, t_2 et t_3 : sont les coordonnées de l'origine du repère R_j exprimée dans le repère R_i .

c_{11}, c_{12} et c_{13} : sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire $\vec{i}$ du repère R_i exprimés dans le repère R_j .

c_{21}, c_{22} et c_{23} : sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire $\vec{j}$ du repère R_i exprimés dans le repère R_j .

c_{31}, c_{32} et c_{33} : sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire $\vec{k}$ du repère R_i exprimés dans le repère R_j .

2-2 Principe de taillage

Le principe de taillage des engrenages spiroconiques [14-16] est illustré par le schéma de la figure II-2. Le réglage de la position de la pièce à tailler est commandé par le paramètre γ_{mi} (avec $i=p$ pour le pignon et $i=g$ pour la roue). La rotation combinée de la pièce à tailler et de la fraise de taillage permet l'enlèvement de matière (taillage), dans ce cas, le procédé est dit taillage avec génération, c'est le principe qu'on a utilisé dans le modèle de simulation adopté dans ce chapitre. Dans le cas où seule la rotation de la fraise est à considérer, le procédé est dit taillage sans génération, tel que le procédé *Fomate* [9,14]. Dans les deux cas, le berceau (avec l'excentrique représentent une pièce solidaire) fait une rotation déterminée par ψ_{ci} (avec $i=p$ pour le pignon et $i=g$ pour la roue) autour de son axe. Ces paramètres seront détaillés dans les prochaines sections.

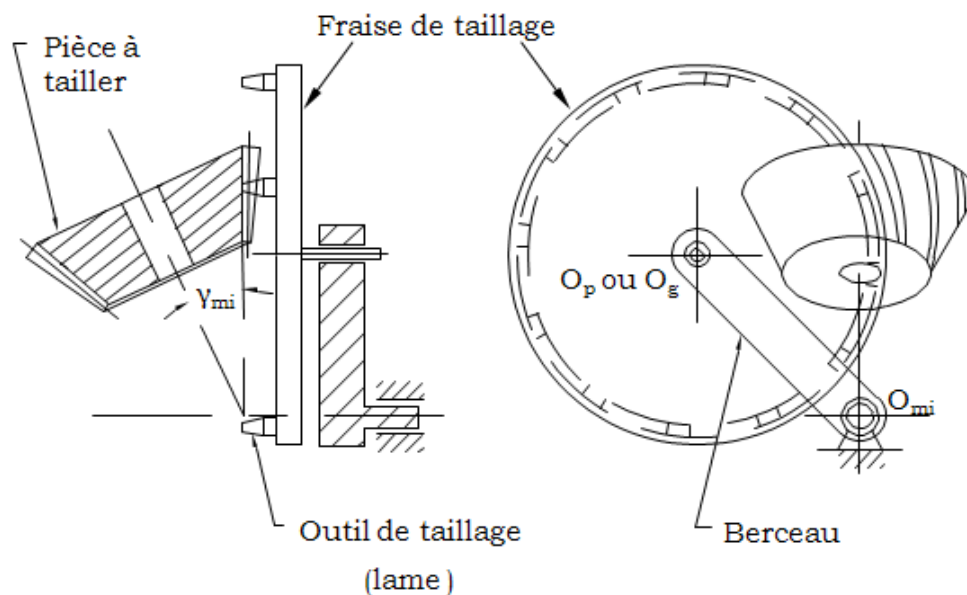


Figure II-2 Principe de taillage des engrenages spiroconiques.

3 Surface de la roue

3-1 Description des systèmes de coordonnées (figure II-3)

Les repères R_{m2} , R_{a2} et R_{b2} sont fixes et liés à la machine de taillage [15-16, 21,25,27,31]. R_2 et R_{c2} sont des repères mobiles et sont liés rigidement à la roue et au berceau respectivement. Le repère R_g est lié rigidement à la fraise (tête de l'outil de taillage). Il est supposé que l'outil de taillage est un cône, et que la rotation de la fraise autour de l'axe Z_g n'affecte pas le processus de génération. La fraise est montée sur le berceau et le repère R_g est lié rigidement au repère R_{c2} lié au berceau. Le berceau et la pièce taillée (roue dans ce cas) font des rotations relatives autour des axes Z_{m2} et Z_{b2} respectivement.

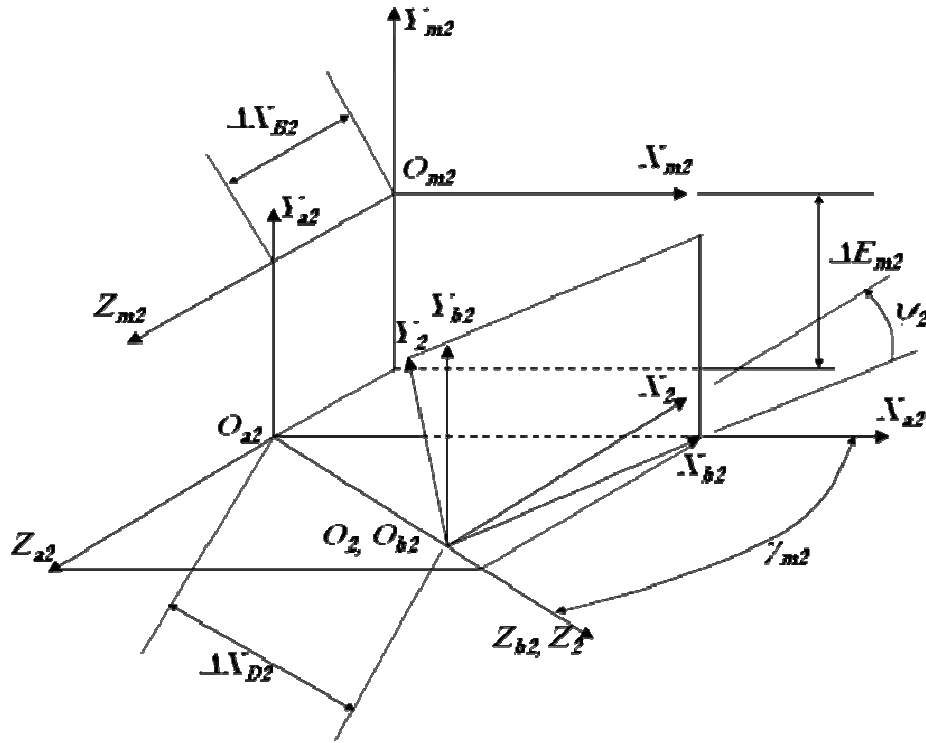


Figure II-3 Repères utilisés et paramètres machine pour le taillage de la roue.

Les angles de rotation du berceau (ψ_{c2}) et de la roue (ψ_2) sont liés entre eux par une fonction polynomiale si une modification de roulement est appliquée. Le rapport de roulement noté m_{2c2} est donné par :

$$m_{2c2} = \frac{\omega^{(2)}}{\omega^{(c2)}} = \frac{\frac{d\psi_2}{dt}}{\frac{d\psi_{c2}}{dt}} \quad (2-4)$$

Le positionnement de l'outil sur le berceau est déterminé par S_{r2} et q_2 (distance radiale du centre de la fraise par rapport au centre machine et angle fait par l'axe de la pièce à tailler par rapport au plan machine).

Le positionnement du centre de la fraise dans le plan machine en fonction du sens de la spirale est représenté sur les figures II-4 ((a) spirale à droite) et (b) spirale à gauche).

ΔX_{B2} , ΔE_{m2} , ΔX_{D2} et γ_{m2} sont les paramètres de positionnement de la roue, définis comme suit :

ΔX_{B2} : positionnement horizontal

ΔE_{m2} : positionnement vertical

ΔX_{D2} : recule machine

γ_{m2} : angle de pied machine

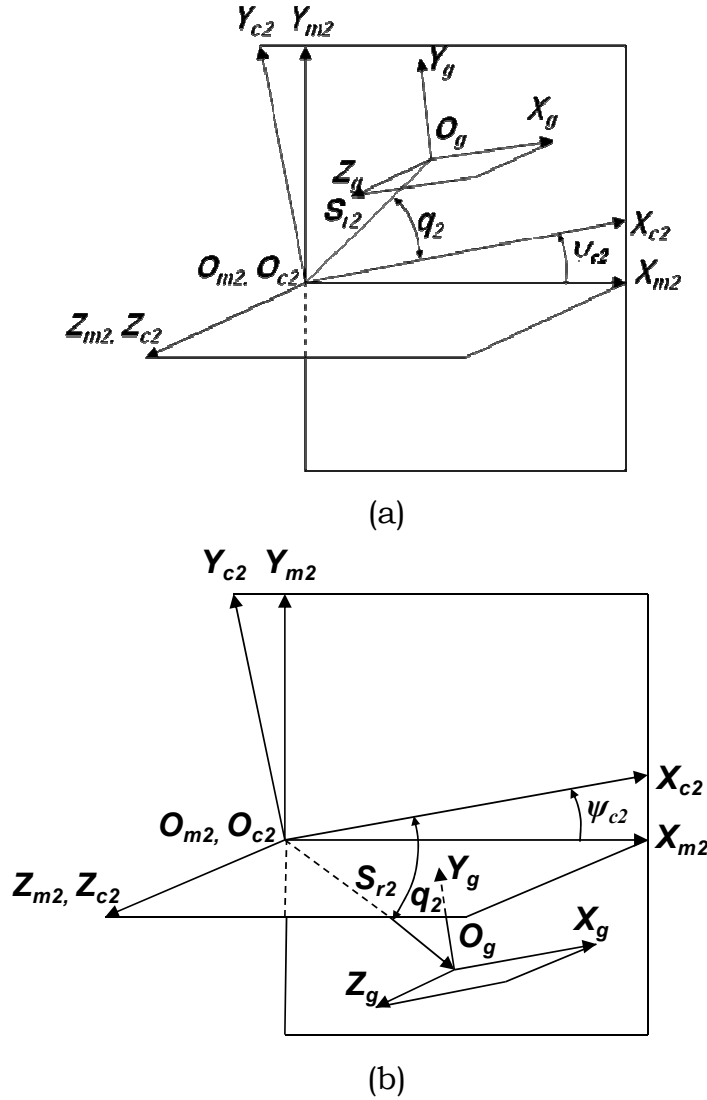


Figure II-4 Positionnement de la fraise de taillage
(a) spirale à droite et (b) spirale à gauche.

3-2 Surface de l'outil

La figure II-5 représente une lame de la fraise de taillage. Chaque côté de la lame génère deux surfaces (surface active et surface de raccordement). La partie linéaire de l'outil inclinée d'un angle α_g génère la partie active de la surface du flanc de la dent et l'arc circulaire de rayon ρ_w génère le profil de raccordement entre le

cône de base et la partie active. Les surfaces génératrices de l'outil sont formées par la rotation de la lame autour de l'axe Z_g de la fraise, l'angle de rotation est noté θ_g . Par conséquent, les surfaces génératrices sont une surface conique et une surface torique formée par l'arc de cercle. Un point appartenant à la surface génératrice est déterminé par s_g et θ_g pour la surface conique, et par λ_w et θ_g pour la surface torique.

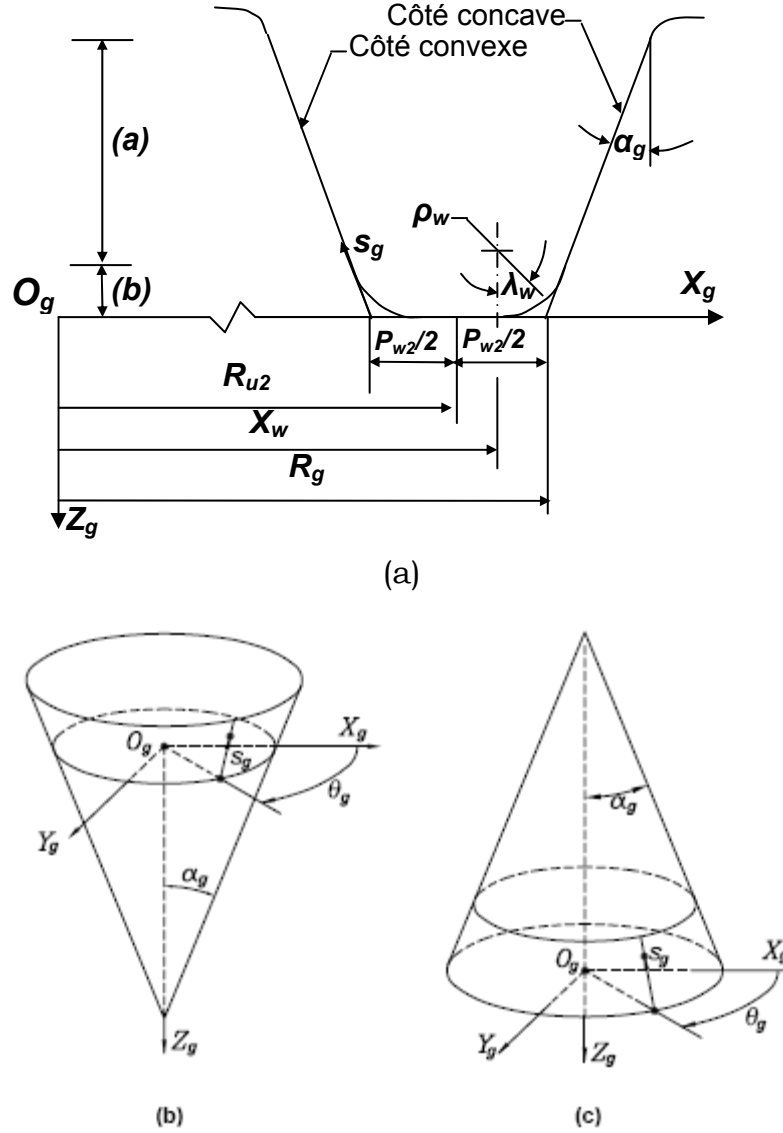


Figure II-5 Représentation de l'outil de taillage de la roue, (a) lame de la fraise, (b) et (c) cônes de l'outil générateurs des flancs concave et convexe respectivement.

Les deux surfaces de l'outil coupant sont désignées par $\Sigma_g^{(a)}$ pour la surface conique génératrice de la partie active du flanc de la dent et par $\Sigma_g^{(b)}$ pour la surface torique génératrice de la partie de raccordement du flanc de la dent.

La surface $\Sigma_g^{(a)}$ de l'outil, génératrice de la partie active du flanc concave de la dent de la roue est représentée par le vecteur fonction $\vec{r}_g^{(a)}(s_g, \theta_g)$, dans la repère R_g , comme suit :

$$\overrightarrow{r_g^{(a)}}(s_g, \theta_g) = \begin{bmatrix} (R_g + s_g \sin \alpha_g) \cos \theta_g \\ (R_g + s_g \sin \alpha_g) \sin \theta_g \\ -s_g \cos \alpha_g \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

La surface $\Sigma_g^{(a)}$ de l'outil, génératrice de la partie active du flanc convexe de la dent de la roue est représentée par le vecteur fonction $\overrightarrow{r_g^{(a)}}(s_g, \theta_g)$, dans le repère R_g , comme suit :

$$\overrightarrow{r_g^{(a)}}(s_g, \theta_g) = \begin{bmatrix} (R_g - s_g \sin \alpha_g) \cos \theta_g \\ (R_g - s_g \sin \alpha_g) \sin \theta_g \\ -s_g \cos \alpha_g \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

où s_g et θ_g sont les coordonnées des points de la surface conique.

R_g : rayon de la fraise, mesuré de l'intersection de l'allongement du segment droit générateur et la ligne perpendiculaire à l'axe de la fraie passant par le sommet de la lame considérée.

α_g : angle d'inclinaison du segment générateur de l'outil.

La normale unitaire à la surface génératrice $\Sigma_g^{(a)}$ est donnée par :

$$\overrightarrow{n_g^{(a)}}(\theta_g) = \frac{\overrightarrow{N_g^{(a)}}}{|\overrightarrow{N_g^{(a)}}|} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{N_g^{(a)}} = \frac{\partial \overrightarrow{r_g^{(a)}}}{\partial s_g} \times \frac{\partial \overrightarrow{r_g^{(a)}}}{\partial \theta_g} \quad (2-7)$$

Remarquons que pour la partie active, la normale n'est fonction que d'une seule variable (θ_g).

Les deux équations (2-5) et (2-7) donnent la normale unitaire à la surface génératrice de la partie active du flanc concave de la dent de la roue :

$$\overrightarrow{n_g^{(a)}}(\theta_g) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_g \sin \theta_g \\ \cos \alpha_g \cos \theta_g \\ \sin \theta_g \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

Les deux équations (2-6) et (2-7) donnent la normale unitaire à la surface génératrice de la partie active du flanc convexe de la dent de la roue :

$$\overrightarrow{n_g^{(a)}}(\theta_g) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_g \sin \theta_g \\ \cos \alpha_g \cos \theta_g \\ -\sin \theta_g \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

La surface $\Sigma_g^{(b)}$ de l'outil, génératrice de la partie de raccordement du flanc concave de la dent de la roue, est représentée par le vecteur fonction $\overrightarrow{r_g^{(b)}}(s_g, \theta_g)$, dans le repère R_g , comme suit :

$$\overrightarrow{r_g^{(b)}}(\lambda_w, \theta_g) = \begin{bmatrix} (X_w + \rho_w \sin \lambda_w) \cos \theta_g \\ (X_w + \rho_w \sin \lambda_w) \sin \theta_g \\ -\rho_w (1 - \cos \lambda_w) \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

avec : $X_w = R_g - \rho_w \frac{(1 - \sin \alpha_g)}{\cos \alpha_g}$ (2-11)

La surface $\Sigma_g^{(b)}$ de l'outil, génératrice de la partie de raccordement du flanc convexe de la dent de la roue, est représentée par le vecteur fonction $\overrightarrow{r_g^{(b)}}(s_g, \theta_g)$, dans le repère R_g , comme suit :

$$\overrightarrow{r_g^{(b)}}(\lambda_w, \theta_g) = \begin{bmatrix} (X_w - \rho_w \sin \lambda_w) \cos \theta_g \\ (X_w - \rho_w \sin \lambda_w) \sin \theta_g \\ -\rho_w (1 - \cos \lambda_w) \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

avec : $X_w = R_g + \rho_w \frac{(1 - \sin \alpha_g)}{\cos \alpha_g}$ (2-13)

ρ_w : rayon de l'arrête circulaire de la lame de taillage de la roue.

La normale unitaire à la surface génératrice $\Sigma_g^{(b)}$ est donnée par :

$$\overrightarrow{n_g^{(b)}}(\theta_g) = \frac{\overrightarrow{N_g^{(b)}}}{|\overrightarrow{N_g^{(b)}}|} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{N_g^{(b)}} = \frac{\partial \overrightarrow{r_g^{(b)}}}{\partial s_g} \times \frac{\partial \overrightarrow{r_g^{(b)}}}{\partial \theta_g} \quad (2-14)$$

Les équations (1-10) et (2-14) donnent la normale unitaire à la surface génératrice de la surface de raccordement du flanc concave de la dent de la roue :

$$\overrightarrow{n_g^{(b)}}(\lambda_w, \theta_g) = \begin{bmatrix} \sin \lambda_w \cos \theta_g \\ \sin \lambda_w \sin \theta_g \\ \cos \lambda_w \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

Les équations (1-12) et (2-14) donnent la normale unitaire à la surface génératrice de la surface de raccordement du flanc convexe de la dent de la roue :

$$\overrightarrow{n_g^{(b)}}(\lambda_w, \theta_g) = \begin{bmatrix} \sin \lambda_w \cos \theta_g \\ \sin \lambda_w \sin \theta_g \\ -\cos \lambda_w \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

3-3 Famille de surfaces de l'outil

En appliquant la transformation des coordonnées du repère R_g vers R_2 , la famille des surfaces de l'outil génératrices de la partie active des flancs de la dent de la roue est représentée dans le repère R_2 par :

$$\overrightarrow{r_2^{(a)}}(s_g, \theta_g, \psi_{c2}) = M_{2g}(\psi_{c2}) \overrightarrow{r_g^{(a)}}(s_g, \theta_g) \quad (2-17)$$

Et la famille des surfaces de l'outil génératrices de la partie de raccordement des flancs de la dent de la roue est représentée dans le repère R_2 par :

$$\overrightarrow{r_2^{(b)}}(\lambda_w, \theta_g, \psi_{c2}) = M_{2g}(\psi_{c2}) \overrightarrow{r_g^{(b)}}(\lambda_w, \theta_g) \quad (2-18)$$

ici, M_{2g} est la matrice de transformation des coordonnées du repère R_g au repère R_2 , et elle est donnée par :

$$M_{2g}(\psi_{c2}) = M_{2b2} M_{b2a2} M_{a2m2} M_{m2c2} M_{c2g} \quad (2-19)$$

avec :

✚ M_{c2g} : matrice de passage du repère R_g au repère R_{c2} , donnée par :

$$M_{c2g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s_{r2} \cos q_2 \\ 0 & 1 & 0 & s_{r2} \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

✚ M_{m2c2} : matrice de passage du repère R_{c2} au repère R_{m2} , donnée par :

$$M_{m2c2} = \begin{bmatrix} \cos \psi_{c2} & -\sin \psi_{c2} & 0 & 0 \\ \sin \psi_{c2} & \cos \psi_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

✚ M_{a2m2} : matrice de passage du repère R_{m2} au repère R_{a2} , donnée par :

$$M_{a2m2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta E_{m2} \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta X_{B2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

✚ M_{b2a2} : matrice de passage du repère R_{a2} au repère R_{b2} , donnée par :

$$M_{b2a2} = \begin{bmatrix} \sin \gamma_{m2} & 0 & -\cos \gamma_{m2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos \gamma_{m2} & 0 & \sin \gamma_{m2} & -\Delta X_{D2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

✚ M_{2b2} : matrice de passage du repère R_{b2} au repère R_2 , donnée par :

$$M_{2b2} = \begin{bmatrix} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \psi_2 & \cos \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

3-4 Equation d'engrènement

La surface de la dent de la roue est l'enveloppe de la famille des surfaces de l'outil. Pendant le processus de génération, la surface de l'outil et la surface générée restent tangentes en tout point de contact le long de la spirale. Cette tangence assure la colinéarité des deux vecteurs normaux aux deux surfaces citées précédemment. Et parce que le vecteur vitesse d'un point de contact appartenant à la surface de la denture est toujours tangent à cette dernière en ce point, on peut écrire la condition d'engrènement suivante :

- partie active du flanc de la dent :

$$\overrightarrow{n_g^{(a)}} \cdot \overrightarrow{V^{(g2)}} = 0 \quad \text{ou} \quad f_{2g}^{(a)}(s_g, \theta_g, \psi_{c2}) = 0 \quad (2-25)$$

- partie de raccordement du flanc de la dent :

$$\overrightarrow{n_g^{(b)}} \cdot \overrightarrow{V^{(g2)}} = 0 \quad \text{ou} \quad f_{2g}^{(b)}(\lambda_w, \theta_g, \psi_{c2}) = 0 \quad (2-26)$$

Une autre forme alternative est utilisée pour le calcul de l'équation d'engrènement, exprimée comme suit :

- partie active du flanc de la dent de la roue :

$$\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_2^{(a)}}}{\partial s_g} \times \frac{\partial \overrightarrow{r_2^{(a)}}}{\partial \theta_g} \right) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_2^{(a)}}}{\partial \psi_{c2}} = 0 \quad \text{ou} \quad f_{2g}^{(a)}(s_g, \theta_g, \psi_{c2}) = 0 \quad (2-27)$$

- partie raccordement du flanc de la dent de la roue :

$$\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_2^{(b)}}}{\partial \lambda_w} \times \frac{\partial \overrightarrow{r_2^{(b)}}}{\partial \theta_g} \right) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_2^{(b)}}}{\partial \psi_{c2}} = 0 \quad \text{ou} \quad f_{2g}^{(b)}(\lambda_w, \theta_g, \psi_{c2}) = 0 \quad (2-28)$$

3-5 Equations des surfaces de la dent

Les équations des surfaces de la dent de la roue peuvent être déterminées par une considération simultanée de la famille des surfaces de l'outil lors du processus de taillage et de la condition d'engrènement représentée par l'équation d'engrènement. Ces équations sont données par (2-17) et (2-27) pour la partie active du flanc de la dent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_2^{(a)}}(s_g, \theta_g, \psi_{c2}) = M_{2g}(\psi_{c2}) \cdot \overrightarrow{r_g^{(a)}}(s_g, \theta_g) \\ f_{2g}^{(a)}(s_g, \theta_g, \psi_{c2}) = 0 \end{cases} \quad (2-29)$$

Et par les équations (2-18) et (2-28) pour la partie de raccordement du flanc de la dent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_2^{(b)}}(\lambda_w, \theta_g, \psi_{c2}) = M_{2g}(\psi_{c2}) \cdot \overrightarrow{r_g^{(b)}}(\lambda_w, \theta_g) \\ f_{2g}^{(b)}(\lambda_w, \theta_g, \psi_{c2}) = 0 \end{cases} \quad (2-30)$$

4 Surface du pignon

4-1 Description des systèmes de coordonnées

Les repères R_{m1} , R_{a1} et R_{b2} sont fixes et liés rigidement à la machine de taillage [14-16,19,21,25,27,31]. R_1 et R_{c1} sont des repères mobiles et sont liés rigidement au pignon et au berceau respectivement, ils sont rotatifs autour des axes Z_{m1} et Z_{b1} respectivement, et leurs angles de rotation sont liés par une fonction polynomiale notée $\psi_1(\psi_{c1})$ lorsqu'une modification de roulement est appliquée dans le processus de taillage.

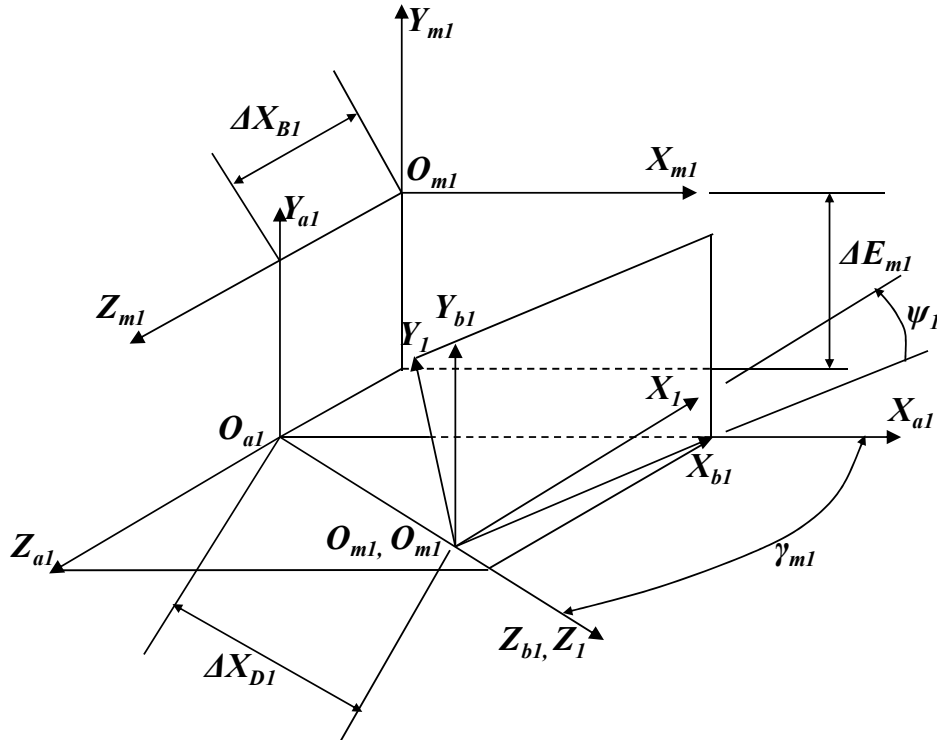


Figure II-6 Repères utilisés et paramètres machine pour le taillage du pignon.

Le rapport de vitesse entre le pignon et le berceau est défini par :

$$m_{c1}(\psi_1(\psi_{c1})) = \frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(c)}} \quad (2-31)$$

La magnitude $m_{cl}(\psi_1)$ pour $\psi_{cl} = 0$ est appelée rapport de roulement ou rapport de vitesse.

$\Delta X_{D1}, \Delta X_{B1}, \Delta E_{m1}$ et γ_{m1} sont les paramètres machine appliqués pour la génération du pignon, définis précédemment (voir section IV-1).

Le repère R_p est lié rigidement à l'outil de taillage, la figure II-7 représente la position de l'outil pour la génération du pignon avec spirale à droite (a) et avec spirale à gauche (b).

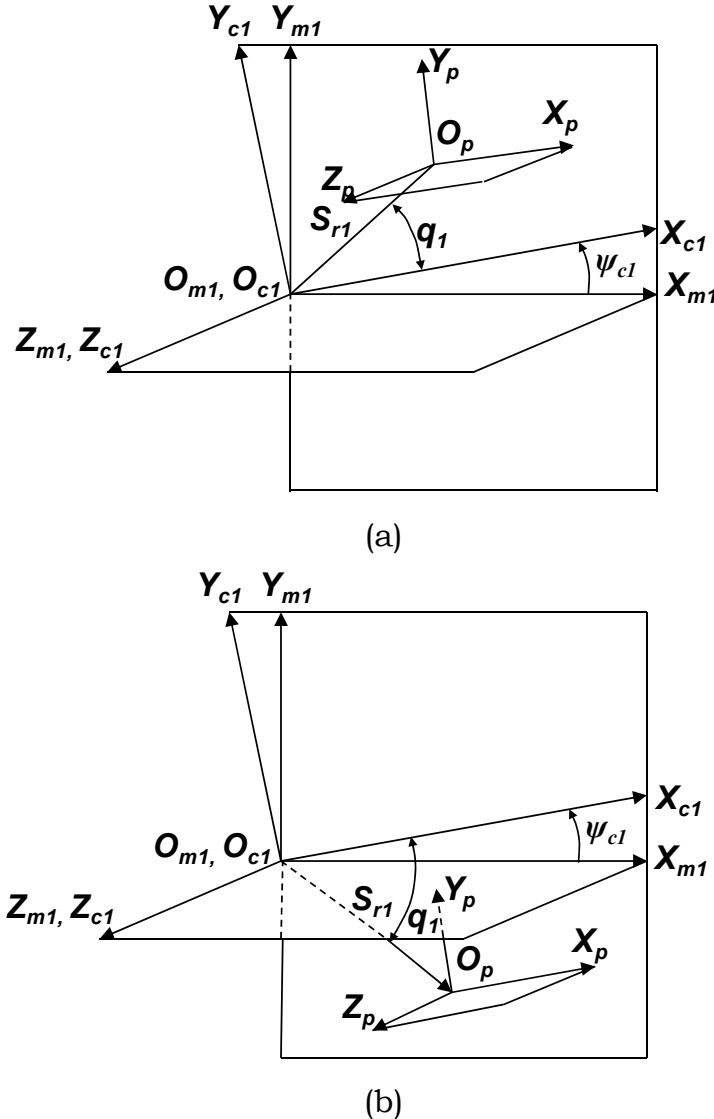


Figure II-7 Positionnement de la fraise de taillage du pignon
(a) spirale à droite et (b) spirale à gauche.

4-2 Surface de l'outil

La même forme de l'outil est utilisée pour la génération du pignon que pour la roue. Un point appartenant à la surface génératrice est déterminé par s_p et θ_p pour la surface conique, et par λ_f et θ_p pour la surface torique (figure II-8).

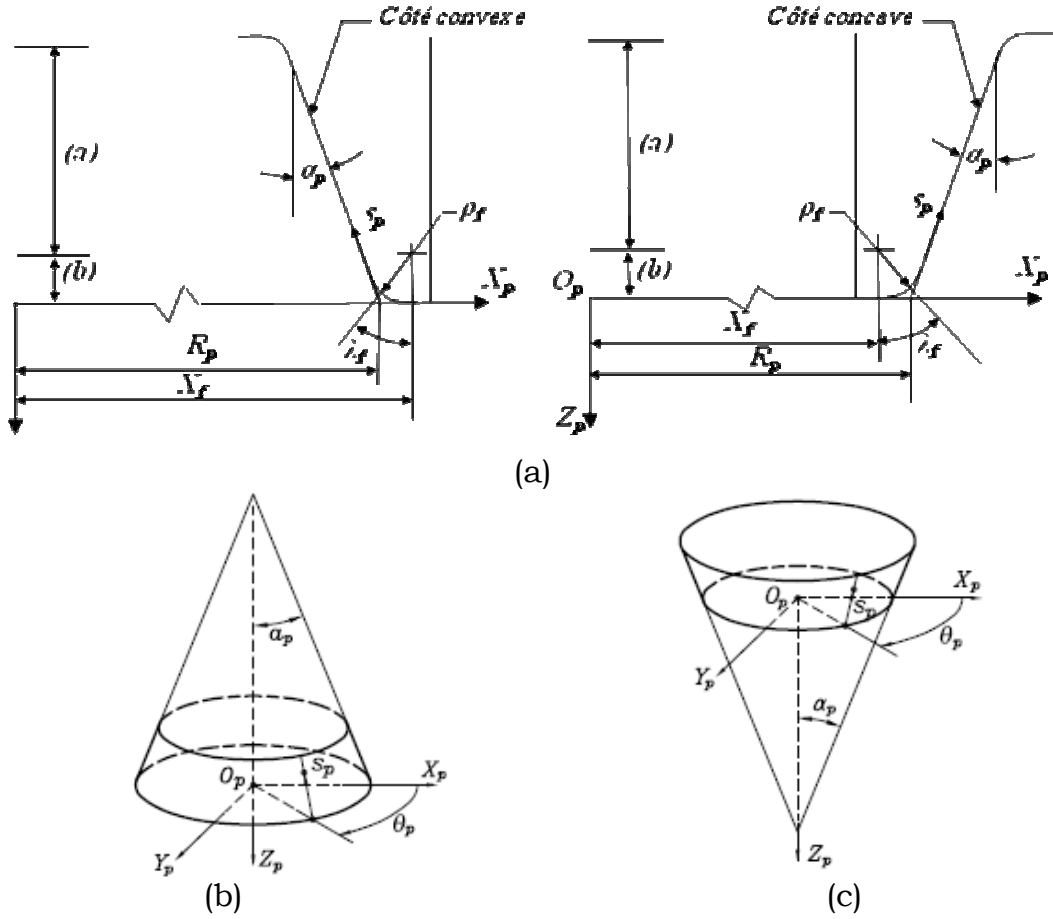


Figure II-8 Représentation de l'outil de taillage du pignon, (a) lame de la fraise, (b) et (c) cônes de l'outil générateurs des flancs concave et convexe respectivement.

La surface génératrice de la partie active du flanc concave de la dent notée $\Sigma_p^{(a)}$ est représentée dans le repère R_p par :

$$\vec{r}_p^{(a)}(s_p, \theta_p) = \begin{bmatrix} (R_p + s_p \sin \alpha_p) \cos \theta_p \\ (R_p + s_p \sin \alpha_p) \sin \theta_p \\ -s_p \cos \alpha_p \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

et pour le flanc convexe de la dent, $\Sigma_p^{(a)}$ est représentée dans le repère R_p par :

$$\vec{r}_p^{(a)}(s_p, \theta_p) = \begin{bmatrix} (R_p - s_p \sin \alpha_p) \cos \theta_p \\ (R_p - s_p \sin \alpha_p) \sin \theta_p \\ -s_p \cos \alpha_p \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

où s_p et θ_p sont les coordonnées des points de la surface conique, α_p est l'angle d'inclinaison du segment générateur de l'outil et R_p est le rayon de la fraise mesuré de l'intersection de l'allongement du segment générateur avec la ligne perpendiculaire à l'axe de la fraise passant par le sommet de la lame considérée (voir figure II-8).

La normale unitaire à la surface génératrice $\Sigma_p^{(a)}$ est donnée par :

$$\overrightarrow{n_p^{(a)}}(\theta_p) = \frac{\overrightarrow{N_p^{(a)}}}{\left| \overrightarrow{N_p^{(a)}} \right|} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{N_p^{(a)}} = \frac{\partial \overrightarrow{r_p^{(a)}}}{\partial s_p} \times \frac{\partial \overrightarrow{r_p^{(a)}}}{\partial \theta_p} \quad (2-34)$$

Les deux équations (2-32) et (2-34) donnent la normale unitaire à la surface génératrice de la partie active du flanc concave de la dent du pignon :

$$\overrightarrow{n_p^{(a)}}(\theta_p) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_p \cos \theta_p \\ \cos \alpha_p \sin \theta_p \\ \sin \theta_p \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

Les deux équations (2-33) et (2-34) donnent la normale unitaire à la surface génératrice de la partie active du flanc convexe de la dent du pignon :

$$\overrightarrow{n_p^{(a)}}(\theta_p) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_p \cos \theta_p \\ \cos \alpha_p \sin \theta_p \\ -\sin \theta_p \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

La surface $\Sigma_p^{(b)}$ de l'outil, génératrice de la partie de raccordement du flanc concave de la dent de la roue, est représentée par le vecteur fonction $\overrightarrow{r_p^{(b)}}(s_p, \theta_p)$, dans le repère R_p , comme suit :

$$\overrightarrow{r_g^{(b)}}(\lambda_f, \theta_p) = \begin{bmatrix} (X_f + \rho_f \sin \lambda_f) \cos \theta_p \\ (X_f + \rho_f \sin \lambda_f) \sin \theta_p \\ -\rho_f (1 - \cos \lambda_f) \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

$$\text{avec :} \quad X_f = R_p - \rho_f \frac{(1 - \sin \alpha_p)}{\cos \alpha_p} \quad (2-38)$$

ρ_w : rayon de l'arrête circulaire de la lame de taillage du pignon.

La surface $\Sigma_p^{(b)}$ de l'outil, génératrice de la partie de raccordement du flanc convexe de la dent de la roue, est représentée par le vecteur fonction $\overrightarrow{r_p^{(b)}}(s_p, \theta_p)$, dans le repère R_p , comme suit :

$$\overrightarrow{r_g^{(b)}}(\lambda_f, \theta_p) = \begin{bmatrix} (X_f - \rho_f \sin \lambda_f) \cos \theta_p \\ (X_f - \rho_f \sin \lambda_f) \sin \theta_p \\ -\rho_f (1 - \cos \lambda_f) \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

$$\text{avec :} \quad X_f = R_p + \rho_f \frac{(1 - \sin \alpha_p)}{\cos \alpha_p} \quad (2-40)$$

La normale unitaire à la surface génératrice $\Sigma_p^{(b)}$ est donnée par :

$$\overrightarrow{n_p^{(b)}}(\theta_p) = \frac{\overrightarrow{N_p^{(b)}}}{\left| \overrightarrow{N_p^{(b)}} \right|} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{N_p^{(b)}} = \frac{\partial \overrightarrow{r_p^{(b)}}}{\partial \lambda_f} \times \frac{\partial \overrightarrow{r_p^{(b)}}}{\partial \theta_p} \quad (2-41)$$

Les deux équations (2-37) et (2-41) donnent la normale unitaire à la surface génératrice de la surface de raccordement du flanc concave de la dent du pignon :

$$\overrightarrow{n_p^{(b)}}(\lambda_f, \theta_p) = \begin{bmatrix} \sin \lambda_f \cos \theta_p \\ \sin \lambda_f \sin \theta_p \\ \cos \lambda_f \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

Les deux équations (2-39) et (2-41) donnent la normale unitaire à la surface génératrice de la surface de raccordement du flanc convexe de la dent du pignon :

$$\overrightarrow{n_p^{(b)}}(\lambda_f, \theta_p) = \begin{bmatrix} \sin \lambda_f \cos \theta_p \\ \sin \lambda_f \sin \theta_p \\ -\cos \lambda_f \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

4-3 Famille des surfaces de l'outil

En appliquant la transformation des coordonnées du repère R_p au repère R_1 , la famille des surfaces génératrices des parties actives des flancs de la dent du pignon est représentée dans la repère R_1 par :

$$\overrightarrow{r_1^{(a)}}(s_p, \theta_p, \psi_{c1}) = M_{1p}(\psi_{c1}) \overrightarrow{r_p^{(a)}}(s_p, \theta_p) \quad (2-44)$$

Et la famille des surfaces de l'outil génératrices de la partie de raccordement des flancs de la dent du pignon est représentée dans le repère R_1 par :

$$\overrightarrow{r_1^{(b)}}(\lambda_f, \theta_p, \psi_{c1}) = M_{1p}(\psi_{c1}) \overrightarrow{r_p^{(b)}}(\lambda_f, \theta_p) \quad (2-45)$$

ici, M_{1p} est la matrice de transformation des coordonnées du repère R_p au repère R_1 , et elle est donnée par :

$$M_{1p}(\psi_{c1}) = M_{1b1} M_{b1a1} M_{a1m1} M_{m1c1} M_{c1p} \quad (2-46)$$

avec :

 M_{c1p} : matrice de passage du repère R_p au repère R_{c1} , donnée par :

$$M_{c1p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & S_{r1} \cos q_1 \\ 0 & 1 & 0 & S_{r1} \sin q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

✚ M_{m1c1} : matrice de passage du repère R_{c1} au repère R_{m1} , donnée par :

$$M_{m1c1} = \begin{bmatrix} \cos \psi_{c1} & -\sin \psi_{c1} & 0 & 0 \\ \sin \psi_{c1} & \cos \psi_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

✚ M_{a1m1} : matrice de passage du repère R_{m1} au repère R_{a1} , donnée par :

$$M_{a1m1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta E_{m1} \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta X_{B1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

✚ M_{b1a1} : matrice de passage du repère R_{a1} au repère R_{b1} , donnée par :

$$M_{b1a1} = \begin{bmatrix} \sin \gamma_{m1} & 0 & -\cos \gamma_{m1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos \gamma_{m1} & 0 & \sin \gamma_{m1} & -\Delta X_{D1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

✚ M_{1b1} : matrice de passage du repère R_{b1} au repère R_1 , donnée par :

$$M_{1b1} = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

4-4 Equation d'engrènement

La même définition que celle exposée en section (IV-4) peut être retenue. L'équation d'engrènement de la dent du pignon avec l'outil pendant de taillage est donnée dans le repère fixe R_{m1} par les équations suivantes :

- partie active du flanc de la dent du pignon :

$$\overrightarrow{n_{m1}^{(a)}} \cdot \overrightarrow{V_{m1}^{(p1)}} = 0 \quad \text{ou} \quad f_{1p}^{(a)}(s_p, \theta_p, \psi_{c1}) = 0 \quad (2-52)$$

- partie raccordement de la dent du pignon :

$$\overrightarrow{n_{m1}^{(b)}} \cdot \overrightarrow{V_{m1}^{(p1)}} = 0 \quad \text{ou} \quad f_{1p}^{(b)}(\lambda_f, \theta_p, \psi_{c1}) = 0 \quad (2-53)$$

avec :

$\overrightarrow{n_{m1}^{(a)}}$: normale unitaire à la surface génératrice exprimée dans le repère R_{m1} ,

$\overrightarrow{V_{m1}^{(p1)}}$: vecteur de la vitesse relative exprimé dans le repère R_{m1} .

Nous utilisons ici cette forme pour la détermination de l'équation d'engrènement. La normale unitaire est calculée dans le repère R_{m1} par :

$$\overrightarrow{n_{m1}^{(a)}} = L_{m1c1} L_{c1p} \overrightarrow{n_p^{(a)}}(\theta_p) \quad (2-54)$$

Les deux matrices L_{m1c1} et L_{c1p} sont des sous matrices (3×3) obtenues par élimination des dernières lignes et colonnes des deux matrices M_{m1c1} et M_{c1p} , et représentent les cosinus directeurs formés par les repères R_{m1} et R_{c1} avec R_{c1} et R_p respectivement, et ce sont données par :

$$L_{m1c1} = \begin{bmatrix} \cos \psi_{c1} & -\sin \psi_{c1} & 0 \\ \sin \psi_{c1} & \cos \psi_{c1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-55)$$

$$L_{c1p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

et la vitesse relative exprimée dans le repère R_{m1} , est calculée par :

$$\overrightarrow{V_{m1}^{(p1)}} = \left[\left(\overrightarrow{\omega_{m1}^{(p)}} - \overrightarrow{\omega_{m1}^{(1)}} \right) \times \overrightarrow{r_{m1}} \right] - \left(\overrightarrow{O_{m1}O_{a1}} \times \overrightarrow{\omega_{m1}^{(1)}} \right) \quad (2-57)$$

avec le vecteur fonction r_{m1} donné par :

$$\overrightarrow{r_{m1}} = M_{m1c1} M_{c1p} \overrightarrow{r_p^{(a)}}(s_p, \theta_p) \quad (2-58)$$

où M_{m1c1} et M_{c1p} sont données respectivement par (2-48) et (2-47).

Le vecteur $\overrightarrow{O_{m1}O_{a1}}$ est calculé par :

$$\overrightarrow{O_{m1}O_{a1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta E_{m1} \\ \Delta X_{B1} \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

Les vecteurs vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega_{m1}^{(p)}}$ et $\overrightarrow{\omega_{m1}^{(1)}}$ sont donnés par :

$$\overrightarrow{\omega_{m1}^{(p)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{c1}(\psi_{c1}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\omega_{m1}^{(1)}} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{m1} \\ 0 \\ \sin \gamma_{m1} \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

Dans le cas d'un taillage du pignon avec une modification de roulement, les deux angles de rotation du berceau et du pignon sont liés par la fonction polynomiale suivante :

$$\psi_1(\psi_{c1}) = m_{c10}\psi_{c1} - b_2\psi_{c1}^2 - b_3\psi_{c1}^3 \quad (2-61)$$

Et le rapport de roulement est donné par la fonction suivante :

$$m_{c1}(\psi_{c1}) = \frac{\omega_{c1}}{\omega_1} = \frac{d\psi_{c1}/dt}{d\psi_1/dt} = \frac{1}{d\psi_1/d\psi_{c1}} \quad (2-62)$$

et donc :

$$m_{c1}(\psi_{c1}) = \frac{1}{m_{c1} - 2b_2\psi_{c1} - 3b_3\psi_{c1}^2} = \frac{1}{m_{c1}(1 - 2C\psi_{c1} - 3D\psi_{c1}^2)} \quad (2-63)$$

où C et D sont les coefficients de modification de roulement.

4-5 Equations des surfaces de la dent

Les systèmes d'équations représentatives des surfaces de la dent du pignon seront résumés comme suit :

- partie active de la dent du pignon :

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_1^{(a)}}(s_p, \theta_p, \psi_{c1}) = M_{1p}(\psi_{c1}) \overrightarrow{r_p^{(a)}}(s_p, \theta_p) \\ f_{2p}^{(a)}(s_p, \theta_p, \psi_{c1}) = 0 \end{cases} \quad (2-64)$$

- partie raccordement de la dent du pignon :

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_1^{(b)}}(\lambda_f, \theta_p, \psi_{c1}) = M_{1p}(\psi_{c1}) \overrightarrow{r_p^{(b)}}(\lambda_f, \theta_p) \\ f_{1p}^{(b)}(\lambda_f, \theta_p, \psi_{c1}) = 0 \end{cases} \quad (2-65)$$

5 Technique de résolution

Les vecteurs fonctions représentés auparavant sont exprimés en fonction des trois variables de surface de l'outil et de l'angle de rotation du berceau pendant le taillage de la roue et du pignon $s_{g \text{ ou } p}, \theta_{g \text{ ou } p}, \lambda_{w \text{ ou } f}$ et $\psi_{c1 \text{ ou } c2}$:

✚ $\overrightarrow{r_2^{(a)}}(s_g, \theta_g, \psi_{c2})$ (partie active des flancs concave et convexe de la dent de la roue),

✚ $\overrightarrow{r_2^{(b)}}(\lambda_w, \theta_g, \psi_{c2})$ (partie raccordement des flancs concave et convexe de la dent de la roue),

✚ $\vec{r}_1^{(a)}(s_p, \theta_p, \psi_{c1})$ (partie active des flancs concave et convexe de la dent du pignon),

✚ $\vec{r}_1^{(b)}(\lambda_f, \theta_p, \psi_{c1})$ (partie raccordement des flancs concave et convexe de la dent du pignon).

La procédure propose la considération de chaque point à calculer dans son plan méridien [26,37,41,43], où la projection suivant les deux axes représente la position axiale et la position radiale ou le rayon de la roue ou du pignon calculé à ce point. Dans un but d'illustration de la méthode, nous prenons le premier vecteur fonction $\vec{r}_2^{(a)}(s_g, \theta_g, \psi_{c2})$. Ce vecteur est représenté dans l'espace comme suit :

$$\vec{r}_2^{(a)}(s_g, \theta_g, \psi_{c2}) = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (2-66)$$

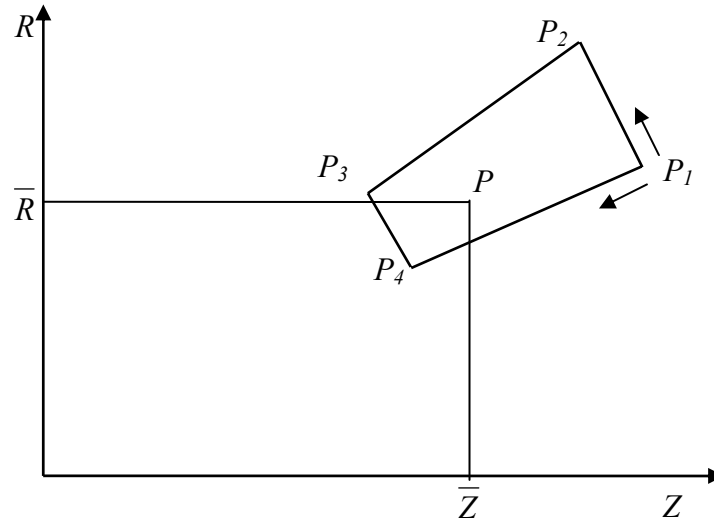


Figure II-9 Positions axiale et radiale d'un point de la surface de la dent dans le plan (ZR).

La projection de ce vecteur position dans le plan (figure II-9) permet d'écrire les deux conditions suivantes :

✚ position axiale du point P doit être vérifiée :

$$Z_2 - \bar{Z} = 0, \quad (2-67)$$

✚ la projection sur le plan permet d'écrire :

$$\sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = \bar{R} \quad (2-68)$$

Les deux équations (2-52) et (2-53) utilisées avec l'équation (2-24) qui est l'équation d'engrènement de la roue avec l'outil de taillage constituent un système de trois équations algébriques fortement non linéaires à trois variables :

$$\begin{cases} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = \bar{R} \\ f_{2g}^{(a)}(s_g, \theta_g, \psi_{c2}) = 0 \\ Z_2 - \bar{Z} = 0 \end{cases} \quad (2-69)$$

Remarques

- ✚ Les flancs concaves et convexes et les parties actives et de raccordement doivent être traités indépendamment,
- ✚ La discrétisation de la surface se fait de la droite vers la gauche (suivant la largeur) et du bas vers le haut (suivant la hauteur) selon les flèches représentées sur la figure II-8. Nous avons utilisé en ce propos un maillage de 12x12 points,
- ✚ Chaque point de la surface, représenté par ces coordonnées $\bar{R}$ et $\bar{Z}$ dans le plan, constitue un système d'équations devant être résolu indépendamment.

Conclusion

Ce chapitre est consacré à une méthode mathématique de simulation numérique du procédé « *Gleason Face-mill* » de taillage des engrenages spiroconiques. Il est basé sur les paramètres et réglages de la machine de taillage, les différents mouvements des parties de la machine intervenant dans l'opération de taillage et de la pièce à tailler, et les caractéristiques et proportions générales du couple spiroconique à réaliser. Dans les chapitres qui suivent, on va considérer un exemple numérique de couple afin de valider la procédure exposée.

Chapitre III

Simulation du contact entre un couple de dents spiroconiques

Introduction

L'étude de contact entre les engrenages spiroconiques lors de l'engrènement est très importante vue l'interdépendance entre les phénomènes l'accompagnant comme la distribution de la charge, les frottements, la température et les déformations locales sur les flancs de dentures en contact...etc.

On étudie dans ce chapitre l'algorithme pour déterminer le contact entre deux dents en prise par simulation mathématique [2,8-9,14-16,29] basée sur les équations représentant les deux surfaces de la roue et du pignon, développées dans le deuxième chapitre, et ce, dans le cas de montage idéal des arbres de la roue et du pignon d'une part, et d'autre part en présence de différents cas de désalignement, parallèles, angulaires et mixtes.

1 Contact ponctuel en 3D

La simulation de contact est basée sur la théorie de la tangence continue des surfaces de denture en contact [8-9,12-16,29,30,39,44,46,49,54-55]. Elle est obtenue à partir d'une simulation numérique du procédé de taillage simultané de surfaces en contact : la surface convexe active du pignon et la surface concave active de la roue. Notons que le point de contact aura lieu seulement dans les zones actives du couple de dents. Les deux surfaces satisfaisant les équations de génération sont présentées dans un même repère fixe R_h (figure III-1). Les hypothèses à respecter dans l'analyse de contact entre dentures spiroconiques selon la méthode *Tooth Contact Analysis* sont les suivantes :

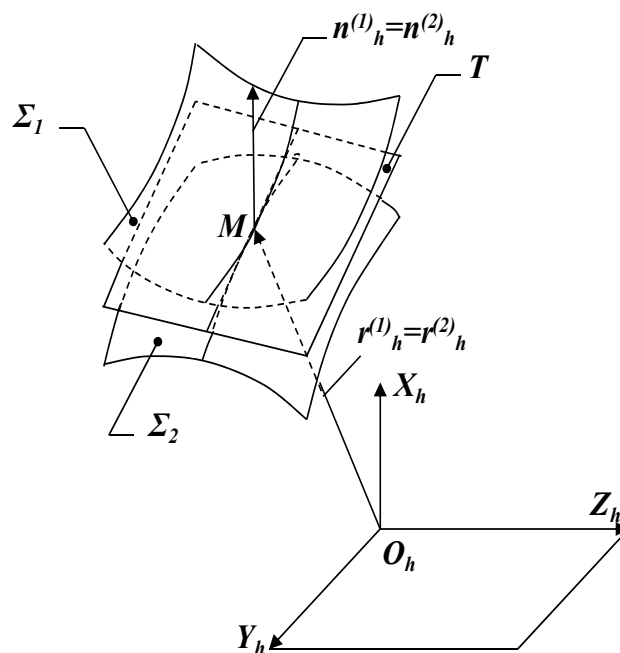


Figure III-1 Illustration de la tangence des surfaces Σ_1 et Σ_2 .

- L'engrènement des dents se fait sous faible charge,
- Les dents du couple d'engrenage sont considérées rigides,
- Une seule paire de dents est considérée en contact à chaque instant,
- Le membre menant tourne à une vitesse constante.

2 Positionnement géométrique du pignon et de la roue

Les axes du pignon et de la roue sont théoriquement concourants et représentent un angle bien déterminé entre eux (angle d'envoi). Mais en réalité, les supports d'arbres subissent des flexions dues au chargement imposé (chargement à transmettre) et les défauts de positionnement de fabrication ou de montage rendent cette hypothèse moins objective. Ce qui peut influencer largement sur la ligne de contact entre le couple spiroconique [14-16,22, 52,56]. Toutes les études (d'après notre bibliographie) portant sur la simulation du contact entre les couples spiroconiques ou hypoïdes prennent en considération dans leurs formulations les quatre modifications possibles sur les positionnements relatifs (figure III-2) :

- ✓ déplacement axial du pignon : ΔA_1 ,
- ✓ déplacement axial de la roue : ΔA_2 ,
- ✓ changement d'angle entre les deux arbres : $\Delta \gamma$,
- ✓ décalage hypoïde entre les deux arbres : ΔE .

Des tolérances sont appliquées sur chaque couple d'engrenage spiroconique. Les valeurs permises des différentes modifications de positionnement citées ci-dessus sont déterminées par les expérimentateurs sur des bancs d'essai dédiés à cet effet.

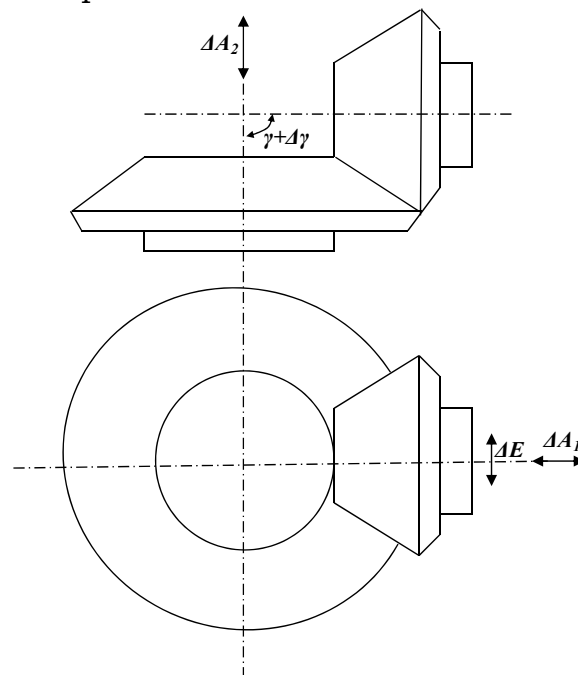
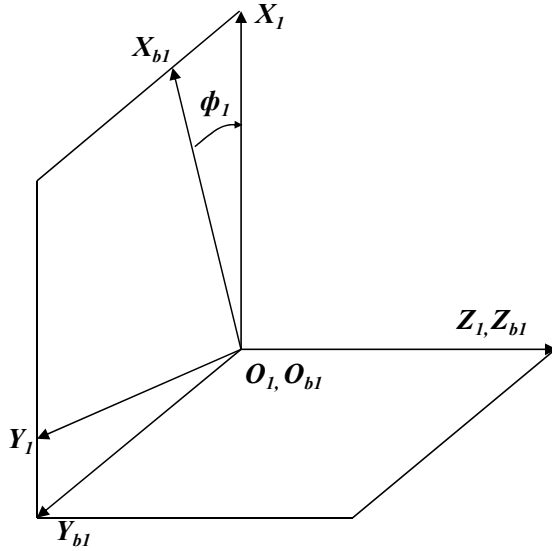


Figure III-2 Défauts d'alignement entre le pignon et la roue.

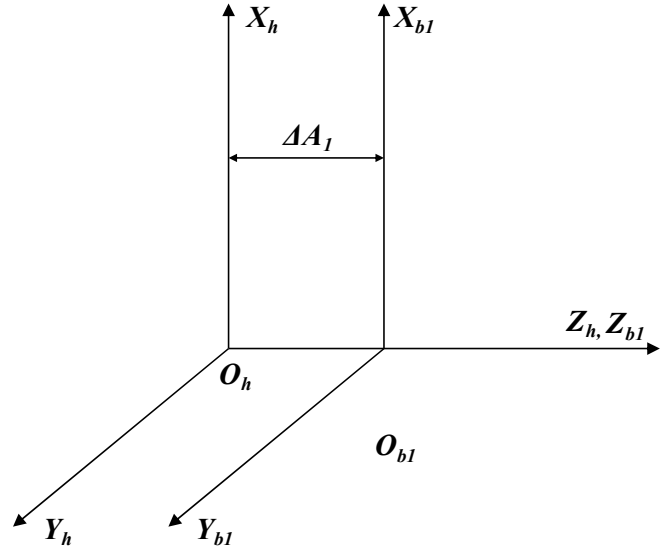
3 Définition des repères (figure III-3)

L'engrènement des deux surfaces de la roue et du pignon sera étudié dans le repère fixe (R_h) au bâti. Les deux repères mobiles R_1 et R_2 sont liés rigidement au pignon et à la roue respectivement. Les deux repères auxiliaires R_{b1} et R_{b2} sont utilisés pour représenter la rotation du pignon et la roue [9,14-16] .

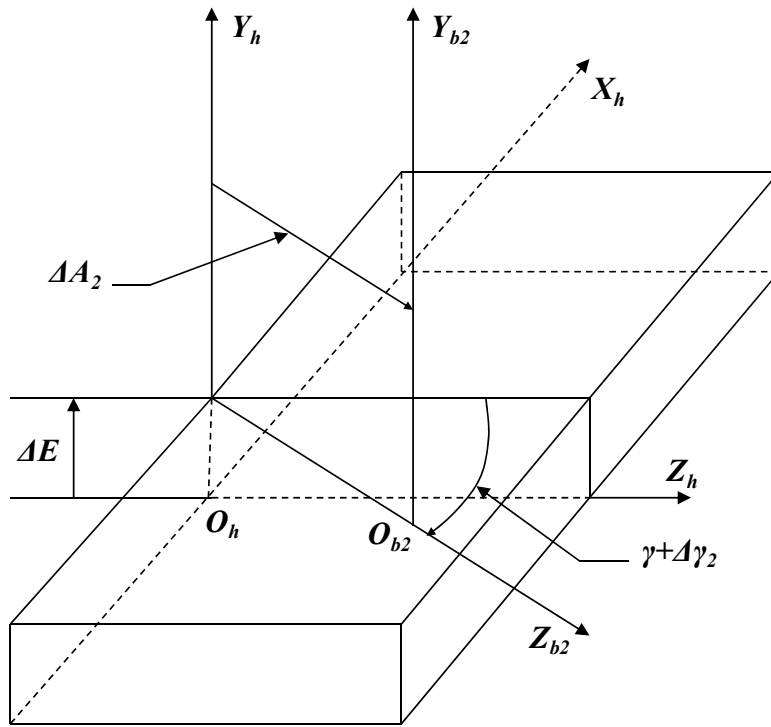
Les erreurs d'alignement sont simulées par les différents positionnements de R_{b1} et R_{b2} par rapport à R_h .



(a)



(b)



(c)

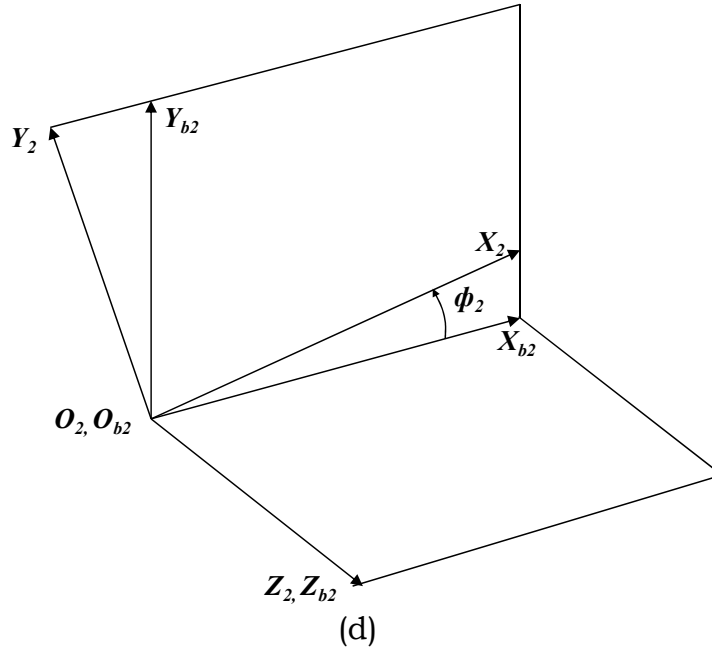


Figure III-3 Définition des différents repères et désalignements.

ΔA_1 : déplacement axial du pignon.

$\Delta \gamma$: changement d'angle entre les deux arbres.

ΔE : décalage hypoïde entre les deux arbres.

ΔA_2 : déplacement axial de la roue.

Les quatre paramètres seront décisifs quant au contact et à la distribution de la contrainte dans le volume de la dent comme nous allons voir dans ce chapitre et dans le suivant.

4 Modèle de simulation

Pendant le processus d'engrènement, le pignon et la roue (les surfaces de dents en contact) doivent être en tangence continue. Cette condition peut être expliquée par la coïncidence instantanée de leurs vecteurs positions et leurs vecteurs normaux.

La surface du pignon est représentée dans le repère R_h comme suit :

$$r_h^{(1)}(s_P, \theta_P, \psi_1, \phi_1) = M_{hb_1} M_{b_1^1}(\phi_1) r_1(s_P, \theta_P, \psi_1) \quad 3-1$$

Avec les matrices de passage M_{hb_1} et $M_{b_1^1}$ données par :

$$M_{b_1^1} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3-2$$

$$M_{hb_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta A_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3-3$$

La surface de la roue est représentée dans le repère R_h comme suit :

$$r_h^{(2)}(s_g, \theta_g, \psi_2, \phi_2) = M_{hb_2} M_{b_2^2}(\phi_2) r_2(s_g, \theta_g, \psi_2) \quad 3-4$$

Avec les matrices de passage données par :

$$M_{b_2^2} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3-5$$

$$M_{hb_2} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma + \Delta\gamma) & 0 & -\sin(\gamma + \Delta\gamma) & -\Delta A_2 \cdot \sin(\gamma + \Delta\gamma) \\ 0 & 1 & 0 & \Delta E \\ \sin(\gamma + \Delta\gamma) & 0 & \cos(\gamma + \Delta\gamma) & \Delta A_2 \cdot \cos(\gamma + \Delta\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3-6$$

La normale unitaire à la surface du pignon est représentée dans le repère R_h par :

$$n_h^{(1)}(s_P, \theta_P, \psi_1, \phi_1) = L_{h_1}(\phi_1) n_1(s_P, \theta_P, \psi_1) \quad 3-7$$

Avec L_{h_1} sous matrice de la matrice M_{h_1} , donnée par :

$$L_{h_1} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3-8$$

La normale unitaire à la surface de la roue est représentée dans le repère R_h par :

$$n_h^{(2)}(s_g, \theta_g, \psi_2, \phi_2) = L_{hb_2} L_{b_2^2}(\phi_2) n_2(s_g, \theta_g, \psi_2) \quad 3-9$$

Avec L_{hb_2} et $L_{b_2^2}$ sont les sous matrices des matrices M_{hb_2} et $M_{b_2^2}$ respectivement, données par :

$$L_{hb_2} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3-10$$

$$L_{b_2^2} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma + \Delta\gamma) & 0 & -\sin(\gamma + \Delta\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma + \Delta\gamma) & 0 & \cos(\gamma + \Delta\gamma) \end{bmatrix} \quad 3-11$$

La condition de tangence continue citée auparavant peut être représentée par les équations condensées suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_h^{(1)}(s_p, \theta_p, \psi_1, \phi_1) - \mathbf{r}_h^{(2)}(s_g, \theta_g, \psi_2, \phi_2) = 0 \end{cases} \quad 3-12$$

$$\begin{cases} \mathbf{n}_h^{(1)}(s_p, \theta_p, \psi_1, \phi_1) - \mathbf{n}_h^{(2)}(s_g, \theta_g, \psi_2, \phi_2) = 0 \end{cases} \quad 3-13$$

$$\begin{cases} f_{1p}(s_p, \theta_p, \psi_1) = 0 \end{cases} \quad 3-14$$

$$\begin{cases} f_{2p}(s_g, \theta_g, \psi_2) = 0 \end{cases} \quad 3-15$$

Les équations (3-14) et (3-15) sont les deux équations d'engrènement des surfaces Σ_1 avec Σ_p et Σ_2 avec Σ_g respectivement.

Les équations (3-12) et (3-13) décrivent la coïncidence des vecteurs positions et des vecteurs normaux au point de contact sur les deux surfaces Σ_1 et Σ_2 .

L'équation (3-12) permet l'écriture de trois équations scalaires et l'équation (3-13) donne deux équations scalaires.

Le système d'équation (3-12) à (3-15) donne sept équations à sept inconnues. Tandis que l'angle de rotation du pignon (ϕ_1) est considéré comme donné. L'intervalle de la valeur de l'angle (ϕ_1) est donné en fonction du nombre de dents du pignon par la condition :

$$-\left(\frac{\pi}{N_1}\right) < \phi_1 < +\left(\frac{\pi}{N_1}\right) \quad 3-16$$

Le système d'équations donc, doit être résolu par rapport aux variables : $s_p, \theta_p, \psi_1, s_g, \theta_g, \psi_2$, et ϕ_2 .

Il est supposé que le déterminant de la matrice jacobienne calculée par (3-18) ne s'annule pas.

Le système d'équations peut être résumé comme suit :

$$\begin{cases} f_1(s_p, \theta_p, \psi_1, s_g, \theta_g, \psi_2, \phi_2) = 0 \\ f_2(s_p, \theta_p, \psi_1, s_g, \theta_g, \psi_2, \phi_2) = 0 \\ f_3(s_p, \theta_p, \psi_1, s_g, \theta_g, \psi_2, \phi_2) = 0 \\ f_4(s_p, \theta_p, \psi_1, s_g, \theta_g, \psi_2, \phi_2) = 0 \\ f_5(s_p, \theta_p, \psi_1, s_g, \theta_g, \psi_2, \phi_2) = 0 \\ f_6(s_p, \theta_p, \psi_1, s_g, \theta_g, \psi_2, \phi_2) = 0 \\ f_7(s_p, \theta_p, \psi_1, s_g, \theta_g, \psi_2, \phi_2) = 0 \end{cases} \quad 3-17$$

La matrice jacobienne du système est construite par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_p} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_p} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_g} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_g} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_p} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_p} & \frac{\partial f_2}{\partial \psi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_g} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_g} & \frac{\partial f_2}{\partial \psi_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s_p} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_p} & \frac{\partial f_3}{\partial \psi_1} & \frac{\partial f_3}{\partial s_g} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_g} & \frac{\partial f_3}{\partial \psi_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial s_p} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_p} & \frac{\partial f_4}{\partial \psi_1} & \frac{\partial f_4}{\partial s_g} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_g} & \frac{\partial f_4}{\partial \psi_2} & \frac{\partial f_4}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial f_5}{\partial s_p} & \frac{\partial f_5}{\partial \theta_p} & \frac{\partial f_5}{\partial \psi_1} & \frac{\partial f_5}{\partial s_g} & \frac{\partial f_5}{\partial \theta_g} & \frac{\partial f_5}{\partial \psi_2} & \frac{\partial f_5}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial f_6}{\partial s_p} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_p} & \frac{\partial f_6}{\partial \psi_1} & \frac{\partial f_6}{\partial s_g} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_g} & \frac{\partial f_6}{\partial \psi_2} & \frac{\partial f_6}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial f_7}{\partial s_p} & \frac{\partial f_7}{\partial \theta_p} & \frac{\partial f_7}{\partial \psi_1} & \frac{\partial f_7}{\partial s_g} & \frac{\partial f_7}{\partial \theta_g} & \frac{\partial f_7}{\partial \psi_2} & \frac{\partial f_7}{\partial \phi_2} \end{bmatrix} \quad 3-18$$

Notons que chaque variable est fonction de l'angle de rotation du pignon.

La ligne de contact sur le pignon et la roue sera représentée par les fonctions vectorielles suivantes :

$$\bullet r_1 = (s_p(\phi_1), \theta_p(\phi_1), \psi_1(\phi_1)) \quad 3-19$$

$$\bullet r_2 = (s_g(\phi_1), \theta_g(\phi_1), \psi_2(\phi_1)) \quad 3-20$$

La ligne de contact entre les deux dents sera une spirale calculée par un nombre de points le long de la hauteur de la dent.

5 Visualisation des résultats numériques

On représente dans cette section les résultats numériques obtenus par application de la simulation de l'engrènement et du contact détaillée dans ce chapitre, sur un couple d'engrenage spiroconique dont les caractéristiques générales et toutes les données sont représentées en chapitre IV. Dix cas ont été visualisés dans les sections suivantes, pour la dent du pignon et celle de la roue, correspondant aux cas suivants :

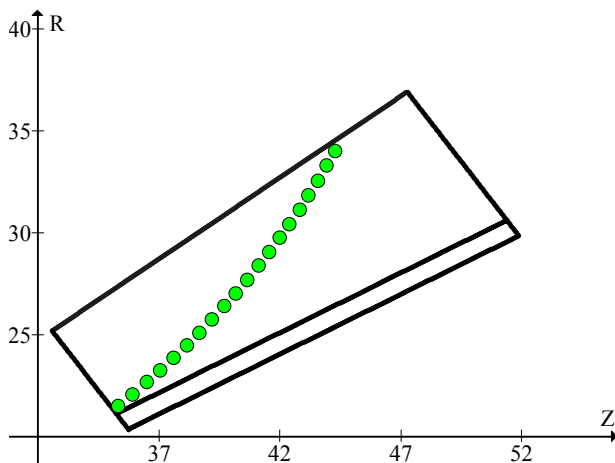
- Alignement parfait,
- Désalignement axial (positif et négatif) de la roue,
- Désalignement angulaire (positif et négatif) des deux arbres,
- Désalignement axial (positif et négatifs) du pignon,
- Décalage hypoïde positif et négatif,

- Défauts d'alignement combinés.

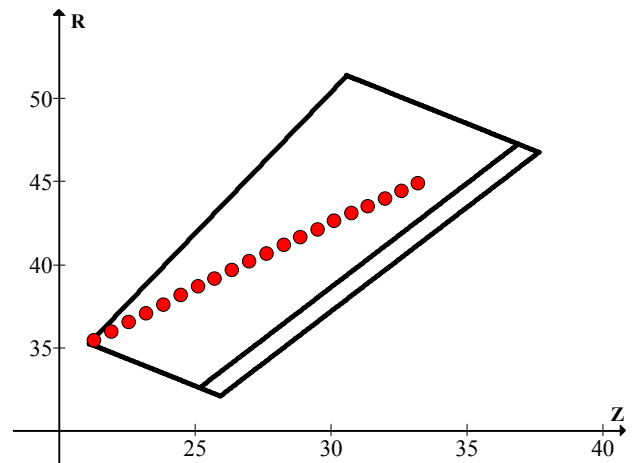
5-1 Alignement parfait

Alignement sans défauts ayant les caractéristiques suivantes :

$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0	0	0



III- (a-1) Dent du pignon

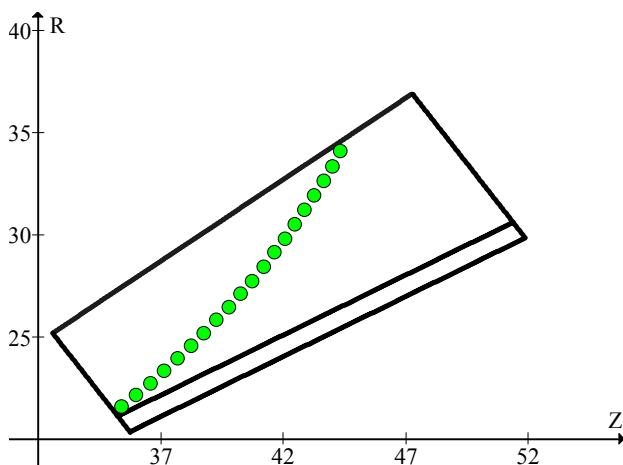


III-(b-1) Dent de la roue

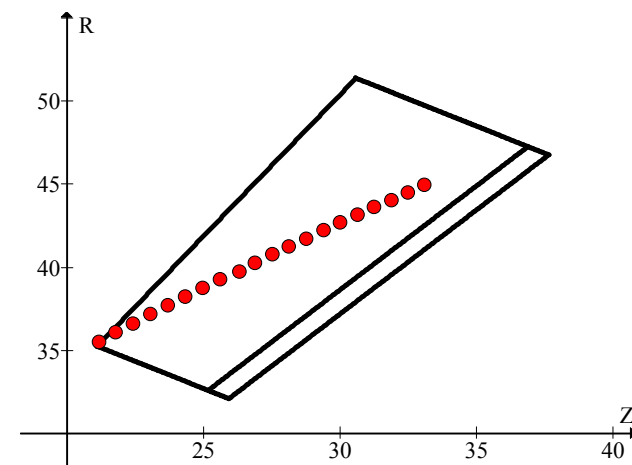
5-2 Désalignement 01

Décalage axial positif maximal de la roue :

$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0	0.200 mm	0



III-(a-2) Dent du pignon

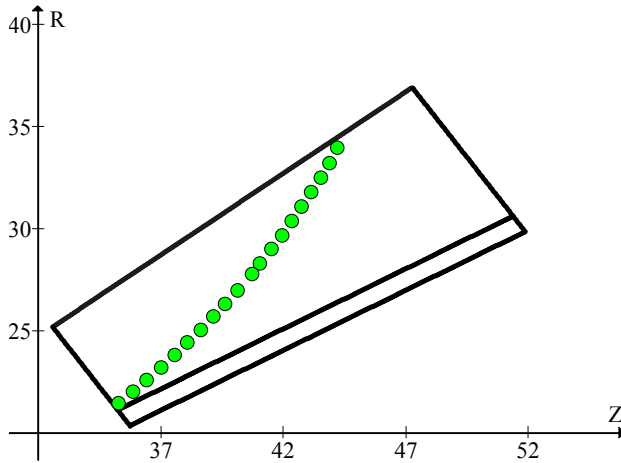


III- (b-2) Dent de la roue

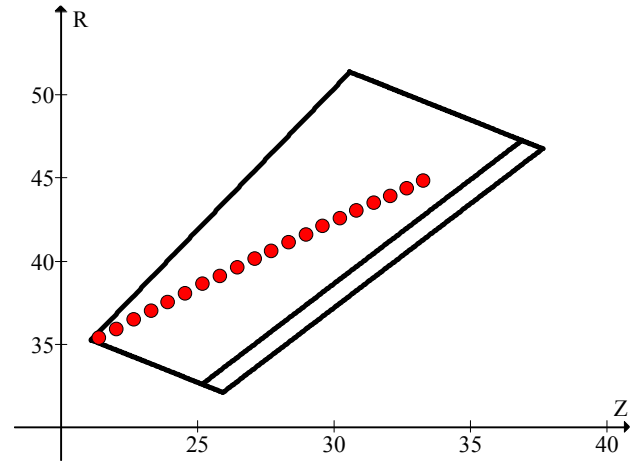
5-3 Désalignement 02

Décalage axial négatif maximal de la roue :

$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0	-0.1500 mm	0



III- (a-3) Dent du pignon

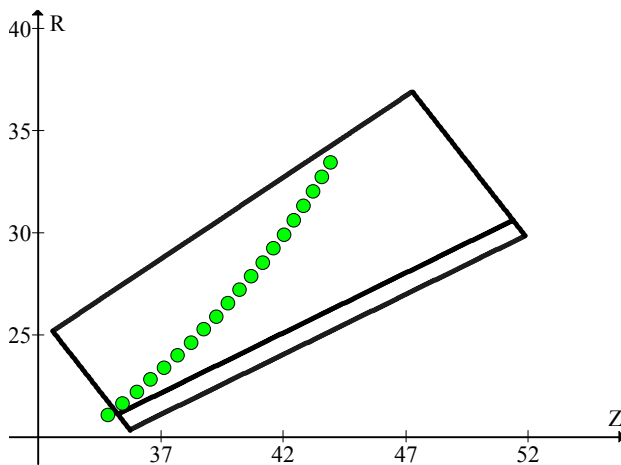


III- (b-3) Dent de la roue

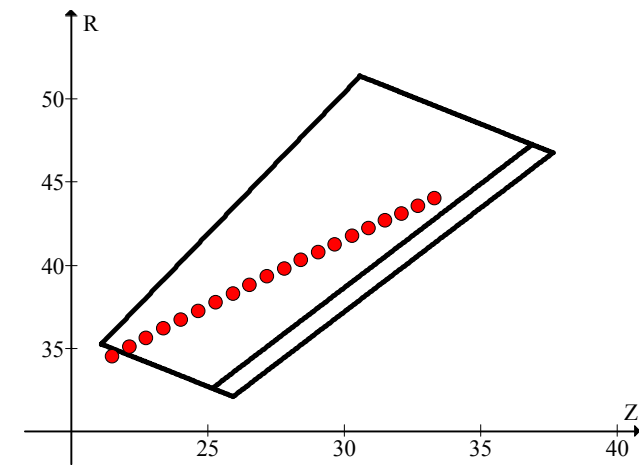
5-4 Désalignement 03

Désalignement angulaire négatif maximal des arbres :

$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
-1.00 degré	0	0	0



III- (a-4) Dent du pignon

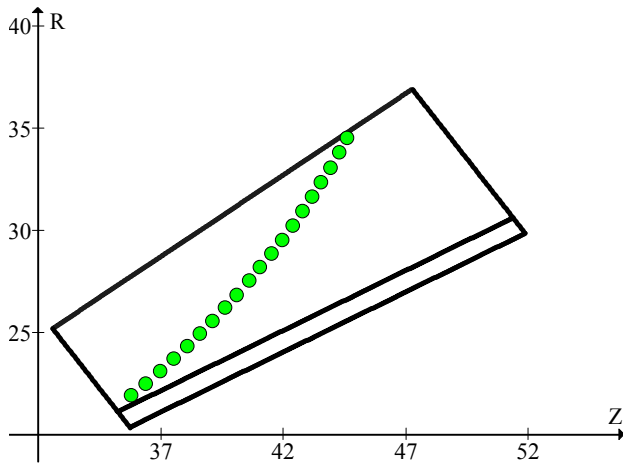


III- (b-4) Dent de la roue

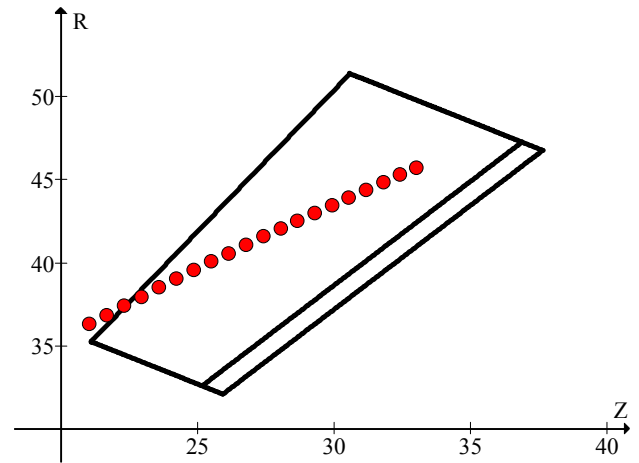
5-5 Désalignement 04

Désalignement angulaire positif maximal des arbres :

$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
1.00 degré	0	0	0



III- (a-5) Dent du pignon

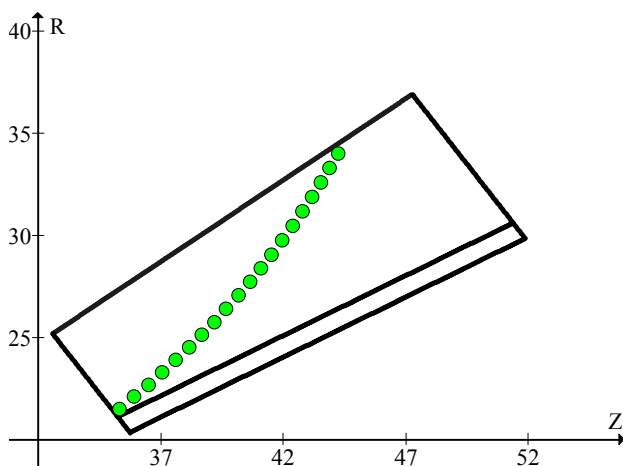


III-(b-5) Dent de la roue

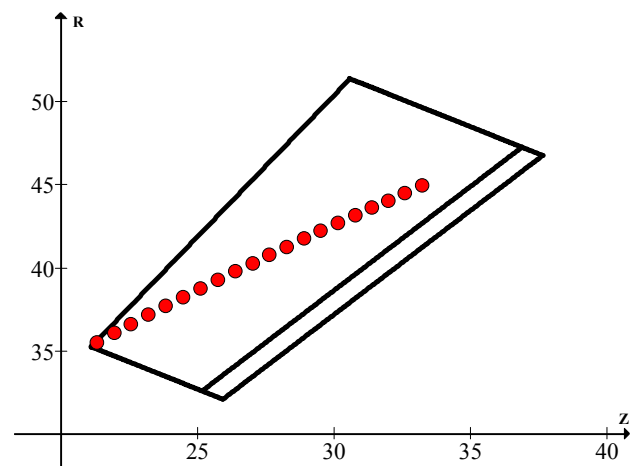
5-6 Désalignement 05

Décalage axial positif maximal du pignon :

$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0.100 mm	0	0



III- (a-6) Dent du pignon

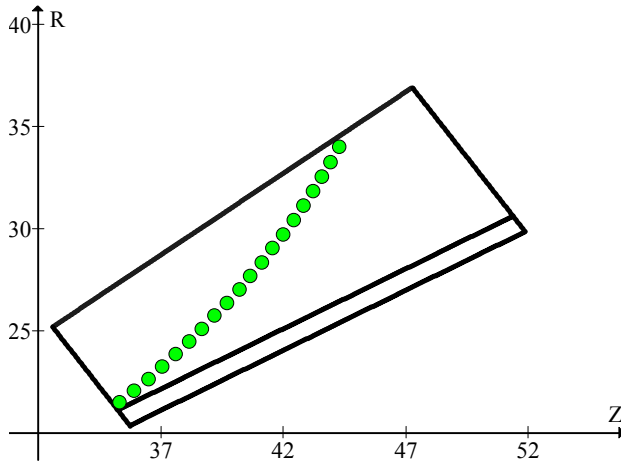


III- (b-6) Dent de la roue

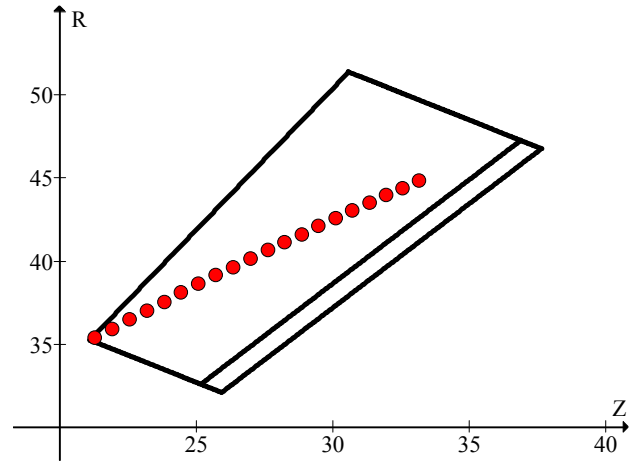
5-7 Désalignement 06

Décalage axial négatif maximal du pignon :

$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	-0.060 mm	0	0



III-(a-7) Dent du pignon

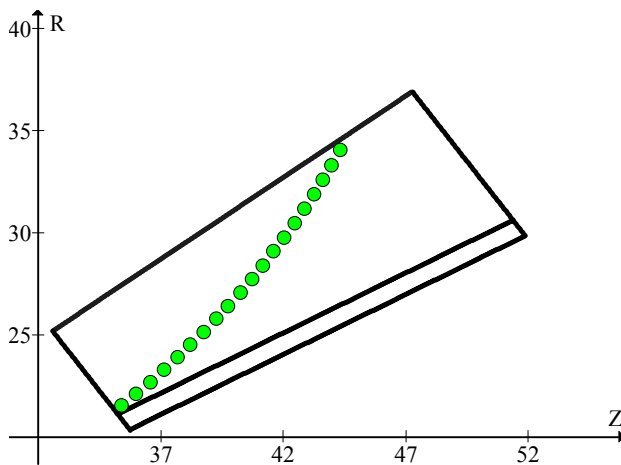


III- (b-7) Dent de la roue

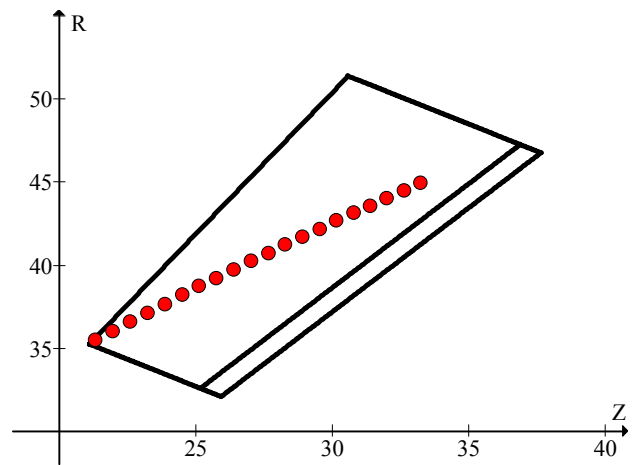
5-8 Désalignement 07

Décalage hypoïde positif maximal :

$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0	0	1.00 mm



III-(a-8) Dent du pignon

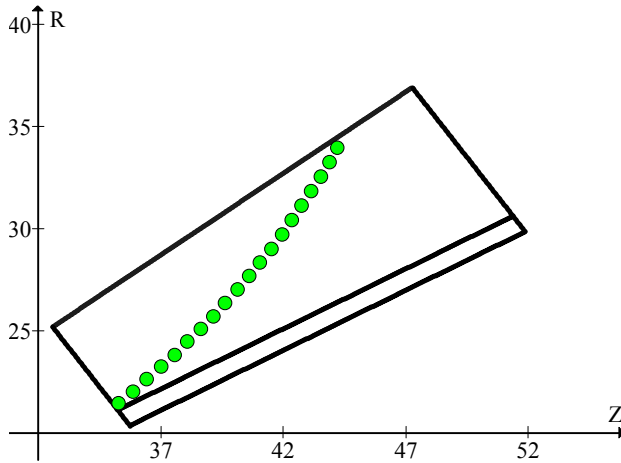


III-(b-8) Dent de la roue

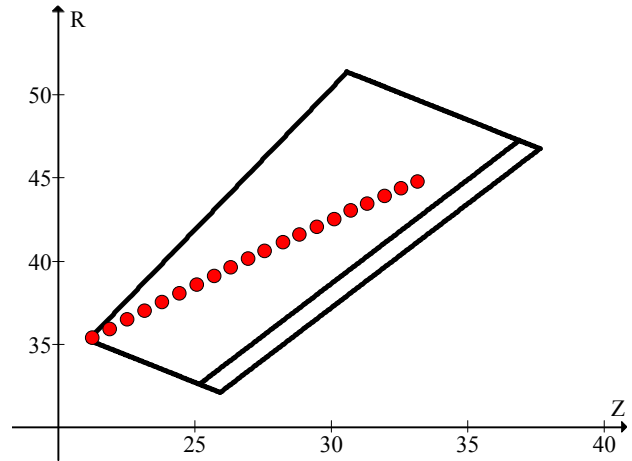
5-9 Désalignement 08

Décalage hypoïde négatif maximal :

$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0	0	-1.00 mm



III-(a-9) Dent du pignon

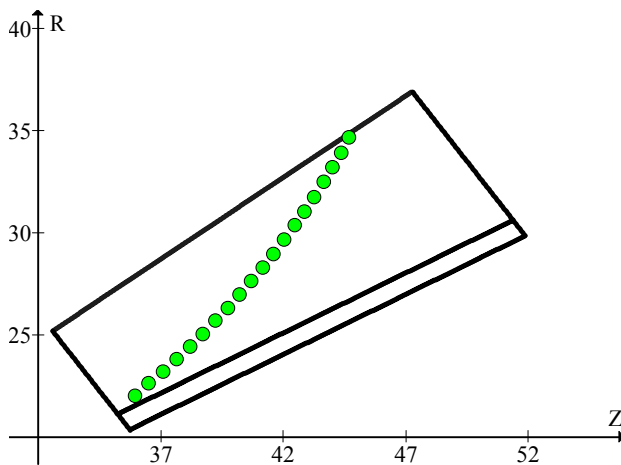


III-(b-9) Dent de la roue

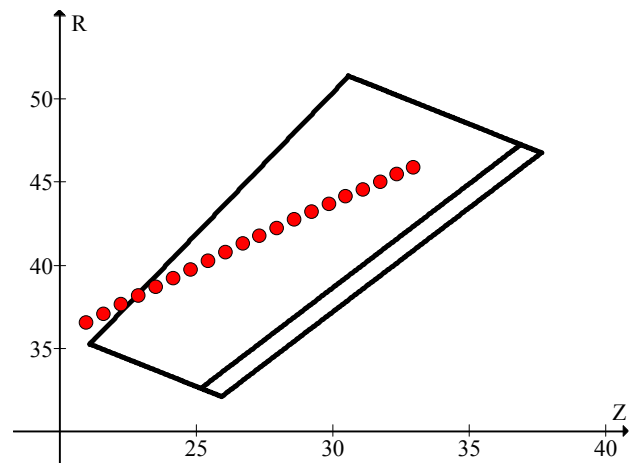
5-10 Désalignement 09 :

Défauts d'alignement combinés :

$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
1.00 degré	0.100 mm	0.200 mm	0.100 mm



III-(a-10) Dent du pignon



III-(b-10) Dent de la roue

6 Discussion des résultats

Les remarques et les conclusions pouvant être tirées de ces résultats sont :

- Le contact entre les dents du pignon et de la roue se fait seulement dans la zone « active » de la dent, située au-delà du déportement (ou *clearance*) de cette dernière, ce déport permet d'éviter toute interférence entre les dentures. Les résultats obtenus montrent clairement qu'aucun cas ne présente des points de contact au dessous de la partie active,
- Le contact instantané entre les dentures des engrenages spiroconiques est ponctuel vue leur forme géométrique en trois dimensions, contrairement aux engrenages cylindriques et coniques droits qui représentent un contact instantané linéaire sur toute la largeur de la dent,
- La ligne de contact s'allonge sur toute la hauteur de la dent (étude d'une seule dent en contact) suivant une ligne spirale à partir du petit bout jusqu'au gros bout de la dent et non pas à la limite; ce qui explique l'importance de l'étude de la portée de contact et toutes les investigations de l'analyse locale,
- Les décalages dus aux désalignements axiaux sont orientés suivant la hauteur de la dent vers l'extérieur pour des valeurs positives et vers l'intérieur dans le cas contraire,
- Le décalage angulaire est le plus dangereux après le cas combiné, qui représente le cas pratique malheureusement, car il est accompagné par une perte de contact (figure III-b-5) favorisant la concentration des contraintes au niveau du pied de la dent et reflétant des efforts importants sur les arbres,
- Le décalage hypoïde est le défaut le plus faible par rapport aux autres cas. Dans ce cas le déplacement des points de contact s'oriente suivant la largeur de la dent vers le gros bout pour de valeurs positive et vers le petit bout pour des valeurs négatives,
- La figure III-b-10 représente le cas de fonctionnement le plus critique où la perte de points de contact est la plus grande que celles des cas des défauts purs,
- On remarque en fin, que la roue est plus sensible aux défauts de désalignement, au point de vu contact, car seul le pignon a jusqu'à lors des optimisations objectives de forme, augmentant ainsi les caractéristiques de fonctionnement que ceux soient en contact, erreur de transmission, ou autres.

Conclusion

Dans ce chapitre, on a représenté la méthode de détermination du contact entre un couple d'engrenage spiroconique suivant la méthode de *Gleason System*. Cette méthode est basée sur les mêmes données que celles utilisées pour la définition de la géométrie, en plus de la supposition de différentes erreurs de positionnement des arbres du couple et la considération d'un même référentiel fixe pour les deux membres du couple spiroconique. Elle nous a permis à la fois la détermination du contact par sa forme et par sa direction sur la surface active de la denture, et l'évaluation quantitative de l'influence de quelques défauts d'alignement sur la ligne de contact produite par le couple lors de l'engrènement. Les résultats trouvés montrent une petite perte de points de contact pour quelques défauts d'alignement, mais aucun défaut n'a impliqué la partie raccordement de la denture dans la zone de contact.

A cause de leur forme géométrique, les engrenages spiroconiques représentent une bonne habilité à supporter les défauts géométriques sur les arbres en conservant une partie potentielle importante de contact.

Enfin, le contact est traité récemment par la méthode des éléments finis dont des modèles EF linéaires [14-16] et non linéaires [35] ont été élaborés dans l'analyse de contact entre un couple et plusieurs couples de dents en prise.

Chapitre IV

Résultats numériques, analyse des contraintes par la méthode des éléments finis

Introduction

Dans ce chapitre, sont présentés les résultats obtenus par la résolution des problèmes des différentes parties géométriques constituant le couple de dents d'engrenage spiroconique (pignon-roue). Un exemple numérique est traité dans ce but, extrait par ces données opérationnelles de taillage des travaux de Litvin et al [15,16]. Les deux volumes sont modélisés dans le logiciel de calcul et d'analyse des structures par éléments finis Ansys. La MEF permet la détermination de l'état de contrainte dans le corps de la denture. Le maillage étant réalisé automatiquement par un élément fini tétraédrique à 10 nœuds et à trois degrés de liberté à chaque nœud. Les différents résultats, enregistrés en contraintes principales et de Von Mises, sont représentées pour le cas de fonctionnement parfait du couple d'engrenage (hypothèse d'absence totale des défauts axiaux et angulaires), et ainsi pour des cas de fonctionnement en présence des différents défauts d'alignement, que ceux soient appliqués au pignon ou à la roue. Des valeurs importantes sont prises dans cette étude et qui sont désignées comme valeurs maximales permises sur les arbres du couple d'engrenage par les références [15,16].

L'analyse par éléments finis sera limitée, comme a été fait pour l'étude de contact, à une seule dent du pignon ou de la roue comme il est choisi par les études citées en références [22,37,43,51,54,55].

1 Exemple numérique

L'exemple illustratif traité dans cette étude est représenté par ces proportions et dimensions générales sur le tableau IV-1.

Les paramètres et les différents réglages machine de taillage du pignon et de la roue sont représentés respectivement sur les tableaux IV-2 et IV-3.

Les données de taillage du pignon ont été déterminées par [15] suite à une optimisation mathématique de la forme de la surface de la dent par des procédures itératives supposant la forme de dent de la roue connue et permettant la prédiction de la forme de l'erreur de transmission et la réduction des vibrations et des seuils sonores.

Tableau IV-1 Caractéristiques générales du couple d'engrenage spiroconique

Paramètres	Pignon	Roue
Nombre de dents	17	26
Pas diamétral (1/mm)	0.2600	0.2600
Angle de renvoi (degré)	90.0000	90.0000
Angle de spirale moyen (degré)	30.0000	30.0000
Sens de spirale	LH	RH
Largeur de la dent (mm)	20.3700	20.3700
Distance moyenne suivant la génératrice primitive (mm)	49.5600	49.5600
Hauteur totale (mm)	8.4400	8.4400
Angle primitif (degré)	33.1785	56.8215
Angle de pied (degré)	30.4500	51.4000
Angle de face (degré)	38.6000	59.5500
Déport (mm)	0.9100	0.9100
Saillie (mm)	5.0200	2.5100
Creux (mm)	3.4200	5.9300

Tableau IV-2 paramètres et réglages machine pour le taillage de la roue.

Paramètres	Valeurs
Diamètre de la fraise (mm)	88.9000
Largeur entre pointe (mm)	1.7780
Angle de pression, côté concave (degré)	20.0000
Angle de pression, côté convexe (degré)	25.0000
Rayon des profils de la lame, côtés concave et convexe (mm)	1.1430
Recul machine (mm)	0.0000
Ajustement longitudinal de la base coulissante (mm)	0.2000
Décalage vertical (mm)	0.0000
Distance radiale (mm)	53.5653
Angle de pied machine (degré)	51.4000
Angle de berceau (degré)	54.3532
Rapport de roulement	1.2250

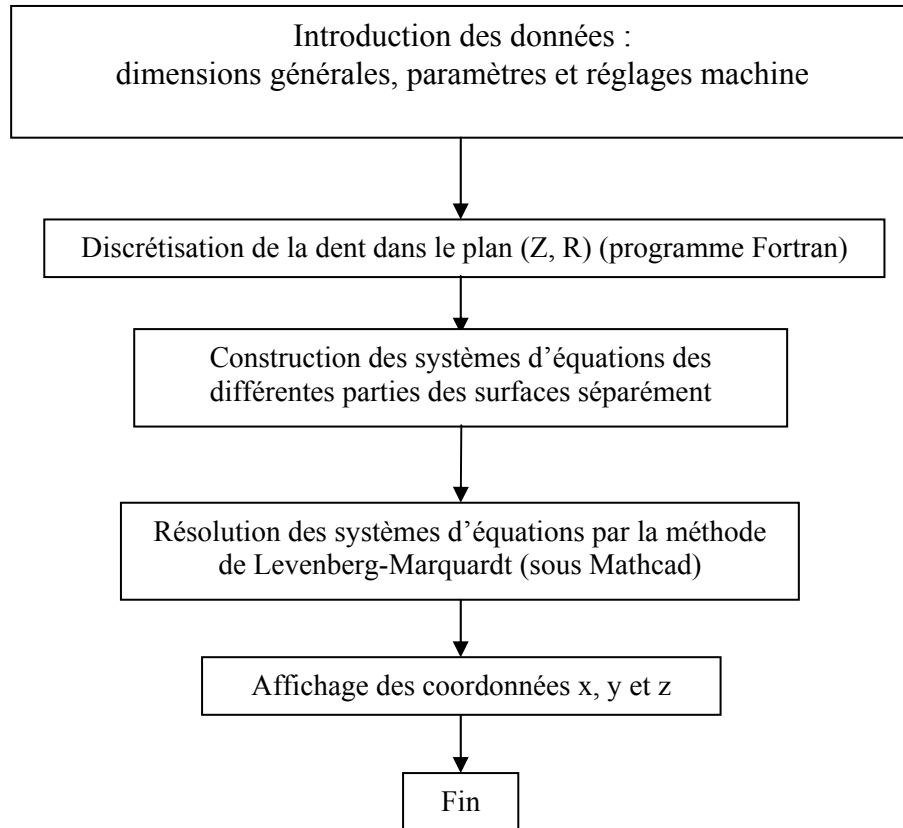
Tableau IV-3 paramètres et réglages machine pour le taillage du pignon.

Paramètres	Valeurs
Diamètre de la fraise (mm)	96.6490
Angle de pression (degré)	20.0000
Rayon des profils de la lame, côtés concave et convexe (mm)	0.7620
Recul machine (mm)	0.7604
Ajustement longitudinal de la base coulissante (mm)	-0.9574
Décalage vertical (mm)	-1.5402
Distance radiale (mm)	55.2535
Angle de pied machine (degré)	30.4500
Angle de berceau (degré)	44.4546
Rapport de roulement	1.9251

2 Résolution du problème de la surface

2-1 Organigramme de résolution

Les étapes de calcul des coordonnées des points des surfaces d'une dent décrites en chapitre II sont résumées dans l'organigramme suivant [22,32,37,43] :



Organigramme IV-1 Calcul des points des surfaces d'une dent

2-2 Résultats de la surface

De part l'aspect axisymétrique des engrenages, l'étude peut être localisée à une seule dent et en considérant une partie suffisante de la jante, telle que l'épaisseur de cette dernière soit supérieure ou égale à $1.5 \times m$ (avec m : module de la dent) comme il est démontré en [57,58], dans le cas de engrenages cylindriques droits. Cette condition est posée dans le but de ne pas perturber la contrainte au pied de la denture. Nous prenons ici, dans le cas des engrenages spiroconiques la hauteur totale de la dent à la place du module.

La résolution des systèmes d'équations décrites précédemment nous a permis de déterminer par résolution de 12×12 points les différentes parties de la surface de la dent du pignon (figure IV-1) et de la roue. Les figures IV-3 et IV-4 représentent les volumes complets des deux dents à étudier.

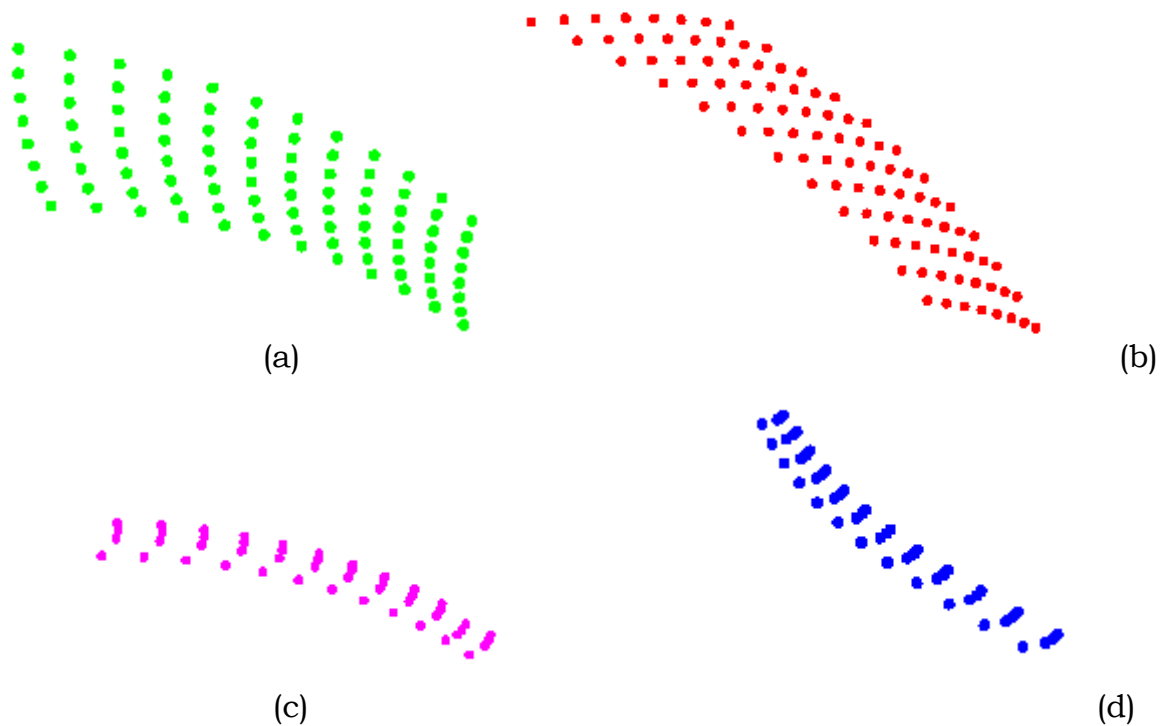


Figure IV-1 Points des surfaces de la dent du pignon.

(a) côté concave de la partie active, (b) côté convexe de la partie active, (c) côté concave de la partie raccordement, (d) côté convexe de la partie raccordement,

Ces surfaces étant calculées dans des repères différents concernant les deux côtés concave et convexe, une rotation de l'un des deux côtés doit être effectuée dans le but de générer le volume complet de la dent (voir session suivante).

3 Réorientation des flancs concave et convexe

Après avoir calculé les points constituant les flancs de la denture, la rotation dans le plan $X_pO_pY_p$ de l'un de deux flancs est appliquée en fonction de l'épaisseur voulue de la dent. Dans notre procédure, l'épaisseur de la dent est calculée selon la méthode *Gleason System* [11,53] basée le système de proportions du couple d'engrenage et permettant de distribuer les contraintes en équivalence entre la dent du pignon et celle de la roue. C'est selon cette épaisseur que sont appliquées les deux rotations des flancs, pour notre cas, concave de la dent du pignon (figure IV-2-a) et convexe de dent de la roue (figure IV-2-b) pour simplifier par la suite l'étude des points de contact entre les deux autres flancs [22,37,43].

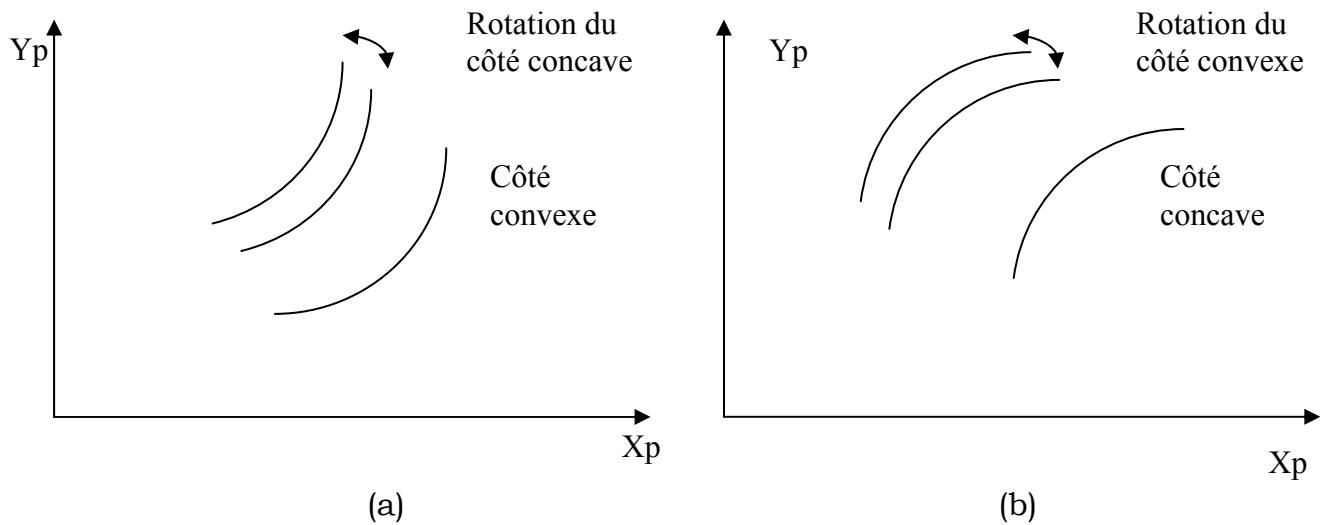


Figure IV-2 Rotation des deux flancs, concave de la dent du pignon (a) et convexe de la dent de la roue (b).

4 Volume de la dent

Une fois les deux flancs réorientés vers leurs bonnes positions, les surfaces sont fermées et une partie suffisante de la jante est prise en compte. Les figures IV-3-a et IV-3-b représentent les deux volumes des deux dents du pignon et de la roue respectivement.

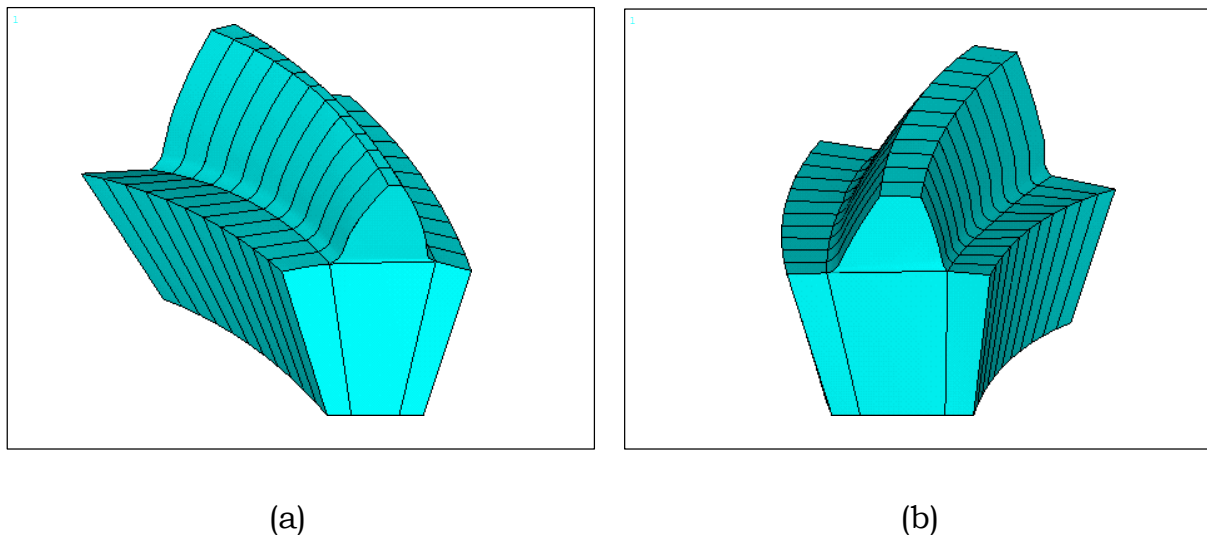


Figure IV-3 Volumes étudiés des deux dents du pignon (a) et de la roue (b).

Le raccordement (figure IV-4) constitue la partie la plus difficile de la dent, il a fait l'objet de plusieurs recherches quant aux engrenages cylindriques droits, car des formes analytiques ont été étudiées pour ce type d'engrenages. Contrairement aux engrenages spiroconiques, cette partie trochoïde n'est accessible que par la méthode représentée.

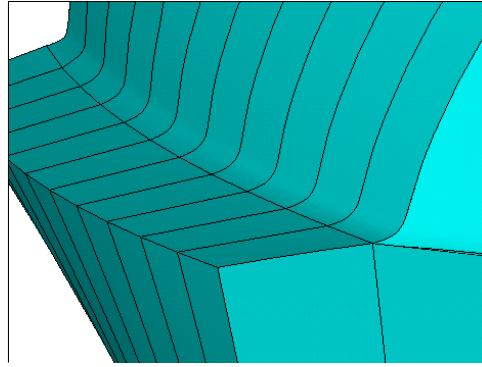


Figure IV-4 Partie raccordement de la dent.

5 Maillage de la dent

On a utilisé pour le maillage des dentures un élément tétraédrique à 10 nœuds à trois degrés de liberté pour chaque nœud (figure IV-5), cet élément représente une bonne accessibilité à la modélisation des corps complexes. Le maillage est réalisé automatiquement dans le logiciel ANSYS qui comporte un mailleur automatique intégré, et à l'aide des options disponibles nous appliquons librement des choix sur les segments et les surfaces.

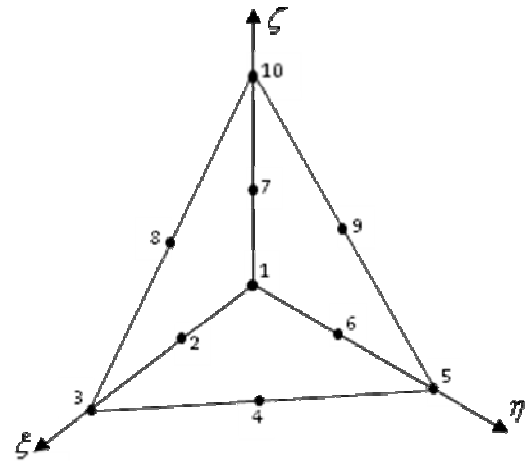


Figure IV-5 Élément fini utilisé.

- Fonctions d'interpolation : [7]

$$\begin{aligned}
 N(1) &= -\lambda(1-2\lambda) & N(6) &= 4\eta\lambda \\
 N(2) &= 4\xi\lambda & N(7) &= 4\zeta\lambda \\
 N(3) &= -\xi(1-2\xi) & N(8) &= 4\xi\zeta \\
 N(4) &= 4\xi\eta & N(9) &= 4\eta\zeta \\
 N(5) &= -\eta(1-2\eta) & N(10) &= -\zeta(1-2\zeta) \\
 \text{avec : } \lambda &= 1 - \xi - \eta - \zeta
 \end{aligned}$$

La figure IV-6 représente le volume de la dent du pignon maillée avec 11998 éléments et 18306 nœuds.

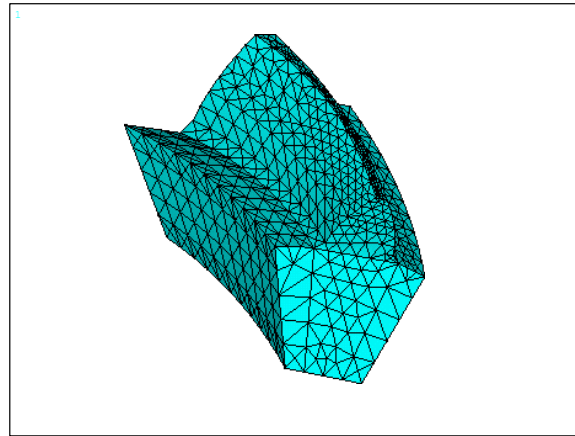


Figure IV-6 Maillage de la dent du pignon.

6 Conditions aux limites

Les conditions aux limites traditionnelles appliquées dans le cas de l'étude d'une seule dent sont la fixation des trois degrés de liberté des nœuds des trois surfaces appartenant à la jante comme il est représenté sur la figure IV-7.

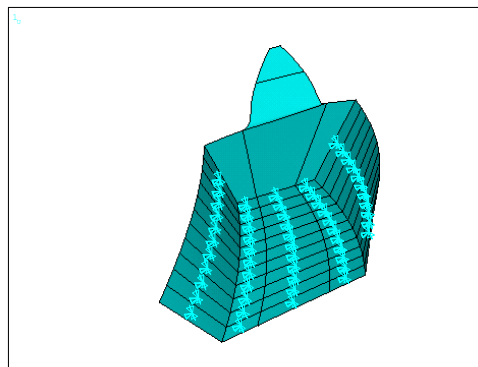


Figure IV-7 Conditions aux limites appliquées

Le couple appliqué pour tous les cas visualisés ultérieurement est égal à 150 Nm. La force de « contact » appliquée est alors calculée en trois dimensions et la normale à la surface au point de contact est exactement la même que la normale à la surface de la lame de taillage au même point avec le sens inverse, et qui peut être calculée par la transformation des repères détaillée au chapitre II.

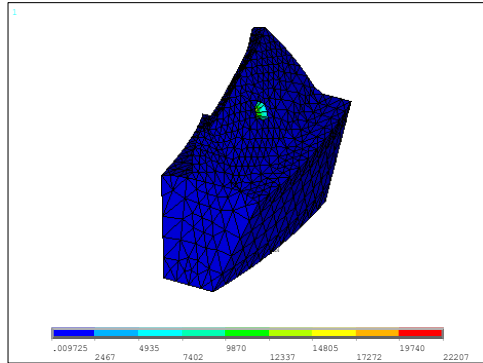
7 Résultats de la MEF

Les cas représentés dans cette session sont ceux étudiés dans le chapitre III (alignement parfait et neuf cas de désalignement). Pour un but de comparaison, nous avons appliqué la force de contact en un point unique qu'on va localiser pendant tous les cas de désalignement en gardant le même couple appliqué, chose qui va permettre d'évaluer globalement l'influence des types de désalignement sur la distribution des contraintes dans le corps de la dent du pignon et de la roue. La visualisation est faite en contraintes principales (de (c) à (f)) et Von Mises (a) et (b). Le matériau utilisé est un acier dont le module de Young est égal à $2.068 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ et le coefficient de Poisson est égal à 0.29.

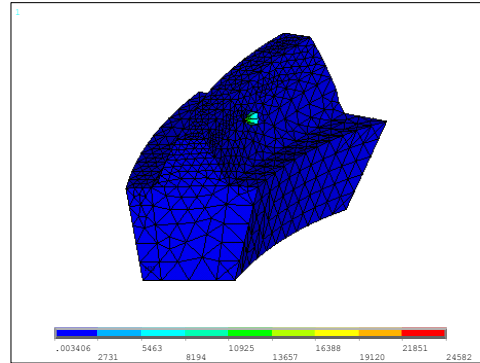
7-1 Alignement parfait

Alignement sans défauts ayant les caractéristiques suivantes :

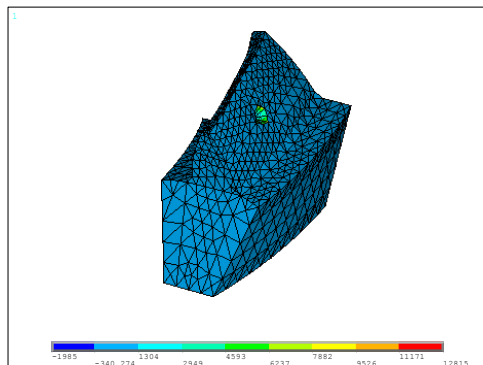
Δy	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0	0	0



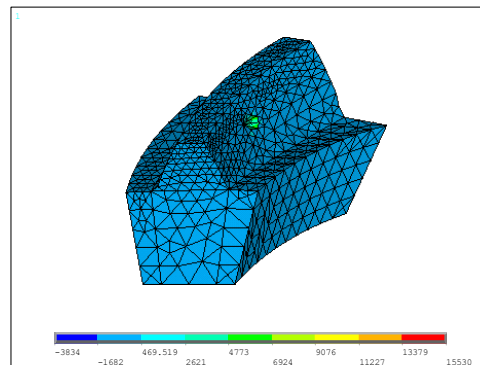
(a)



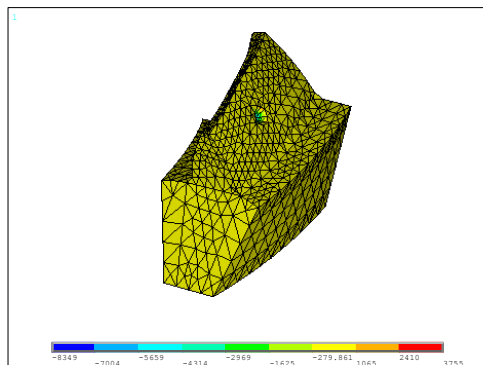
(b)



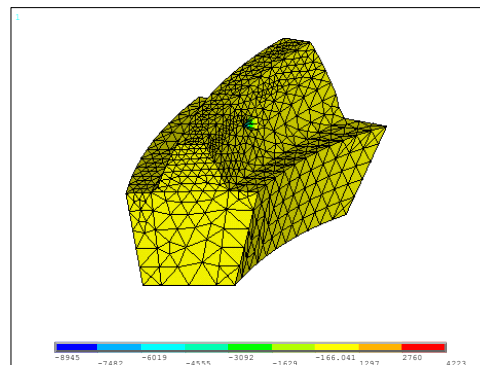
(c)



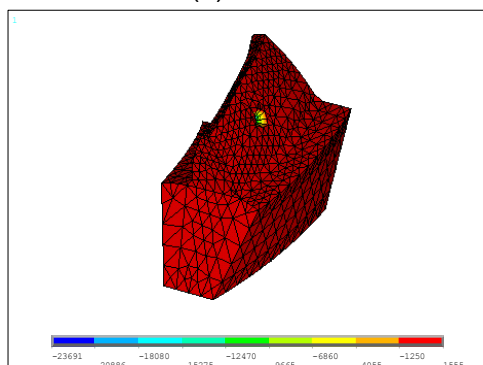
(d)



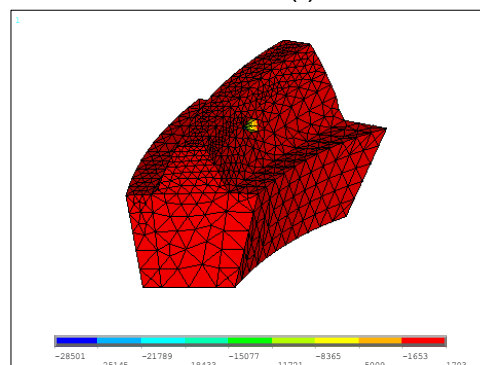
(e)



(f)



(g)

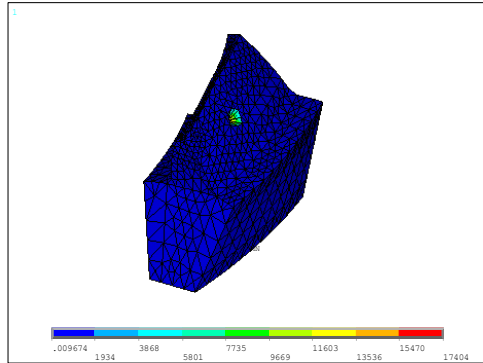


(h)

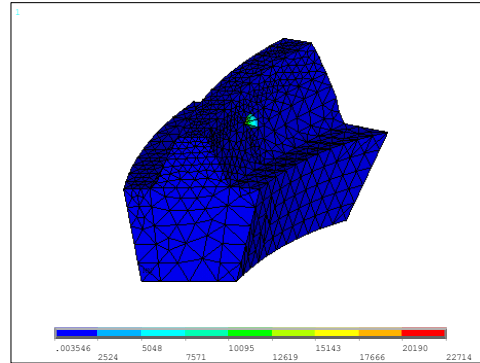
7-2 Désalignement 01

Décalage axial positif maximal de la roue :

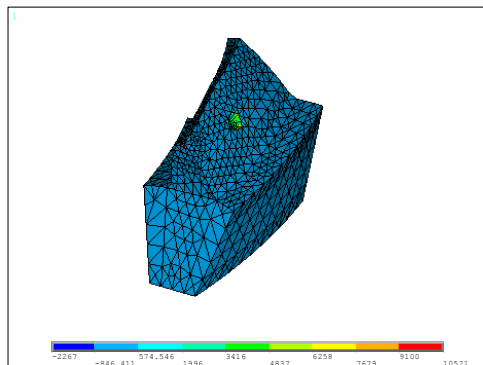
Δy	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0	0.200 mm	0



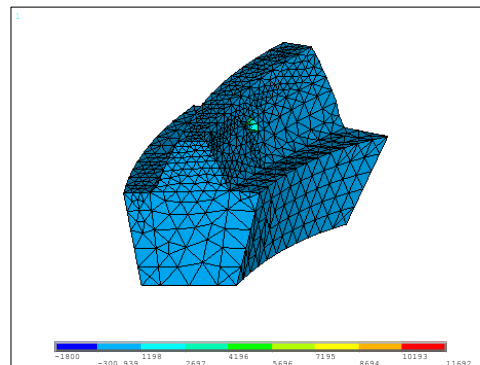
(a)



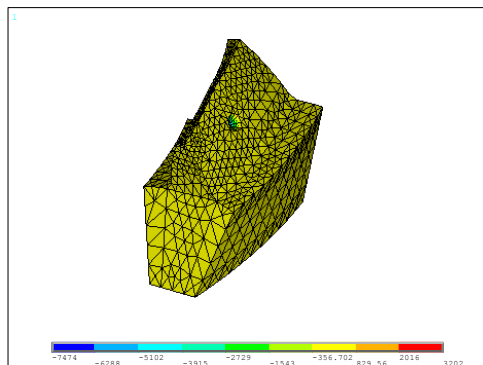
(b)



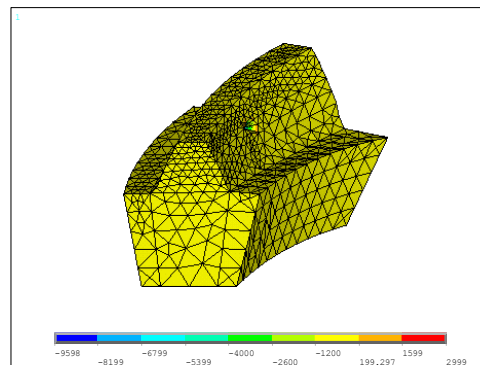
(c)



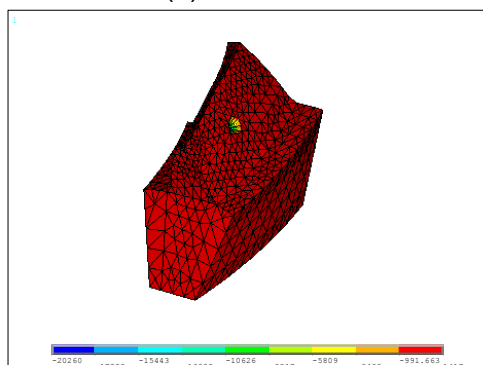
(d)



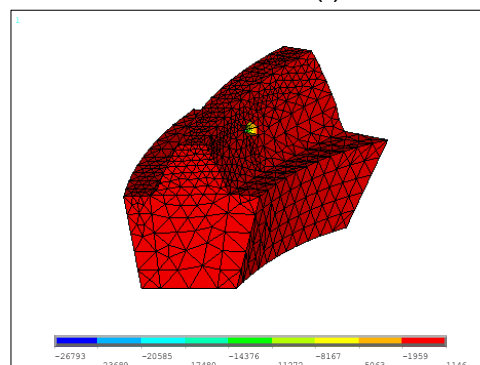
(e)



(f)



(g)

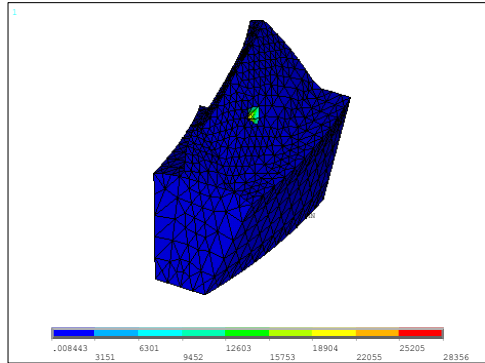


(h)

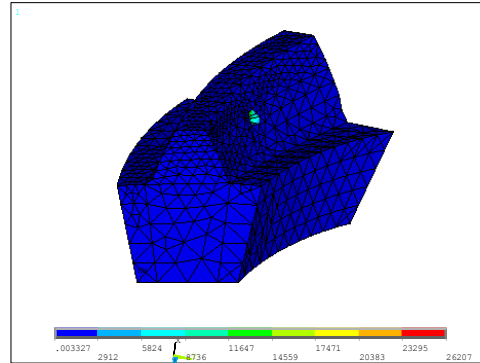
7-3 Désalignement 02

Décalage axial négatif maximal de la roue :

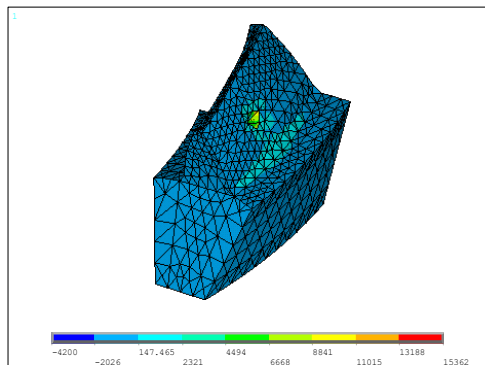
Δy	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0	-0.1500 mm	0



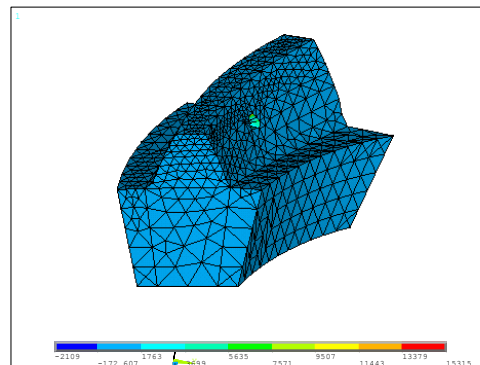
(a)



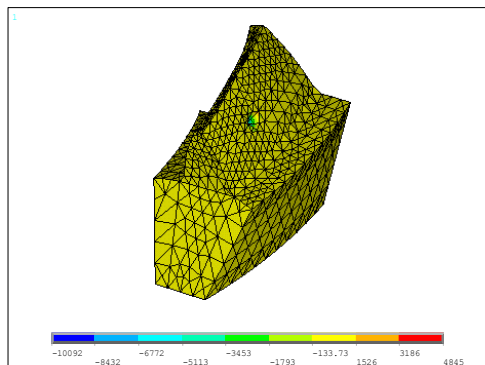
(b)



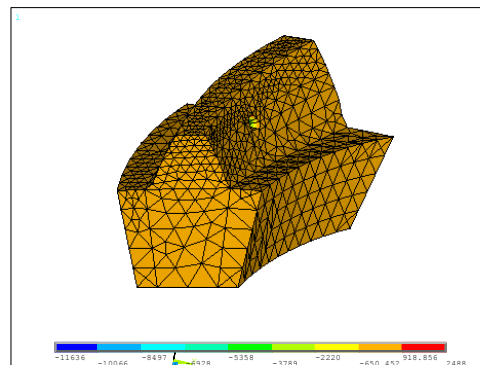
(c)



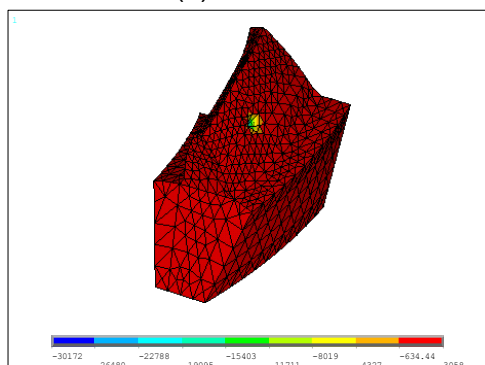
(d)



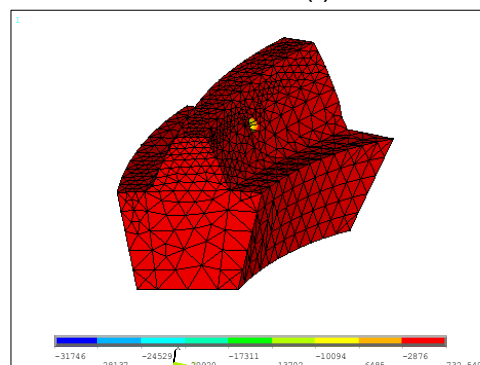
(e)



(f)



(g)

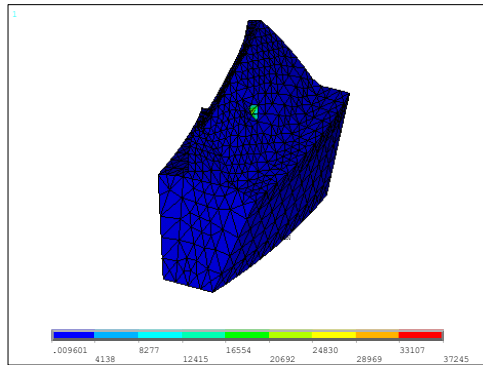


(h)

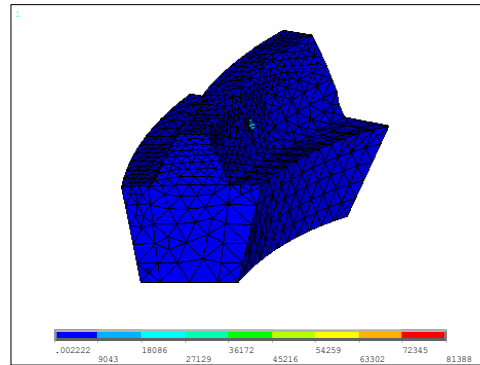
7-4 Désalignement 03

Désalignement angulaire négatif maximal des arbres :

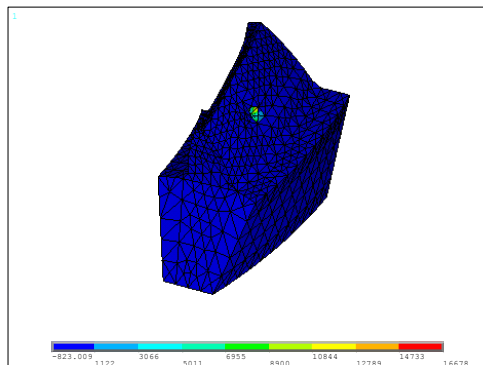
$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
-1.00 degré	0	0	0



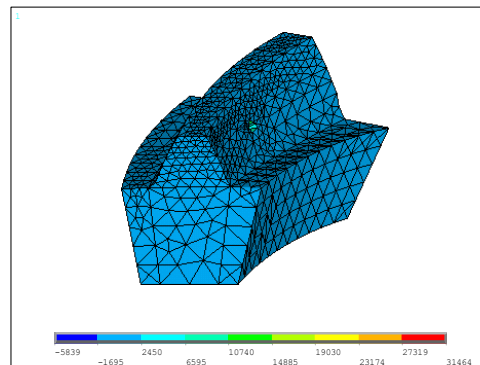
(a)



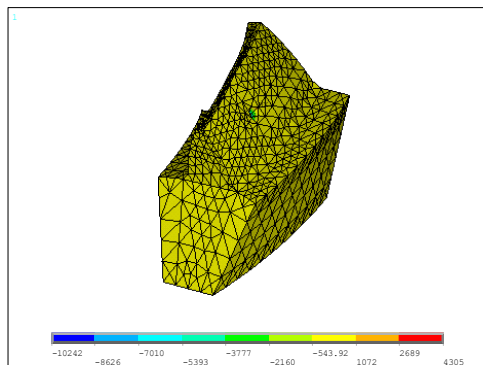
(b)



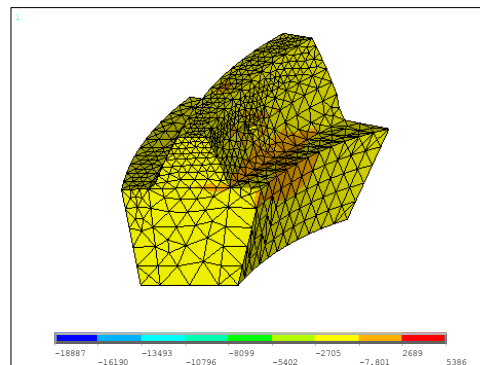
(c)



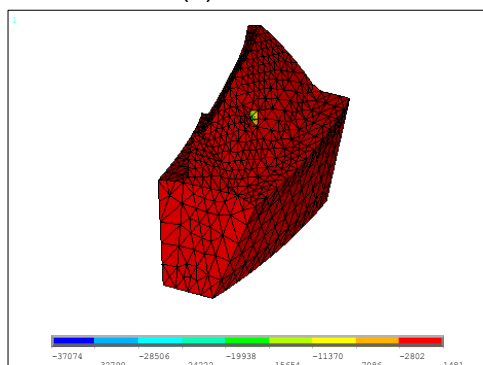
(d)



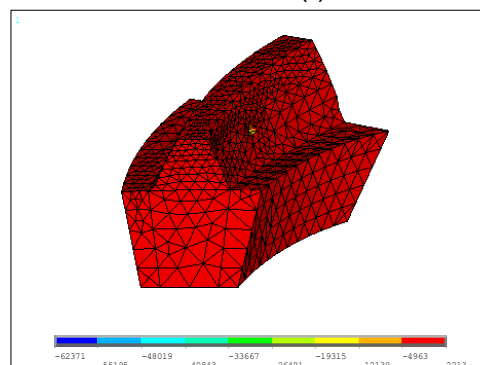
(e)



(f)



(g)

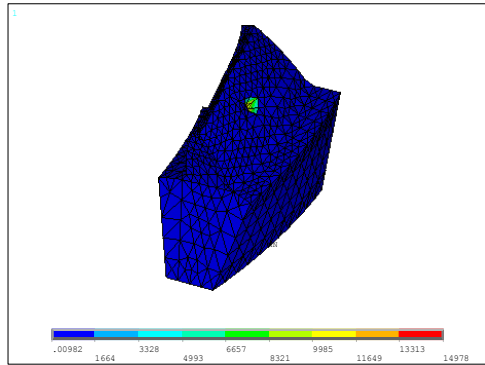


(h)

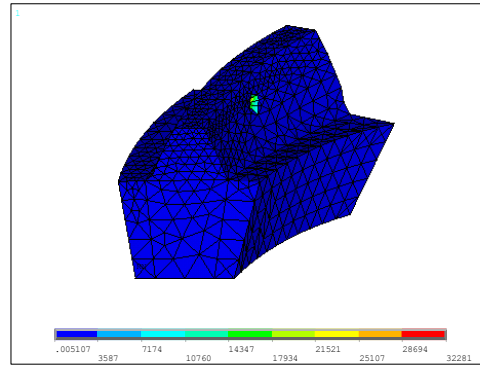
7-5 Désalignement 04

Désalignement angulaire positif maximal des arbres :

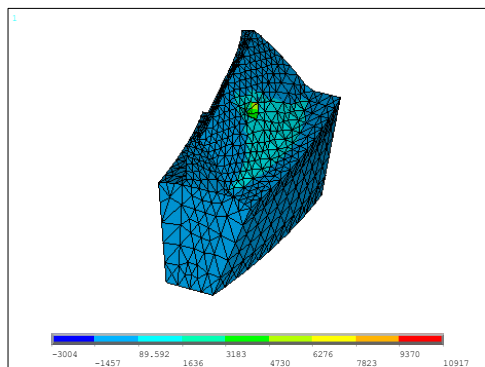
$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
1.00 degré	0	0	0



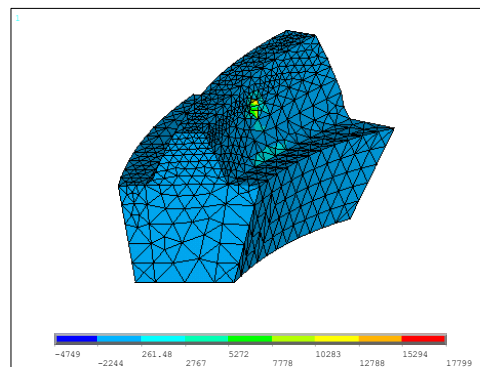
(a)



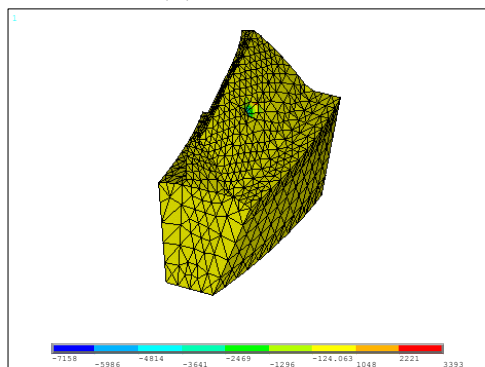
(b)



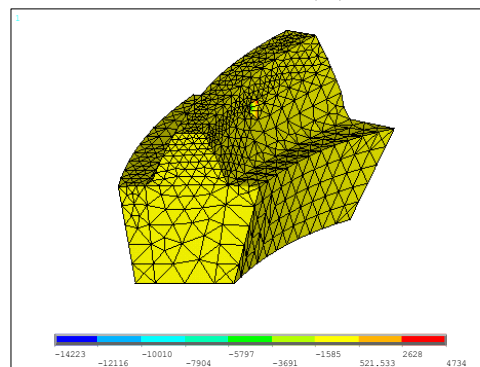
(c)



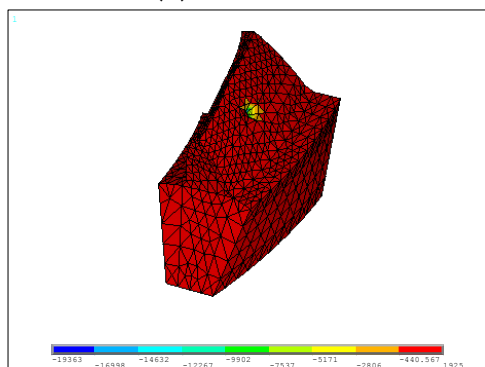
(d)



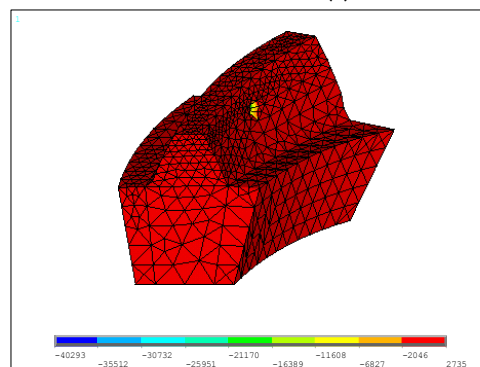
(e)



(f)



(g)

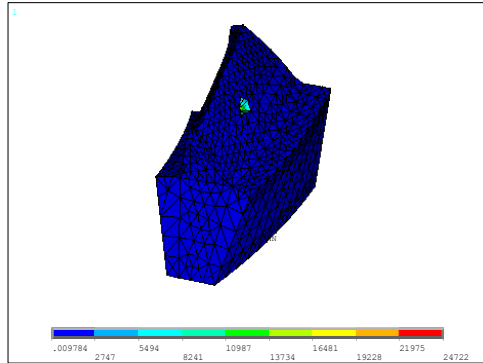


(h)

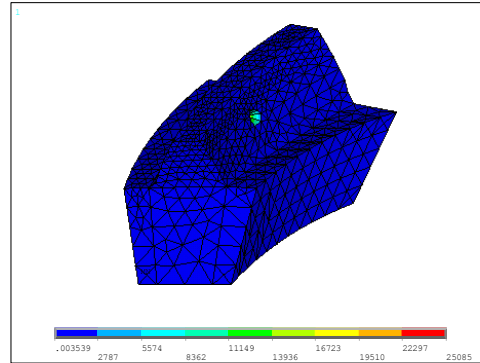
7-6 Désalignement 05

Décalage axial positif maximal du pignon :

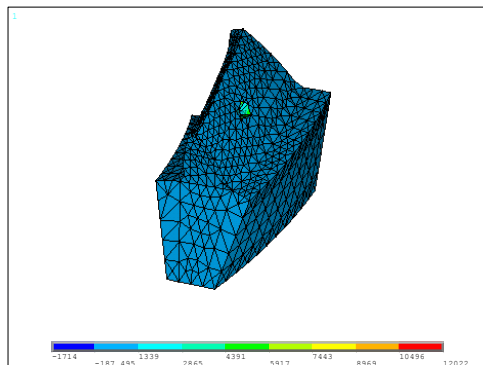
Δy	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0.100 mm	0	0



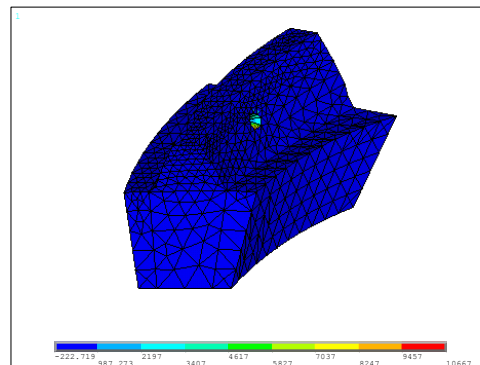
(a)



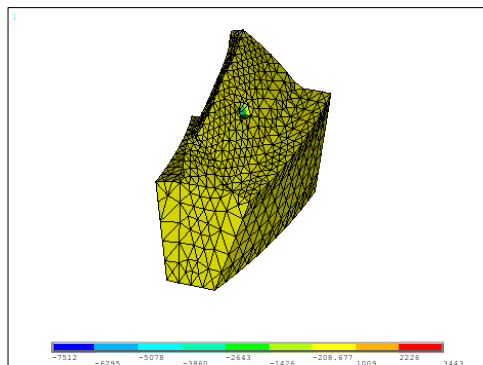
(b)



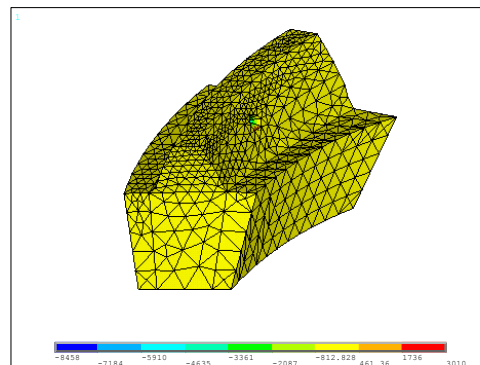
(c)



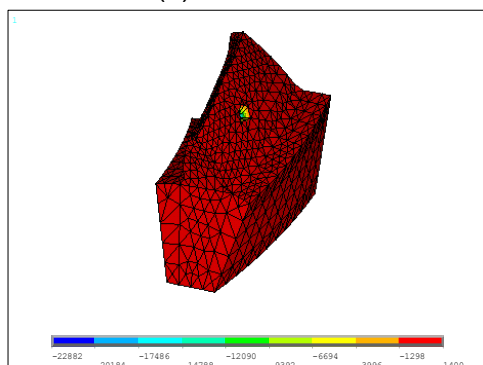
(d)



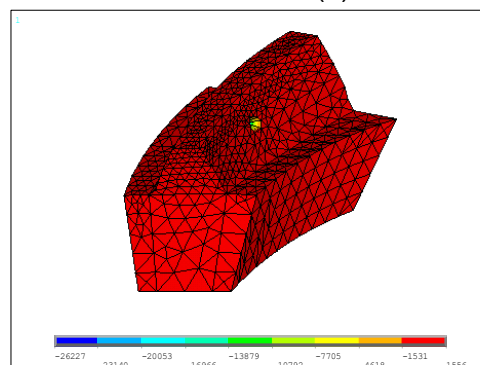
(e)



(f)



(g)

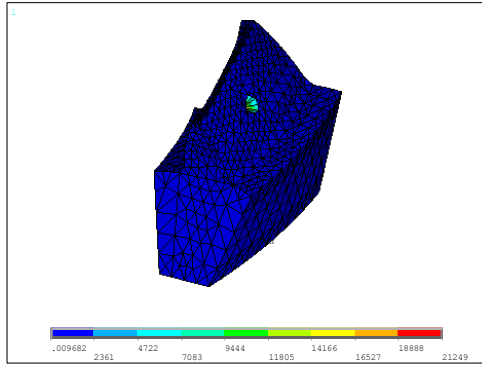


(h)

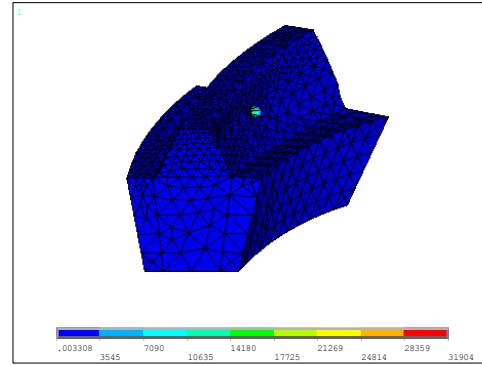
7-7 Désalignement 06

Décalage axial négatif maximal du pignon :

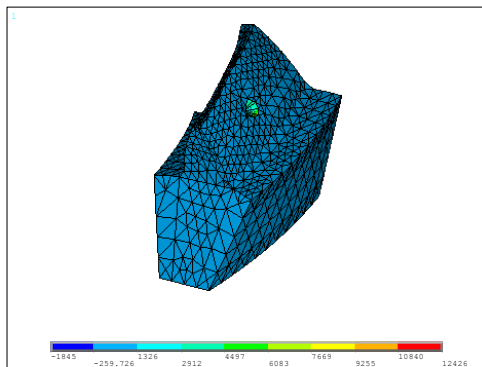
Δy	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	-0.060 mm	0	0



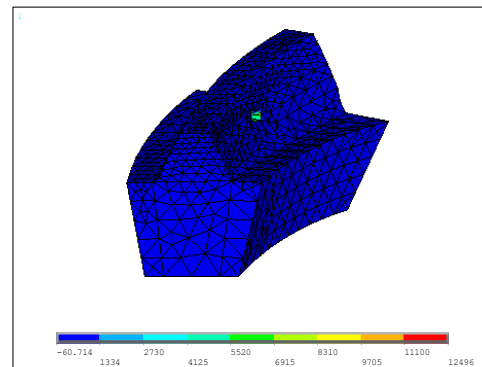
(a)



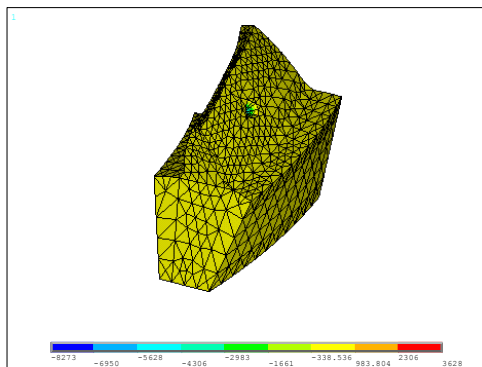
(b)



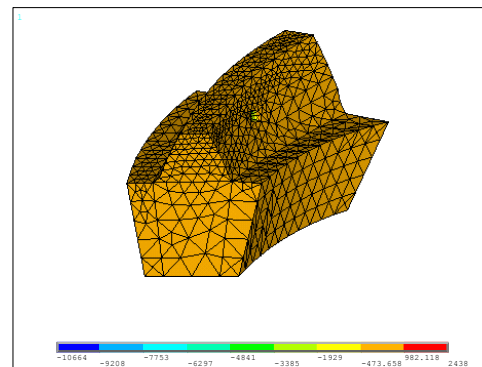
(c)



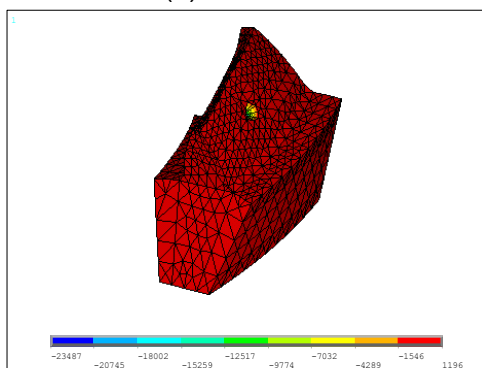
(d)



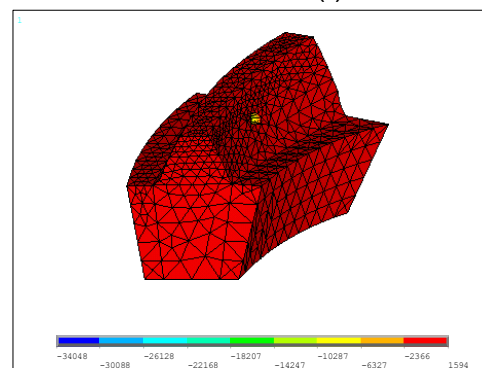
(e)



(f)



(g)

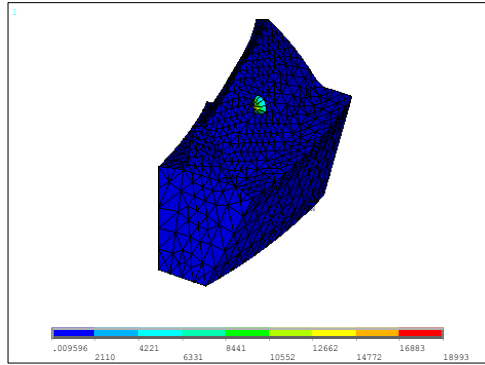


(h)

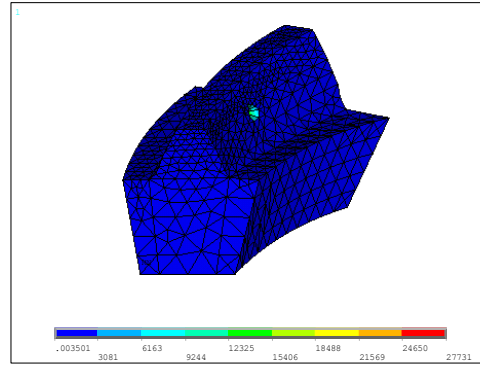
7-8 Désalignement 07

Décalage hypoïde positif maximal :

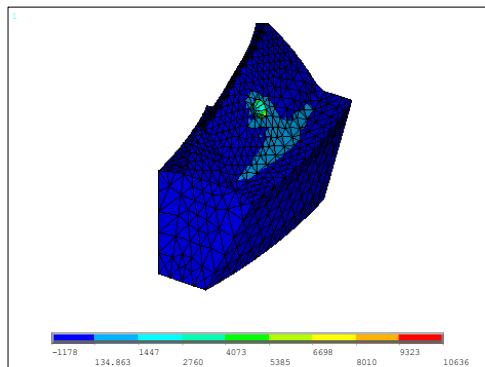
Δy	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0	0	1.00 mm



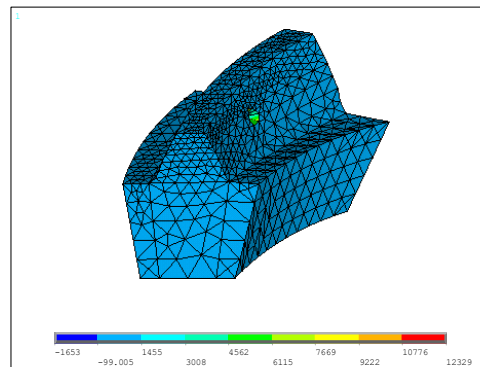
(a)



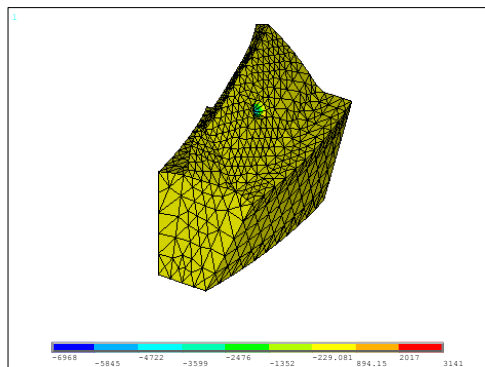
(b)



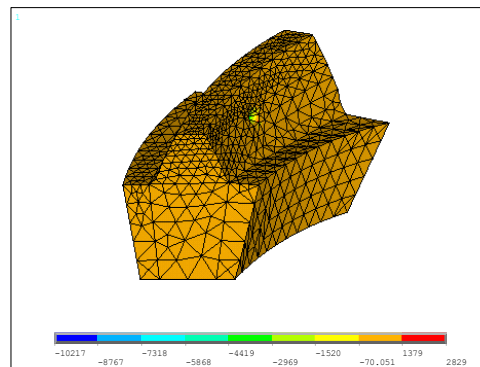
(c)



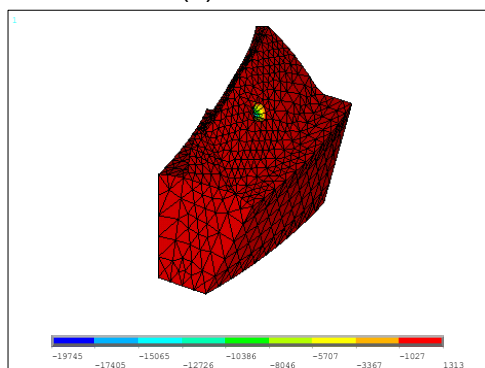
(d)



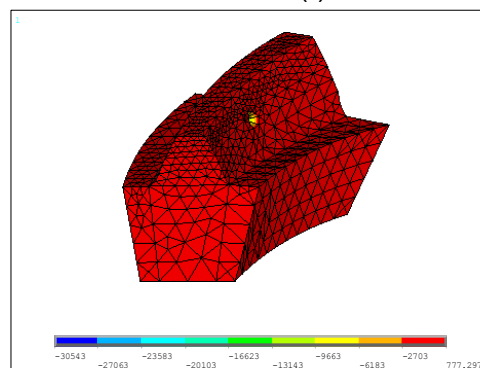
(e)



(f)



(g)

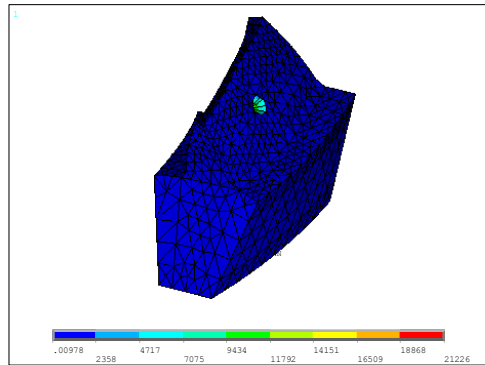


(h)

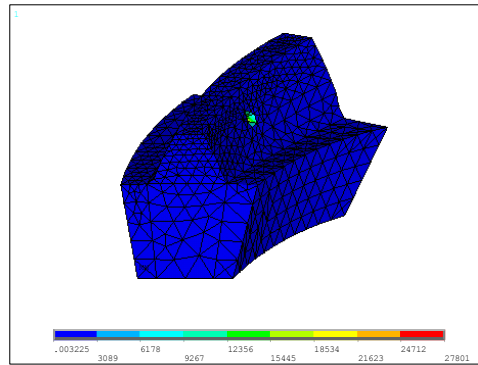
7-9 Désalignement 08

Décalage hypoïde négatif maximal :

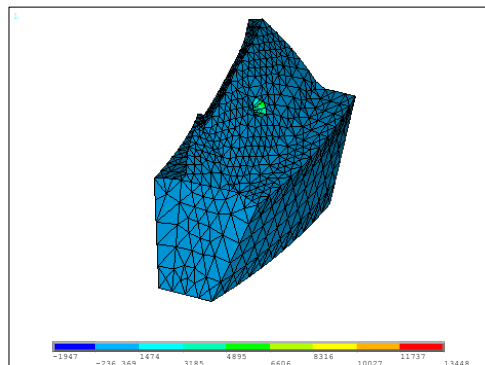
Δy	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
0	0	0	-1.00 mm



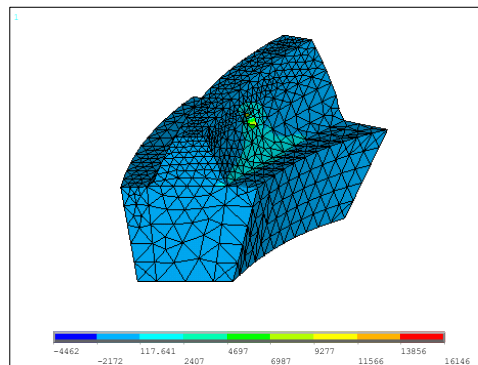
(a)



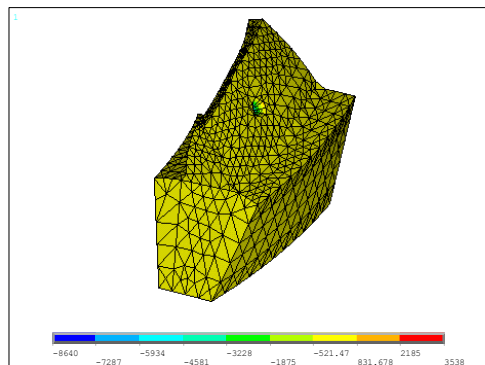
(b)



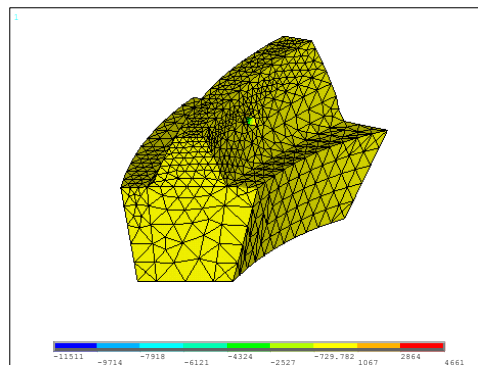
(c)



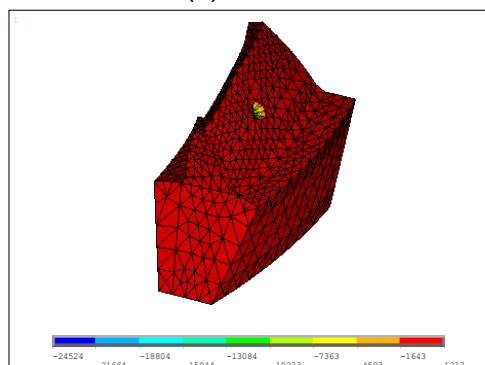
(d)



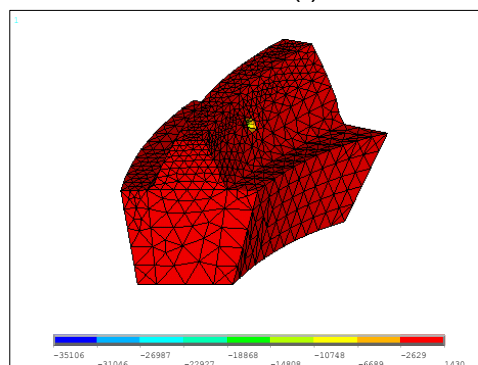
(e)



(f)



(g)

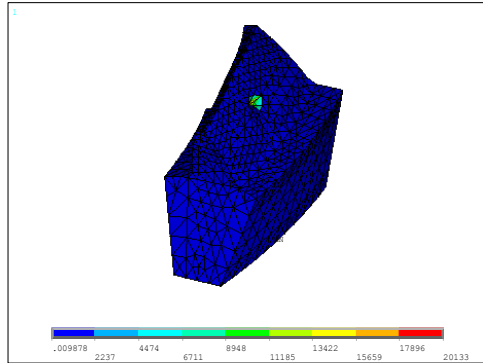


(h)

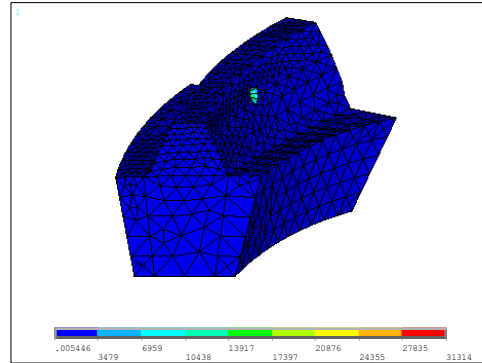
7-10 Désalignement 09

Défauts d'alignement combinés :

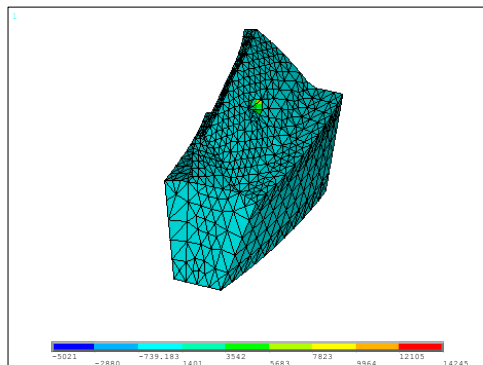
$\Delta\gamma$	ΔA_1	ΔA_2	ΔE
1.00 degré	0.100 mm	0.200 mm	0.100 mm



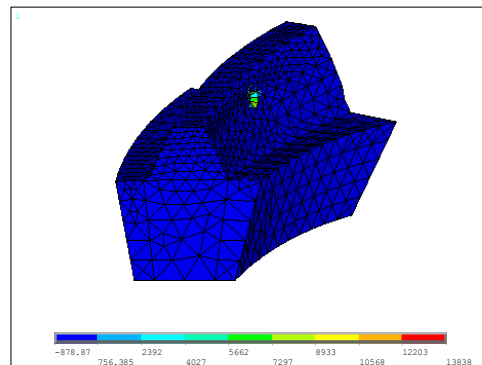
(a)



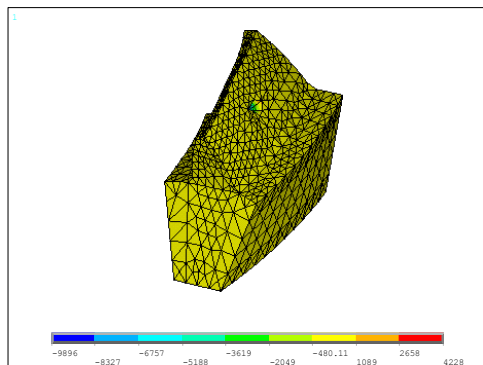
(b)



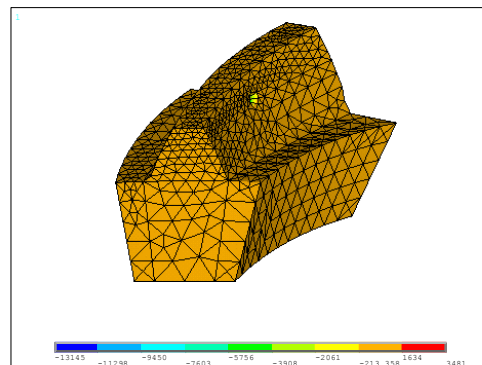
(c)



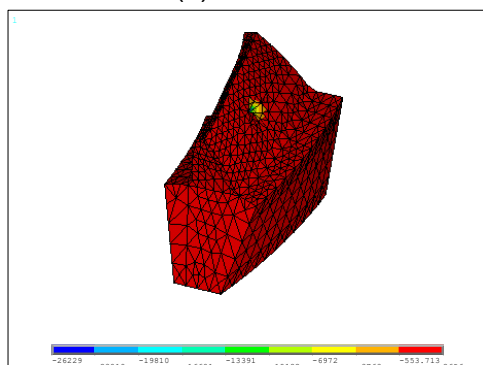
(d)



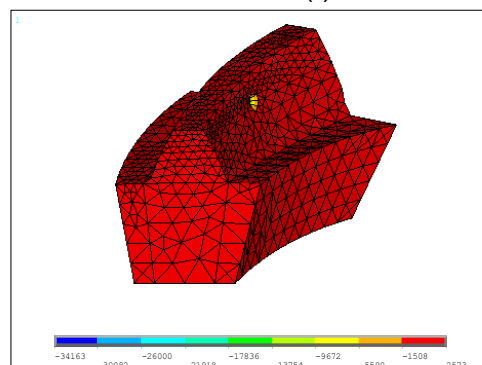
(e)



(f)



(g)



(h)

8 Remarques et conclusions

Les remarques et conclusions pouvant être extraites à partir de ces résultats sont :

- La contrainte est toujours maximale au niveau du point de contact, ceci est dû aux écrasements locaux du maillage résultant de la nature ponctuelle de la force appliquée, le raffinement local du maillage diminue cette zone mais ne l'évitera pas,
- La distribution de contrainte est presque de forme elliptique (figure IV-9), pour tous les cas, autour du point d'application de la force, chose s'expliquant évidemment de la nature de la méthode des éléments finis,

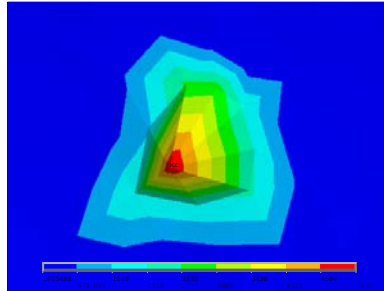


Figure IV-9 Contrainte au point d'application de la force

- Hors du point de contact, la contrainte est plus grande au pied de la dent malgré que si la force appliquée soit faible,
- Pour la majorité des cas traités, la contrainte principale maximale et la contrainte équivalente de Von Misés trouvent leurs valeurs maximales sur la ligne choisie, au dessous de la zone d'application de la force avec une petite déviation vers le petit bout de la denture.

9 Evaluation des contraintes au pied de la denture

Dans les illustrations suivantes, nous représentons les courbes de contraintes équivalentes de Von Misés, les contraintes principales maximales et les intensités de contrainte aux pieds des deux dentures du pignon et de la roue respectivement, et ce en fonction des nœuds de la ligne de pied (ceux situés sur les 12 points géométriques) numérotés de 1 à 12 comme il est montré sur la figure IV-10. Ces résultats sont extraits des configurations précédentes.

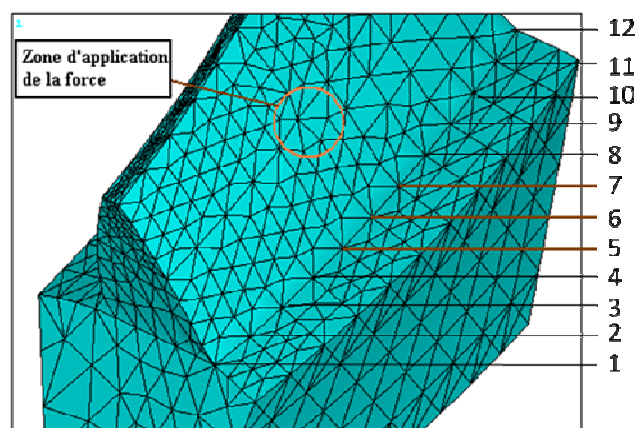


Figure IV-10 Numérotation des nœuds étudiés

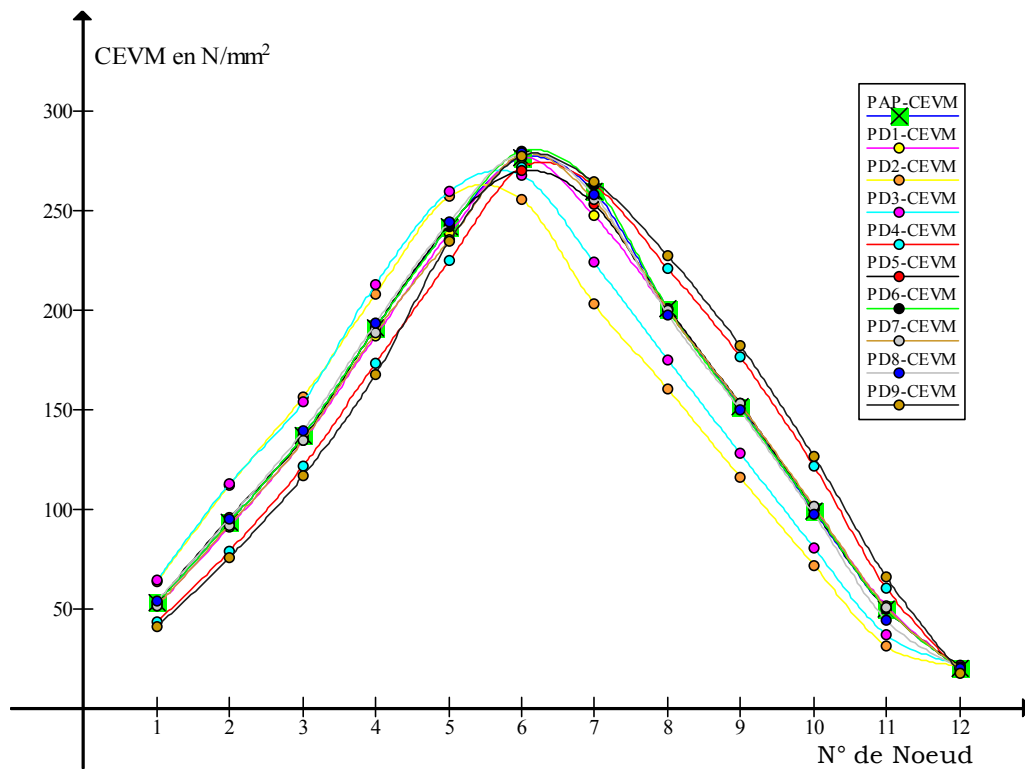


Figure IV-11 Contrainte équivalente de Von Misés au pied de la dent du pignon

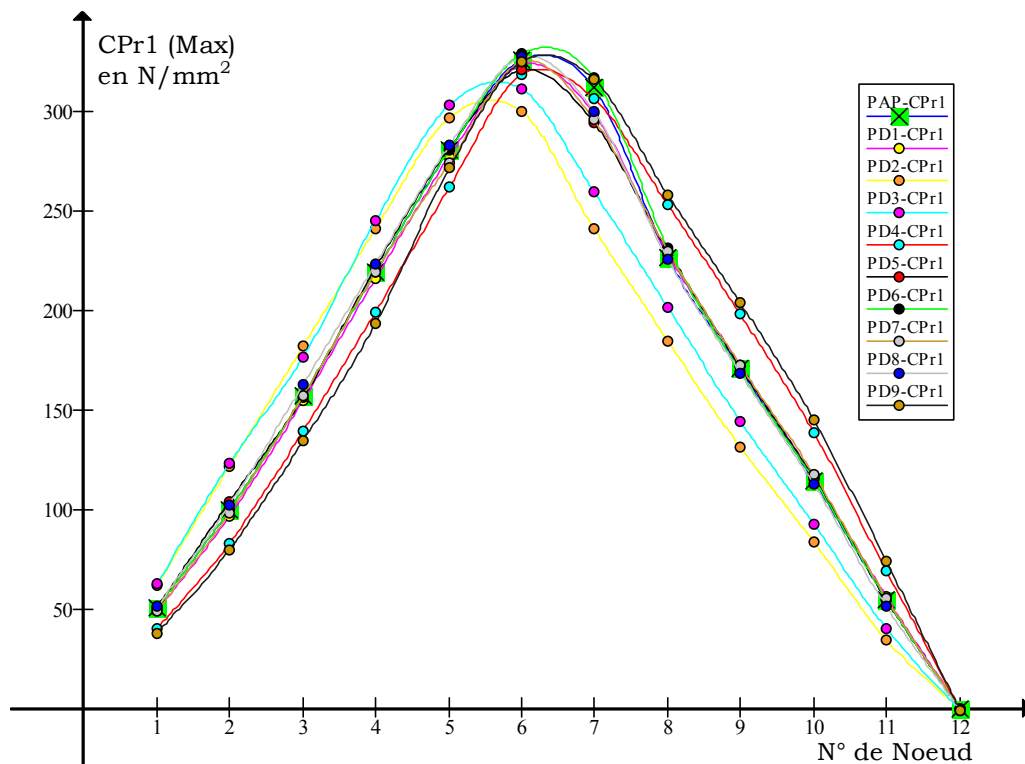


Figure IV-12 Contrainte principale maximale au pied de la dent du pignon

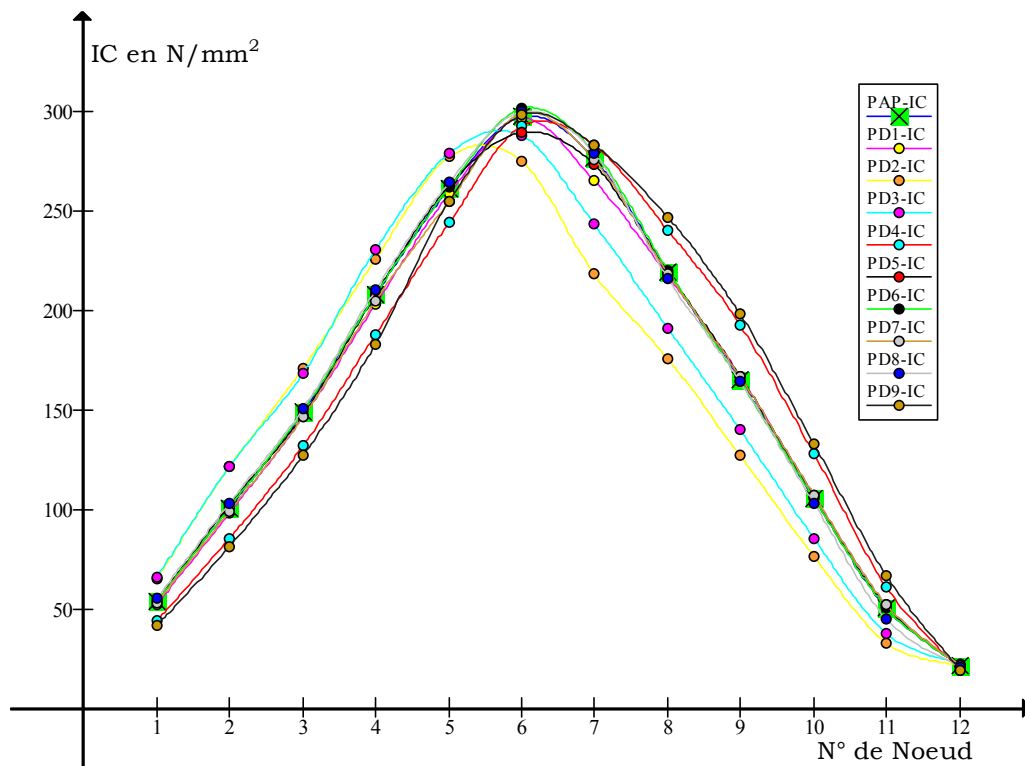


Figure IV-13 Intensité de contrainte au pied de la dent du pignon

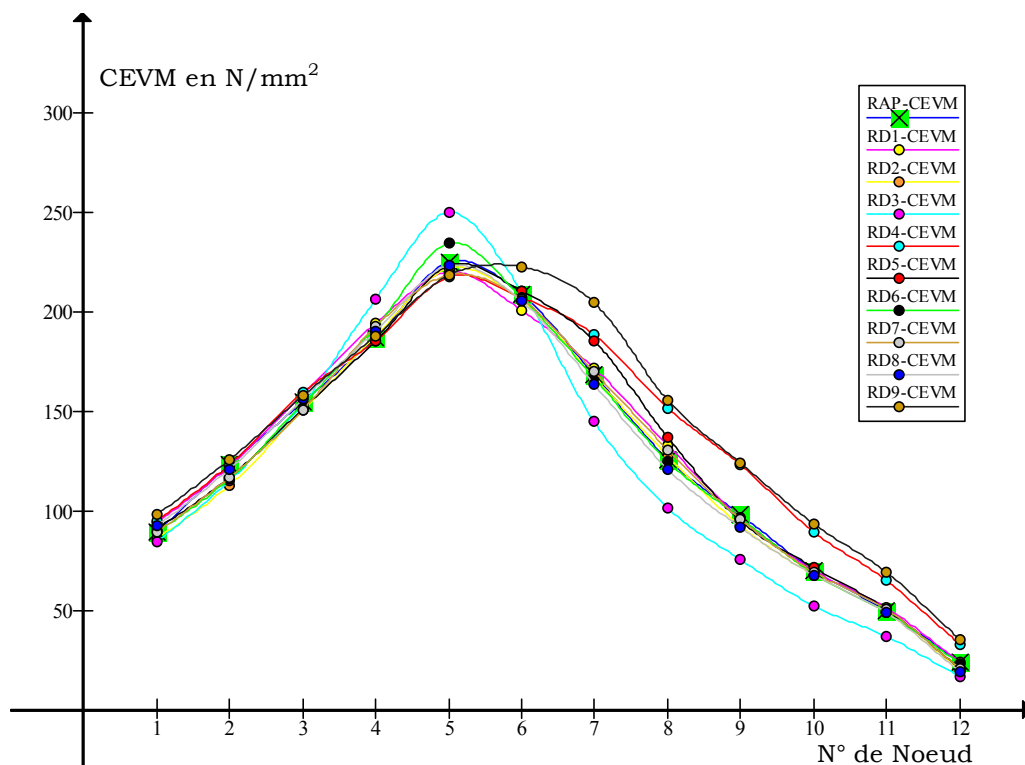


Figure IV-14 Contrainte équivalente de Von Mises au pied de la dent de la roue

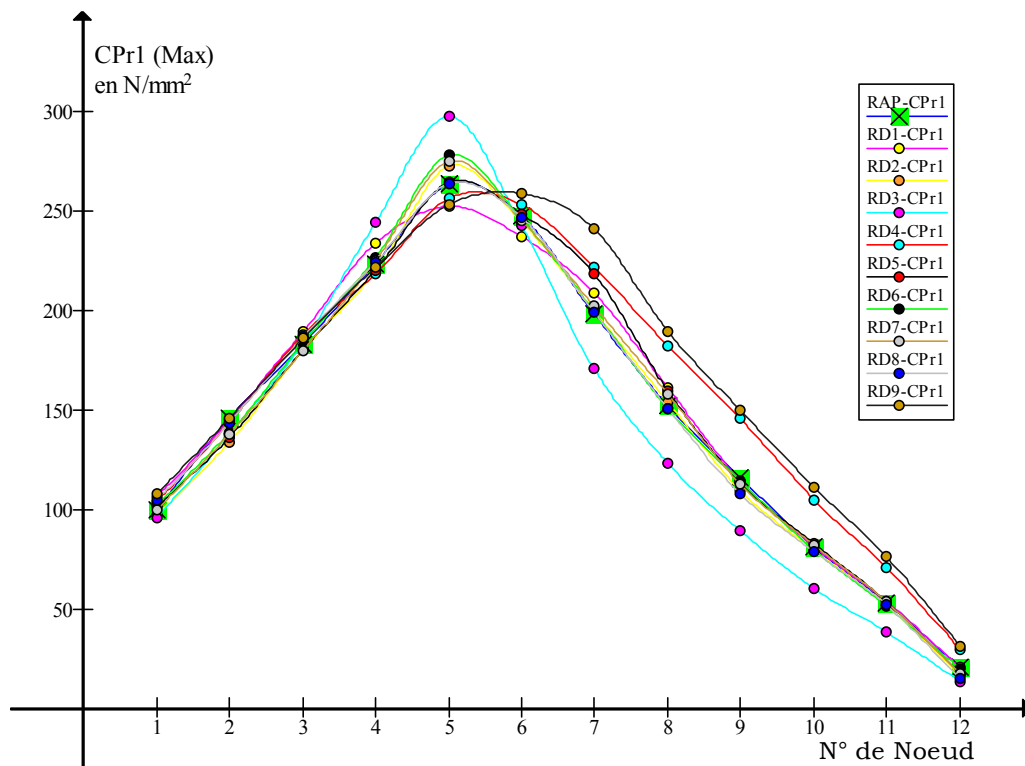


Figure IV-15 Contrainte principale maximale au pied de la dent de la roue

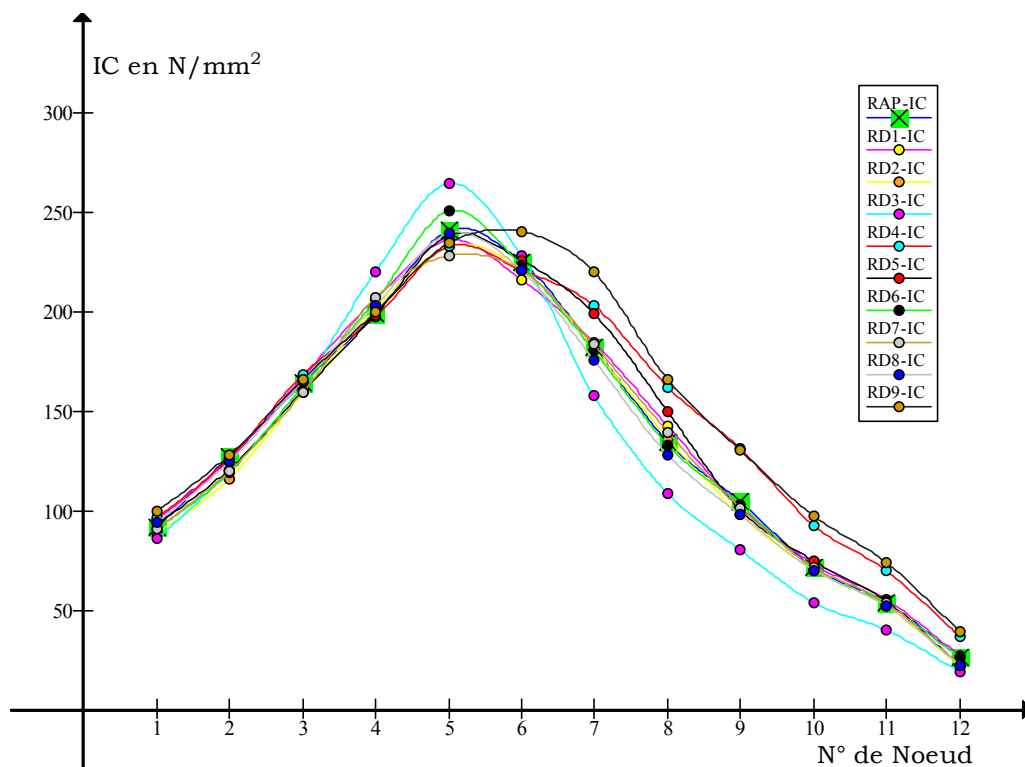


Figure IV-16 Intensité de contrainte au pied de la dent de la roue

9-1 Interprétations

Une première remarque intéressante peut être faite à ce niveau : une bonne symétrie de la répartition des contraintes autour du point situé au dessous de la zone d'application de la force dans le cas du pignon par rapport à celle de la denture de la roue. Cela est dû principalement à la différence d'inclinaison des deux dentures, exprimée par l'angle primitif et l'angle de pied, ce qui fait qu'une même force en trois dimensions donne des répartitions légèrement déviées par rapport au nœud situé au dessous de ce point. Ajoutons à ceci une autre raison plus argumentative est que la force dans le cas de la roue (ou la normale à la surface au point de contact) est orientée légèrement vers le petit bout de la denture, contrairement au cas du pignon où la force est orientée vers le gros bout de la denture.

Il est très clair que pour le deuxième cas de désalignement, la contrainte principale maximale au pied de la dent du pignon est plus petite par rapport à celle du cas parfait et des autres cas et avec une répercussion moins importante sur l'état de contrainte au pied de la dent de la roue. Nous remarquons que la différence de contrainte entre le cas N° 2 et N° 3 (désalignement axial positif et négatif respectivement) quant au pignon (figure IV-17) est très grande par rapport à celle de la roue (figure IV-18). Donc le désalignement axial appliqué à la roue influe plus sur le pignon que sur la roue.

Le désalignement le plus influent sur le pignon est le décalage axial négatif de ce dernier (cas N° 7) malgré que ce défaut est représenté numériquement par la valeur la plus petite de tous les défauts. C'est pour cet aspect que ce type de désalignement n'est pas largement permis sur le couple spiroconique.

Le désalignement le plus influent sur la roue est le désalignement angulaire négatif (cas N° 4). La denture du pignon est plus bombée suivant la hauteur que la denture de la roue, à cause du nombre de dents important de la roue. Donc une valeur de désalignement angulaire donnée est accompagnée d'une augmentation du bras de levier au point de contact, et dans le cas de la roue, supérieure à celle du pignon. L'augmentation du bras de levier entraînera toujours une augmentation de la contrainte au niveau de l'encastrement exactement comme le cas de la théorie des poutres. Ce désalignement représente les valeurs les plus grandes pour les trois types de contraintes représentées ici.

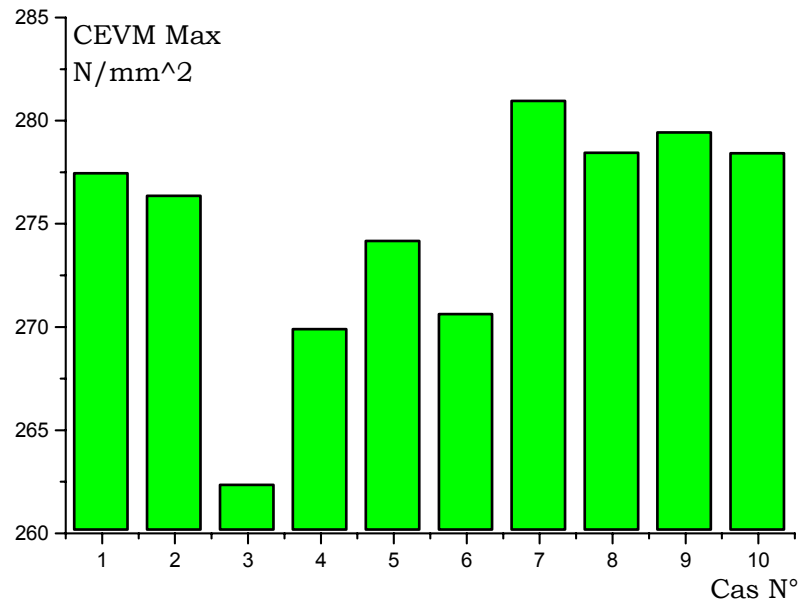


Figure IV-17 Contrainte CEVM maximale au pied de la dent du pignon en fonction du type de désalignement.

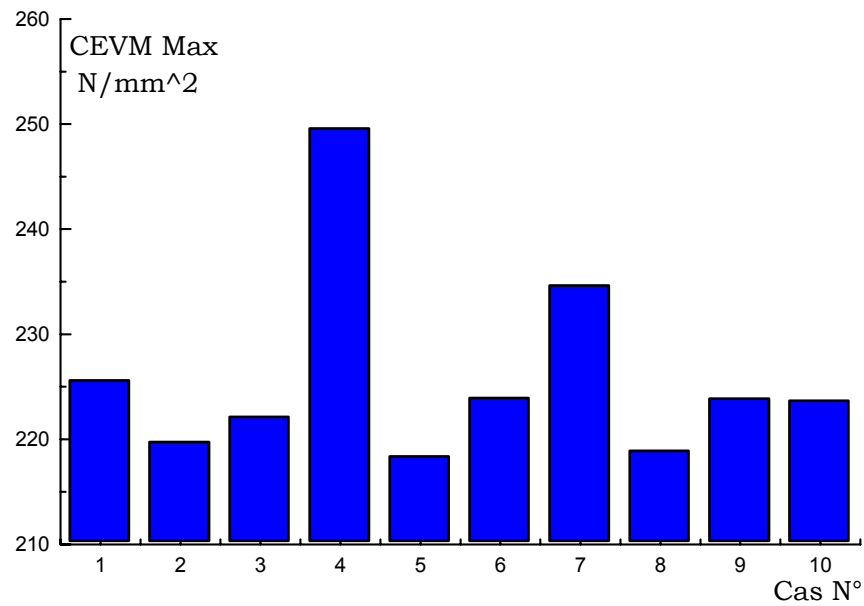


Figure IV-18 Contrainte CEVM maximale au pied de la dent de la roue en fonction du type de désalignement.

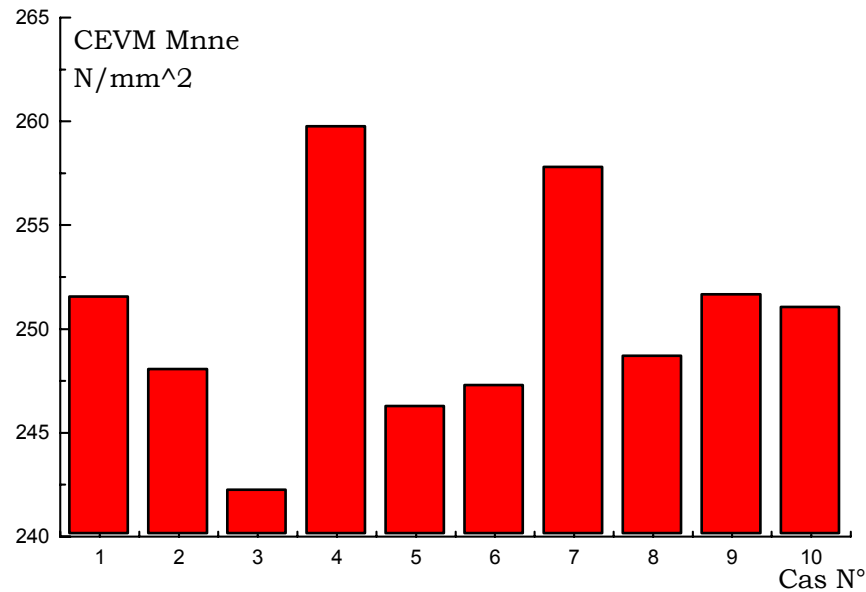


Figure IV-19 Moyennes des CEVM sur le couple pignon-roue en fonction du type de désalignement.

Globalement, le couple est soumis à une contrainte Von Misés très grande dans le cas de désalignement N° 04 (désalignement angulaire négatif) et plus petite dans le cas de désalignement N° 03 (décalage axial négatif de la roue) (figure IV-19).

Toutes les analyses pouvant être faites sur les états de contrainte au niveau du pied de la denture (pignon ou roue) sont relativement acceptables en déformation sur les mêmes nœuds étudiés, les résultats en déformation sont annexés (voir annexe C).

Notons que ces résultats ne peuvent être en aucun cas suffisants pour le choix au profit de l'amélioration et l'optimisation de la forme géométrique de la denture spiroconique. L'analyse représentée peut être très utile avec d'autres investigations, telles que l'analyse des vibrations, erreur de transmission, bruits sonores...etc.

Conclusion

Dans ce chapitre sont représentés les résultats numériques de la géométrie des deux dentures du pignon et de la roue et les états de contraintes principales et de Von Mises, obtenus respectivement par résolution du modèle de simulation exposé en chapitre II et par la méthode des éléments finis par Ansys.

On déduit clairement qu'en statique, les différents cas de désalignement ne causent pas de grands écarts quant à la différence de contrainte par rapport au cas référence (cas parfait). Les lignes spirales de contact (chapitre III) dans ce sens rend moins sensible le couple d'engrenage spiroconique aux désalignements.

Une étude plus complète peut avoir lieu si la zone de contact était considérée de forme ellipsoïde. A ce moment, les paramètres de cette dernière et les orientations des axes de la portée auront une influence primordiale. Mais cette approche présente une difficulté au niveau de l'application de la pression.

Conclusion générale

Les engrenages spiroconiques ont fait objet de plusieurs études durant ces dernières années. L'objectif principal étant l'optimisation de la forme géométrique de la denture par optimisation des paramètres et réglages machine appliqués lors de l'opération de taillage. Ce type d'engrenage est largement utilisé dans les boîtes de vitesse d'hélicoptères et dans les véhicules lourds, ce qui met en enjeu la résistance du couple, la transmission de grandes puissances à des vitesses élevées, la durée de vie, la minimisation des vibrations et des bruit sonores et d'autres phénomènes.

L'étude représentée dans ce mémoire contribue à l'identification et l'évaluation des contraintes dans ce type d'engrenage par application de la méthode des éléments finis, en fonction de plusieurs cas de défauts fonctionnels sur les arbres concourants du couple. Néanmoins, l'étude s'avère insuffisante sans le couplage des autres phénomènes accompagnant cette transmission et concernant les modifications pouvant être prises en compte pour la géométrie, dans le but de l'optimiser. Des codes de calcul puissants sont conçus pour cela, en commençant par l'optimisation de :

- La ligne et la portée de contact,
- L'erreur de transmission.

Ces deux éléments ont constitué longuement les deux piliers de l'optimisation géométrique des engrenages spiroconiques dans les travaux de Litvin et d'autres chercheurs.

Le contact a été déterminé par application de la méthode Tooth Contact Analysis, développée par la firme Gleason, en se limitant à un seul couple de dents en contact. La méthode a permis l'analyse du développement de la ligne de contact lors de la rotation des deux membres de la transmission (pignon et roue).

L'introduction de plusieurs cas de défauts d'alignement dans l'analyse des contraintes par élément finis a permis d'évaluer l'influence de chaque défaut et de déterminer les défauts les plus dangereux sur chacun des deux éléments.

Des futurs travaux objectifs, traitant les engrenages spiroconiques, pouvant être orientés dans ce sens, et peuvent se confronter à plusieurs phénomènes tels que :

- L'étude thermique,
- L'étude du comportement dynamique de la denture et de l'engrenage complet,
- La simulation du contact par éléments finis, la comparaison avec la méthode TCA et la prise en considération de plusieurs dents en contact,

- Enfin, l'analyse expérimentale qui doit toujours accompagner ces méthodes numériques dans le but de combler les insuffisances de ces dernières et d'améliorer et approfondir l'analyse théorique et pratique des engrenages spiroconiques.

Bibliographie

- [1] Georges Henriot, «Engrenages concourants et gauches - Étude géométrique», Techniques de l'Ingénieur, BM 5 622, 2007,
- [2] Galina I. Sheveleva, Andrey E. Volkov , Vladimir I. Medvedev, «Algorithms for analysis of meshing and contact of spiral bevel gears», Mechanism and Machine Theory 42 (2007) 198–215,
- [3] X.-M. Cao, Z.-D. Fang, J.-L. Zhang, «Function-oriented active tooth surface design of spiral bevel gears», Northwestern Polytechnical University Xi'an, China, 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June 18-21, 2007,
- [4] T.J. “Buzz” Maiuri, «Spiral bevel and hypoid gear cutting technology update», Gear Technology, July 2007,
- [5] Francesca Di Puccio, Marco Gabiccini, Massimo Guiggiani, «Alternative formulation of the theory of gearing», Mechanism and Machine Theory 40 (2005) 613–637,
- [6] Faydor L. Litvin, Daniele Vecchiato, Eugene Gurovich, Alfonso Fuentes, Ignacio Gonzalez-Perez, Kenichi Hayasaka² and Kenji Yukishima, «Computerized developments in design, generation, simulation of meshing, and stress analysis of gear drives», Meccanica (2005) 40: 291–324,
- [7] Gouri Dhatt, Gilbert Touzot et Emmanuel Lefrançois, «Méthode des éléments finis», Edition Lavoisier, hermes science, 2005,
- [8] Márk Lelkes, János Márialigeti et Daniel Play, «Influence des déplacements axiaux sur les caractéristiques du contact des engrenages spiro-coniques Klingelinberg», *Mécanique & Industrie* 5, 289-304 (2004),
- [9] Faydor L. Litvin, Alfonso Fuentes, Baxter R. Mullins and Ron Woods, «Computerized design, generation, simulation of meshing and contact, and stress analysis of Formate cut spiral bevel gear drives», NASA/CR-2003-212336,
- [10] Ani Ural, Paul A. Wawrznynek, and Anthpny R. Ingraffea, «Simulating fatigue crack growth in spiral bevel gears», Cornell University, Ithaca, New York, NASA/CR-2003-212529, ARL-CR-0531, August 2003,
- [11] S.-H. Suh, D.-H. Jung, E.-S. Lee and S.-W. Lee, «Modelling, implementation, and manufacturing of spiral bevel gears with crown», International Journal of Advanced Manufacturing Technology, (2003) 21:775–786,
- [12] Márk Lelkes, Daniel Play and János Marialigeti, «Cutting parameters definition for kinematic optimisation of spiral bevel gears», Periodica polytechnica ser. transp. eng. vol. 30, no. 1–2, pp. 93–109 (2002),
- [13] Márk Lelkes, «Définition des engrenages Klingelinberg », Thèse de Doctorat soutenue en 2002 à l'INSA de Lyon, France,

- [14] Faydor L. Litvin, Alfonso Fuentes, Qi Fan and Robert F. Handschuh, «Computerized design, simulation of meshing, and contact and stress analysis of face-milled Formate generated spiral bevel gear», *Mechanism and Machine Theory* 37 (2002) 441-459,
- [15] John Argyris, Alfonso Fuentes and Faydor L. Litvin, «Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears», *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1057-1095, 2002,
- [16] Faydor L. Litvin, Alfonso Fuentes, Baxter R. Mullins and Ron Woods, «Design and stress analysis of low-noise adjusted bearing contact spiral bevel gears», NASA/CR-2002-211344,
- [17] Hermann J. Stadtfeld, «The basics of spiral bevel gears», *Gear Technology*, February 2001,
- [18] Robert F Handschuh, «Testing of Face-Milled spiral bevel gears at high-speed and load», NASA/TM-2001-210743, ARL-TR-2381, March 2001,
- [19] Faydor L. Litvin, Qi Fan and Alfonso Fuentes, «Computerized design, generation, and simulation of meshing, and contact of face-milled Formate cut spiral bevel gear», NASA/CR-2001-210894, ARL-CR-467, May 2001,
- [20] Lisa E. Spievak, Paul A. Wawrzynek, and Anthpny R. Ingraffea, «Simulating fatigue crack growth in spiral bevel gears», Cornell University, Ithaca, New York, NASA/CR-2000-210062, ARL-CR-451, May 2000,
- [21] Faydor L. Litvin, M. De Donno, A. Peng, A. Vorontsov and Robert F. handschuh, «Enhanced computer aided simulation of meshing and contact with application for spiral bevel gears drives», NASA/TM-1999-209438, ARL-TR-2111,
- [22] Bey Mohamed, «Modélisation statique des engrenages spiro-coniques par la méthode des éléments finis», Thèse de Magister soutenue le 02 Février 1999 à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie,
- [23] Henriot Georges, Octure Michel, Allard Maurice, «Engrenages: conception, fabrication et mise en œuvre», 7^{ème} édition, Dunod, Paris, France, 1999,
- [24] Robert F. Handschuh, «Recent advances in the analysis of spiral bevel gears», NASA/TM-107391, ARL-TR-1316, July 1997,
- [25] Faydor L. Litvin and X. Zhao, «Computerized deign and analysis of Face-Milled, uniform height, low-noise spiral bevel gear drives», NASA/CR-4704, ARL-CR-287, 1996,
- [26] George D. Bibel and Robert F. Handschuh, «Meshing of a spiral bevel gearset with 3D finite element analysis», NASA/ARL-TR-1224, 1996,
- [27] Robert F. Handschuh, «Thermal behavior of spiral bevel gears», NASA TM 106518, ARL/TR-403, January 1995,

- [28] Robert F. Handschuh and Thomas P.Kicher, «A method of thermal analysis of spiral bevel gears», NASA/TM-106612, ARL-TR-457,1994,
- [29] A. Kumar and G. Bibel, «A procedure for 3-D contact stress analysis of spiral bevel gears», NASA/CR-194472, ARL-CR-72,1994,
- [30] George D. Bibel, Karuna Tiku and Ashok Kumar, «Prediction of contact path and load sharing in spiral bevel gears», NASA/CR-195305, ARL-CR-146, 1994,
- [31] Faydor L. Litvin, Yi Zhang and Robert F. Handschuh, «Computerized design of low-noise Face-Milled spiral bevel gears», NASA/TM-106713/ARL-TR-306, 1994,
- [32] Bibel G.D, Reddy S and Kumar A, «Manual for automatic generation of finite element models of spiral bevel gears in mesh», NASA CR-191009, ARL-CR-121, 1994,
- [33] B.Subba Rao, M.S.Shunmugam and V.Jayaprakash, «Mathematical model for spiral bevel gears», Journal of Materials Processing Technology, 44 (1994) 327-334,
- [34] Hermann J. Stadtfeld, «Handbook of bevel and hypoid gears», Rochester Institute Technology, 1st Edition, 1993,
- [35] Bibel. G.D, Kumar. A, Reddy. S and Handschuh. R, «Contact stress analysis of spiral bevel gears using nonlinear finite element analysis», NASA TM-106176, ARL-TR-158, May 1993,
- [36] David G. Lewicki, Robert F Handschuh, Zachary S. Henry and Faydor L. Litvin «Low-noise, high-strength, spiral-bevel gears for helicopter transmissions», NASA/Technical Memorandum 106080-AIAA-93-2149, Army Research Laboratory/Memorandum Report ARL-MR-71, June 1993,
- [37] Robert F. handschuh and Faydor L. Litvin, «A method for determining spiral bevel gear tooth geometry for finite element analysis», NASA TP-3096, AVSCOM-TR-91-C-020, 1991,
- [38] Robert F. Handschuh and George D. Bibel, «Comparison of experimental and analytical tooth bending stress of aerospace spiral bevel gears», NASA/TM—1999-208903, ARL-TR-1891, 1991,
- [39] Faydor L. Litvin and Yi Zhang, «Local synthesis and tooth contact analysis of Face-Milled spiral bevel gears», NASA/CR-4342, AVSCOM TR-90-C-02, 1991,
- [40] Fong Z.H and Tsay C.B, «A mathematical model for the tooth geometry of circular-cut spiral bevel gears», ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 113, pp. 174-181, June 1991,
- [41] Handschuh. R.F and Bibel. R.C, «Recent manufacturing advances for spiral bevel gears», SAE 912229, September 1991,

- [42] Fong Z.H and Tsay C. B, «A study on the tooth geometry and cutting machine mechanisms of spiral bevel gears», ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 113, pp. 346-352, September 1991,
- [43] Robert F. handschuh and Faydor L. Litvin, «How to determine spiral bevel gear tooth geometry for finite element method analysis», NASA/TM-105150, AVSCOM/TR-91-C-018, November 1991,
- [44] Fong Z.H and Tsay C.B, «Tooth contact analysis of spiral bevel gears», Journal of Chinese Society of Mechanical Engineers (CSME), vol.11, No.6, pp. 538-544, December 1990,
- [45] Faydor L. Litvin, «Theory of Gearing», NASA-Reference Publication, 1212 AVSCOM-Technical Report 88-C-035, The University of Illinois at Chicago, Department of Mechanical Engineering, Chicago, Illinois, 1989,
- [46] M. Savage, P.C. Altidis, D.G. Lewicki, J.J. Coy and F.L. Litvin, «Tooth Contact Shift in Loaded Spiral Bevel Gears», NASA/TM 101438, AVSCOM T R 87-C-36, Prepared for the Fifth International Power Transmission and Gearing Conference sponsored by the American Society of Mechanical Engineers, Chicago, Illinois, April 25-27, 1989,
- [47] Gleason Works, «Theory of 6-axis CNC generation of spiral bevel and hypoid gears», Publication ETI 4208/ August 1989, Rochester, N.Y, U.S.A,
- [48] Daniel Madroskey, «Conception des engrenages spiro-coniques, géométrie et simulation du comportement », Thèse de Doctorat soutenue le 3 Juillet 1987 à l'INSA de Lyon, France,
- [49] Faydor L. Litvin, Wei-Jiung Tsung and Hong-Tao Lee, «Generation of spiral bevel gears with conjugate tooth surfaces and tooth contact analysis», NASA/AVSCOM/TR-87-C-22, August 1987,
- [50] John J. Coy, Dennis P. Townsend and Erwin V. Zaretsky, «Gearing», NASA/AVSCOM/TR-84-C-15, 1985,
- [51] Cloutier L and Gosselin C, «Kinematic analysis of bevel gears», ASME Paper 84-DET-177, October 1984,
- [52] Georges Henriot, «Traité théorique et pratique des engrenages-Tome 2», 5^{ème} édition, Dunod, Paris, France, 1983,
- [53] Gleason Works, «Spiral bevel gear system», Publication SD3006/April 1982, Rochester, N.Y, U.S.A,
- [54] Gleason Works, «Understanding tooth contact analysis», Publication SD 3139B, March 1981, Rochester, N.Y, U.S.A,
- [55] Krenzer T.**J**, «Tooth contact analysis of spiral bevel and hypoid gears under load», SAE 810688, April 1981,

[56] Chaniac J, «Comment augmenter les performances des engrenages spiro-coniques et hypoïdes», Congrès Mondial des Engrenages, Paris, 22-24 Juin 1977, pp. 1277-1290,

[57] Chabert G, Delfosse M et Mathis R, «Evaluation de contraintes et de la flexion des dents d'engrenages cylindriques droits sous charge», les mémoires techniques du CETIM n° 15, Edition Artistique Imprimeur, Paris, 1974,

[58] Roland Mathis, «Etude des contraintes et déformations dans les dentures d'engrenages», les mémoires techniques du CETIM n° 18, Edition Artistique Imprimeur, Paris, 1973.

Alignement parfait					
Pignon			Roue		
X ₁	Y ₁	Z ₁	X ₂	Y ₂	Z ₂
33.970415	1.511384	44.264891	44.551475	5.396118	33.191872
33.206464	2.143910	43.921980	44.163824	4.917800	32.584929
32.438336	2.736016	43.563973	43.765289	4.446573	31.974627
31.667728	3.288323	43.191007	43.355867	3.982789	31.361183
30.896318	3.801494	42.803192	42.935574	3.526804	30.744814
30.125731	4.276253	42.400693	42.504433	3.078982	30.125740
29.357521	4.713393	41.983890	42.062423	2.639653	29.504125
28.593155	5.113779	41.552270	41.609658	2.209232	28.880239
27.834089	5.478300	41.106654	41.146143	1.788062	28.254249
27.081637	5.807934	40.646954	40.671960	1.376527	27.626372
26.337063	6.103687	40.173327	40.187238	0.975034	26.996854
25.601619	6.366585	39.686004	39.692024	0.583941	26.365858
24.876416	6.597720	39.185101	39.186443	0.203645	25.733604
24.162523	6.798202	38.670832	38.670673	-0.165440	25.100340
23.460896	6.969181	38.143327	38.144840	-0.522935	24.466253
22.772495	7.111808	37.602837	37.609084	-0.868451	23.831538
22.098124	7.227276	37.049504	37.063592	-1.201585	23.196418
21.438544	7.316782	36.483507	36.508538	-1.521949	22.561081
20.794465	7.381531	35.905075	35.944217	-1.829118	21.925803
20.166500	7.422740	35.314402	35.370757	-2.122724	21.290728

Désalignement 01					
Pignon			Roue		
X ₁	Y ₁	Z ₁	X ₂	Y ₂	Z ₂
34.053663	1.439502	44.334295	44.616724	5.349790	33.086335
33.290873	2.076010	43.991599	44.229982	4.869659	32.477971
32.523758	2.672069	43.633884	43.832312	4.396569	31.866266
31.754014	3.228304	43.261184	43.423773	3.930914	31.251486
30.983365	3.745340	42.873737	43.004320	3.473003	30.633793
30.213411	4.223922	42.471682	42.573980	3.023201	30.013402
29.445682	4.664880	42.055106	42.132792	2.581874	29.390529
28.681669	5.068995	41.624194	41.680814	2.149396	28.765387
27.922817	5.437224	41.179120	41.218113	1.726142	28.138190
27.104370	5.770523	40.720003	40.744741	1.312475	27.509127
26.425846	6.069873	40.247074	40.260794	0.908782	26.878416
25.690252	6.336318	39.760489	39.729356	0.553488	26.301515
24.964781	6.570942	39.260413	39.261616	0.132850	25.612869
24.250487	6.774856	38.747013	38.746653	-0.238604	24.978468
23.548351	6.949199	38.220462	38.221628	-0.598537	24.343249
22.859307	7.095128	37.680975	37.686679	-0.946568	23.707401
22.184208	7.213821	37.128777	37.142030	-1.282286	23.071167
21.523793	7.306479	36.564011	36.587888	-1.605297	22.434765
20.878747	7.374306	35.986865	36.024441	-1.915222	21.798381
20.249707	7.418511	35.397572	35.451893	-2.211679	21.162204

Désalignement 02					
Pignon			Roue		
X ₁	Y ₁	Z ₁	X ₂	Y ₂	Z ₂
33.906852	1.565875	44.211850	44.501834	5.429454	33.269826
33.142030	2.195365	43.868736	44.113447	4.952509	32.663969
32.373128	2.784467	43.510507	43.714209	4.482694	32.054740
31.602857	3.333793	43.137287	43.304091	4.020338	31.442329
30.829892	3.844008	42.749184	42.883102	3.565802	30.826959
30.058856	4.315838	42.346364	42.451264	3.119452	30.208850
29.290282	4.750092	41.928963	42.008618	2.681660	29.588222
28.525669	5.147615	41.497156	41.555182	2.252783	28.965271
27.766427	5.509323	41.051083	41.090991	1.833186	28.340190
27.170437	5.770523	40.720003	40.616157	1.423277	27.713228
26.269354	6.129186	40.116719	40.130780	1.023446	27.084601
25.534041	6.389379	39.628812	39.634901	0.634054	26.454483
24.809035	6.617862	39.127249	39.128683	0.255518	25.823118
24.095135	6.815735	38.612277	38.612199	-0.111793	25.190675
23.394202	6.984149	38.084018	38.085674	-0.467441	24.557433
22.706264	7.124267	37.542688	37.549217	-0.811057	23.923555
22.032453	7.237276	36.988466	37.003017	-1.142230	23.289267
21.373501	7.324381	36.421493	36.447244	-1.460565	22.654767
20.730145	7.386785	35.842032	35.882124	-1.765659	22.020274
20.102946	7.425711	35.250193	35.307892	-2.057098	21.386021

Désalignement 03					
Pignon			Roue		
X ₁	Y ₁	Z ₁	X ₂	Y ₂	Z ₂
33.392329	1.994524	43.920306	43.724718	5.221280	33.300236
32.625057	2.596392	43.568150	43.326781	4.765215	32.701714
31.854844	3.158341	43.201001	42.918872	4.316417	32.099391
31.083370	3.681018	42.819750	42.500985	3.875199	31.493487
30.312286	4.165114	42.422279	42.073125	3.441881	30.884221
29.543142	4.611415	42.010993	41.635311	3.016793	30.271814
28.777424	5.020762	41.585256	41.187574	2.600268	29.656485
28.016609	5.394021	41.145284	40.729894	2.192608	29.038401
27.262067	5.732135	40.691213	40.262391	1.794197	28.417834
26.515065	6.036106	40.223152	39.785072	1.405350	27.794953
25.776862	6.303949	39.741341	39.298053	1.026442	27.170002
25.048599	6.545741	39.245886	38.801399	0.657814	26.543176
24.331368	6.753580	38.736997	38.295190	0.299816	25.914668
23.626197	6.931594	38.214879	37.779617	-0.047154	25.284755
22.933969	7.080952	37.679622	37.254723	-0.382772	24.653573
22.255590	7.202822	37.131479	36.720731	-0.706636	24.021400
21.591813	7.298402	36.570594	36.177744	-1.018400	23.388406
20.943400	7.368892	35.997227	35.625950	-1.317690	22.754806
20.310935	7.415514	35.411489	35.065547	-1.604127	22.120832
19.695008	7.439480	34.813608	34.496756	-1.877337	21.486702

Désalignement 04					
Pignon			Roue		
X ₁	Y ₁	Z ₁	X ₂	Y ₂	Z ₂
34.514456	1.032139	44.596210	45.384255	5.531270	33.027419
33.754723	1.693863	44.262001	45.005204	5.030653	32.412961
32.989587	2.314762	43.912574	44.614375	4.537021	31.795571
32.220796	2.895405	43.548056	44.211773	4.050762	31.175467
31.450094	3.436392	43.168645	43.797389	3.572246	30.552838
30.679087	3.938452	42.774388	43.371256	3.101873	29.927901
29.909421	4.402307	42.365536	42.933426	2.640048	29.300871
29.142574	4.828808	41.942145	42.483964	2.187178	28.671964
28.380067	5.218799	41.504474	42.022918	1.743658	28.041371
27.623237	5.573238	41.052597	41.550384	1.309904	27.409307
26.873428	5.893091	40.586698	41.066440	0.886318	26.775965
26.121905	6.179374	40.106977	40.571214	0.473324	26.141559
25.399845	6.433146	39.613595	40.064888	0.071361	25.506328
24.678321	6.655514	39.106679	39.547547	-0.319173	24.870447
23.968442	6.847577	38.586509	39.019376	-0.697856	24.234120
23.271078	7.010511	38.053152	38.480562	-1.064255	23.597576
22.587189	7.145468	37.506899	37.931323	-1.417949	22.961023
21.917531	7.253648	36.947851	37.371845	-1.758520	22.324659
21.262884	7.336245	36.376280	36.802379	-2.085548	21.688696
20.623885	7.394473	35.792330	36.223145	-2.398617	21.053334

Désalignement 05					
Pignon			Roue		
X ₁	Y ₁	Z ₁	X ₂	Y ₂	Z ₂
33.992322	1.492777	44.235703	44.615359	5.429840	33.216689
33.228632	2.126386	43.893915	44.229592	4.950075	32.609310
32.460671	2.719603	43.537014	43.832913	4.477326	31.998557
31.690182	3.273010	43.165156	43.425350	4.011968	31.384673
30.918852	3.787261	42.778500	43.006852	3.554313	30.767827
30.148263	4.263105	42.377132	42.577502	3.104770	30.148286
29.380036	4.701295	41.961294	42.137277	2.663666	29.526218
28.615585	5.102724	41.531059	41.686227	2.231378	28.901840
27.856381	5.468270	41.086636	41.224418	1.808286	28.275371
27.103762	5.798898	40.628177	40.751929	1.394775	27.647027
26.358981	6.095619	40.155792	40.268857	0.991235	27.010290
25.623277	6.359464	39.669723	39.775277	0.598039	26.385567
24.897788	6.591513	39.170124	39.271317	0.215583	25.752860
24.183567	6.792881	38.657165	38.757083	-0.155752	25.119100
23.481592	6.964710	38.131019	38.232766	-0.515551	24.484531
22.792802	7.108158	37.591895	37.698505	-0.863429	23.849346
22.118004	7.224414	37.039931	37.154487	-1.198985	23.213766
21.458007	7.314667	36.475397	36.600921	-1.521820	22.578007
20.813449	7.380134	35.898395	36.037952	-1.831554	21.942241
20.184994	7.422023	35.309197	35.465895	-2.127769	21.306735

Désalignement 06					
Pignon			Roue		
X ₁	Y ₁	Z ₁	X ₂	Y ₂	Z ₂
33.957215	1.522555	44.282344	44.513119	5.375916	33.176847
33.193135	2.154407	43.938803	44.124319	4.898455	32.570253
32.424882	2.745864	43.580131	43.724680	4.428152	31.960232
31.654200	3.297513	43.206481	43.314177	3.965335	31.347077
30.882750	3.810029	42.817975	42.892788	3.510340	30.730981
30.112148	4.284145	42.414788	42.460542	3.063531	30.112161
29.343969	4.720643	41.997081	42.017479	2.625281	29.490834
28.579657	5.120401	41.564959	41.563653	2.195963	28.867219
27.820656	5.484316	41.118597	41.099102	1.775940	28.241507
27.068296	5.813355	40.658147	40.623941	1.365614	27.613942
26.323867	6.108517	40.193905	40.138202	0.965339	26.984692
25.588559	6.370854	39.695676	39.641998	0.575508	26.353974
24.863533	6.601437	39.194010	39.135458	0.196518	25.722006
24.149823	6.801391	38.678932	38.618760	-0.171220	25.089032
23.448431	6.971851	38.150651	38.091960	-0.527351	24.455195
22.760265	7.113985	37.609340	37.555305	-0.871445	23.820765
22.086128	7.228983	37.055143	37.008949	-1.203114	23.185938
21.426831	7.318034	36.488317	36.453029	-1.521980	22.550880
20.783006	7.382355	35.908971	35.887844	-1.827620	21.915862
20.155317	7.423156	35.317377	35.313559	-2.119655	21.281053

Désalignement 07					
Pignon			Roue		
X ₁	Y ₁	Z ₁	X ₂	Y ₂	Z ₂
33.997971	1.487503	44.311369	44.606932	5.431393	33.223176
33.234631	2.121152	43.969635	44.219944	4.951599	32.615982
32.467046	2.714412	43.612774	43.822014	4.478888	32.005439
31.696971	3.267860	43.240931	43.413204	4.013656	31.391816
30.926113	3.782140	42.854303	42.993467	3.556217	30.775279
30.156026	4.258028	42.452949	42.562797	3.106916	30.156022
29.388309	4.696290	42.037068	42.121298	2.666166	29.534313
28.624437	5.097788	41.606799	41.668961	2.234303	28.910319
27.865837	5.463430	41.162331	41.205887	1.811727	28.284284
27.113858	5.794178	40.703806	40.732095	1.398786	27.656375
26.369745	6.091050	40.231338	40.247715	0.995889	27.026834
25.634771	6.355066	39.745202	39.752861	0.603430	26.395885
24.910017	6.587332	39.245479	39.247595	0.221768	25.763689
24.196554	6.788957	38.732382	38.732129	-0.148665	25.130519
23.495396	6.961079	38.206111	38.206555	-0.507502	24.496542
22.807419	7.104872	37.666808	37.671048	-0.854340	23.861976
22.133484	7.221518	37.114687	37.125800	-1.188779	23.227042
21.474370	7.312215	36.549977	36.571017	-1.510415	22.591964
20.830740	7.378180	35.972820	36.006892	-1.818864	21.956931
20.203204	7.420629	35.383410	35.433626	-2.113733	21.322140

Désalignement 08					
Pignon			Roue		
X ₁	Y ₁	Z ₁	X ₂	Y ₂	Z ₂
33.942735	1.535276	44.218202	44.495939	5.360892	33.160476
33.178203	2.166647	43.874142	44.107598	4.884028	32.553760
32.409499	2.757618	43.514960	43.708458	4.414287	31.943698
31.638339	3.308793	43.140832	43.298459	3.951973	31.330457
30.866398	3.820834	42.751867	42.877612	3.497442	30.714256
30.095309	4.294458	42.348223	42.445941	3.051059	30.095312
29.326596	4.730476	41.930049	42.003452	2.613172	29.473816
28.561765	5.129729	41.497511	41.550230	2.184176	28.850012
27.802203	5.493139	41.050714	41.086308	1.764431	28.224092
27.049272	5.821654	40.589844	40.611735	1.354302	27.54302
26.304268	6.116269	40.115092	40.126640	0.954198	26.966720
25.568362	6.378040	39.626576	39.631099	0.564491	26.335706
24.842707	6.608040	39.124498	39.125206	0.185561	25.703394
24.128357	6.807381	38.609022	38.609136	-0.182178	25.070030
23.426293	6.977202	38.080317	38.083013	-0.538345	24.435805
22.737444	7.118663	37.538600	37.547007	-0.882536	23.800941
22.062618	7.232948	36.984009	37.001277	-1.214366	23.165626
21.402600	7.321251	36.416768	36.446026	-1.533432	22.530083
20.758076	7.384777	35.837061	35.881438	-1.839343	21.894507
20.129659	7.424739	35.245082	35.307791	-2.131690	21.259138

Désalignement 09					
Pignon			Roue		
X ₁	Y ₁	Z ₁	X ₂	Y ₂	Z ₂
34.635599	0.922008	44.675098	45.565500	5.540764	32.962699
33.877871	1.589501	44.343058	45.189339	5.035423	32.346250
33.114568	2.216610	43.995896	44.801361	4.537024	31.726959
32.347388	2.802441	43.633674	44.401486	4.045880	31.104963
31.578091	3.349084	43.256583	43.989765	3.562410	30.480501
30.808325	3.856734	42.864750	43.566265	3.087030	29.853811
30.039699	4.326140	42.458351	43.130942	2.620081	29.225032
29.273713	4.758137	42.037483	42.683928	2.162011	28.594425
28.511861	5.153580	41.602375	42.225238	1.713190	27.962153
27.755539	5.513397	41.153172	41.755032	1.274074	27.328484
27.006068	5.838564	40.690025	41.273327	0.845021	26.693549
26.264719	6.130093	40.213134	40.780315	0.426488	26.057615
25.532668	6.389044	39.722661	40.276108	0.018877	25.420869
24.811022	6.616508	39.218771	39.760869	-0.377390	24.783524
24.100829	6.813605	38.701681	39.234736	-0.761904	24.145771
23.403050	6.981481	38.171564	38.697942	-1.134233	23.507845
22.718594	7.121303	37.628636	38.150624	-1.493980	22.869910
22.048238	7.234265	37.073049	37.593082	-1.840700	22.232232
21.392745	7.321561	36.505027	37.025487	-2.174000	21.594973
20.752801	7.384398	35.924803	36.448140	-2.493458	20.958366

B-1 Coordonnées de la surface de la dent du pignon**• Côté concave, partie active**

$$x_p = \left[\left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) + \sin(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \right) \cdot \sin(\alpha_p) + \cos(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\alpha_p) \right] \cdot s_p \\ + \left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\varphi_1 + \psi_{c1}) + \sin(\psi_1) \cdot \sin(\varphi_1 + \psi_{c1}) \right) \cdot S_{r1} + \sin(\psi_1) \cdot \Delta E_{m1} + \cos(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1} \\ + \left(\cos(\psi_1) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\gamma_{m1}) + \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\psi_1) \right) \cdot R_p$$

$$y_p = \left(-\sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\alpha_p) + \cos(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\alpha_p) - \sin(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\alpha_p) \right) \cdot s_p \\ + \left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\psi_{c1} + \varphi_1) - \sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\psi_{c1} + \varphi_1) \right) \cdot S_{r1} + \cos(\psi_1) \cdot \Delta E_{m1} - \sin(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1} \\ + \left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) - \sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \right) \cdot R_p$$

$$z_p = \left(\cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\alpha_p) - \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\alpha_p) \right) \cdot s_p + \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot R_p - \sin(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1} \\ + \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\varphi_1 + \psi_{c1}) \cdot S_{r1} - \Delta X_{D1}$$

• Côté concave, partie raccordement

$$x_p = \left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) + \sin(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \right) \cdot X_f \\ + \left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\lambda_f) + \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\psi_1) \cdot \sin(\lambda_f) + \cos(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) - \cos(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\lambda_f) \right) \cdot \rho_f \\ + \left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\psi_{c1} + \varphi_1) + \sin(\psi_1) \cdot \sin(\psi_{c1} + \varphi_1) \right) \cdot S_{r1} + \sin(\psi_1) \cdot \Delta E_{m1} + \cos(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1}$$

$$y_p = \left(-\sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) + \cos(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \right) \cdot X_f \\ + \left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\lambda_f) - \sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\lambda_f) - \sin(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) + \sin(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\lambda_f) \right) \cdot \rho_f \\ + \left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\psi_{c1} + \varphi_1) - \sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\psi_{c1} + \varphi_1) \right) \cdot S_{r1} + \cos(\psi_1) \cdot \Delta E_{m1} - \sin(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1}$$

$$z_p = \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot X_f + \left(\cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\lambda_f) - \sin(\gamma_{m1}) + \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\lambda_f) \right) \cdot \rho_f - \sin(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1} \\ + \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\varphi_1 + \psi_{c1}) \cdot S_{r1} - \Delta X_{D1}$$

• Côté convexe, partie active

$$x_p = \left(\cos(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\alpha_p) - \sin(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\alpha_p) - \cos(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\alpha_p) \right) \cdot s_p \\ + \left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\varphi_1 + \psi_{c1}) + \sin(\psi_1) \cdot \sin(\varphi_1 + \psi_{c1}) \right) \cdot S_{r1} + \sin(\psi_1) \cdot \Delta E_{m1} + \cos(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1} \\ + \left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) + \sin(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \right) \cdot R_p$$

$$y_p = \left(\sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\alpha_p) - \cos(\psi_1) \cdot \sin(\psi_{c1} + \theta_p) \cdot \sin(\alpha_p) - \sin(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\alpha_p) \right) \cdot s_p \\ + \left(\cos(\psi_1) \cdot \sin(\psi_{c1} + \varphi_1) - \sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\varphi_1 + \psi_{c1}) \right) \cdot S_{r1} + \cos(\psi_1) \cdot \Delta E_{m1} - \sin(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1} \\ + \left(\sin(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \cos(\psi_1) - \sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \right) \cdot R_p$$

$$z_p = \left(-\cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\alpha_p) - \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\alpha_p) \right) \cdot s_p + \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot R_p - \sin(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1} \\ + \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\varphi_1 + \psi_{c1}) \cdot S_{r1} - \Delta X_{D1}$$

- **Côté convexe, partie raccordement**

$$\begin{aligned}
x_p &= \left\langle \cos(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) + \sin(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \right\rangle \cdot X_f \\
&+ \left\langle \cos(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) - \cos(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\psi_{c1} + \theta_p) \cdot \sin(\lambda_f) - \sin(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\lambda_f) - \cos(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\lambda_f) \right\rangle \cdot \rho_f \\
&+ \left\langle \cos(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\varphi_1 + \psi_{c1}) + \sin(\psi_1) \cdot \sin(\varphi_1 + \psi_{c1}) \right\rangle \cdot S_{r1} + \sin(\psi_1) \cdot \Delta E_{m1} + \cos(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1} \\
y_p &= \left\langle -\sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) + \cos(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \right\rangle \cdot X_f \\
&+ \left\langle \sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\lambda_f) - \cos(\psi_1) \cdot \sin(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\lambda_f) - \sin(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) + \sin(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\lambda_f) \right\rangle \cdot \rho_f \\
&+ \left\langle \cos(\psi_1) \cdot \sin(\varphi_1 + \psi_{c1}) - \sin(\psi_1) \cdot \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\varphi_1 + \psi_{c1}) \right\rangle \cdot S_{r1} + \cos(\psi_1) \cdot \Delta E_{m1} - \sin(\psi_1) \cdot \cos(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1} \\
z_p &= \left\langle \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot X_f \right\rangle + \left\langle \sin(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\lambda_f) - \cos(\gamma_{m1}) \cdot \cos(\theta_p + \psi_{c1}) \cdot \sin(\lambda_f) - \sin(\gamma_{m1}) \right\rangle \cdot \rho_f \\
&+ \cos(\gamma_{m1}) \cdot S_{r1} \cdot \cos(\varphi_1 + \psi_{c1}) - \sin(\gamma_{m1}) \cdot \Delta X_{B1} - \Delta X_{D1}
\end{aligned}$$

B-2 Coordonnées de la surface de la dent de la roue

- **Côté concave, partie active**

$$\begin{aligned}
x_g &= \left\langle \cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\alpha_g) + \sin(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\alpha_g) + \cos(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\alpha_g) \right\rangle \cdot s_g \\
&+ \left\langle \cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\varphi_2 + \psi_{c2}) + \sin(\psi_2) \cdot \sin(\varphi_2 + \psi_{c2}) \right\rangle \cdot S_{r2} + \sin(\psi_2) \cdot \Delta E_{m2} + \cos(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} \\
&+ \left\langle \cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) + \sin(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \right\rangle \cdot R_g \\
y_g &= \left\langle -\sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\alpha_g) + \cos(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\alpha_g) - \sin(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\alpha_g) \right\rangle \cdot s_g \\
&+ \left\langle \cos(\psi_2) \cdot \sin(\varphi_2 + \psi_{c2}) - \sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\varphi_2 + \psi_{c2}) \right\rangle \cdot S_{r2} + \cos(\psi_2) \cdot \Delta E_{m2} - \sin(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} \\
&+ \left\langle \cos(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) - \sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \right\rangle \cdot R_g \\
z_g &= \left\langle \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\alpha_g) - \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\alpha_g) \right\rangle \cdot s_g + \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot R_g \\
&+ \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\varphi_2 + \psi_{c2}) \cdot S_{r2} - \sin(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} - \Delta X_{D2}
\end{aligned}$$

- **Côté concave, partie raccordement**

$$\begin{aligned}
x_g &= \left[\cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\lambda_w) + \sin(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\lambda_w) + \cos(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot (1 - \cos(\lambda_w)) \right] \cdot \rho_w \\
&+ \left[\cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\psi_{c2} + \varphi_2) + \sin(\psi_2) \cdot \sin(\psi_{c2} + \varphi_2) \right] \cdot S_{r2} + \sin(\psi_2) \cdot \Delta E_{m2} + \cos(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} \\
&+ \left\langle \cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) + \sin(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \right\rangle \cdot X_w \\
y_g &= \left[-\sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\lambda_w) + \cos(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\lambda_w) + \sin(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot (\cos(\lambda_w) - 1) \right] \cdot \rho_w \\
&+ \left\langle \cos(\psi_2) \cdot \sin(\psi_{c2} + \varphi_2) - \sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\psi_{c2} + \varphi_2) \right\rangle \cdot S_{r2} + \cos(\psi_2) \cdot \Delta E_{m2} - \sin(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} \\
&+ \left\langle -\sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) + \cos(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \right\rangle \cdot X_w \\
z_g &= \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot X_w + \left[\cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\lambda_w) + \sin(\gamma_{m2}) \cdot (\cos(\lambda_w) - 1) \right] \cdot \rho_w \\
&+ \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\varphi_2 + \psi_{c2}) \cdot S_{r2} - \sin(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} - \Delta X_{D2}
\end{aligned}$$

• **Côté convexe, partie active**

$$\begin{aligned} x_g = & \left(-\cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\alpha_g) - \sin(\psi_2) \cdot \sin(\psi_{c2} + \theta_g) \cdot \sin(\alpha_g) + \cos(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\alpha_g) \right) \cdot s_g \\ & + \left(\cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\psi_{c2} + q_2) + \sin(\psi_2) \cdot \sin(\psi_{c2} + q_2) \right) \cdot S_{t2} + \sin(\psi_2) \cdot \Delta E_{m2} + \cos(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} \\ & + \left(\cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) + \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\psi_2) \right) \cdot R_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_g = & \left(\sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\psi_{c2} + \theta_g) \cdot \sin(\alpha_g) - \cos(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\alpha_g) - \sin(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\alpha_g) \right) \cdot s_g \\ & + \left(\cos(\psi_2) \cdot \sin(\psi_{c2} + q_2) - \sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\psi_{c2} + q_2) \right) \cdot S_{t2} + \cos(\psi_2) \cdot \Delta E_{m2} - \sin(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} \\ & + \left(\sin(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \cos(\psi_2) - \sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \right) \cdot R_g \end{aligned}$$

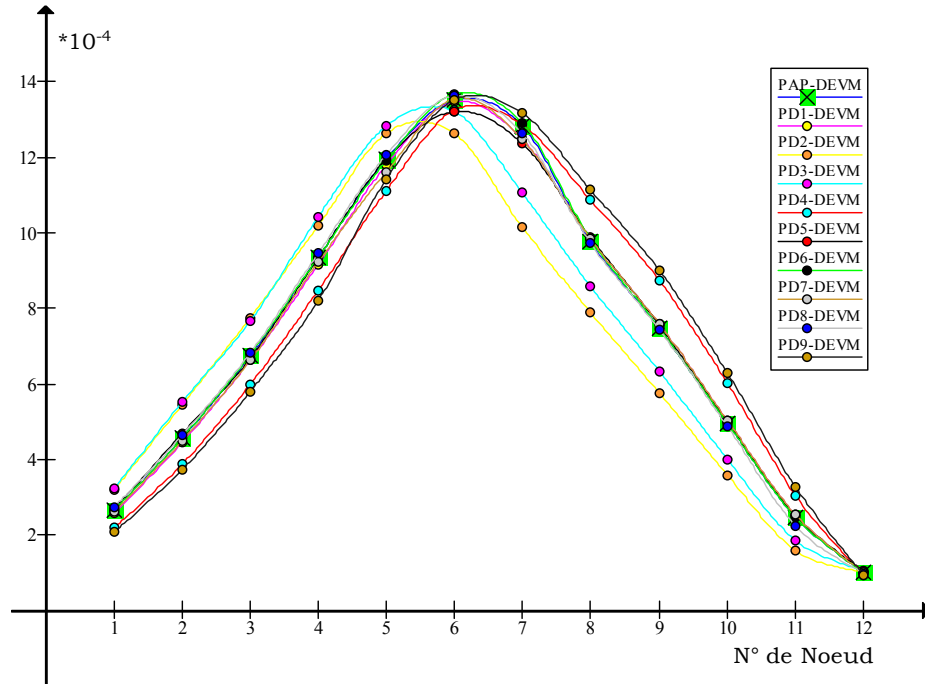
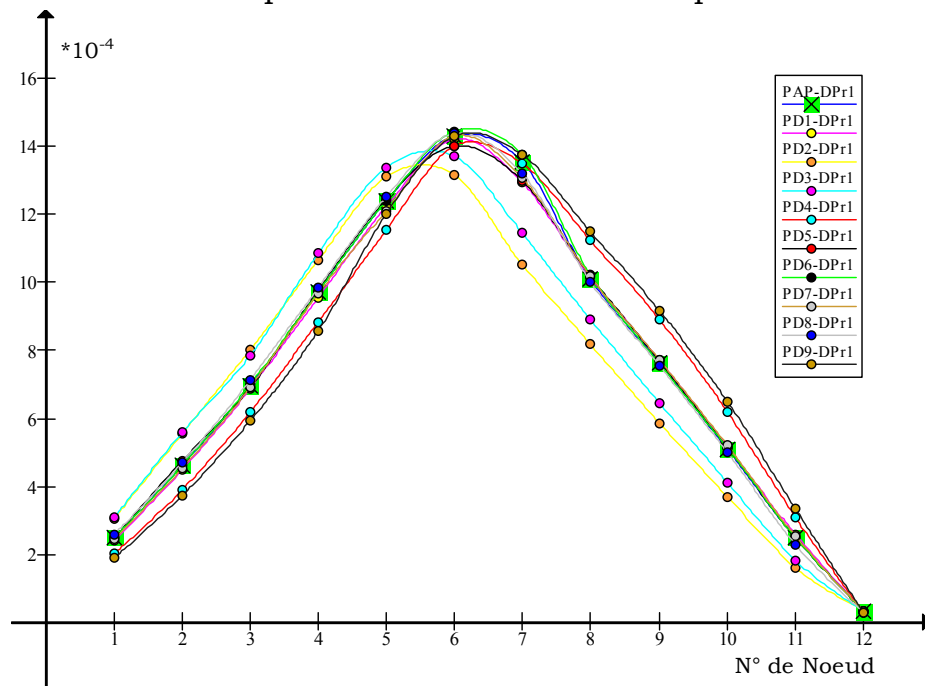
$$\begin{aligned} z_g = & \left(-\cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\psi_{c2}) \cdot \cos(\theta_g) \cdot \sin(\alpha_g) + \cos(\gamma_{m2}) \cdot \sin(\psi_{c2}) \cdot \sin(\theta_g) \cdot \sin(\alpha_g) - \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\alpha_g) \right) \cdot s_g \\ & + \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot R_g + \cos(\gamma_{m2}) \cdot S_{t2} \cdot \cos(\psi_{c2} + q_2) - \sin(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} - \Delta X_{D2} \end{aligned}$$

• **Côté convexe, partie raccordement**

$$\begin{aligned} x_g = & \left[\cos(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot (1 - \cos(\lambda_w)) - \cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\lambda_w) - \sin(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\lambda_w) \right] \cdot \rho_w \\ & + \left(\cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\psi_{c2} + q_2) + \sin(\psi_2) \cdot \sin(\psi_{c2} + q_2) \right) \cdot S_{t2} + \sin(\psi_2) \cdot \Delta E_{m2} + \cos(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} \\ & + \left(\cos(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) + \sin(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \right) \cdot X_w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_g = & \left[\sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\lambda_w) - \cos(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\lambda_w) + \sin(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot (\cos(\lambda_w) - 1) \right] \cdot \rho_w \\ & + \left(\cos(\psi_2) \cdot \sin(\psi_{c2} + q_2) - \sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\psi_{c2} + q_2) \right) \cdot S_{t2} + \cos(\psi_2) \cdot \Delta E_{m2} - \sin(\psi_2) \cdot \cos(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} \\ & + \left(\cos(\psi_2) \cdot \sin(\theta_g + \psi_{c2}) - \sin(\psi_2) \cdot \sin(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \right) \cdot X_w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_g = & \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot X_w + \left[\sin(\gamma_{m2}) \cdot (\cos(\lambda_w) - 1) - \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\theta_g + \psi_{c2}) \cdot \sin(\lambda_w) \right] \cdot \rho_w \\ & + \cos(\gamma_{m2}) \cdot \cos(\psi_{c2} + q_2) \cdot S_{t2} - \sin(\gamma_{m2}) \cdot \Delta X_{B2} - \Delta X_{D2} \end{aligned}$$

C-1 Déformation au pied de la dent du pignon**Figure C-1** Déformation équivalente de Von Misés au pied de la dent du pignon**Figure C-2** Déformation principale maximale au pied de la dent du pignon

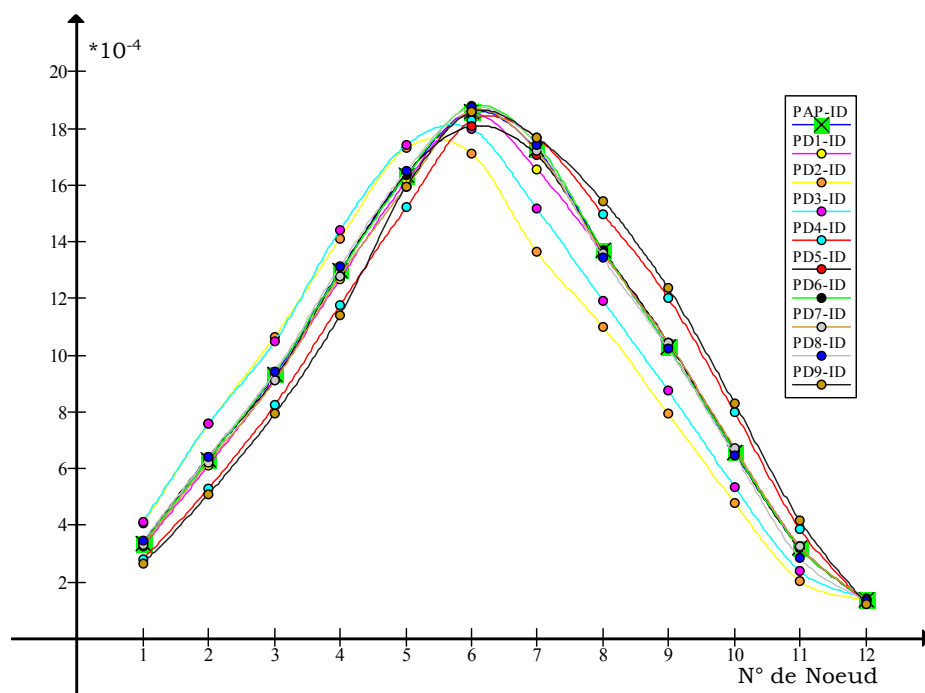


Figure C-3 Intensité de déformation au pied de la dent du pignon

C-2 Déformation au pied de la dent de la roue

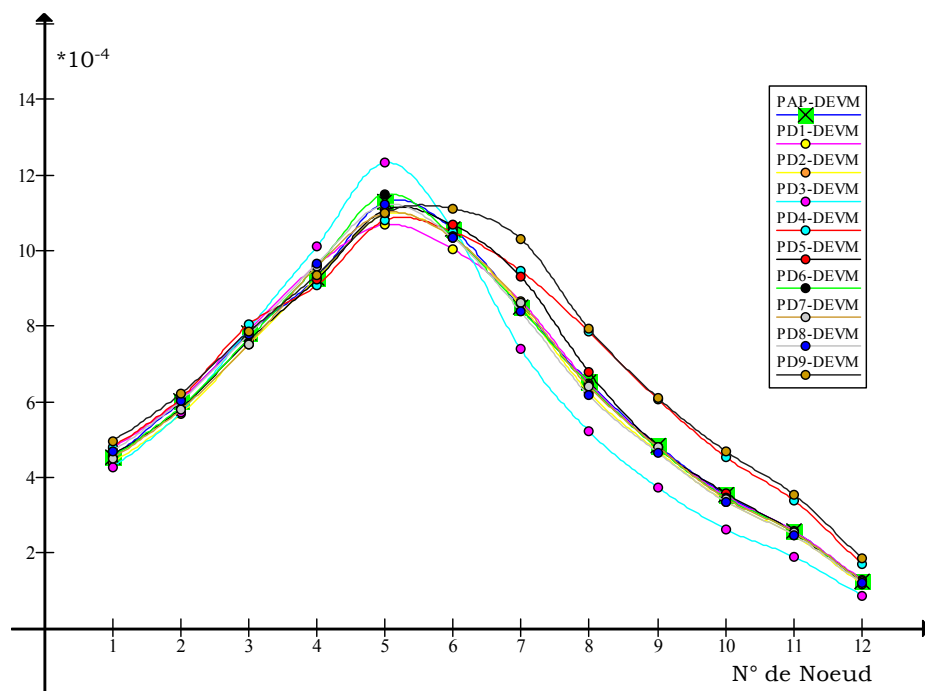


Figure C-4 Déformation équivalente de Von Misés au pied de la dent de la roue

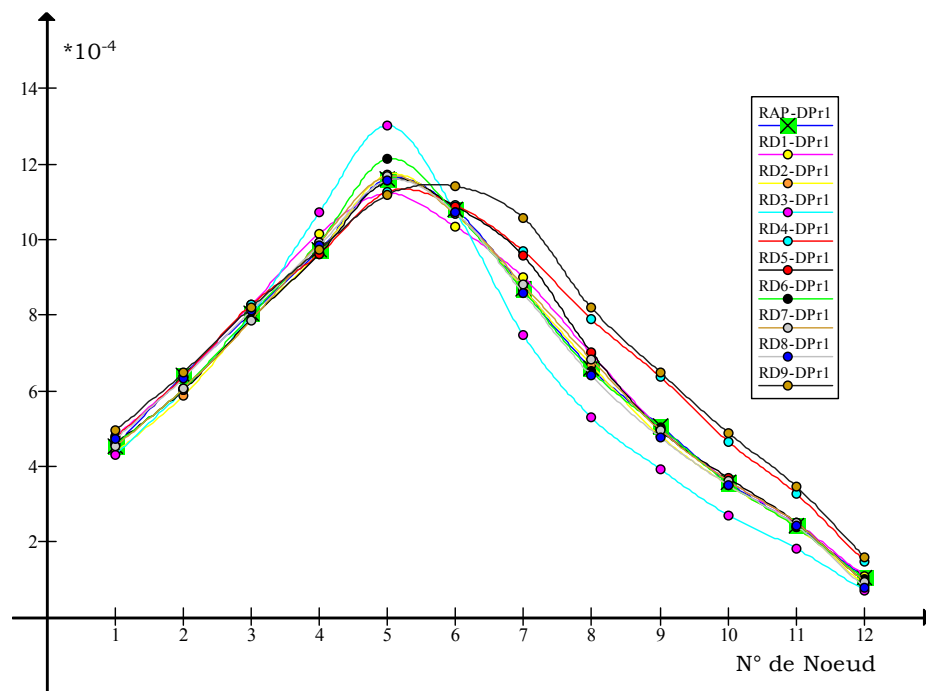


Figure C-5 Déformation principale maximale au pied de la dent de la roue

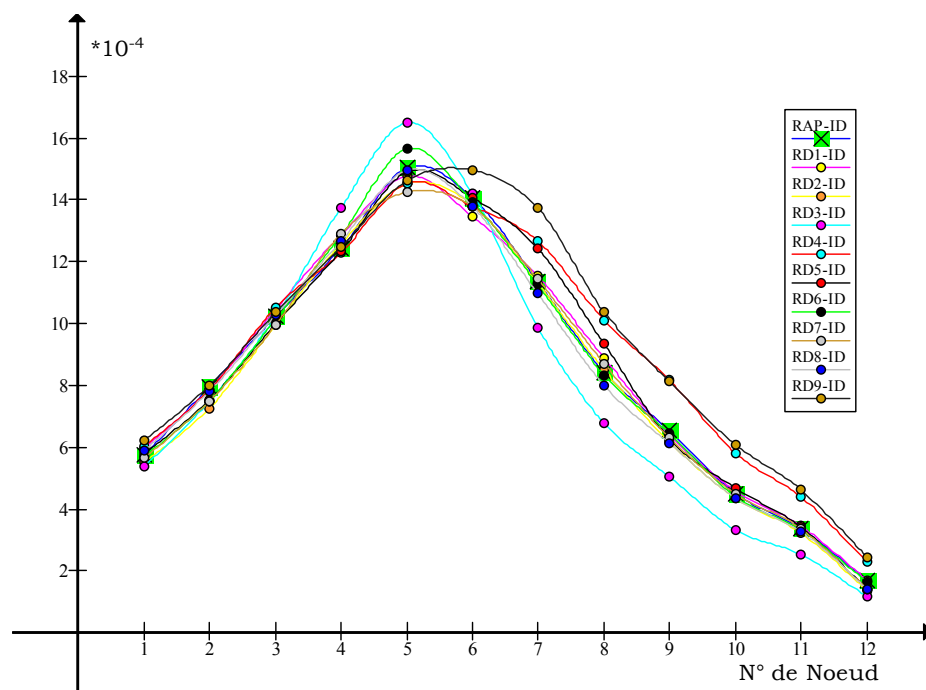


Figure C-6 Intensité de déformation au pied de la dent de la roue

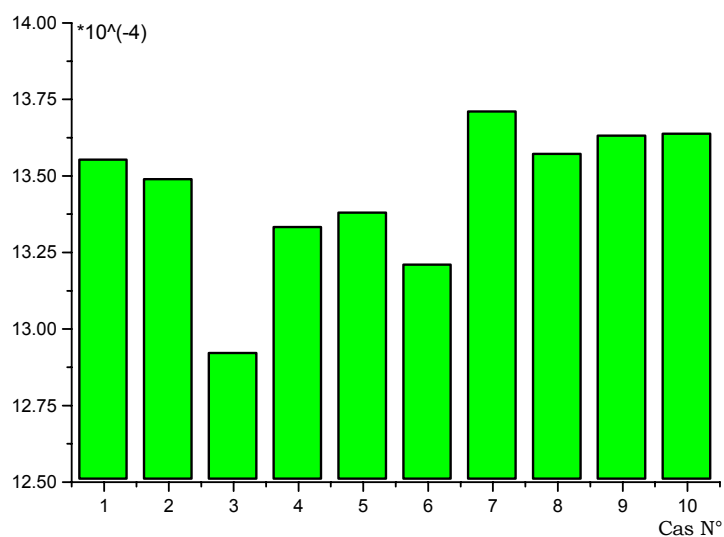


Figure C-7 Valeurs maximales des déformations équivalentes de Von Misés du pignon

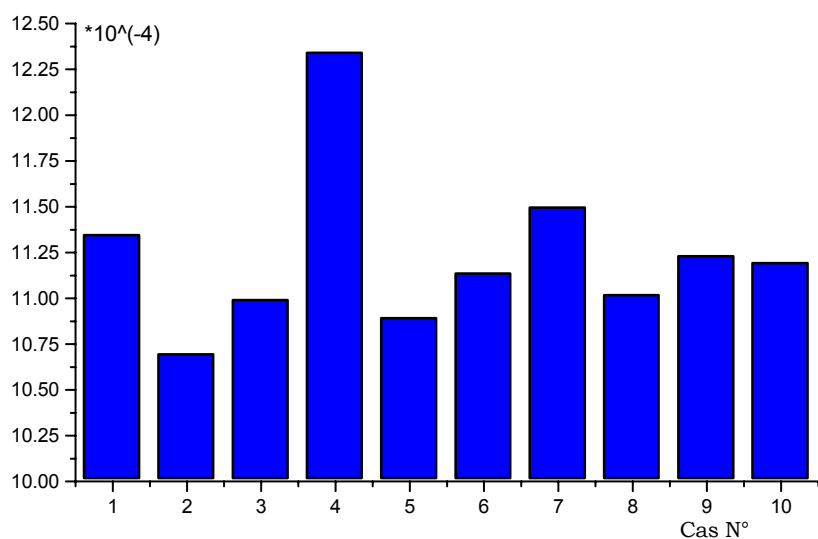


Figure C-8 Valeurs maximales des déformations équivalentes de Von Misés de la roue