

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'Hamed Bougara Boumerdès
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département de Génie Mécanique



Post Graduation Commune (UMBB, USTHB, EMP, ENP).
Magistère en Génie Mécanique.
Option: Systèmes Mécaniques.

Thème

Modélisation des comportements des solides sous chargement cyclique par un modèle elastoplastique

Soutenu publiquement par Mr **Chebbab Brahim** le : 26/07/2004 devant le jury :

– M ^r . T. BOUKHAROUBA	Pr. à l'USTHB	Président
– M ^r . A. SERIDI	Pr. à l'UMBB	Directeur de thèse
– M ^r . S. ADJERID	M.C. à l'UMBB	Examineur
– M ^r . K. NECIB	M.C. à l'EMP	Examineur
– M ^{me} . Ait SAADA	C.C. à l'UMBB	Examineur

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة على نموذج يعمم قوانين التطريق الموحد الخواص و الحركي. هذا النموذج ممثل بحقل مديول التطريق الذي يوافق مقدمة هيئة مساحات السيلا. كل مساحة سيلا في فضاء الإجهادات تتميز بمديول ثابت. في حالات التحميلات المعقدة وخاصة في حالة التحميل الدوري، الهيئة المؤقتة التي يمكن تحديدها بوضعية وأبعاد مساحات السيلا استعملت من أجل حساب تدرج التشوه لكل تدرج إجهاد.

كلمات مفتاحية:

المريـنو لدن الدوري- المريـنو لدن ثلاثي الأبعاد- المريـنو لدن التدريجي- مديول المريـنو لدن مساحات السيلا المرن

RESUME

L'objet de ce travail de recherche est l'étude sur un modèle qui généralise les lois d'écrouissage isotrope et cinématique. Le modèle en question est représenté par un champ de modules d'écrouissage correspondant à l'introduction de la configuration des surfaces d'écoulement. Chaque surface d'écoulement dans un espace de contrainte est caractérisée par un module constant.

Pour des cas de chargements complexes, et particulièrement dans le cas de chargement cyclique, la configuration instantanée peut être déterminée par la position et les dimensions des surfaces d'écoulement à partir du calcul de l'incrément de déformation de chaque incrément de contrainte.

Mots clés : Plasticité cyclique, élastoplasticité tridimensionnelle, élastoplasticité incrémentale, module élastoplastique, surfaces d'écoulement plastique.

SUMMARY

The subject of this research work is studies on a model that generalizes isotrope and kinematic hardening rules. A field of hardening modulus which corresponds to a configuration to yield surfaces is introduced. Each yield surface in a stress space is characterized by a constant modulus.

For complex loading histories such is the case for cyclic loading, the instantaneous configuration, that can be determined by the position and size of the yield surfaces is used to calculate the strain increment for each stress increment

Key words : cyclic plasticity, elastoplasticity three-dimensional, elastoplasticity incremental, elastoplasticity modulus, yield surfaces plastic.

REMERCIEMENTS

C'est avec un grand plaisir que j'exprime ma gratitude et ma sincère reconnaissance à Monsieur A. SERIDI, Professeur à la Faculté des sciences de l'Ingénieur et Directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides et Systèmes à l'Université M'hamed Bougara de Boumerdes, d'abord pour l'avoir eu comme enseignant au cours de l'année théorique , ensuite pour m'avoir encadré et aidé à élaborer ce travail.

Je tiens aussi à remercier vivement :

- Monsieur, T. BOUKHAROUBA, Professeur à l'Université des Sciences et de Technologies Houari Boumediene (ALGER), pour l'avoir eu aussi comme enseignant en 1^{ère} année de magistère et pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.
- Monsieur, S. ADJERID, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de l'Ingénieur de l'Université M'hamed Bougara, pour son encouragement et son soutien et pour avoir eu l'amabilité d'accepter de participer au jury.
- Monsieur, K. NECIB, Maître de Conférences à l'Ecole Militaire Polytechnique de Bordj - El -Bahri pour l'avoir eu également comme enseignant et pour avoir accepté ma demande d'invitation de participer au jury.
- Madame, AIT SAADA, Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de l'Ingénieur de l'Université M'hamed Bougara, pour l'avoir eu également comme enseignante et pour m'avoir honoré par sa participation au jury.
- Monsieur Feu T. KIRATI, Chargé de Cours à la faculté des Sciences de l'Ingénieur de l'Université M'hamed Bougara, pour l'avoir eu également comme enseignant en 1^{er} année de Magistère.
- Toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail, en particulier mes collègues et amis T. BOUSHAKI, R. IFRAH, A. TAYEB BEY pour leur précieuse aide et leur soutien dans les moments difficiles.

SOMMAIRE

NOTATIONS ET ABREVIATIONS.....	I
---------------------------------------	----------

NOMENCLATURE DES TABLEAUX ET FIGURES.....	IV
--	-----------

INTRODUCTION GENERALE.....	1
-----------------------------------	----------

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE.....	4
---------------------------------------	----------

CHAPITRE .I – CRITERE D'ECOULEMENT

I.1 – Introduction.....	8
I.2 – Critère d'écoulement.....	8
I.3 – Critère d'écoulement isotrope.....	9
I.3.1 – Critère d'écoulement indépendant de la pression moyenne.....	9
I.3.1.1 – Critère de limite élastique basée sur les contrainte.....	9
A – Critère de Rankine.....	9
B – Critère de Tresca.....	10
C – Critère expérimental de Caquot.....	14
D – Critère parabolique.....	14
I.3.1.2 – Critère d'écoulement de limite élastique basée sur l'énergie.....	15
A – Critère d'énergie de distorsion maximale.....	15
B – Critère d'énergie de Torre-Stassi	20
C – Critère d'énergie de Beltrami.....	22
I.3.1.3– Critère d'écoulement de limite élastique basée sur la déformation maximale.....	23
A – Critère de déformation de Saint-Venant.....	23
I.3.2 – Critère d'écoulement dépendant de la pression moyenne.....	23
A – Critère de Rankine.....	24

B – Critère de Mohr-Coulomb.....	25
C – Critère de Drucker-Prager.....	27
D – Critère de Lade-Duncan.....	30
I.4 –Critère d’anisotrope.....	32
A –Critère de Hill.....	33
B –Approche de Hill.....	35
C –Critère de Tsai.....	36
I.5 –Conclusion.....	37

CHAPITRE .II – FORMULATIONS DES LOIS ELASTOPLASTIQUES

II.1 –Introduction.....	38
II.2 –Principe de partition des déformations élastique et plastique.....	38
II.3 –Définition de la fonction de charge.....	39
II.4 –Loi d’écoulement et potentiel plastique.....	40
II.4.1 –Loi d’écoulement plastique associée.....	40
II.4.2 –Loi d’écoulement plastique non associée.....	44
II.4.2.1 –Loi d’écoulement plastique coaxiale	45
II.5 –Conclusion.....	46

CHAPITRE .III - L’ECROUISSAGE

III.1 - Introduction	49
III.2 - Paramètres d’écrouissage.....	49
III.3 – Ecrouissage isotrope.....	50
III.4 – Loi d’écoulement à écrouissage isotrope :	
par la loi de Prandtl-Reuss.....	50
III.5 – Ecrouissage cinématique	56

III.5.1 – Loi d’écoulement à écrouissage cinématique linéaire.....	57
A – Loi d’écoulement avec écrouissage : modèle de D. Prager.....	57
B – Loi d’écoulement avec écrouissage : modèle de Ziegler.....	62
C – Loi d’écoulement avec écrouissage : modèle de Mroz	63
III.5.2 – Loi d’écoulement à écrouissage cinématique non linéaire.....	65
A – Loi d’écoulement avec écrouissage: modèle de Mroz	65
III.6 – Conclusion.....	67

CHAPITRE .IV - MODELISATION

IV.1 - Introduction.....	68
IV.2 - Hypothèses.....	69
IV.3 - Modèle proposé.....	70
IV.4 - Application :	73
IV.4.1 - Modélisation mathématique.....	73
IV.4.2 - Organigramme du programme de calcul.....	76
IV.5 - Interprétation des résultats.....	90
IV.6 - Conclusion.....	91

CONCLUSION GENERALE.....	92
---------------------------------	-----------

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	94
---	-----------

ANNEXE –I.....	97
-----------------------	-----------

ANNEXE –II.....	104
------------------------	------------

NOTATIONS ET ABREVIATIONS

S_y	: Contrainte seuil de plasticité
σ_e	: Contrainte normale
σ'_e	: Contrainte normale maximale de traction
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	: Contraintes principales
J_2, J_3	: Invariants du tenseur déviatorique des contraintes
τ	: Contrainte de cisaillement
W	: Energie totale
W_v	: Energie de variation de volume
W_e	: Energie de déformation élastique
W_d	: Energie de distorsion
σ_{ij}	: Composantes du tenseur des contraintes
ε_{ij}	: Composantes du tenseur des déformations
V_0	: Volume initial
K	: Module de variation de volume
ν	: Coefficient de poisson
G	: Module transversal de cisaillement élastique
E	: Module d'élasticité d'Young longitudinal
r	: Rayon du tube
t	: Epaisseur du tube
p	: Pression hydrostatique
σ_H	: Contrainte hydrostatique
ρ	: Longueur de la zone plastique
R_e	: Résistance limite en traction
R'_e	: Résistance limite en compression

s	: Coefficient de sécurité
σ_y	: Contrainte limite élastique
ξ	: Axe hydrostatique
ρ_t	: Module de la zone plastique en traction
ρ_c	: Module de la zone plastique en compression
c	: Coefficient de cohésion
ϕ	: Angle de frottement interne du matériau
σ_t	: Contrainte normale à la traction
σ_c	: Contrainte normal à la compression
I_1, I_2, I_3	: Invariants du tenseur des contraintes
σ	: Tenseur des contraintes
σ'	: Tenseur déviateur des contraintes
$F(\sigma_{ij})$	: Fonction de charge plastique
$Q(\sigma_{ij})$	: Fonction potentielle-plastique
σ_{eq}	: Contrainte équivalente de Von mises
ε_{ij}^e	: Composantes du tenseur des déformations élastiques
ε_{ij}^p	: Composantes du tenseur des déformations plastiques
ε'_{ij}	: Composantes du tenseur du déformation totale
λ	: Coefficient de proportionnalité
μ	: Multiplicateur
ψ	: Angle de dilatance
Ψ	: Énergie libre spécifique
ρ'	: Masse volumique dépend du matériau
p	: Déformation plastique cumulée
K_y	: Coefficient de résistance plastique
M_y	: Exposant d'écrouissage
f	: Fonction critère de plasticité
R	: Variable d'écrouissage isotrope

$\mathbf{X}$	: Tenseur variable d'écrouissage cinématique
$\mathbf{X}'$	: Déviateur du tenseur d'écrouissage cinématique
g	: Fonction d'écrouissage
$k'(\mathbf{p})$	: Module élastoplastique
α	: Variable d'écrouissage cinématique
τ_{oct}	: Contrainte de cisaillement octaédrique
σ_{oct}	: Contrainte normale octaédrique
σ^l	: Contrainte équivalente sur la surface d'écoulement l
σ^{l+1}	: Contrainte équivalente sur la surface d'écoulement $l+1$
R^l	: Rayon de la surface d'écoulement l
R^{l+1}	: Rayon de la surface d'écoulement $l+1$
H_0	: Module élastique
H_p	: Module élastoplastique.

NOMENCLATURE DES TABLEAUX ET FIGURES

Fig. I-1 : a) Comparaison de la contrainte uniaxiale σ avec la contrainte limite en traction S_y	8
b) Quand l'écoulement se produit dans des états de contrainte multiaxiale ?	8
Fig. I-2 : Le critère de Rankine, dans le plan de Mohr	9
Fig. I-3 : Le critère de Rankine, dans la représentation octaédrique	10
Fig. I-4 : Tri-cercle de Mohr du critère de Tresca	11
Fig. I-5 : Cercle de Mohr applicables au cas uniaxial (au début de l'écoulement)	12
Fig. I-6 : Cercle de Mohr applicables à un état plan de contrainte	12
Fig. I-7 : Représentation graphique du critère de Tresca appliqué à plan de contrain... 13	
Fig. I-8 : Représentation du critère de Tresca dans l'espace des contraintes	13
Fig. I-9 : Le critère de Caquot, dans le plan de Mohr	14
Fig. I-10 : Le critère parabolique, dans le plan de Mohr	15
Fig. I-11 : Décomposition des contraintes normales	16
Fig. I-12 : Représentation graphique du critère Von mises à l'état plan de contrainte... 18	
Fig. I-13 : Représentation du critère de Von mises	19
Fig. I-14 : Image dans le plan ($\sigma_3 = 0$) du critère de Torrè- stassi	21
Fig. I-15 : Déformation principale maximale	23
Fig. I-16 : Surface d'écoulement dépendant d la pression hydrostatique	24
Fig. I-17 : Critère de Rankine	25
Fig. I-18 : Critère de Mohr Coulomb	27
Fig. I-19 : Critère de Drucker –Prager	29
Fig. I-20 : Comparaison des critères de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager	30
Fig. I-21 : Surface d'écoulement typique pour un matériau isotropique	32
Fig. I-22: Exemple de matériau plastiquement anisotrope , Critère de Hill	34

Fig. II-1 : Evolution de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales pour un matériau présentant des propriétés d'écrouissage.....	40
Fig. II-2 : Décomposition de l'incrément de contrainte.....	41
Fig. II-3 : Décomposition de l'incrément de déformation.....	42
Fig. II-4 : Interprétation géométrique de la fonction d'écoulement.....	43
Fig. II-5 : Interprétation géométrique du principe du travail maximal.....	44
Fig. II-6 : Représentation de la fonction potentielle plastique.....	45
Fig. III-1 : Ecrouissage durcissement / radoucissement.....	47
Fig. III-2 : Représentation de l'écrouissage isotrope en projection.....	48
Fig. III-3 : Définition de la déformation cumulée.....	52
Fig. III-4 : Schématisation de la courbe de traction et interprétation par écrouissage..	53
Fig. III-5 : Représentation de l'écrouissage cinématique en projection.....	54
Fig. III-6 : Représentation de l'écrouissage cinématique linéaire.....	56
Fig. III-7 : Interprétation géométrique du modèle de Prager.....	58
Fig. III-8 : Ecrouissage cinématique linéaire en traction simple.....	60
Fig. III-9 : Interprétation géométrique du modèle de Ziegler.....	61
Fig. III-10 : Fonctionnement du modèle de Mroz en chargement multiaxial.....	62
Fig. III-11 : Modèle d'écrouissage cinématique non linéaire.....	65
Fig. IV-1 : Schémas du modèle.....	71
Fig. IV-2 : Schématisation de la courbe contrainte équivalente-déformation équivalente.....	73
Fig. IV-3 : Organigramme du programme de calcul.....	76
Fig. IV-4(a et b) : Fonctionnement du modèle de Mroz.....	77
Fig. IV-5 : Modules élastoplastiques en fonction de la déformation plastique équivalente.....	79
Fig. IV-6 : Identification de l'écrouissage cinématique en combinaison (compression-cisaillement).....	79

Fig. IV-7 : Fonctionnement du modèle de Mroz : Cas du chargement uniaxial cyclique contrainte normale de (traction-compression).....	80
Fig. IV -8 : Modules élastoplastiques en fonction de la déformation plastique uniaxiale normale.....	82
Fig. IV-9 : Identification de l'écrouissage cinématique linéaire en traction Simple.....	82
Fig. IV-10 : Fonctionnement du modèle de Mroz : Cas de chargement uniaxial cyclique (cisaillement).....	83
Fig. IV-11 : Modules élastoplastiques en fonction de la déformation plastique uniaxiale de Cisaillement.....	85
Fig. IV-12 : Identification de l'écrouissage cinématique linéaire en cisaillement simple.....	85
Fig. IV-13 : Cas de chargement successive de contrainte normale puis contrainte tangentielle.....	86
Fig. IV-14 : Cas de chargement successive de contrainte tangentielle puis contrainte normal.....	87
Fig. A1-1 : Chargement multiaxial d'une éprouvette.....	95
Fig. A1-2 : Espace des contraintes de Haigh-westergaard.....	99
Fig. A1-3 : Contraintes sur un plan déviatorique.....	100
Fig. A2-1 : Eprouvette pour l'expérience de traction-torsion d'un tube mince.....	102
Fig. A2-2 : Manifestation de l'écrouissage.....	103
Fig. A2-3 : Ecrouissage du fer ARMCO (Bui, 1970).....	104
Fig. A2- 4 : Ecrouissage du cuivre et de l'aluminium pour un trajet de chargement tangentiell.....	105
Tab.IV.1 : Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 1 ^{er} groupe de référence (cas du Chargement quelconque).....	78
Tab.IV.2 : Tableau des caractéristiques du 1 ^{er} groupe de référence(cas du chargement quelconque).....	78
Tab.IV.3 : Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 2 ^{ème} groupe de référence(cas du chargement quelconque).....	78

Tab.IV.4 : Tableau des caractéristiques du 2 ^{ème} groupe de référence(cas du chargement quelconque).....	78
Tab.IV.5 : Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 1 ^{er} groupe de référence(cas du chargement uniaxial normal).....	81
Tab.IV.6 : Tableau des caractéristiques du 1 ^{er} groupe de référence(cas du chargement uniaxial normal).....	81
Tab.IV.7 : Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 2 ^{ème} groupe référence(cas du chargement uniaxial normal).....	81
Tab.IV.8 : Tableau des caractéristiques du 2 ^{ème} groupe de référence (cas du chargement uniaxial normal).....	81
Tab.IV.9 : Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 1 ^{er} groupe de référence(cas du chargement uniaxial tangentiel).....	84
Tab.IV.10 : Tableau des caractéristiques du 1 ^{er} groupe de référence (cas du chargement uni axial tangentiel).....	84
Tab.IV.11: Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 2 ^{ème} groupe référence(cas du chargement uniaxial tangentiel).....	84
Tab.IV.12 : Tableau des caractéristiques du 2 ^{ème} groupe de référence (cas du chargement uniaxial tangentiel).....	84
Tab.IV.13 : Tableau des caractéristiques des surfaces d'écoulement actives (contrainte tangentielle puis normale).....	86
Tab.IV.14 : Tableau des caractéristiques des surfaces d'écoulement actives (contrainte Normal puis tangentielle).....	87

INTRODUCTION GENERALE

Une quantité considérable de recherche a été conduite afin d'obtenir plus de modèles appropriés pour prévoir la description des phénomènes physiques qui interviennent dans les matériaux sollicités à des chargements multiaxiaux cycliques phénoménologique, physique et mixte. On suivra tout particulièrement les méthodes issues de la thermodynamique des milieux continus. Diverses formulations ont été proposées pour établir des lois de comportement de ces matériaux. Elles offrent toutes, l'avantage de dégager un cadre conceptuel pour la résolution et la prévention des problèmes posés lors de la mise en service des pièces et systèmes mécaniques. On s'attachera exclusivement à la méthode de l'état local. Cette méthode repose sur la procédure qu'à tout instant (t) fixé toute particule du système considéré est décrite par des grandeurs thermodynamiques qui sont des fonctions connues de variables dites d'état, ces dernières ne dépendent que du point considéré et servent à décrire l'état du milieu local ainsi que les échanges mutuels entre les différentes particules du milieu. Elles sont classées en deux catégories : variables d'états observables comme la température et la déformation totale " T et ε " et variables d'états internes, comme déformations élastique et plastique " ε^p et ε^e " qui représentent les phénomènes dissipatifs irréversibles décrits, dans ce cadre, par la méthode de Coleman qui adopte l'inégalité de Clausius Duhem.

Un développement théorique important dans la plasticité a été fait simultanément par Mroz (1967) et Iwan (1967). Ils ont montré comment l'écoulement pourrait être représenté par un ensemble de surfaces nichées dans l'espace des contraintes. La notion, en combinaison avec des lois d'écrouissage isotrope et cinématique peut provoquer une représentation matérielle de puissance et de flexibilité considérables.

Le concept a été adopté et agrandi par Prévost (1977, 1978, 1985) et Mroz (1980).

L'élastoplasticité concerne l'analyse du comportement linéaire présenté par une grande variété des matériaux, sous des sollicitations elles-mêmes complexes. Les sollicitations sont considérées non endommageantes (pas de fissurations, pas de développement de micro cavitations...). Notre étude est basée sur la généralisation de l'application du modèle de Mroz aux points de la modélisation des comportements des matériaux non linéaire par morceau une fois soumis à des chemins de chargements multiaxiaux et cycliques.

L'objectif de la présente étude consiste à analyser par modélisation les caractéristiques des surfaces d'écoulement pour tout points de chargement ou déchargement d'un élément de la structure à considérer dans ce but, le mémoire comporte quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à une synthèse de tous les critères d'écoulement isotropes et anisotropes afin de connaître l'évolution du comportement des matériaux solides sous un chargement multiaxial. Parmi les critères d'écoulements isotropes qui dépendent de la pression moyenne s'applique au sol et aux geomatériaux et ceux qui n'en dépendent pas s'appliquent à des matériaux standard. Par contre les critères d'écoulements anisotropes s'appliquent à des matériaux hétérogènes, comme les composites, les fibre, les résines et le bois.

Le deuxième chapitre présente des lois d'écoulements élastoplastiques des matériaux et des geomatériaux qui peuvent être introduites à partir des modèles élastoplastiques, qui sont basées sur les quatre notions fondamentales suivantes,

- la partition des déformations élastiques et plastiques,
- l'existence d'une surface de charge dans l'espace des contraintes,
- la loi d'écoulement,
- le type d'écrouissage.

Un cas plus général est celui de la loi d'écoulement non associée, elle est utile pour décrire certains matériaux ou phénomènes, et pratiquement indispensable en mécanique des sols. La loi d'écoulement associée est celle développée en identifiant la fonction potentielle avec la fonction de charge.

Le troisième chapitre traite un des problèmes principaux dans la théorie de plasticité qui doit décrire le comportement de l'écrouissage des matériaux dans le domaine plastique pour une histoire de chargement multiaxial et cyclique. Après la loi d'écoulement, une règle d'écrouissage est nécessaire pour accomplir la description du matériau. Quand l'état initial de l'écoulement existe, la règle de l'écrouissage définit sa modification durant le processus de l'écoulement plastique.

Les deux règles de l'écrouissage largement répandues sont ceux de l'écrouissage isotropique et l'écrouissage cinématique. Bien que le modèle de l'écrouissage cinématique soit plus réaliste puisqu'il explique l'effet de l'anisotropie de Baushinger dû à la déformation plastique, une certaine difficulté apparaît quand il s'agit d'un chargement plus complexe comportant (déchargement et le chargement suivant le long un chemin différent de contrainte).

Le quatrième chapitre : contient le modèle élastoplastique proposé ainsi que des applications sur un élément de structure sollicité à une combinaison de contrainte normale et tangentielle illustrant les possibilités de calcul du programme que nous avons élaborés dans le cadre de ce travail. On peut conclure qu'on peut analyser et actualiser à chaque instant les caractéristiques de chaque surface d'écoulement.

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

1 : P. MESTAT & Y. RIOU (2001)

Dans la référence [25] les auteurs présentent un travail dans lequel ils proposent une méthodologie de détermination des paramètres, d'une loi de comportement adaptée aux sables et introduite dans les logiciels de calcul par éléments finis.

Sachant que pour les lois les plus courantes, les paramètres sont bien connus : module élastoplastique, coefficient de Poisson, cohésion, angle de frottement et de dilatance, la détermination de leurs valeurs pour une couche de sol donnée ne pose pas de problème particulier ; à condition d'avoir suffisamment d'informations géotechniques. En revanche, pour les lois les plus complexes comme les modèles élastoplastique à plusieurs mécanismes, il y a lieu de développer une démarche originale pour tirer le meilleur parti des résultats des essais courants de mécanique des sols. Parmi ces modèles, les auteurs appliquent la loi de comportement élastoplastique avec deux mécanismes d'écrouissage de **P.Vermeer** qui a fait l'objet de plusieurs applications ayant nécessité le développement d'une méthodologie originale et pratique pour l'estimation des valeurs des paramètres.

Plusieurs autres études ont montrés la simplicité de mise en œuvre de ce modèle et sa bonne performance dans la simulation théorique des essais triaxiaux. Les bonnes concordances observées entre les résultats théoriques et expérimentaux montrent le bien-fondé de cette stratégie de détermination et confirment la capacité de la loi de **P.Vermeer** à décrire avec peu de paramètres le comportement des sables sous sollicitations monotones.

En revanche, les auteurs concluent que ce modèle n'est pas adapté au cas des chargements cycliques.

2 : J. DESTRUES (2002)

Dans la référence [33], l'auteur présente une étude sur la simulation d'un problème aux limites en s'inspirant du critère de Drucker Prager qui est une généralisation du critère de Von Mises pour les matériaux à frottement interne.

Le critère de Drucker Prager est une première option simple pour la modélisation des matériaux à frottement interne. En effet, la symétrie de révolution de la surface offre certaines facilités d'implémentation numérique, sachant que le modèle est un standard qu'on trouve pratiquement dans tous les codes de calcul aux Éléments Finis. Cependant, il faut prendre garde aux limites de validité du critère par rapport au choix des angles de frottement,

pour la bonne raison que la surface représentant le critère de Von Mises est un cylindre parallèle à la trisectrice de l'espace des contraintes principales, et celle représentant le critère de Drucker Prager est un cône à section circulaire admettant comme axe, l'axe de symétrie (fig. 1). Ainsi le déviateur admissible pour un état de contrainte dépend de la contrainte moyenne, ou en d'autres mots du premier invariant de cet état, ce qui caractérise la notion de frottement.

Dans une simulation d'un problème aux limites, si le modèle de comportement pour le matériau utilise le critère de Drucker Prager, un choix de paramètres tels que l'angle de frottement de compression triaxiale axisymétrique serait supérieur à 36, 8 degrés (ou le demi angle du cône supérieur à 35, 3 degrés) conduira à prédire des tractions dans un milieu non cohérent, ce qui est clairement irréaliste. Dans un milieu cohérent, l'existence de traction est admissible, aussi pourrait-on considérer que la restriction sur les angles ne s'applique plus. Cependant, l'auteur montre que lorsque l'angle du cône tend vers la limite définie pour le milieu non cohérent, la cohésion admissible pour l'extension tend vers zéro et qu'au-delà de la limite, les angles de frottement ne sont plus définis. L'auteur conclue que, dans ces conditions, il paraît raisonnable de limiter l'usage du critère de Drucker Prager, en milieu cohérent ou non, à des angles de frottement inférieurs aux limites énoncées.

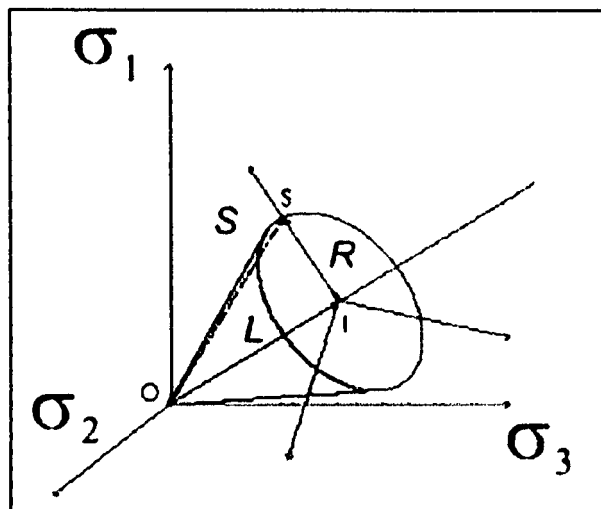


Fig. 1 : Critère de Drucker Prager dans l'espace des contraintes principales [33]

3: J.P. BARDET (1990)

Dans son article cité dans la référence [12], J. P. BARDET propose une formulation qui prend en compte l'angle de Lode α pour des matériaux élastoplastiques sensibles à la pression isotropes. L'auteur explique que beaucoup de modèles conventionnels de plasticité des matériaux sensibles à la pression ont été formulés en termes de premier et deuxième

invariants de contraintes et cela, sans considérer le troisième invariant [Roscoe et Burland (1968)]. Cette hypothèse de simplification néglige les observations expérimentales faites pendant l'essai axial et indique que le troisième invariant de contrainte qui dépend de l'angle de Lodé, affecte de manière significative le comportement des sols, des roches et des bétons sensibles à la pression.

Après avoir passé en revue les définitions fondamentales de la plasticité isotrope, l'auteur présente les effets de α dans les modèles élastoplastiques isotropes, qui sont développés uniquement en termes de deuxième invariant de contrainte et où la contribution de α sur la direction, ainsi que l'amplitude de la contrainte plastique par accroissement sont isolées dans d'autres contributions plastiques. Une classe particulière de potentiel d'écoulement plastique des fonctions est présentée pour des matériaux sensibles à la pression. L'auteur illustre aussi cette classe de fonctions par sept exemples de dépendances trouvées dans la littérature et par neuf références (exemple : la dépendance de LMN). Dans son dernier chapitre, l'auteur applique la formulation générale pour présenter CY dans l'écoulement et les modèles des fonctions potentielles plastiques de Roscoe et de Burland. L'exécution du modèle modifié est présentée en comparant les résultats expérimentaux et analytiques dans le cas de chargement triaxial sur l'argile normalement consolidé.

J.P. BARDET donne une formulation assez générale pour présenter CY dans les modèles élastoplastiques isotropes développés seulement en termes de premier et deuxième invariant des contraintes.

4 : JEAN HERVE PREVOST (1977)

L'auteur [30] présente une analyse sur le comportement monotone et cyclique de l'argile où un modèle analytique réel du comportement « contrainte-déformation » du sol a été traité. Cependant, afin de faire des prévisions précises, la situation préoccupante de l'auteur a été d'analyser des structures "offshore".

Cet article est axé sur le comportement des bases entièrement saturées de l'argile, pour lesquelles, l'auteur suppose que le chargement cyclique résultant des forces peut se produire sans changement de volume. L'effet de ces forces est simulé, en s'appliquant aux fonctions sinusoïdales horizontales de structures dont la gamme de fréquences varie de 0,05 à 0,5 hertz. Les matériaux de base sont alors soumis aux cas tridimensionnels complexes « contrainte-déformation », en impliquant des cycles de chargement, déchargement et rechargement.

Le modèle étudié est un modèle analytique simple et réel qui décrit les propriétés anisotropes élastoplastiques. Les principes de base du modèle sont d'abord présentés avec une interprétation générale de sa caractéristique principale ainsi que des rapports « contrainte-déformation » utilisés dans l'analyse d'éléments finis. La polyvalence extrême du modèle est démontrée en utilisant les formules du comportement de l'argile dans des conditions de charge monotones et cycliques. Les paramètres sont déterminés en employant seulement les résultats à partir d'un essai expérimental de cisaillement simple avec contraintes et conditions de charge cycliques, monotones, rapides et lentes sur le même argile.

Le modèle présenté combine des propriétés de plasticité isotopique et cinématique avec le concept d'un champ de modules plastiques définis dans l'espace des contraintes par la configuration relative des surfaces d'écoulements. Le modèle fournit donc un outil extrêmement souple pour l'analyse du comportement réel des argiles soumis aux chemins de chargement complexes dans des conditions tridimensionnelles de contrainte.

Dans ce travail, l'auteur préconise que le modèle soit employé dans des formulations d'élément finies pour l'analyse du problème afin de calculer les contraintes et les déformations dans la base d'argile sous une structure "offshore" soumise au chargement complexe.

CHAPITRE.-I
CRITERE D'ECOULEMENT

CRITERE D'ECOULEMENT

I-1 : Introduction

Les lois élastoplastiques sont définies à partir des données d'un critère de rupture, caractérisant les propriétés de résistances résiduelles. Dans ce chapitre, nous présentons une synthèse des critères de plasticité isotrope et anisotrope, en distinguant ceux qui dépendent de la pression moyenne p et de ceux qui n'en dépendent pas. L'expression de la pression moyenne p s'écrit :

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}Tr(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

Tr : trace de $\boldsymbol{\sigma}$

Où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les contraintes principales.

I-2 : Critère d'écoulement

On dit que le matériau a atteint le seuil d'écoulement quand une déformation irréversible est obtenue dès qu'un niveau de contrainte est atteint. Un critère d'écoulement indique qu'une combinaison de transition des composantes de la contrainte de déformation d'une phase élastique (récupérable) à une phase (permanente) plastique a lieu.

Un écoulement uniaxial se produit quand la contrainte uniaxiale atteint la valeur de la contrainte limite σ_y en traction, c'est-à-dire que : $\sigma = \sigma_y$ (Figure (I.1a)).

Quand est-ce qu'un écoulement se produit dans des états de contraintes multiaxiales ?

La (Figure (I.1b)) schématise les théories phénoménologiques donnant la réponse appelée "critères d'écoulement".

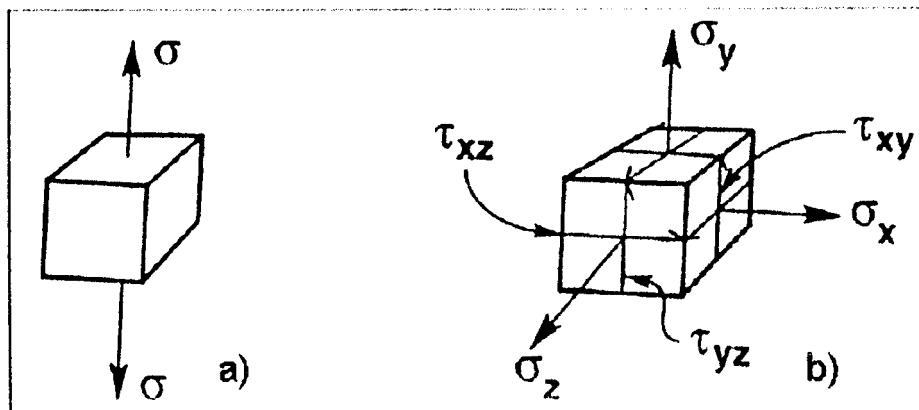


Fig. I.1 : (a) Comparaison de la contrainte uniaxiale σ avec la contrainte limite en traction σ_y .

(b) Quand l'écoulement se produit –il dans des états de contraintes multiaxiales ?

I-3 : Critère d'écoulement isotrope

I-3-1 : Critère d'écoulement indépendant de la pression moyenne

Pour les surfaces indépendantes de l'écoulement de la pression hydrostatique (comme les aciers), leurs méridiens sont des lignes rectilignes parallèles à l'axe hydrostatique.

La contrainte de cisaillement doit être la cause principale de l'écoulement pour ce type de matériaux. Donc, c'est la contrainte de cisaillement qui est importante, et non sa direction. Il suit que leur comportement élasto-plastique en traction et en compression devrait être équivalent pour les matériaux indépendants de la pression hydrostatique.

I-3-1-1 : Critères d'écoulements de limite élastique basés sur les contraintes

A - Critère de Rankine (Hypothèse de grande contrainte principale)

On suppose que la limite élastique est déterminée par des valeurs limites portant sur les contraintes normales principales [9]. On fait donc un essai de traction, pour déterminer la contrainte normale maximale σ_e , et un essai de compression pour déterminer la contrainte normale minimale σ'_e . Le critère s'écrit donc :

$$\sigma'_e < \sigma_i < \sigma_e \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (I.1)$$

Dans la représentation de Mohr, ce critère revient à limiter les cercles de Mohr entre les abscisses σ'_e et σ_e .

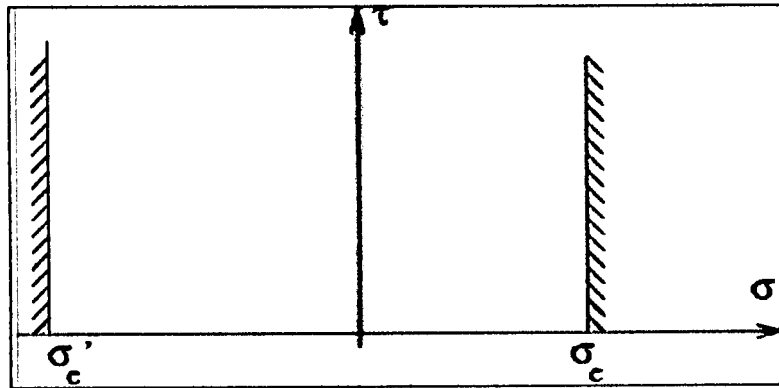


Fig.I. 2 : Critère de Rankine, dans le plan de Mohr

Avec ce critère, la contrainte tangentielle est implicitement limitée à $\frac{1}{2}(\sigma_e - \sigma'_e)$ et la contrainte principale intermédiaire σ_e ne joue aucun rôle. Dans la représentation octaédrique, le point représentatif des tenseurs doit être à l'intérieur d'un cube de côté $\{\sigma_e, \sigma_e, \sigma_e\}, \{\sigma'_e, \sigma'_e, \sigma'_e\}$.

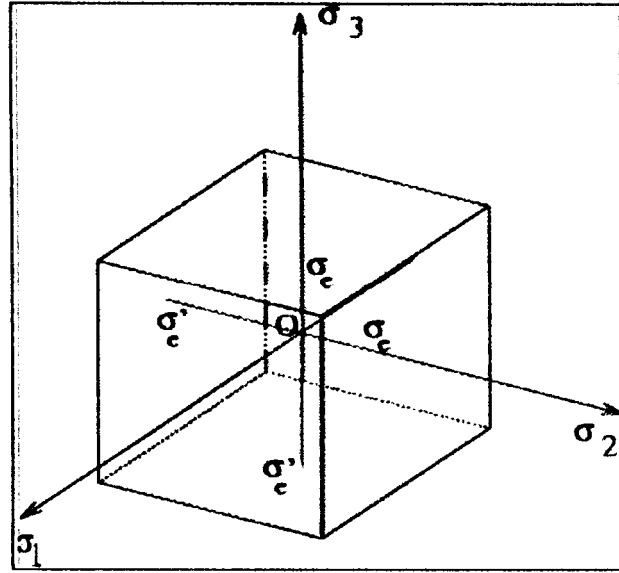


Fig.I. 3 : Critère de Rankine, dans la représentation octaédrique

L'écoulement a lieu si l'état de contrainte se positionne sur la frontière du cube. Ce critère peut être en contradiction avec un essai de torsion, qui donne en général une limite en contrainte tangentielle différente de $\frac{1}{2}(\sigma_e - \sigma_e')$

B - Critère de Tresca

Ce critère fut introduit par Tresca (1864) à la suite d'expérience sur le plomb [2]. Tresca conclut que le début de l'écoulement se produit lorsque la contrainte de cisaillement maximale atteint une valeur critique. Dans le cas général, la contrainte de cisaillement maximale $\tau_{\max}$ est donnée par la mesure du rayon du plus grand cercle de Mohr, soit :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (1.2)$$

où :

- $\sigma_{\max}$ est la plus grande de trois contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. (en valeur algébrique),
- $\sigma_{\min}$ la plus petite (toujours en valeur algébrique).

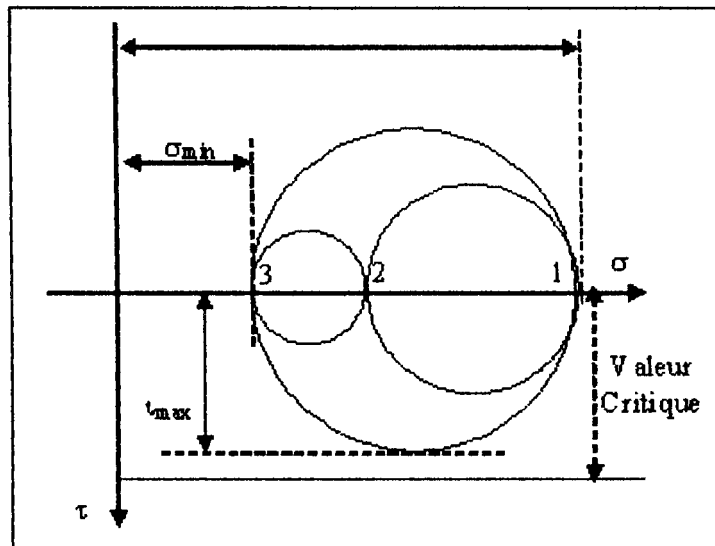


Fig.I.4 : Tri- cercle de Mohr du critère de Tresca [2]

Considérons maintenant le cas du chargement uniaxial.

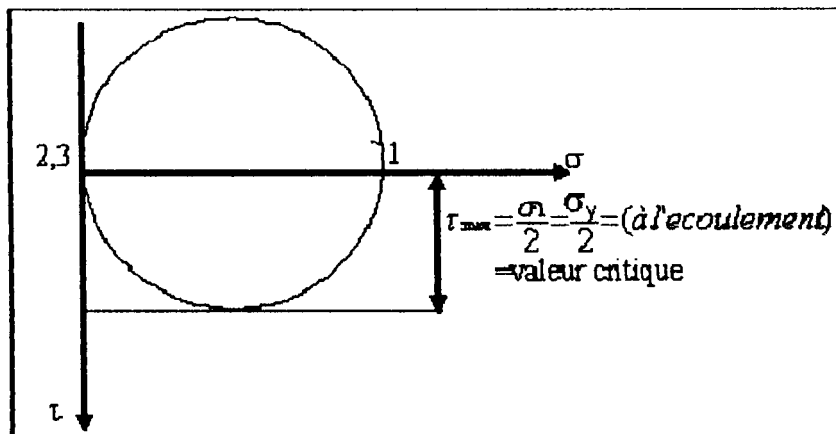


Fig.I. 5 : Cercle de Mohr au cas du chargement uniaxial
(Au début de l'écoulement)

Les contraintes principales s'expriment ainsi :

$$\sigma_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad \text{alors :} \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} \quad (I.3)$$

Au niveau de l'écoulement, on a $\sigma_1 = \sigma_y$ (à 0,2% de déformation permanente)

On obtient l'expression du critère :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y}{2} \quad \text{où :} \quad \frac{1}{2} = \sup (|\sigma_i - \sigma_j|) = \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\text{D'où : } f = \sup (|\sigma_i - \sigma_j|) - \sigma_y = 0 \quad (\text{I.4})$$

L'essai de traction uniaxial permet de déterminer de façon précise la valeur de σ_y , on peut considérer que $\frac{\sigma_y}{2}$ représente la valeur critique annoncée dans le critère de Tresca.

Par conséquent, dans le cas le plus général, l'équation (I.3) permet de prédire le début de l'écoulement. Considérons le cas de l'état plan de contrainte pour lequel les contraintes principales sont $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$ et $\sigma_3 = 0$. On peut être en présence de un ou ces cas de (figure I.6).

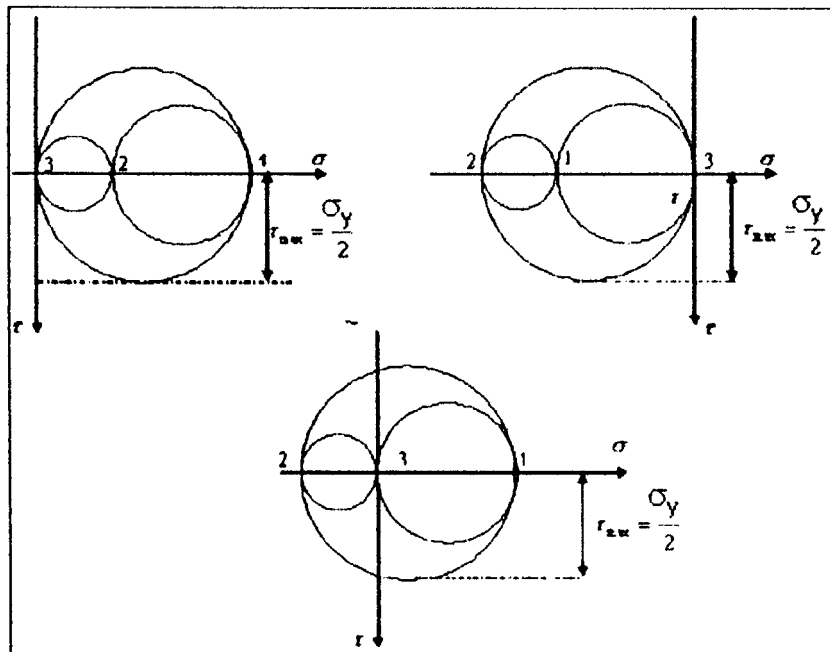


Fig. I.6 : Cercles de Mohr, état plan de contrainte

- a) Lorsque $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ figure (I, 6), on a $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$ l'écoulement se produit quand $\sigma = \sigma_y$.
- b) Lorsque $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2$ figure (I, 7), l'écoulement se produit quand $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_y$.
- c) Lorsque $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$ figure (I.8), l'écoulement se produit quand $|\sigma_2| = |\sigma_y|$.

Le raisonnement précédent demeure valable lorsqu'on inverse les positions relatives de σ_1 et σ_2 ce qui donne trois autres possibilités. La figure (I.7) est une représentation graphique du critère de Tresca appliqué à l'état plan de contrainte.

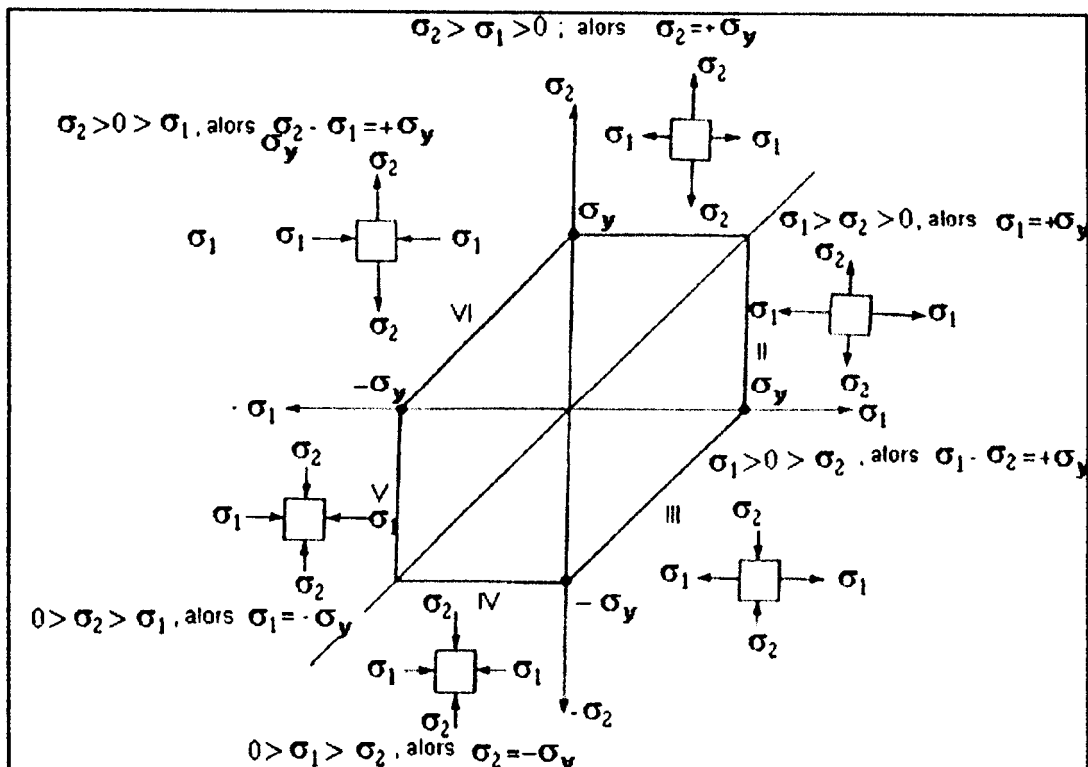


Fig. I.7: Representation graphique du critère de Tresca, état plan de contrainte

L'hexagone représente le seuil que pourront atteindre les contraintes au début de l'écoulement dans l'espace des contraintes principales, la surface de charge est un prisme parallèle à la trissectrice ξ . Sa section dans le plan deviatorique, π , (normale à la trissectrice de l'espace des contraintes principales) est un hexagone régulier. La figure (I. 8) représente cette surface dans l'espace des contraintes principales

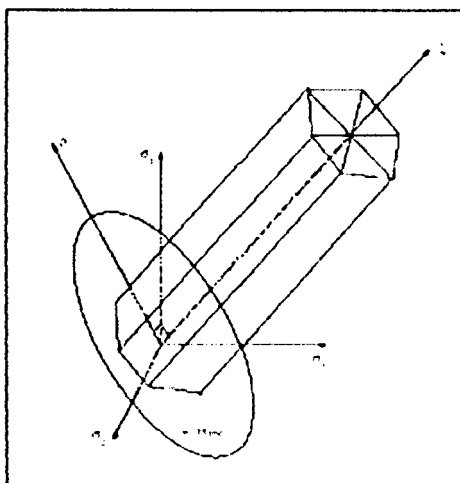


Fig. I.8 : Representation du critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales

Remarques,

1° Le critère de Tresca ne prédit aucun écoulement pour le cas de chargement hydrostatique ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$).

2° Pour le critère de Tresca, il n'existe pas de fonction de charge s'exprimant de façon polynomiale en fonction des invariants de contrainte : Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que la surface d'écoulement est un prisme hexagonal, c'est-à-dire une surface de J_2^3 possédant six arêtes, donc l'expression :

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 9S_y^2 J_2^2 + 6S_y^4 J_2 - S_y^6, \quad (I.5)$$

proposée par certains auteurs est incorrecte [1].

C - Critère expérimental de Caquot

A partir d'essais sur une machine combinant la traction, la compression, la torsion et des pressions intérieures ou extérieures sur une éprouvette en forme de tube mince, Caquot a tracé l'enveloppe expérimentale limites dans le plan de Mohr. On obtient une courbe dite *courbe intrinsèque de Caquot* d'allure parabolique. Il se trouve que dans ces expériences, la contrainte principale σ_{xx} est toujours négligeable devant σ_{yy} . Il n'y a donc en fait que deux contraintes principales (σ_{xx} et σ_{zz}) qui varient véritablement. Il faut évidemment faire une courbe intrinsèque pour chaque matériau. Dans le plan de Mohr, la courbe a l'allure suivante :

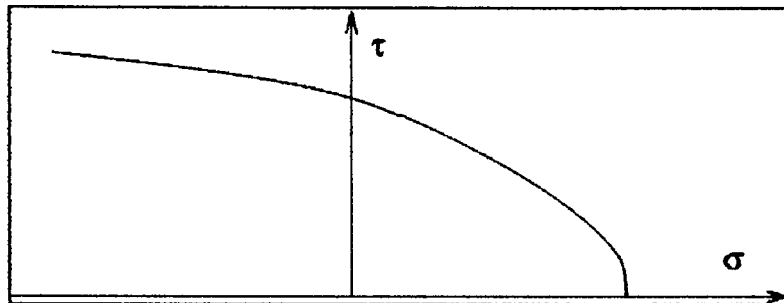


Fig. I. 9 : Critère de Caquot , plan de Mohr

On évite la représentation octaédrique pour ce critère, car l'une des contraintes étant toujours presque nulle, on ne parcourt pas tout l'espace avec les résultats expérimentaux.

D - Critère parabolique

Les essais de Caquot étant coûteux, on se contente d'un essai de compression et d'un essai de traction, et on construit une parabole passant par les sommets S et S'' des deux cercles de Mohr limites obtenus. Ce critère est surtout utilisé pour le béton.

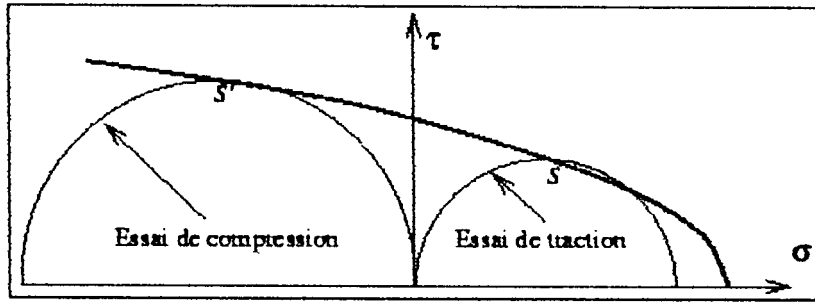


Fig I. 10 : Le critère parabolique, dans le plan de Mohr.

Un tenseur de contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ne satisfait au critère que si son sommet S (figure I.10), de coordonnées dans le plan de Mohr $\sigma = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}, \tau = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}$ est situé sous la parabole. Après calcul dans ce plan, ce critère peut s'écrire :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma_e - \sigma_e')(\sigma_1 + \sigma_3) \leq -\sigma_e \sigma_e' \quad (I.6)$$

Comme précédemment, ce critère ignore la variation de la contrainte normale principale intermédiaire.

I-3-1-2 : Critères d'écoulements de limite élastique basés sur l'énergie

On suppose que c'est l'énergie de déformation qui doit être limitée. Cette méthode prend donc en compte les valeurs des trois contraintes normales principales.

A- Critère d'énergie de distorsion maximale

De même que pour le critère de Tresca, le critère de Von Mises est un critère valable pour les matériaux isotropes appelé parfois « critère de scission octaédrale ». Il a été proposé indépendamment par Beltrami (1903) [9], Hubert (1904) [9], Von Mises (1913) [2] et Hencky (1924) [9]. Dans le critère de Von Mises, on considère que le seuil de plasticité est lié à l'énergie élastique de cisaillement. L'énergie de déformation élastique w_e se décompose en deux parties : l'énergie de variation de volume w_v et l'énergie de distorsion w_d .

1°- L'énergie de variation de volume W_v :

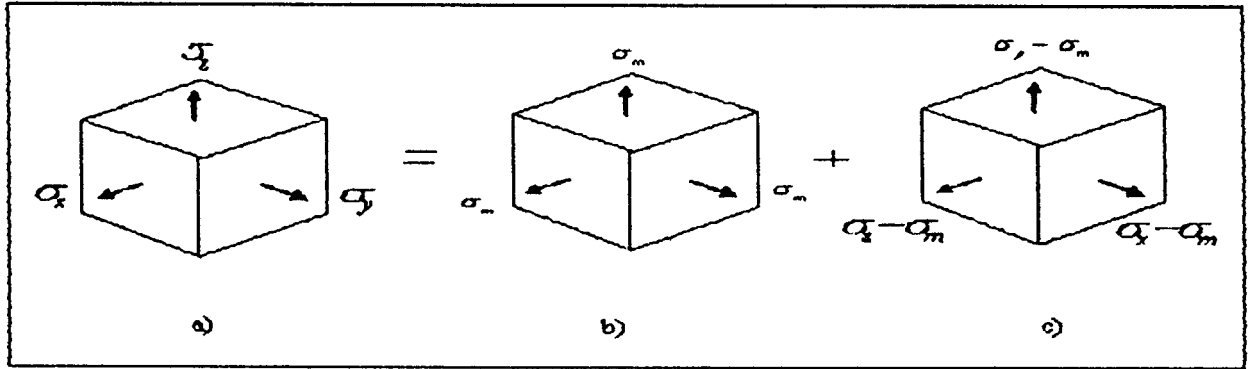


Fig. I. 11 : Décomposition des contraintes normales

Soit un élément, de volume initial $V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z$ après déformation, on peut écrire :

$$V_f = \Delta x(1 + \varepsilon_x) \Delta y(1 + \varepsilon_y) \Delta z(1 + \varepsilon_z) \quad (I.7)$$

La variation de volume est alors :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_f - V_0}{V_0} = \frac{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)\Delta x \Delta y \Delta z - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{xyz} \quad (I.8)$$

et puisque $\varepsilon < 1$, on a : $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_v$ (I.9)

On exprime le module de variation de volume K de la relation suivante :

$$K = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (I.10)$$

On considère maintenant les contraintes normales agissant sur l'élément en deux groupes, en fonction de la contrainte σ_m . On obtient alors :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (I.11)$$

la variation de volume à la situation de la figure (I.11a).

$$\varepsilon_v^a = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (I.12)$$

par contre, la variation de volume à la situation de la figure (I.11b).

$$\varepsilon_v^b = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \sigma_m = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1 - 2\nu)}{E} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_v^a \quad (I.13)$$

Il n'existe aucune variation de volume à la situation **figure (I.11c)**. Dans la **figure (I.11b)**, on peut définir l'énergie de variation de volume w_v (pour un volume unitaire).

$$W_v = \frac{1}{2} \sigma_m (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{6} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{6} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \frac{(1-2\nu)}{E} \quad (I.14)$$

2°- Energie de distorsion W_d

De la **figure (I.11c)**, l'énergie W_d (à laquelle s'ajoute l'énergie développée par les contraintes de cisaillement, énergie qui ne s'applique à aucune variation de volume) correspond à une distorsion :

$$W_d = W_t - W_v \quad (I.15)$$

W_t : Energie totale

$$W_t = \frac{1}{2E} \int_v (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) dV - \frac{\nu}{E} \int_v (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) dV + \frac{1}{2G} \int_v (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) dV$$

$$W_t = \frac{1}{2G} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (I.16)$$

Energie de variation de volume W_v :

$$W_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \quad (I.17)$$

$$W_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x \sigma_y + 2\sigma_y \sigma_z + 2\sigma_z \sigma_x) \quad (I.18)$$

Energie de distorsion W_d :

$$W_d = W_t - W_v$$

$$W_d = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (I.19)$$

C'est l'expression de l'énergie de distorsion, sur laquelle repose le critère de Von Mises.

Lorsqu'on considère dans l'espace des contraintes principales à trois dimensions, l'énergie de distorsion devient :

$$W_d = \frac{1}{12D} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (I.20)$$

On calcul ensuite l'énergie de distorsion W_d^* au début de l'écoulement, pour le cas de chargement uniaxial ($\sigma_1 = \sigma_y$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), l'équation (I.20) donne :

$$W_d^* = \frac{1}{12G} (2\sigma_y^2) = \frac{\sigma_y^2}{6G} \quad (I.21)$$

Le critère prédit que le début de l'écoulement se produira lorsque $W_d = W_d^*$ d'où :

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (I.22)$$

Considérons le cas de l'état plan de contrainte pour lequel les contraintes principales sont ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$ et $\sigma_3 = 0$).

L'équation (I.22) donne : $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2]} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (I.23)$

L'équation (I.23) correspond à une ellipse, laquelle est représentée graphiquement à la figure (I.12).

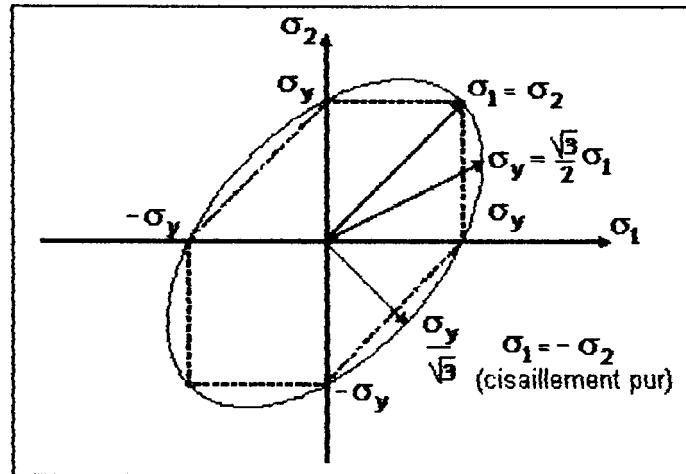


Fig.I. 12 : Représentation graphique du critère de Von Mises, état plan de contrainte

A titre comparatif, le critère de Tresca est également représenté. Les deux critères se rejoignent au sommet de l'hexagone. La représentation du critère dans l'espace des contraintes principales est un cylindre dont l'axe est la trisectrice de cet espace. Dans le plan deviateur, sa section est un cercle. La figure (I.13) donne la représentation dans l'espace des contraintes principales.

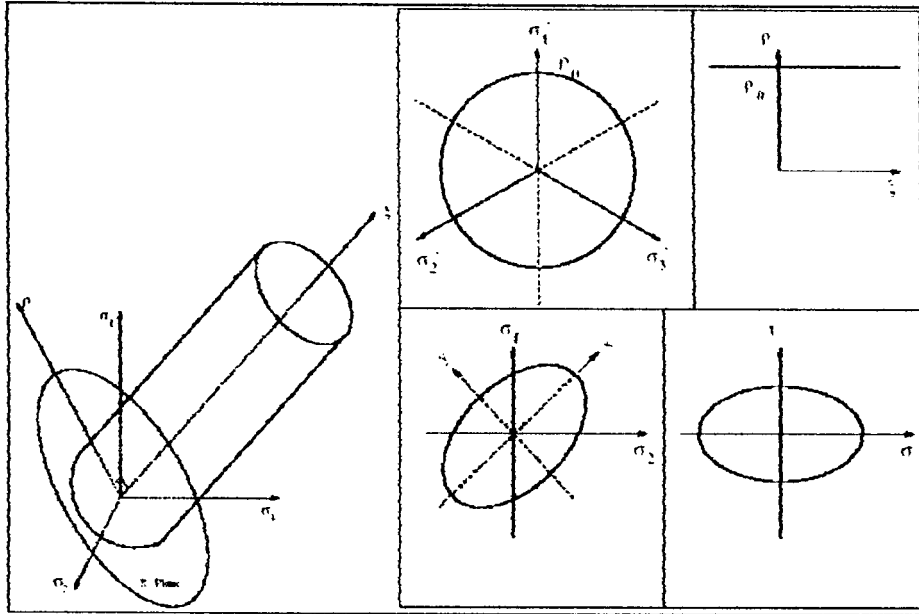


Fig. 1.13 : Représentation du critère de Von Mises

- La représentation du critère dans l'espace des contraintes principales est un cercle dont l'axe est la trisectrice dans cet espace.
- Dans le plan deviatorique π le critère d'écoulement est :

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \quad (1.24)$$

- **Plan méridien :** Les méridiens de la surface sont des lignes rectilignes qui se coupent avec l'axe ξ .

Remarque:

1° Le critère de Von mises ne prédit aucun écoulement pour le cas de chargement hydrostatique ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$).

2° Le critère de Von mises convient pour les matériaux ductiles mais non pour les matériaux fragiles, car il est fondé sur le seul essai de traction.

3° La représentation du critère de Von mises est très proche de celle du critère de Tresca. l'écart le plus grand a lieu, par exemple selon OH, lorsque $\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2}$; le critère de Tresca,

équation $\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_y$ donne alors $(\sigma_2)_{Tresca} = \sigma_y$, et celui de Von mises $\sigma_y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$.

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^2 + \sigma_2^2 - \frac{\sigma_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} (\sigma_2)_{Vonmises} \quad (1.25)$$

D'où

$$(\sigma_2)_{\text{Von Mises}} = \sqrt{\frac{3}{4}} (\sigma_2)_{\text{Tresca}} = 1.15 (\sigma_2)_{\text{Tresca}} \quad (1.26)$$

Soit un maximal de l'ordre de 15%.

B - Critère d'énergie de Torre-Stass

Il se produit un écoulement lorsque la scission octaédrale (τ_{oct}) atteint une valeur fonction de la contrainte normale octaédrique (σ_{oct}). Par rapport au critère de Von mises, il tente de tenir compte de différences réelles existant entre les limites d'élasticité en traction et en compression de certains métaux.

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.27)$$

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (1.28)$$

La fonction choisie est telle que

$$(\tau_{oct})^2 = a + b(\sigma_{oct})$$

Les constantes a et b sont déterminées en appliquant le critère aux essais de traction et de compression ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$).

Si la valeur de résistance limite admise est R_e en traction et R'_e en compression, la formulation de l'équation précédente permet d'obtenir le système suivant,

$$\frac{2}{3} R_e^2 = a + b \frac{R_e}{3} \quad \text{en traction } (\sigma_1 = R_e) \quad (1.29)$$

$$\frac{2}{9} R_e'^2 = a - b \frac{R_e'}{3} \quad \text{en compression } (\sigma_2 = R_e') \quad (1.30)$$

La résolution de ce système donne

$$a = \frac{2}{9} R_e \cdot R_e' \quad (1.31)$$

$$b = \frac{2}{3} (R_e' - R_e) \quad (1.32)$$

Le système s'écrit alors

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 2(R_e' - R_e)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2R_e R_e' \quad (1.33)$$

Où :

$$9\tau_{oct}^2 + 2(R'_e - R_e).3\sigma_{oct} = 2R'_e.R_e \quad (I.34)$$

En état plan de contrainte ($\sigma_3 = 0$), il vient

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 + (R'_e - R_e)(\sigma_1 + \sigma_2) = R'_e.R_e \quad (I.35)$$

L'image de ce critère est donc également une ellipse, mais de centre $\omega[-(R'_e - R_e), (R'_e - R_e)]$; le grand axe est la première bissectrice. En cisaillement pur ($\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$). La valeur limite est donc

$$\tau_e = \sqrt{\frac{R'_e.R_e}{3}} \quad (I.36)$$

Ce critère est considéré comme tout a fait général; lorsque $R'_e \rightarrow R_e$ on retrouve le critère de Von Mises.

En ce qui concerne la détermination de la contrainte équivalente dans le cas des poutres, elle ne peut être déterminée comme le cas de critère de Von Mises; elle nécessite l'introduction de la notion de coefficient de sécurité. Sa formulation est alors la suivante

Avec $s = \frac{R'_e}{R_e} \quad \sigma_{eq} = \frac{1}{2s} \left[(s-1)\sigma + \sqrt{(s-1)^2\sigma^2 + 4s(\sigma^2 + 3\tau^2)} \right] \quad (I.37)$

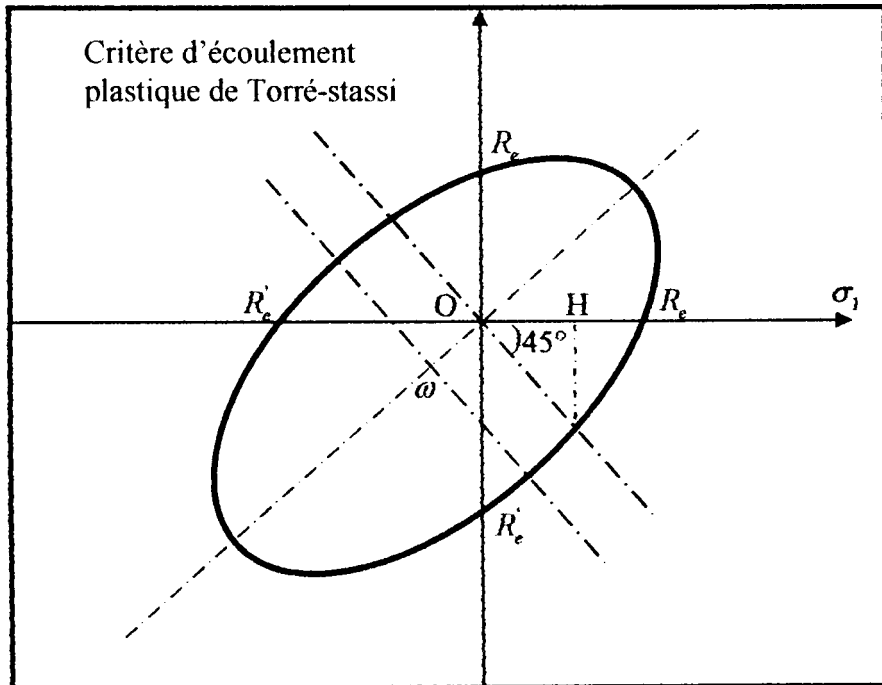


Fig.I .14 : Image dans le plan ($\sigma_3 = 0$) du critère de Torre-Stassi

Remarque :

1° Critère général, peu usité (par méconnaissance de R'_e).

2° La formulation comprend les caractéristiques mécaniques élastiques en traction et en compression, ce qui rend son utilisation très délicate. Il est très difficile, en effet, de mesurer la résistance à rupture à la compression des aciers.

C - Critère d'énergie de Beltrami

On suppose que la limite élastique est déterminée par une valeur limite de l'énergie de déformation par unité de volume. On fait un essai de traction pour déterminer l'énergie de déformation limite.

Dans un essai de traction uniaxial, l'énergie de déformation par unité de volume s'écrit :

$$W_d = \frac{1}{2E} \sigma_e^2 = \frac{1}{2} \sigma_e \cdot \varepsilon_e \quad (I.38)$$

et l'énergie de déformation totale est :

$$W_t = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (I.39)$$

L'écoulement a lieu si l'énergie totale de déformation par unité de volume est égale à l'énergie de déformation à l'écoulement en traction ou en compression. Le critère en traction linéaire isotrope s'écrit donc :

$$\frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \leq \frac{1}{2E} \sigma_e^2 \quad (I.40)$$

d'où :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_e^2 \quad (I.41)$$

Où :

σ_e : la limite élastique trouvée dans l'essai de traction.

Cas bi axial ($\sigma_3 = 0$) ; l'équation (I.41) devient :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_e^2 \quad (I.42)$$

C'est l'équation d'une ellipse dans le plan $\sigma_1\sigma_2$. A partir de l'équation (I.42), il apparaît un écoulement sous une très grande pression hydrostatique (tous les contours dans toutes les directions sont égaux). Le défaut de ce critère est qu'il nous impose des limites en traction et en compression opposées. De plus, il est souvent en désaccord avec les confrontations expérimentales.

I-3-1-3 : Critères de limite élastique basés sur déformation maximale

A - Critère de déformation de Saint-Venant

Saint Venant [9] a appliqué des critères d'écoulements de Tresca pour déterminer les contraintes élastoplastiques dans un cylindre soumis à la torsion. Un peu plus tard, il applique ce critère à celui d'un navire de pression intérieurement chargé.

Dans ce critère l'écoulement a lieu quand la valeur maximale de la déformation principale est égale à la déformation d'écoulement en traction (ou compression simple).

$$E\varepsilon_1 = (\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3) \quad f_1 = |\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3| - \sigma_y \quad \sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3 = \pm\sigma_y \quad (I.43)$$

$$E\varepsilon_2 = (\sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3) \quad f_2 = |\sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3| - \sigma_y \quad \sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3 = \pm\sigma_y \quad (I.44)$$

$$E\varepsilon_3 = (\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2) \quad f_3 = |\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2| - \sigma_y \quad \sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \pm\sigma_y \quad (I.45)$$

Pour le cas biaxial $\sigma_3 = 0$

$$E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \nu\sigma_2 = \pm\sigma_y \quad |\sigma_1| \geq \sigma_2 \quad (I.46)$$

$$E\varepsilon_2 = \sigma_2 - \nu\sigma_1 = \pm\sigma_y \quad |\sigma_2| > \sigma_1 \quad (I.47)$$

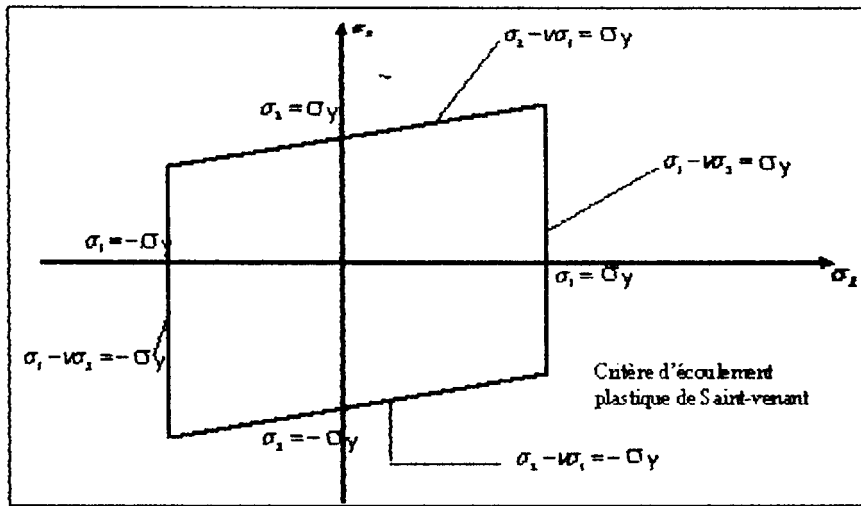


Fig.I .15: Déformation principale maximale

Cette théorie n'est pas en accord avec la majorité des expériences utilisées pour la conception de canons; seulement quelques résultats d'expérience de parois épaisses sont en accord avec cette théorie.

I-3-2 : Critère d'écoulement dépendant de la pression moyenne

Les matériaux de friction sensibles à la pression (tel que le sol, roche, etc.....) doivent considérer les effets des premiers et deuxièmes invariants de contrainte.

Les surfaces transversales d'une surface d'écoulement sont les courbes d'intersection entre la surface d'écoulement et le plan (ρ, θ) qui est perpendiculaire à l'axe hydrostatique

d'axe $\xi = \text{constant}$. La forme des sections transversales de cette surface d'écoulement aura une triple symétrie.

Les méridiens d'une surface d'écoulement sont les courbes d'intersection entre la surface et le plan méridien (ξ, ρ) qui contient l'axe hydrostatique. Le plan méridien avec $\theta = 0$ est le méridien de traction, et passe à travers le point d'écoulement de traction uniaxial. Par contre le plan méridien avec $\theta = \frac{\pi}{3}$ est le méridien de compression et passe à travers le point d'écoulement de compression uniaxial. Enfin, le rayon d'une surface d'écoulement sur le méridien de traction est ρ_t et sur le méridien de compression est ρ_c .

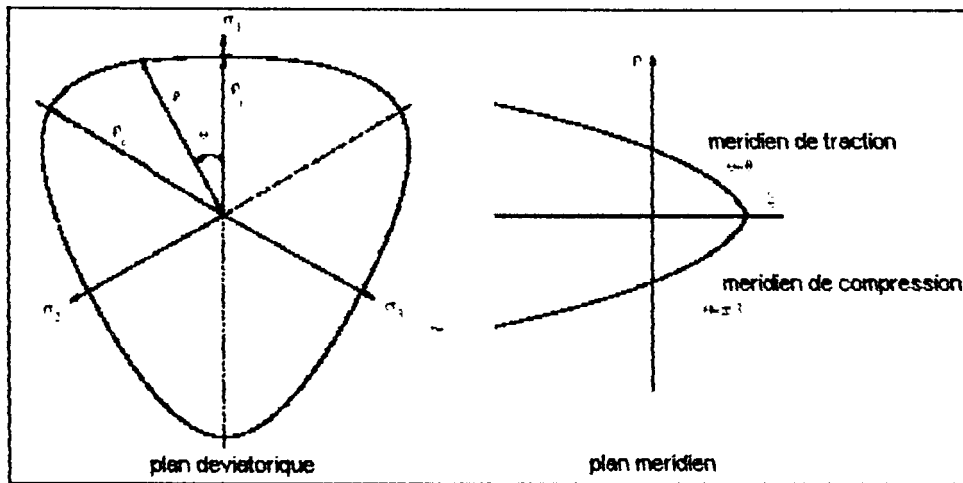


Fig. L16: Surface d'écoulement dépendant de la pression hydrostatique

A – Critère de Rankine

Le critère de Rankine postule que l'écoulement a lieu quand la contrainte principale maximale atteint la résistance à traction.

$$\sigma_1 = \sigma_y, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_y, \quad (1.48)$$

- La représentation du critère dans l'espace des contraintes principales est un tétraèdre régulier dont l'axe est la trisectrice de cet espace.
- Le critère d'écoulement dans le plan deviatorique π est un triangle régulier :

$$\begin{aligned} \rho_t &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{3}\sigma_y - \xi) \\ \rho_c &= \sqrt{2} (\sqrt{3}\sigma_y - \xi) \end{aligned} \quad (1.49)$$

- **Plan méridien** : deux lignes rectilignes qui se coupent d'axe ξ avec

$$\xi_y = \sqrt{3}\sigma_y \quad (I.50)$$

- Dans un sous-espace $\sigma_1\sigma_2$ (avec $\sigma_3 = 0$) deux lignes rectilignes:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_y \\ \sigma_2 &= \sigma_y \end{aligned} \quad (I.51)$$

- Dans un sous-espace σ_τ (avec $\sigma_3 = 0$) est une parabole :

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} + \left(\frac{\tau}{\sigma_y} \right)^2 = 1 \quad (I.52)$$

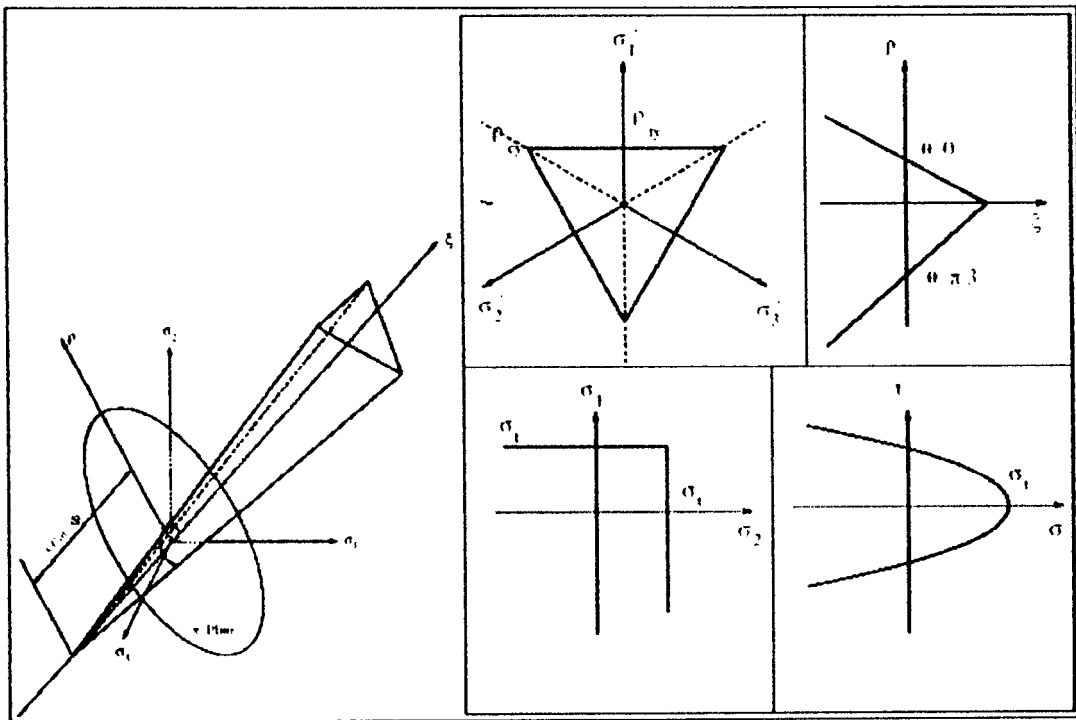


Fig.1.17 : Critère de Rankine

B - Critère de Mohr Coulomb

Le critère de Mohr Coulomb est une généralisation du critère de Tresca. Ces deux critères supposent que la plastification apparaît lorsque la contrainte de cisaillement atteint une valeur limite. Cependant, Tresca suppose que cette valeur est une constante alors que Mohr postule que pour une facette donnée, cette valeur est fonction de la contrainte normale.

Donnée par le plan de Mohr, la forme de la courbe enveloppe de ce critère est droite, appelée droite de Coulomb d'équation :

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi \quad (1.53)$$

Ou:

- σ et τ correspondent respectivement à la contrainte normale et à la contrainte de cisaillement sur une facette donnée,
- c représente la cohésion,
- ϕ est l'angle de frottement interne du matériau.

Les deux paramètres c et ϕ dépendent des propriétés du matériau considéré et qui peuvent être déterminés à partir des essais de traction et de compression uniaxiales.

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \\ \sigma_c &= \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Le critère d'écoulement de Mohr Coulomb peut être exprimé en fonction des invariants comme suit

$$\frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad \text{pour } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad (1.55)$$

- La représentation de ce critère dans l'espace des contraintes principales est une pyramide dont l'axe est la trisectrice de cet espace.
- Le critère d'écoulement dans le plan deviatorique π est un hexagone irrégulier.
- **Plan méridien:** deux lignes rectilignes qui se coupent l'axe ξ avec $\xi_y = \frac{2\sqrt{3}c}{\tan \phi}$, et les deux modules caractéristiques de la surface sur les plans deviatorique et méridien sont:

$$\begin{aligned} \rho_t &= \frac{2\sqrt{6}c \cos \phi - 2\sqrt{2}\xi \sin \phi}{3 + \sin \phi} \\ \rho_c &= \frac{2\sqrt{6}c \cos \phi - 2\sqrt{2}\xi \sin \phi}{3 - \sin \phi} \end{aligned} \quad (1.56)$$

- Dans un sous-espace $\sigma_1 \sigma_2$ (avec $\sigma_3 = 0$) la surface est un hexagone irrégulier. Dans le quart d'un plan $\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \leq 0$ le critère est :

$$m\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_c \quad (I.56)$$

Où :

$$m = \frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (I.57)$$

- Dans un sous-espace σ_r (avec $\sigma_3 = 0$) est une ellipse :

$$\left(\frac{\sigma + \frac{m-1}{2m} \sigma_c}{\frac{m+1}{2m} \sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\frac{\sqrt{m}}{2m} \sigma_c} \right)^2 = 1 \quad (I.58)$$

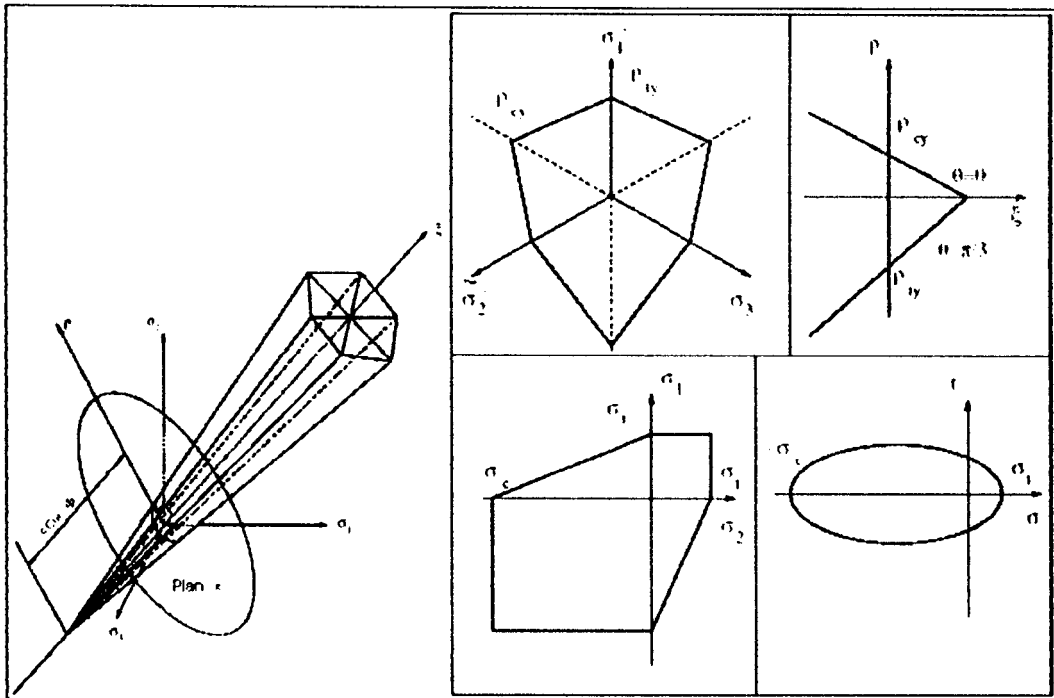


Fig. I.18 : critère de Mohr Coulomb

C - Critère d'écoulement de Drucker-Prager

Le critère de Drucker-Prager englobe celui de Von mises en tenant compte de la contrainte moyenne de la pression hydrostatique, p sur l'écoulement des matériaux à travers I_1 .

$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + J_2 - k \quad (I.59)$$

Les paramètres de résistance α et k peuvent être déterminés à partir des essais de traction et de compression uniaxial.

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{\sqrt{3}k}{1+\sqrt{3}\alpha} \\ \sigma_c &= \frac{\sqrt{3}k}{1-\sqrt{3}\alpha}\end{aligned}\tag{I.60}$$

Où :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{m-1}{\sqrt{3}(m+1)} \\ k &= \frac{2\sigma_c}{\sqrt{3}(m+1)}\end{aligned}\tag{I.61}$$

- La représentation du critère dans l'espace des contraintes principales est un cône dont l'axe est la trisectrice dans cet espace.
- La section transversale de la surface dans le plan deviatorique π est un cercle de rayon ρ .

$$\rho = \sqrt{2}k - \sqrt{6}\alpha\xi\tag{I.62}$$

- **Plan méridien** : Les méridiens de la surface sont des lignes rectilignes qui se coupent avec l'axe ξ à

$$\xi_y = \frac{k}{\sqrt{3}\alpha}\tag{I.63}$$

- Dans un sous-espace $\sigma_1\sigma_2$ (avec $\sigma_3 = 0$) la surface est une ellipse

$$\left(\frac{x + \frac{6\sqrt{2}k\alpha}{1-12\alpha^2}}{\frac{\sqrt{6}k}{1-12\alpha^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{1-12\alpha^2}}} \right)^2 = 1\tag{I.64}$$

Où :

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_2 - \sigma_1)\end{aligned}\tag{I.65}$$

- Dans un sous-espace σ_r (avec $\sigma_3 = 0$) est aussi une ellipse

$$\left(\frac{\sigma + \frac{3k\alpha}{1-3\alpha^2}}{\frac{\sqrt{3}k}{1-3\alpha^2}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\frac{k}{\sqrt{1-3\alpha^2}}} \right)^2 = 1 \quad (1.66)$$

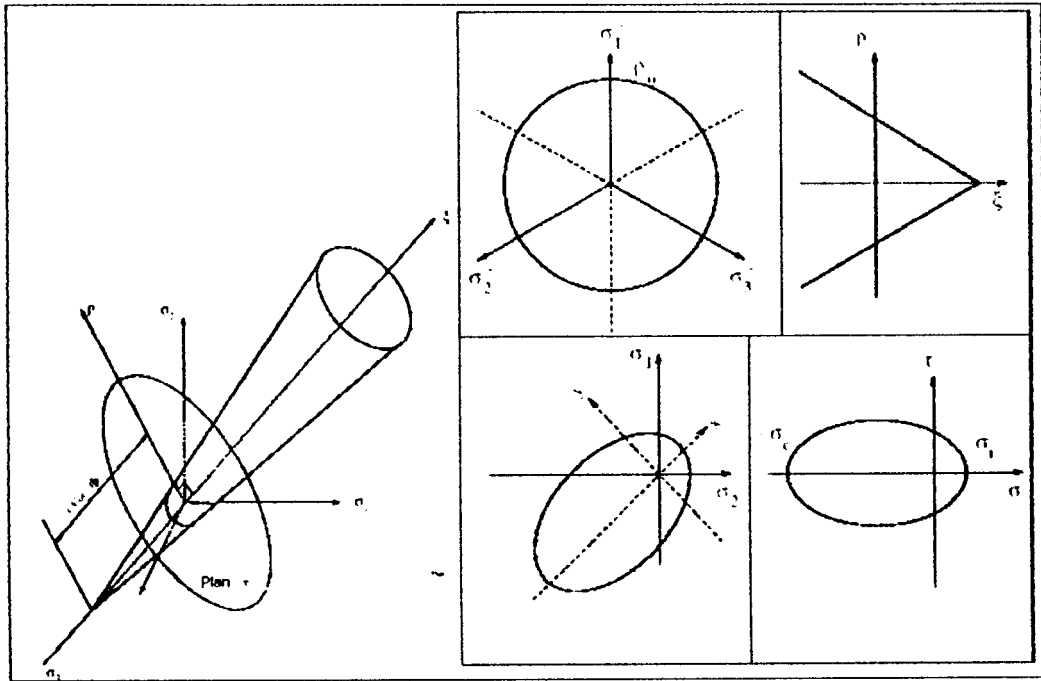


Fig.I.19 : Critère de Drucker-Prager

• **Comparaison** des critères de Mohr Coulomb et Drucker-Prager dans l'espace des contraintes principales.

Les constantes α et k sont définies selon que le critère de Drucker-Prager est circonscrit ou inscrit à celui de Mohr Coulomb.

Le critère de Drucker-Prager est circonscrit à celui de Mohr coulomb lorsque :

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (1.67)$$

$$k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}$$

-Le critère de Drucker-Prager est inscrit dans celui de Mohr Coulomb lorsque:

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}$$

$$k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}$$
(I.68)

La figure (I.20) donne la représentation du critère de Drucker-Prager comparée à celle du critère de Mohr Coulomb dans l'espace des contraintes principales. Il est moins apte à modéliser le comportement des géomatériaux mais bien plus simple conceptionnellement que le critère de Mohr Coulomb. En effet, ce dernier présente la particularité de posséder deux régimes différents, un régime de faces et régime d'arêtes, alors que le critère de Drucker-Prager ne présente qu'un régime conique. L'avantage de cette simplification réside dans le traitement numérique des équations, car en régime d'arête, il faut tenir compte d'un potentiel double.

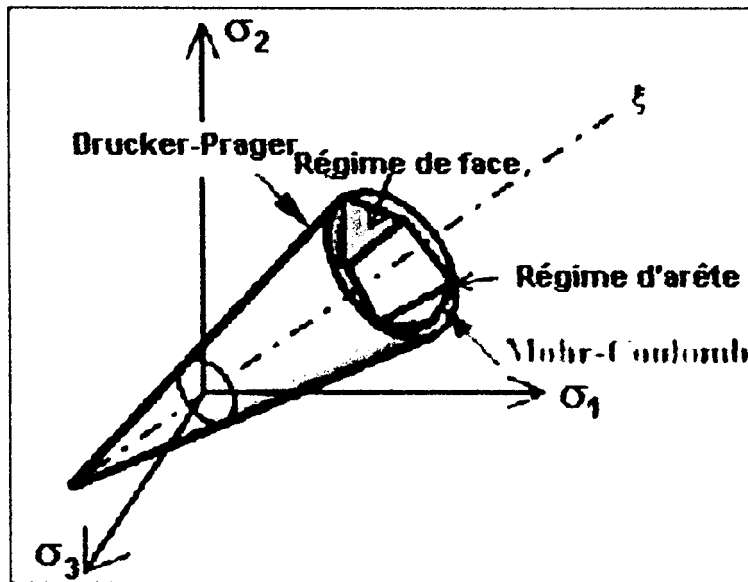


Fig.I .20: Comparaison des critères de Mohr Coulomb et Drucker-Prager dans l'espace des contraintes principales

D - Critère de Lade-Duncan

Le critère d'écoulement de Lade et Duncan [12] était proposé en 1975. La forme des invariants de contraintes de ce critère pour un matériau isotrope peut être exprimé en invariant de contrainte sous la forme suivante :

$$I_1^3 - \eta_1 I_3 = 0$$
(I.69)

Où η_l est une constante dimensionnelle du matériel, I_1 et I_3 sont le premier et le troisième invariant de contrainte.

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (I.70)$$

σ_1, σ_2 et σ_3 sont des contraintes principales. En utilisant la relation entre I_1, I_2, I_3 et α on écrit

$$I_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} I_2^3 \sin 3\alpha - \frac{1}{3} I_1 I_2^2 + \frac{1}{27} I_1^3 \quad (I.71)$$

Par utilisation de l'équation (II.69) et (II.71) le rapport $\frac{I_2}{I_1}$ soumis à l'équation cubique suivante:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^3 \sin 3\alpha - \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{9} - \frac{3}{\eta_l} \right) = 0 \quad (I.72)$$

Il peut être montré que $I_2 = \rho(\alpha) I_{2\max}$ est une solution de l'équation (II.72).

Avec :

$$\rho(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \beta + 1}} \frac{1}{\cos \theta} \quad (I.73)$$

Où :

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{6} \cos^{-1} \left(-1 + \frac{27}{2} \frac{\beta^2 (1-\beta)^2}{(\beta^2 - \beta + 1)^3} \sin^2 3\alpha \right) & \text{si } \alpha \leq 0 \\ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{6} \cos^{-1} \left(-1 + \frac{27}{2} \frac{\beta^2 (1-\beta)^2}{(\beta^2 - \beta + 1)^3} \sin^2 3\alpha \right) & \text{si } \alpha > 0 \end{cases} \quad (I.74)$$

$$I_{2\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^3} I_1 \quad (I.75)$$

La constante de Lade η_l est reliée à travers cette équation :

$$\eta_h = \frac{1}{\frac{1}{27} - \frac{\beta^2(1+\beta)(1-\beta^2)^2}{4(1+\beta^3)^3}} = \frac{(3-\sin\phi)^3}{(1-\sin\phi)\cos^2\phi} \quad (I-76)$$

Avec :

$$\beta = \frac{3-\sin\phi}{3+\sin\phi}$$

Sur la figure ϕ étant l'angle de friction mesuré durant la compression triaxiale, c'est-à-dire pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Quand β tend vers 1, qui correspond à $\phi = 0$, η_h est égale à 27. Quand sur la

figure β tend vers 0.5, qui correspond à $\phi = \frac{\pi}{2}$, η_h est infinie.

Il est en aucune valeur plus grande, donnée par Lade et Duncan pour I_2 en écoulement de traction $\left(\alpha = -\frac{\pi}{6}\right)$ que le critère de Mohr Coulomb.

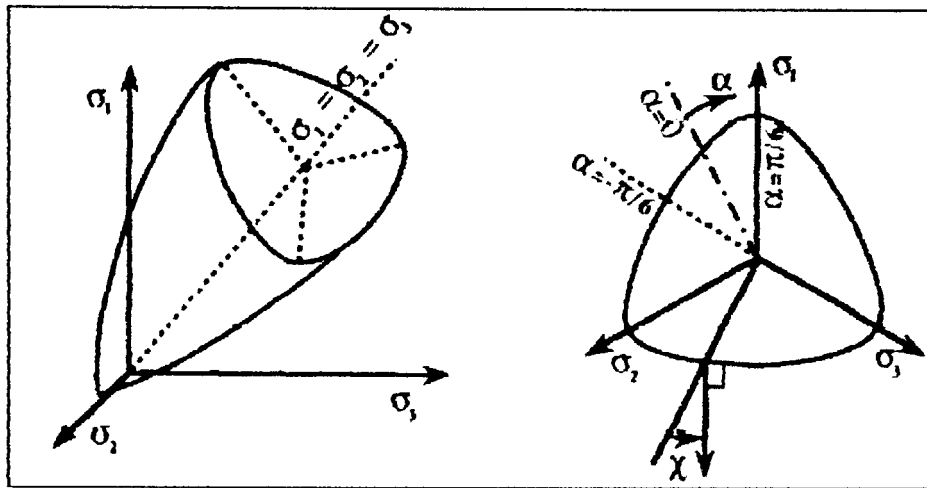


Fig. 1.21 : [12] surface d'écoulement typique pour un matériau isotropique sensible à la pression hydrostatique montré sur un espace de contrainte principale et sur un plan deviatorique.

I-4 : Critères anisotropes

Critère présenté au chapitre précédent concerne les matériaux isotropes ce qui conduit à d'importante d'écriture. Toute une famille de critère anisotrope ayant deux des propriétés simplificatrices de critère de Von mises :

- indépendance vis-à-vis de la pression hydrostatique est donc l'indépendance par rapport au seul déviateur de contrainte σ' ,
- la dépendance quadratique en fonction de ce déviateur.

Au lieu d'une expression isotrope de la fonction $\sigma' : \sigma'$ on adoptera maintenant l'expression "anisotropisée". $\sigma' : C : \sigma'$ où C est un tenseur d'ordre 4 dépendant du matériau et respectant les symétries de l'anisotropie. On dispose aussi dans un état donné d'écrouissage en anisotropie de 81 coefficients ajustables à l'expérience.

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (\text{Par raison de symétrie})$$

Ce qui ramène les 81 composantes de C à 21 coefficients indépendants, $C_{ijkl} = 0$ dues à l'indépendance vis à vis de la pression, qui ramène ces derniers à 15 coefficients.

A - Critère de Hill

Il correspond à une anisotropie particulière qui conserve trois plans de symétrie dans l'état d'écrouissage du matériau. L'intersection de ces trois plans sont les axes principaux d'anisotropie qui sont pris comme repère. Pour l'écriture du critère, soit (O, y_1, y_2, y_3) . Ce dernier se déduit de l'expression générale

$$\sigma' : C : \sigma' = 1 \quad (I-77)$$

avec :	$C_{1111} = F + H$	$C_{2222} = F + G$	$C_{3333} = G + H$
	$C_{1122} = -F$	$C_{2233} = -G$	$C_{3311} = -H$
	$C_{1212} = L/2$	$C_{2323} = M/2$	$C_{3131} = N/2$

Et les valeurs obtenus par symétrie, ce qui donne:

$$F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{31}^2 = 0 \quad (I-78)$$

F, G, H, L, M et N sont les six paramètres scalaires qui caractérisent l'état d'écrouissage anisotrope. On peut les déterminer à l'aide de trois expériences de tractions simples et trois expériences de cisaillement simple suivant respectivement les trois direction et plans principaux.

- Seuil de traction S_{F_1} dans la direction $y_1 \rightarrow F + H = \frac{1}{S_{F_1}^2}$.
- Seuil de traction S_{F_2} dans la direction $y_2 \rightarrow F + G = \frac{1}{S_{F_2}^2}$.
- Seuil de traction S_{F_3} dans la direction $y_3 \rightarrow G + H = \frac{1}{S_{F_3}^2}$.
- Seuil de cisaillement $S_{F_{12}}$ dans le plan $(O, y_1, y_2) \rightarrow L = \frac{1}{2Y_{F_{12}}^2}$.
- Seuil de cisaillement $S_{F_{23}}$ dans le plan $(O, y_2, y_3) \rightarrow M = \frac{1}{2S_{F_{23}}^2}$.
- Seuil de cisaillement $S_{F_{31}}$ dans le plan $(O, y_3, y_1) \rightarrow N = \frac{1}{2S_{F_{31}}^2}$.

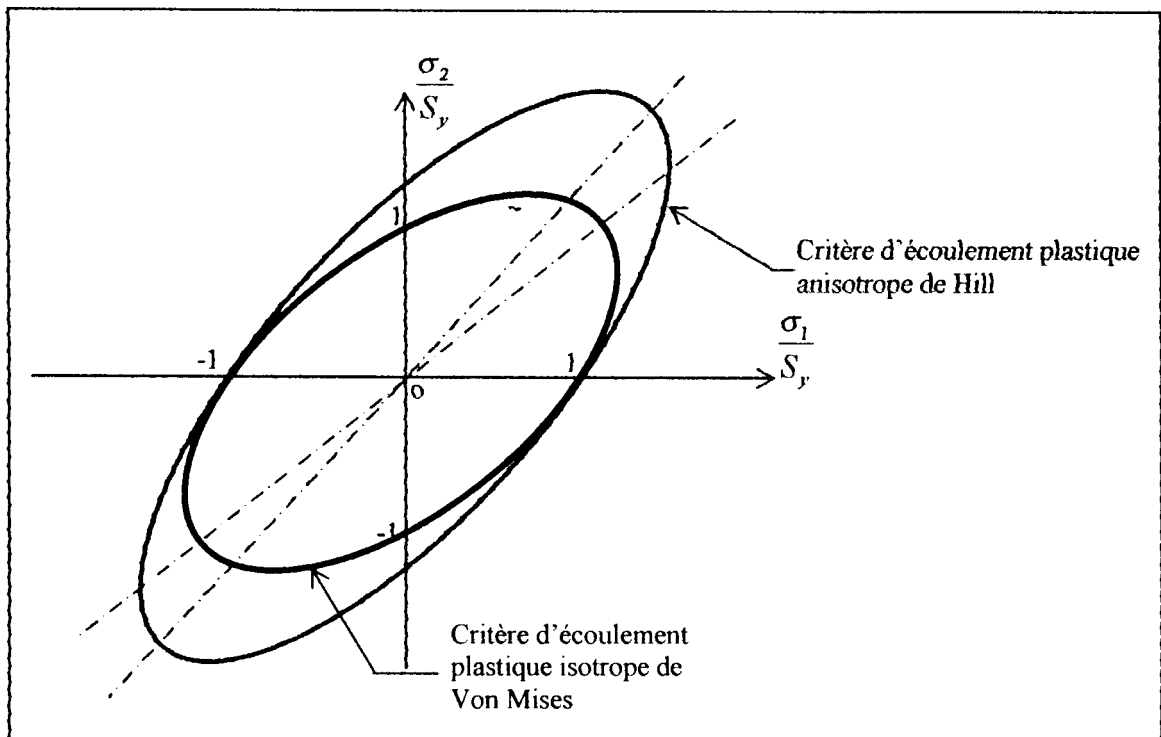


Fig.I. 22 : Exemple de matériaux plastiquement anisotrope, critère de Hill [1]

Bien qu'anisotrope ce critère ne rend pas compte de l'effet de Baushinguer : les seuils sont identiques en traction et en compression. Cependant il rend compte approximativement de l'état d'écrouissage initial des tôles laminées.

B - Approche de Hill

Le tableau 1 est consacré à la recherche de Hill [16]. Le critère quadratique classique de l'écoulement, est bien convenu à la texture spécifique et en métal, mais manque de la flexibilité. le vieux critère de Hill donne la corrélation avec des métaux ayant le r_0 plus grand que le coefficient moyen de Lankford mais le moins acceptable quand $\bar{r}$ est moins que 1. Cette valeur moyenne est calculée par :

$$\bar{r} = \frac{1}{4} (r_0 + 2r_{45} + r_{90})$$

Cette proposition a les avantages qui expliquent son utilisation intensive :

- elle améliore l'acceptation simple de négliger l'anisotropie,
- il est simple de mettre en application dans un code de FEM et disponible en nombreux codes commerciaux,
- seulement 3 essais de tension à 0° , 45° , 90° sont exigés pour déterminer les paramètres matériels.

Notations du tableau 1 :

A, B, C, F, G, H, L, M, N, a = paramètres du matériaux.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ = Composantes de contraintes dans les axes orthotropiques du matériau

σ_1, σ_2 = Principales composantes de contrainte orientées par un β en sens inverse de la notation des aiguilles d'une montre avec l'axe de RD.

σ_b : Valeur de l'écoulement sous l'état de contrainte equibiaxial plane,

τ : Contrainte d'écoulement en cisaillement pur parallèle aux axes orthotropiques
(Cas de contrainte plane)

σ_F : Contrainte d'écoulement sous la tension uniaxiale dans une direction de référence.

Lois Noms	Description	Caractéristiques
Hill 1948	$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 2\sigma_F^2$	Équation quadratique générale avec 6 paramètres, approximation brute de la forme de surface d'écoulement des modèles polycristal
Hill 1979	$F \sigma_y - \sigma_z ^a + G \sigma_z - \sigma_x ^a + H \sigma_x - \sigma_y ^a + A 2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z ^a + B 2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x ^a + C 2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y ^a = \sigma_F^a$	Hill avec l'exposant variable (nombre n'est pas entier) et aucune limite de cisaillement de sorte que des axes matériels orthotropiques et les principaux axes de contrainte doivent être superposées.
Hill 1990	$ \sigma_1 + \sigma_2 ^a + \frac{\sigma_b^a}{\tau^a} \sigma_1 - \sigma_2 ^a + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 ^{\frac{a-1}{2}} \left\{ -2A(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + B(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos 2\beta \right\} = (2\sigma_b)^2$	L'extension de Hill 79 qui supprime sa limitation dans des directions de chargement mais est seulement définie pour le cas de contrainte plane.
Hill 1993	$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_0^2} - C \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_0 \sigma_{90}} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{90}^2} + \left\{ A + B - \frac{(A\sigma_x + B\sigma_y)}{\sigma_b} \right\} \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_0 \sigma_{90}} = 1$	L'expression permettant aux valeurs r_0 et r_{90} de model différent, quand les contraintes uniaxiales soumettent dans le roulement σ_0 et la direction transversale σ_{90} sont presque égales. Seulement défini pour le cas de contrainte plane et les charges appliquées le long des axes orthotropiques (aucune composante de cisaillement).

C - Critère de Tsai

Le critère de Tsai [1] permet justement de prendre en compte les différences d'état éventuelle d'écrouissage en traction et en compression. Sous la forme la plus générale il s'exprime comme la somme d'une forme linéaire et d'une forme quadratique des 6 composantes des contraintes.

Les hypothèses d'orthotrope et d'incompressibilité plastique (non influence des contraintes hydrostatiques) entraînent une réduction de 27 à 8 le nombre des coefficients qui dépendent des caractéristiques des matériaux. On peut alors écrire le critère sous une forme similaire à celle utilisée pour le critère de Hill.

$$F'(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G'(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H'(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L'\sigma_{12}^2 + 2M'\sigma_{23}^2 + 2N'\sigma_{31}^2 + P\sigma_{11} + Q\sigma_{22} - (P + Q)\sigma_{33} = \quad (2-79)$$

La détermination expérimentales des coefficients pour un matériau particulier est délicate et nécessite des essais de traction, des essais de compression et des essais de cisaillement dans différentes direction. Ce critère est assez représentatif de la limite d'élasticité des matériaux composites fibre résine et du bois.

I-5 : CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre les critères d'écoulement dépendant de la pression moyenne et qui sont utilisés pour les géomatériaux (sols, roches,...) et ceux non dépendants de la pression moyenne et qui sont destinés pour les autres matériaux. Ceci nous a permis de connaître et mieux comprendre les formes géométriques des différentes surfaces d'écoulement.

On sait que ces critères font intervenir des lois d'écoulement, qui font l'objet d'une étude au prochain chapitre.

CHAPITRE .-II
FORMULATION DES LOIS
ELASTOPLASTIQUES

FORMULATION DES LOIS ELASTOPLASTIQUES

II-1 : Introduction

En 1864, Tresca introduit pour la première fois la notion de plasticité avec le critère des contraintes maximales. Mais cette notion n'a été formulée numériquement; que vers 1950 avec le développement de l'informatique; elle a alors démontré tout son intérêt.

La non linéarité du comportement des matériaux peut être introduite à partir de modèles élastoplastiques, qui sont basés sur les quatre notions fondamentales suivantes :

- la partition des déformations élastiques et plastiques,
- l'existence d'une surface de charge dans l'espace des contraintes,
- la loi d'écoulement,
- la loi d'écrouissage.

II-2 : Principe de partition des déformations élastique et plastique

Les déformations totales peuvent se décomposer en déformation élastique réversible et en déformation plastique irréversible. D'un point de vue microstructurale, les déformations élastiques correspondent à une simple variation de distance inter atomique alors que les déformations plastiques induisent une modification structurale du milieu continu.

L'hypothèse, qui consiste à partager les déformations totales en une part élastique et une part plastique, simplifie considérablement l'identification expérimentale du comportement de matériau ainsi que la modélisation numérique qui s'en suit. Elle se traduit par l'équation suivante :

$$d\epsilon_{ij}^t = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (\text{II-1})$$

Avec :

- $d\epsilon_{ij}^e$: le terme du tenseur de déformations élastiques,
- $d\epsilon_{ij}^p$: le terme du tenseur de déformations plastiques,
- $d\epsilon_{ij}^t$: le terme du tenseur de déformations totales.

Il est à noter que les déformations d'origine thermique ne sont pas prises en compte.

II-3 : Définition de la fonction de charge

Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, il existe une surface de charge à partir de laquelle l'écoulement plastique peut se produire. Pour les états de contrainte contenue à l'intérieur de cette surface, le comportement reste entièrement élastique. Cette surface est convexe et s'exprime à travers l'équation scalaire suivante :

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (\text{II-2})$$

$F(\sigma_{ij})$ est appelée fonction de charge.

Afin de caractériser complètement l'écoulement plastique, il faut encore introduire un critère de charge décharge. En effet, l'écoulement plastique se produit à partir du moment où deux conditions sont réunies. Elle s'exprime de la manière suivante :

1°-le point représentatif de l'état de contrainte est situé sur la surface de charge, ce qui correspond à $F=0$,

2°-la théorie de la plasticité impose que le point représentatif de l'état de contrainte ne puisse sortir du volume défini par la surface de charge ($F(\sigma_{ij}) > 0$ est impossible); cela implique que la position de ce point, après chargement, reste sur cette même surface. Pendant l'écoulement, la condition est ainsi vérifiée, soit :

$$dF(\sigma_{ij}) = 0 \quad (\text{II-3})$$

Il est cependant possible qu'une variation puisse entraîner le point représentatif de l'état de chargement vers l'intérieur de la surface de charge. Dans ce cas, il s'agit d'une décharge purement élastique qui se matérialise par:

$$dF(\sigma_{ij}) < 0 \quad (\text{II-4})$$

En résumé, trois états de chargement sont possibles :

- $F(\sigma_{ij}) < 0$ correspond à un comportement élastique,
- $F(\sigma_{ij}) = 0$ et $dF(\sigma_{ij}) = 0$ caractérisent un écoulement plastique,
- $F(\sigma_{ij}) = 0$ et $dF(\sigma_{ij}) < 0$ caractérisent une décharge purement élastique.

Lorsque le point représentatif de l'état de contrainte se situe sur la surface de charge, $F=0$, deux cas sont possibles :

-la surface de charge n'évolue pas, c'est le cas du modèle élastoplastiques parfait,

-la surface évolue au cours du chargement, c'est le cas du modèle élastoplastiques avec écrouissage la Figure (II.1) illustre ce second cas.

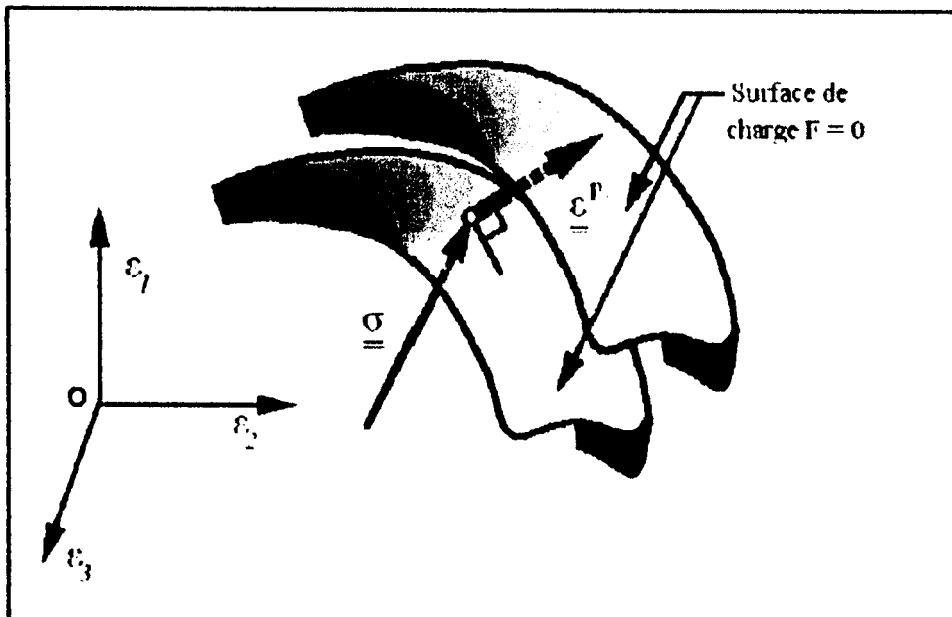


Fig.II. 1 : Evolution de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales pour un matériau présentant des propriétés d'écrouissage

II-4 : Lois d'écoulement et potentiel plastique

Le cadre général de la thermodynamique postule l'existence d'un potentiel de dissipation dont la connaissance fournit la loi d'évolution des déformations plastiques. Le potentiel plastique, noté G_p , définit également une surface équipotentielle dépendante des paramètres d'écrouissage. La normale à cette surface constitue la direction de l'écoulement plastique.

II-4-1 : Lois d'écoulement plastique associée

La loi d'écoulement est dite associée à la surface de charge quand cette dernière est confondue avec la surface représentative du potentiel plastique, ce qui revient naturellement à considérer l'identité $F = Q_p$.

La direction du vecteur déformation plastique dans l'espace des contraintes principales (confondu avec celui des contraintes principales) est ainsi perpendiculaire à la surface de charge, $F = 0$, c'est-à-dire au vecteur gradient, normal à cette surface. Cela conduit à une loi d'écoulement de la forme :

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{II-5})$$

Où, λ est le multiplicateur plastique (scalaire positif) défini par l'équation de consistance.

C'est une relation par incrément entre la contrainte et la déformation plastique déviatorique.

Une telle loi de normalité est fondée sur l'hypothèse que la composante de l'incrément de contrainte tangentielle déviatorique sur la surface d'écoulement n'induit pas des contraintes plastique.

Par conséquent toutes les contraintes plastiques sont dues à la composante normale de la surface d'écoulement $d\sigma_{ij}^{(n)}$.

Donc :

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^{(n)} + d\sigma_{ij}^{(t)} \quad (\text{II-6})$$

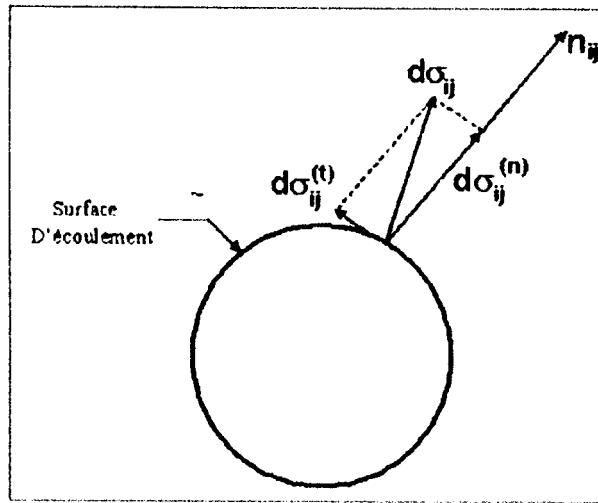


Fig.II.2 : Décomposition de l'incrément de contrainte

Ces hypothèses peuvent être basés sur la validité de la principale superposition pendant un incrément de contrainte. Par conséquent, les incréments de contrainte plastique déviatorique peuvent être calculés par :

$$d\epsilon_{ij}^{p(n)} = \frac{1}{H^p} n_{ij} d\sigma^{(n)} \quad (\text{II-7})$$

$$d\sigma^{(n)} = d\sigma_{kl} \cdot n_{kl} \quad (\text{II-8})$$

$$d\epsilon_{ij}^{p(n)} = \frac{1}{H^p} n_{ij} (d\sigma_{kl} \cdot n_{kl}) \quad (\text{II-9})$$

H_p : module élastoplastique

tandis que les incréments de contrainte élastiques déviatorique sont :

$$d\epsilon_{ij}^e = d\epsilon_{ij}^{e(t)} + d\epsilon_{ij}^{e(n)} = \frac{d\sigma_{ij}^{(t)}}{E} + \frac{d\sigma_{ij}^{(n)}}{E} \quad (\text{II-10})$$

H_0 : module élastique

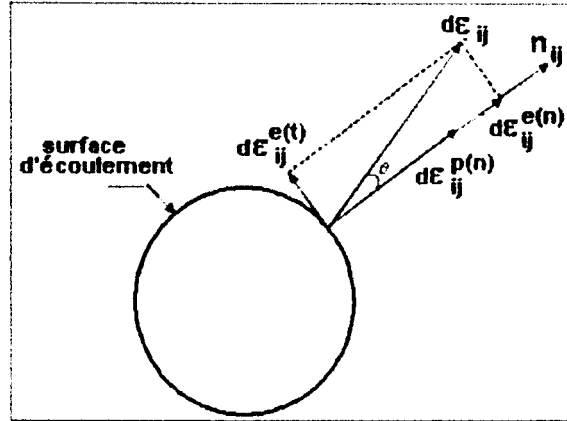


Fig.II.3 : Décomposition de l'incrément de déformation

Si $\frac{1}{H^p} \gg \frac{1}{E}$, alors la seule composante normale qu' est beaucoup plus grand que la composante tangentielle.

$$\theta \approx 0$$

$$d\epsilon_{ij}^{e(t)} = d\epsilon_{ij}^e \ll d\epsilon_{ij}^{e(n)} \quad (\text{II-11})$$

$$d\epsilon_{ij} \cong d\epsilon_{ij}^{e(n)} = d\epsilon_{ij}^{e(n)} + d\epsilon_{ij}^{p(n)} \quad (\text{II-12})$$

Ainsi, l'incrément de contrainte déviatorique total :

$$d\epsilon_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{E} + \frac{1}{H^p} n_{ij} (d\sigma_{kl} \cdot n_{kl}) \quad (\text{II-13})$$

où,

$$n_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\sigma_{ij} - X_{ij}) - \frac{\delta_{ij}}{3} (\sigma_{kk} - X_{kk})}{R} \quad (\text{II-14})$$

R : rayon de la surface d'écoulement.

En conclusion, mais en remplaçant la valeur de n_{ij} dans l'expression de $d\varepsilon_{ij}$.

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{E} + \frac{3}{2H_p} \frac{\left[(\sigma_{ij} - X_{ij}) - \frac{\delta_{ij}}{3} (\sigma_{kk} - X_{kk}) \right] \left[(\sigma_{kl} - X_{kl}) - \frac{\delta_{kl}}{3} (\sigma_{kk} - X_{kk}) \right]}{R^2} d\sigma_{kl} \quad (\text{II-15})$$

Les matériaux pour lesquels la loi d'écoulement est dite associée, sont dits standards. Ce type de matériaux obéit au principe du travail maximale de Hill (1950), qui s'énonce comme suit :

Soit un solide déformable noté, S et P un point quelconque de ce solide, où règne un état de contrainte, σ_{ij} tel que la fonction de charge plastique soit satisfaite : $F(\sigma_{ij}) = 0$. Soit, ε_{ij}^p , le terme du tenseur des vitesses de déformation plastique en P. Considérons un état virtuel de contrainte, σ_{ij}^* , vérifiant : $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} + d\sigma_{ij}$ et qui soit plastiquement admissible.

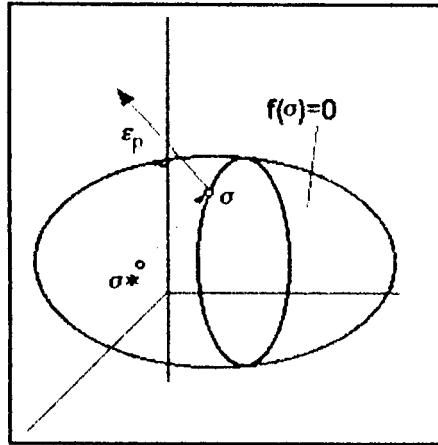


Fig.II.4 : Interprétation Géométrique de la fonction d'écoulement

Cela implique que :

$$F(\sigma_{ij}^*) \leq 0 \Rightarrow F(\sigma_{ij}^*) = F(\sigma_{ij}) + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \leq 0 \quad (\text{II-16})$$

Alors selon le théorème des puissances virtuelle :

La puissance dissipée localement par le champ de contrainte réel est toujours supérieure à la puissance dissipée par le champ de contrainte virtuel (le travail réel est maximal). Cela se traduit par :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{II-17})$$

Où, le produit des tenseurs des contraintes et des déformations plastiques est appelé "produit contracté": la valeur de ce produit est un scalaire égal à la somme des produits des composantes terme à terme des deux tenseurs. Il s'agit de la puissance réellement dissipée au cours de l'écoulement plastique par unité de volume.

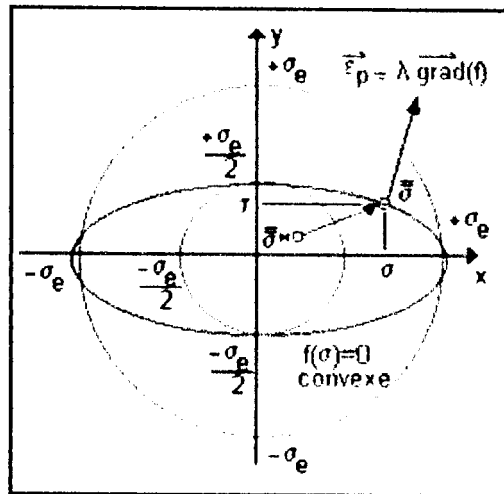


Fig.II.5 : Interprétation géométrique du principe du travail maximal

→ L'angle que forme le vecteur $[\sigma \sigma^*]$ avec la normale extérieure à la surface orientée par le vecteur gradient est toujours aigu.

→ Donc, la surface de charge est convexe.

De plus d'après le principe de Hill $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij}^p \geq 0$

→ Donc, $\overline{\varepsilon}_p = \lambda \text{grad}(f)$ où λ est un coefficient de proportionnalité.

→ La vitesse d'écoulement plastique, $\overline{\varepsilon}_p$ est donc perpendiculaire à la surface de charge.

II-4-2 : Lois d'écoulement plastique non associée

Dans le cas des sols et des roches, l'utilisation d'une loi d'écoulement non associée s'avère souvent nécessaire. En effet, pour les lois élastoplastiques considérant un angle de frottement ϕ , une loi d'écoulement associée induit un angle de dilatance, $\phi = \psi$, qui s'avère souvent trop élevé pour les géomatériaux. On a alors recours à des lois non associées. Dans ce cas, la direction du vecteur déformation plastique est perpendiculaire à la surface représentative du potentiel plastique, $Q_p(\sigma_{ij})$, qui est distincte de celle représentative de la fonction de charge plastique, $F(\sigma_{ij})$. Cela permet de considérer des angles de dilatance, ψ , compris entre 0 et ψ .

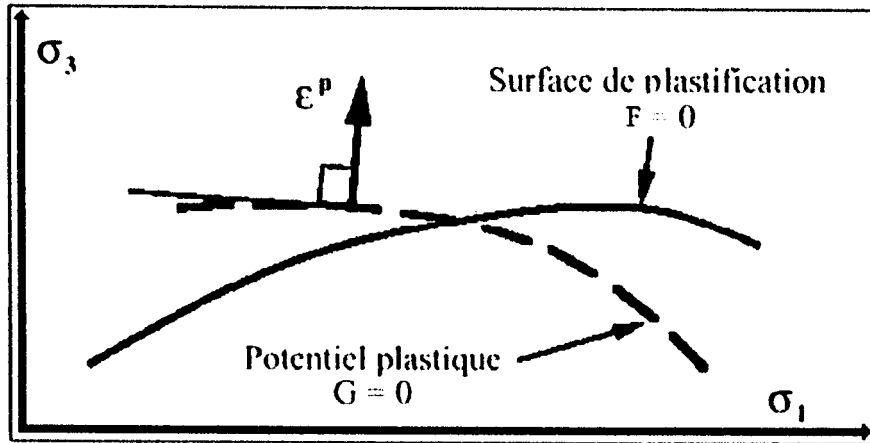


Fig.II.6 : Représentation de la fonction potentiel plastique

II-4-2-1 : Lois d'écoulement plastique coaxiale

La surface de charge est généralement exprimée comme une fonction de l'état de contrainte et du paramètre d'écrouissage μ .

$F = F(\sigma_y, \mu)$: est la surface de charge dans l'espace des contraintes avec $\mu = \mu(g^p)$ paramètre d'écrouissage. Il représente la taille de la surface de charge. Il s'exprime en fonction de g^p .

g^p : est l'intensité de déformation déviatorique ou de cisaillement plastique accumulée.

$Q = Q(\sigma_y, \beta)$: est le potentiel plastique dans l'espace des contraintes.

$\beta = \beta(g^p)$: est le paramètre d'écrouissage (lié à la déformation plastique accumulée)

ε_{ij}^p : est généralement exprimé par une loi d'écoulement non associée de la forme :

$$\varepsilon_{ij}^p = \psi \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{II -18})$$

L'équation(II.7) représente la loi d'écoulement plastique << coaxiale >>, c'est-à-dire que les axes principaux de la vitesse de déformation plastique coïncident avec les axes principaux des contraintes. Les déformations plastiques sont couramment associées à un potentiel plastique (fonction isotrope du tenseur des contraintes) dans l'espace des contraintes.

$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$ est le gradient du potentiel plastique, il définit la direction de ε_{ij}^p .

Si Q est une fonction isotrope de σ , dans ce cas, la loi d'écoulement est dite coaxiale.

$\psi = \lambda$ est une fonction scalaire. Elle joue le rôle d'un multiplicateur plastique, paramètre de chargement et définit la longueur ou l'amplitude de ε_y^p . $\psi = \lambda \geq 0$ est une condition exprimant le caractère irréversible des déformations plastiques.

II-5 : CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté la loi d'écoulement relative aux matériaux le vecteur déformation normal à la surface d'écoulement, et celle relative aux géomatériaux dont le vecteur potentiel d'écoulement est perpendiculaire aux surfaces équipotentiels.

Ceci va nous permettre dans le prochain chapitre d'analyser et de présenter le phénomène d'écrouissage.

~

CHAPITRE. III
L'ECROUISSAGE

L'ECROUISSAGE

III-1 : Introduction

Après la loi d'écoulement, une règle d'écrouissage est nécessaire pour accomplir la description des matériaux. Quand l'état initial de l'écoulement existe, la règle de l'écrouissage définit sa modification durant le processus de l'écoulement plastique. Les deux règles de l'écrouissage largement répandues sont celles de l'écrouissage isotropiques et cinématiques. Nous pouvons envisager quelques modèles particuliers qui se traduisent par diverses hypothèses sur la direction de la variable d'écrouissage (qui représente le déplacement des surfaces d'écoulement) dans l'espace de charge (loi de Prager, loi de Ziegler, modèle de Mroz, etc....), qui visent divers schémas simples de références décrits par un nombre minimal de paramètre.

III-2 : Paramètre d'écrouissage

Lors de l'écoulement du matériau sous sollicitation d'un chargement simple ou complexe, la surface de charge définie dans le repère des contraintes principales peut évoluer. Ainsi, le domaine actuel dépend de l'état d'écrouissage, c'est-à-dire de l'histoire du chargement du matériau. On peut observer un accroissement de la limite élastique lors de ce chargement. On parle alors d'écrouissage positif ou de durcissement. A l'opposé, l'écrouissage négatif correspond à une diminution de la limite élastique, ou en d'autres termes à un radoucissement du matériau. L'écrouissage peut être soit isotrope soit cinématique.

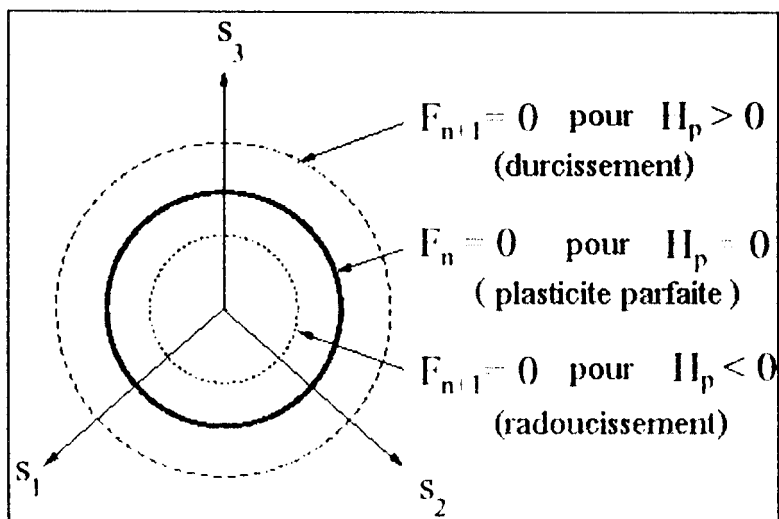


Fig.III.1: Ecoulement durcissement / radoucissement

III-3 : Ecoulement isotrope

Le schéma de l'écoulement isotrope est très souvent utilisé en pratique, à cause de sa simplicité et de sa bonne représentativité dans le cas où le vecteur de la sollicitation garde une direction constante dans l'espace des contraintes principales. La Figure (III.2) illustre l'évolution de la surface de charge, dans le cas de l'écoulement positif isotrope.

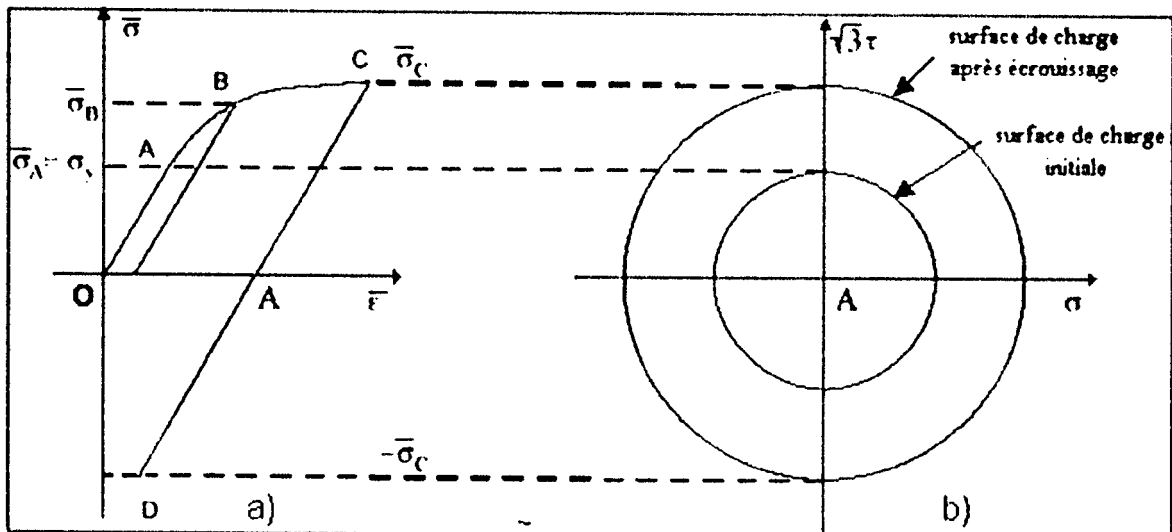


Fig.III.2 : Représentation de l'écoulement isotrope en projection

a) dans le plan $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ en chargement multiaxial,

b) dans le déviateur

L'écoulement est dit isotrope, quand l'évolution de la surface de charge n'est gouvernée que par un seul paramètre scalaire, par exemple la déformation plastique cumulée. Ainsi, dans le plan $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ en sollicitation multiaxiale la courbe se déduit par une homothétie de rapport k et de centre B, le point de contrainte nulle (point A de la figure (III.2a)). Dans le plan déviateur (plan normale à la trissectrice de l'espace des contraintes principales, d'équation $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), la surface de charge croît de manière homothétique par rapport au point représentatif d'une contrainte déviatoire nulle (point B de la figure (III.2b)).

III-4 : Loi d'écoulement à écoulement isotrope : par la loi de Prandtl Reuss

C'est une loi d'écoulement en régime élastoplastiques à écoulement isotrope ; elle est fondée sur les hypothèses suivantes :

1-hypothèse d'incompressibilité plastique : la déformation se fait à volume constant et l'écoulement ne dépend pas de la contrainte hydrostatique $\sigma_H = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$. La fonction de charge ne dépend que du déviateur des contraintes et des variables internes.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_H} = 0 \quad (\text{III.1})$$

2-hypothèse d'isotropie initiale et d'écrouissage isotrope : la fonction de charge ne dépend que des invariants J_2 et J_3 du déviateur des contraintes.

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.2})$$

$$J_3(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{9}{2} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{III.3})$$

3-plasticité associée et hypothèse de normalité :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{III.4})$$

$$d\mathbf{p} = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial R} \quad (\text{III.5})$$

4-choix de la fonction charge de Von mises, indépendante du troisième invariant, sous la forme :

$$f = \sigma_{eq} - R - \sigma_y \quad (\text{III.6})$$

Où σ_y est la limite d'élasticité initiale en traction. La loi de comportement s'exprime par la relation suivante :

$$R = k(\mathbf{p}) = \rho' \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \right) \quad (\text{III.7})$$

Avec :

$$R(0) = k(0) = 0$$

Ψ : Est la fonction interne

ρ' : La masse volumique dépend du matériau

$\mathbf{p}$: La déformation plastique cumulée

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} d\lambda \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} \quad (\text{III.8})$$

$$d\mathbf{p} = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial R} = d\lambda = \left(\frac{2}{3} d\boldsymbol{\varepsilon}^p : d\boldsymbol{\varepsilon}^p \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.9})$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} \left[(\varepsilon_{11}^p - \varepsilon_{22}^p)^2 + (\varepsilon_{22}^p - \varepsilon_{33}^p)^2 + (\varepsilon_{33}^p - \varepsilon_{11}^p)^2 + 6 \left\{ (\varepsilon_{12}^p)^2 + (\varepsilon_{23}^p)^2 + (\varepsilon_{31}^p)^2 \right\} \right]} \quad (\text{III.10})$$

La condition de consistance lorsqu'il y a écoulement ($df = 0$ lorsque $f = 0$) donne :

$$df = d\sigma_{eq} - k'(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = 0 \quad (\text{III.11})$$

d'où l'on tire l'expression du multiplicateur plastique.

$$d\lambda = d\mathbf{p} = H(f) \frac{d\sigma_{eq}}{k'(\mathbf{p})} \quad (\text{III.12})$$

où, H : désigne la fonction d'Heaviside

$$\begin{cases} H(f) = 0 & \text{si } f < 0 \\ H(f) = 1 & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

Pour un matériau à écoulement positif, c'est-à-dire pour $k'(p) > 0$ il n'y a écoulement que lorsque $d\sigma_{eq}$ est positif (la contrainte équivalente augmente). Dans le cas contraire ($d\sigma_{eq} < 0$) le multiplicateur plastique doit être nul.

$$d\lambda = d\mathbf{p} = H(f) \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{k'(\mathbf{p})} \quad (\text{III.13})$$

et la loi d'écoulement s'écrit :

$$d\varepsilon^p = \frac{3}{2} H(f) \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{k'(\mathbf{p})} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} \quad (\text{III.14})$$

Que l'on peut encore écrire en faisant intervenir que les contraintes :

$$f = \sigma_{eq} - \mathbf{R} - \sigma_y \quad \text{Ce qui implique} \quad \mathbf{R} = \sigma_{eq} - \sigma_y \quad (\text{III.15})$$

Nous avons

$$\mathbf{R} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} k(\mathbf{p}) \quad \text{Ce qui implique} \quad \mathbf{p} = k^{-1}(\mathbf{R}) \quad (\text{III.16})$$

$$\text{Alors que :} \quad \mathbf{p} = k^{-1}(\sigma_{eq} - \sigma_y) \quad (\text{III.17})$$

$$k'(\mathbf{p}) = k' \left[k^{-1}(\sigma_{eq} - \sigma_y) \right] \quad (\text{III.18})$$

$$[k'(\mathbf{p})]^{-1} = [k'(k^{-1}(\sigma_{eq} - \sigma_y))]^{-1} \quad (\text{III.19})$$

$$g'(\sigma_{eq}) = \frac{1}{k'(\mathbf{p})} = [k'(k^{-1}(\sigma_{eq} - \sigma_y))]^{-1} \quad (\text{III.20})$$

$$\text{Ce qui implique} \quad d\varepsilon^p = \frac{3}{2} H(f) g'(\sigma_{eq}) \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \boldsymbol{\sigma}' \quad (\text{III.21})$$

Où :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} H(f) g'(\sigma_{eq}) \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \sigma'_{ij} \quad (\text{III.22})$$

Cette expression porte le nom de relation de Levy-Mises [1] ne s'applique que, si $f = 0$, c'est-à-dire si $\sigma_{eq} - \mathbf{R} - \sigma_y = 0$. D'après l'expérience d'écroutissement en traction simple donne la signification des variables $\mathbf{R}$, p et permet l'identification de la fonction $g(\sigma_{eq})$ de la loi

Prandtl Reuss. Dans ce cas la seule composante du tenseur non nulle est $\sigma_{11} = \sigma$. La loi d'écoulement devient donc :

$$d\varepsilon_{11}^p = d\varepsilon^p = g'(\sigma) d\sigma \quad \text{Ce qui implique} \quad \frac{1}{g'(\sigma)} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_{11}^p} \quad (\text{III.23})$$

La fonction $(g'(\sigma))^{-1}$ joue le rôle de module tangent de la courbe d'écrouissage. On retrouve bien la signification de la variable R .

$$R = k(p) = \int_0^{\varepsilon} k'(\varepsilon^p) d\varepsilon^p = \int_{\sigma_y}^{\sigma} \frac{1}{g'(\sigma)} d\varepsilon_p(\sigma) = \int_{\sigma_y}^{\sigma} d\sigma = \sigma - \sigma_y \quad (\text{III.24})$$

La variable R est cohérente avec l'expression de la fonction de charge en traction simple.

$$f = |\sigma| - R - \sigma_y = 0$$

Cette figure illustre cette identification.

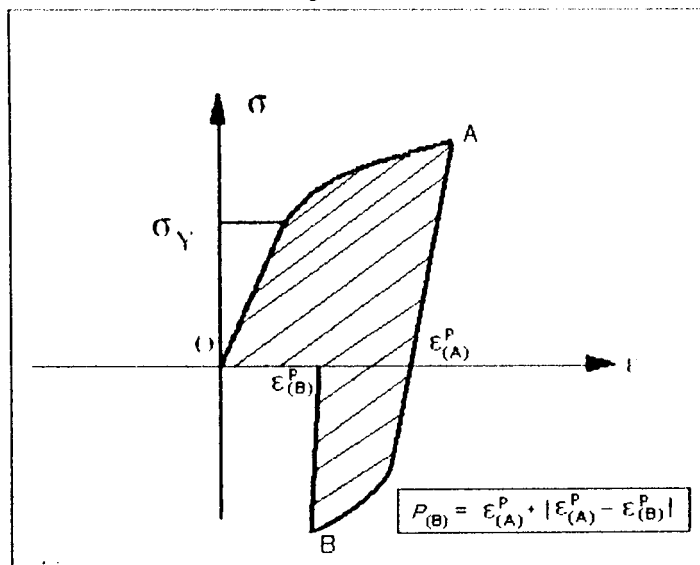


Fig.III.3 : Définition de la déformation cumulée

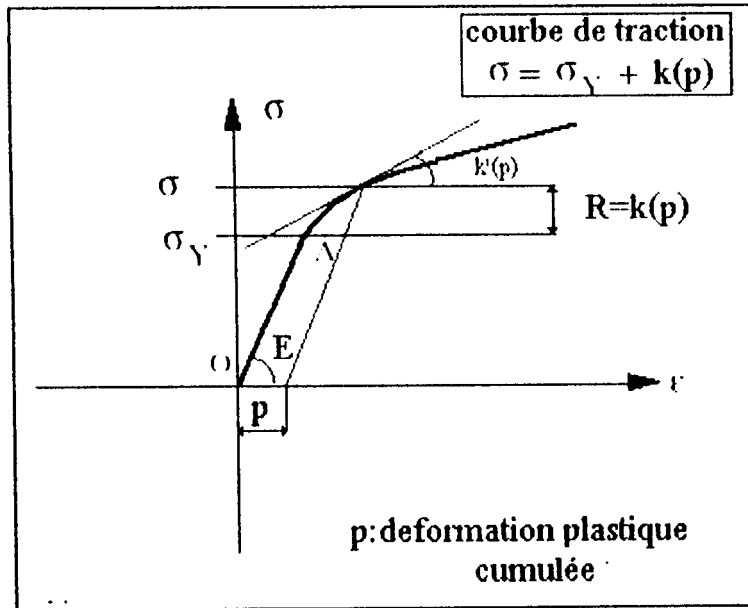


Fig.III.4 : Schématisation de la courbe de traction et interprétation par écrouissage isotrope

Dans le cas particulier où l'on choisit pour la courbe d'écrouissage l'équation de Ramberg-Osgood [1]. La variable R s'écrit :

$$R = \sigma_{eq} - \sigma_y = K_y p^{\frac{1}{M_y}} = k(p) \quad (III.25)$$

Où :

σ_y : est la limite élastique

K_y : est le coefficient de résistance plastique

M_y : est l'exposant d'écrouissage

Soit, en dérivant :

$$k'(p) = \frac{K_y}{M_y} p^{\frac{1-M_y}{M_y}} = \frac{K_y}{M_y} \left(\frac{\sigma_{eq} - \sigma_y}{K_y} \right)^{1-M_y} \quad (III.26)$$

La loi de Prandtl Reuss [1] s'écrit alors sous l'une des deux formes :

$$d\epsilon^p = \frac{3}{2} \frac{M_y}{K_y} p^{\frac{M_y-1}{M_y}} \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \sigma \quad (III.27)$$

Et :

$$d\varepsilon^p = \frac{3}{2} \frac{M_y}{K_y} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_y}{K_y} \right\rangle^{M_y-1} \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \boldsymbol{\sigma}' \quad (\text{III.28})$$

Où :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{M_y}{K_y} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_y}{K_y} \right\rangle^{M_y-1} \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \sigma'_{ij} \quad (\text{III.29})$$

Dans le cas de la traction simple, la deuxième relation redonne bien :

$$d\varepsilon^p = \frac{K_y}{M_y} \left\langle \frac{\sigma - \sigma_y}{K_y} \right\rangle^{M_y-1} d\sigma \quad (\text{III.30})$$

Soit, en intégrant pour $\sigma \geq \sigma_y$

$$\varepsilon_p = \left\langle \frac{\sigma - \sigma_y}{K_y} \right\rangle^{M_y} \quad (\text{III.31})$$

III-5 : Ecouissage cinématique

Bien souvent, l'écouissage isotrope reste insuffisant pour décrire le comportement des géomatériaux qui diffère notamment suivant que la sollicitation soit multiaxiale. Une schématisation possible de l'écouissage anisotrope est l'écouissage cinématique linéaire, comme représenté sur la Figure (III .4).

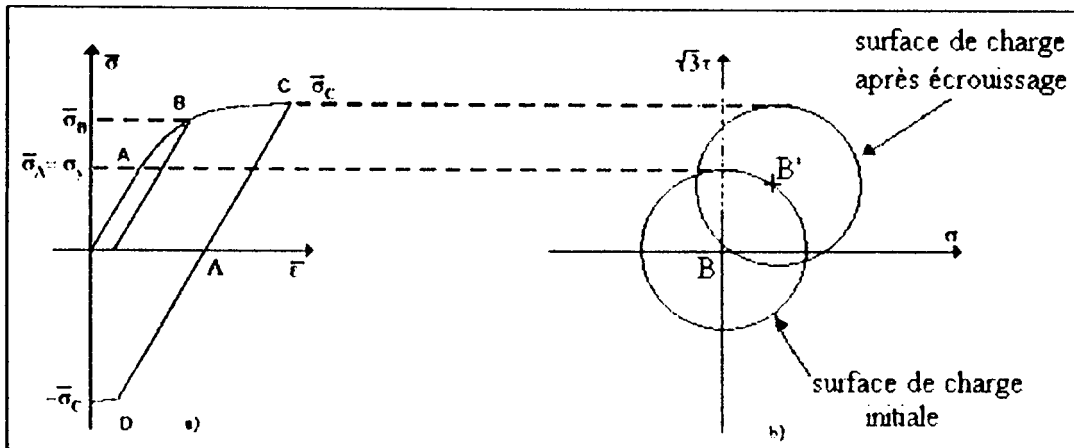


Fig.III.5 : Représentation de l'écouissage cinématique en projection

a) dans le plan $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ en chargement multiaxial

b) dans le plan déviatoire

Le domaine d'élasticité délimité par la surface de charge se déplace par translation dans l'espace des contraintes principales et sans distorsion de la surface de charge initiale. Ainsi, dans le plan $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ en sollicitation multiaxiale, le chemin de contrainte n'est plus homothétique par rapport au point de contrainte nulle.

Pour modéliser des comportements des matériaux sous chargement complexes, il est également possible de tenir compte d'un écrouissage quelconque du matériau en combinant l'écrouissage isotrope à l'écrouissage cinématique, mais ce cas a été développé par plusieurs modèles.

III-5-1 : La loi d'écoulement à écrouissage cinématique linéaire

A- La loi d'écoulement avec écrouissage : modèle Drucker Prager

L'écrouissage cinématique correspond à la translation de la surface de charge. La variable d'écrouissage $\mathbf{X}$ est de nature tensorielle, elle indique la position actuelle de la surface de charge [1].

La fonction de charge pour ce modèle s'écrit : $f = f_y(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - k$

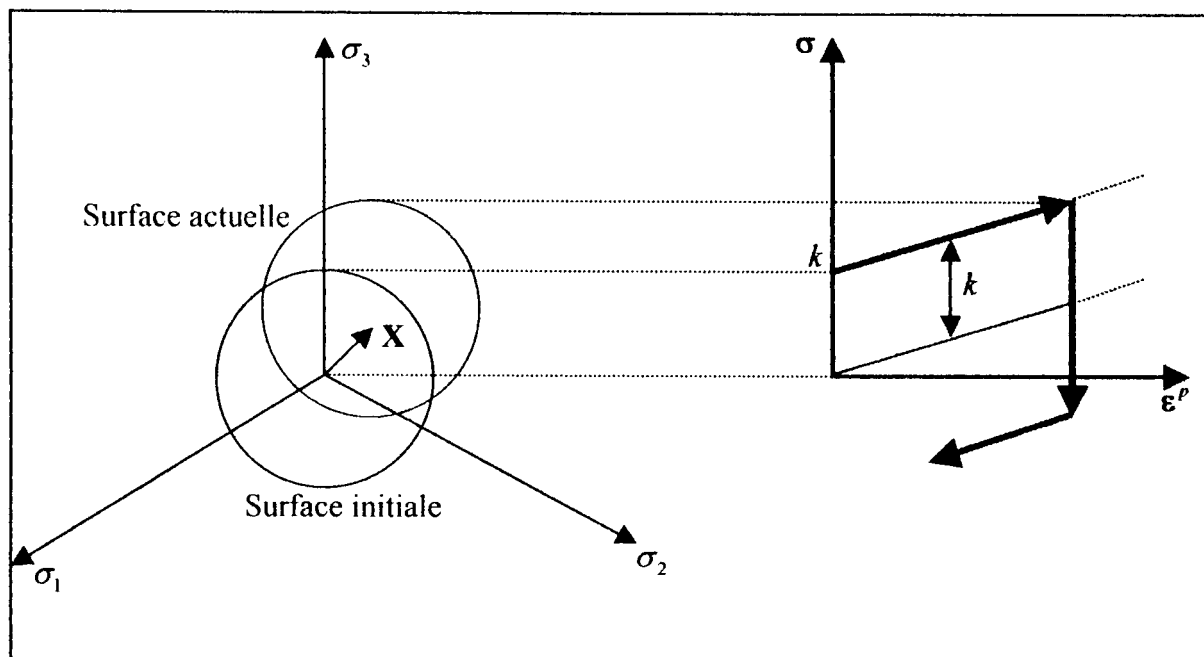


Fig.III.6 :Représentation de l'écrouissage cinématique linéaire

Ce modèle utilise les hypothèses suivantes :

- incompressibilités plastique,
- initialement isotrope suivi d'un écrouissage cinématique,

-plasticité associée et hypothèse de normalité généralisée implique l'écrouissage cinématique linéaire (la variable d'écrouissage α est identique à la déformation plastique actuelle) :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (\text{III.32})$$

$$d\alpha = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial X} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = d\varepsilon^p \quad (\text{III.33})$$

On est donc amené à utiliser l'énergie libre spécifique sous une forme quadratique en α , ce qui donne :

$$X = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = C_0 \alpha \quad (\text{III.34})$$

La loi d'écrouissage cinématique de Prager [1] utilise cette schématisation, ce qui implique que :

$$dX = C_0 d\alpha = C_0 d\varepsilon^p \quad (\text{III.35})$$

La condition de consistance dans le cas où il y a écoulement plastique permet d'écrire :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f}{\partial X} : dX = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma - C_0 \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\varepsilon^p \quad (\text{III.36})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma - C_0 \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\lambda = 0 \quad (\text{III.37})$$

Ce qui conduit à l'expression du multiplicateur plastique :

$$d\lambda = \frac{H(f)}{C_0} \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma \rangle}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (\text{III.38})$$

L'incrément de déformation plastique s'écrit :

$$d\varepsilon^p = \frac{H(f)}{C_0} \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma \rangle}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (\text{III.39})$$

On remarque que $d\varepsilon^p$ est égale à la projection de l'incrément $\frac{d\sigma}{C_0}$ sur la normale à la surface de charge.

On notera :

$$d\varepsilon^p : \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{C_0} \langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma \rangle \quad (\text{III.40})$$

Cette dernière relation peut s'interpréter géométriquement dans le plan des contraintes sachant que $\{d\varepsilon^p\}$ est colinéaire à $\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}$, on peut donc écrire :

$$\{d\varepsilon^p\}^T \{grad f\} = \left\{ \frac{d\sigma}{C_0} \right\}^T \{grad f\} \quad (\text{III.41})$$

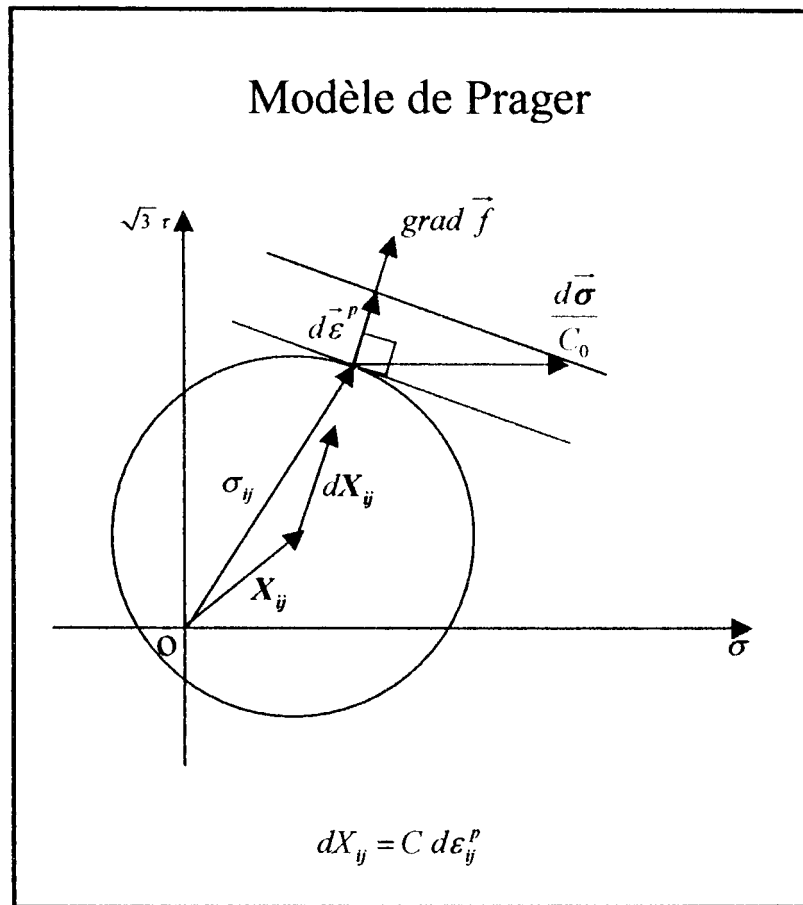


Fig.III.7 :Interprétation géométrique du modèle de Prager

Si la surface de charge est décrite par le critère de Von mises, la fonction f_y ne dépend que du second invariant.

$$f = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - k \quad (\text{III.42})$$

$$f = \left[\frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}') \right]^{\frac{1}{2}} - k \quad (\text{III.43})$$

$\mathbf{X}'$ est le déviateur de $\mathbf{X}$

D'où :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}')}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} \quad (\text{III.44})$$

Nous poserons pour simplifier l'équation (III-44) :

$$C_0 = \frac{2}{3} C \quad (\text{III.45})$$

Ce qui revient à écrire que :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \quad (\text{III.46})$$

Le multiplicateur plastique devient :

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{H(f)}{C} \frac{\langle (\sigma' - X') : d\sigma \rangle}{J_2(\sigma - X)} \quad (\text{III.47})$$

et l'incrément de déformation plastique :

$$d\varepsilon^p = \frac{9}{4} \frac{H(f)}{C} \left\langle \frac{(\sigma' - X') : d\sigma}{J_2(\sigma - X)} \right\rangle \frac{(\sigma' - X')}{J_2(\sigma - X)} \quad (\text{III.48})$$

On peut remplacer $J_2(\sigma - X)$ par k en tenant compte à nouveau de $f = 0$. La loi d'écrouissage cinématique complète du modèle de Prager s'écrit alors :

$$f = J_2(\sigma - X) - k$$

$$d\varepsilon^p = \frac{9}{4} \frac{H(f)}{Ck^2} \langle (\sigma' - X') : d\sigma \rangle (\sigma' - X') \quad (\text{III.49})$$

$$dX = \frac{2}{3} C d\varepsilon^p \quad (\text{III.50})$$

En notations indicielles, on peut écrire que :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{9}{4} \frac{H(f)}{Ck^2} \langle (\sigma'_{kl} - X'_{kl}) : d\sigma_{kl} \rangle (\sigma'_{ij} - X_{ij}) \quad (\text{III.51})$$

Les grandeurs C et k sont identifiées dans l'essai de traction simple :

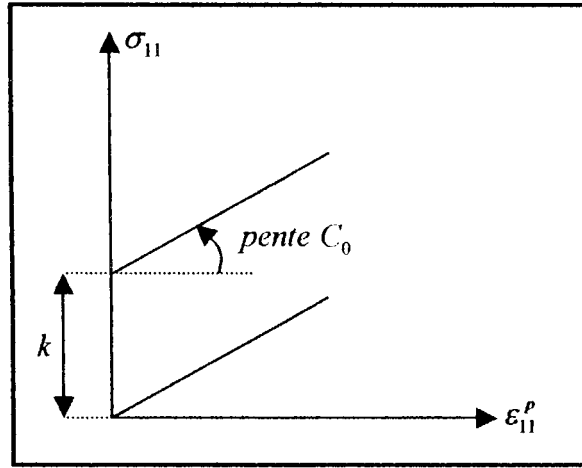


Fig.III.8 :Ecouissage cinématique linéaire en traction simple

B- La loi d'écoulement avec écouissage : modèle de Ziegler

La modification de Ziegler [1] ne rentre pas dans le cadre de l'hypothèse de normalité généralisée et consiste à remplacer la loi d'écrouissage par :

$$dX = (\sigma - X) d\mu \quad (\text{III.52})$$

En utilisant le tenseur $(\sigma - X)$ à la place de son déviateur permet de tenir compte de l'influence d'une contrainte hydrostatique. Sous chargement complexe on obtient de écoulements différents de ceux du Prager mais les deux formulations sont identiques dans le cas de l'incompressibilité plastique. Le multiplicateur plastique $d\mu$ est déterminé par la condition de consistance $df = 0$.

$$d\mu = H(f) \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma \rangle}{(\sigma - X) : \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (\text{III.53})$$

On adopte encore pour le multiplicateur plastique :

$$d\lambda = \frac{H(f) \langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma \rangle}{C(\sigma) \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (\text{III.54})$$

qui exprime, là encore , que la quantité $C(\sigma) d\varepsilon^p$ représente la projection de $d\sigma$ sur la normale à la surface de charge : c'est aussi la projection de dX sur la normale. Le choix de la fonction $C(\sigma)$ qui donne l'évolution du module d'écrouissage.

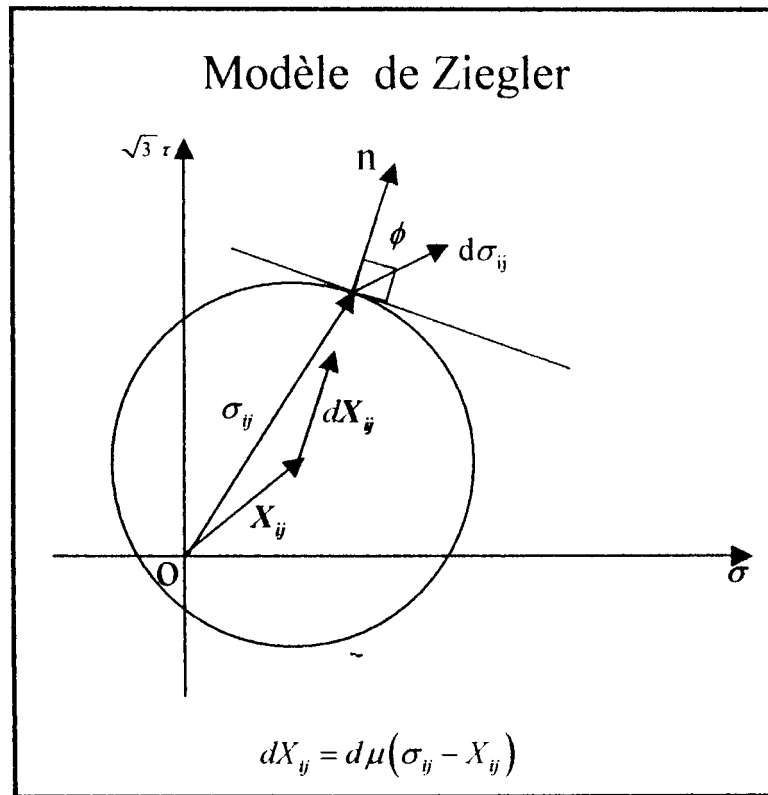


Fig.III.9 :Interprétation géométrique du modèle de Ziegler[18]

C - La loi d'écoulement avec écrouissage : modèle de Mroz [1]

L'écrouissage cinématique correspond en général aux contraintes internes provoquées dans le poly cristal par les incompatibilités des déformations plastiques locales d'un grain à l'autre. Il est donc naturel de chercher à améliorer l'écrouissage linéaire de Prager en superposant plusieurs modèles élémentaire correspondant à plusieurs grains : c'est le modèle multicouche[1].

La formulation de Mroz [8] est une généralisation du module multicouche au cas tridimensionnel. Elle considère un certain nombre de surfaces dans l'espace des contraintes emboîtées les unes dans les autres, dont les transformations peuvent être cinématiques (linéaires) et (ou) isotropes. En notant X^l et R^l le centre actuel et la dimension de la surface f_l (figure (III .9)), et supposant qu'elle obéit au critère de Von Mises, on écrit :

$$f_l = J_2(\sigma - X) - R^l = 0 \quad (\text{III.55})$$

En partant d'un état de contrainte situé dans le domaine élastique (la plus petite surface), on va avoir écoulement successivement avec chaque surface.

A chaque surface est associé un module d'écrouissage différent ce qui permet de retrouver les conditions du modèle multicouche. La dernière surface rencontrée en charge est surface active et l'écoulement est supposé normal :

$$d\epsilon^p = d\lambda \frac{\partial f_l}{\partial \sigma} \quad (\text{III.56})$$

Il n'y a pas d'écoulement ($d\lambda = 0$) lorsque l'état des contraintes est à l'intérieur de la surface f_l .

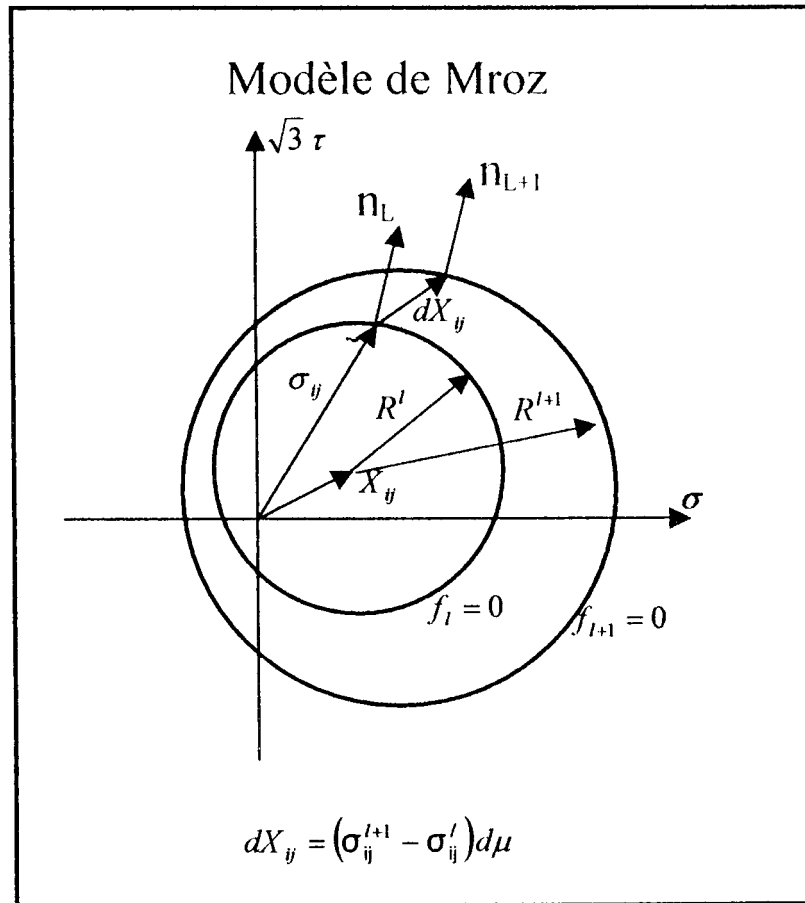


Fig.III.10 : Fonctionnement du modèle de Mroz en chargement multiaxial

Cela impose que les normales aux différentes surfaces au point de contrainte appliquée soient identiques et que les multiplicateurs plastiques soient égaux : ($d\lambda_l = d\lambda_{l+1} = d\lambda$). On déduit aussi (conditions de consistance ($df_l = df_{l+1} = 0$)) que les mouvements des centres sont identiques : ($dX^l = dX^{l+1}$).

Par contre, l'écoulement, donc l'écrouissage entre l'état de contrainte actuel (sur la surface l) et la surface suivante $f_{l+1} = 0$, doivent intervenir de telle façon que les surfaces se rencontrent uniquement au point de contrainte appliquée, avec des normales identiques. Dans ce but Mroz définit la règle suivante : l'écrouissage cinématique se produit dans la direction $\sigma^{l+1} - \sigma^l$, où σ^{l+1} est la contrainte sur la surface $l + 1$ telle que la normale en ce point soit identique à la normale à la surface, l au point de contrainte actuel σ^l . La figure (V.7) illustre cette hypothèse d'écrouissage qui se traduit sous les formes suivantes :

$$dX_{ij} = \left[(R^{l+1} - R^l) \sigma_{ij}^l - (R^{l+1} X_{ij}^l - R^l X_{ij}^{l+1}) \right] \frac{d\mu}{R^l} \quad (\text{III.57})$$

Où :
$$dX_{ij} = (\sigma_{ij}^{l+1} - \sigma_{ij}^l) d\mu \quad (\text{III.58})$$

$d\mu$ est un multiplicateur dont la valeur est déterminée par la condition de consistance $df = 0$:

$$d\mu = H(f_l) \frac{\left\langle \frac{\partial f_l}{\partial \sigma^l} \right\rangle : d\sigma^l}{\frac{\partial f_l}{\partial \sigma^l} : (\sigma^{l+1} - \sigma^l)} \quad (\text{III.59})$$

III-5-2 : La loi d'écoulement à écrouissage cinématique non linéaire

A- La loi d'écoulement avec écrouissage : modèle de Mroz

Les modèles d'écrouissage cinématiques sont prévus pour simuler le comportement des métaux qui sont soumis au chargement cyclique. Ces modèles sont appliqués aux comportements de la fatigue. L'idée de base de ce modèle est que la surface d'écoulement translate dans l'espace des contraintes de sorte que la tension dans une direction réduise la contrainte de fléchissement dans la direction opposée, de ce fait simulant l'effet et l'anisotropie de Bauschinger induits par le travail de l'écrouissage [4].

La combinaison de l'écrouissage isotropique et cinématique durcisse le modèle qui représente une prolongation du modèle de l'écrouissage cinématique linéaire. Il fournit une approximation plus précise à la relation de contrainte de traction que le modèle d'écrouissage

cinématique linéaire. Ce modèle est présenté seulement selon le critère de Von mises, utilisant seulement deux surfaces.

- la fonction de charge est:

$$f = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - k \quad (\text{III.60})$$

- la loi linéaire du modèle de Prager est remplacée par :

$$d\mathbf{X} = \frac{2}{3} C d\epsilon^p - \gamma \mathbf{X} dp \quad (\text{III.61})$$

$\mathbf{X}$: étant supposé nul dans l'état initial,

La loi non linéaire faisant intervenir deux coefficients C et γ caractéristiques du matériau.

dp : est l'incrément de déformation plastique cumulée.

Les autres éléments de la théorie de la plasticité ne sont pas modifiés.

L'hypothèse de normalité et la condition, de consistance $df = 0$ conduisent à l'expression:

$$d\epsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{H(f)}{h} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{III.62})$$

où le module d'écrouissage h dépend maintenant de la contrainte cinématique :

$$h = \frac{2}{3} C \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \gamma \mathbf{X} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{2}{3} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.63})$$

Dans le cas du critère de Von mises, on a $d\lambda = dp$ et le module d'écrouissage devient :

$$h = C - \frac{3}{2} \gamma \mathbf{X} : \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{k} \quad (\text{III.64})$$

Lorsque l'écrouissage cinématique (représenté par $\mathbf{X}$) augmente, le module d'écrouissage diminue.

En cas de traction – compression les tenseurs s'expriment comme dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire. Le critère et les équations d'écoulement et d'écrouissage se mettent sous la forme suivante :

$$f = |\sigma - X| - k = 0$$

$$d\varepsilon^p = \frac{1}{h} \left\langle \frac{\sigma - X}{k} d\sigma \right\rangle \frac{\sigma - X}{k} = \frac{d\sigma}{h} \quad \text{si } (\sigma - X) > 0 \quad (\text{III.65})$$

$$dX = C d\varepsilon^p - \gamma X |d\varepsilon^p|$$

$$h = C - \gamma X \operatorname{sgn}(\sigma - X)$$

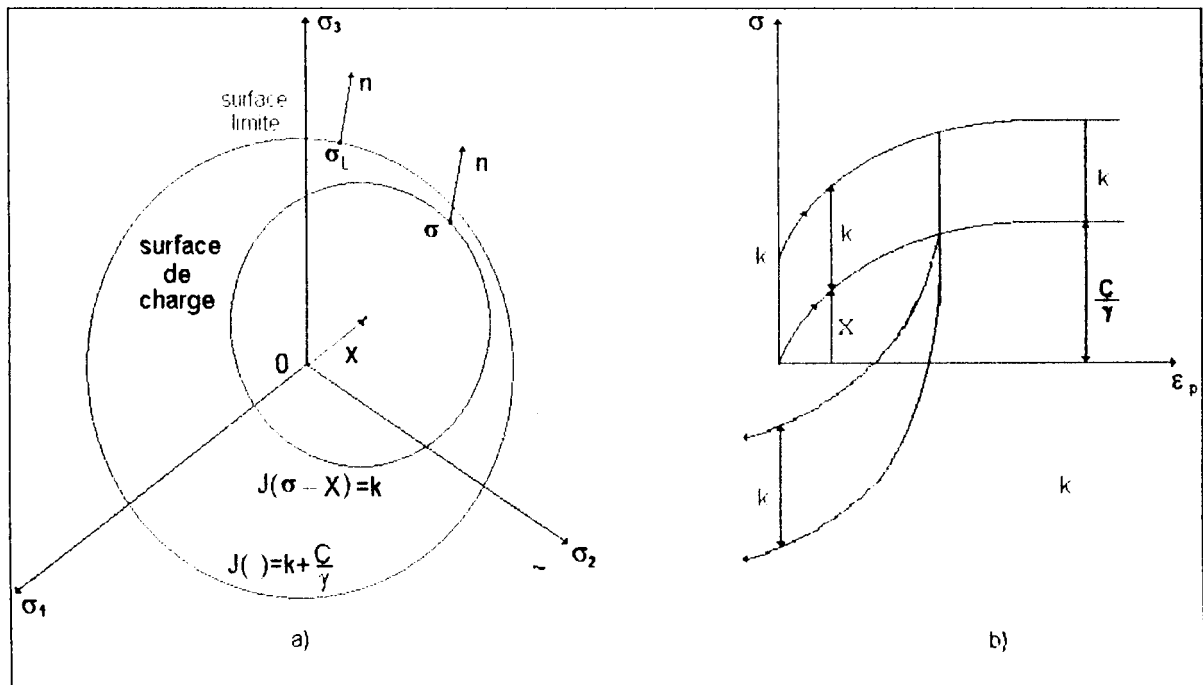


Fig.III.11 : Modèle d'écrouissage cinématique non linéaire

a) tridimensionnelle

b) traction - compression

III-6 : CONCLUSION

Nous avons montré dans ce chapitre l'écrouissage isotropique et cinématique et nous avons présenté les différents modèles d'écrouissage relatifs aux chargements monotones et cycliques. L'écrouissage isotropique donne des résultats largement insuffisant pour connaître le comportement d'un matériau ce qui ramène que l'écrouissage cinématique est devenu nécessaire pour aboutir à un résultat qui s'approche de l'experimental.

Ceci nous a permis de mieux comprendre le phénomène d'écrouissage, ce qui nous amène, dans le prochain chapitre de passer à la modélisation d'un élément de structure sollicité à des contraintes multiaxiales et cycliques.

CHAPITRE .IV

MODELISATION

MODELISATION

IV-1 : Introduction

Pour le critère d'écoulement et après avoir passé en revue les critères d'écoulement isotropes existants et dont le tenseur de contraintes ne dépend pas de la pression moyenne, il est maintenant opportun d'opter pour un critère qui prendra en compte toutes les contraintes ainsi que les formes géométriques les plus diverses, ce qui fait l'objet de notre étude.

Dans les chapitres précédents, nous avons déduit que :

- le critère de Rankine [9] prévoit que la contrainte tangentielle est implicitement limitée et la contrainte principale intermédiaire ne joue aucun rôle. De plus, la représentation octaédrique des tenseurs doit être à l'intérieur d'un cube,
- le critère d'écoulement expérimental de Caquot [9] prévoit que l'une des contraintes est presque toujours nulle et que les résultats expérimentaux ne parcourent pas tout l'espace d'intérêt,
- le critère d'écoulement parabolique [9] ignore la variation de la contrainte normale principale intermédiaire,
- le critère d'énergie de Torrè-Stassi [19] s'apparentant au critère de Von Mises aboutit à une formulation très délicate rendant son utilisation peu utilisable,
- le critère d'énergie de Beltrami [9] impose des limites en traction et en compression opposées, et est souvent en désaccord avec les confrontations expérimentales.
- le critère de déformation de Saint Venant [9] n'est pas en accord avec la majorité des expériences utilisées pour la conception de tôles minces; seulement quelques résultats d'expérience de parois épaisses sont en accord avec sa théorie.
- Le critère de Tresca [2] obéit à deux régimes de modélisation différents (régime de face et régime d'arête) rendant la fonction discontinue.
- Le critère de Von Mises [2] prend en considération tout le tenseur de contraintes obéissant à un seul régime de modélisation et donnant ainsi une fonction géométrique continue.

A partir de tous ces constatations, il apparaît clairement que pour la présente étude et selon les objectifs assignés, le critère de Von Mises sera retenu.

Par contre, pour la loi d'écoulement on relève que dans la loi d'écoulement non associée induit un angle de dilataance qui est un paramètre important pour les géomatériaux. Dans ce cas, la direction du vecteur déformation plastique est perpendiculaire à la surface représentative du potentiel plastique distincte de celle représentative de la fonction de charge plastique.

Mais dans la loi, la surface de charge est confondue avec la surface représentative du potentiel plastique. La direction du vecteur déformation plastique est perpendiculaire à la surface de charge, c'est-à-dire, au vecteur gradient normal à cette surface.

De ces deux lois d'écoulement et à cause de l'inexistence du potentiel d'écoulement, le choix se portera sur la loi d'écoulement associée qui convient parfaitement au matériau étudié.

Enfin, les lois à écrouissage cinématique linéaire des modèles de Prager et Ziegler [4] s'adaptent aux chargements monotones mais s'écartent des résultats expérimentaux qu'on il s'agit de chargement cyclique. Par contre Mroz [4] a proposé un modèle multisurfaces avec un nombre discret de surfaces limites pour développer sa théorie adapté à des chargements quelconques ou cycliques.

Pour cela, le modèle de Mroz, sera retenu pour la suite de notre travail.

IV-2 : Hypothèses

Des hypothèses doivent être émises pour un développement plus aisé des relations constitutives et pour limiter le domaine de validité du modèle proposé. Classiquement, les hypothèses retenues par un grand nombre d'auteurs [21] sont :

- homogénéités initiales du matériau ou de la phase considérée,
- la déformation totale est la somme d'une composante élastique réversible et d'une composante plastique irréversible,
- la déformations d'origine thermique non prises en compte.
- existence d'un domaine élastique initial. Il s'agit, de définir dans l'espace des contraintes, un domaine d'élasticité convexe à l'intérieur duquel les déformations plastiques irréversibles sont quasi-inexistantes. L'expression mathématique de ce domaine est donnée par la fonction f qui dépend, pour les matériaux isotropes, des trois invariants du tenseur des contraintes. Ce domaine se translate, tourne, grossit et se déforme lors de la déformation du matériau. Toutefois, on ne retiendra que sa translation et son expansion, responsables respectivement de l'écrouissage cinématique et isotrope ; la première est caractérisée par une grandeur tensorielle X et la deuxième par un scalaire R . Ces grandeurs sont introduites comme variables internes,

- normalité de la vitesse des déformations plastiques, les résultats disponibles dans les littératures relatives aux matériaux montrent que les incréments de déformations plastiques sont quasiment normaux aux domaines d'élasticité dans le cas d'écoulement plastique.
- incompressibilité plastique. La déformation plastique n'engendre pas de changement de volume. Cette hypothèse est généralement admise pour les matériaux solides bien qu'elle ne soit pas toujours vérifiée.

IV-3 : Modèle proposé

L'écrouissage cinématique correspond à une translation du domaine de réversibilité du matériau dans l'espace des contraintes qui est généralement associé à la variable interne X_{ij} . Prager [4] et Ziegler [4] furent les premiers à prendre en compte l'écrouissage cinématique dans les lois de comportement des matériaux, mais ces théories donnent des modèles dont les résultats sont valables uniquement dans le cas de chargement monotone. L'expérience a montré qu'en cas de chargement cyclique, ces théories aboutissent à des modèles qui peuvent s'écarter des résultats expérimentaux.

En s'inspirant du modèle généralisé de Saint Venant [9], conduisant au modèle de Masing, Mroz [1] a proposé un modèle multisurfaces au cas tridimensionnel avec un nombre discret de surfaces limites pour développer sa théorie.

L'équation des fonctions d'écoulement simples de Von Mises peut être exprimée par la relation (IV-1) et visualisée comme une infinité de surfaces d'écoulement dans l'espace des contraintes déviatoriques à 9 dimensions.

$$\left[\frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') \right]^{\frac{1}{2}} - R = 0 \quad (\text{IV-1})$$

Chaque surface d'écoulement est caractérisée par un module élastoplastiques tangent (H) .

Notation :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\sigma_{kk})$$

$$X'_{ij} = X_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\sigma_{kk})$$

σ_{ij} : Tenseur des contraintes totales

X_{ij} : Centre des surfaces d'écoulement dans 9D ; l'espace des contraintes totales

σ'_{ij} : Tenseur déviateur des contraintes.

X'_{ij} : Centre des surfaces d'écoulement dans 9D ; l'espace des contraintes déviatoriques.

δ_{ij} : Symbole de Kronecker.

σ_{kk} : Tenseurs des contraintes moyennes.

R : Dimension de la surface d'écoulement ou rayon.

Pour une raison de symétrie, l'équation (IV-1) est exprimée par 6 composantes différentes sur les 9 du tenseur des contraintes déviatoriques et s'écrit sous la forme

$$\left\{ \frac{3}{2} \left[(\sigma'_{11} - X'_{11})^2 + (\sigma'_{22} - X'_{22})^2 + (\sigma'_{33} - X'_{33})^2 + 2(\sigma'_{12} - X'_{12})^2 + 2(\sigma'_{23} - X'_{23})^2 + 2(\sigma'_{31} - X'_{31})^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} - R = 0 \quad (IV-2)$$

$$\begin{array}{lll} \text{Car :} & X'_{12} = X'_{21} & \sigma'_{12} = \sigma'_{21} \\ & X'_{23} = X'_{32} & \text{et : } \sigma'_{23} = \sigma'_{32} \\ & X'_{31} = X'_{13} & \sigma'_{31} = \sigma'_{13} \end{array}$$

En considérant un élément de structure d'un matériau initialement isotrope soumis à un chargement multiaxial cyclique et après transition dans le domaine plastique, le module tangent de la courbe « contrainte déformation » diminuera à partir de la valeur élastique.

On se rapproche régulièrement de la courbe $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ par n segments linéaires de module tangent constant $H_1, H_2, \dots, H_n$ (ou module plastique constant $H^1_p, H^2_p, \dots$). Dans l'espace des contraintes, cette approximation est représentée par n hypersurfaces $f_0, f_1, \dots, f_n$

où f_0 est la surface d'écoulement et $f_1, f_2 \dots f_n$ définissent les régions du module tangent d'écrouissage constant. En supposant que la loi d'écoulement est associée et que les vecteurs normaux extérieurs à des surfaces d'écoulement sont similaires, cette loi s'exprime par la relation suivante :

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{H_p} d\sigma_{ij} n_{ij} = \frac{d\sigma}{H_p} \quad (IV-3)$$

avec :

$$n_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma_{ij} - X_{ij}}{\|\sigma_{ij} - X_{ij}\|} \quad (IV-4)$$

et f la fonction de charge.

Où : $d\vec{\sigma} = d\sigma_{ij} \cdot \vec{n}_{ij}$ est la projection de l'incrément de contrainte $d\vec{\sigma}$ sur le vecteur unitaire $\vec{n}_{ij}$ normal à la surface d'écoulement et H_p le module d'écrouissage tangent.

$$H_p = \frac{d\sigma_{ij}}{d\epsilon_{ij}^p} \quad (IV-5)$$

Évidemment, H_p est une généralisation de la notion du module tangent plastique dans l'état multiaxial de contraintes. Dans le cas d'un processus de chargement proportionnel sur un matériau initialement isotrope, toutes les surfaces $f_0, f_1 \dots$ sont semblables et concentriques en une même origine O.

Dans la courbe « contrainte déformation » tous les incréments de déformation sont représentés schématiquement par une famille de cercles, avec comme hypothèse que toutes les surfaces peuvent translater dans l'espace des contraintes sans changement de forme et d'orientation. Quand la contrainte limite d'élasticité reçoit un incrément de charge, le cercle f_0 se déplace jusqu'à ce qu'il entre en contact avec le cercle f_1 , ainsi, les cercles f_0 et f_1 translatent ensemble jusqu'à ce qu'ils entrent eux même en contact avec f_2 , etc... Tous les cercles actifs vont atteindre le point de contrainte actuelle appelé « point de tangence ». Ceci constitue le premier groupe de chargement ou groupe de référence (1) comme indiqué sur la figure (IV.1). Cette figure caractérise la surface d'écoulement par sa taille la plus grande dans le groupe R(1), son centre X(1) et Y(1), les composantes de son vecteur unitaire

$\vec{n}_x(1)$ et $\vec{n}_y(1)$ ainsi que son module élastoplastique $H_p(1)$. Tous les autres cercles se situant au-delà de la surface d'écoulement sur laquelle appartient le point de tangence, demeurent fixes pendant cette période. Le premier module tangent H_p^1 représente la contrainte plastique entre ces deux surfaces f_0 et f_1 et H_p^2 représente le module tangent entre f_1 et f_2 , etc...

Si on procède à une opération de déchargement, cette dernière sera considérée comme un nouveau « point de tangence » pour les surfaces d'écoulement actives et qui constituera alors le deuxième groupe (2) du déchargement. Ce groupe est ainsi caractérisé par sa taille $R(2)$, son centre $X(2)$ et $Y(2)$ et les composantes de son vecteur unitaire $\vec{n}_x(2)$ et $\vec{n}_y(2)$.

Les groupes (1) et (2) restent en mémoire et chaque fois qu'on reçoit un incrément de charge $d\sigma_{11}$ et $d\sigma_{12}$, on procèdera alors à l'actualisation de l'un de ces groupes. Si le module calculé se situe entre les modules $H_p(1)$ et H_u , c'est le groupe (1) qui sera actualisé et si le module est compris entre $H_p(2)$ et $H_p(1)$, c'est le groupe (2) qui sera actualisé.

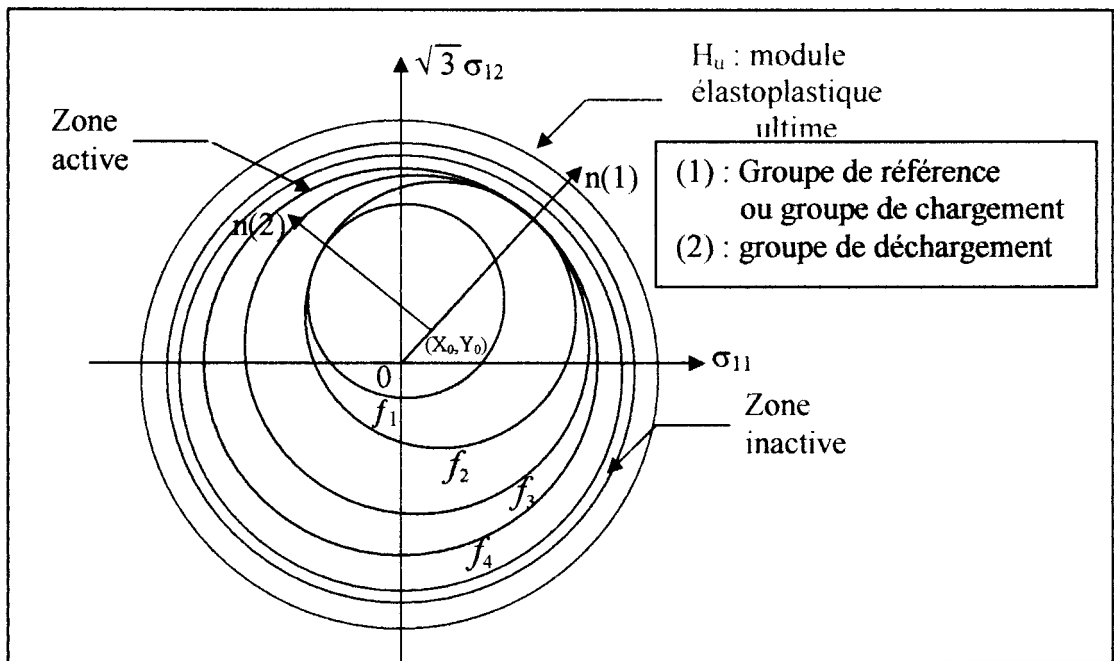


Fig.IV.1: Schéma du modèle.

IV-4 : Application :

IV-4-1 : Modélisation mathématique :

Dans un système cartésien de coordonnées orthogonales (1, 2, 3), nous avons : $\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{22} = 0$ et les composantes non nulles dans le plan (1,2) sont : $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X_{ij} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & -\frac{1}{3}\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_{11} \end{bmatrix} \quad X'_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{12} & -\frac{1}{3}X_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}X_{11} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\sigma'_{ij} - X'_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(\sigma_{11} - X_{11}) & \sigma_{12} - X_{12} & 0 \\ \sigma_{12} - X_{12} & -\frac{1}{3}(\sigma_{11} - X_{11}) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(\sigma_{11} - X_{11}) \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \left[\frac{2}{3}(\sigma_{11} - X_{11}) \right]^2 + 2 \left[-\frac{1}{3}(\sigma_{11} - X_{11}) \right]^2 + 2(\sigma_{12} - X_{12})^2 \right\} = \frac{2}{3}R^2$$

$$\frac{2}{3}(\sigma_{11} - X_{11})^2 + 2(\sigma_{12} - X_{12})^2 = \frac{2}{3}R^2$$

Selon le critère de Von Mises la fonction d'écoulement dans le plan s'exprime par la relation suivante :

$$(\sigma_{11} - X_{11})^2 + 3(\sigma_{12} - X_{12})^2 = R^2 \quad (IV-6)$$

A partir de l'équation (IV-6), nous obtenons des surfaces d'écoulements sous forme d'ellipses. En maintenant σ_{11} inchangé et en procédant à un changement d'axe, σ_{12} en $\sqrt{3}\sigma_{12}$, on obtient des cercles qui sont concentriques à l'origine O.

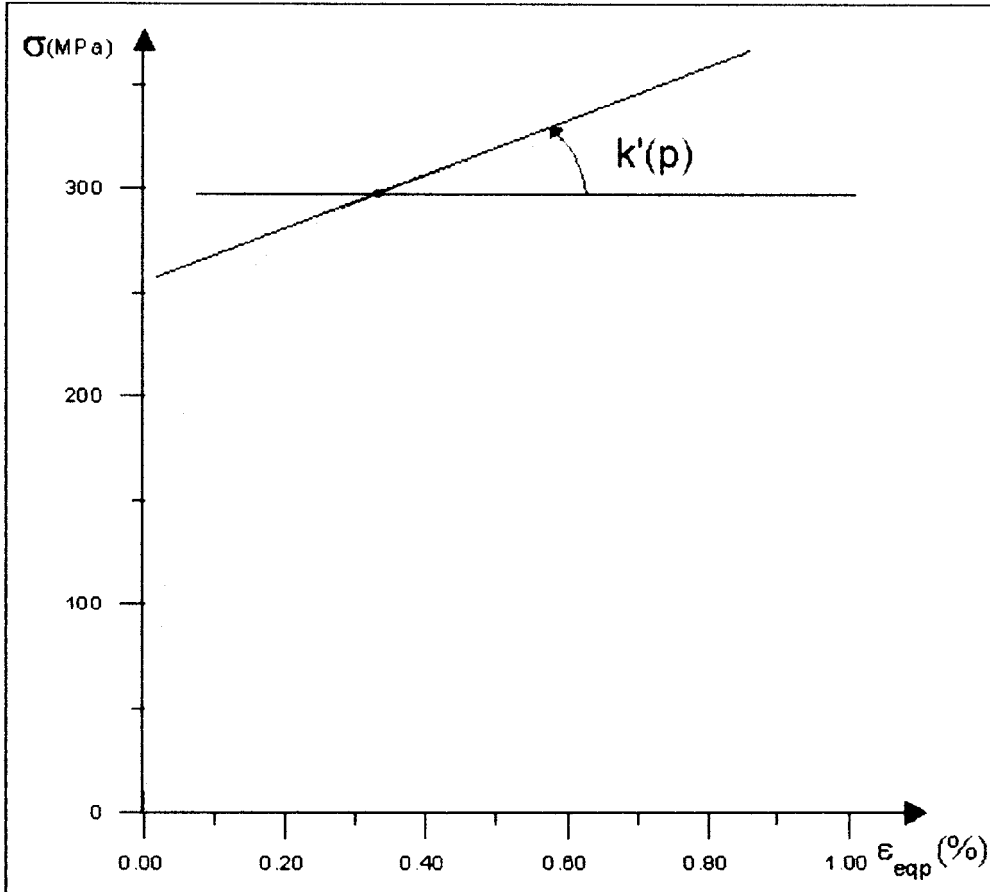
Les modules élastoplastiques se calculent en fonction de la contrainte équivalente et des paramètres qui dépendent du matériau.

$$H_p = k'(p) = \frac{K_y}{M_y} p^{\frac{1-M_y}{M_y}} = \frac{K_y}{M_y} \left(\frac{R - \sigma_y}{K_y} \right)^{\frac{1-M_y}{M_y}} \quad (IV-7)$$

D'où :

$$R = \sigma_y + K_y \left(H_p \cdot \frac{M_y}{K_y} \right)^{\frac{1}{1-M_y}} \quad (\text{IV-8})$$

R : rayon de la surface d'écoulement.



**Fig.IV.2 : Schématisation de la courbe «contrainte équivalente- déformation équivalente »
Représentation de la pente**

Les déformations plastiques incrémentales se calculent pour chaque surface d'écoulement :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{M_y}{K_y} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_y}{K_y} \right\rangle^{M_y-1} \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \sigma_{ij} \quad (\text{IV-9})$$

L'écrouissage cinématique linéaire se produit dans la direction $\sigma^{l+1} - \sigma$, où σ^{l+1} est la contrainte sur la surface $l + 1$ telle que la normale en ce point soit identique à la normale de la surface l au point de contrainte actuelle σ .

Les centres de ces surfaces d'écoulement sont localisées sur la même ligne rectiligne dans l'espace des contraintes et sont définis par la relation suivante :

$$\begin{aligned} X_{11} &= \sigma'_{11} - R \, n_{11} \\ X_{12} &= \sigma'_{12} - R \, n_{12} \end{aligned} \quad (IV-10)$$

En remplaçant l'équation (IV-10) dans l'équation (IV-6), on obtient l'expression suivante :

$$(\sigma_{11} - \sigma'_{11} + R \, n_{11})^2 + 3(\sigma_{12} - \sigma'_{12} + R \, n_{12})^2 = R^2 \quad (IV-11)$$

Avec
$$R = \sigma_y + K_y \left(H_p \cdot \frac{M_y}{K_y} \right)^{\frac{1}{1-M_y}}$$

Où :

- R , le rayon est donnée en fonction du module élastoplastique (H).
- X_{11} et X_{12} , la variable dépendante est donnée aussi en fonction du module élastoplastique (H).
- σ_{11} , σ_{12} , n_{11} et n_{12} sont connus comme les paramètres correspondant à la surface d'écoulement de référence.
- σ'_{11} et σ'_{12} se sont des contraintes actuelles.

On recherche la racine du module élastoplastique de l'équation (IV-11) par la méthode de « Dichotomie ».

Une fois que les courbes du chargement et du déchargement soient obtenues, nous remarquons qu'elles peuvent coïncider en procédant à un changement d'origine (O en A) et une rotation de $\frac{\pi}{2}$ du repère d'axes σ_{eq} et ε_{eq} . Nous remarquons aussi que l'allure de ces courbes est identique par approximation à la courbe de Masing [8]. Ce dernier a considéré un modèle multiaxial composé d'un module élastique et de plusieurs éléments parfaitement plastiques où les différentes limites d'écoulement sont représentées en parallèle et dont le rapport d'homothétie est égale à deux (2). A cet effet, nous pouvons dire que :

$$\sigma_{eq}(B) = 2\sigma_{eq}(A) \quad \text{où :} \quad \sigma_{eq}(B) = -\sigma_{eq}(A).$$

IV-4-2 : Organigramme du programme de calcul

La figure (IV-3) représente l'organigramme du programme de calcul en Fortran qui nous a permis d'identifier et de calculer les caractéristiques de la surface d'écoulement pour les différents cas de chargement ou de déchargement pour des contraintes multiaxiales ou complexes.

En effet, le programme permet de calculer d'abord toutes les caractéristiques du premier groupe appelé « groupe de référence », et sur la base de ce dernier, on procède à une identification et une actualisation des groupes qui se formeront par la suite.

Ce programme nous permet aussi de calculer le module élastoplastique et les déformations élastiques et plastiques, pour chaque incrément de contrainte.

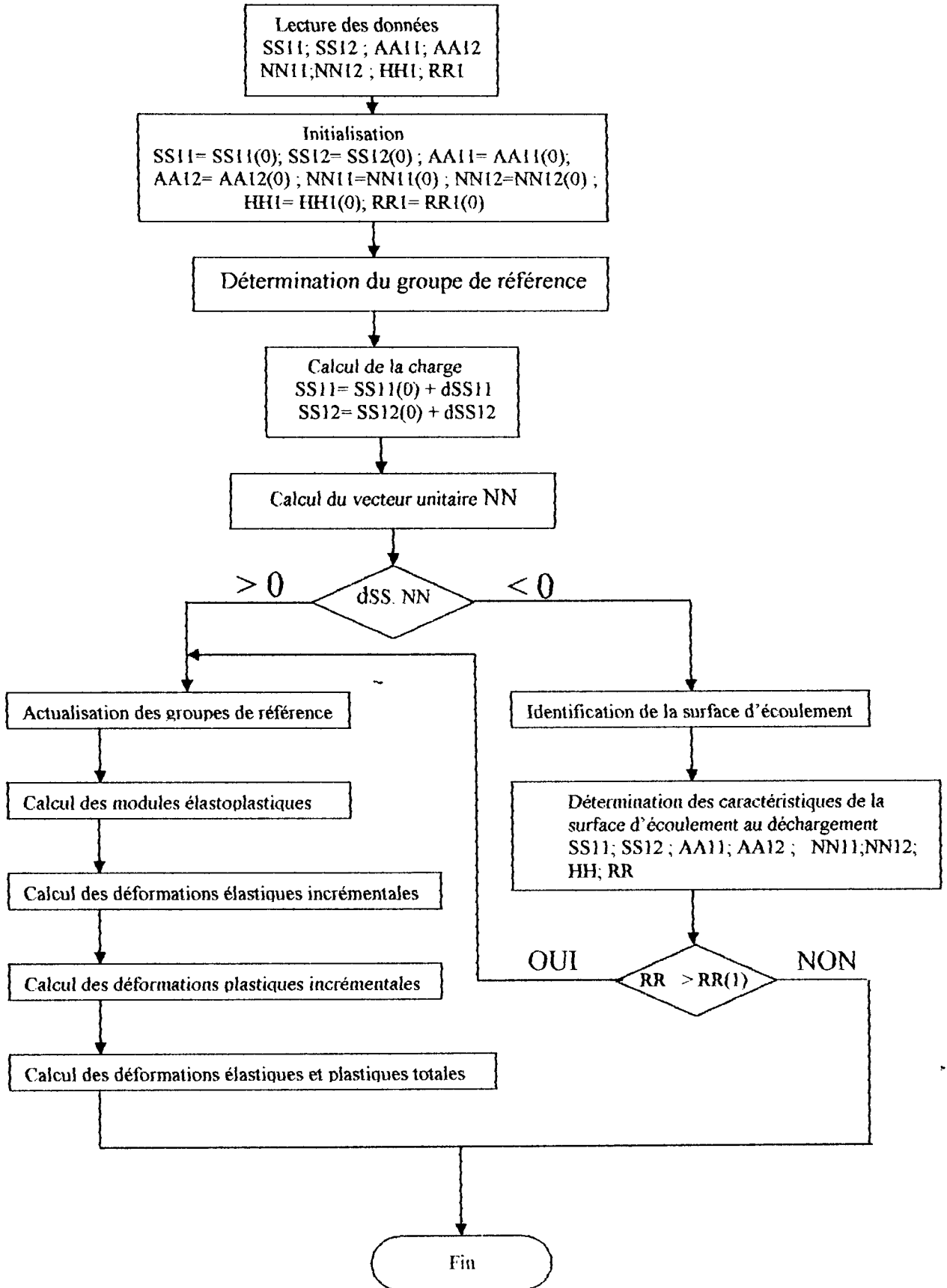


Fig.IV.3 : Organigramme du programme de calcul.

- a) Cas de chargement cyclique quelconque multiaxial (contraintes normale et tangentielle) :

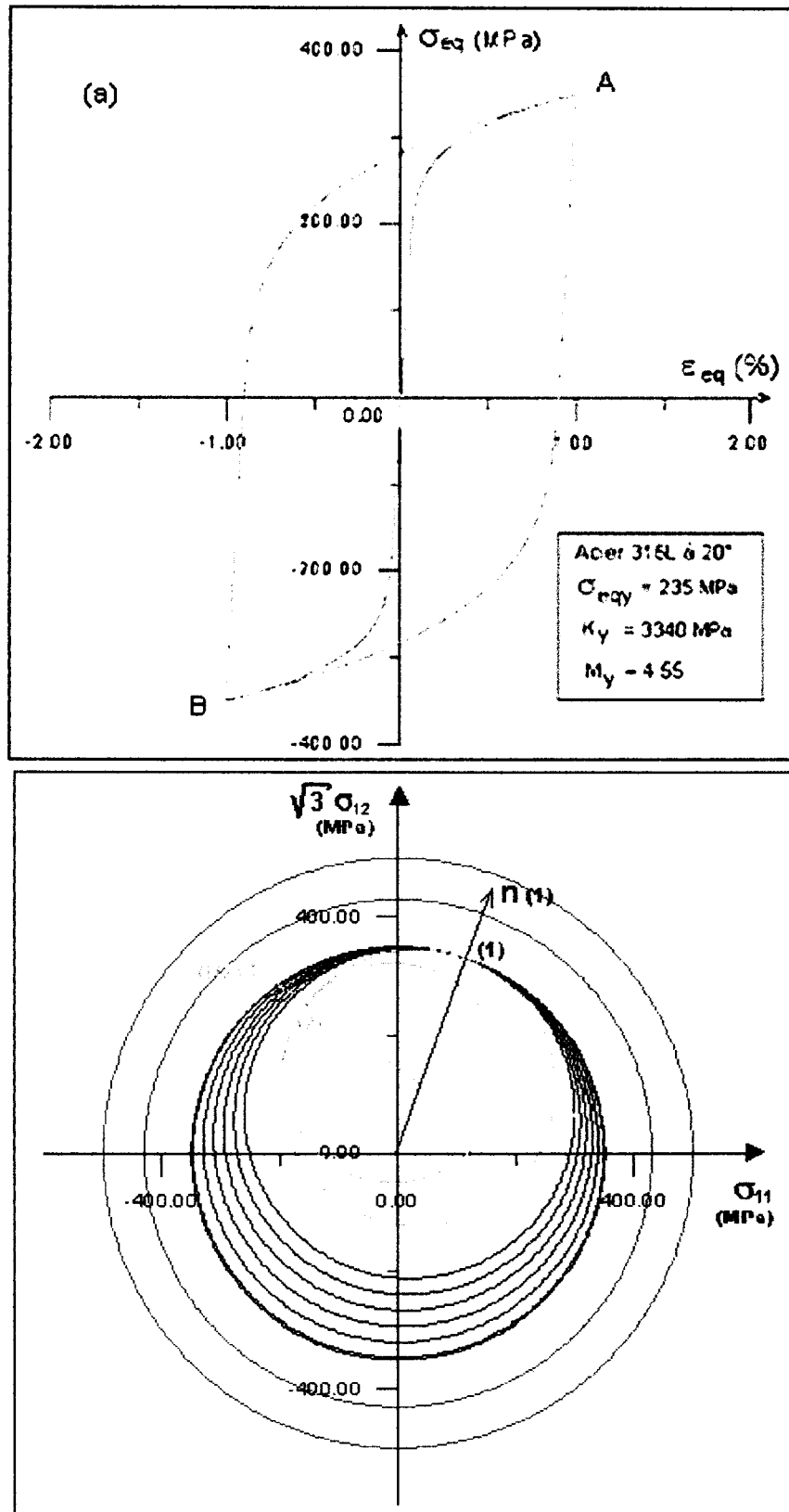


Fig.IV.4 :Fonctionnement du modèle de Mroz
 (a) : Compression – cisaillement
 (b) : Biaxial

Les surfaces d'écoulement du 1^{er} Groupe de référence sont représentées dans le tab. (IV. 1) :

Tab.IV-1 : Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 1^{er} groupe de référence.

nombre d'itération	Rayon (mm)	σ_{11} (MPa)	σ_{12} (MPa)	X_0 (mm)	Y_0 (mm)
776	279.8	77.6	155	19.5	67.50
814	293.5	81.4	163	15.7	54.40
852	307.2	85.2	170	11.9	41.20
890	320.9	89.0	178	8.10	28.10
928	334.6	92.8	186	4.30	14.90
966	348.3	96.6	193	0.50	1.73
971	350.1	97.1	194	0.00	0.00

X_0 : Abscisse de la surface d'écoulement déplacée

Y_0 : Ordonnée de la surface d'écoulement déplacée

Les caractéristiques du 1^{er} Groupe de référence sont représentées dans le tab. (IV.2) :

Tab.IV-2 : Tableau des caractéristiques du 1^{er} groupe de référence.

Rayon (mm)	σ_{11} (MPa)	σ_{12} (MPa)	X_0 (mm)	Y_0 (mm)	n_x	n_y	H (MPa)
350.1	97.10	194	0	0	0.277	0.961	1220

Les surfaces d'écoulement du 2^{ème} Groupe de référence sont représentées dans le tab.(IV.3) :

Tab.IV-3 : Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 2^{ème} groupe de référence.

Nombre d'itération	Rayon (mm)	σ_{11} (MPa)	σ_{12} (MPa)	X_0 (mm)	Y_0 (mm)
972	233.9	-200	70.0	32.2	112
973	185.9	-159	55.7	-8.8	136

Les caractéristiques du 2^{ème} Groupe de référence sont représentées dans le tab. (IV.4):

Tab.IV-4 : Tableau des caractéristiques du 2^{ème} groupe de référence.

Nombre d'itération	Rayon (mm)	σ_{11} (MPa)	σ_{12} (MPa)	X_0 (mm)	Y_0 (mm)	n_x	n_y	H (MPa)
972	233.9	-200	70.0	32.2	112	-0.855	0.518	5110

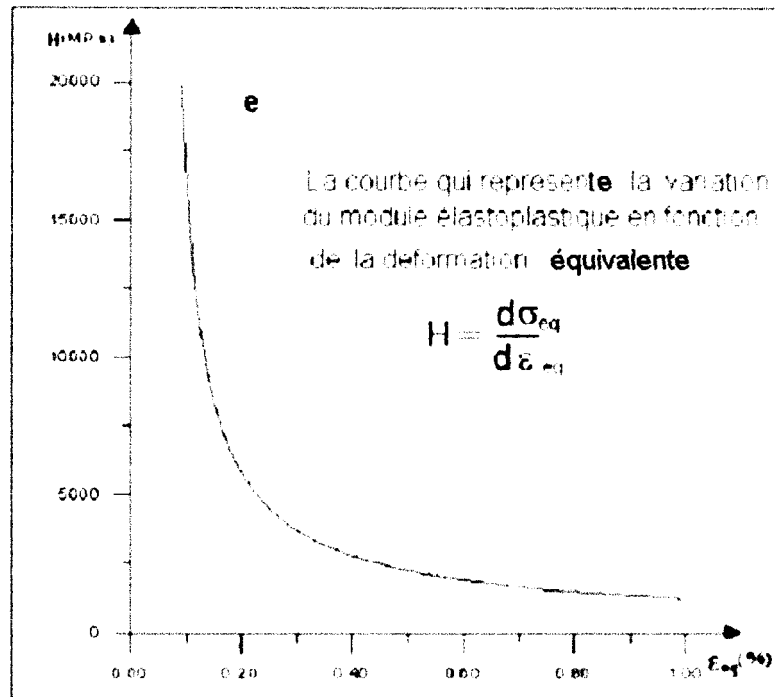


Fig.IV.5 : Modules élastoplastiques en fonction de la déformation plastiques équivalentes

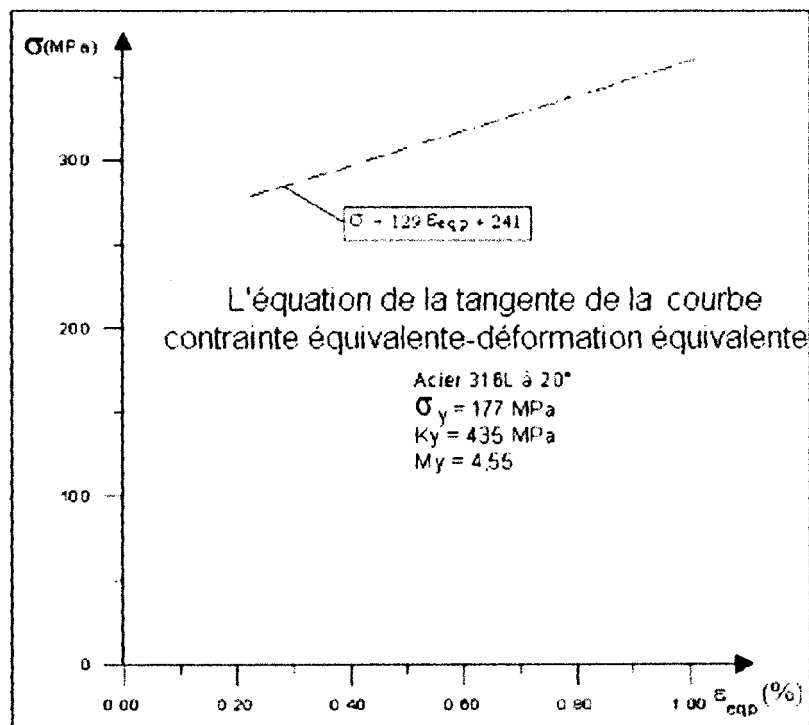


Fig.IV. 6 : Identification de l'écrouissage cinématique linéaire en combinaison (compression - cisaillement)

b) Cas de chargement cyclique uniaxial (suivant la contrainte normale) :

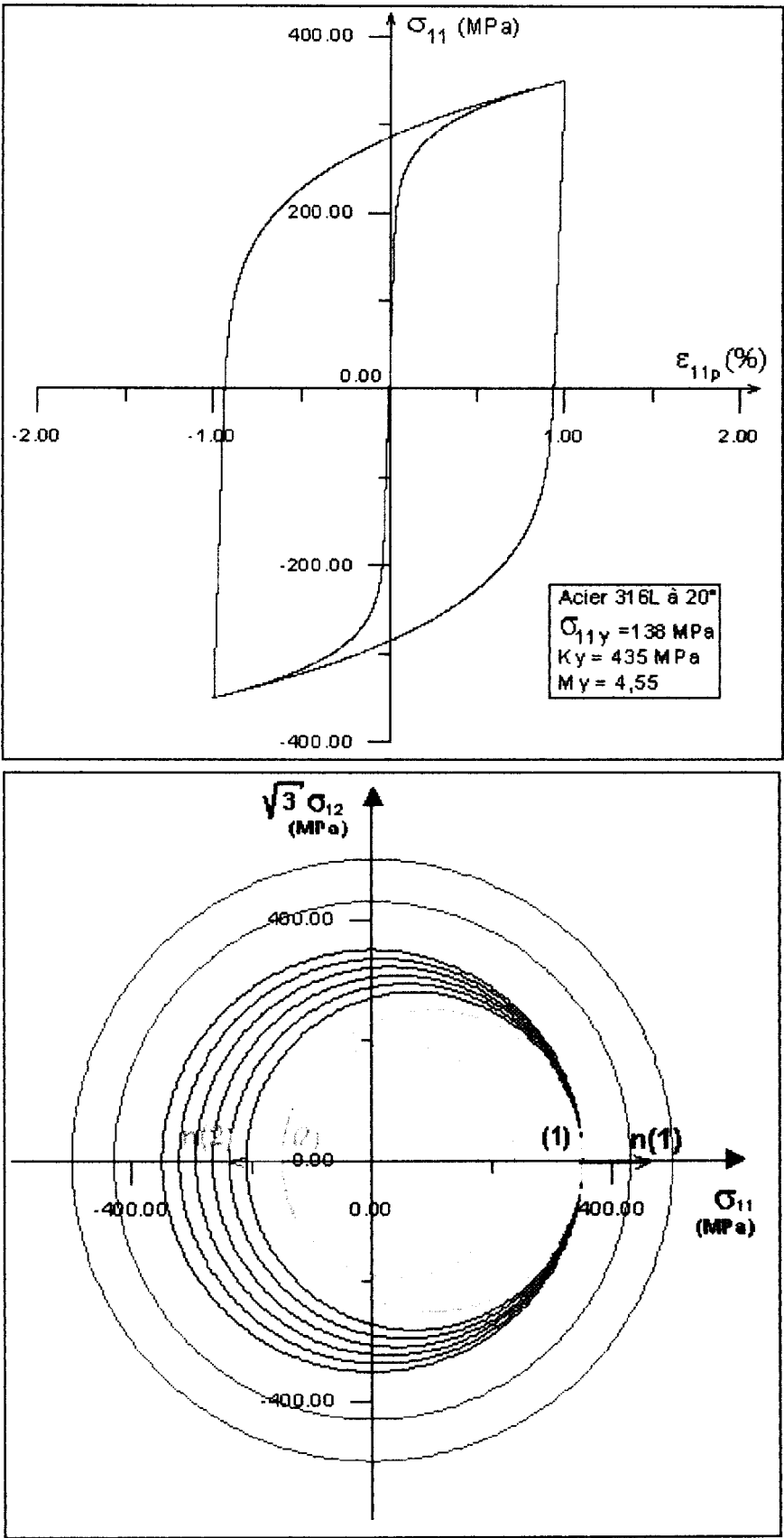


Fig.IV.7 : Fonctionnement du modèle de Mroz
Cas de chargement uniaxial cyclique contrainte normale de (traction -compression)

Les surfaces d'écoulement du 1^{er} Groupe de référence sont représentées dans le tab. (IV-5):

Tab.IV-5 : Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 1^{er} groupe de référence.

Nombre d'itération	Rayon (mm)	σ_{11} (MPa)	σ_{12} (MPa)	Xo (mm)	Yo (mm)
2800	280.0	280	0	70	0
2940	294.0	294	0	56	0
3080	308.0	308	0	42	0
3220	322.0	322	0	28	0
3360	336.0	336	0	14	0
3500	350.0	350	0	0	0

Les caractéristiques du 1^{er} Groupe de référence sont représentées dans le tab. (IV.6):

Tab.IV-6 : Tableau des caractéristiques du 1^{er} groupe de référence.

Rayon (mm)	σ_{11} (MPa)	σ_{12} (MPa)	Xo (mm)	Yo (mm)	nx	ny	H (MPa)
350.0	350	0	0	0	1	0	1230

Les surfaces d'écoulement du 2^{ème} Groupe de référence sont représentées dans le tab. (IV-7) :

Tab.IV-7 : Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 2^{ème} groupe de référence.

Nombre d'itération	Rayon (mm)	σ_{11} (MPa)	σ_{12} (MPa)	Xo (mm)	Yo (mm)
3501	250	-250	0	99.7	0
3502	194	-194	0	43.7	0

Les caractéristiques du 2^{ème} Groupe de référence sont représentées dans le tab. (IV.8):

Tab.IV-8 : Tableau des caractéristiques du 2^{ème} groupe de référence.

Rayon (mm)	σ_{11} (MPa)	σ_{12} (MPa)	Xo (mm)	Yo (mm)	nx	ny	H (MPa)
250	-250	0	99.7	0	-1	0	5090

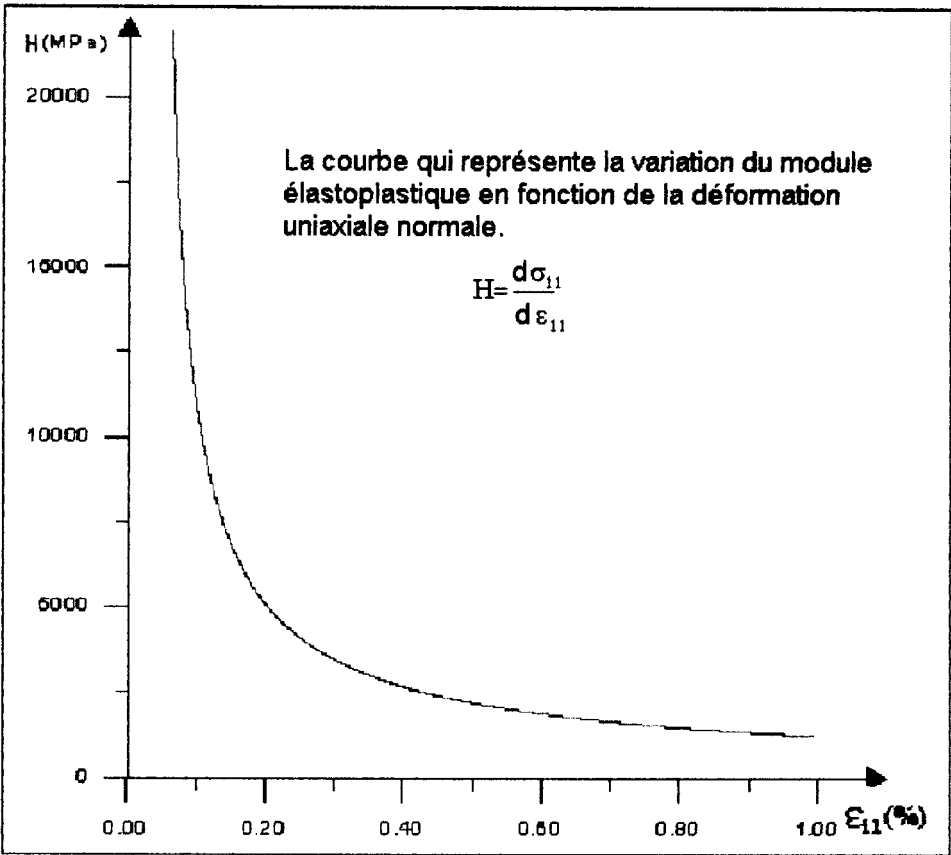


Fig.IV.8 :Modules élastoplastiques en fonction de la déformation plastique uniaxiale normale

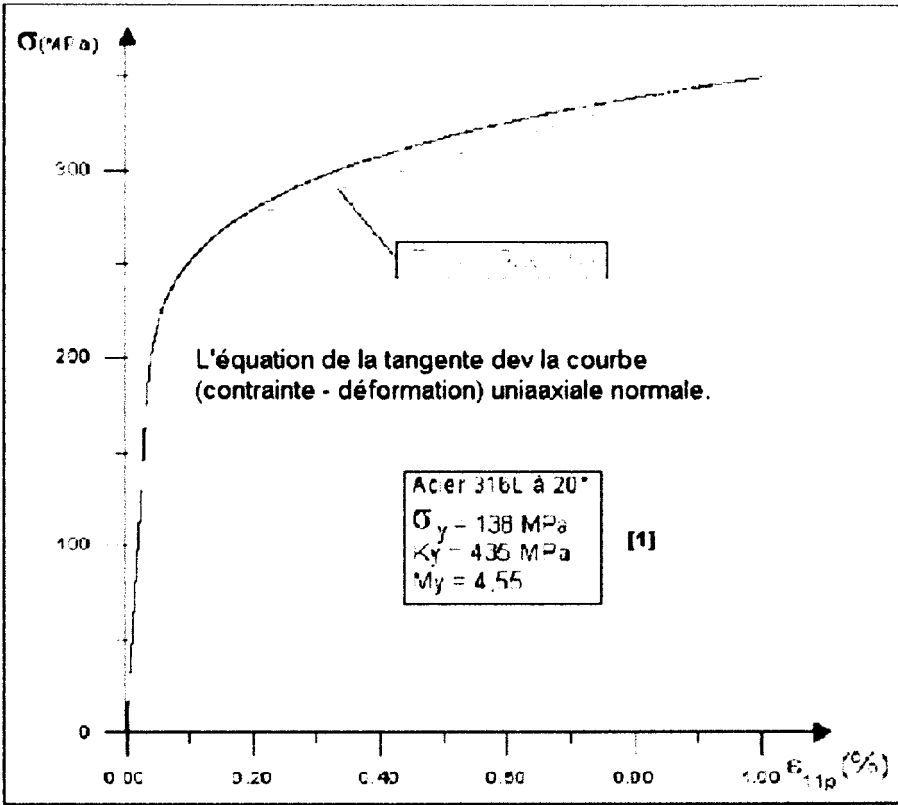


Fig.IV. 9: Identification de l'écrouissage cinématique linéaire en traction simple

c) Cas de chargement cyclique uniaxial (suivant la contrainte tangentielle) :

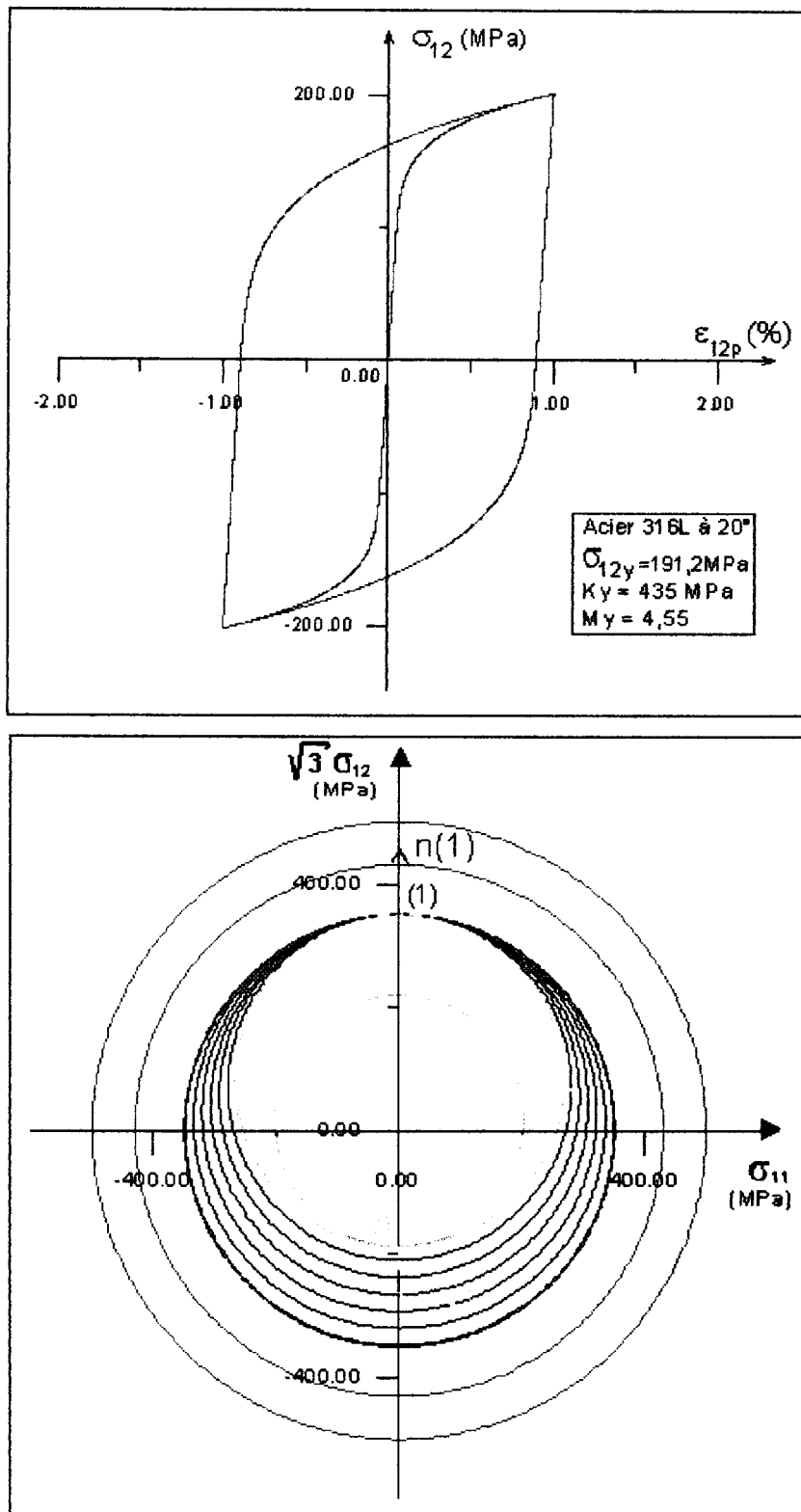


Fig.IV.10 : Fonctionnement du modèle de Mroz
Cas de chargement uniaxial cyclique (contrainte de cisaillement)

Les surfaces d'écoulement du 1^{er} Groupe de référence sont représentées dans le tab. (IV- 9) :

Tab.IV-9 : Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 1^{er} groupe de référence.

nombre d'itération	Rayon (mm)	σ_{11} (Mpa)	σ_{12} (Mpa)	Xo (mm)	Yo (mm)
808	279.9	0	162	0	70.3
848	293.8	0	170	0	56.5
888	307.6	0	178	0	42.6
928	321.5	0	186	0	28.8
968	335.3	0	194	0	14.9
1008	349.2	0	202	0	1.04
1011	350.2	0	202	0	0

Les caractéristiques du 1^{er} Groupe de référence sont représentées dans le tableau (IV.10):

Tab.IV-10 : Tableau des caractéristiques du 1^{er} groupe de référence.

Rayon (mm)	σ_{11} (Mpa)	σ_{12} (Mpa)	Xo (mm)	Yo (mm)	nx	ny	H (Mpa)
350.2	0	202	0	0	0	1	1220

Les surfaces d'écoulement du 2^{ème} Groupe de référence sont représentées dans le tableau (IV.11):

Tab.IV-11 : Tableau des caractéristiques des surfaces actives du 2^{ème} groupe de référence.

Nombre d'itération	Rayon (mm)	σ_{11} (Mpa)	σ_{12} (Mpa)	Xo (mm)	Yo (mm)
1012	268.5	0	-155	0	81.4
1013	203.2	0	-117	0	16.2

Les caractéristiques du 2^{ème} Groupe de référence sont représentées dans le tab. (IV.12):

Tab.IV-12 : Tableau des caractéristiques du 2^{ème} groupe de référence.

Rayon (mm)	σ_{11} (Mpa)	σ_{12} (Mpa)	Xo (mm)	Yo (mm)	nx	ny	H (Mpa)
268.5	0	155	0	81.4	0	-1	5100

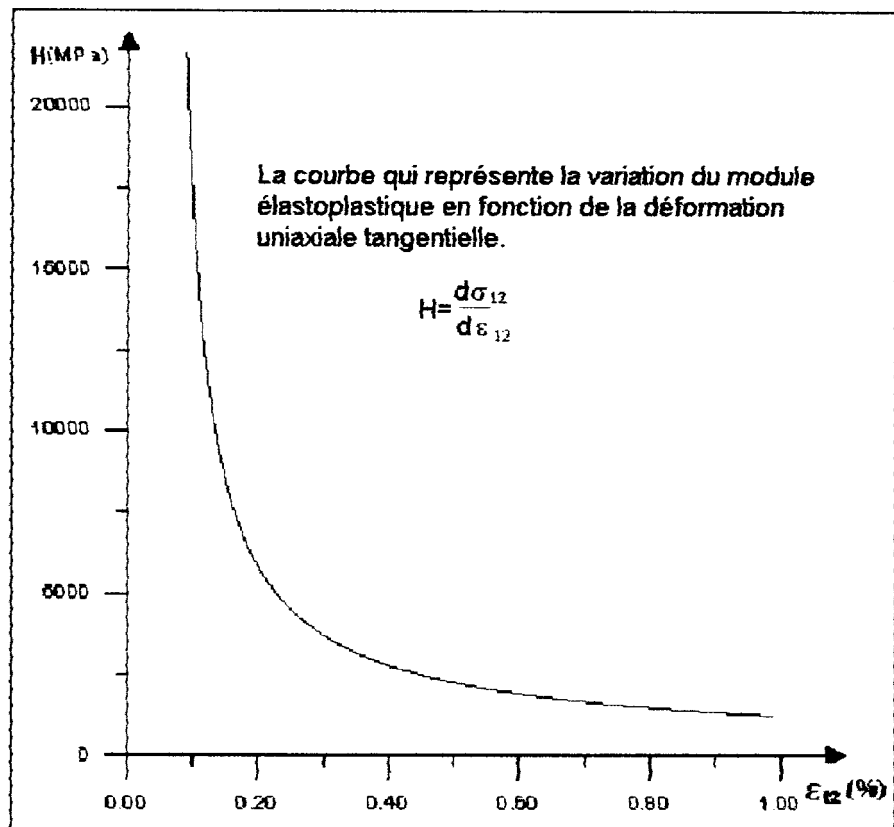


Fig.IV.11 : Modules élastoplastiques en fonction de la déformation plastique uniaxiale de cisaillement

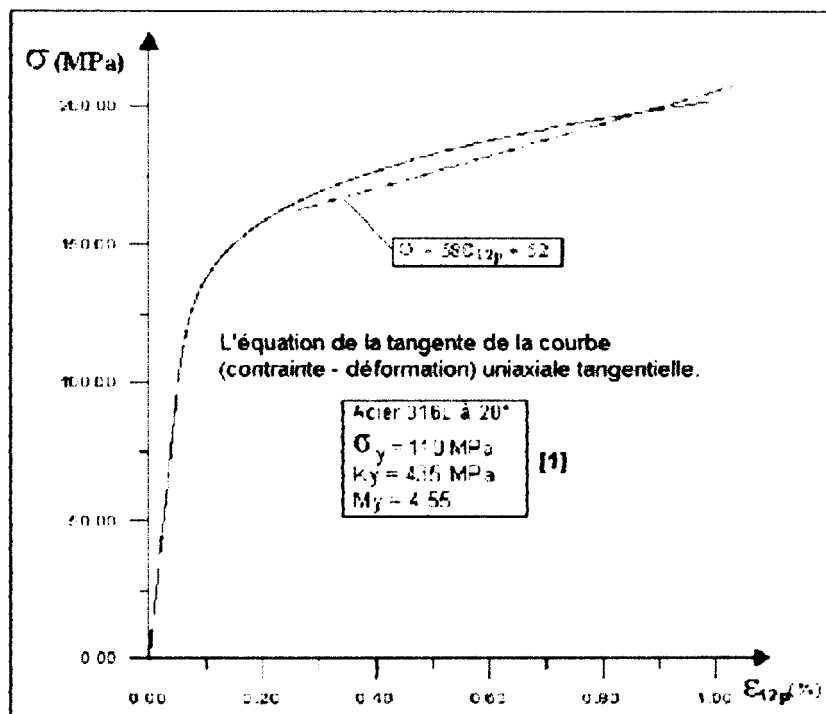


Fig.IV.12 : Identification de l'écrouissage cinématique linéaire en cisaillement simple.

d) Cas de chargement de contrainte normale puis tangentielle :

d) Cas de chargement de contrainte normale puis tangentielle :

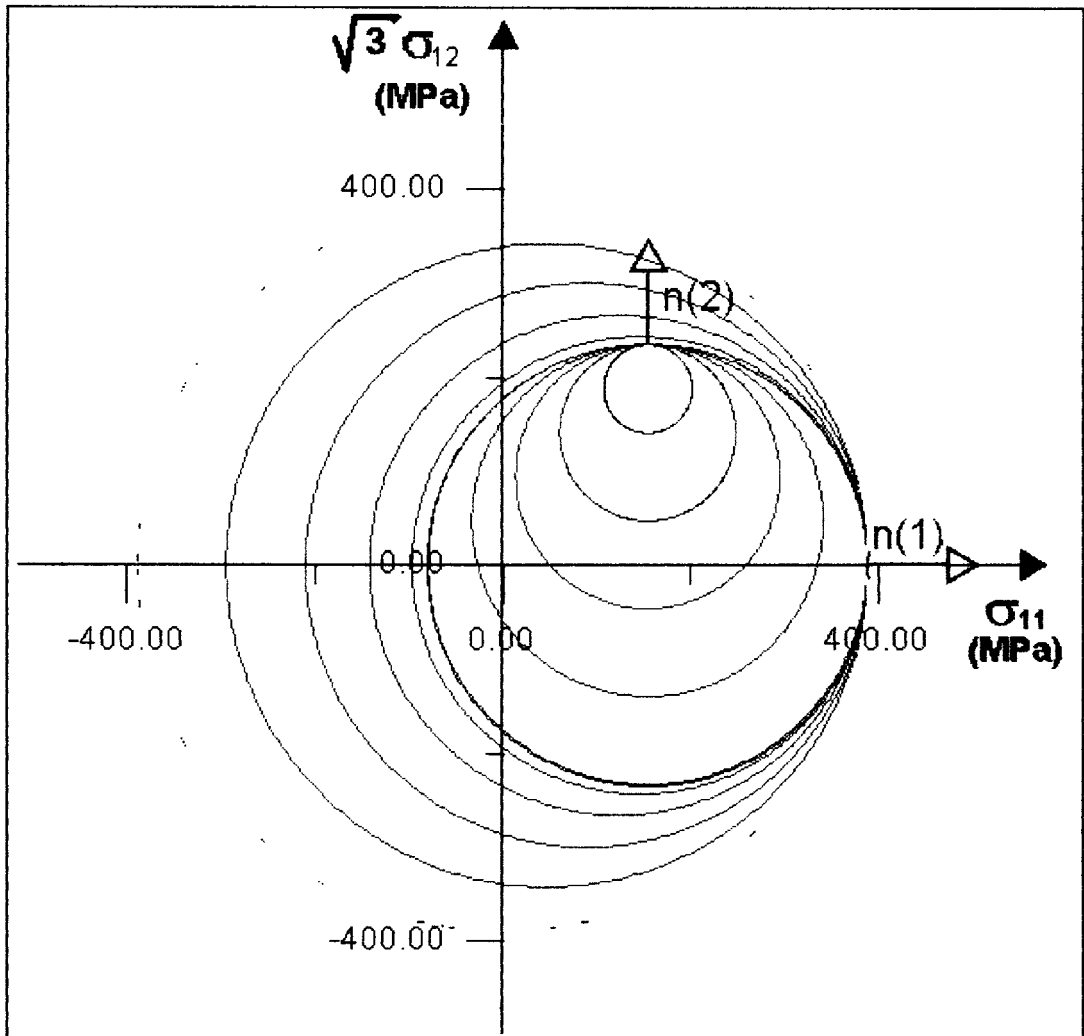


Fig.IV.13 : Cas de chargements successifs (contrainte normale puis contrainte tangentielle)

Les valeurs des caractéristiques des surfaces d'écoulement sont représentées dans le tab. (IV.13) :

Tab.IV-13 : Tableau des caractéristiques des surfaces d'écoulement actives (contrainte normale puis tangentielle) .

Rayon (mm)	σ_{11} (Mpa)	σ_{12} (Mpa)	X_0 (mm)	Y_0 (mm)	n_x	n_y	H (Mpa)
47.1	0	27.2	155	188	0	1	0
93.9	0	54.2	155	141	0	1	0
140.6	0	81.2	155	94.6	0	1	70600
187.4	0	108	155	47.8	0	1	21600
234.2	0	135	155	1.04	0	1	20300
235.2	0	136	155	0	1	0	19500
243.3	62.2	136	147	0	1	0	14700
266.1	12.4	136	124	0	1	0	7340
300.2	187	136	89.8	0	1	0	3170
342.4	249	136	47.6	0	1	0	1400
389.9	311	136	.0798	0	1	0	665
390.0	311	136	0	0	1	0	664

e) Cas de chargement de contrainte tangentielle puis normale :

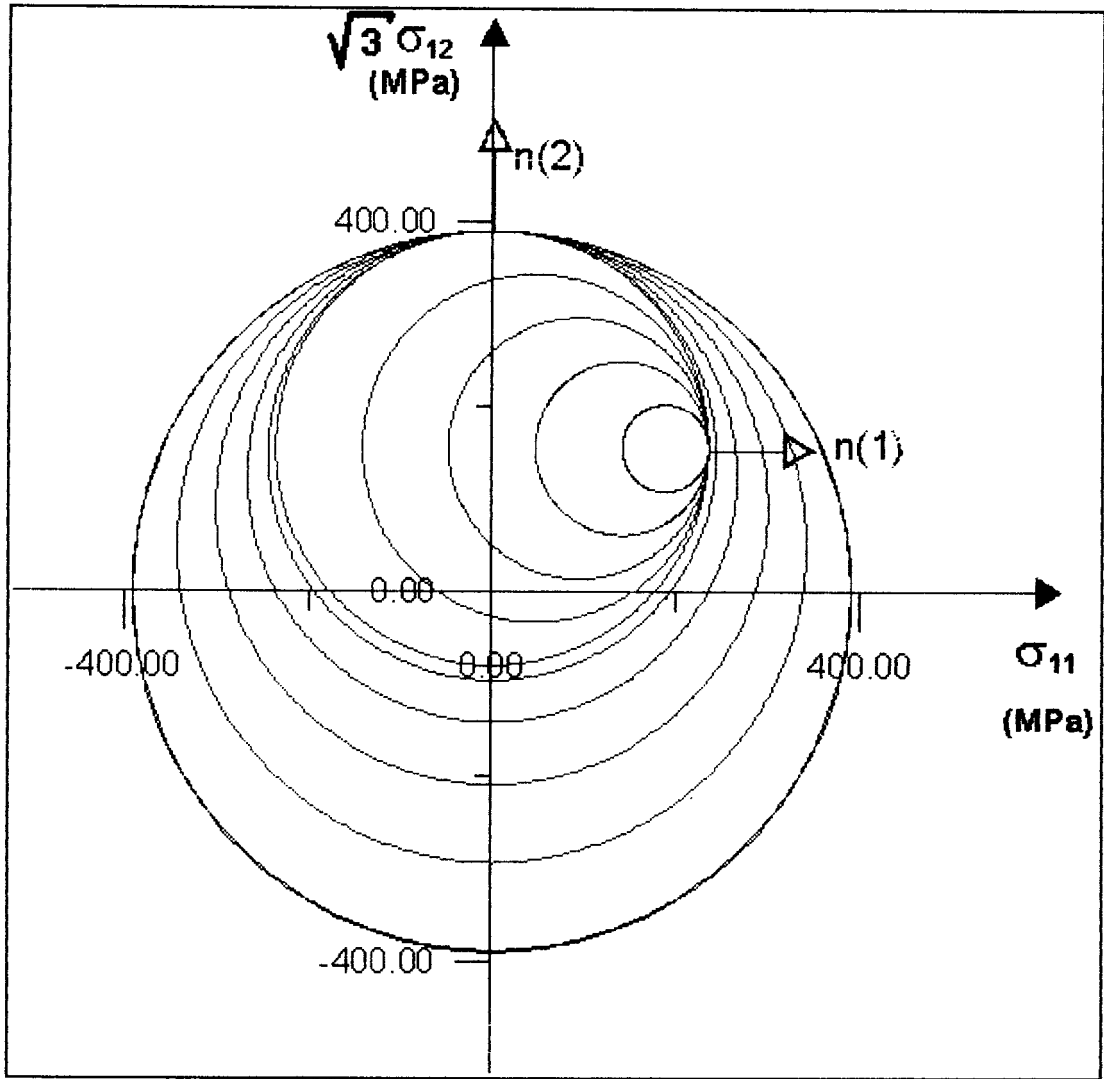


Fig.IV.14 : Cas de chargement successif (contrainte tangentielle puis contrainte normale).

Les valeurs des caractéristiques des surfaces d'écoulement sont représentées dans le tableau (IV.14) :
Tab.(IV.14) : Tableau des caractéristiques des surfaces d'écoulement actives (contrainte tangentielle puis normale) .

Rayon (mm)	σ_{11} (Mpa)	σ_{12} (Mpa)	X_0 (mm)	Y_0 (mm)	n_x	n_y	H (Mpa)
47.1	47.1	0	188	155	1	0	0
94.1	94.1	0	141	155	1	0	0
141.1	141	0	93.9	155	1	0	40100
188.1	188	0	46.9	155	1	0	20500
235.0	235	0	0	155	0	1	19700
243.0	235	35.8	0	147	0	1	14800
265.7	235	71.6	0	124	0	1	7410
299.7	235	107	0	90.4	0	1	3210
341.7	235	143	0	48.5	0	1	1410

IV-5 : Interprétation des résultats

- Le modèle présente un grand nombre de surfaces d'écoulement.
- Chaque surface d'écoulement est représentée par un module élastoplastique H .
- Les surfaces d'écoulement sont contenues dans la surface limiteuse de taille $R_{\max}$.
- Les figures (IV-4), (IV-7), (IV-10), (IV-13) et (IV-14) illustrent parfaitement deux types de surfaces d'écoulement :

1. Surfaces d'écoulements non actives :

Les surfaces d'écoulements non actives sont des surfaces qui n'ont jamais été atteintes ou déplacées par les points de contraintes « actuelles ». On peut dire que l'écrouissage cinématique dépend du paramètre de dégradation, mais la direction de déformation n'est pas spécialement sur le chemin du point de contrainte.

2. Surfaces d'écoulement actives :

Les surfaces d'écoulement actives sont des surfaces qui sont atteintes et déplacées par le point de contrainte « actuelle ». On peut dire que l'écrouissage cinématique dépend, non seulement du paramètre de dégradation, mais également du chemin de contrainte ; et par conséquent, la translation de la surface d'écoulement nous est indiquée par la règle d'écrouissage cinématique.

- Les figures (IV.6) et (IV.9) représentent une même translation de ces surfaces d'écoulement aussi bien dans le sens d'un chargement uniaxial de la contrainte normale, que dans le sens de la contrainte tangentielle.
- Modules élastoplastiques

* Les figures (IV.5),(IV,8) et (IV,11) illustrent la variation des modules élastoplastiques en fonction des déformations plastiques cumulées. Ces variations sont représentées par des courbes hyperboliques.

* Les résultats obtenus nous donnent les valeurs des modules élastoplastiques

On voit bien que les modules élastoplastiques H des surfaces d'écoulement sont inversement proportionnels aux chargements et dépendent uniquement du paramètre de dégradation tout en convergeant vers une valeur nulle (valeur considérée comme module élastoplastique à la rupture H_u).

Puisque les surfaces d'écoulement sont définies par leurs modules élastoplastique (H), les zones extérieures à deux surfaces d'écoulement sont donc limitées par :

H_0 : module élastique

H_p : la limite entre la zone active et la zone non active.

H_u : module élastoplastique ultime.

- L'écrouissage :

La règle d'écrouissage de la surface originale d'écoulement décrit le changement du comportement du matériau. Quand les déformations plastiques sont induites dans ce dernier, on remarque qu'il y a changement de position (valeur de X_0 et Y_0) et de taille (R) dans la surface d'écoulement.

IV-6 : CONCLUSION

Dans le cadre de notre travail, nous avons présenté un programme qui détermine les groupes des surfaces d'écoulement d'un élément de structure soumis à un chargement cyclique et multiaxial dans le domaine plastique par un modèle élastoplastique de Mroz (67). Pour arriver à ces possibilités, nous avons procédé à la modélisation par incrémentation de la partie non linéaire « par morceau » de la courbe « contrainte - déformation » dans un cas tridimensionnel. A cet effet, nous avons considéré les points suivants :

- Le choix d'un critère d'écoulement de plasticité suivant le type du matériau à utiliser et sa facilité d'emploi.
- Le choix de la loi d'écoulement plastique.
- L'application du modèle combiné des propriétés de plasticité isotropique et cinématique pour représenter l'idée d'un champ des modules plastiques défini dans l'espace des contraintes par la configuration relative des surfaces d'écoulement.
- La définition des groupes dont le comportement du matériau est connu par ses caractéristiques mécaniques suivant le chargement imposé.

A partir de l'ensemble des résultats obtenus, nous pouvons conclure qu'on peut actualiser à chaque instant et pour chaque surface d'écoulement, son centre, sa taille, les composantes du vecteur unitaire normal et le module élastoplastique.

D'autre part, le programme traite aussi de l'identification de la surface d'écoulement pour un point de chargement ou de déchargement quelconque. Pour cela, nous avons établi un algorithme qui permet de déterminer les caractéristiques de la surface d'écoulement auquel le point de chargement appartient.

CONCLUSION GENERALE

Nous présentons un travail qui définit le comportement des matériaux sollicités à un chargement complexe et cyclique par un modèle élastoplastique de Mroz. Pour arriver à la modélisation nous avons traité les points suivants :

En premier chapitre, nous avons fait une synthèse de tous les critères d'écoulements dépendant de la pression moyenne et qui sont utilisés pour les géomatériaux (sols, roches,...) et ceux non dépendants de la pression moyenne et qui sont destinés pour les autres matériaux afin de connaître et de mieux comprendre leurs formes géométriques.

En deuxième chapitre, nous avons montré que la loi d'écoulement relative aux matériaux présente un vecteur déformation qui est perpendiculaire à la surface d'écoulement, et celle relative aux géomatériaux présente, en plus un potentiel d'écoulement qui est lui aussi un vecteur normal aux surfaces équipotentiels.

En troisième chapitre, nous avons présenté l'effet de l'écrouissage isotropique et cinématique et les modèles d'écrouissage qui se sont traités par différents Auteurs qui s'adaptent à des cas de chargement spécifique.

Dans le cadre de notre travail nous avons présenté un programme qui détermine les groupes des surfaces d'écoulement d'un élément de structure soumis à un chargement cyclique et multiaxial dans le domaine plastique par un modèle élastoplastique de Mroz (67). Pour arriver à ces possibilités, nous avons procédé à la modélisation par incrémentation de la partie non linéaire « par morceau » de la courbe « contrainte- déformation » dans un cas tridimensionnel. A cet effet, nous avons considéré les points suivants :

- Choix d'un critère d'écoulement de plasticité suivant le type du matériau à utiliser et sa facilité d'emploi.
- Choix de la loi d'écoulement plastique.

- Le modèle combiné des propriétés de plasticité isotropique et cinématique pour représenter l'idée d'un champ des modules plastiques défini dans l'espace des contraintes par la configuration relative des surfaces d'écoulement
- Définition des groupes dont le comportement du matériau est connu par ses caractéristiques mécanique suivant le chargement imposé.

L'ensemble des résultats obtenus, nous pouvons conclure qu'on peut actualiser à chaque instant, pour chaque surface d'écoulement, son centre, sa taille, les composantes du vecteur unitaire normal et le module élastoplastique.

D'autre part le programme traite aussi de l'identification de la surface d'écoulement pour un point de chargement où déchargement quelconque. Pour cela, nous avons établi un algorithme qui permet de déterminer les caractéristiques de la surface d'écoulement auquel le point de chargement appartient.

L'intérêt de ce modèle réside dans son très faible nombre de paramètres et ce, par rapport aux autres modèles de plasticité avec écrouissage.

Etant donné la complexité de la plasticité non linéaire, nous souhaitons de poursuivre ce travail par le modèle de Mroz pour le chargement multiaxiale et cyclique et de voir la possibilité d'intégrer d'autres facteurs qui influent sur la déformation de la surface d'écoulement.

Références bibliographiques

- [1] **J. LEMAITRE & J.-L. CHABOCHE** « Mécanique des matériaux solides »
Edition Dunod Paris, 1988.
- [2] **A. BERGUL, A. BUI-QUOC, A. BIRON, G. McINTYRE & C. LABERGE**
« Résistance des matériaux » Edition de l'école polytechnique de MONTREAL, 1987.
- [3] **D. FRANCOIS, A. PINEAU & A. ZAOUI** « Comportement mécanique des
matériaux » Edition Hermes Paris, 1991, 1992, 1993.
- [4] **S. DUBIGEON** « Mécanique des milieux continus » Edition école centrale de
Nantes, 1998.
- [5] **MADJID K.** « Elastic-plastic structural » Journal of Structural Division, 1963,
Vol.10, pp. 208-219.
- [6] **D.R.J. OWEN & E. HINTON** « Finite element in plasticity » University college of
Swansea, U.K Pineridge Press Limited 1980.
- [7] **M. DYSLI** « Modélisation en contrainte- déformation » Edition école polytechnique
de LAUSANE 1997.
- [8] **Z. MROZ** « On the description of anisotropic work hardening » J. Mech. Phys.
Solids, N° 15 pp 163- 175, Poland 1967.
- [9] **J.-P. HENRY & F. PARSY** « Cours d'élasticité » Edition Dunod, Paris 1982.
- [10] **COYNE & BELLIE** « Modélisation numérique du comportement diffère des cavités
souterraines à grande profondeur » Thèse de doctorat Laboratoire 3S : sols, solides,
structure 2002, 250 p.
- [11] **KLINSKI, M.** « a cyclic plasticity model based on fuzzy set theory » ASCE Journal
of engineering Mechanics, Vol. 114, N°4, pp 563-582, April 1988.
- [12] **J.P. BARDET** « Lode dependences for isotropic pressure-sensitive elastoplastic
materials. » University of southern California, Los Angeles Transaction ASME vol.57
pp 498-506, Septembre 1990.
- [13] **GERARD COFFIGNAL** « Mécanique non- linéaire et éléments finis »
Maisons-alfort 2001.
- [14] **D. FRANCOIS, A. PINEAU & A. ZAOUI** « Elasticité et plasticité »
Edition Hermès Paris, 1991, 1992.

- [15] **CLAUDE BATHIAS & JEAN-PAUL BAILON** « Fatigue des matériaux et des structures » Edition Hermès, Paris (1997).
- [16] **V. AUBIN, P. QUAEGEBEUR & S. DEGALLAIX**
« Comportement cyclique d'un acier inoxydable duplex sous chargement multiaxial »
thèse de Doctorat Laboratoire mécanique de Lille ,décembre 2001, 592 p.
- [17] **J. P. BARDET AND W. CHUCAIR**
« A linearized integration technique for incremental constitutive equation »
International Journal For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.
Vol 15, pp 1-19, Octobre 1991.
- [18] **FRANCISCO T. MONTANS & RONALDO I. BORDJA**
« Implicit J_2 – bounding surface plasticity using Prager's translation rule »
International Journal For Numerical Methods in Engineering 2002, N°55,
pp112-1166.
- [19] **A.BRAND, J.F FLAVENOT, R.GREGOIRE & C.TOURNIER**
« Données technologiques sur la fatigue » Centre Technique des Industries TEC
& DOC (CETIM 1992).
- [20] **J. MANDEL** « Cours de mécanique des milieux continus » EDITION Jacques
Gabay, 1994
- [21] **A-M.HABRAKEN** « Modeling the plastic anisotropy of metals by finite element
method » these de doctorat, GrashMech 2000-2001.
- [22] **W.D. IWAN** « On a Class of Models for the Yielding Behaviour of Continuo
and Composite systems » journal of applied mechanics, vol 67, Trans. ASME
Series E. September 1967, pp 612-617.
- [23] **S. COMMEND & T. ZIMMERMAN** « Object-Oriented Non linear Finite
Element Programming » Advance in engineering Software vol.32 ,
pp. 611-628, 2001
- [24] **P. MESTAT & P. HUMBERT** « Référentiel de tests pour la vérification de la
programmation des lois de comportement dans les logiciels d'élément finis »
Bulletin des ponts et chaussée, **230**, Janvier- février, 2001, pp.23-39.
- [25] **P. MESTAT & Y. RIOU** « Méthodologie de déformation des paramètres pour la
loi de comportement élastoplastique de Vermeer et simulations d'essais mécanique
des sols » Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées,**235** novembre –
décembre, Nantes 2001 pp.19-39.

- [26] **ACHIALLEAS G.PAPADIMITRIOU & George D. BOUCKOVALAS**
« Plasticity model for under sand small and large cyclic strains: multiaxial formulation » National tech. university of Athènes, Greece, 2001, Vol.54, pp191-204.
- [27] **ELHEM GHORBAL** « Approche expérimentale pour la modélisation du comportement mécanique des matériaux métalliques et organique » thèse de Doctorat, Université MARNE LA VALLEE ,2001, 94 p.
- [28] **HASHIGUCHI , K** « Constitutive equation of elastoplastic materials with elastic-plastic transition » Journal Applied Mechanics ASME , N°47, pp266-272.
- [29] **CHABOCHE, J. L,** « Constitution equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity » International Journal of plasticity, 1989, Vol 51, N°3, pp 247-302.
- [30] **JEAN-HERVE- PREVOST** « Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour » International Journal For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol 1. pp195-216 April (1977).
- [31] **PRAGER, W.** « Recent developement in the Mathematical theory of plasticity » J. Applied phys, 1949, Vol 20, N°3, pp235-241.
- [32] **JENNINGS A.** « An elastic-plastic analysis by computer for formed structure loaded up to collapse » Journal of Structural Division, vol. 107 pp. 569-574.
- [33] **J. DESRUE** « Limitation du choix de l'angle de frottement pour le critère de plasticité de Drucker Prager » Thèse de Doctorat Laboratoire 3S , Grenoble France 2002,

Annexe -I

I- INVARIANTS DE CONTRAINTE DEVIATORIQUE

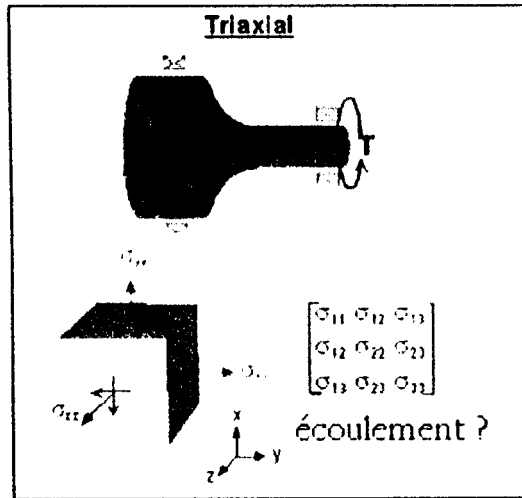


Fig.A1.1 : chargement multiaxial d'une éprouvette

Si nous posons σ comme la contrainte moyenne normale p

$$\sigma = -p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}Tr \sigma \quad (A.1)$$

Alors le tenseur des contraintes peut être écrit comme la somme de deux tenseurs:

1°- contrainte hydrostatique:

La contrainte hydrostatique dont laquelle chaque contrainte normale est égale à $-p$ et les contraintes de cisaillement sont nulles.

La contrainte hydrostatique produit un changement de volume sans faire un changement de forme dans un milieu isotrope.

$$\sigma_{hyd} = -pI = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

2°- la contrainte deviatorique :

La contrainte deviatorique qui cause le changement de forme.

$$s = \begin{bmatrix} s_{11} - \sigma & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} - \sigma & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} - \sigma \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

Les contraintes principales sont des quantités dont les valeurs ne dépendent pas du système de coordonnées dans lesquelles les composantes des contraintes sont initialement données. Ils sont par conséquent les invariants des états de contraintes.

Si nous examinons les invariants des contraintes,

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$|\sigma_{rs} - \lambda \delta_{rs}| = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$|\sigma - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (\text{A.6})$$

Quand l'équation caractéristique (I.15) de déterminant est étendue, l'équation cubique prend la forme:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (\text{A.7})$$

Similairement, nous pouvons déterminée les invariants des contraintes deviatorique à partir de

$$\begin{vmatrix} s_{11} - \lambda & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} - \lambda & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$|s_{rs} - \lambda \delta_{rs}| = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$|\sigma - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 - J_2 \lambda - J_3 = 0 \quad (\text{A.11})$$

Les invariants sont définis par:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} = \text{Tr } \sigma \quad (\text{A.12})$$

$$I_2 = -(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2 \quad (\text{A.12-a})$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{2}I_\sigma^2 \quad (\text{A.12-b})$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma : \sigma - I_\sigma^2) \quad (\text{A.12-c})$$

$$I_3 = \det = \frac{1}{6}e_{ijk}e_{pqr}e_{qps}\sigma_{ip}\sigma_{jq}\sigma_{kr} \quad (\text{A.12-d})$$

En terme de contrainte principale, ces invariants peuvent être simplifiés en

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (\text{A13-d})$$

$$I_2 = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (\text{A.14})$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (\text{A.15})$$

Similairement,

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3 \quad (\text{A.16})$$

$$J_2 = -(s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1) \quad (\text{A.17})$$

$$J_3 = s_1s_2s_3 \quad (\text{A.18})$$

II- INTERPRETATION PHYSIQUE DES INVARIANTS DE CONTRAINTES

Si nous considérons un plan, qui contient des angles égaux avec respect des directions des contraintes principales, c'est un plan π ou un plan octaédrale, la normale à ce plan est donnée par

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Le vecteur de traction sur ce plan est

$$\mathbf{t}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Est la composante de la contrainte normale sur le plan octaédrale est donnée par :

$$\sigma_{oct} = \mathbf{t}_{oct} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3} I_1 = \sigma_{oct} \quad (\text{A.21})$$

Ou

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_1 \quad (\text{A.22})$$

Finalement, la contrainte de cisaillement octaédrale est obtenu à partir de

$$\tau_{oct}^2 = |\mathbf{t}_{oct}|^2 - \sigma_{oct}^2 = \frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{\sigma_2^2}{3} + \frac{\sigma_3^2}{3} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9} \quad (\text{A.23})$$

~

Sur une manipulation algébrique, il peut être démontré que

$$9\tau_{oct}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6J_2 \quad (\text{A.24})$$

Ou

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (\text{A.25})$$

Est finalement, la direction de la contrainte de cisaillement octaédrale est donnée par

$$\cos 3\theta = \sqrt{2} \frac{J_3}{\tau_{oct}^3} \quad (\text{A.26})$$

III- REPRESENTATION GEOMETRIQUE DES ETATS DE CONTRAINTE

En utilisant trois contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 , comme des coordonnées, dans un espace de contrainte à trois dimensions. Cette représentation de contrainte est connue comme **l'espace de contrainte de Haigh-Westergaard**, voir la figure (AI.2).

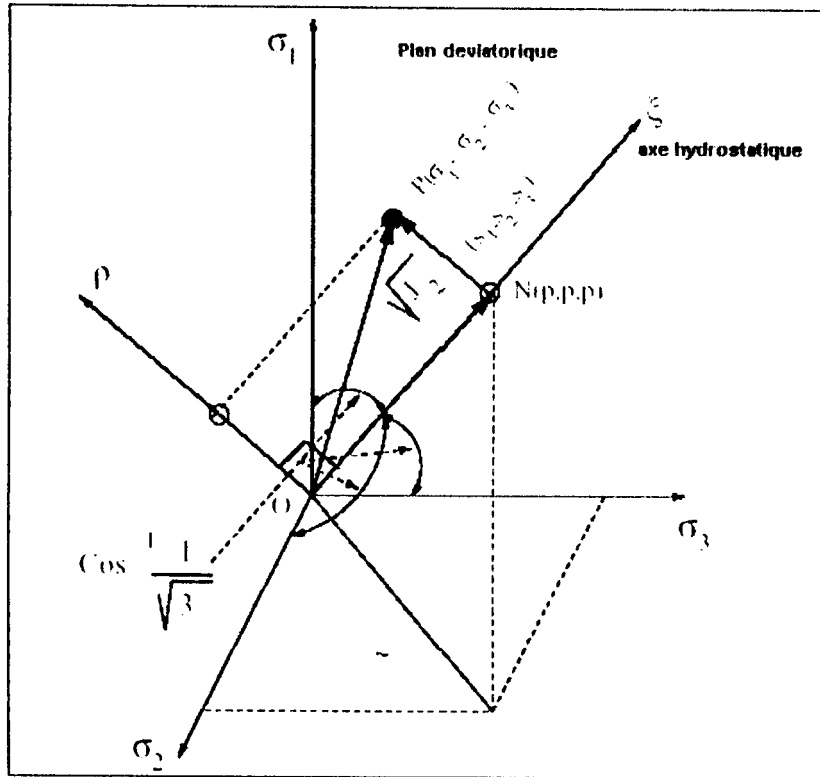


Fig.A1.2 : Espace des contraintes de Haigh-Westergaard

La décomposition de l'état de contrainte en hydrostatique, $P\delta_{ij}$ et les composantes de la contrainte déviatorique s_{ij} peuvent être géométriquement représentées dans cet espace. En considérant un état de contrainte arbitraire OP commençant à partir de $O(0,0,0)$ et se termine à $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, le vecteur OP peut être décomposé en deux composantes ON et NP. La forme est le long de la direction de vecteur unité $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, et NP perpendiculaire à ON.

Le vecteur $\overrightarrow{ON}$ représente la composante hydrostatique de l'état de contrainte et l'axe $O\xi$ est appelé axe hydrostatique ξ , et pour tout point sur cet axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, on a

$$\xi = \sqrt{3}p \quad (\text{A.27})$$

Le vecteur NP représente la composante deviatorique de l'état de contrainte (s_1, s_2, s_3) et est perpendiculaire à l'axe ξ . Tout perpendiculaire à l'axe hydrostatique est appelé le plan deviatorique et est exprimé comme :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \xi \quad (\text{A.28})$$

Et le plan particulier qui passe à travers l'origine est appelé le plan π et est représenté par $\xi = 0$. Tout plan contenant l'axe hydrostatique est appelé un plan méridien. Le vecteur NP s'allonge sur un plan méridien et a pour

$$\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2} \quad (\text{A.29})$$

La projection de NP et les axes de coordonnées σ_i sur un plan deviatorique est montré sur la figure (I.4)

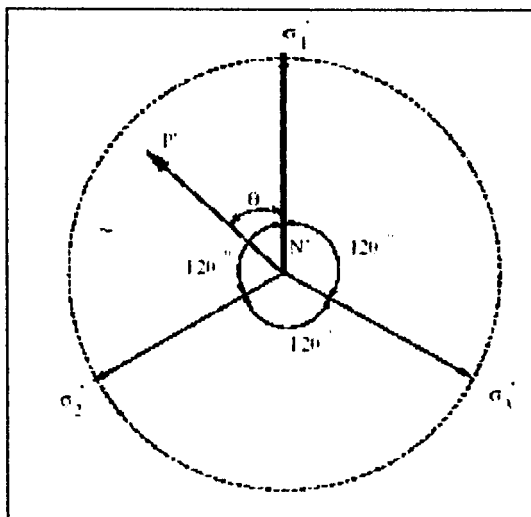


Fig.A1-3 : Les contraintes sur un plan deviatorique

La projection de N'P' de NP sur ce plan construit un angle θ avec les axes σ_1' .

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.30})$$

Les trois nouvelles variables ξ, ρ et θ peuvent être tous exprimées en terme de contraintes principales à travers leurs invariants. Par conséquent, l'état de contrainte général peut être exprimé l'un ou l'autre en terme de $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, ou (ξ, ρ, θ) pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, nous avons

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p \\ p \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$= \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{I.41})$$

Annexe 02

Détermination expérimentale de surface seuil.

1°) Essai de Traction-torsion

Dans le cas de sollicitation plus complexe telle que celle réalisée dans l'expérience de traction-torsion d'un tube mince en cuivre de rayon interne R et d'épaisseur e (Bui, 1970), où les seuls composantes non nulles du tenseur des contraintes sont la contrainte normale σ_{zz} et la contrainte de cisaillement $\sigma_{z\theta}$ variant indépendamment l'une de l'autre.

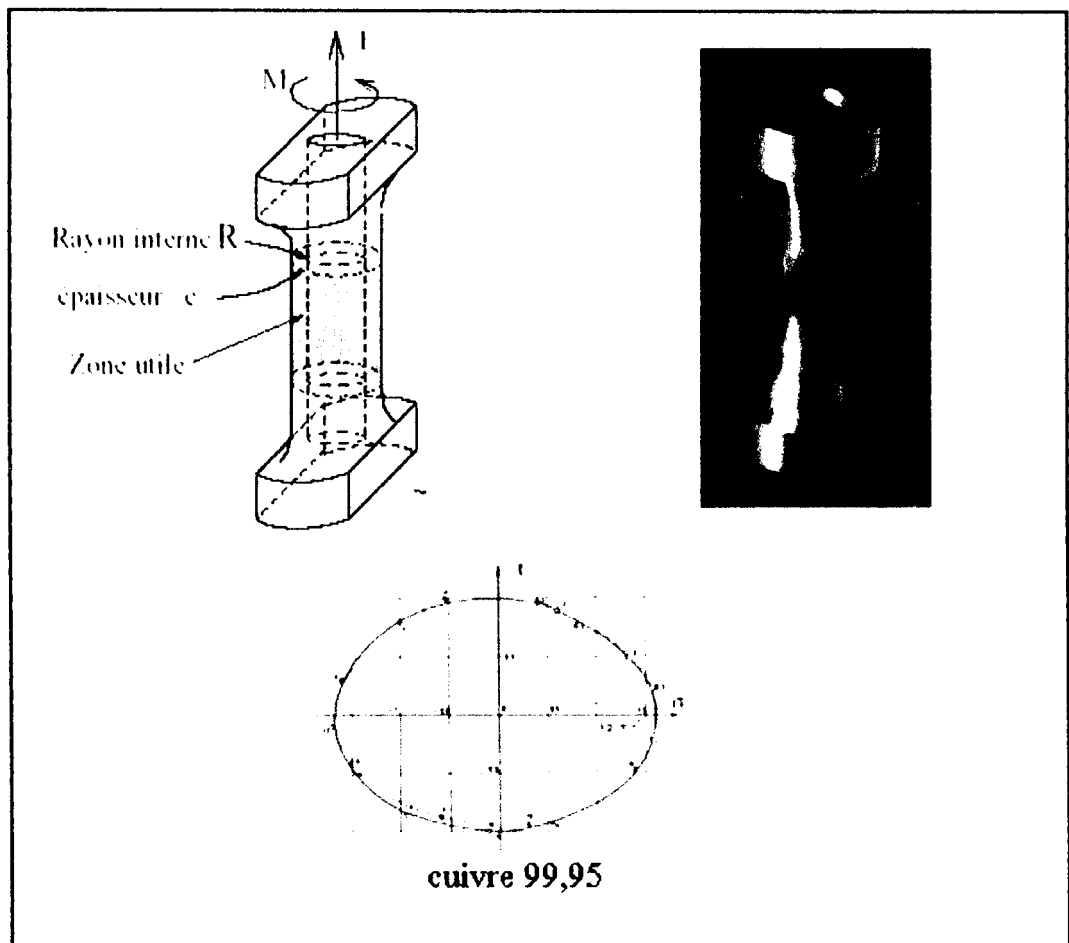


Fig.A2.1 : éprouvette pour l'expérience de traction-torsion d'un tube mince

2°) Matériau écrouissable.

Dans le cas du matériau écrouissable la charge peut être poursuivie au-delà du domaine d'élasticité initiale; le point de charge $\bar{\sigma}$ ayant atteint la frontière initiale d'élasticité peut franchir celle-ci; il y a alors apparition de déformation permanente. On définit en chaque point du trajet, le domaine d'élasticité actuel.

Le domaine d'élasticité actuel correspondant à un point B et à un trajet de charge donné aboutissant en B.

Dans le cas tridimensionnelle, il entraîne avec lui la frontière du domaine d'élasticité actuel, comme cela est représenté schématiquement, dans l'espace à deux dimensions.

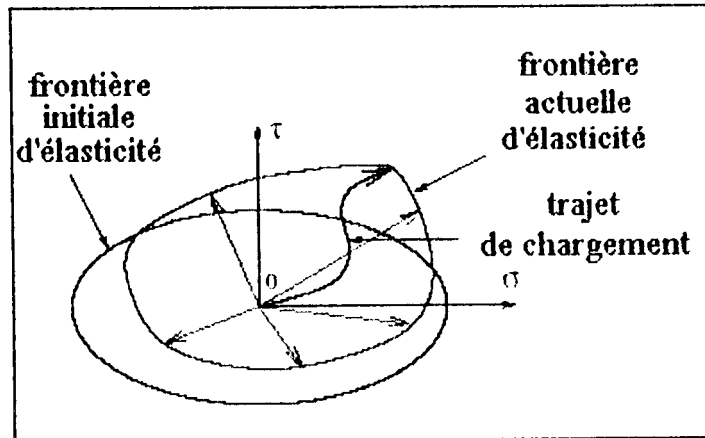


Fig.A2.2 : Manifestation de l'écrouissage

Le domaine d'élasticité actuel dépend non seulement de la position actuelle du point de charge, mais du trajet suivi pour l'atteindre à de l'état initiale naturel de l'élément : On dira qu'il dépend de l'état d'écrouissage du matériau.

Un arc de trajet de charge est dit croissant du point de vue du comportement plastique du matériau si le point de charge σ

Est à chaque instant à la frontière du domaine d'élasticité actuel, et s'il est orienté vers l'extérieur de ce domaine. Sur un tel arc de trajet il y a à la fois évolution de la déformation plastique et de l'état d'écrouissage du matériau.

Un arc de trajet de charge situé sur la frontière du domaine d'élasticité actuel est dit neutre : il n'engendre aucune évolution de l'état d'écrouissage ni de la déformation plastique.

3°) Quelques résultats expérimentaux concernant les métaux

Les figures (A2-3) et (A2-4), extraites de (Bui, 1970), montrent l'évolution du domaine d'élasticité dans le cas de fer ARMCO pour deux types de trajets de charge.

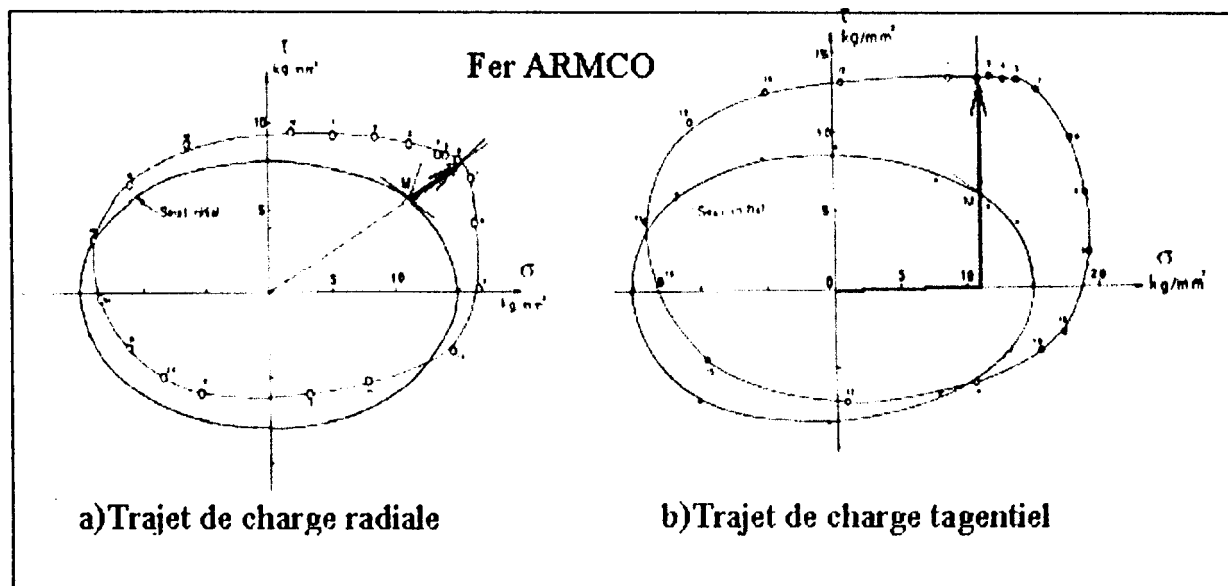
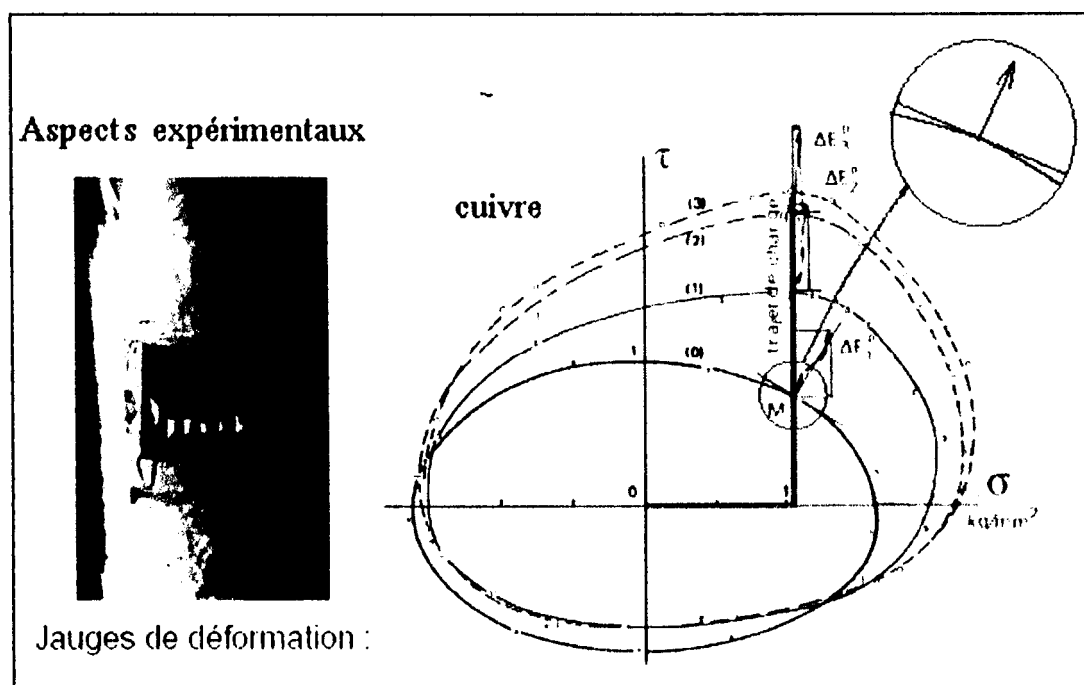


Fig.A2.3 : Ecrouissage du Fer ARMCO (Bui, 1970)

Autre matériaux, autres trajets de chargement



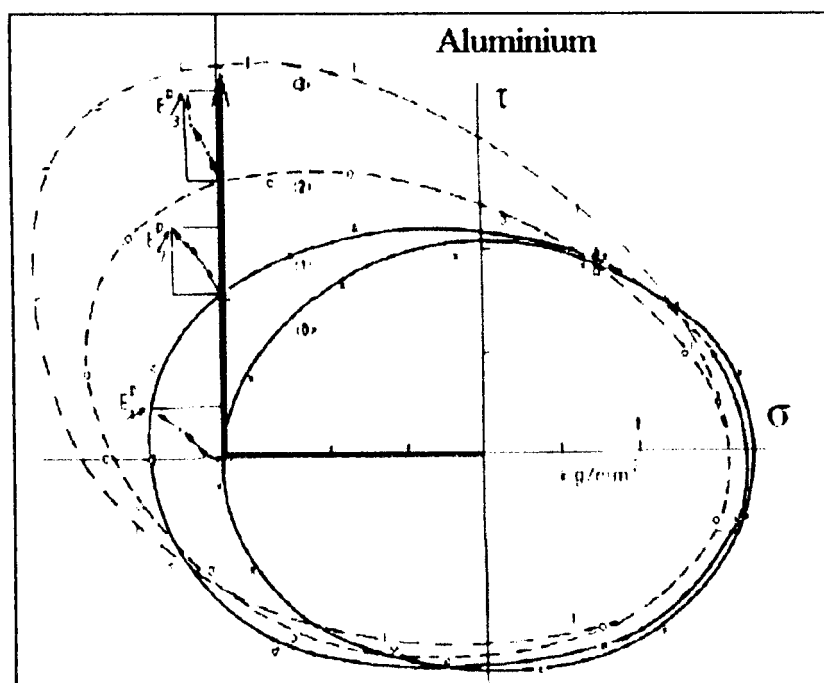


Fig.A2.4 : Ecouissage du cuivre et du l'aluminium pour un trajet de charge tangentiel