

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE

SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA – BOUMERDES

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

LABORATOIRE D'ENERGETIQUE MECANIQUE et INGENIERIES



Mémoire de magister

Spécialité : Génie mécanique

Option : Modélisation et simulation en mécanique

Présenté par : **Haroun RAGUEB**

Intitulé de sujet:

Modélisation des transferts thermiques d'un écoulement fluide en conduite à section elliptique

Soutenu le : 04 juillet 2011

Devant le jury d'examen composé de :

Pr. Kamel MOHAMMEDI	Président	Pr	UMB Boumerdes
Pr. Hinda KAHALERRAS	Examineur	Pr	USTHB Alger
Dr. Idir BELAIDI	Examineur	MC	UMB Boumerdes
Dr. Mourad BALISTROU	Examineur	MC	UMB Boumerdes
Pr. Kacem MANSOURI	Rapporteur	Pr	UMB Boumerdes

ANNEE UNIVERSITAIRE 2010 - 2011

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier en premier lieu le dieu, le tout puissant, de m'avoir donné autant de courage, de patience et de volonté pour atteindre ce but.

Je tiens ensuite à adresser mes plus vifs remerciements à mon directeur de mémoire, le Professeur Kacem MANSOURI, qui m'a permis de travailler sur ce sujet vaste et passionnant, et m'encadré avec une bonne humeur constante pendant ces trois années. Ses conseils judicieux et son sens de la pédagogie m'ont été d'une aide précieuse lors de la réalisation de ce mémoire. Je lui suis également profondément reconnaissant pour tout le soutien qu'il m'a apporté, et pour sa confiance sans faille. Bref, merci de m'avoir supporté ces années et d'en avoir fait une période plus qu'agréable pour moi.

Toutes mes reconnaissances vont à Monsieur le Professeur Idir BELAIDI et Monsieur le Professeur Kamel MHAMMEDI, pour m'avoir permis de poursuivre ma PG dans les meilleures conditions en toute sérénité, de la confiance et l'intérêt qu'ils ont portés pour cette étude, ainsi que pour leurs précieux conseils.

Mes remerciements sont aussi destinés aux : Professeur Hinda KAHALERRAS de l'université des sciences technologiques Houari Boumediene et messieurs Mourad BALISTROU de l'université de Boumerdes d'avoir accepté de faire parti du jury d'évaluation de ce mémoire, et pour leur déplacement et le temps qu'ils ont consacré à l'étude de ce document.

A tous mes amis sans exception, ils sont nombreux, je ne peux tous les citer mais je ne peux les oublier .Enfin, que toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail, soient chaleureusement remerciées.

A mon père Hacens,

ma mère Curida

et Noumeyra

RESUME

Dans ce mémoire, nous étudions la convection forcée d'un fluide non-Newtonien en écoulement laminaire hydro-dynamiquement établi, dans une conduite à section elliptique. D'une part, nous utilisons la méthode de la transformée intégrale généralisée (GITT) pour la résolution exacte de notre problème sans prise en considération de l'effet de dissipation visqueuse. Nous illustrons à la fois l'effet de la variation du rapport de forme géométrique sur les paramètres de transfert de chaleur, et le comportement thermique des fluides non-Newtoniens qui obéissent à la loi de puissance dans notre conduite. D'autre part, nous résolvons le problème avec prise en considération de l'effet de la dissipation visqueuse numériquement en se basant sur la méthode des directions alternées implicites (dADI). Les résultats obtenus ont été validés avec la littérature.

Mots clés : convection forcée, conduite elliptique, fluide non newtonien, GITT, dADI, dissipation visqueuse.

ABSTRACT

In this work, we study the forced convection of laminar non-Newtonian fluid flow, fully developed, thermally developing, inside an elliptical cross sectional duct. We use the generalized integral transform method (GITT) to get the exact solution of our problem without taking to account the viscous dissipation effect. We show both of the influence of the aspect ratio variation on the heat transfer parameters, and the thermal behavior of power law fluid inside the duct. In other hand, we resolve our problem without neglecting the viscous dissipation effect numerically, using the dynamic alternating direction implicit method (dADI). The results obtained showed a good agreement with those found in the literature.

Keywords: forced convection, elliptical duct, non Newtonian fluid, GITT, dADI, viscous dissipation.

ملخص

في هذه الأطروحة ندرس الحمل الحراري ألقسري للتدفق السوائل غير النيوتونية داخل القنوات ببيضاوية الشكل. من جهة ، نستخدم الحل النظري بتقنية التحويل العام لدراسة تأثير ابعاد الشكل البيضوي علي معاملات التحويل الحراري، و كذلك السلوك الحراري للطاقة في السوائل غير النيوتونية داخل هذه القناة. و من جهة اخري، نطور برنامج للحل الرقمي عن طريقة الفرق محدود باستخدام نضام ديناميكية التناوب الاتجاه الضمني (dADI) لدراسة تأثير التبديد اللزج داخل القناة ذات المقطع العرضي بيضاوي الشكل.

كلمات مفاتيح: الحمل الحراري, قناة بيضاوية الشكل, سائل غير نوتوني, dADI, GITT, التبديد اللزج

NOTATIONS

a, b	Demi-axes majeur et mineur de l'ellipse (m) ;
A_{ij}	Coefficient d'équation différentielle ;
B_{ijmn}	Coefficient d'équation différentielle ;
c_p	Chaleur spécifique (J/kg K) ;
D_h	Diamètre hydraulique (m) ;
h	Coefficient de transfert de chaleur (W/ m ² K) ;
H	Coefficient d'équation différentielle ;
J	Jacobien ;
K	Conductivité thermique du fluide (W/m K) ;
K_i, Z_m	Fonctions propres normalisées ;
L_{th}	Longueur d'établissement thermique ;
n	Indice de comportement de l'écoulement ;
N_i, M_m	Normes ;
Nu, \overline{Nu}	Nombre de Nusselt local et moyenne ;
P	Périmètre de l'ellipse (m) ;
Pe	Nombre de Peclet ;
Pr	Nombre de Prandtl ;
q''	Flux de chaleur sur le contour (W/m ²) ;
T, T_{av}	Température et température moyenne (K) ;
T_w	Température de la paroi (K) ;
T_0	Température initiale (K) ;
Re	Nombre de Reynolds ;
V	Champ de vitesse (m/s) ;
V_{av}	Vitesse moyenne (m/s) ;
u, v	Coordonnées elliptiques sans dimension ;
U	Vitesse sans dimension ;
v_0	Coordonné du contour ;
x, y, z	Coordonnées (m) ;
X, Y, Z	Coordonnées sans dimension ;

Symbole Grec

α, β	Demi-axes de l'ellipse sans dimension ;
α^*	Distance focal sans dimension ;
ρ	Densité de fluide (kg/m^3) ;
θ	Température sans dimension ;
$\bar{\theta}, \tilde{\theta}$	Transformé de température ;
θ_{av}	Température moyenne ;
ϕ_m	Fonction propre lié à la coordonné v ;
λ_m	Valeur propre associé à la fonction propre $\phi_m(v)$;
ψ_i	Fonction propre lié à la coordonné u ; Valeur propre associé à la fonction propre $\psi_i(u)$;
Ω, Γ	Air et contour d'ellipse ;

Indices et symboles

i, j, m, n	Indices intègres
$\bar{\quad}$	Opérateur transformé relié à u ;
\sim	Opérateur transformé relié à v ;

Abréviations

<i>GITT</i>	Generalized Integral Transform Technique
<i>dADI</i>	dynamic Alternating Direction Implicit

SOMMAIRE

Remerciement	i
Dédicace	ii
Résumé	iii
Notations	v
Sommaire	vii
Introduction générale	1
Chapitre 1 : Recherche bibliographique	3
1-1) Etat de l'art	3
1-2) la méthode de transformée intégrale généralisée	4
1-3) Etude du comportement des fluides non-Newtonien	5
1-4) Les études relatives aux conduites elliptiques	12
1-5) Conclusion	20
Chapitre 2 : Etude analytique d'un fluide newtonien en écoulement dans une conduite à section elliptique	21
2-1) Introduction	21
2-2) Description du problème	21
2-3) Formulation du problème	22
2-4) Résolution du problème	22
2-5) Température moyenne et le nombre de Nusselt	29
2-6) Résultats et discussion	30
2-7) Conclusion	34
Chapitre 3 : Etude analytique d'un fluide non newtonien en écoulement dans une conduite à section elliptique	35
3-1) Introduction	35

3-2) formulation du problème et hypothèse simplificatrice	35
3-3) Résolution du problème	36
3-4) Résultats et discussion	39
3-5) Conclusion	47
Chapitre 4 : Etude numérique de l'influence de la dissipation visqueuse sur le comportement thermique d'un fluide non newtonien en écoulement dans une conduite elliptique	49
4-1) Introduction	49
4-1) Mise en équation	49
4-2) Ecriture adimensionnelle du système	50
4-4) Résolution numérique	52
4-4-1) La méthode des directions alternées dynamique	54
4-5) Simulation	58
4-5-1) Le système MATLAB	58
4-5-2) Pseudo-code de simulation	59
4-6) Résultats et discussion	60
4-6-1) Influence des paramètres numériques	60
4-6-2) Validation avec le cas de fluide non newtonien sans prise en considération de l'effet de dissipation visqueuse	63
4-6-2-1) Comparaison avec le cas de conduite cylindrique	63
4-6-2-2) Comparaison avec le cas de conduite à section elliptique	65
4-6-3) Cas de l'écoulement de fluide non newtonien avec prise en compte de l'effet de dissipation visqueuse	69
4-6-3-1) Conduite semi-infinie	70
4-6-3-2) Conduite infinie	78
4-7) Conclusion	83
Conclusion générale	85
Référence	87

INTRODUCTION GENERALE

La convection est l'un des modes de transfert de chaleur que l'on rencontre fréquemment dans de nombreuses applications industrielles. Les industries utilisatrices d'énergie font appel à des échangeurs de chaleur grâce auxquels on apporte ou enlève de la chaleur à un fluide. Ces appareils sont utilisés dans un grand nombre de domaines tels que : les installations climatiques (bâtiments,...), la production d'énergie (centrales nucléaires,...), les industries (alimentaire, métallurgie, sidérurgie,...).

D'une manière générale, les constructeurs utilisent des conduites cylindriques dans la conception des échangeurs. Dans certaines cas, afin d'optimiser l'espace, les constructeurs font recourir à des échangeurs compacts dont le rapport de surface d'échange sur le volume est très grand, étant donné que pour une même surface, le contour d'ellipse est nettement plus grand que celui du cercle. La conduite à section elliptique s'impose comme une des solutions les plus adéquates au problème d'optimisation d'espace.

Or, quelque soit son utilisation, un échangeur thermique peut contenir différents types de fluide (peinture, huile, miel, yaourt...). Ces fluides qualifiés non-Newtonien ont un comportement complexe. L'effet de la dissipation visqueuse devient important, et il ne peut guère être négligé dans la conception des échangeurs. Par exemple, dans le processus industriel de fabrication des polymères, la chaleur générée par effet de dissipation visqueuse peut conduire à la dégradation du matériel ou à des réactions prématurées si elle n'est pas contrôlée proprement.

Dans le contexte de notre étude, nous envisageons d'étudier les transferts thermoconvectifs des fluides non-Newtoniens en écoulement laminaire dans une conduite à section elliptique, avec prise en considération de l'effet de la dissipation visqueuse. A cet effet, nous structurons ce présent mémoire comme suit :

Dans le premier chapitre, nous exposons une synthèse sur les travaux réalisés dans ce sujet. Il comporte une brève présentation des modèles mathématiques utilisés pour modéliser ces fluides non-Newtoniens, et les travaux antérieurs sur les conduites elliptiques.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions un écoulement de fluide Newtonien en régime laminaire dans une conduite à section elliptique. Le but recherché est d'étudier l'effet de la variation du rapport de forme de la géométrie sur le comportement thermique. La résolution d'un tel problème est faite par la méthode de la transformée intégrale généralisée (GITT).

Dans le troisième chapitre, nous analysons via la méthode GITT le comportement thermique des fluides non Newtoniens dans une conduite à section elliptique.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons une étude numérique basée sur la méthode des directions alternées (dADI) sur les effets de la dissipation visqueuse dans des conduites à section elliptique. Les résultats obtenus sont validés avec d'autres travaux de la littérature.

La résolution du problème de convection forcée dans une conduite à section elliptique pour des fluides non Newtonien avec prise en considération de l'effet de la dissipation visqueuse constitue l'originalité de ce mémoire.

CHAPITRE 1

GENERALITES ET SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

1-1) Etat de l'art

La détermination des paramètres de transfert de chaleur dans la région d'entrée d'un canal fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. La littérature révèle que le problème de Graetz n'est pas totalement exploité. Pour arriver à comprendre le phénomène de transfert de chaleur dans des canaux, il faut résoudre ce problème sans avoir recours à des simplifications telles que la négligence de la dissipation visqueuse ou la conduction axiale, supposer un fluide newtonien ou bien prendre une géométrie de conduite simple.

S. R. Someswara et al [29] ont étudié le problème de la convection forcée dans une conduite elliptique, en utilisant la théorie de Lévêque avec et en considérant un profil de vitesse est linéaire près de la paroi. Richardson [33] propose une solution de ce problème en utilisant la même méthode, mais avec un profil de vitesse établi et une température constante à la paroi.

D. Cain et J. Duffy [30] examinent expérimentalement un écoulement turbulent dans une conduite à section elliptique. Ils étudient la variation du coefficient de frottement en fonction du rapport des deux axes, la contrainte de cisaillement et la distribution de la vitesse le long des deux axes. Abdel Wahed et al [36] ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur de l'air dans une conduite elliptique dans le rapport est 0.5.

Maia et al [47] présentent une solution analytique de problème de transfert de chaleur de fluide non-Newtoniens (loi de puissance) en régime laminaire dans une conduite elliptique, par la méthode de la transformée intégrale généralisée.

1-2) la méthode de transformée intégrale généralisée

La méthode de transformée intégrale est connue comme une approche classique de la résolution analytique de certaine classe de problèmes de diffusion linéaire et transformable [1-6]. Le manuscrit de Mikhailov et Özişik [2] traite la résolution exacte des problèmes de diffusion de masse de chaleur en se basant sur la méthode de transformée intégrale.

Durant ces trois dernières décennies, cette approche a été progressivement étendue pour atteindre l'approximation analytique de solution de plusieurs problèmes non transformables comme dans les différentes sources [7-11].

Récemment, cette méthode a largement bénéficié des structures hybrides analytiques numériques, offrant aux utilisateurs un excellent contrôle de précision et des performances numériques.

En faisant usage de la GITT (Generalized integral transform technique), R. M. Cotta et M. N. Özişik [7] proposent une solution exacte pour le problème de transfert de chaleur dans la région d'entrée pour un écoulement fluide non Newtonien dans une conduite (circulaire et entre plaque parallèle) soumise à une température constante à la paroi.

En 1989, W. S. Kim et M. N. Özişik [8] ont étudié la convection forcée turbulente entre deux plaques parallèles soumise à une température d'entrée périodique. L'application de la GITT conduit à un problème complexe de Sturm-Liouville. Dans cette étude, une nouvelle méthodologie est développée pour résoudre ce problème de valeur propre complexe.

En 2000, J. S. P. Guerrero et al [10] étudient l'écoulement laminaire dans une conduite à géométrie irrégulière via la transformée intégrale. Une solution hybride analytique-numérique (GITT) de l'équation de Navier-Stokes en 2D est obtenue dans une conduite à section variable.

P. J. Felipe de Barros et R. M. Cotta [11] utilisent la transformée intégrale pour résoudre le problème de dispersion turbulent en 3D dans les rivières. La solution du champ de concentration est obtenue.

1-3) Etude du comportement des fluides non-Newtonien

Les travaux de Metzner [12], Skelland [13], Bird et al [14], Winter [15] et de Cho et Hartnett [16] représentent les études les plus importantes sur le comportement thermique des fluides non-Newtoniens. Dans le cas de fluide Newtonien, les travaux de Shah et London [17] est en effet la collection la plus importante. Le transfert de chaleur de fluide non-Newtonien en écoulement dans une conduite (conduite circulaire et entre deux plaques parallèles) défini une large classe de problème.

R. M. Cotta et M. N. Ozisik [7] présentent en 1986 une étude théorique de la convection forcée laminaire en régime permanent d'un écoulement fluide non newtonien dans une conduite circulaire et entre plaques parallèles, soumise à une température constante à la paroi. La conduction axiale dans le fluide ainsi que l'effet de la dissipation visqueuse sont négligés. La formulation mathématique s'écrit comme suit

$$w(r) \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} = \frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left[\alpha r^p \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \right] + \frac{g(r)}{\rho c_p} ; \quad 0 < r < b, z > 0 \quad (1-1a)$$

Avec $p = 0$ pour les plaques parallèles et $p = 1$ pour les conduits circulaires.

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\frac{\partial T(r, z)}{\partial r} = 0 \quad r = 0, z > 0, \quad (1-1b)$$

$$T(r, Z) = T_w(z) \quad r = b, z > 0, \quad (1-1c)$$

$$T(r, z) = f(r) \quad z = 0, 0 \leq r \leq b \quad (1-1d)$$

Les auteurs ont traité ce problème par la technique de la transformée intégrale pour déterminer l'évolution du nombre de Nusselt, et la distribution de la température de mélange dans les conduits, pour $n = 3, n = 1, n = 1/3$.

Les résultats obtenus concernant le nombre de Nusselt local dans le cas des plaques parallèles sont comparés avec ceux obtenus par Richardson [20] en faisant usage de l'approximation de Lévêque. Dans le cas du conduit circulaire, les résultats sont comparés avec ceux de Bird et al [14].

Dans un 2^{ème} article publié dans la même année, R. M. Cotta et M. N. Ozisik [18] étudient le transfert de chaleur dans le cas où la paroi est soumise à un flux constant, pour un fluide non newtonien suivant le modèle dit "loi de puissance", et en considérant

l'écoulement laminaire dans deux conduites, cylindrique et plaques parallèles. Le problème est formulé comme suit :

$$\left\{ \frac{l_0}{l_N} \right\}^2 U(R) \frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial Z} = \frac{1}{R^p} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ R^p \frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial R} \right\} + G(R); \quad 0 < R < R_w, Z > 0 \quad (1-2a)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial R} = 0, \quad R = 0, Z > 0, \quad (1-2b)$$

$$\frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial R} = \frac{l_0}{l_N} \phi(Z), \quad R = R_w, Z > 0, \quad (1-2c)$$

$$\theta(R, Z) = F(R), \quad Z = 0, 0 \leq R \leq R_w \quad (1-2d)$$

Dans cette étude, la détermination du nombre de Nusselt local est l'objet essentiel. Les résultats obtenus sont représentés pour les deux géométries, et pour trois types de fluide selon l'indice n ($n=1, n=1/3, n=3$). Une confrontation des résultats a été effectuée avec une solution asymptotique de Bird et al [14].

R. S. Parikh et Mahalingam [19] étudient le transfert thermo convectif d'un écoulement fluide non newtonien en particulier un fluide pseudoplastique ($n=0.555, n=0.71$) dans un conduit circulaire. Deux conditions aux limites sont traitées, la première est flux constant à la paroi, la deuxième est un flux qui varie arbitrairement.

$$\frac{2(3n+1)}{(n+1)} \left(1 - R^{\frac{n+1}{n}} \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \quad (1-3a)$$

Avec les conditions aux limites:

$$R = 0, \quad \theta = \text{finie}, \quad (1-3b)$$

$$R = 1, \quad -\frac{\partial \theta}{\partial r_w} = 1, \quad (1-3c)$$

$$X = 0, \quad \theta = 0, \quad (1-3d)$$

En ce basant sur le principe de Duhamel et de l'approche de Siegel, la détermination de la température à la paroi fait l'objet de cette étude. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus expérimentalement, et la comparaison montre une bonne convergence entre les deux voies.

A. R. Mansour [20] traite le problème de Graetz par un modèle dit " loi de puissance", d'un écoulement fluide non newtonien laminaire et permanent, dans un conduit circulaire.

La paroi est soumise à une température constante. La méthode de séparation de variables, combinée à la technique de la transformée de Laplace, est utilisée pour la résolution du système ci-dessous :

$$\left(1 - r^{+(n+1)/n}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right) \quad (1-4a)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\theta = 1 \text{ à } x^+ = 0, \quad (1-4b)$$

$$\theta = 0 \text{ à } r^+ = 0, \quad (1-4c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} = 0 \text{ à } r^+ = 0 \quad (1-4d)$$

La solution générale est recherchée sous la forme suivante :

$$\theta(x^+, r^+) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i R_i(r^+) e^{-\zeta_i^2 x^+} \quad (1-5)$$

avec :

ζ_i : Représente les valeurs propres correspondantes aux fonctions propres R_i

C_i : C'est un constant arbitraire défini par la relation suivante

$$C_i = \frac{\int_0^1 \left(1 - r^{+(1+n/n)}\right) R_i r^+ dr^+}{\int_0^1 \left(1 - r^{+(1+n/n)}\right) R_i^2 r^+ dr^+} \quad (1-6)$$

L'intégrale définie dans la relation (1-6) a été évaluée numériquement.

Le nombre de Nusselt pour différents fluides, en particulier ($n=1, n=1/2, n=1/3, n=1/5, n=1/10$ et $n = 0$), est déterminé et les résultats obtenus sont présentés graphiquement et comparés avec ceux de Lyche et Bird [21].

A. Barletta [22] étudie le comportement asymptotique du champ de température, pour la convection forcée laminaire, d'un fluide non newtonien qui s'écoule dans un conduit circulaire modélisé par " loi de puissance", l'effet de la dissipation visqueuse est pris en considération, alors que la conduction axiale de la chaleur dans le fluide est considérée négligeable. Le problème considéré est formulé comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{3n+1}{n+1} \frac{\bar{u}r}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n+1/n} \right] \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\eta \bar{u}^{(n+1)}}{k r_0^n} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^{n+1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2n+1/n} \quad (1-7a)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (1-7b)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = q_w(x) \quad (1-7c)$$

$$T(r, 0) = T_0(r) \quad (1-7d)$$

Trois cas de distribution du flux à la paroi sont pris en considération:

- Le premier cas, le flux imposé à la paroi tend vers zéro lorsque x tend vers l'infinie.
- Le deuxième cas, le flux ne tend pas vers zéro lorsque x tend vers l'infinie.
- Le troisième cas, le flux a une distribution axiale et qui tend vers l'infinie lorsque x tend vers l'infinie.

L'auteur conclure que, si la paroi est soumise à une température uniforme, l'effet de dissipation visqueuse, ne peut pas être négligé dans la région du régime établi. La même remarque est observée pour le cas de la condition aux limites convectif, en plus, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt est indépendante du nombre de Biot, et d'autres paramètres (le nombre de Brinkman).

S. Olek [23] a étudié le problème de la convection forcé laminaire d'un fluide non newtonien, dans deux configurations géométriques (conduit circulaire et entre plaques parallèles). La résolution de l'équation d'énergie gouvernant le problème est effectué par la méthode de séparation des variables avec des fonctions propres spéciales. Dans cette étude, l'auteur prend en considération la conduction axiale dans le fluide.

Le problème est formulé comme ci-dessous:

$$u(r) \frac{\partial \theta}{\partial z^+} = \frac{1}{r^{+v}} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^{+v} \frac{\partial \theta}{\partial r^+} \right) + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{+2}} \quad (1-8a)$$

$v = 0$ pour les plaques parallèles et $v = 1$ pour un tube cylindrique.

Les conditions aux limites sont:

$$\theta = 1 \text{ à } x^+ = 0, \quad (1-8b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} = 0 \text{ à } r^+ = 0, \quad (1-8c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^+} + B\theta = 0 \text{ à } r^+ = 1 \quad (1-8d)$$

La solution recherchée s'écrit sous la forme générale :

$$\theta(r^+, z^+) = \sum_{i=1}^{\infty} R_i(r^+) Z_i(z) \quad (1-9)$$

$R_i(r^+)$: sont les fonctions propres.

$$Z_i(z) = \sum_j^N c_{ij} C_j \exp(-s_j z^+) \quad (1-10)$$

La solution générale recherchée est de la forme:

$$\theta(r^+, z^+) = \sum_i^N R_i(r^+) \sum_j^N c_{ij} C_j \exp(-s_j z^+) \quad (1-11)$$

Les constantes C_j sont déterminées par la condition:

$$\theta(r^+, 0) = 1 = \sum_i^N R_i(r^+) \sum_j^N c_{ij} C_j \quad (1-12)$$

La solution définie dans l'équation (1-12) ne prend pas en considération la conduction axiale de la chaleur. Les résultats obtenus dans ce travail sont donnée sous forme de tableau, dans le cas du conduit circulaire, pour les deux cas avec ou sans conduction axiale, ainsi que le nombre de Nusselt pour les deux géométries (tube cylindrique et plaques parallèles). Les résultats sont comparés avec ceux de Cotta et Ozisik [7].

O. Jambal et al [24] traitent numériquement le transfert thermique des fluides non Newtonien, en particulier ($n=0.5$, $n=1$, $n=1.5$), par un schéma aux différences finies, d'un écoulement laminaire et permanent dans un conduit circulaire, et entre plaques parallèles. La paroi est soumise à une température constante, la conduction axiale dans le fluide est prise en considération, ainsi que l'effet de la dissipation visqueuse.

Le problème à résoudre s'écrit alors:

$$u^+ \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{y^p} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^p \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + Br \left| \frac{du^+}{dy} \right|^{n-1} \left(\frac{du^+}{dy} \right)^2 \quad (1-13a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad z > 0, \quad (1-13b)$$

$$\theta = 0, \quad y = y_w \quad (1-13c)$$

$$\theta = 1, \quad z = 0, \quad (1-13d)$$

La distribution de la température est représentée graphiquement, en fonction du nombre de Brinkman et de Peclet.

La représentation graphique du nombre de Nusselt pour les deux configurations considérées constitue une partie importante de cette étude, pour différents fluides ($n=0.5$, $n=1$ et $n=1.5$). Les résultats obtenus sont comparés avec ceux existant dans la littérature, en particulier les travaux de Dung [24].

P. Valko [25] consacre son étude à l'effet de dissipation visqueuse dans un écoulement de fluide non newtonien, laminaire et permanent sans prise en considération de la conduction axiale. Les propriétés physiques du fluide sont considérées constantes. Le problème est formulé comme ci-dessous:

$$\frac{1}{2}u(r)\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}r\frac{\partial T}{\partial r} - Br\left(\frac{3v+1}{v}\right)r^{(v+1)/v} \quad (1-14a)$$

Avec les conditions aux limites suivantes:

$$T(0, r) = 0 ; \quad (1-14b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(x, 0) = 0 \quad (1-14c)$$

$$c_1T(x, 1) + c_2\frac{\partial T}{\partial r} + c_3 = 0 \quad (1-14d)$$

c_1 , c_2 et c_3 sont des paramètres variés par l'auteur pour obtenir des différentes conditions à la paroi.

La résolution du problème (1-14) se fait par l'application de la technique de la transformée de Laplace combinée avec la méthode de Galarkin. Les résultats obtenus du nombre de Nusselt et de la température du mélange sont portés sur des tableaux, la comparaison des résultats obtenus avec ceux existant dans la littérature montre une bonne coïncidence.

Tudor Boaca et Joana Boaca [26] traitent le problème de la convection forcée entre plaques parallèles, d'un fluide non newtonien avec la considération de l'effet de dissipation visqueuse, le problème est formulé comme suivant :

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + K \left(-\frac{\partial w}{\partial y} \right)^{v+1} \quad (1-15a)$$

$$w = w_0 \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^{v+1/v} \right) \quad (1-15b)$$

$$T = 0 \quad \text{à } x = 0 \quad (1-15c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{à } y = 0 \text{ et } x > 0 \quad (1-15d)$$

$$T = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{à } y = h \text{ et } x > 0 \quad (1-15e)$$

Le but de ce travail est de résoudre le système (1-15), par l'utilisation des séries de fonctions propres et des valeurs propres. Les conditions à la paroi considérées dans cette étude sont celles de Dirichlet et de Neumann, les valeurs propres du système Sturm-Liouville résultant sont calculées par l'application de la méthode de Galarkin.

Randall F. Barron, X. Wang et al [27] développent une technique efficace pour déterminer les valeurs propres du problème de la convection forcée d'un écoulement fluide glissant dans un conduit circulaire. Sachant que le problème de Graetz classique dépend du nombre des valeurs propres λ_n utilisées dans la solution, ils donnent une expression exponentielle de valeurs propres en fonction du nombre du Knudsen, tel que

$$\lambda_n = c_1 + c_2 Kn \exp(c_3 Kn) \quad (1-16)$$

avec c_1 , c_2 et c_3 sont des constantes données sous forme tabulaire. A l'aide de cette méthode, on peut calculer plus de cinq valeurs propres.

Wei Sun et al [28] traitent par une approche numérique par la méthode des volumes finis, le problème de la convection forcée d'un écoulement fluide en régime laminaire dans des microtubes. Trois conditions de paroi sont considérées: température constante, température variant linéairement dans la direction axiale du conduit et un flux constant imposé à la paroi. L'effet de la dissipation visqueuse est pris en compte. Le problème est formulé par:

Pour la température imposée à la paroi.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{u}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{v}{c_p} \left(\frac{du}{dr} \right)^2 \quad (1-17a)$$

$$T = 0 \quad \text{à } x = 0 \quad (1-17d)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{à } r = 0 \quad (1-17c)$$

Les conditions à la paroi sont

$$\text{- Température imposée constante } T = T_s \quad \text{à } r = R \quad (1-18b)$$

- Température varie linéairement $T = T_s(x) + A(x)$ à $r = R$ (1-18e)

- Flux constant imposé $\frac{\partial T}{\partial r} = q_w$ à $r = R$ (1-18f)

Le profil de vitesse dans ce cas s'écrit :

$$\frac{u}{u_m} = \frac{2[1 - (r/R)^2] + 8Kn}{1 + 8Kn} \quad (1-19)$$

La discrétisation de l'équation (1-18a) est réalisée suivant un schéma de différence finie 'avant' pour la direction axiale de la conduite, et un schéma centré dans la direction radiale.

Les résultats obtenus pour le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Knudsen et le nombre de Prandtl, sont représentés graphiquement. Une confrontation de ces résultats avec ceux de Bayazitoglu [70] a été effectuée, et montre la bonne précision de la méthode des volumes finis.

1-4) Les études relatives aux conduites elliptiques

S. Someswara Rao et al [29] étudient le problème de la convection forcé dans une courte conduite elliptique, avec deux type de condition à la paroi température constante et flux constante. Ils utilisent la théorie de Lévêque en supposant que le profil de vitesse linéaire à la paroi et en ajoutant un facteur de correction. Ils obtiennent des expressions pour le nombre de Nusselt local et moyen pour les deux types de conditions.

Température constante à la paroi

$$Nu = 0.983(Gz)^{1/3} \left(\frac{\mu_{av}}{\mu_w} \right)^{0.14} \left(\frac{D_e}{\sqrt{ab}} \right)^{1/3} F(\theta)^{1/12} \quad (1-20)$$

Flux constant à la paroi

$$Nu = 1.19(Gz)^{1/3} \left(\frac{\mu_{av}}{\mu_w} \right)^{0.14} \left(\frac{D_e}{\sqrt{ab}} \right)^{1/3} F(\theta)^{1/12} \quad (1-21)$$

En 1971 D. Cain et J. Duffy [30] présentent une étude expérimentale d'un écoulement turbulent dans une conduite elliptique, ils mesurent les coefficients de frottement pour différents rapports de β/α et de nombre de Reynolds. La variation de la contrainte de cisaillement à la paroi a été mesurée par des tubes de Preston Patel. Des graphes représentent la distribution de la vitesse le long des deux axes radiaux ont été tracés

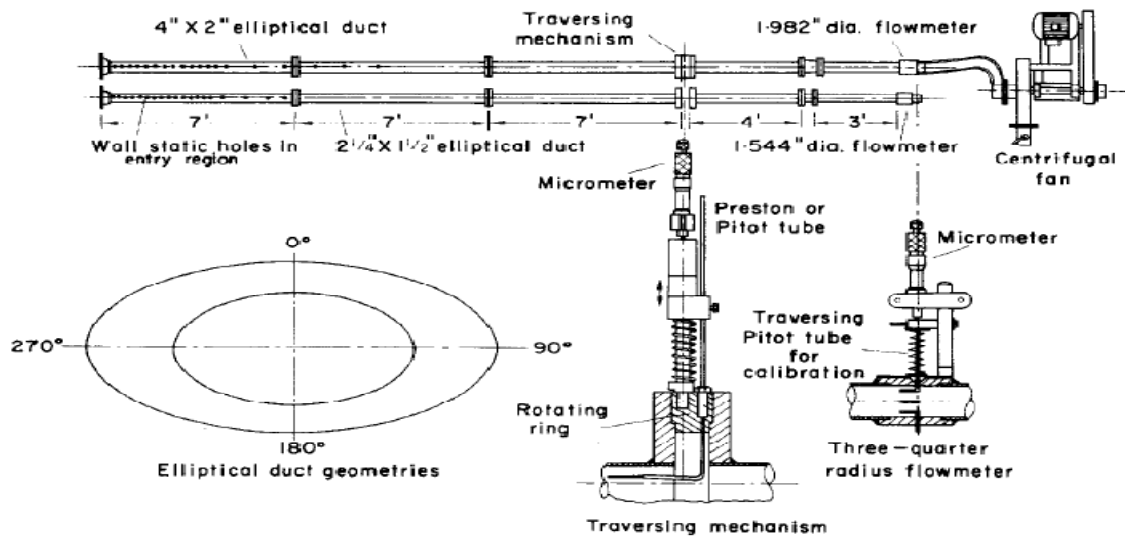


Figure (1-1) : appareil expérimentale de D. Cain et J. Duffy [30]

Deux ans plus tard, une autre étude expérimentale menée par D. Cain et Al [31] s'intéresse aux paramètres de transfert de chaleur. Un système de mesure de température à la paroi avec une combinaison de thermocouple a été ajouté à l'appareil expérimental.

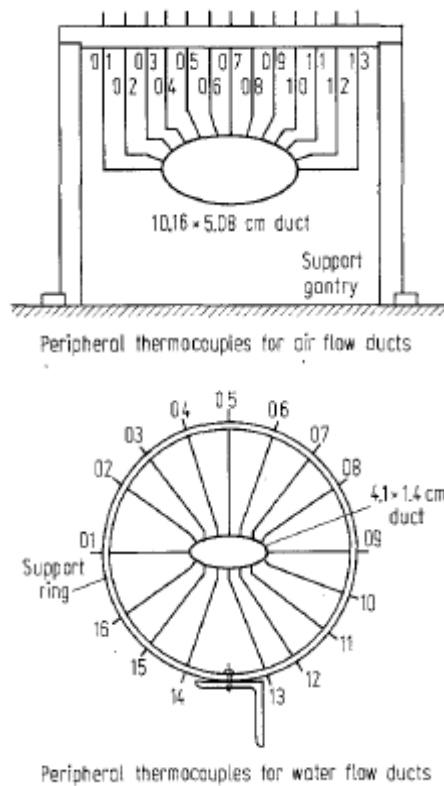


Figure (1-2) : position des thermocouples [31]

Les résultats obtenus pour le nombre de Nusselt pour un nombre de Reynolds < 25000 ont été inférieurs à ceux prédit par l'équation de Dittus-Boelter. Les résultats ont été trouvée par Barrow et Roberts [32], ils proposent alors une corrélation pour un Reynolds de rang de $4000 < Re < 25000$.

$$Nu = 0.00165 Re^{1.06} Pr^{0.4} \quad (1-22)$$

Les résultats de l'expérience montrent un accord favorable avec l'équation (Eq1-33)

En 1980, S. M. Richardson [33] propose une solution par approximation de Lévêque pour un écoulement laminaire de fluide Newtonien avec un profil de vitesse totalement établi (profil parabolique), dans une conduite elliptique à température constante à la paroi. La solution a été développée pour un nombre de Graetz très grand. La solution de Lévêque a été obtenu par P A JAMES [34], mais pour en déduire des résultats de cette solution en a besoin de faire des calculs d'intégration numérique, par contre l'approximation de Richardson donne des résultats directs sans avoir recoure a des calculs d'intégration lents. Les résultats obtenus sont très proches de ceux de James.

Equation de la température sans dimension

$$\theta(u, v, Z) = \theta_0(v, Z) + e^{v^2}(A_1 + A_2 \sin^2(u)) + e^{v^2}(B_1 + B_2 \sin^2(u) + B_3 \sin^4(u)) + O(e^{v^3}) \quad (1-23)$$

Avec

$$\theta_0 = \frac{1}{\Gamma(4/3)} \int_0^\phi e^{-x^3} dx \quad (1-24a)$$

$$A_1 = \frac{1}{\Gamma(4/3)} \left[\frac{1}{3} \int_0^\phi e^{-x^3} dx - \int_0^\phi e^{-x^3} x^3 dx \right] \quad (1-25b)$$

$$B_1 = \frac{1}{\Gamma(4/3)} \left[\frac{2}{9} \int_0^\phi e^{-x^3} dx - \frac{4}{3} \int_0^\phi e^{-x^3} x^3 dx + \frac{1}{2} \int_0^\phi e^{-x^3} x^6 dx \right] \quad (1-26c)$$

$$\begin{cases} A_2 = -2A_1 \\ B_2 = -4B_1 - 5A_1 \\ B_3 = +4B_1 + 4A_1 \end{cases} \quad (1-27d,e,f)$$

Et

$$e' = 1 - \frac{a}{b}; \quad 0 \leq e' \leq 1 \quad (1-28)$$

Paramètre d'ellipticité tel que $e' = 0$: conduite circulaire et $e' = 1$: plaques parallèles.

Le nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{3^{1/3} Gz^{*1/3}}{\Gamma(4/3)} \left[1 + \frac{e'^2}{36} + \frac{e'^3}{36} \right] + 0(e'^4 Gz^{*1/3}) + 0(1) \quad (1-29)$$

Avec

$$Gz^* = \frac{4\pi^2 ab}{p^2} Gz \quad (1-30a)$$

Et la fonction Gamma

$$\frac{3^{1/3}}{\Gamma(4/3)} = 1.615098 \quad (1-30b)$$

M. S. Bhatti [35] développe en 1983 une solution analytique du problème non-résolu d'écoulement stationnaire laminaire de fluide newtonien dans la région d'entrée de la conduite. L'analyse est basée sur la méthode d'intégrale de Karman-Pohlhausen. Selon cette analyse la distance d'établissement hydrodynamique à 99% est égale à $0.5132 \lambda / (1 + \lambda^2)$ avec λ est le rapport entre les deux axes de la conduite, tandis que l'accroissement de la pression établi est de 7/6 qui est indépendante de ratio des deux axes λ .

En 1984, R. M. Abdel Wahed et al [36] réalisent une expérience pour étudier les paramètres de transfert de chaleur pour des écoulements laminaires dans une conduite à section elliptique de rapport 0,5. Le fluide mis en examen est l'air, deux conditions à la paroi sont imposées, I) température constante, II) distribution linéaire de la température dans la direction axiale. Les résultats hydrodynamiques sont présentés sous forme de séquence du profil de vitesse sur les deux axes majeur et mineur de l'ellipse mesurés à différentes distances axiales depuis l'entrée. La chute de pression statique due à l'effet combiné de développement de l'écoulement et du frottement de la paroi est aussi étudiée. La longueur d'établissement de la pression statique exprimé par $x / Re D_h$ est de 0,0345. Les résultats

obtenus expérimentalement en régime établi sont comparés avec ceux trouvés analytiquement par Toa [38] pour une vitesse et un coefficient de frottement réduits, LA différence pour ce dernier est de 0,78%. Le développement thermique est comparé avec les résultats analytiques de Dunwoody [42] et Javeri [49] pour une température de la paroi uniforme et linéaire variable respectivement.

M. S. Bhatti [36] s'intéresse à l'étude du problème de transfert de chaleur dans la région où l'écoulement est totalement établi dans une conduite soumise à un flux de chaleur constant à la paroi. Cette étude a été faite au par-avant par TAO [38] et TYAGI [39] en faisant usage de la méthode des variables complexes. Les expressions de distribution de température et de nombre de Nusselt obtenus ne sont pas très utiles pour des calculs rapides [37]. Pour ce fait, Bhatti reformule ces expressions d'une façon plus simple et utile.

Profil de distribution de température

$$\theta = \frac{2E(m)}{3\pi(1+\lambda^2)(1+6\lambda^2+\lambda^4)} \left\{ (1+\lambda^2)(\lambda^2+5)X^2 + (1+\lambda^2)(1+5\lambda^2)Y^2 - \left[(1+\lambda^2)(\lambda^2+5)X^2 + (1+\lambda^2)(1+5\lambda^2)Y^2 - (5\lambda^4+26\lambda^2+5) \right] (X^2+Y^2) \right\} \quad (1-31)$$

Le nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{6}{11} \left[\frac{\pi}{E(m)} \right]^2 (1+\lambda^2) \quad (1-32)$$

A partir de ces deux expressions Bhatti trace une courbe universelle de nombre de Nusselt et de la température applicable pour les conduites elliptiques à différentes valeurs de λ .

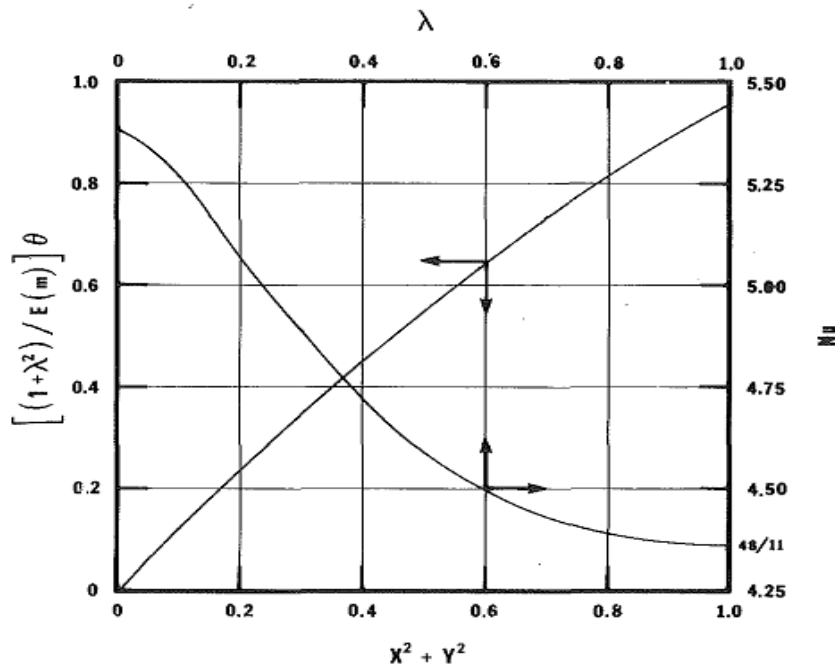


Figure (1-3) : la distribution de la température entièrement développés et les nombres de Nusselt dans les conduits elliptiques avec flux de chaleur uniforme à la paroi [37].

T. Yilmaz et E. Cihan [40] présentent une équation générale pour le calcul de Nusselt avec température constante à la paroi en régime laminaire pour des conduites à section arbitraire. En utilisant la définition du diamètre équivalent, d'autres paramètres supplémentaires ont été ajoutés pour satisfaire les conditions du régime laminaire. Les résultats obtenus pour la section circulaire, rectangulaire, triangulaire, elliptique et plaques parallèles ont une déviation de -8,7% et 8,0% max et min respectivement.

Y. M. Huang et C. H. Ho [41] étudient un écoulement de fluide dans une conduite elliptique par la méthode caractéristique. Un modèle mathématique a été développé pour déterminer les propriétés de l'écoulement laminaire dans la conduite. L'équation non linéaire gouvernante de l'air dans la conduite est transformée en une équation de type hyperbolique. La méthode caractéristique est en suite appliqué. Les résultats numériques obtenus par la méthode des différences finis avec un schéma à intervalles uniformes. Les propriétés de l'air dans la conduite sont analysées, le nombre de Nusselt et le coefficient de transfert de chaleur sont étudiés tout le long de la conduite. Le résultat numérique obtenu montre un bon accord avec ceux de R. M. Abdel-wahed et al [36], Dunwoody [42] et Gilbert et al [43].

K. Velusamy et V. K. Grag [44] examinent la convection laminaire mixte dans une conduite verticale à section elliptique, ils utilisent comme méthode de résolution les volumes finis. La paroi est soumise à un flux de chaleur uniforme, tandis que l'épaisseur et la conductivité thermique de la paroi sont d'une façon à assuré une distribution circonférentielle uniforme de la température. Les résultats pour la distribution de vitesse et de température, le facteur de frottement, le nombre de Nusselt et le nombre de Rayleigh critique sont présentés pour différents valeurs du rapport des deux axes de la conduit et de nombres de Rayleigh. Quatre points important tirés de cette étude

- 1- Durant la convection mixte, le fluide a une vitesse max autour des deux foyers ;
- 2- Pour un nombre de Rayleigh donné, plus le rapport entre les deux axes diminue, plus la vitesse max gagne en valeur et le profil est plus étroit au centre de la conduite ;
- 3- Pour une gamme donnée de nombre de Rayleigh, plus le rapport β / α est petit, plus la valeur de nombre de Nusselt et de coefficient de frottement est grande ;
- 4- Le nombre de Rayleigh critique est grand quand β / α est petit.

V. D. Sakalis et al [45] présentent une étude du comportement thermique pour un écoulement totalement établi dans une conduite elliptique avec une température de paroi axialement variable. Deux cas sont étudiées, (1) température de la paroi linéairement variable, (2) température de la paroi exponentiellement variable. Les résultats numériques sont obtenus à l'aide de la méthode ADI (Alternating Direction Implicit). Le rapport entre les deux axes de l'ellipse λ variée de 0.25 à 0.99

M. S. Muzychka et M. M. Yovanovich [46] s'intéressent à l'étude de la convection forcée dans la région d'entrée combinée dans des conduites non-circulaire. Un modèle générale des paramètres thermique a été proposé. Ce modèle est valable pour $0.1 < Pr < \infty$, $0 < Z < \infty$, et pour deux conditions à la paroi, température uniforme, flux uniforme. Le modèle est valable pour deux nombres de Nusselt locale et moyen. Les résultats tirés de ce modèle s'accordent avec les résultats de la littérature de $\pm 15\%$ d'erreur. Cette formule a été développée en combinant les résultats asymptotiques de la couche limite laminaire et l'écoulement de Graetz dans la région d'entrée, de plus une nouvelle caractéristique des conduites non circulaires a été imposée, c'est la racine carré de la section de la conduite.

$$Nu_{\sqrt{A}}(Z) = \left[\left(\frac{C_4 f(\text{Pr})}{\sqrt{Z}} \right)^m + \left\{ C_2 C_3 \left(\frac{f \text{Re}_{\sqrt{A}}}{Z} \right)^{1/3} \right\}^5 + \left\{ C_1 \left(\frac{f \text{Re}_{\sqrt{A}}}{8\sqrt{\pi} \lambda^\gamma} \right) \right\}^5 \right]^{1/m} \quad (1-33)$$

Avec

$$f \text{Re}_{\sqrt{A}} = \left[\left(\frac{12}{\sqrt{\lambda}(1+\lambda) \left[1 - \frac{192\lambda}{\pi 5} \tanh\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) \right]} \right)^2 + \left(\frac{3.44}{\sqrt{Z}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1-34)$$

Et

$$m = 2.27 + 1.65 \text{Pr}^{1/3}$$

Tandis les autres coefficients sont donnés dans ce tableau

Conditions aux limites à la paroi		
Température uniforme	$C_3 = 0.409; C_1 = 3.24$	$f(\text{Pr}) = \frac{0.564}{\left[1 + (1.664 \text{Pr}^{1/6})^{9/2} \right]^{2/9}}$
Flux uniforme	$C_3 = 0.501; C_1 = 3.86$	$f(\text{Pr}) = \frac{0.886}{\left[1 + (1.909 \text{Pr}^{1/6})^{9/2} \right]^{2/9}}$
Type de nombre de Nusselt		
Locale	$C_2 = 1$	$C_4 = 1$
Moyen	$C_2 = 3/2$	$C_4 = 2$
Paramètre de forme		
Limite supérieure	$\gamma = 1/10$	
Limite inférieure	$\gamma = -3/10$	

C. R. M. Maia et Al [47] étudient le transfert de chaleur d'écoulement laminaire de fluide non-Newtonien qui suit la loi de puissance dans une conduite elliptique sous condition de premier type. La résolution d'un tel problème est faite à l'aide de la technique de transforme intégrale généralisé (GITT), un changement de variable est imposé pour soulever la difficulté reliée a la forme de la conduite puis ils appliquent (GITT) pour le calcul de la

distribution de la température tout le long de la conduite. Les autres paramètres sont déduits de ce champ (Nombre de Nusselt moyen et locale).

1-5) Conclusion

L'étude de la convection forcée dans une conduite elliptique comme le montre la littérature, est d'une très grande importance pour des applications industrielles est de technologie de point.

La majorité des travaux faits auparavant repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices. Ce qui infect directement notre compréhension en la réduisant a des simples écoulements de laboratoire.

Dans ce mémoire nous allons essayez de donnée notre part de contributions dans ce domaine on étudie l'effet de la dissipation visqueuse dans les conduite elliptique, et de reprendre quelque études faites déjà afin de comparé et validé nous résultats obtenu.

CHAPITRE 2

ETUDE ANALYTIQUE D'UN FLUIDE NEWTONIEN EN ECOULEMENT DANS UNE CONDUITE A SECTION ELLIPTIQUE

2-1) Introduction

Dans le présent chapitre, nous allons étudier l'influence du rapport de forme de la géométrie de la conduite elliptique sur les différents paramètres thermiques pour un écoulement laminaire de fluide newtonien.

2-2) Description du problème

Considérons une conduite à section elliptique parcourue par un écoulement de fluide newtonien, incompressible et monophasique. Les propriétés thermo-physiques du fluide sont constantes. La température est supposée constante à l'entrée et à la paroi. La conduction axiale et la dissipation visqueuse sont négligées et le système ne présente aucune source de chaleur.

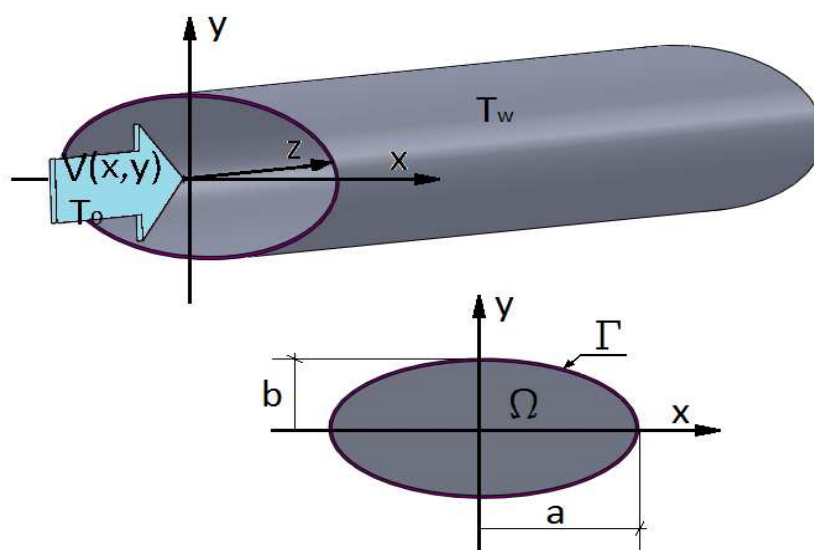


Figure (2-1) : représentation géométrique de la conduite

2-3) Formulation du problème

En tenant compte des hypothèses citées ci-dessus, la formulation mathématique de du problème en coordonnées cartésiennes (fig2-1) s'écrit comme ci-dessous :

$$\rho c_p V(x, y) \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} = k \left[\frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial y^2} \right] \quad (x, y) \in \Omega, z > 0 \quad (2-1)$$

Le profil de vitesse $V(x, y)$ pour un écoulement totalement développé dans une conduite à section elliptique est donné par [58].

$$V(x, y) = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right] V_{av} \quad (2-2)$$

Tel que V_{av} est la vitesse moyenne et a et b sont respectivement les demi-axes majeur et mineur.

Les conditions aux limites sont :

$$T(x, y, z) = T_w = \text{constante}, \quad \{(x, y) \in \Gamma\} \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} = 0, \quad \{x = 0, 0 < y < b, z > 0\} \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} = 0, \quad \{0 < x < a, y = 0, z > 0\} \quad (2-5)$$

et la condition limite à l'entrée est :

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad \{(x, y) \in \Omega\} \quad (2-6)$$

2-4) Résolution du problème

La méthode de résolution consiste dans une première étape à écrire le système sous forme adimensionnel et d'appliquer par la suite la méthode de transformée intégrale généralisé (GITT). En introduisant les paramètres adimensionnels suivants :

$$\theta(X, Y, Z) = \frac{T(X, Y, Z) - T_w}{T_0 - T_w}; \quad X = \frac{x}{D_h}; \quad Y = \frac{y}{D_h}; \quad Z = \frac{z}{D_h Pe}; \quad (2-7)$$

$$\alpha = \frac{a}{D_h}; \quad \beta = \frac{b}{D_h}; \quad U(X, Y) = \frac{V(x, y)}{V_{av}}; \quad Pe = \frac{\rho c_p V_{av} D_h}{k}$$

l'équation de l'énergie devient :

$$U(X,Y) \frac{\partial \theta(X,Y,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial Y^2} \quad (2-8)$$

À partir des équations (2-2 et 2-7), le profil de vitesse s'écrit :

$$U(X,Y) = 2 * \left[1 - \left(\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} \right) \right] \quad (2-9)$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\theta(X,Y,Z) = 1, \quad \{(X,Y) \in \Gamma, Z = 0\} \quad (2-10a)$$

$$\theta(X,Y,Z) = 0, \quad \{(X,Y) \in \Gamma, Z > 0\} \quad (2-10b)$$

$$\frac{\partial \theta(X,Y,Z)}{\partial X} = 0, \quad \{0 \leq X \leq \alpha, Y = 0, Z > 0\} \quad (2-10c)$$

$$\frac{\partial \theta(X,Y,Z)}{\partial Y} = 0, \quad \{X = 0, 0 \leq Y \leq \beta, Z > 0\} \quad (2-10d)$$

2^{eme} étape : le système orthogonale des coordonnées elliptiques (u,v) est utilisé pour transformer le domaine d'origine (contour elliptique dans le plans (x,y)) à un domaine de travail rectangulaire comme présenté dans la figure ci-dessous :

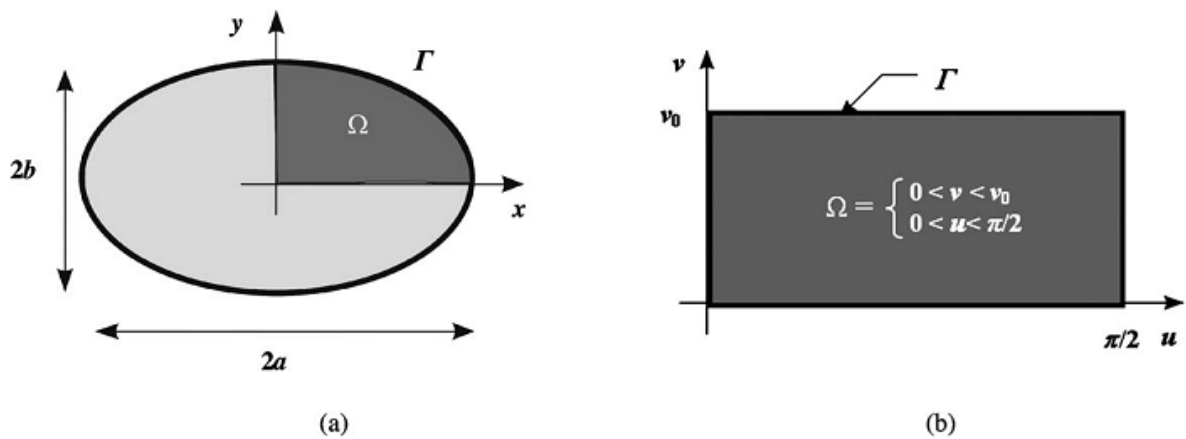


Fig (2-2), a) géométrie de la conduite dans l'espace réel.

b) géométrie de la section dans l'espace de travail.

Soit le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} X &= \alpha^* \cosh(v) \cos(u) \\ Y &= \alpha^* \sinh(v) \sin(u) \end{aligned} \quad (2-11a, b)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \frac{\alpha}{\cosh(v_0)} \\ v_0 &= \operatorname{arctanh}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \quad \{0 < \beta < \alpha\} \end{aligned} \quad (2-12a, b)$$

Avec ces nouvelles variables, l'équation du contour elliptique devient :

$$\left[\frac{X}{\alpha^* \cosh(v_0)} \right]^2 + \left[\frac{Y}{\alpha^* \sinh(v_0)} \right]^2 = 1 \quad (2-13)$$

L'équation d'énergie s'écrit :

$$H(u, v) \frac{\partial^2 \theta(u, v, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(u, v, Z)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, Z)}{\partial v^2} \quad (2-14)$$

avec

$$H(u, v) = J \left(\frac{X, Y}{u, v} \right) U(u, v) \quad (2-15)$$

ou J est la matrice Jacobienne de la transformation des coordonnées (X, Y) à (u, v)

$$J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \alpha^{*2} \left[\sinh^2(v) + \sin^2(u) \right] \quad (2-16)$$

U(u, v) est le profil de vitesse en variables (u, v) :

$$U(u, v) = 2^* \left[1 - \left(\frac{\alpha^{*2}}{\alpha^2} \cosh^2(v) \cos^2(u) + \frac{\alpha^{*2}}{\beta^2} \sinh^2(v) \sin^2(u) \right) \right] \quad (2-17)$$

Les conditions aux limites s'écrivent dans le nouveau système de travail (u, v) :

A la paroi :

$$\theta(u, v, Z) = 1, \quad \{(u, v) \in \Omega, Z = 0\} \quad (2-18a)$$

Sur l'axe du tube :

$$\frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, 0 \leq v \leq v_0, Z > 0\} \quad (2-18b)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial u} = 0, \quad \{u = \pi / 2, 0 \leq v \leq v_0, Z > 0\} \quad (2-18c)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial v} = 0, \quad \{0 < u < \pi / 2, v = 0, Z > 0\} \quad (2-18d)$$

$$\theta(u, v, Z) = 0, \quad \{0 < u < \pi / 2, v = v_0, Z > 0\} \quad (2-18e)$$

3^{eme} étape : Application de la méthode de transformée intégrale généralisée

Pour résoudre de système d'équations (Eq 2-14) dans le nouveau système associé aux conditions aux limites (Eqs 2-18), on applique la méthode GITT. On considère le problème auxiliaire des valeurs propres relié à la variable u ci-dessous :

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi / 2\} \quad (2-19a)$$

$$\frac{d\psi(u)}{du} = 0, \quad \{u = 0\}$$

$$\frac{d\psi(u)}{du} = 0, \quad \{u = \pi / 2\} \quad (2-19b,c)$$

Les valeurs propres et les fonctions propres associées à ce problème sont :

$$\mu_i = 2(i-1), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_i = \cos(\mu_i u) \quad (2-20a,b)$$

Les fonctions propres sont orthogonales, ce qui nous donne la possibilité d'écrire la paire transforme inverse :

$$\bar{\theta}_i(v, Z) = \int_0^{\pi/2} \psi_i(u) \theta(u, v, Z) dv, \quad \text{transform}$$

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\theta}_i(v, Z), \quad \text{inverse} \quad (2-21,22)$$

Ou $K_i(u)$ est la fonction propre normalisée

$$Ki(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}} \quad (2-23)$$

$$N_i = \int_0^{\pi/2} \psi_i^2(u) du = \begin{cases} \pi/2, & i=1 \\ \pi/4, & i>1 \end{cases} \quad (2-24)$$

A partir du produit $Ki(u)$ et $\theta(u, v, Z)$ avec les équations (2-14) et (2-19a) et en utilisant les conditions (2-18) et (2-19b,c), nous obtenons le système couplé d'équations différentielles d'ordre 2 :

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{\theta}_j(v, Z)}{\partial Z} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(v, Z) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(v, Z)}{\partial v^2} \quad (2-25)$$

$$A_{ij}(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) K_j(u) H(u, v) du \quad (2-26)$$

Considérons maintenant le problème aux valeurs propres suivant lié à la variable v :

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 \leq v \leq v_0\} \quad (2-27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(v)}{dv} &= 0, & \{v=0\} \\ \phi(v_0) &= 0, & \{v=v_0\} \end{aligned} \quad (2-28a,b)$$

Les valeurs propres et les fonctions propres de ce système sont :

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \frac{(2m-1)\pi}{2v_0}, & m=1, 2, 3, \dots \\ \phi_m(v) &= \cos(\lambda_m v) \end{aligned} \quad (2-29a,b)$$

Les fonctions propres $\phi_m(v)$ sont orthogonales, elles permettent d'écrire la paire inverse-transformée :

$$\tilde{\theta}_{im}(Z) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} \psi_i(u) \phi_m(v) \theta(u, v, Z) du dv, \quad \text{transform} \quad (2-30)$$

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z), \quad \text{inverse} \quad (2-31)$$

$Z_m(v)$ est la fonction propre normalisée donnée par :

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{M_m^{1/2}}$$

$$M_m = \int_0^{v_0} \phi_m^2(v) dv = \frac{v_0}{2} \quad (2-32a,b)$$

Ce qui conduit à écrire le système couplé d'équations différentielles de premier ordre :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijnm} \frac{d\tilde{\theta}_{jn}(Z)}{dZ} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_{im}(z) = 0 \quad (2-33)$$

$$B_{ijnm} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv \quad (2-34)$$

Le paramètre B_{ijnm} peut être intégré et calculé, la solution de ce système peut alors être calculée après injection des conditions aux limites transformées.

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} \psi_i(u) \phi_m(v) du dv \quad (2-35)$$

La distribution de température adimensionnelle $\theta(u, v, Z)$ peut alors être calculée numériquement par troncature à un certain ordre donné $m=M$ et $n=N$.

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z) \quad (2-36)$$

Il est clair que pour un M et N grand, la précision des résultats augmente.

4^{eme} étape : Résolution du système d'équations différentielles ordinaires

Ecrivons maintenant le système (2-33) sous forme matricielle

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_{1111} & \dots & B_{1M11} & \dots & B_{111M} & \dots & B_{1N1M} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ B_{N111} & & \ddots & & & & B_{N11M} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ B_{11M1} & & & & \ddots & & B_{11MM} \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ B_{N1M1} & \dots & B_{NNM1} & \dots & B_{N1MM} & \dots & B_{NNMM} \end{bmatrix}}_{\mathbb{R}} * \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{\theta}_{11}}{dZ} \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{\theta}_{N1}}{dZ} \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{\theta}_{1M}}{dZ} \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{\theta}_{NM}}{dZ} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1^2 + \lambda_1^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & \vdots \\ & 0 & \mu_N^2 + \lambda_1^2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \mu_1^2 + \lambda_M^2 & 0 \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & \mu_N^2 + \lambda_M^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{Z}} * \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_{N1} \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_{1M} \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

Sous forme compacte, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 & [\mathbb{R}] \left[\frac{d\tilde{\theta}}{dZ} \right] + [\mathbb{Z}] [\tilde{\theta}] = [0] \\
 \Rightarrow & \left[\frac{d\tilde{\theta}}{dZ} \right] + [\mathbb{C}] [\tilde{\theta}] = [0] \quad \text{avec} \quad [\mathbb{C}] = [\mathbb{R}]^{-1} * [\mathbb{Z}]
 \end{aligned} \quad (2-38)$$

Le système est résolu une fois que les valeurs propres γ et les vecteurs propres ζ ont été calculés à partir de la résolution du problème suivant :

$$(\mathbb{C} - \gamma I) \zeta = 0 \quad (2-39)$$

La solution s'écrit sous forme :

$$\tilde{\theta}(Z) = \sum_{i=1}^{N*M} c_i \zeta^{(i)} e^{-\gamma_i Z} \quad (2-40)$$

Les constantes c_i sont déterminées à partir de la résolution du système algébrique suivant :

$$\sum_{i=1}^{N*M} c_i \zeta^{(i)} = \tilde{\theta}(0) \quad (2-41)$$

Finalement, connaissant l'ensemble des $\tilde{\theta}_{im}$, nous utilisons la formule d'inversion (Eq 2-31) pour trouver la distribution de la température $\theta(u, v, Z)$.

2-5) Température moyenne et le nombre de Nusselt

La température moyenne sous forme adimensionnelle est donnée par :

$$\theta_{av}(Z) = \frac{1}{\pi\alpha\beta} \int_{\Omega} \theta(X, Y, Z) U(X, Y) d\Omega \quad (2-42)$$

Dans le plan (u,v), θ_{av} est représentée par :

$$\theta_{av}(Z) = \frac{1}{\pi\alpha\beta} \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} \theta(u, v, Z) U(u, v) J \left(\frac{X, Y}{u, v} \right) dv du \quad (2-43)$$

Le nombre de Nusselt est calculé à partir de la condition de flux de chaleur à la paroi :

$$Nu(z) = \frac{h(z)D_h}{k} \quad (2-44)$$

$$\text{avec } h(z) = \frac{q''(z)}{T_w - T_{av}(z)} \quad (2-45)$$

$$q''(z) = \frac{1}{P} \int_{\Gamma} -k \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma} d\Gamma \quad (2-46)$$

P est le périmètre du contour elliptique, ce qui implique que le Nombre de Nusselt est déterminé par :

$$Nu(Z) = \frac{D_h}{P\theta_{av}(z)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial v} \Big|_{v=v_0} du \quad (2-47)$$

Le nombre de Nusselt moyen est obtenu par l'intégration de l'équation (2-42)

$$\overline{Nu}(Z) = \frac{1}{Z} \int_0^Z Nu(Z') dZ' \quad (2-48)$$

La longueur d'établissement thermique Lth est définie comme la position où le nombre de Nusselt local est 5% plus grand que le Nusselt de la région où l'écoulement est totalement établi.

2-6) Résultats et discussion

Pour le calcul de la température transformée $\tilde{\theta}_{im}(Z)$, le système d'équation (2-33) a été résolu pour différents ordres de troncature N et M . Il a été observé que la convergence est relativement lente dans la région d'entrée ($Z < 0,001$). Pour des troncatures supérieures à $N=M=25$, il a été vérifié que les valeurs du nombre de Nusselt calculé pour $Z > 0,001$ converge pour un millième de près pour tous les cas (les résultats suivant ont été calculés pour $N=M=25$).

Le calcul des intégrales (paramètres B_{ijmn} , et la température moyenne θ_{av}) est fait numériquement par la méthode de Romberg [59]. Le nombre de Nusselt, le Nusselt moyen et la température moyenne sont calculés pour différentes valeur du rapport d'axes d'ellipse ($\beta/\alpha=0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ et 0.95).

Les tableaux suivants présentent la température moyenne, le nombre de Nusselt et le Nusselt moyen pour différents ratio de β/α

Tableau (2-1et2) : température moyenne, nombre de Nusselt et Nusselt moyen pour différentes valeurs du rapport β/α .

Z	$\beta/\alpha=0.1$			$\beta/\alpha=0.3$		
	θ_{av}	Nu	Nu_{av}	θ_{av}	Nu	Nu_{av}
0,0001	0,9859	23,6048	112,7267	0,9862	23,1730	102,2231
0,0002	0,9778	18,6764	66,9336	0,9782	18,3103	61,4824
0,0005	0,9595	13,7391	36,2340	0,9603	13,4408	33,8578
0,001	0,9366	10,9369	24,1815	0,9378	10,6774	22,8554
0,002	0,9010	8,7639	16,9314	0,9031	8,5350	16,1474
0,005	0,8235	6,6620	11,2667	0,8275	6,4619	10,8264
0,01	0,7302	5,5547	8,6400	0,7366	5,3670	8,3236
0,02	0,5836	5,0272	6,9655	0,6048	4,6291	6,6609
0,05	0,3334	4,4403	5,5904	0,3614	4,0967	5,2446
0,1	0,1422	4,1327	4,9267	0,1635	3,8825	4,6063
0,2	0,0287	3,9140	4,4650	0,0354	3,7916	4,2144
0,5	0,0003	3,7692	4,0766	0,0004	3,7781	3,9540
1	0,0000	3,7455	3,9144	0,0000	3,7781	3,8660

Tableau (2-2)

Z	$\beta/\alpha=0.5$			$\beta/\alpha=0.7$		
	θ_{av}	Nu	Nu_{av}	θ_{av}	Nu	Nu_{av}
0,0001	0,9865	22,6696	81,1488	0,9866	22,4305	61,4779
0,0002	0,9786	17,8757	50,7108	0,9789	17,6901	40,7691
0,0005	0,9612	13,0766	29,3134	0,9617	12,9130	25,2330
0,001	0,9394	10,3519	20,4122	0,9401	10,2005	18,2938
0,002	0,9057	8,2392	14,7716	0,9069	8,0969	13,6394
0,005	0,8327	6,1923	10,1084	0,8352	6,0575	9,5730
0,01	0,7451	5,1063	7,8327	0,7494	4,9720	7,4980
0,02	0,6182	4,3691	6,2852	0,6252	4,2311	6,0498
0,05	0,3804	3,8765	4,9475	0,3909	3,7594	4,7745
0,1	0,1781	3,7512	4,3714	0,1862	3,6859	4,2411
0,2	0,0400	3,7291	4,0530	0,0427	3,6809	3,9615
0,5	0,0005	3,7285	3,8583	0,0005	3,6809	3,7931
1	0,0000	3,7285	3,7934	0,0000	3,6809	3,7370

Tableau (2-3) : température moyenne, nombre de Nusselt et Nusselt moyen pour le cas circulaire.

Z	$\beta/\alpha=0.99$ (conduite circulaire)			
	θ_{av}	θ_{av} (Cotta*)	Nu	Nu (cotta*)
0,0001	0,9869	0,9865	22,5993	22,279
0,0002	0,9792	0,9788	17,6034	17,559
0,0005	0,9620	0,9617	12,8746	12,824
0,001	0,9405	0,9403	10,1595	10,130
0,002	0,9075	0,9073	8,0518	8,0362
0,005	0,8362	0,8362	6,0092	6,0015
0,01	0,7510	0,7511	4,9221	4,9161
0,02	0,6279	0,6280	4,1796	4,1724
0,05	0,3950	0,3953	3,7152	3,7100
0,1	0,1894	0,1897	3,6612	3,6581
0,2	0,0438	0,0439	3,6597	3,6568
0,5	0,0005	--	3,6597	--
1	0,0000	--	3,6597	--

*Cotta et Özisik [7]

Les deux tableaux (2-1) et (2-2) présentent les résultats de calcul de la température moyenne, le nombre de Nusselt et le Nusselt moyen sur différents points axiaux de la conduite pour différentes valeurs du rapport β/α . Le tableau (2-3) présente une comparaison de nos résultats avec ceux de Cotta [7], on voit bien qu'il y a une bonne concordance entre les deux approches.

Dans la figure (2-3), on représente la variation de la température moyenne en fonction de Z, le nombre de Nusselt locale (Fig 2-4) et le nombre de Nusselt moyen en fonction de Z (Fig 2-5).

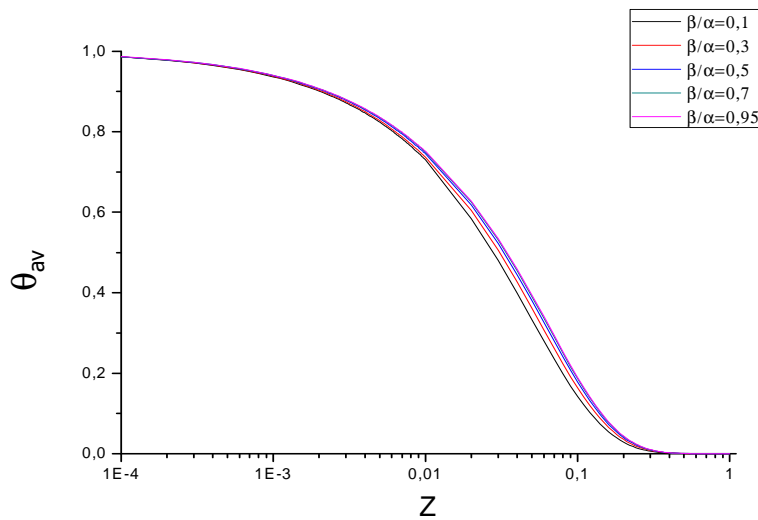


Figure (2-3) : variation de la température moyenne le long de la conduit pour différents rapport β/α .

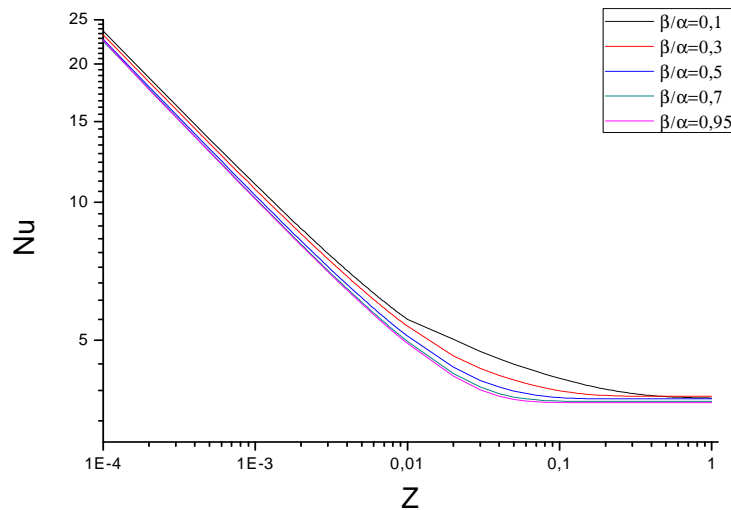


Figure (2-4) : variation du nombre de Nusselt locale le long de la conduit pour différents rapports β/α .

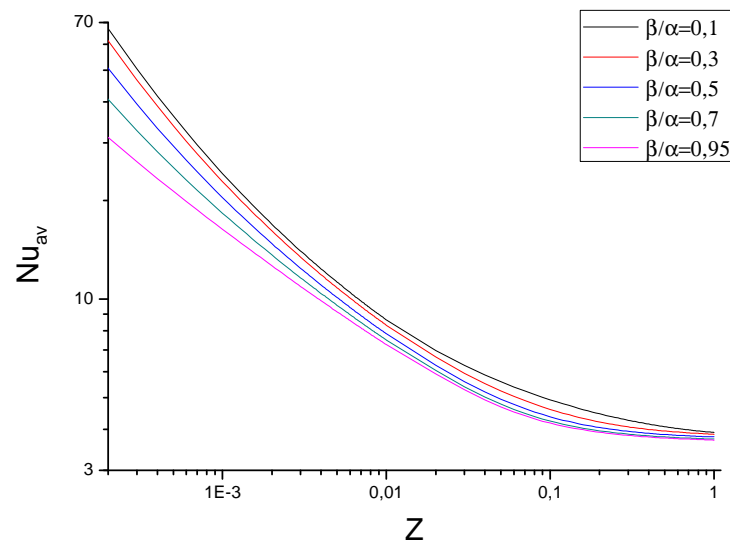


Figure (2-4) : variation du nombre de Nusselt moyen le long de la conduite pour différents rapports β/α .

Dans les figures ci-dessus, nous présentons l'évolution des différents paramètres thermiques (θ_m , Nu et Nu_{av}) suivant la direction axiale de la conduite. On observe que le Nusselt moyenne et plus sensible à la variation du rapport β/α . A la zone d'entrée l'écart est important, il diminue progressivement en s'éloignant de l'entrée.

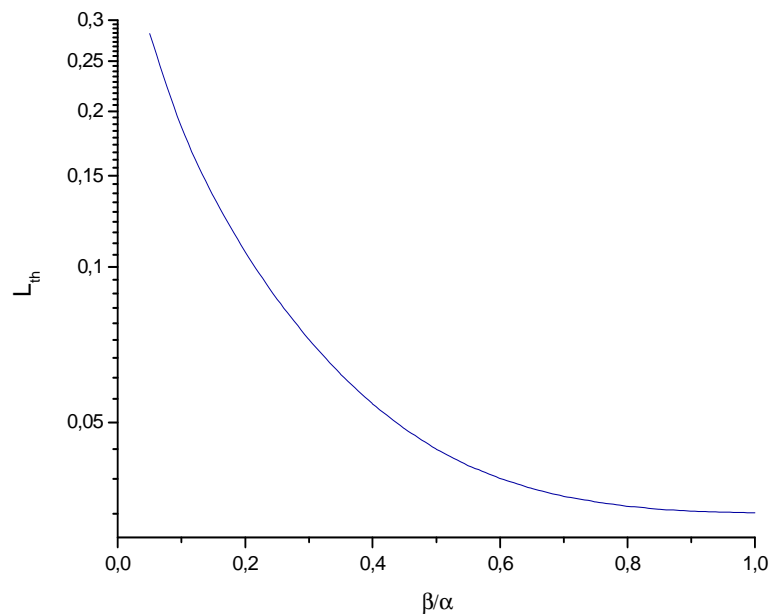


Figure (2-5) : Variation de la longueur d'établissement thermique en fonction de β/α .

La figure (2-5) montre la variation de la longueur d'établissement thermique (thermal length) en fonction du rapport β/α . Plus en diminuant le rapport des deux axes d'ellipse la valeur de la longueur d'établissement thermique (L_{th}) augmente. Pour $\beta/\alpha=0.2$, $L_{th}=0,1068$ qui est 318% plus grand que celle de la conduite cylindrique ($\beta/\alpha=1$, $L_{th}=0.0335$).

2-7) Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'influence de la variation du rapport β/α entre les deux axes d'une conduite à section elliptique, sur le comportement thermique d'un écoulement de fluide newtonien. La technique de transformée intégrale généralisée (GITT) nous a permis de réduire l'équation aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles ordinaires dont la résolution est moins fastidieuse.

Les résultats de calculs ont montrés la dépendance des différents paramètres thermique (température moyenne, longueur d'établissement thermique, nombre de Nusselt et Nusselt moyen) à la variation du rapport géométrique β/α . De plus nous avons enregistré pour le nombre de Nusselt à l'infinie une valeur max $Nu(\infty)=3,78$ pour $\beta/\alpha=0,25$.

CHAPITRE 3

ETUDE ANALYTIQUE D'UN FLUIDE NON NEWTONIEN EN ÉCOULEMENT DANS UNE CONDUITE A SECTION ELLIPTIQUE

3-1) Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une étude montrant l'influence de la nature du fluide sur les différents paramètres thermiques, pour un écoulement laminaire d'un fluide non Newtonien dans une conduite à section elliptique.

3-2) formulation du problème et hypothèse simplificatrices

Soit un fluide non newtonien en écoulement laminaire dans une conduite à section elliptique (figure 2-1). Le profil hydrodynamique est supposé totalement établi dont l'équation est donnée dans [58].

$$V(x, y) = \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \right] \cdot V_{av} \quad (3-1)$$

L'indice n représente la nature de fluide avec

$n < 1$ fluide pseudoplastique

$n = 1$ fluide newtonien

$n > 1$ fluide dilatant

La température de fluide à l'entrée de la conduite et à la paroi sont supposées constantes respectivement T_0 et T_w . La conduction axiale et la dissipation visqueuse sont négligeables, et les propriétés thermo-physiques du fluide sont constantes. En tenant compte des hypothèses citées ci-dessus, le système d'équations thermique s'écrit :

$$\left\{ \rho c_p V(x, y) \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} = k \left[\frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial y^2} \right]; \{(x, y) \in \Omega, z > 0\} \right. \quad (3-2a)$$

$$T(x, y, z) = Tw = \text{constant}; \{(x, y) \in \Gamma\} \quad (3-2b)$$

$$\left\{ \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} = 0; \{x = 0, 0 < y < b, z > 0\} \right. \quad (3-2c)$$

$$\left\{ \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} = 0; \{0 < x < a, y = 0, z > 0\} \right. \quad (3-2d)$$

$$T(x, y, 0) = T_0; \{(x, y) \in \Omega\} \quad (3-2e)$$

3-3) Résolution du problème

La résolution d'un tel problème est analogue à celle du chapitre précédent. En premier lieu, on écrira le système sous forme adimensionnelle :

$$\left\{ U(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(X, Y, Z)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta(X, Y, Z)}{\partial Y^2}; \right. \quad (3-3a)$$

$$\theta(X, Y, Z) = 0; \{(x, y) \in \Gamma, Z > 0\} \quad (3-3b)$$

$$\left\{ \frac{\partial \theta(X, Y, Z)}{\partial X} = 0; \{X = 0, 0 < Y < \beta, Z > 0\} \right. \quad (3-3c)$$

$$\left\{ \frac{\partial \theta(X, Y, Z)}{\partial Y} = 0; \{0 < X < \alpha, Y = 0, Z > 0\} \right. \quad (3-3d)$$

$$\theta(X, Y, 0) = 1; \{(X, Y) \in \Omega\} \quad (3-3e)$$

Deuxièmement, nous appliquons le changement de variable $(x, y) \rightarrow (u, v)$ (coordonnées elliptiques orthogonales) qui transforme l'espace de travail elliptique à un espace de travail rectangulaire, voir figure (2-2) et les équations (2-11,12). Le nouveau système s'écrit :

$$\left\{ H(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(u, v, Z)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, Z)}{\partial v^2}; \right. \quad (3-4a)$$

$$\theta(u, v, Z) = 0; \{(u, v) \in \Omega, Z = 0\} \quad (3-4b)$$

$$\left\{ \frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial u} = 0; \{u = 0, 0 < v < v_0, Z > 0\} \right. \quad (3-4c)$$

$$\left\{ \frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial u} = 0; \{u = \pi/2, 0 < v < v_0, Z > 0\} \right. \quad (3-4d)$$

$$\left\{ \frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial v} = 0; \{0 < u < \pi/2, v = 0, Z > 0\} \right. \quad (3-4e)$$

$$\theta(u, v, Z) = 0; \{0 < u < \pi/2, v = v_0, Z > 0\} \quad (3-4f)$$

avec

$$H(u, v) = J \left(\frac{X, Y}{u, v} \right) \cdot U(u, v) \quad (3-5)$$

et

$$J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \alpha^{*2} [\sinh^2(v) + \sin^2(u)] \quad (3-6)$$

$$U(u, v) = \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{\alpha^{*2}}{\alpha^2} \cosh^2(v) \cos^2(u) + \frac{\alpha^{*2}}{\beta^2} \sinh^2(v) \sin^2(u) \right)^{\frac{n+1}{2n}} \right] \quad (3-7)$$

Pour la résolution du problème ci-dessus, on applique la technique de la transformée intégrale généralisée (GITT). Considérant le problème auxiliaire aux valeurs propres suivant :

$$\frac{d^2\psi(u)}{u^2} + \mu^2\psi(u) = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2\} \quad (3-8)$$

$$\frac{d\psi(u)}{du} = 0, \quad \{u = 0\} \quad (3-9a,b)$$

$$\frac{d\psi(u)}{du} = 0, \quad \{u = \pi/2\}$$

Les valeurs et les fonctions propres, les normes et les fonctions propres normalisées associées à ce problème suivant la variable u sont respectivement :

$$\mu_i = 2(i-1), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3-10a,b)$$

$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u)$$

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}} \quad (3-11)$$

$$N_i = \int_0^{\pi/2} \psi_i^2(u) du = \begin{cases} \pi/2, & i = 1 \\ \pi/2, & i > 1 \end{cases} \quad (3-12)$$

Les fonctions propres citées ci-dessus sont orthogonales, elles nous permettent d'écrire la paire transformée-inverse suivante :

$$\bar{\theta}_i(v, Z) = \int_0^{\pi/2} \psi_i(u) \theta(u, v, Z) dv, \quad \text{transformée} \quad (3-13,14)$$

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\theta}_i(v, Z), \quad \text{inverse}$$

En multipliant l'équation (3-4a) par $\psi_i(u)$ et en intégrant par rapport à u sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, et en faisant usage de l'équation (3-8) et les conditions (3-9), on abouti a un système couplé d'équations aux dérivées partielles du second ordre suivant :

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{\theta}_j(v, Z)}{\partial Z} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(v, Z) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(v, Z)}{\partial v^2} \quad (3-15)$$

$$A_{ij}(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) K_j(u) H(u, v) du \quad (3-16)$$

En appliquant une deuxième fois la transformée intégrale (GITT) à la variable v , nous obtenons le problème auxiliaire aux valeurs propres suivant :

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 \leq v \leq v_0\} \quad (3-17)$$

$$\frac{d\phi(v)}{dv} = 0, \quad \{v = 0\} \quad (3-18a,b)$$

$$\phi(v_0) = 0, \quad \{v = v_0\}$$

Les valeurs et les fonctions propres, les normes et les fonctions propres normalisées associées à ce problème sont respectivement :

$$\lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2v_0}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3-19a,b)$$

$$\phi_m(v) = \cos(\lambda_m v)$$

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{M_m^{1/2}} \quad (3-20)$$

$$M_m = \int_0^{v_0} \phi_m^2(v) dv = \frac{v_0}{2} \quad (3-21)$$

Les fonctions propres $\phi_m(v)$ sont orthogonales, elles nous permettent de développer la paire transformée-inverse suivant :

$$\tilde{\theta}_{im}(Z) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} \psi_i(u) \phi_m(v) \theta(u, v, Z) dudv, \quad \text{transformée} \quad (3-22,23)$$

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z), \quad \text{inverse}$$

En appliquant un produit interne de $Z_m(v)$ et de $\bar{\theta}_i(v, Z)$ sur l'équation (3-15) et (3-17) et en utilisant les conditions (3-4e, f) et (3-18a, b), on abouti à un système d'équations différentielles ordinaires de première ordre comme suit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijmn} \frac{d\tilde{\theta}_{jn}(Z)}{dZ} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_{im}(Z) = 0 \quad (3-24)$$

avec

$$B_{ijmn} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv \quad (3-25)$$

et la condition initiale

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} \psi_i(u) \phi_m(v) du dv \quad (3-26)$$

Une fois le paramètre B_{ijmn} et la condition initiale $\tilde{\theta}_{im}(0)$ calculés, la résolution du système ci-dessus permet de calculer la température transformée $\tilde{\theta}_{im}$, et en utilisant la formule d'inversion (3-23) nous obtenons la température adimensionnelle $\theta(u, v, Z)$.

La température moyenne, le nombre de Nusselt local, le Nusselt moyen et la longueur d'établissement thermique sont calculées à partir des formules citées dans le chapitre précédant [Eq(2-43, 47, 48 et 49)].

3-4) Résultats et discussion

La résolution du système (3-24) a été réalisée pour différents ordres de troncature N et M . Pour des troncatures supérieures à 25, il a été vérifié que les valeurs de Nusselt moyen calculées pour $Z < 0,0001$ convergent à plus de quatre chiffres après la virgule. Les tableaux suivants représentent les valeurs de la température moyenne, le nombre de Nusselt et le Nusselt moyen pour différentes valeurs de l'indice n ($n=0.2, 0.5, 2$ et 5) et du rapport β/α ($\beta/\alpha = 0.5$ et 0.7).

Tableau (3-1) : la température moyenne, le nombre de Nusselt et Nusselt moyen pour $\beta/\alpha=0.5$ et $n=0.2, 0.5$

$\beta/\alpha=0.5$						
Z	n=0.2			n=0.5		
	θ_{av}	Nu	Nu_{av}	θ_{av}	Nu	Nu_{av}
0,0001	0,9832	28,0854	83,8587	0,9855	24,3182	81,9735
0,0002	0,9736	22,0990	54,4755	0,9771	19,1649	51,8575
0,0005	0,9522	16,0765	32,9201	0,9585	14,0016	30,4167
0,001	0,9258	12,6663	23,5182	0,9352	11,0728	21,3676
0,002	0,8854	10,0319	17,3306	0,8994	8,8051	15,5648
0,005	0,7996	7,4984	12,0294	0,8222	6,6143	10,7125
0,01	0,6990	6,1745	9,3756	0,7301	5,4589	8,3251
0,02	0,5575	5,3071	7,5582	0,5978	4,6853	6,6986
0,05	0,3076	4,7805	6,0039	0,3544	4,1888	5,3000
0,1	0,1202	4,6563	5,3519	0,1558	4,0668	4,7048
0,2	0,0188	4,6349	4,9960	0,0308	4,0453	4,3778
0,5	0,0001	4,6344	4,7791	0,0002	4,0448	4,1780
1	0,0000	4,6344	4,7067	0,0000	4,0448	4,1114

Tableau (3-2) : la température moyenne, le nombre de Nusselt et le Nusselt moyen pour $\beta/\alpha=0.5$ et $n=2 ; 5$

$\beta/\alpha=0.5$						
Z	n=2			n=5		
	θ_{av}	Nu	Nu_{av}	θ_{av}	Nu	Nu_{av}
0,0001	0,9870	21,7265	80,6771	0,9874	21,1120	80,3698
0,0002	0,9795	17,1376	50,0546	0,9801	16,6562	49,6269
0,0005	0,9628	12,5437	28,6807	0,9638	12,1951	28,2678
0,001	0,9418	9,9342	19,8626	0,9433	9,6602	19,5033
0,002	0,9093	7,9090	14,3134	0,9117	7,6916	14,0131
0,005	0,8389	5,9431	9,7567	0,8430	5,7778	9,5253
0,01	0,7541	4,8956	7,5438	0,7600	4,7552	7,3529
0,02	0,6306	4,1775	6,0402	0,6390	4,0492	5,8775
0,05	0,3970	3,6845	4,7352	0,4085	3,5546	4,5932
0,1	0,1933	3,5554	4,1680	0,2042	3,4224	4,0311
0,2	0,0469	3,5326	3,8532	0,0523	3,3989	3,7180
0,5	0,0007	3,5320	3,6605	0,0009	3,3983	3,5262
1	0,0000	3,5320	3,5963	0,0000	3,3983	3,4623

Tableau (3-3) : la température moyenne, le nombre de Nusselt et le Nusselt moyen pour $\beta/\alpha=0.7$ et $n=0.2, 0.5$

$\beta/\alpha=0.7$						
Z	n=0,2			n=0,5		
	θ_{av}	Nu	Nu_{av}	θ_{av}	Nu	Nu_{av}
0,0001	0,9834	27,8567	64,1940	0,9857	24,0593	62,2929
0,0002	0,9739	21,8968	44,5354	0,9774	18,9756	41,9052
0,0005	0,9528	15,9127	28,8382	0,9589	13,8367	26,3309
0,001	0,9266	12,5151	21,3991	0,9359	10,9203	19,2459
0,002	0,8867	9,8880	16,1976	0,9006	8,6610	14,4302
0,005	0,8021	7,3560	11,4910	0,8247	6,4758	10,1745
0,01	0,7033	6,0229	9,0331	0,7344	5,3181	7,9865
0,02	0,5646	5,1340	7,3058	0,6049	4,5353	6,4566
0,05	0,3182	4,6146	5,7968	0,3650	4,0547	5,1150
0,1	0,1277	4,5459	5,1813	0,1638	3,9847	4,5601
0,2	0,0208	4,5417	4,8619	0,0333	3,9802	4,2706
0,5	0,0001	4,5417	4,6698	0,0003	3,9802	4,0963
1	0,0000	4,5417	4,6058	0,0000	3,9802	4,0383

Tableau (3-4) : la température moyenne, le nombre de Nusselt et le Nusselt moyen pour $\beta/\alpha=0.7$ et $n=2 ; 5$

$\beta/\alpha=0.7$						
Z	n=2			n=5		
	θ_{av}	Nu	Nu_{av}	θ_{av}	Nu	Nu_{av}
0,0001	0,9872	21,5008	61,0128	0,9875	20,8946	60,7096
0,0002	0,9798	16,9536	40,1200	0,9803	16,4733	39,6968
0,0005	0,9632	12,3815	24,6040	0,9642	12,0339	24,1935
0,001	0,9425	9,7841	17,7466	0,9441	9,5110	17,3890
0,002	0,9106	7,7682	13,1830	0,9130	7,5520	12,8841
0,005	0,8414	5,8108	9,2233	0,8455	5,6476	8,9934
0,01	0,7583	4,7656	7,2118	0,7642	4,6283	7,0229
0,02	0,6375	4,0467	5,8090	0,6458	3,9235	5,6494
0,05	0,4073	3,5778	4,5695	0,4186	3,4551	4,4326
0,1	0,2013	3,5008	4,0466	0,2122	3,3751	3,9159
0,2	0,0497	3,4954	3,7715	0,0551	3,3694	3,6432
0,5	0,0007	3,4954	3,6058	0,0010	3,3694	3,4789
1	0,0000	3,4954	3,5506	0,0000	3,3694	3,4241

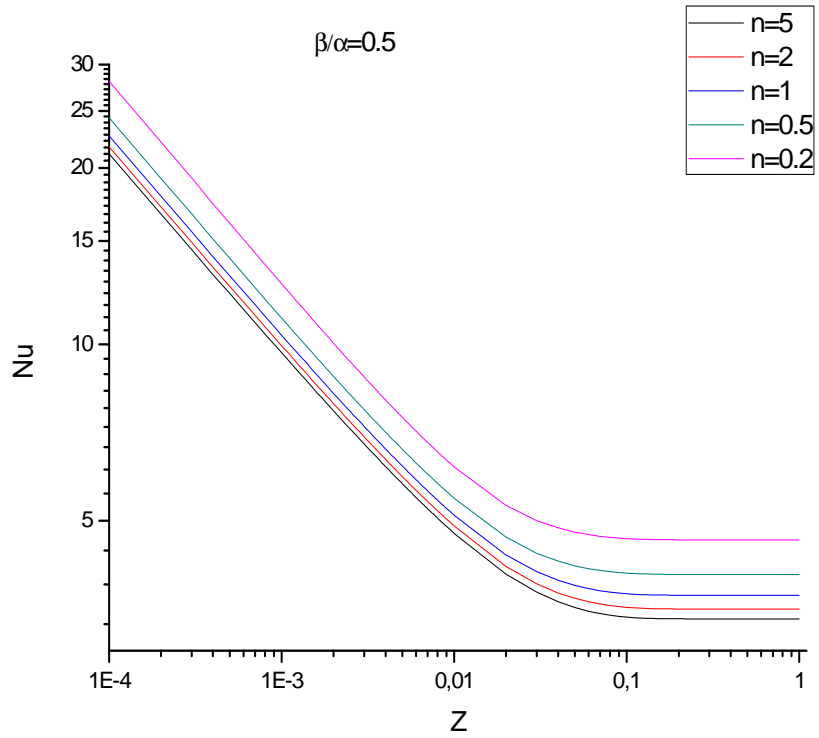


Figure (3-1) : la variation du nombre de Nusselt local le long de la conduite pour différentes valeurs de n ($\beta/\alpha=0.5$)

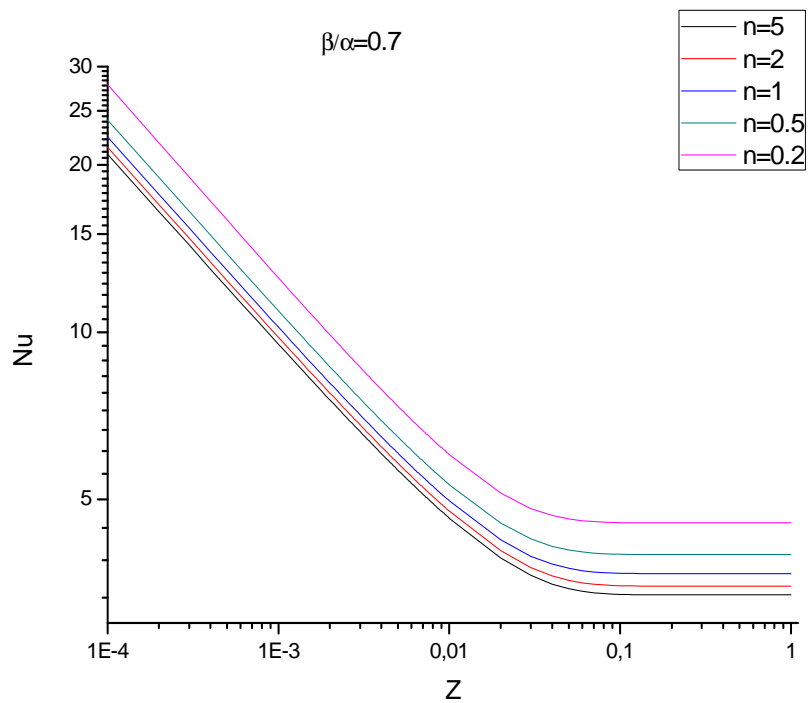


Figure (3-2) : variation du nombre de Nusselt local le long de la conduite pour différentes valeurs de n ($\beta/\alpha=0.7$)

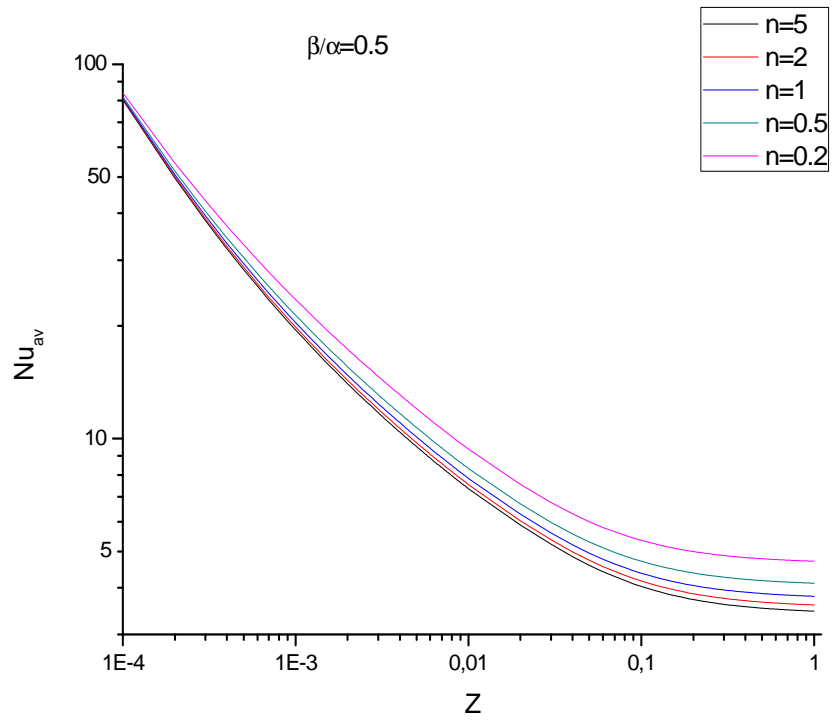


Figure (3-3) : variation du nombre de Nusselt moyen le long de la conduite pour différentes valeurs de n ($\beta/\alpha=0.5$)

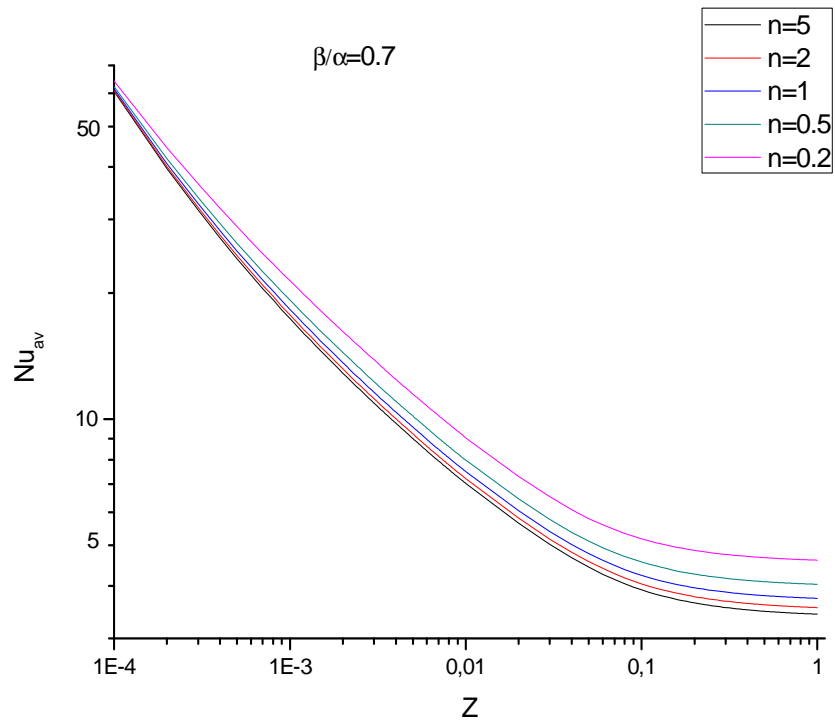


Figure (3-4) : variation du nombre de Nusselt moyen le long de la conduite pour différentes valeurs de n ($\beta/\alpha=0.7$)

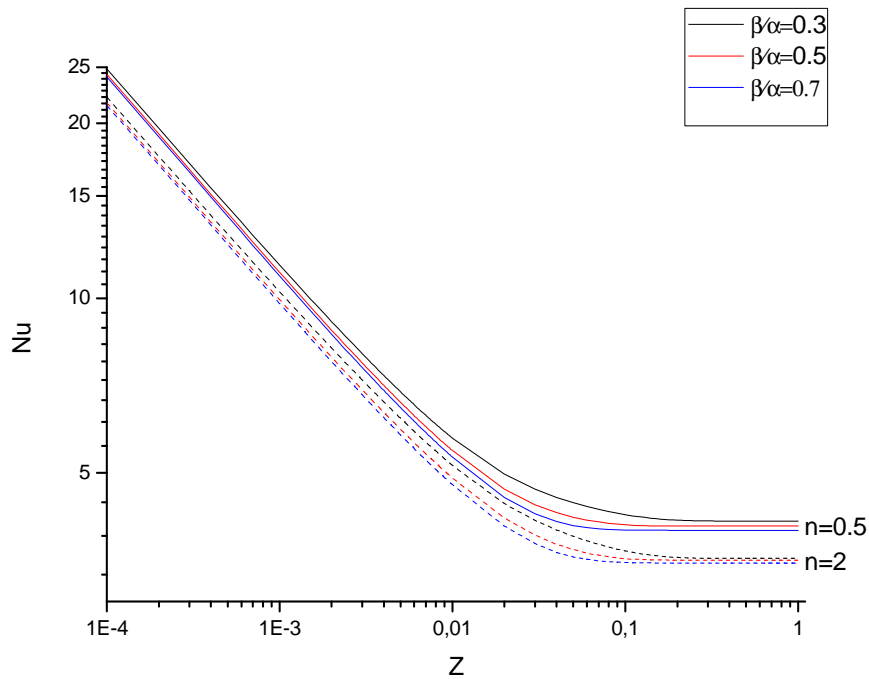


Figure (3-5) : le nombre de Nusselt local pour $n=0.5$ et 2 , et $\beta/\alpha=0.3, 0.5$ et 0.7

Les tableaux (3-1, 2, 3 et 4), présentent les résultats obtenus pour la température moyenne adimensionnelle $\theta_{av}(Z)$, le nombre de Nusselt local $Nu(Z)$ et le Nusselt moyen $Nu_{av}(Z)$ pour différentes valeurs de l'indice de nature de fluide n ($n=0.2, 0.5, 2$ et 5), et pour deux valeurs du rapport de forme $\beta/\alpha=0,5$ et $0,7$. On a observé que la température diminue plus rapidement dans des conduites à faible rapport de forme β/α et d'indice de fluide n ($n < 1$ fluide pseudoplastique). D'après R. P. Chhabra et J. F. Richardson [60], la conductivité thermique dépend de la structure chimique de fluide, de taux de cisaillement et de la viscosité apparente. Cette dernière dépend du rapport de forme β/α et de l'indice de fluide n . Plus ces deux paramètres sont faibles, plus la viscosité apparente est faible, augmentant ainsi la diminution de la température dans la conduite. Les mesures de T. Loulou et al [61] sur des solutions de Carbopol et de S. X. Q. Lin et al [62] sur les jus de fruits ont confirmés ces résultats.

Les figures (3-1, 2, 3 et 4) représentent la variation du nombre de Nusselt local $Nu(Z)$ et de Nusselt moyen $Nu_{av}(Z)$ le long de la conduite. On a observé que la variation du nombre de Nusselt locale lors de la diminution du rapport de forme β/α est beaucoup plus importante pour les fluides pseudoplastiques ($n < 1$) que pour les fluides dilatants ($n > 1$). Ceci

est dû au fait que la viscosité apparente des fluides pseudoplastiques est plus faible que celle des fluides dilatants, rendant ainsi les transferts de chaleur par convection plus importants que ceux transférés par conduction d'où l'augmentation de la valeur du nombre de Nusselt.

Tableau (3-5) : le nombre de Nusselt à l'infini pour différentes valeurs de n et de β/α

Indice n	Rapport de forme β/α					
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1*
0.2	4,8820	4,7742	4,6344	4,5417	4,5037	4,5000
0.5	4,1547	4,1289	4,0448	3,9802	3,9524	3,9500
1	3,7455	3,7781	3,7285	3,6809	3,6597	3,6570
2	3,4860	3,5590	3,5320	3,4954	3,4764	3,4760
5	3,3073	3,4095	3,3983	3,3694	3,3534	3,3530

(*) Résultats obtenus par [65]

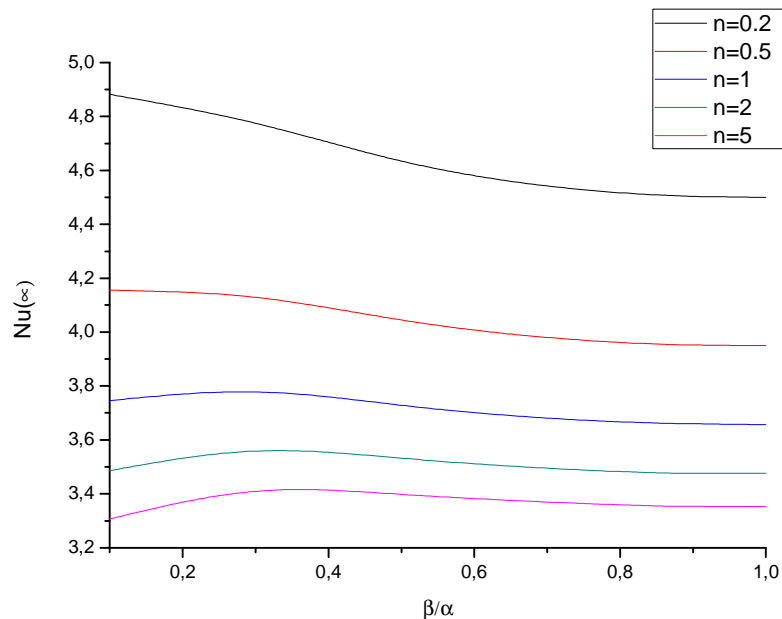
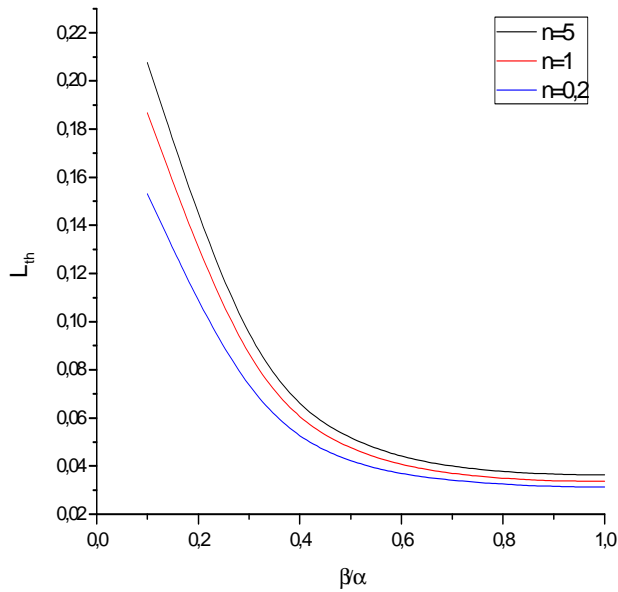


Figure (3-6) : Variation de $Nu(\infty)$ pour différentes valeurs de n et de β/α

Le tableau (3-5) présente le nombre de Nusselt à l'infini pour différents rapports de forme β/α , et de l'indice de nature du fluide n . La figure (3-6) présente l'évolution de nombre Nusselt à l'infini en fonction de rapport de forme β/α pour différents fluides. On a constaté que pour le fluide pseudoplastique, plus en diminuant la valeur de rapport de forme plus la valeur de nombre de Nusselt à l'infini est élevée. Par contre, pour le fluide dilatant on a constaté que le Nombre de Nusselt à l'infini augmente avec la diminution du rapport de forme jusqu'à atteindre une valeur où $Nu(\infty)$ est maximale puis il diminue.



β/α	L_{th}		
	$n=5$	$n=1$	$n=0,2$
0,1	0,2077	0,1867	0,1530
0,3	0,0789	0,0723	0,0623
0,5	0,0483	0,0444	0,0394
0,7	0,0388	0,0360	0,0335
0,9	0,0364	0,0337	0,0313
1	0,0362	0,0333	0,0303

Figure (3-7) : évolution de la longueur d'établissement thermique en fonction du rapport de forme

Tableau (3-6) : Longueur d'établissement thermique pour différents rapport de forme

D'après le tableau (3-6) et la figure (3-7), on voit que plus le rapport de forme β/α diminue plus la longueur d'établissement thermique est grande. De plus, pour les fluides dilatants, L_{th} est plus grande par rapport aux fluides pseudoplastiques.

Tableau (3-7) : Evolution du pourcentage d'erreur.

Z	$\beta/\alpha=0.5 ; n=0.5$			$\beta/\alpha=0.5 ; n=2$		
	Nu(Z)*	Nu(Z)**	Erreur(%)	Nu(Z)*	Nu(Z)**	Erreur(%)
0,0001	24,38	24,386	0,03	21,78	21,760	-0,09
0,0002	19,19	19,182	-0,04	17,17	17,145	-0,14
0,0005	14,02	14,002	-0,13	12,57	12,543	-0,21
0,001	11,10	11,073	-0,24	9,957	9,935	-0,22
0,002	8,826	8,806	-0,23	7,928	7,909	-0,23
0,005	6,631	6,615	-0,25	5,958	5,943	-0,25
0,01	5,474	5,459	-0,27	4,909	4,896	-0,27
0,02	4,699	4,685	-0,29	4,190	4,177	-0,30
0,05	4,203	4,189	-0,34	3,697	3,684	-0,34
0,1	4,081	4,067	-0,35	3,568	3,555	-0,35
0,2	4,060	4,045	-0,36	3,545	3,533	-0,35
0,5	4,060	4,045	-0,37	3,545	3,532	-0,37
1	4,060	4,045	-0,37	3,545	3,532	-0,37

*Maia et al [47]
 ** Présente étude

Les deux tableaux ci-dessus présentent une comparaison de nos résultats avec ceux de Maia et al [47]. Nous avons enregistré une différence de l'ordre de 0.37% par rapport aux résultats de la référence [47], ceci est dû aux points suivant :

- 1- Maia et al [47] ont utilisé la méthode de Gauss à 36 point pour le calcul des intégrales pour B_{ijnm} , l'intégration par rapport au périmètre pour le calcul de nombre de Nusselt et la température moyenne $\theta_{av}(Z)$, tandis que dans notre calcul, nous avons utilisé la méthode de Romberg connu pour sa précision et le control automatique de l'erreur.
- 2- Dans la référence [47], les auteurs ont utilisé la fonction DIVPAG de la librairie IMSL pour la résolution du système d'équations différentielles (Eq3-24). Cette routine est basée sur deux méthodes, la méthode d'Adams-Moulton et la méthode BDF de Gear. Tandis que nous dans nos calculs, nous avons utilisé la résolution directe du système par le calcul matricielle des valeurs propre (Eq2-37) avec les fonctions de MATLAB qui utilise la célèbre bibliothèque LAPACK pour le calcul des valeurs propres.

3-5) Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement thermique d'un écoulement laminaire de fluide non-Newtonien dans une conduite à section elliptique qui obéit au modèle rhéologique de loi de puissance. La méthode appliquée pour la résolution du problème est la technique de transformée intégrale généralisée (GITT). La difficulté inhérente de l'application des conditions aux limites réside dans l'inséparabilité des variables pour cette géométrie. Le domaine de travail elliptique a été transformé à un domaine de travail rectangulaire qui permet une application plus adéquate de la GITT.

Après la résolution du problème thermique, la température moyenne, le nombre de Nusselt (local, moyen et à l'infinie) et la longueur d'établissement thermique ont été calculés. L'analyse de ces derniers, nous a permis de noter les observations suivantes :

- La diminution de la température pour un même fluide est beaucoup plus rapide dans des conduites à faible rapport de forme. Tandis que dans la même conduite,

plus la valeur de l'indice de nature du fluide est faible, plus la chute de température est rapide.

- Pour les fluides pseudoplastiques, nous constatons que le nombre de Nusselt locale, moyen ou à l'infinie augmente lorsque on diminue la valeur du rapport de forme.
- Pour les fluides dilatants, nous avons constatés l'existence d'un point optimale où le nombre de Nusselt à l'infinie est maximal, lors de la variation de ce dernier en fonction du rapport de forme.
- La longueur d'établissement thermique est fortement liée à l'indice de nature de fluide et au rapport de forme. Elle est plus élevée lorsque l'indice du fluide est élevé et le rapport de forme faible.

Les résultats obtenus ont montré une bonne concordance avec les travaux de Maia et al [47].

**MODELISATION ET SIMULATION DE L'INFLUENCE DE LA
DISSIPATION VISQUEUSE SUR LE COMPORTEMENT THERMIQUE
D'UN FLUIDE NON NEWTONIEN EN ECOULEMENT DANS UNE
CONDUITE ELLIPTIQUE**

4-1) Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'influence de la dissipation visqueuse sur le comportement thermique des fluides non-Newtoniens, pour des écoulements dans une conduite à section elliptique.

4-1) Mise en équation

On considère un fluide non-Newtonien obéissant à la loi rhéologique "loi de puissance" en écoulement laminaire dans une conduite à section elliptique. La température à l'entrée du conduit et à la paroi est constante, respectivement T_0 et T_w . La dissipation visqueuse est prise en compte.

L'équation de l'énergie s'écrit comme ci-dessous :

$$\rho c_p V(x, y) \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} = k \left[\frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial y^2} \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (4-1)$$

les conditions aux limites sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x, y, z) = T_w = \text{constant}; \quad \{(x, y) \in \Gamma\} \end{array} \right. \quad (4-2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} = 0; \quad \{x=0, 0 < y < b, z > 0\} \end{array} \right. \quad (4-2b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} = 0; \quad \{0 < x < a, y=0, z > 0\} \end{array} \right. \quad (4-2c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x, y, 0) = T_0; \quad \{(x, y) \in \Omega\} \end{array} \right. \quad (4-2d)$$

le profil de vitesse $V(x, y)$ est donnée par [58] :

$$V(x, y) = \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \right] \cdot V_{av} \quad (4-3a)$$

μ est la de viscosité du fluide donnée par, Ashok [50] :

$$\mu = m \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (4-3b)$$

4-2) Ecriture adimensionnelle du système

En introduisant les paramètres adimensionnels suivants :

$$\theta(X, Y, Z) = \frac{T(X, Y, Z) - T_w}{T_0 - T_w}; \quad X = \frac{x}{D_h}; \quad Y = \frac{y}{D_h}; \quad Z = \frac{z}{D_h Pe}; \quad \alpha = \frac{a}{D_h}; \quad \beta = \frac{b}{D_h};$$

$$U(X, Y) = \frac{V(x, y)}{V_{av}}; \quad Pe = \frac{\rho c_p V_{av} D_h}{k}; \quad Br = \frac{m (V_{av})^{n+1}}{k (D_h)^{n-1} (T_0 - T_w)}, \quad (4-4a-f)$$

l'équation de l'énergie devient :

$$U(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y, Z)}{\partial Z} = \left(\frac{\partial^2 \theta(X, Y, Z)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta(X, Y, Z)}{\partial Y^2} \right) + Br \underbrace{\left(\left(\frac{\partial U(X, Y)}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial U(X, Y)}{\partial Y} \right)^2 \right)^{\frac{n+1}{2}}}_{F(X, Y)} \quad (4-5)$$

avec

$$U(X, Y) = \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \right] \quad (4-6)$$

$$\left(\frac{\partial U(X, Y)}{\partial X} \right)^2 = \left[\left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{2X}{\alpha^2} \right) \left(\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} \right)^{\frac{1-n}{2n}} \right]^2 \quad (4-$$

7a)

et

$$\left(\frac{\partial U(X, Y)}{\partial Y} \right)^2 = \left[\left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{2Y}{\beta^2} \right) \left(\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} \right)^{\frac{1-n}{2n}} \right]^2 \quad (4-7b)$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\theta(X, Y, Z) = 0; \quad \{(x, y) \in \Gamma, Z > 0\} \quad (4-8a)$$

$$\frac{\partial \theta(X, Y, Z)}{\partial X} = 0; \quad \{X = 0, 0 < Y < \beta, Z > 0\} \quad (4-8b)$$

$$\frac{\partial \theta(X, Y, Z)}{\partial Y} = 0; \quad \{0 < X < \alpha, Y = 0, Z > 0\} \quad (4-8c)$$

$$\theta(X, Y, 0) = 1; \quad \{(X, Y) \in \Omega\} \quad (4-8d)$$

En considérant le même changement de variables que précédemment $((X, Y, Z) \rightarrow (u, v, Z)$

) :

$$X = \alpha^* \cosh(v) \cos(u) \quad (4-9a,b)$$

$$Y = \alpha^* \sinh(v) \sin(u)$$

avec

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{\cosh(v_0)} \quad (4-10a,b)$$

$$v_0 = \arctan h\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \quad \{0 < \beta < \alpha\},$$

le système précédent (4-5) s'écrit :

$$H(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(u, v, Z)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, Z)}{\partial v^2} + Br G(u, v) \quad (4-11)$$

tels que :

$$H(u, v) = J\left(\frac{X, Y}{u, v}\right) U(u, v) \quad (4-12)$$

$$G(u, v) = J\left(\frac{X, Y}{u, v}\right) F(u, v) \quad (4-13)$$

où la matrice Jacobienne J s'écrit :

$$J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \alpha^* [\sinh^2(v) + \sin^2(u)] \quad (4-14)$$

et

$$U(u, v) = \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{\alpha^{*2}}{\alpha^2} \cosh^2(v) \cos^2(u) + \frac{\alpha^{*2}}{\beta^2} \sinh^2(v) \sin^2(u) \right)^{\frac{n+1}{2n}} \right] \quad (4-15)$$

$$F(u, v) = \left\{ \left(\frac{3n+1}{n+1} \right)^2 \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left[\left(\frac{2\alpha^* \cosh(v) \cos(u)}{\alpha^2} \right)^2 + \left(\frac{2\alpha^* \sinh(v) \sin(u)}{\beta^2} \right)^2 \right] \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{\alpha^{*2}}{\alpha^2} \cosh(v)^2 \cos(u)^2 + \frac{\alpha^{*2}}{\beta^2} \sinh(v)^2 \sin(u)^2 \right)^{\frac{1-n}{2n}} \right]^2 \right\}^{\frac{n+1}{2}} \quad (4-16)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\theta(u, v, Z) = 1, \quad \{(u, v) \in \Omega, Z = 0\} \quad (4-17a)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, 0 \leq v \leq v_0, Z > 0\} \quad (4-17b)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial v} = 0, \quad \{u = \pi/2, 0 \leq v \leq v_0, Z > 0\} \quad (4-17c)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial v} = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, v = 0, Z > 0\} \quad (4-17d)$$

$$\theta(u, v, Z) = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, v = v_0, Z > 0\} \quad (4-17e)$$

4-4) Résolution numérique

Dans ce qui suit, nous présentons le développement et l'implémentation de la méthode de résolution numérique de l'équation d'énergie (Eq4-11) en utilisant la méthode dynamique des directions alternées (dADI, dynamique Alternating Direction Implicite [51]).

Grâce aux formules de Taylor, on définit la discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées premières, secondes) comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (4-18a)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (4-18b)$$

L'objectif de la méthode est de trouver une approximation f_i de $f(x_i)$ en certain point x_i de l'intervalle $[a, b]$. La stratégie de résolution consiste à remplacer dans l'équation différentielle toutes les dérivées de la fonction $f(x)$ par les formules aux différences finies (Eq4-18), et ce en chaque point x_i pour i allant de 1 à N .

La méthode des différences finies s'étend sans difficultés aux problèmes à plusieurs dimensions d'espace. Dans notre cas, pour discrétiser le domaine Ω , nous introduisons trois pas d'espace $\Delta u = (\pi/2)/N > 0$, $\Delta v = v_0/M > 0$ et ΔZ , on définit ainsi les nœuds d'un maillage comme représenté ci-dessous :

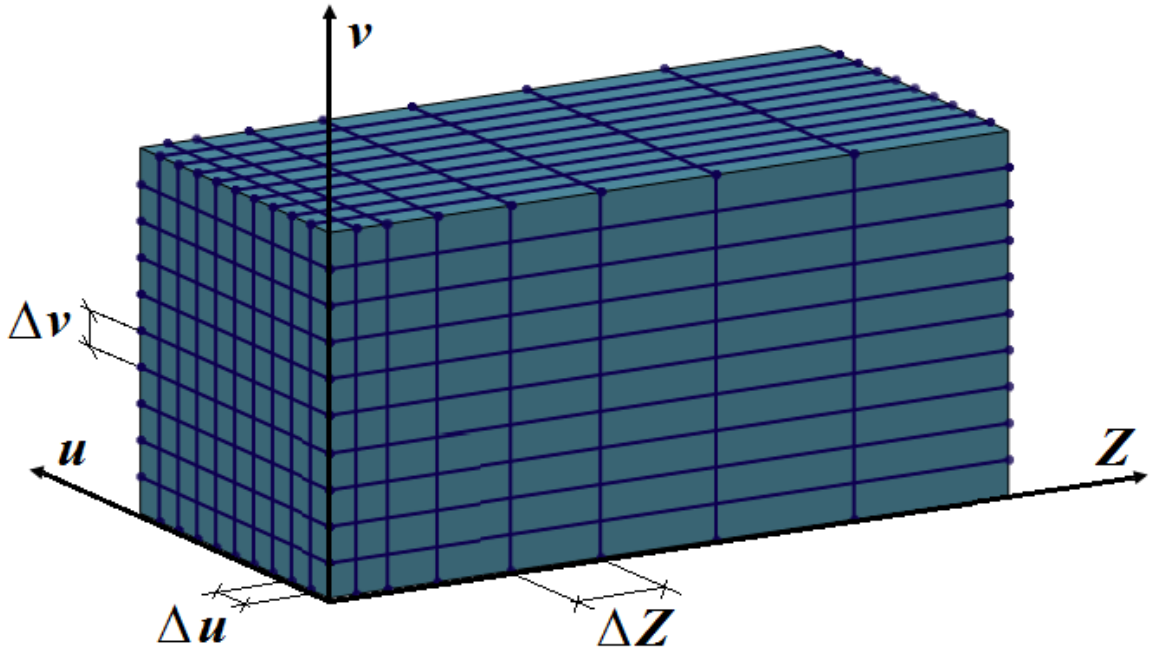


Figure (4-1) : Représentation du maillage.

En faisant usage des formules (Eq4-18), on obtient les représentations en différences finies des termes de dérivées partielles continues comme ci-dessous :

$$\frac{\partial \theta(u, v, Z)}{\partial Z} = \frac{\theta_{(i, j, k+1)} - \theta_{(i, j, k)}}{\Delta Z} \quad (4-19a)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(u, v, Z)}{\partial u^2} = \frac{\theta_{(i-1, j, k)} - 2\theta_{(i, j, k)} + \theta_{(i+1, j, k)}}{\Delta u^2} \quad (4-19b)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(u, v, Z)}{\partial v^2} = \frac{\theta_{(i, j-1, k)} - 2\theta_{(i, j, k)} + \theta_{(i, j+1, k)}}{\Delta v^2} \quad (4-19c)$$

Les indices (i, j, k) indiquent respectivement les directions u , v et Z . L'origine est désignée par $i = j = k = 1$. Le schéma explicite de discrétisation de l'équation (Eq4-11) s'écrit sous cette forme :

$$H_{(i, j)} \left(\frac{\theta_{(i, j, k+1)} - \theta_{(i, j, k)}}{\Delta Z} \right) = \left(\frac{\theta_{(i-1, j, k)} - 2\theta_{(i, j, k)} + \theta_{(i+1, j, k)}}{\Delta u^2} \right) + \left(\frac{\theta_{(i, j-1, k)} - 2\theta_{(i, j, k)} + \theta_{(i, j+1, k)}}{\Delta v^2} \right) + Br G_{(i, j)} \quad (4-20)$$

Si $H_{(i,j)} = \text{cst}$ est $G_{(i,j)} = 0$, le schéma (4-20) est stable pour la condition suivante [52] :

$$\frac{\Delta Z}{H \Delta u^2} + \frac{\Delta Z}{H \Delta v^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4-21)$$

Puisque $H = f(u, v)$ est une fonction de u et v et $G = f(u, v) \neq 0$, le contrôle de la stabilité et la convergence de ce schéma devient très difficile. Pour cela, on a éliminé le choix du schéma explicite. Tandis que le schéma implicite suivant :

$$H_{(i,j)} \left(\frac{\theta_{(i,j,k+1)} - \theta_{(i,j,k)}}{\Delta Z} \right) = \left(\frac{\theta_{(i-1,j,k+1)} - 2\theta_{(i,j,k+1)} + \theta_{(i+1,j,k+1)}}{\Delta u^2} \right) + \left(\frac{\theta_{(i,j-1,k+1)} - 2\theta_{(i,j,k+1)} + \theta_{(i,j+1,k+1)}}{\Delta v^2} \right) + Br G_{(i,j)} \quad (4-22)$$

assure la stabilité et la convergence, mais il nécessite un temps de calcul long. Nos premiers essais sur un ordinateur de CPU Core2due P7350 de 2x2.00GHz, et une RAM de 3.00Go ont abouti à une solution après 8heurs de temps de calcul avec des erreurs de l'ordre de 10% dans la région établi, et entre 30 et 40% dans la région d'entrée. Pour cette raison, en a choisi un autre schéma plus dynamique et plus consistant pour résoudre cette équation (Eq4-11) qui est la méthode des directions alternées (ADI) [53 et 54].

4-4-1) La méthode des directions alternées dynamique

Le schéma ADI (Alternating direction implicit) appliqué à l'équation (4-11) s'écrit en deux équations de demi-pas $\Delta Z / 2$.

$$H_{(i,j)} \left(\frac{\theta_{(i,j,k+1/2)} - \theta_{(i,j,k)}}{\Delta Z / 2} \right) = \left(\frac{\theta_{(i-1,j,k+1/2)} - 2\theta_{(i,j,k+1/2)} + \theta_{(i+1,j,k+1/2)}}{\Delta u^2} \right) + \left(\frac{\theta_{(i,j-1,k)} - 2\theta_{(i,j,k)} + \theta_{(i,j+1,k)}}{\Delta v^2} \right) + Br G_{(i,j)} \quad (4-23a)$$

$$H_{(i,j)} \left(\frac{\theta_{(i,j,k+1)} - \theta_{(i,j,k+1/2)}}{\Delta Z / 2} \right) = \left(\frac{\theta_{(i-1,j,k+1/2)} - 2\theta_{(i,j,k+1/2)} + \theta_{(i+1,j,k+1/2)}}{\Delta u^2} \right) + \left(\frac{\theta_{(i,j-1,k+1)} - 2\theta_{(i,j,k+1)} + \theta_{(i,j+1,k+1)}}{\Delta v^2} \right) + Br G_{(i,j)} \quad (4-23b)$$

Pendant le premier demi-pas $\Delta Z / 2$, la solution θ est connue dans le niveau k , mais inconnue dans le niveau $k+1/2$. Cependant, les valeurs inconnues ($k+1/2$) sont associées avec la direction u . L'équation (4-23a) s'écrit sous forme matricielle comme ci-dessous :

$$\begin{bmatrix}
 \left(\frac{H_{(1,1)}}{\Delta Z / 2} + \frac{2}{\Delta u^2} \right) & \frac{-2}{\Delta u^2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \frac{-1}{\Delta u^2} & \left(\frac{H_{(2,1)}}{\Delta Z / 2} + \frac{2}{\Delta u^2} \right) & \frac{-1}{\Delta u^2} & 0 & & & \vdots \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 \vdots & 0 & \frac{-2}{\Delta u^2} \left(\frac{H_{(n+1,1)}}{\Delta Z / 2} + \frac{2}{\Delta u^2} \right) & 0 & 0 & & \vdots \\
 \vdots & & 0 & 0 & \left(\frac{H_{(1,2)}}{\Delta Z / 2} + \frac{2}{\Delta u^2} \right) & \frac{-2}{\Delta u^2} & \vdots \\
 \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{-2}{\Delta u^2} \left(\frac{H_{(n+1,m)}}{\Delta Z / 2} + \frac{2}{\Delta u^2} \right) & \vdots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \theta_{(1,1,k+1/2)} \\
 \theta_{(2,1,k+1/2)} \\
 \vdots \\
 \theta_{(n+1,1,k+1/2)} \\
 \theta_{(1,2,k+1/2)} \\
 \vdots \\
 \theta_{(n+1,m,k+1/2)}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \left(\frac{H_{(1,1)}}{\Delta Z / 2} - \frac{2}{\Delta v^2} \right) \theta_{(1,1,k)} + \left(\frac{2}{\Delta v^2} \right) \theta_{(1,2,k)} + BrG_{(1,1)} \\
 \left(\frac{H_{(2,1)}}{\Delta Z / 2} - \frac{2}{\Delta v^2} \right) \theta_{(2,1,k)} + \left(\frac{2}{\Delta v^2} \right) \theta_{(2,2,k)} + BrG_{(2,1)} \\
 \vdots \\
 \left(\frac{H_{(n+1,1)}}{\Delta Z / 2} - \frac{2}{\Delta v^2} \right) \theta_{(n+1,1,k)} + \left(\frac{2}{\Delta v^2} \right) \theta_{(n+1,2,k)} + BrG_{(n+1,1)} \\
 \left(\frac{1}{\Delta v^2} \right) \theta_{(1,1,k)} + \left(\frac{H_{(1,2)}}{\Delta Z / 2} - \frac{2}{\Delta v^2} \right) \theta_{(1,2,k)} + \left(\frac{1}{\Delta v^2} \right) \theta_{(1,3,k)} + BrG_{(1,2)} \\
 \vdots \\
 \left(\frac{1}{\Delta v^2} \right) \theta_{(n+1,m-1,k)} + \left(\frac{H_{(n+1,m)}}{\Delta Z / 2} - \frac{2}{\Delta v^2} \right) \theta_{(n+1,m,k)} + BrG_{(n+1,m)}
 \end{bmatrix}
 \tag{4-24a}$$

La résolution de ce système (4-24a) donne la solution intermédiaire (k+1/2). Dans le deuxième demi pas, θ est connu dans le niveau k+1/2, reste à déterminer la solution dans le niveau k+1, et cela en résolvant le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{H_{(1,1)}}{\Delta Z/2} + \frac{2}{\Delta v^2}\right) & \frac{-2}{\Delta v^2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{-1}{\Delta v^2} & \left(\frac{H_{(1,2)}}{\Delta Z/2} + \frac{2}{\Delta v^2}\right) & \frac{-1}{\Delta v^2} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{-1}{\Delta v^2} & \left(\frac{H_{(1,m)}}{\Delta Z/2} + \frac{2}{\Delta v^2}\right) & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & \left(\frac{H_{(2,1)}}{\Delta Z/2} + \frac{2}{\Delta v^2}\right) & \frac{-2}{\Delta v^2} & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{-1}{\Delta v^2} & \left(\frac{H_{(n+1,m)}}{\Delta Z/2} + \frac{2}{\Delta v^2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_{(1,1,k+1)} \\ \theta_{(1,2,k+1)} \\ \vdots \\ \theta_{(1,m,k+1)} \\ \theta_{(2,1,k+1)} \\ \vdots \\ \theta_{(n+1,m,k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{H_{(1,1)}}{\Delta Z/2} - \frac{2}{\Delta u^2}\right) \theta_{(1,1,k+1/2)} + \left(\frac{2}{\Delta u^2}\right) \theta_{(1,2,k+1/2)} + BrG_{(1,1)} \\ \left(\frac{H_{(1,2)}}{\Delta Z/2} - \frac{2}{\Delta u^2}\right) \theta_{(1,2,k+1/2)} + \left(\frac{2}{\Delta u^2}\right) \theta_{(1,2,k+1/2)} + BrG_{(1,2)} \\ \vdots \\ \left(\frac{H_{(1,m)}}{\Delta Z/2} - \frac{2}{\Delta u^2}\right) \theta_{(1,m,k+1/2)} + \left(\frac{2}{\Delta u^2}\right) \theta_{(1,m,k+1/2)} + BrG_{(1,m)} \\ \left(\frac{1}{\Delta u^2}\right) \theta_{(1,1,k+1/2)} + \left(\frac{H_{(2,1)}}{\Delta Z/2} - \frac{2}{\Delta u^2}\right) \theta_{(2,1,k+1/2)} + \left(\frac{1}{\Delta u^2}\right) \theta_{(3,1,k+1/2)} + BrG_{(2,1)} \\ \vdots \\ \left(\frac{2}{\Delta u^2}\right) \theta_{(n,m,k+1/2)} + \left(\frac{H_{(n+1,m)}}{\Delta Z/2} - \frac{2}{\Delta u^2}\right) \theta_{(n+1,m,k+1/2)} + BrG_{(n+1,m)} \end{bmatrix} \quad (4-24b)$$

Notre système se réduit à la résolution de deux systèmes d'équations linaires de forme AX=B pour chaque pas ΔZ.

Soit H(u,v)=cst, et G(u,v)=0, la stabilité du schéma ADI est assurée en appliquant l'analyse de stabilité de Von Neumann [55] en obtenant le facteur d'amplification pour chaque demi-pas. La stabilité dans le pas ΔZ est déterminée par le produit des deux facteurs d'amplifications pour chaque demi-pas ΔZ/2 [56].

$$G = G'G'' = \begin{bmatrix} \frac{1-2s_v \sin^2(\lambda_v/2)}{1+2s_u \sin^2(\lambda_u/2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-2s_u \sin^2(\lambda_u/2)}{1+2s_u \sin^2(\lambda_v/2)} \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

avec $s_u = \Delta Z / (H \Delta u^2)$, $s_v = \Delta Z / (H \Delta v^2)$, $\lambda_u = i\pi \Delta u$ et $\lambda_v = i\pi \Delta v$.

L'examen du facteur d'amplification (4-25) montre que $|G| \leq 1$ quelque soit les valeurs de s_u, s_v, λ_u et λ_v . Cependant, l'analyse de $|G'|$ et $|G''|$ montre que pour le pas complet ΔZ , le schéma est inconditionnellement stable, tandis que le demi-pas ($\Delta Z/2$) est conditionnellement stable [55]. Pour cela, il est nécessaire de choisir $s_u, s_v \leq 1.5$. De plus, le schéma composé est consistant et il a une erreur de troncature de $O(\Delta Z^2, \Delta u^2, \Delta v^2)$ [55, 56]. Par ailleurs, la théorie comme la pratique des différences finies se compliquent singulièrement lorsque les coefficients dans les équations aux dérivées partielles sont variables et lorsque les problèmes sont non linéaires (notre cas Eq4-11).

Notre problème (Eq4-11) contient 2 coefficients variables $H(u,v)$ et $G(u,v)$. Il est difficile d'écrire une condition de stabilité du schéma (Eq4-23) car les deux dépendent de u, v, n, α, β et Br . Nos expériences montrent que pour une gamme des valeurs de $n=0.2 \sim 10$ et $\beta/\alpha=0.2 \sim 0.999$ le schéma (Eq4-11) est stable pour

$$p = \left(\frac{\Delta Z}{\Delta u^2} \right) + \left(\frac{\Delta Z}{\Delta v^2} \right) \leq \frac{1}{2} \text{ comme le montre la figure ci-dessous}$$

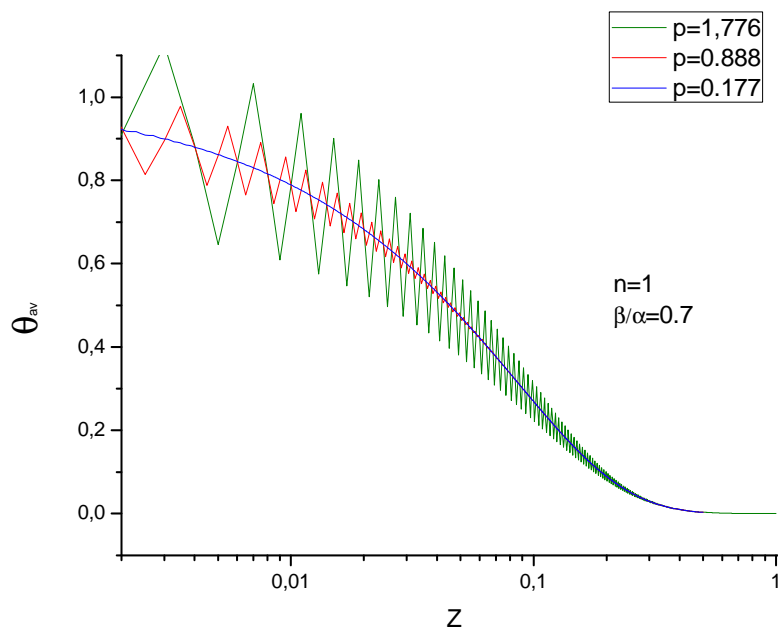


Figure (4-2) : Influence du paramètre P sur la précision de la solution.

Said DOSS et Keith MILLER [57] proposent la méthode ADI dynamique, son principe est de choisir ΔZ tels que $0 < \Delta Z_1 < \Delta Z_2 < \dots < \Delta Z_n$, et cela afin d'atteindre des valeurs

supérieur de Z ($Z \rightarrow \infty$). Dans notre cas, on choisit ΔZ très petit (de l'ordre de 10^{-7}) afin de discrétiser mieux la région d'entrée de la conduite et d'avoir une précision supérieure.

Le nombre de Nusselt et la température moyenne sont calculés numériquement en se servant des formules données dans le chapitre 2 (Eq2-43, 47).

4-5) Simulation

4-5-1) Le système MATLAB

La résolution numérique de notre problème se base sur la méthode d'ADI, qui est elle-même fondée sur la résolution des systèmes matriciels tri-diagonaux. Pour effectuer nos calculs, nous avons choisi le célèbre logiciel de calcul matriciel MATLAB de MathWorks Inc.

MATLAB est un langage hautes performances pour le calcul scientifique et technique. Il intègre la possibilité de calculs, de visualisation et de programmation dans un environnement très simple d'emploi. Les résultats sont exprimés sous une forme mathématique standard. L'utilisation typique est

- Calcul scientifique
- Développement d'algorithmes
- Acquisition de données
- Modélisation et simulation
- Analyse de données, exploration et visualisation
- Graphisme scientifique
- Développement d'applications, interface graphique (GUI)

MATLAB est un système interactif dont la brique de base est un tableau dont la taille n'est pas nécessairement connue. Ceci permet de résoudre des problèmes, en particulier ceux qui ont une formulation matricielle, en un minimum de temps (contrairement aux langages de bas niveau comme le C ou le fortran). Le nom de MATLAB est un résumé de "Matrix Laboratory". MATLAB a été à l'origine développé pour avoir un accès simple et rapide aux projets EISPACK et LINPACK. Aujourd'hui, MATLAB intègre les bibliothèques LAPACK et BLAS, incorporant ainsi les dernières techniques pour le calcul matriciel.

Le système MATLAB consiste en cinq parties majeures :

Environnement de développement. C'est un ensemble d'outils pour l'utilisation des fonctions MATLAB et des fichiers. La plupart de ces outils sont des interfaces graphiques. Ils

incluent le bureau MATLAB et la fenêtre de commande, un historique des commandes, un éditeur et un débogueur, et un navigateur pour voir l'aide, l'espace de travail (workspace), les fichiers, et le chemin.

La librairie de fonctions MATLAB. C'est une grande collection d'algorithmes de calcul allant de fonctions élémentaires comme les sommes, les sinus et cosinus et l'arithmétique complexe, jusqu'aux fonctions plus sophistiquées comme l'inverse de matrices, le calcul de valeurs propres, les fonctions de Bessel et la transformée de Fourier.

Le langage MATLAB. C'est un langage de haut niveau sous forme matrice/vecteur. Il comporte des structures de contrôles, des fonctions, des structures de données, des fonctions d'entrées-sorties et une programmation orientée objet. Il permet le développement de petites applications avec un code simple ou de grandes applications industrielles.

Graphisme. MATLAB possède un grand choix de fonctions pour faire afficher les vecteurs et les matrices comme graphes. Il permet aussi de compléter les graphiques avec des légendes. Il inclue des fonctions de visualisation 2D et 3D de haut niveau. Il est même possible de fabriquer de petites IHM (interfaces hommes machines)

L'API MATLAB. L'API (Application Program Interface) est une librairie qui permet de développer ses propres programmes optimisés en C et en Fortran et de les faire interagir avec MATLAB. Elle inclut des fonctions pour l'appel de routines à partir de MATLAB (liaison dynamique) ou l'appel de MATLAB comme moteur de calcul.

4-5-2) Pseudo-code de simulation

Afin d'affranchir des détails trop technique de la programmation, nous traduisant notre programme en pseudo-code ci-dessus pour se concentrer sur l'essentiel du program.

```

Début de program

  Initialisation des paramètres généraux (alpha, beta, Br...);
  Initialisation du pas ΔZ (ΔZ1< ΔZ2< ΔZ3<...< ΔZn);
  Initialisation du maillage avec application des conditions
  limites ;
  Calcul du coefficient d'équation H(i,j);(Eq. 4-11)
  Si Br≠0 alors
    Calcul du coefficient d'équation Br*G(i,j);(Eq. 4-13)
  Fin de Si

```

```

Fonction dADI % calcule de la température
    Pour i de 1 à n
        Résolution du 1er système matriciel ;(Eq. 4-24a)
        Résolution du 2ème système matriciel ;(Eq. 4-24b)
    Fin de pour
    Retourner température ;
Fin de fonction dADI ;
Calcul de la température moyenne ;
Calcul du nombre de Nusselt ;
Afficher les résultats ;
Fin de program

```

4-6) Résultats et discussion

Les résultats de simulation sont présentés en trois groupes. Le premier groupe analyse l'influence de la taille de la grille ($u \times v$) sur la précision, la consistance des résultats, et de justifier nos choix sur la dimension de cette dernière pour les différents cas qu'on a étudié. Dans le deuxième groupe, nous étudions notre problème sans prise en compte de l'effet de la dissipation visqueuse, nous comparons nos résultats avec ceux de la littérature [7, 24, 25 et 47]. Dans le troisième groupe, nous introduisons l'effet de la dissipation visqueuse dans notre problème.

A notre connaissance, l'étude de la dissipation visqueuse des fluides non Newtoniens en écoulement dans une conduite à section elliptique n'était pas traitée auparavant et on ne dispose pas de résultats pour faire la comparaison. Afin de savoir si nos résultats sont bons, satisfaisants et exploitables, nous avons élaboré plusieurs testes et comparaisons avec des cas simples (écoulements de fluides non newtoniens sans effet de dissipation visqueuse) et complexes (écoulements de fluides non newtoniens avec prise en compte de la dissipation visqueuse dans une conduite cylindrique) où les résultats existent dans la littérature.

4-6-1) Influence des paramètres numériques

Dans la figure (4-3), on montre l'influence de la taille de la grille ($u \times v$) sur la précision de la méthode dADI par rapport à la solution analytique (GITT) pour un rapport de forme $\beta / \alpha = 0.99 \approx 1$ (conduite circulaire).

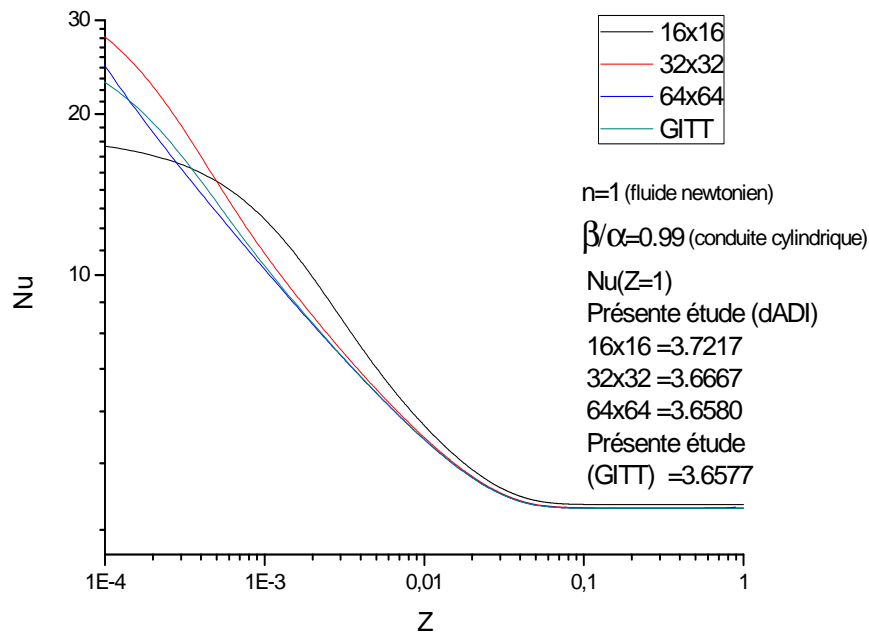


Figure (4-3) : influence de la taille de la grille sur le nombre de Nusselt pour $\beta / \alpha = 0.99$.

Dans la région où l'écoulement est totalement établi ($Z > 0.1$), on constate que la solution numérique (avec les deux grilles 32x32 et 64x64) présente une bonne concordance avec la solution analytique (GITT), tandis que la grille 16x16 présente une légère différence de l'ordre de 1.75%.

Dans la zone d'entrée ($Z < 0.1$), on remarque que la courbe représentant la grille de taille 16x16 présente des écarts élevés par rapport à la solution analytique, tandis que la grille de 32x32 diffère peu de la GITT pour des valeurs de $Z < 0.01$. La courbe donnée par la grille de taille 64x64 suit la courbe GITT et les écarts (très réduits) ne se remarquent que pour des valeurs de $Z < 10^{-3}$.

La grille de taille 64x64 ne va être utilisée que pour le cas où $\beta / \alpha \approx 1$, car dès que le rapport de forme β / α approche la valeur de 1, v_0 tend vers l'infinie (exemple, $\beta / \alpha = 0.99 \rightarrow v_0 \approx 2.65$, $\beta / \alpha = 0.999 \rightarrow v_0 \approx 3.80$, $\beta / \alpha = 1 \rightarrow v_0 \approx \infty$), ce qui nous oblige à raffiner la grille ($u \times v$) pour avoir une bonne précision. Pour des valeurs inférieures du rapport β / α , une grille de 32x32 est suffisante pour avoir une bonne représentation de la solution comme le montrent les figures suivantes de $\beta / \alpha = 0.3, 0.5, 0.7$.

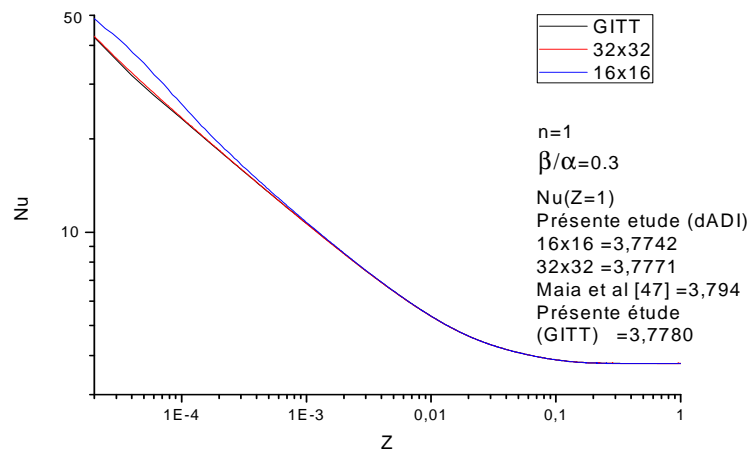


Figure (4-4) : influence de la taille de la grille sur le nombre Nusselt pour $\beta / \alpha = 0.3$.

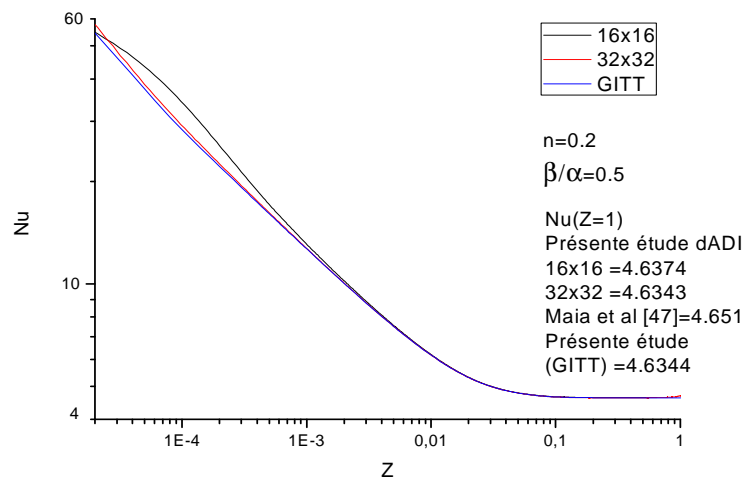


Figure (4-5) : influence de la taille de la grille sur le nombre Nusselt pour $\beta / \alpha = 0.5$.

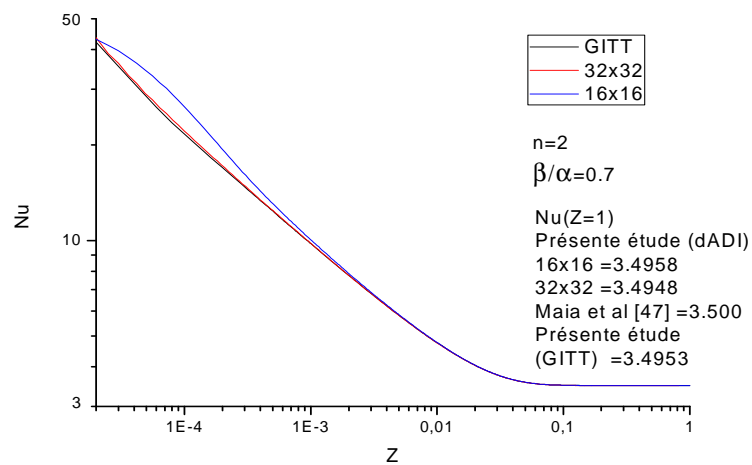


Figure (4-6) : influence de la taille de la grille sur le nombre Nusselt pour $\beta / \alpha = 0.7$.

4-6-2) Validation avec le cas de fluide non newtonien sans prise en considération de l'effet de dissipation visqueuse

4-6-2-1) Comparaison avec le cas de conduite cylindrique

Dans le tableau (4-1) est les figures (4-7), nous comparons les valeurs du nombre de Nusselt local pour différents points axiaux (Z) avec les résultats de la référence [7], pour le cas d'un écoulement de fluide non newtonien dans une conduite cylindrique.

Tableau (4-1) : Nombre de Nusselt locale et pourcentage d'erreur

Z	$\beta / \alpha = 0.99$								
	Nu(Z) pour $n = 1/3$			Nu(Z) pour $n = 1$			Nu(Z) pour $n = 3$		
	Cotta et al*	dADI	Erreur(%)	Cotta et al*	dADI	Erreur(%)	Cotta et al*	dADI	Erreur(%)
0,00001	55,788	63,092	13,09	48,913	59,447	21,54	46,084	57,403	24,56
0,00002	44,030	54,722	24,28	38,637	48,519	25,58	36,412	45,234	24,23
0,00005	32,153	39,766	23,68	28,254	32,766	15,97	26,638	29,789	11,83
0,0001	25,321	29,135	15,06	22,279	24,341	9,26	21,012	22,574	7,43
0,0002	19,929	21,304	6,90	17,559	18,367	4,60	16,568	17,192	3,77
0,0005	14,523	14,939	2,86	12,824	13,059	1,83	12,107	12,285	1,47
0,001	11,452	11,628	1,54	10,130	10,230	0,99	9,5670	9,6432	0,80
0,002	9,0692	9,1429	0,81	8,0362	8,0776	0,52	7,5909	7,6224	0,41
0,005	6,7613	6,7873	0,38	6,0015	6,0165	0,25	5,6673	5,6789	0,20
0,01	5,5375	5,5491	0,21	4,9161	4,9226	0,13	4,6372	4,6422	0,11
0,02	4,7100	4,7156	0,12	4,1724	4,1755	0,08	3,9255	3,9278	0,06
0,05	4,2223	4,2252	0,07	3,7100	3,7115	0,04	3,4678	3,4689	0,03
0,1	4,1762	4,1787	0,06	3,6581	3,6593	0,03	3,4107	3,4116	0,03
0,15	4,1753	4,1779	0,06	3,6568	3,6581	0,03	3,4090	3,4099	0,03
0,2	4,1753	4,1779	0,06	3,6568	3,6581	0,03	3,4090	3,4099	0,03

* Cotta et Ozisik [7]

D'après le tableau ci-dessus, nous remarquons que l'erreur maximale est enregistrée dans la zone d'entrée du canal ($Z < 0.0001$). Par contre, dans la région totalement établie, l'erreur est de l'ordre de 10^{-2} . Sachant qu'il existe un gradient de température important suivant la direction v dans la zone d'entrée, et lorsque le rapport de forme β/α approche la valeur de 1 (conduite circulaire), l'intervalle de variation de v devient très grand ($v_0 \rightarrow \infty$) nécessitant ainsi un raffinement plus fin du domaine de travail et un temps de calcul plus important.

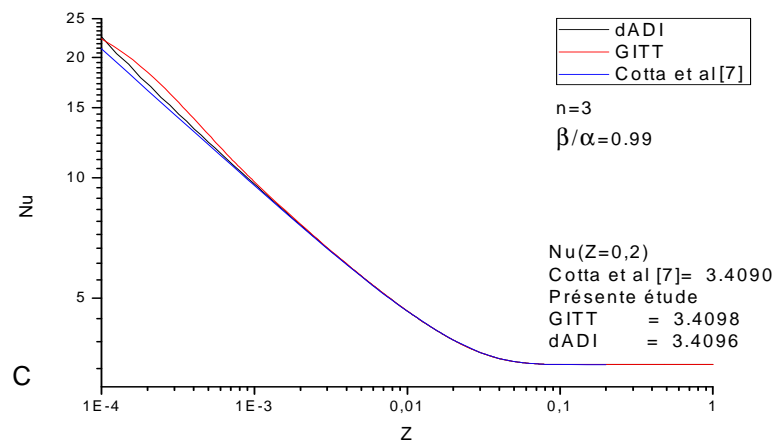
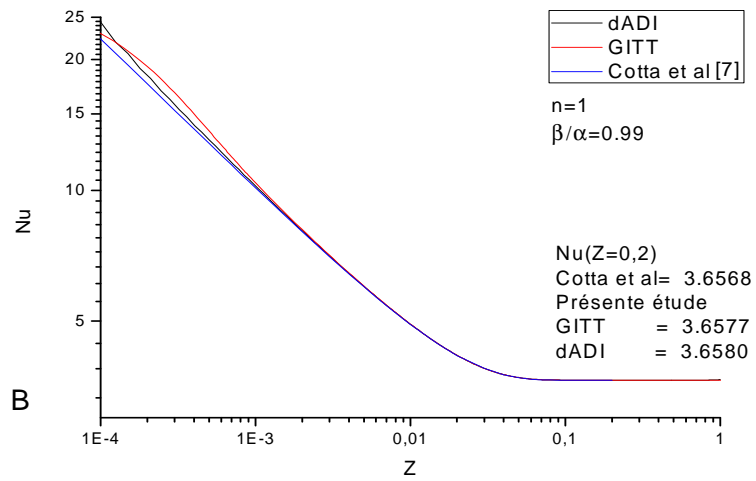
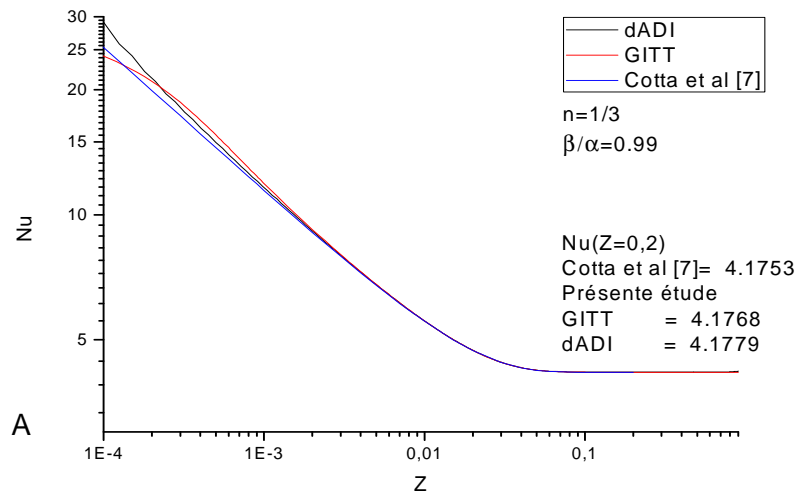


Figure (4-7) : Nombre de Nusselt local en fonction de Z pour différentes valeurs de n (A, n=1/3 ; B, n=1 ; C, n=3)

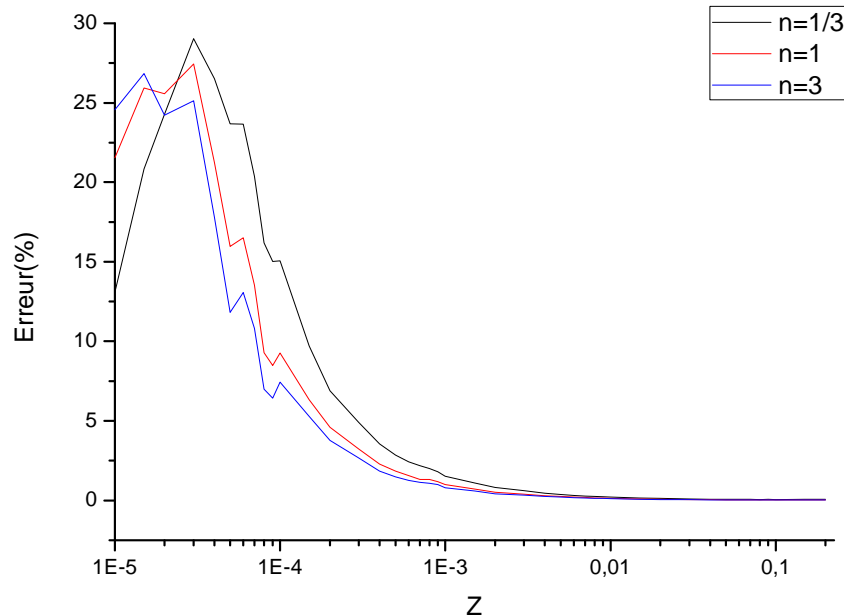


Figure (4-8) : Pourcentage d'erreur en fonction de Z pour les trois valeurs de l'indice n

Notre programme développé sur la base de la méthode dADI montre une bonne concordance avec la solution analytique (GIT) et les résultats de référence de Cotta & al [7]. Le pourcentage d'erreur enregistré est inférieur à 1.5% pour la zone $Z > 0.001$ (Tableau 4-1), tandis que dans la zone d'entrée ($Z < 0.001$), l'erreur est plus importante (max 30%). Cet écart est dû au changement de variables elliptique posé. Lorsque le rapport $\beta / \alpha \rightarrow 1$, $v_0 \rightarrow \infty$ (Eq4-10b), il existe un gradient de température important dans la direction v à l'entrée de la conduite. Lorsque v_0 est grand, l'intervalle de variation de v est important, impliquant un besoin de raffinement plus fin du domaine afin de minimiser le pourcentage d'erreur.

4-6-2-2) Comparaison avec le cas de conduite à section elliptique

Dans les tableaux et les figures suivants, on présente le nombre de Nusselt local en fonction de Z, les résultats calculés par la méthode dADI sont comparés avec ceux de **Maia & al** [47] (Tableau 4-2, Figure4-10), et avec la solution analytique développée dans le chapitre 2 (Figure4-9 et 4-11).

Tableau (4-2) : Nombre de Nusselt local et pourcentage d'erreur pour différentes valeurs de n avec $\beta/\alpha=0,5$.

$\beta / \alpha = 0.5$						
Z	n=0,2			n=0,5		
	Maia & al[47]	dADI	Erreur(%)	Maia & al[47]	dADI	Erreur(%)
0,0001	28,19	29,2334	3,70	24,38	24,9221	2,22
0,0002	22,13	22,5304	1,81	19,19	19,3954	1,07
0,0005	16,10	16,2023	0,64	14,02	14,0690	0,35
0,001	12,69	12,7183	0,22	11,10	11,1011	0,01
0,002	10,06	10,0544	-0,06	8,826	8,8174	-0,10
0,005	7,517	7,5059	-0,15	6,631	6,6182	-0,19
0,01	6,191	6,1777	-0,21	5,474	5,4605	-0,25
0,02	5,323	5,3085	-0,27	4,699	4,6859	-0,28
0,05	4,797	4,7807	-0,34	4,203	4,1885	-0,34
0,1	4,673	4,6562	-0,36	4,081	4,0662	-0,36
0,2	4,652	4,6347	-0,37	4,060	4,0446	-0,38
0,5	4,651	4,6341	-0,36	4,060	4,0439	-0,40
1	4,651	4,6341	-0,36	4,060	4,0439	-0,40
Z	n=2			n=5		
	Maia & al[47]	dADI	Erreur(%)	Maia & al[47]	dADI	Erreur(%)
0,0001	21,78	22,0911	1,43	21,16	21,4327	1,29
0,0002	17,17	17,2787	0,63	16,68	16,7806	0,60
0,0005	12,57	12,5856	0,12	12,22	12,2324	0,10
0,001	9,957	9,9520	-0,05	9,682	9,6761	-0,06
0,002	7,928	7,9166	-0,14	7,710	7,6983	-0,15
0,005	5,958	5,9454	-0,21	5,793	5,7799	-0,23
0,01	4,909	4,8965	-0,26	4,768	4,7559	-0,25
0,02	4,190	4,1777	-0,29	4,061	4,0493	-0,29
0,05	3,697	3,6840	-0,35	3,566	3,5542	-0,33
0,1	3,568	3,5546	-0,38	3,435	3,4215	-0,39
0,2	3,545	3,5316	-0,38	3,411	3,3978	-0,39
0,5	3,545	3,5309	-0,40	3,411	3,3971	-0,41
1	3,545	3,5309	-0,40	3,411	3,3971	-0,41

Le tableau (4-2) présente une comparaison entre nos résultats obtenus par la méthode dADI et ceux de la référence [47]. Nous observons que nos résultats présentent une bonne concordance avec la référence [47].

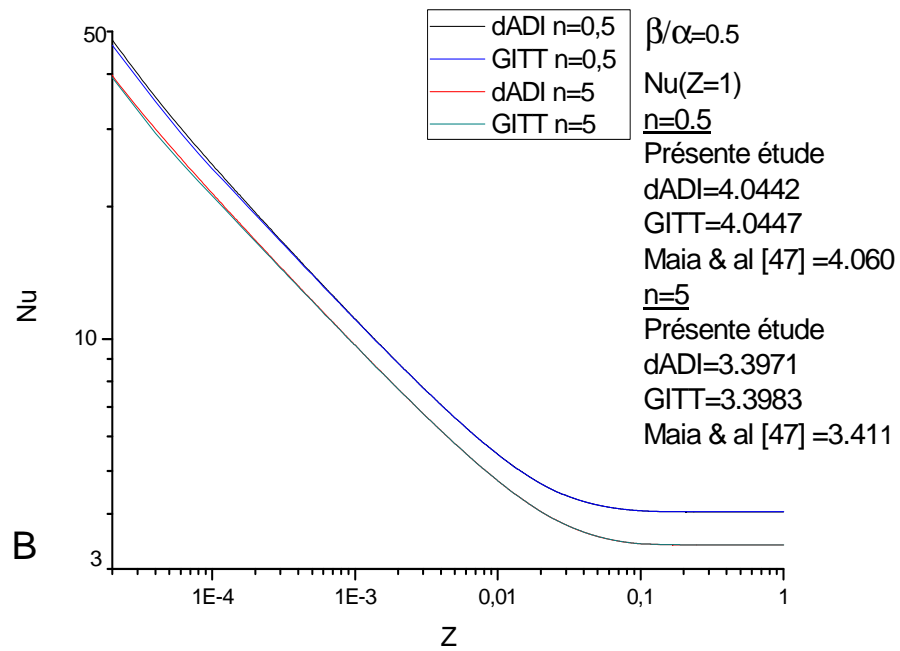
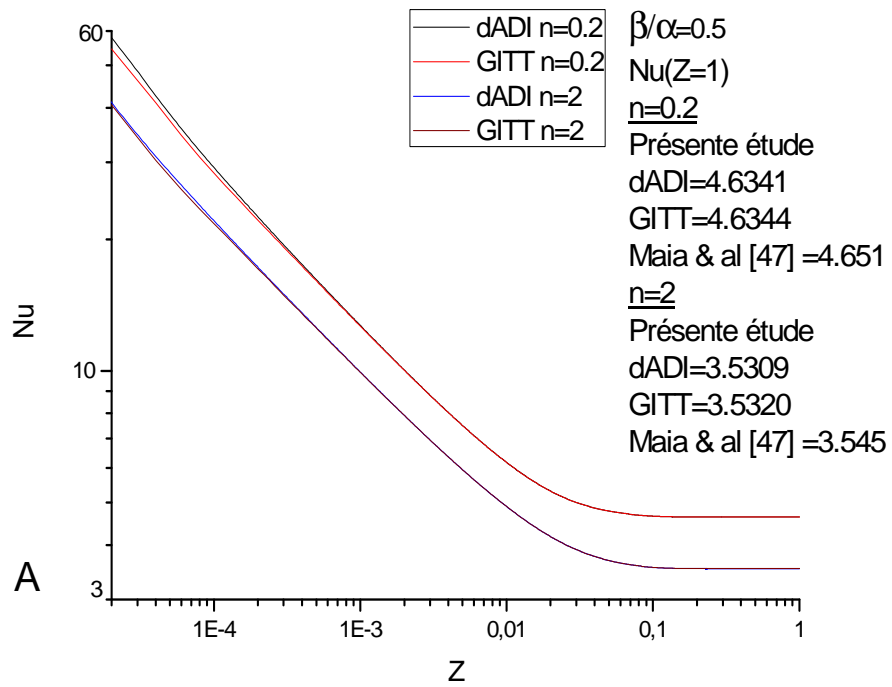


Figure (4-9) : Le Nombre de Nusselt local en fonction de Z pour $\beta/\alpha=0.5$, (a, $n=0.2$ et 2 ; b, $n=0.5$ et 5).

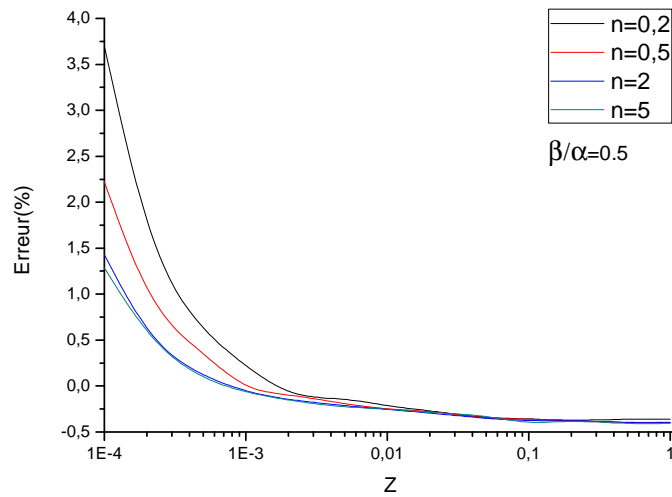


Figure (4-10) : pourcentage d'erreur de nombre de Nusselt local calculé par la méthode dADI par rapport aux résultats de Maia & al [47]

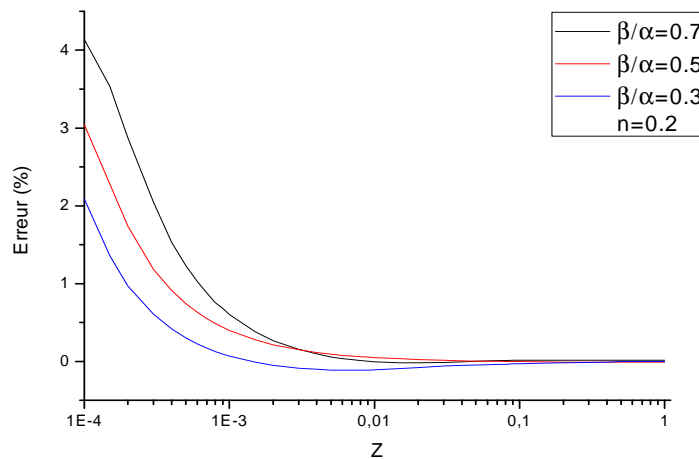


Figure (4-11) : pourcentage d'erreur de nombre de Nusselt local calculé par dADI par rapport aux résultats obtenus par GITT

Le tableau (4-2) et la figure (4-9) montrent une comparaison entre nos résultats obtenus par la méthode dADI et ceux de Maia & al [47]. La figure montre une bonne concordance entre les deux résultats. Le tableau affiche une erreur comprise entre 1.29 et 3.7% à l'entrée du canal ($Z=0.0001$), tandis qu'elle diminue jusqu'à des valeurs comprises entre -0.39 et -0.41% (le signe moins veut dire en valeur inférieure) à $Z=1$. La figure (4-10) présente la variation du pourcentage d'erreur en fonction de Z . On observe que l'erreur prend une

valeur max à l'entrée du conduit puis elle diminue jusqu'à atteindre une valeur stable dans la région d'établissement de l'écoulement.

La figure (4-11) représente l'évolution de pourcentage d'erreur par rapport à la méthode GITT (chapitre 2 et 3) tout le long de la conduite, on remarque que l'erreur est maximale à l'entrée, faible et stable à la sortie du conduit (0.006% à $Z=1$).

4-6-3) Cas de l'écoulement de fluide non newtonien avec prise en compte de l'effet de dissipation visqueuse

Dans plusieurs références [22-28], l'effet de la dissipation visqueuse est étudié pour le cas de la convection forcée dans une conduite (plaques parallèles et conduite cylindrique). Deux configurations géométriques sont analysées [66-68] (Figure 4-12) :

Cas A : conduite semi-infinie ($Z \geq 0$) avec une température constante à la paroi et à l'entrée ($Z=0$).

Cas B : conduite infinie ($-\infty \leq Z \leq +\infty$) avec une température constante à l'entrée ($Z \rightarrow -\infty$) et un échelon de température a $Z=0$.

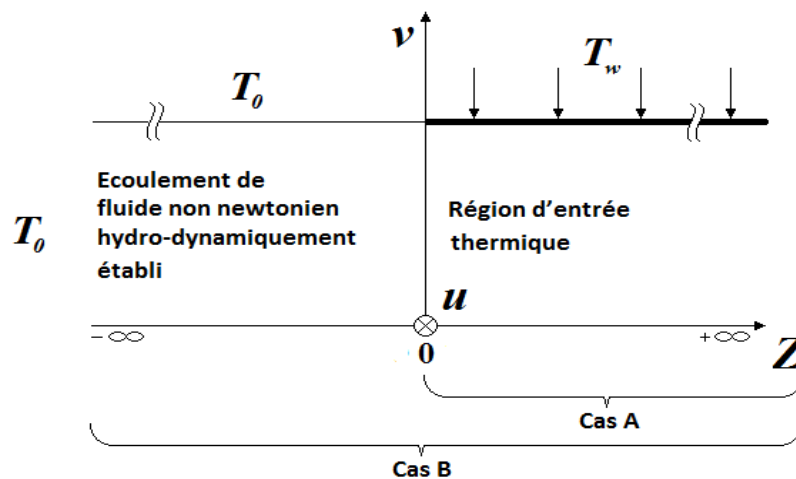


Figure (4-12) : configuration géométrique.

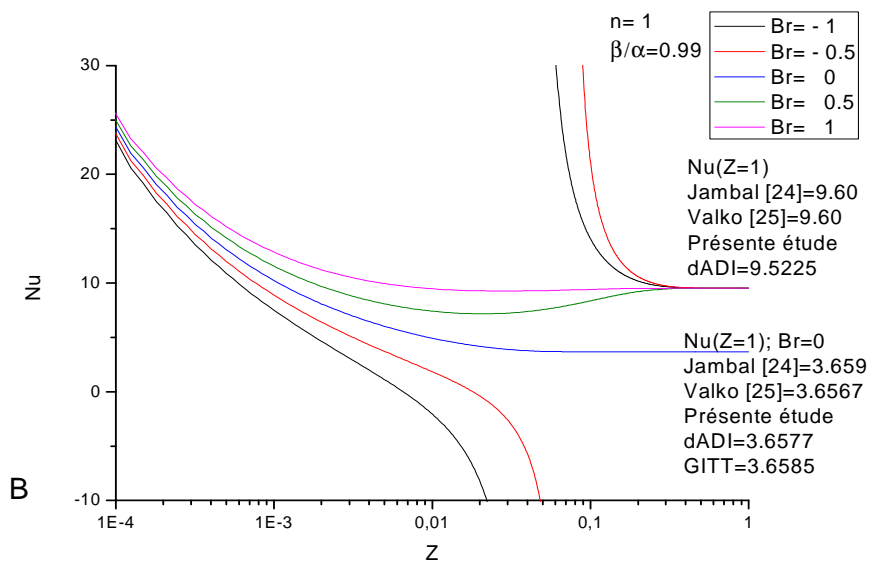
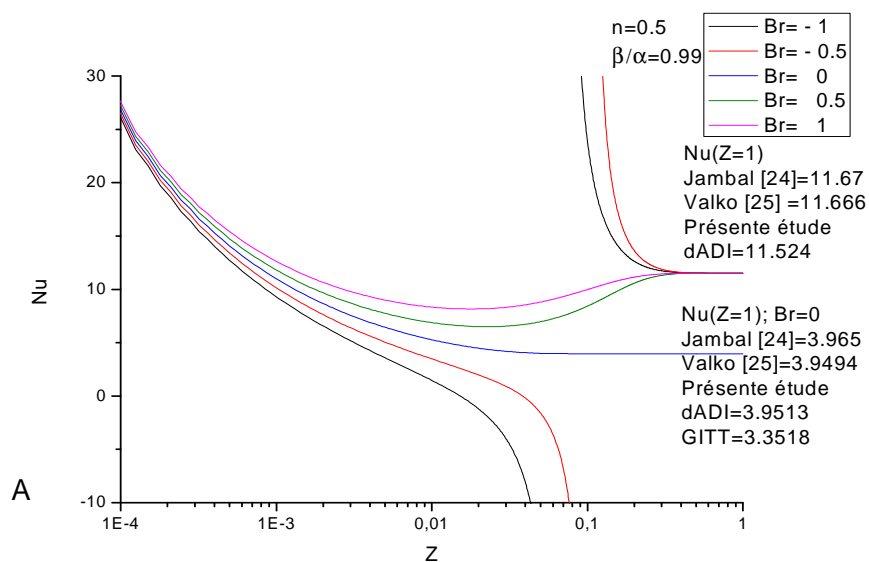
Singh [66] propose une solution pour un écoulement fluide Newtonien dans un tube pour le cas A, il inclus aussi dans son étude la génération interne de l'énergie thermique. Deavours [67] présente une solution analytique pour un écoulement de fluide Newtonien entre deux plaques parallèles pour le cas B. Dang [68] résout le problème pour le cas de fluide non-Newtonien (loi de puissance) entre deux plaques parallèles et conduite circulaire

(cas B), l'effet de la dissipation visqueuse est négligé pour $Z < 0$, et pris en compte pour $Z \geq 0$. Dans notre étude nous allons présenter les deux cas A et B.

4-6-3-1) Conduite semi-infinie

Dans ce premier cas, nous considérons que l'effet de la dissipation visqueuse est négligé dans la zone $Z < 0$, mais prise en compte dans la zone $Z \geq 0$. Le fluide entre dans le canal avec une température uniforme T_0 .

Considérons le cas cylindrique, les figures suivantes (4-13a, b, c) présente la variation du nombre de Nusselt local le long de la conduite pour différentes valeurs de l'indice de fluide n .



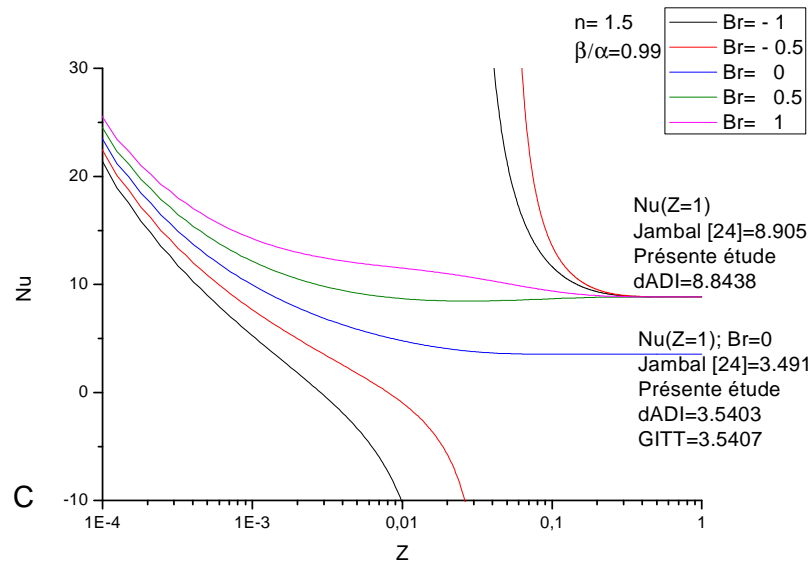


Figure (4-13) : Nombre de Nusselt local en fonction de Z pour différentes valeurs de Br. (A, $n=0.5$; B, $n=1$; C, $n=1.5$).

La figure (4-13) présente la variation du nombre du Nusselt en fonction de Z. Nous observons que pour des valeurs négatives du nombre de Brinkman ($Br < 0$, réchauffement), le nombre de Nusselt présente des variations de moins l'infini à plus l'infini, tandis que pour $Br > 0$ (refroidissement), la courbe de Nusselt a un point minimal. Ce comportement peut être expliqué à partir de la définition du nombre de Nusselt. De plus, pour un nombre de Brinkman différent de zéro ($Br \neq 0$), le nombre de Nusselt tend vers une valeur asymptotique indépendante de Br. Pour une valeur de l'indice $n=0.5$, notre solution basée sur la méthode dADI affiche une valeur du nombre de Nusselt à $Z=1$ égale à 11.52 (1.28% par rapport aux résultats de Jambal [24] et Valko [25]). Pour $n=1.5$, l'écart est de 0.6% par rapport à la référence [24]. Cette différence est due au fait que les calculs numériques de Valko [25] et Jambal [24] sont réalisés en deux dimensions (r, Z), tandis que nos simulations sont réalisées en trois dimensions (u, v, Z) qui nécessitent un maillage plus fin et un temps de calcul plus long afin d'améliorer la précision.

Considérant maintenant le cas de la conduite elliptique, les figures (4-14a, b) suivantes représentent la distribution de la température le long de l'axe mineur β pour différentes valeurs de Z.

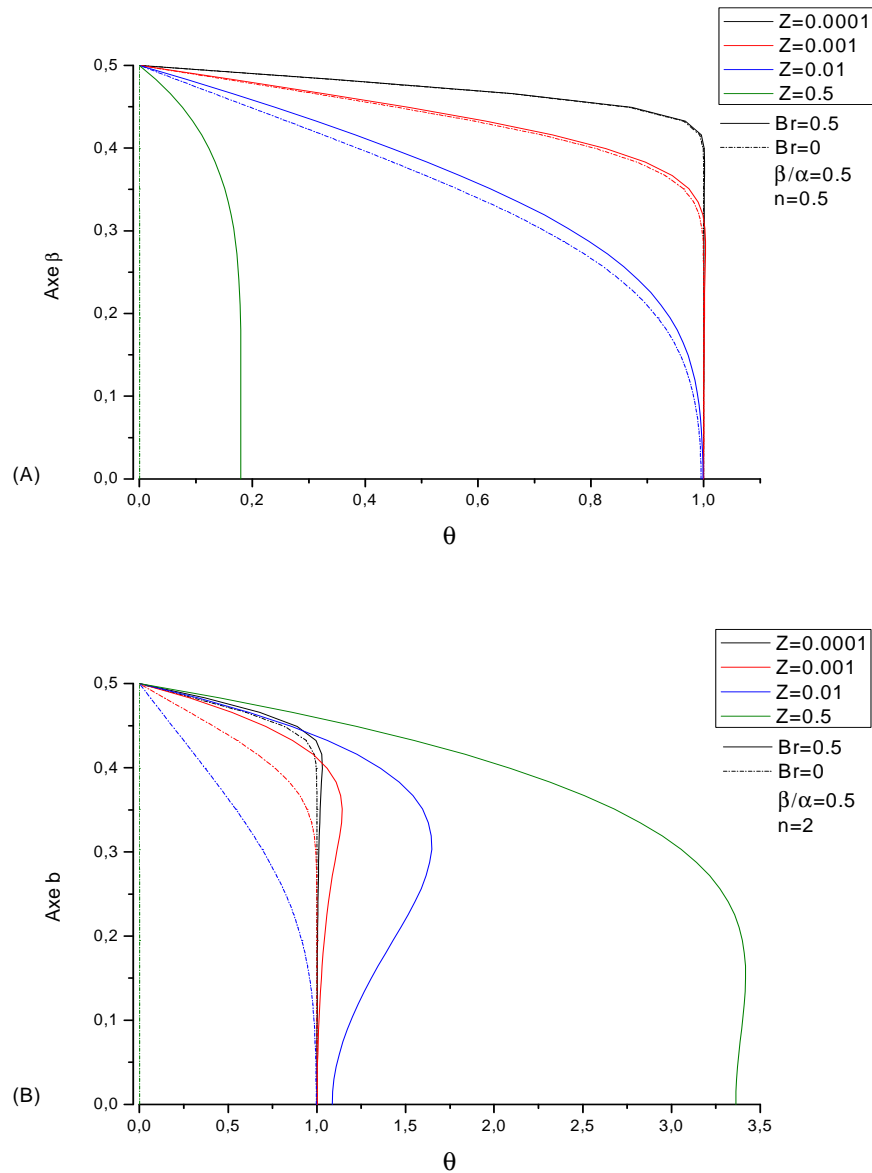


Figure (4-14) : Profil de température sur l'axe b pour différents points axiaux
(A : fluide pseudoplastique, B : fluide dilatant)

La figure (4-14a, b) présente le profil de température sur l'axe b pour différentes valeurs de la position (Z) pour deux types de fluide pseudoplastique ($n=0.5$) et dilatant ($n=2$), avec le nombre de Brinkman $Br=0$ et 0.5 , et le rapport de forme $\beta/\alpha=0.5$. En dehors de la zone d'entrée ($Z=0.0001$), on voit que la dissipation visqueuse a une influence importante sur le profil de la température. Pour le fluide dilatant, puisque le gradient de vitesse est plus grand au près de la paroi, et comme la dissipation visqueuse est liée au le carré du gradient, la courbe de la température se déforme en créant un point max près de la paroi et un point

min au centre de la conduite. Tandis que pour le fluide pseudoplastique, les courbes préservent leurs formes paraboliques et augmentent en fonction du nombre de Brinkman.

En remarque que pour la zone d'entrée l'effet de dissipation est négligeable, mais il devient de plus en plus important en s'éloignant de l'entrée comme le montre la figure (4-15).

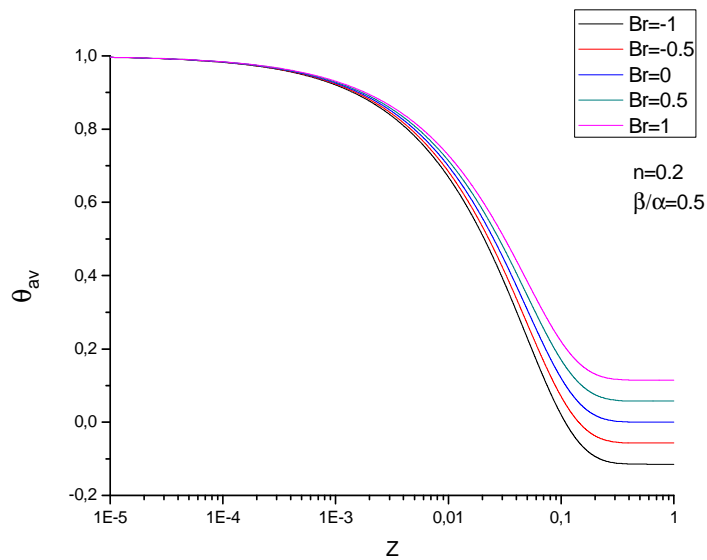


Figure (4-15) : Evolution de la température moyenne le long de la conduite pour différentes valeurs du nombre de Brinkman.

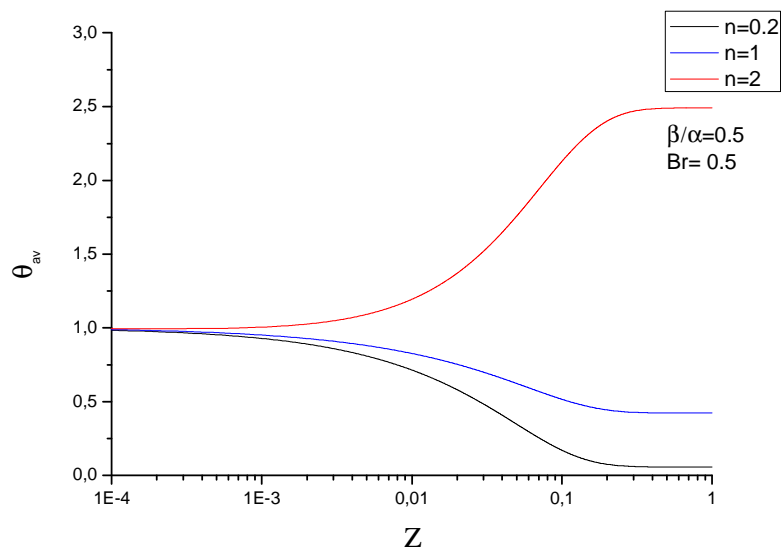


Figure (4-16) : Influence de la nature du fluide sur l'évolution de la température moyenne en tenant compte de la dissipation visqueuse.

La figure (4-16) montre la variation de la température du mélange pour trois fluides : Newtonien ($n=1$), pseudoplastique ($n=0.2$) et dilatant ($n=2$), avec un rapport de forme $\beta/\alpha=0.5$ et un nombre de Brinkman $Br=0.5$. En remarque bien que si n augment, la température moyenne augment en valeur absolu ce qui vérifie les résultats [64].

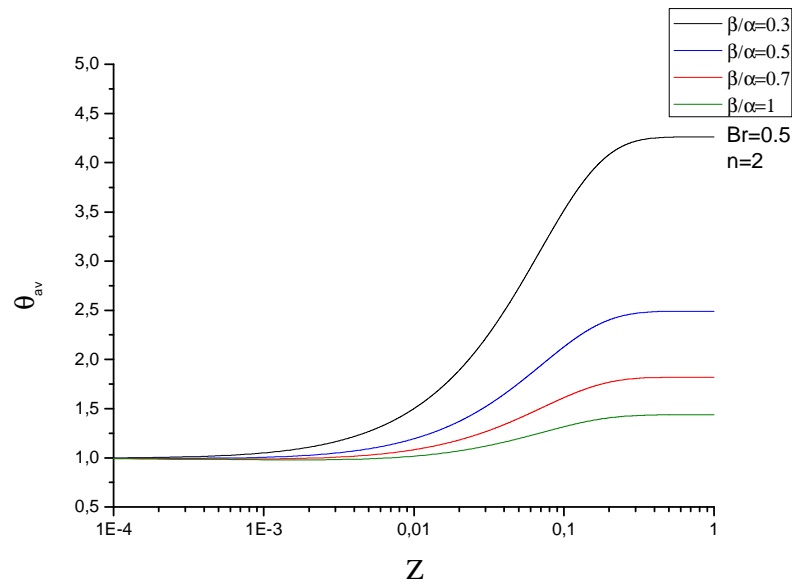


Figure (4-17) : Influence du rapport de forme β/α sur l'évolution de la température moyenne avec effet de dissipation visqueuse.

La figure (4-17) représente l'influence du rapport de forme β/α sur l'évolution de la température moyenne le long de la conduite. Comme la théorie le prévoit, dès que β/α diminue, la température du mélange augmente. Et ceci est dû au fait que lors de "l'aplatissement de la conduite", le gradient de vitesse augmente, infectant directement la quantité d'énergie générée par effet de dissipation visqueuse qui est proportionnelle au carré du gradient de vitesse, provoquant ainsi l'augmentation de la température du mélange. A titre d'exemple, pour un fluide dont l'indice $n=2$ et le nombre de Brinkman $Br=0.5$, on a observé que pour un rapport de forme $\beta/\alpha=0.7$, la température moyenne à l'abscisse $Z=1$ est de 26.67% plus grand que celle de la conduite circulaire. Pour $\beta/\alpha=0.5$, la température moyenne est 73.32% plus grand par rapport à la conduite cylindrique, tandis que pour $\beta/\alpha=0.3$, θ_{av} est 196.72% plus grand par rapport à cette dernière.

Dans les figures (4-18a, b, c) nous représentons la variation du nombre de Nusselt local le long d'une conduite elliptique ($\beta/\alpha=0.5$) pour différents types de fluide.

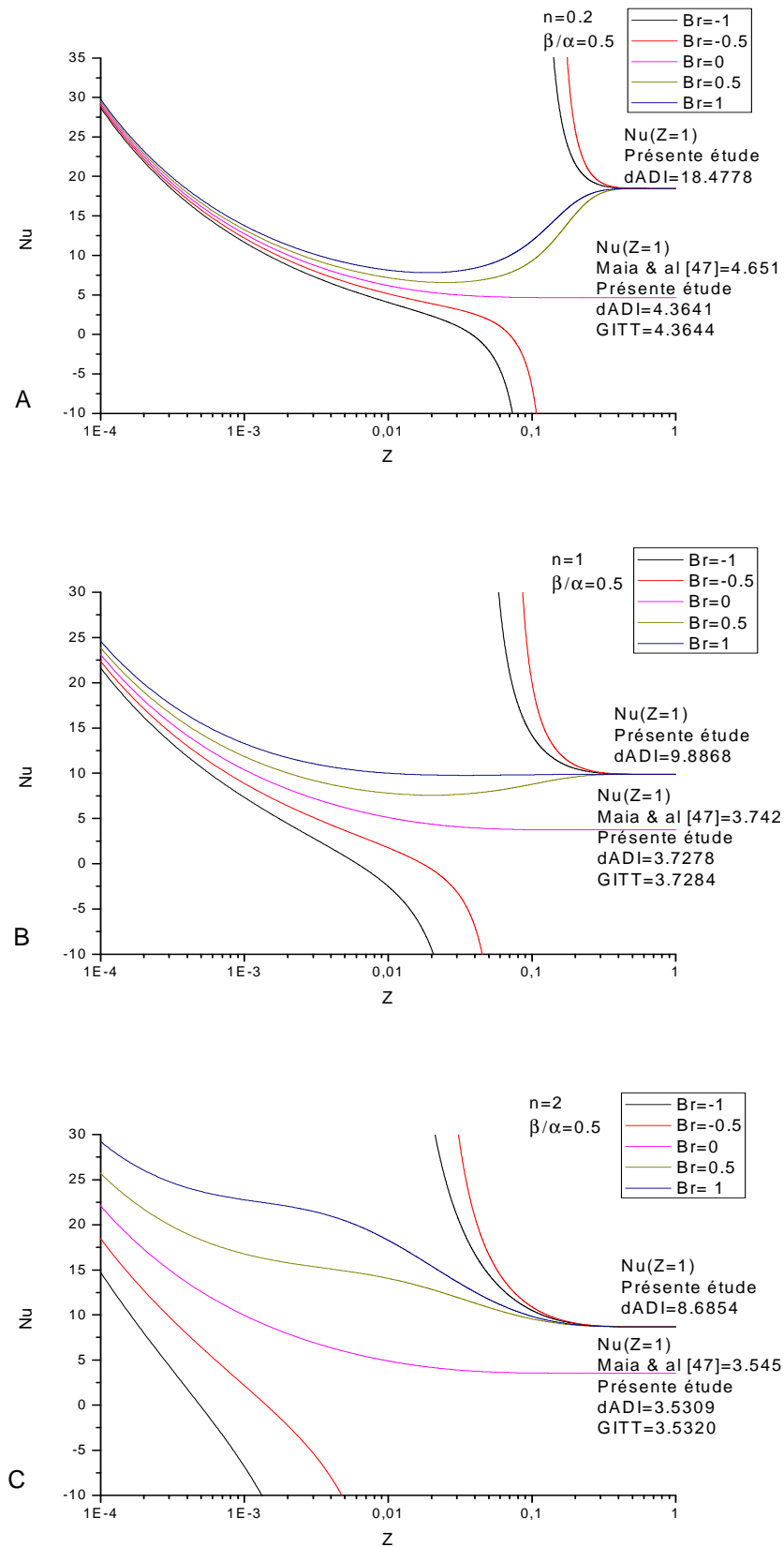


Figure (4-18) : Effet du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt pour un rapport de forme $\beta/\alpha=0.5$
 (A : $n=0.2$ fluide pseudoplastique, B : $n=1$ fluide newtonien, et C : $n=2$ fluide dilatant)

La figure (4-18) montre l'effet du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt en fonction de Z pour $\beta/\alpha=0.5$. Nous remarquons que le nombre de Nusselt tend vers une valeur asymptotique indépendante du nombre de Brinkman. De plus, pour le cas de refroidissement ($Br>0$) la courbe du nombre de Nusselt a une valeur minimal qui se manifeste à une certaine distance axiale de la conduite pour les fluides pseudoplastique, par contre ce point disparaît pour les fluides dilatants [24, 64]. Dans le cas d'un réchauffement ($Br<0$), le nombre de Nusselt varie de plus à moins l'infinie. Ce comportement de Nusselt peut s'expliquer en examinant les valeurs de $(\theta_w - \theta_{av})$ et du gradient $\partial\theta/\partial v$. Les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt sont présentées dans la figure (4-18).

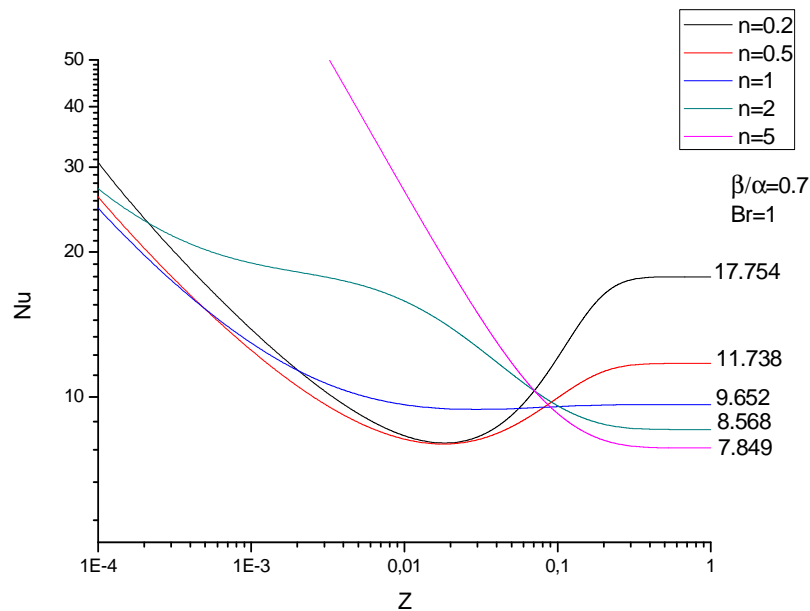


Figure (4-19) : Effet de l'indice de fluide n sur le nombre de Nusselt ($\beta/\alpha=0.7$, $Br=1$)

Dans une même conduite, nous avons constaté qu'en augmentant la valeur de l'indice n , la valeur du nombre de Nusselt diminue, ce qui est en accord avec les remarques de Lawal et Mujumdar [64]. Ceci est dû au fait que les fluides pseudoplastiques sont plus favorables aux échanges de chaleur par convection que les fluides dilatants.

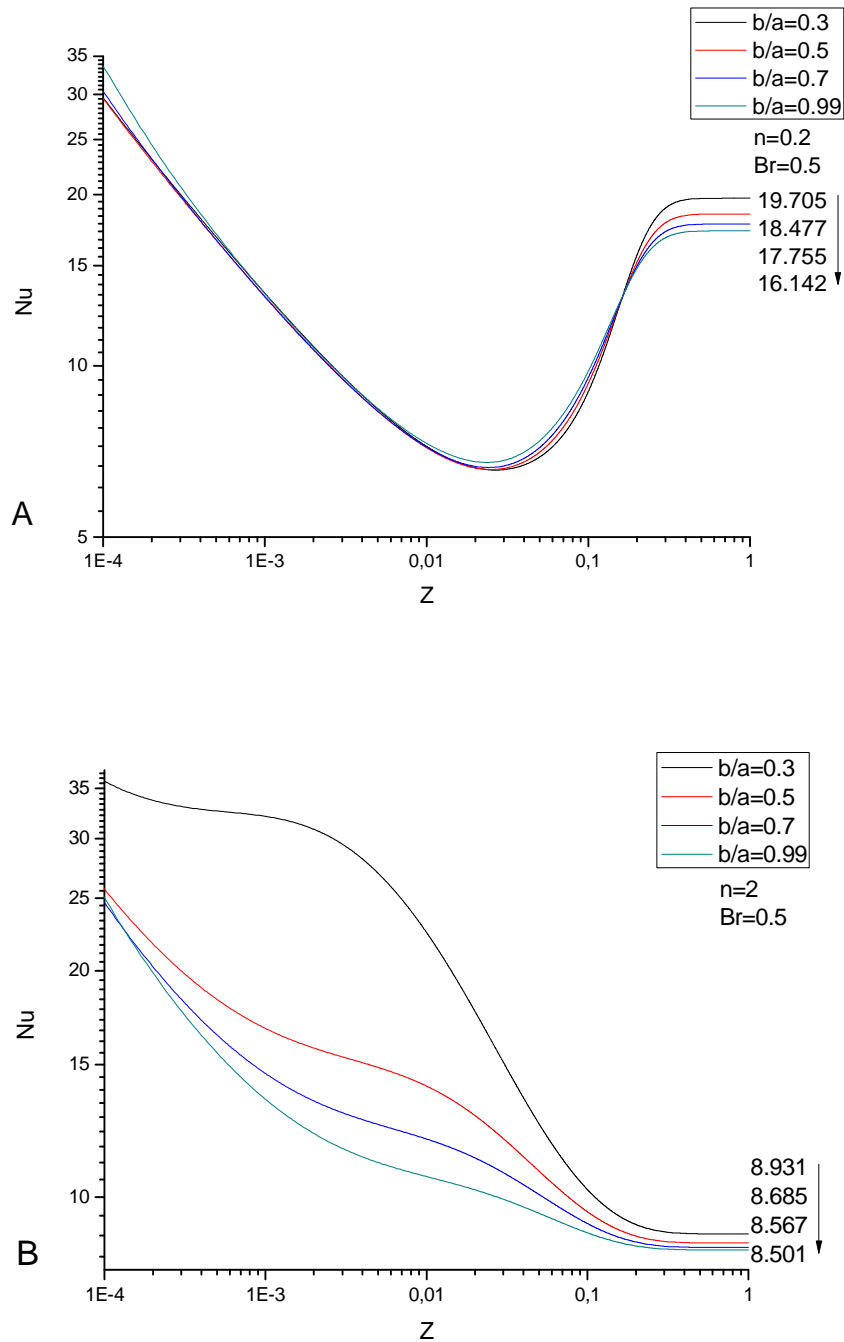


Figure (4-20) : Effet de la variation du rapport de forme β/α sur le nombre de Nusselt (A : fluide pseudoplastique, B : fluide dilatant)

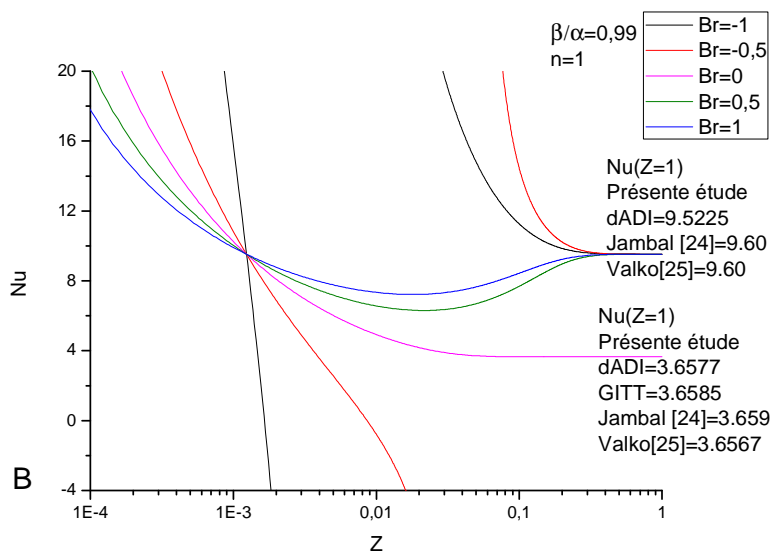
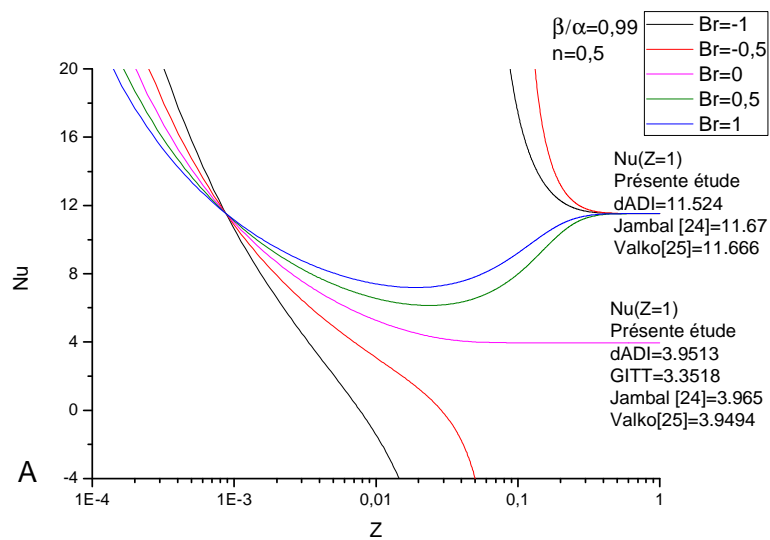
La figure (4-20) représente l'effet de la variation du rapport des deux axes de l'ellipse (β/α) sur le comportement du nombre de Nusselt avec prise en considération de la dissipation visqueuse. Nous observons qu'en diminuant le rapport de forme la valeur asymptotique du nombre de Nusselt augmente. De plus nous avons constatés à la zone d'entrée du canal que les fluides pseudoplastiques sont peut sensibles à la variation du

rapport de forme. Tandis que les fluides dilatants présentent des écarts importants à l'entrée du conduit.

4-6-3-2) Conduite infinie

Dans ce deuxième cas, nous considérons que l'effet de la dissipation visqueuse est dans tout le canal. Le fluide entre avec une température uniforme à $Z=-\infty$, et subi un changement de température de paroi à $Z=0$.

Les figures (4-21a, b, c) représentent l'influence du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt local pour différents fluides.



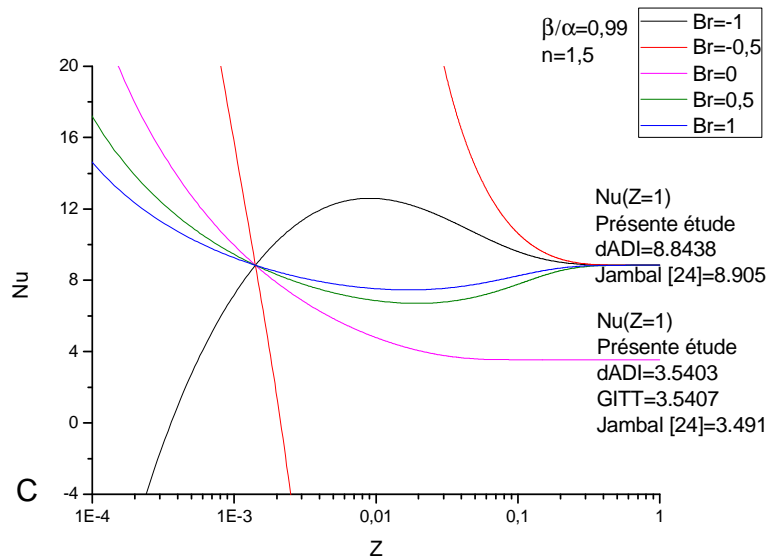


Figure (4-21) : Effet du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt pour une conduite circulaire.

(A : $n=0.5$ fluide pseudoplastique, B : $n=1$ fluide newtonien, et C : $n=1.5$ fluide dilatant)

Pour des valeurs du nombre de Brinkman différentes de zéro ($Br \neq 0$), le nombre de Nusselt tend vers une valeur asymptotique dans la région pleinement établie indépendante du nombre de Brinkman (échauffement ou refroidissement). D'après Nield et al [69] lorsque on attribut une valeur différente de 0 pour le nombre de Brinkman, l'équation d'énergie gouvernante se transforme d'une équation homogène à une équation non-homogène ainsi la dissipation visqueuse fournit une distribution de source de chaleur qui persiste le long de la conduite provoquant un changement de profil de distribution de température pleinement établi.

La variation axial du nombre de Nusselt, présente dans la zone d'entrée un point fixe indépendant du nombre de Brinkman et la valeur du nombre de Nusselt local à ce point est égale à la valeur du nombre de Nusselt asymptotique dans le cas de $Br \neq 0$. Nield et al [69] et Jambal et al [24] ont également enregistré ce point.

Les figures (4-22a, b, c) représentent l'effet du nombre de Brinkman sur le comportement du nombre de Nusselt pour différents fluides dans une conduite elliptique avec un rapport de forme de $\beta/\alpha=0,5$.

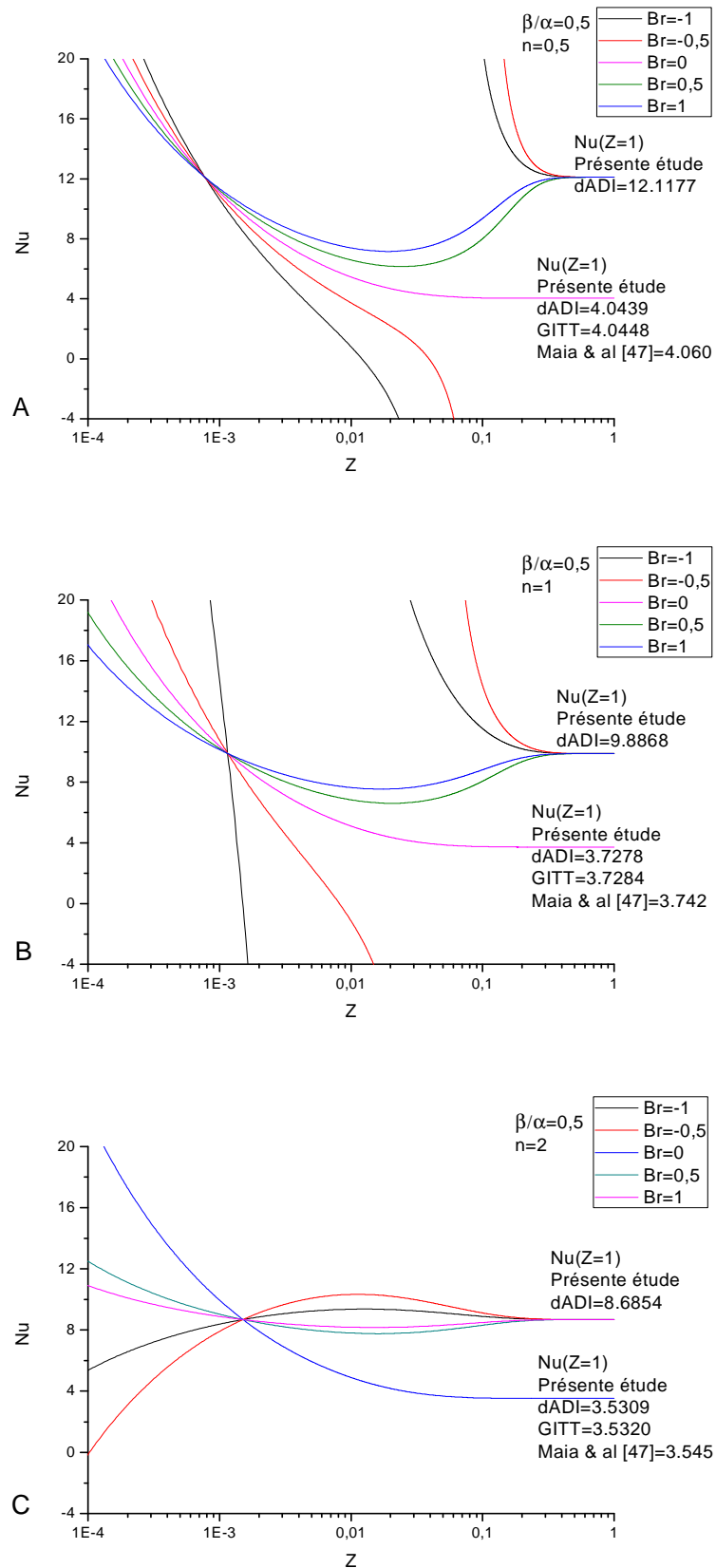


Figure (4-22) : Effet du nombre de Brinkman sur l'évolution du nombre de Nusselt pour une conduite elliptique ($\beta/\alpha=0,5$).

(A : $n=0,5$ fluide pseudoplastique, B : $n=1$ fluide newtonien, et C : $n=2$ fluide dilatant)

En analysant ces trois figures (4-22a, b, c) nous avons constatés que l'évolution du nombre de Nusselt local dans une conduite elliptique est similaire à celui de la conduite cylindrique. En tenant compte de l'effet de dissipation visqueuse ($Br \neq 0$) et dans le cas de refroidissement ($Br > 0$), la courbe du nombre de Nusselt local a un point minimum à une certaine distance axiale. Dans le cas de réchauffement ($Br < 0$), le nombre de Nusselt présente des valeurs qui varient de plus à moins l'infinie. De plus, dans la zone pleinement établie, le nombre de Nusselt converge vers une valeur asymptotique indépendante de Br . L'évolution axiale du Nusselt révèle l'existence d'un point fixe indépendant du nombre de Brinkman dont la valeur est égale à la valeur de Nusselt asymptotique dans le cas de $Br \neq 0$ [24, 69].

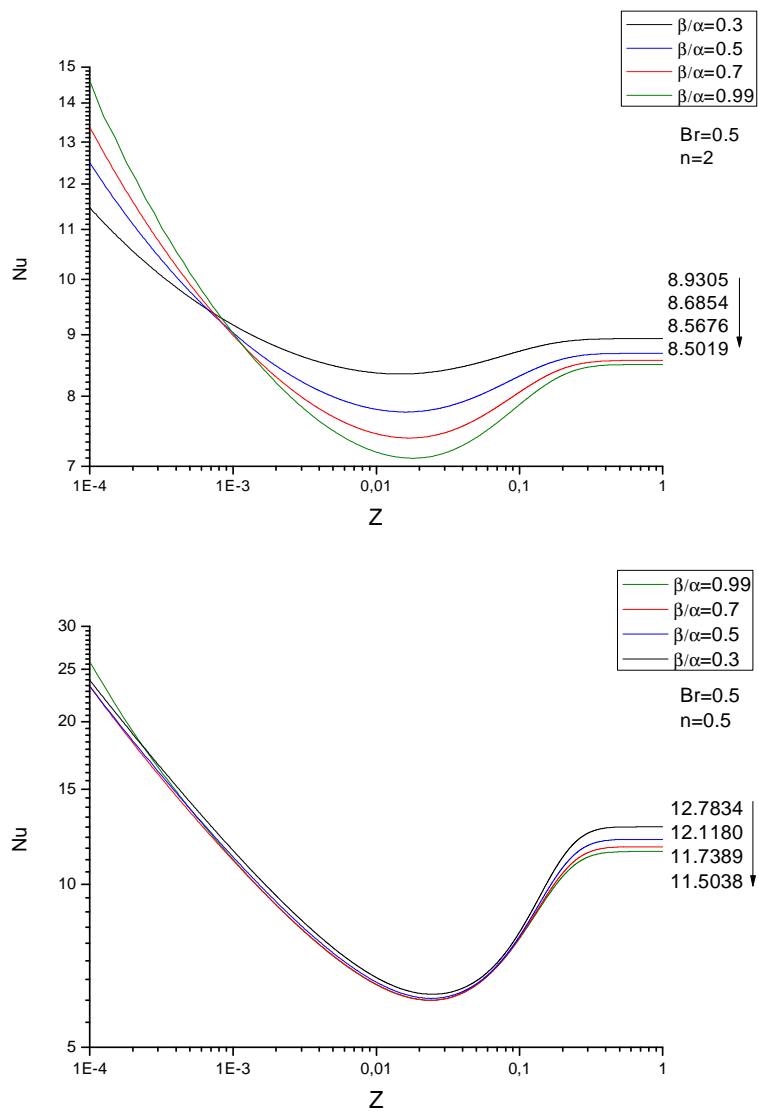


Figure (4-23) : l'effet de variation du rapport de forme β/α sur le nombre de Nusselt

(A : fluide pseudoplastique, B : fluide dilatant)

D'après les figures (4-23a, b), nous observons qu'en diminuant le rapport de forme la valeur du nombre de Nusselt asymptotique augmente. De plus, nous avons constatés qu'à la zone d'entrée du canal les fluides pseudoplastiques sont peut sensibles à la variation du rapport de forme, tandis que les fluides dilatants présentent des écarts importants à l'entrée du conduit (même observation que le cas de la conduite semi-infinie).

La figure (4-24) présente l'effet de la variation du rapport de forme sur le nombre de Nusselt asymptotique (ou à l'infinie) pour différents fluides. On remarque qu'en diminuant le rapport de forme la valeur du nombre de Nusselt à l'infinie augmente. De plus, on a remarqué qu'en diminuant la valeur de l'indice (n), le nombre de Nusselt augmente en valeur. Ceci est dû au faite que les fluides pseudoplastiques sont plus favorables aux échanges par convection que les fluides dilatants.

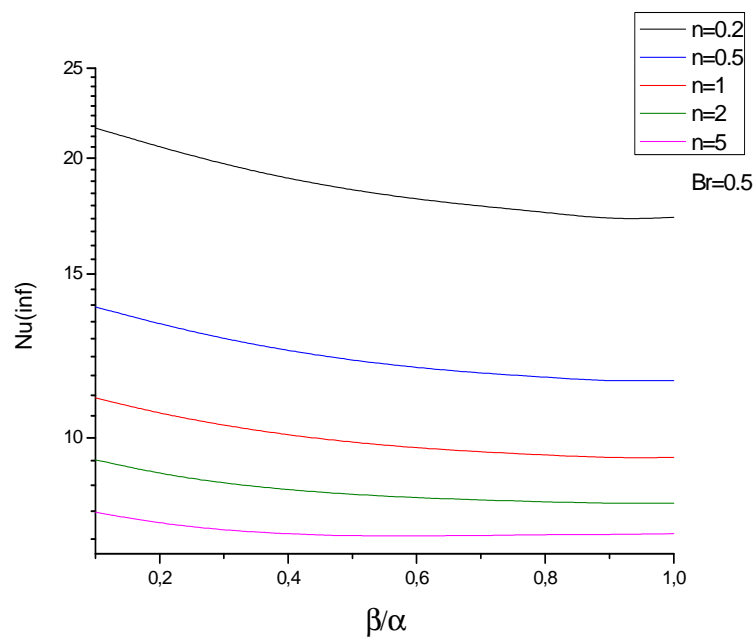


Figure (4-24) : influence du rapport de forme sur le nombre de Nusselt asymptotique (ou à l'infinie).

La figure (4-25) représente la variation de la température moyenne en fonction du rapport de forme β/α pour différents fluides ($n=0.2, 0.5, 1, 2$ et 5) et un nombre de Brinkman fixe ($Br=0.5$).

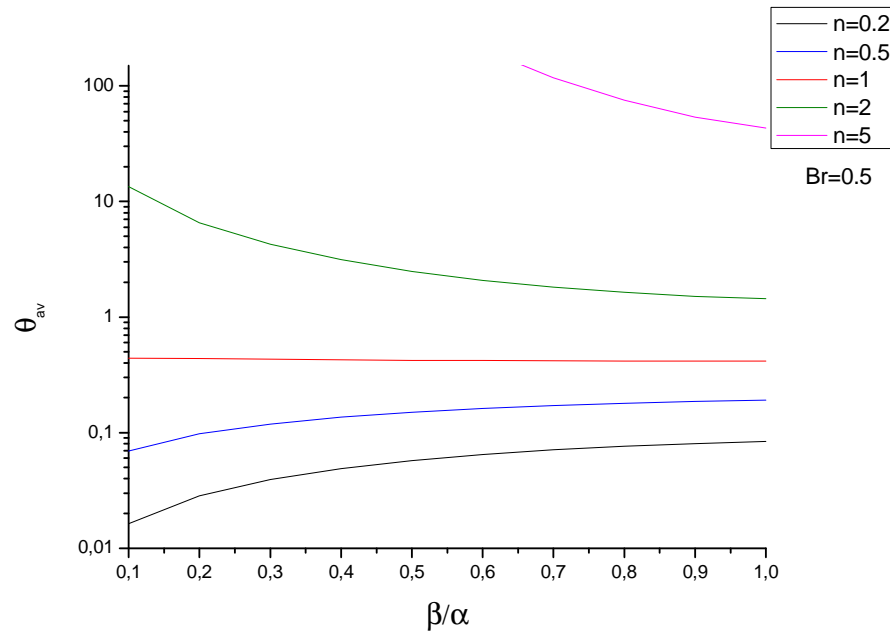


Figure (4-25) : influence du rapport de forme sur la température moyenne.

D'après la figure (4-25), pour les fluides dilatants, plus en diminuant le rapport de forme plus la température moyenne pleinement établie (température moyenne à l'infinie) augmente, tandis que pour les fluides pseudoplastiques est l'inverse. Ceci est dû au fait qu'en diminuant le rapport de forme, l'énergie fournie par dissipation visqueuse augmente provoquant ainsi une augmentation de la température du mélange. Étant donné que les fluides pseudoplastiques sont plus favorables aux échanges par convection pour des faibles valeurs de rapport de forme (nombre de Nusselt important (figure 4-24)), leur température moyenne à l'infinie baisse tandis que pour les fluides dilatants elle augmente.

4-7) Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude numérique sur l'influence de la dissipation visqueuse sur le comportement thermique pour un écoulement de fluide non Newtonien (modèle de loi de puissance) dans une conduite à section elliptique. Une résolution numérique a été développée en se basant sur la méthode dynamique des directions alternées implicite (dADI). Un programme de calcul a été élaboré et vérifié intensivement plusieurs fois, et validé avec la littérature.

Les résultats obtenus montrent une excellente concordance avec la théorie. Dans le cas de refroidissement ($Br > 0$), le profil de température radial présente un point max près de

la paroi et un point min au centre de la conduite. En analysant l'évolution axiale du nombre de Nusselt, nous avons remarqué l'existence d'un point minimum à une certaine distance axiale dans la zone d'entrée. En réchauffant ($Br < 0$), la température de mélange continue à augmenter jusqu'à atteindre une valeur égale à la température de la paroi, provoquant ainsi un point de singularité sur l'évolution du nombre de Nusselt. A une certaine distance, il fait un saut de moins l'infinie à plus l'infinie puis il redescend jusqu'à atteindre la valeur asymptotique. Cette dernière, elle est indépendante de la valeur de nombre de Brinkman.

En variant le rapport d'axes de la conduite, nous avons montré la dépendance de Nombre de Nusselt à ce dernier. Plus en diminuant la valeur du rapport β/α , plus la valeur du nombre de Nusselt augmente.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce présent travail, nous avons présentés une étude sur le problème de la convection forcée dans une conduite à section elliptique, soumise à une température constante à la paroi. Dans le premier chapitre, nous présentés une synthèse bibliographique des principaux travaux qui concerne la convection forcée dans une conduite elliptique.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudiés l'effet de la variation du rapport de forme sur le comportement thermique du fluide newtonien. Le problème mathématique est résolu analytiquement à l'aide de la technique de la transformée intégrale généralisée (GITT). L'analyse révèle que le nombre de Nusselt est optimal pour une valeur de 0.25 du rapport de forme de l'ellipse. Tandis que la longueur l'établissement thermique L_{th} est liée inversement avec β/α .

Dans le troisième chapitre, nous avons analysés le comportement des fluides non newtonien (loi de puissance) sous les mêmes conditions thermiques. Les résultats montrent que le nombre de Nusselt augmente avec la diminution de l'indice de comportement de fluide n , tandis que la longueur d'établissement thermique varie proportionnellement à l'indice n .

Dans le quatrième chapitre, nous avons examiné l'effet de la dissipation visqueuse au sein d'un fluide en écoulement laminaire dans une conduite à section elliptique. La difficulté de la résolution analytique (GITT) nous a conduis à adopter une méthode numérique pour la résolution du problème. Un programme basé sur la méthode implicite des directions alternées (dADI) a été mis au point. Ce programme a été testé et vérifié dans plusieurs cas. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux disponibles dans la littérature. La diminution du rapport β/α engendre l'augmentation de la valeur du nombre de Nusselt asymptotique

$Nu(\infty)$. On a enregistré également que les écarts sont plus importants pour le fluide pseudoplastique que le fluide dilatant. Nous avons aussi observé que l'effet de la dissipation visqueuse dans la zone d'entrée est plus important dans le cas de fluide dilatant que pseudoplastique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **R. M. COTTA** et **M. D. MIKHAILOV**, Integral transform method, Appl. Math. Modelling, Vol. 17, pp156-161, Butterworth-Heinemann, 1993.
- [2] **M. D. MIKHAILOV** et **M. N. ÖZİŞİK**, Unified analysis and solution of the heat and mass diffusion, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [3] **V. A. BAROUCH** et **M. D. MIKHAILOV**, One-dimensional heat and mass diffusion modelling software, Appl. Math. Modelling, Vol. 13, pp568-573, 1989
- [4] **R. M. COTTA**, Integral transform in computational heat and fluid flow, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [5] **M. D. MIKHAILOV** et **M. N. ÖZİŞİK**, An alternative general solution of the steady-state heat diffusion equation, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 23, pp609-612, 1980.
- [6] **M. D. MIKHAILOV** et **M. N. ÖZİŞİK**, Unified finite integral transform analysis, Journal of the Franklin Institute, Vol. 321, N° 6, pp 299-307, 1986.
- [7] **R. M. COTTA** et **M. N. ÖZİŞİK**, Laminar forced convection of power law non Newtonian fluids inside ducts, Wärme-und Stoffübertragung, Vol. 20, pp211-218, 1986.
- [8] **W. S. KIM** et **M. N. ÖZİŞİK**, Turbulent forced convection inside a parallel-plate channel with periodic variation of inlet temperature, Journal of Heat Transfer, Vol. 111, pp882-888, ASME, 1989.
- [9] **A. R. ALMEIDA** et **R. M. COTTA**, Integral transform methodology for convection-diffusion problems in petroleum reservoir engineering, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 38, N° 18, pp3359-3367, 1995.
- [10] **J. S. P. GUERRERO**, **J. N. N. QUERESMA** et **R. M. COTTA**, Simulation of laminar flow inside ducts of irregular geometry using integral transforms, Computational Mechanics, Vol. 25, pp413-420, 2000.

- [11] **P. J. FELIPE de BARROS** et **R. M. COTTA**, Integral transforms for three-dimensional steady turbulent dispersion in rivers and channels, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 31, pp2719-2732, 2007.
- [12] **A. B. METZNER**, Heat transfer in non-Newtonian fluids», *Adv Heat Transfer*, Vol. 2, pp357-394, 1965.
- [13] **P. H. A. SKELLAND**, Non-Newtonian flow and heat transfer, New York, John Wiley & Sons, 1967.
- [14] **R. B. BIRD**, **R. C. ARMSTRONG** et **O. HASSAGER**, Dynamics of polymeric liquids, Vol. 1, New York, John Wiley & Sons, 1977.
- [15] **H. H. WINTER**, viscous dissipation in shear flows of molten polymers, *Adv Heat Transfer*, Vol. 13, pp205-264, 1977.
- [16] **Y. I. CHO** et **J. P. HARTNETT**, Non-Newtonian fluids in circular pipe flow, *Adv Heat Transfer*, Vol. 15, pp60-134, 1982.
- [17] **R. K. SHAH** et **A. L. LONDON**, Laminar flow forced convection in ducts, *Adv Heat Transfer*, Suppl 1, 1978.
- [18] **R. M. COTTA** et **M. N. OZISIK**, Laminar Forced Convection To Non-Newtonian Fluids In Ducts With Prescribed Wall Heat Flux, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 13, pp325-334, 1986.
- [19] **R. S. PARIKH** et **MAHALINGAM**, Laminar Tube Flow Heat Transfer In Non-Newtonian Fluids Under Arbitrary Wall Heat Flux, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp1-16, 1988.
- [20] **A. R. MANSOUR**, An Analytical Solution Of Laminar Heat Transfer To Power- Law Non-Newtonian Fluids In Circular Ducts. Graetz-Nusselt Problem, *Int. J. Heat Transfer*, Vol. 16, pp199-204, 1989.
- [21] **C. B. LYCHE** et **R. B. BIRD**, The Graetz-Nusselt problem for a power-law non-Newtonian fluid, *Chem. Eng. Sci*, Vol. 6, pp35-41, 1956.
- [22] **A. BARLITTA**, Fully Developed Laminar Forced Convection In Circular Ducts For Power – Law Fluids With Viscous Dissipation, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, N° 1, pp15-26, 1997.

- [23] **S.OLEK**, Heat Transfer in Duct Flow of Non-Newtonian Fluids with Axial Conduction, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 25, N° 7, pp929-938, 1998.
- [24] **O. JAMBAL, T. SHIGECHI, G. DAVAA** et **S. MOMOKI**, Effect Of Viscous Dissipation And Axial Heat Conduction On Heat Transfer For Non-Newtonian Fluids In Ducts With Uniform Wall Temperature, Part I Parallel Plates and Circular Ducts, Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol.32, pp1165-1173, 2005.
- [25] **P. P. VALKO**, Solution of the Graetz–Brinkman problem with the Laplace transform Galerkin method, Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol.48, Issue 10, pp1874-1882, 2005.
- [26] **TUDOR BOACA** et **JOANA BOACA**, An Unified Numerical Approach Of Steady Convection Between Two Parallel Plates, Applied mathematics and computation, Vol. 215, pp2673-2685. 2009
- [27] **RANDALL F. BARRON, XIANMING WANG, ROBERT O. WARRINGTON**, et **TIM AMEEL**, Evaluation Of The Eigenvalues For The Graetz Problem In Slip Flow, Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 23, No. 4, pp. 563-574, 1996.
- [28] **WEI SUN , SADIK KAKAS** et **ALMILA G. YAZICIOGLU**, A Numerical Study Of Single-Phase Convective Heat Transfer In Microtubes For Slip Flow, Int. J. Thermal Sciences, Vol. 46, pp1084- 1094, 2007.
- [29] **S. SOMESWARA RAO, N. CH. PATTABHI RAMACHARYULU**, et **V. V. G. KRISHNAMURTY**, Laminar forced convection in elliptic ducts, Appl. Sci. Res. 21, pp185-193, 1969.
- [30] **D. CAIN** et **J. DUFFY**, An experimental investigation of turbulent flow in elliptical ducts, Int. J. mech. Sci, Vol. 13, p451-459, 1971.
- [31] **D. CAIN, A. ROBERTS** et **H. BARROW**, A experimental investigation of turbulent flow and heat transfer in elliptical ducts, Wärme und Stoffübertragung 2, pp101-107, 1973.
- [32] **H. BARROW** et **A. ROBERTS**, Flow and heat transfer in elliptic ducts, 4th Int. Heat Transfer Conf, Versailles, 1970.
- [33] **S. M. RICHARDSON**, Lévêque solution for flow in an elliptical duct, Letters in Heat an Mass Transfer, Vol. 7, pp353-362, 1980.

- [34] **P. A. JAMES**, Can. J. Chem. Eng, 48, pp330, 1970.
- [35] **M. S. BHATTI**, Laminar flow in the entrance region of elliptical ducts, Journal of Fluids Engineering, Vol. 105, pp290-296, ASME, 1983.
- [36] **R. M. ABDEL-WAHED, A. E. ATTIA et M. A. HIFNI**, Experiments on laminar flow and heat transfer in an elliptical duct, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 27, N° 12, pp2397-2413, 1984.
- [37] **M. S. BHATTI**,« Heat transfer in the fully developed region of elliptical ducts with uniform wall heat flux, Journal of Heat transfer, Vol. 106, pp895-898, ASME, 1984.
- [38] **L. N. TAO**, On some laminar forced convection problems, Journal of Heat Transfer, Vol. 83, pp466-473, ASME, 1961.
- [39] **V. P. TYAGI**, Laminar forced convection of a dissipative fluid in a channel, Journal of Heat transfer, Vol. 88, pp161-169, ASME, 1966.
- [40] **T. YILMAZ et E. CIHAN**, General equation for heat transfer for laminar flow in ducts of arbitrary cross-sections, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36, N° 13, pp3265-3270, 1993.
- [41] **Y. M. HUANG et C. H. HO**, Study of the fluid flow in the elliptical duct by the method of characteristics, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 115, pp80-84, ASME, 1993.
- [42] **N. T. DUNWOODY**, Thermal results for forced heat convection through elliptical ducts, Journal of Applied Mechanics, pp1965-1970, ASME, 1962;
- [43] **D. E. GILBERT, R. W. LEAY et H. BARROW**, Theoretical analysis of forced laminar convection heat transfer in the entrance region of an elliptical duct, Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 16, pp1501-1503, 1973.
- [44] **K. VELUSAMY et VIJAY K. GARG**, Laminar mixed convection in vertical elliptic ducts, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 39, N°4, pp745-752, 1996.
- [45] **V. D. SAKALIS, P. M. HATZIKONSTANTINOU et N. KAFOUSIAS**, Thermally developing flow in elliptic duct with axially variable wall temperature distribution, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 45, pp25-35, 2002.

- [46] **Y. S. MUZYCHKA** et **M. M. YOVANOVICH**, Laminar forced convection heat transfer in the combined entry region of non-circular ducts, *Journal of Heat transfer*, Vol. 126, pp54-61, ASME, 2004.
- [47] **C. R. M. MAIA**, **J. B. APARECIDO** et **L. F. MILANEZ**, Heat transfer in laminar flow of non Newtonian fluids in ducts of elliptical section, *Int. J. Thermal Sciences*, Vol. 45, pp1066-1072, 2006.
- [49] **V. JAVERI**, Analysis of laminar thermal entrance region of elliptical and rectangular channels with the Kantorowich method, *Wärme Stoffubert*, Vol. 9, pp85-98, 1979.
- [50] **R. C. ASHOK** et **V. M. K. SASTRI**, Laminar forced convection heat transfer of a non-Newtonian fluid in a square duct, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 20, pp1315-1324, 1977.
- [51] **S. DOSS** et **K. MILLER**, Dynamic ADI methods for elliptic Equations, *Journal on Numerical Analysis*, Vol. 16, N°5, pp837-856, SIAM, Oct 1979.
- [52] **GREGOIRE ALLAIRE**, *Analyse numérique et optimisation*, les éditions de l'école polytechnique, Paris, 2005.
- [53] **J. DOUGLAS Jr.** et **H. H. RACHFORD Jr.**, on the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variable, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 82, pp421-439, AMS, 1956.
- [54] **D. W. PEACEMAN** et **H. H. RACHFORD Jr.**, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 3, N°1, pp28-41, SIAM, 1955.
- [55] **C. A. J. FLETCHER**, *Computational technique for fluid dynamics 1, Fundamental and General Techniques*, Second edition, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1988, 1991.
- [56] **D. WEIZHONG**, A Generalized Peaceman-Rachford scheme for solving two dimensional parabolic differential equations, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 12, N°4, pp353-360, 1997.

- [57] **S. DOSS** et **K. MILLER**, Dynamic ADI methods for elliptic equations, Journal Numerical Analysis, Vol. 16, N°5, pp837-856, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979.
- [58] **C. R. M. MAIA**, **J. B. APARECIDO** et **L. F. MILANEZ**, Pressure drop for flow of power-law fluids inside elliptical ducts, in: Proceeding of the 17th International congress of mechanical engineering, Sao Paulo, Brazil, paper 1705, 2003.
- [59] **ANDRE FORTIN**, Analyse numérique pour ingénieurs, Edition de l'école polytechnique de Montréal.
- [60] **R. P. CHHABRA** et **J. F. RICHARDSON**, Non-Newtonian flow and applied Rheology, Engineering application, Second Edition, Institute of Chemical Engineering, Butterworth-Heinemann, 2008.
- [61] **T. LOULOU**, **H. PEERHOSSAINI** et **J. P. BARDON**, Etude expérimentale de la conductivité thermique de fluides non-Newtoniens sous cisaillement application aux solutions de Carbopol 940, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.35, Issue 10, pp2557-2562, 1992.
- [62] **S. X. Q. LIN**, **X. D. CHEN**, **Z. D. CHEN** et **P. BANDOPADHAYAY**, Shear rate dependent thermal conductivity measurement of two fruit juice concentrates, Journal of Food Engineering, Vol. 57, Issue 3, pp217-224, 2003.
- [63] **A. LAWAL** et **A. S. MUJUMDAR**, The Effects Of Viscous Dissipation On Heat Transfer To Power Law Fluids In Arbitrary Cross-Sectional Ducts, Wärme-und Stoffübertragung, Vol. 27, pp437-466, 1992.
- [64] **H. C. BRINKMAN**, Heat effects in capillary flow I, Appl. Sci. Res, Vol. A2, pp120-124, 1951.
- [65] **R. I. TANNER**, Engineering Rheology, Oxford University press, New York, 2000.
- [66] **S. N. SINGH**, Heat transfer by laminar flow in a cylindrical tube, Applied Scientific Research, Vol.ume 7, Number 5, pp325-340, 1957.
- [67] **C. A. DEAVOURS**, An Exact Solution for the Temperature Distribution in Parallel Plate Poiseuille Flow, J. Heat Transfer 96, pp489, ASME, 1974.

[68] **Vi-DUONG DANG**, Heat Transfer of Power Law Fluid at Low Peclet Number Flow, J. Heat Transfer 105, pp542, ASME, 1983.

[69] **D. A. NIELD, A. V. KUZNETOV, M. XIONG**, Thermally developing forced convection in a porous medium: parallel plate channel with walls at uniform temperature, with axial conduction and viscous dissipation effects, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.46, Issue 4, pp643-651, 2003.

[70] **G. TUNC et Y. BAYAZITOGU**, Heat transfer for gaseous flow in microtubes with viscous heating, Proc. ASME Heat Transfer Division 366 (2), pp. 209–306, 2000.