

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université M'Hamed BOUGARA Boumerdès
Faculté des sciences de l'ingénieur
DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE
GROUPE MODELISATION EN MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

MEMOIRE Présenté par

M. BENSALEM ABDELHAFID

EN VUE DE L'OBTENTION DE DIPLOME DE MAGISTER EN GENIE
MECANIQUE

OPTION : PROCEDES DE FABRICATION

Thème :

*Modélisation mécanique et numérique de la mise en forme de
matériaux Rigide plastique basé sur la méthode sans maillage
'Meshless'*

Pr. Taoufik BOUKHAROUBA
Dr. Kamal NECIB
Dr. Idir BELAIDI
Dr. Kamal MOHAMMEDI
Dr. Aicha AIT-SAADA

Pr. USTHB
MC EMP Bordj Bahri
MC UMBB
MC UMBB
MC UMBB

Président
Examineur
Examineur
Examineur
Encadreur

Dédicaces

Je dédie ce travail à

*Mes très chers parents qui ont beaucoup sacrifié
à mon bonheur,*

Mes très chers frères et sœurs,

Mes amis,

à tous ceux qui m'aiment et que j'aime,

Bensalem

Abdelhafid

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier dieu tout puissant de m'avoir donné la force et le courage d'accomplir ce travail.

Je tiens à témoigner toute ma gratitude à Monsieur T. BOUKHAROUBA, Professeur à l'USTHB, qui m'a fait l'honneur d'avoir examiné et présidé ce jury.

Je remercie également Monsieur K. NECIB, Maître de conférence à l'EMP de bordj El-bahri pour avoir accepté de participer et examiner ce travail.

Je remercie également Monsieur K. MOHAMMEDI, Maître de conférence à l'Université de BOUMERDES, pour avoir accepté d'examiner ce mémoire et prendre part à ce jury.

Je tiens à remercier Monsieur I. BELAIDI, Maître de conférence à l'Université de BOUMERDES, pour m'avoir aidé et conseillé à réaliser ce travail.

Enfin, j'exprime toute ma reconnaissance à Madame A. AIT SAADA Maître de conférence l'université de BOUMERDES pour avoir dirigé ce travail et m'avoir guidé tout au long.

RESUME : La modélisation des procédés de mise en forme des pièces mécaniques est devenue une nécessité dans le contexte industriel actuel. Les méthodes sans maillage, développées depuis maintenant une dizaine d'années, permettent d'éviter de construire la solution à partir d'un maillage d'éléments, en prenant seulement en compte le nuage de noeuds.

Dans ce travail, nous exposons deux méthodes sans maillages C-NEM et MLS avec comparaison, nous exposons un test de convergence de la méthode MLS en utilisant un problème de poutre encastrée en élasticité linéaire. La solution numérique est comparée à la solution exacte du problème avec proposition de nouvelles fonctions de poids apportant plus précision. Ensuite, nous présentons les résultats de la modélisation mécanique et numérique du problème de mise en forme par forgeage en déformation plane d'un métal rigide-plastique avec validation numérique de plusieurs exemples de complexités variables. Nous avons développé un code de calcul pour la simulation de cette méthode avec logiciel MATLAB.

Mots-clés : simulation numérique des procédés, méthodes sans maillage, matériaux rigide plastique, méthode MLS.

ABSTRACT: The modeling of forming processes of mechanical parts has become a necessity in the current industrial context. Methods of meshless expanded past ten years, avoid building the solution from a mesh of elements, taking into account only the cloud of nodes.

In this work, we present two methods of meshless C-NEM and MLS with comparison, we outline a test for convergence of the MLS method using a beam in linear elasticity. The numerical solution is compared to the exact solution of the problem with proposing new weight function features providing more accurate. Then we present the results of the mechanical and numerical modelling of the problem of forming by forging in plane deformation of a metal rigid-plastic numerical validation of several examples of varying complexity. We have developed a computer code for simulation of this method with MATLAB software.

Keywords: Forming processes numerical simulation, meshless methods, rigid plastic metal, MLS methods

الملخص: آلية النموذج في تشكيل القطع الميكانيكية أصبحت ضرورة ملحة في الصناعة الحديثة . الطرق (meshless) طورت منذ عشرات السنين، سمحت بإجتياز تشكيل الحل إنطلاقاً من (maillage) العناصر، نأخذ فقط سحابة نقاط .

في عملنا هذا نظهر طريقتين من (meshless C-NEM , MIS)، مع المقارنة تظهر إختبار الدقة الطريقة MLS بإستعمال عمود مثبت في طرفه، الحل الرقمي يقارن مع الحل الصحيح ، مع إقتراح لدالة الثقل الجديدة لها دقة أكبر، و بعد ذلك نعرض نموذج ميكانيكي و رقمي لتشكيل مادة من نوع الصلب البلاستيكي مع تطبيق رقمي مع عدة أمثلة مختلفة التعقيدات. لقد طورنا برنامج حسابي لهذه الطريقة يعمل تحت MATLAB. الكلمات المفتاح: آلية التشكيل، طريقة (meshless)، مادة صلبة بلاستيكية، طريقة MLS

Sommaire

Introduction générale.....	04
----------------------------	----

Chapitre I : Méthode sans maillage

I.1. Généralités.....	06
I.1.1. Présentation générale de la méthode des éléments finis.....	06
I.1.1.1. Méthode de Galerkin.....	06
I.1.1.2. Introduction des éléments finis en 2D.....	07
I.1.2. Notion de la méthode sans maillage.....	08
I.1.3. Généralités sur les méthodes sans maillage, historique.....	08
I.1.4. Application des méthodes sans maillage.....	10
I.2. Méthode des éléments naturels (NEM)	11
I.2.1. Diagramme de Voronoï et voisins naturels.....	11
I.2.2. Fonctions de forme éléments naturels.....	12
I.2.2.1. Fonctions de forme de Sibson.....	13
I.2.2.2. Fonctions de forme de Laplace (ou <i>non-Sibsoniennes</i>).....	13
I.2.3. Support des fonctions de forme éléments naturels.....	14
I.2.4. Propriétés des fonctions de forme NEM.....	14
I.2.5. Intégration numérique.....	17
I.2.6. Stratégie de raffinement.....	19
I.2.7. Procédé informatique et numérique pour les fonctions de forme NEM.....	20
I.2.7.1. Aire du triangle.....	20
I.2.7.2. Centre et rayon du triangle	21
I.2.7.3. Calculs des fonctions de forme.....	22
I.3. Méthode des moindres carrés mobiles (MLS).....	27
I.3.1. Approximation classique au sens des moindres carrés.....	27
I.3.2. Définition de l'approximation MLS.....	29
I.3.3. Propriétés des fonctions de forme MLS.....	32
I.3.4. Choix des fonctions de base.....	34
I.3.5. Choix des fonctions de poids.....	35
I.3.6. Algorithmes pour le calcul efficace des fonctions de forme MLS.....	38
I.3.7. Imposition des conditions aux limites essentielles.....	44
I.3.7.1. Principe variationnelle modifié avec des multiplicateurs de Lagrange.....	44
I.3.7.2. Principe variationnelle modifié sans multiplicateurs de Lagrange.....	45
I.3.7.3. Principe variationnelle modifié avec une pénalité.....	46
I.3.7.4. Connexion à un maillage éléments finis.....	46
I.3.7.5. Propriété d'interpolation grâce à des fonctions de forme singulières.....	46
I.3.8. Intégration.....	47
I.4. Comparaison entre les méthodes NEM et MLS.....	49
I.5. Conclusion.....	51

Chapitre II : Modélisation mécanique de la mise en forme et méthode de calcul en rigide-plasticité

II.1. Rappels mathématiques sur la mise en forme.....	53
II.1.1. Tenseur de déformation.....	53
II.1.1.1. Tenseurs de déformation lagrangiens.....	53
II.1.1.2. Tenseurs de déformation eulériens.....	54
II.1.1.3. Autres mesures tensorielles de la déformation.....	54
II.1.2. Mesure scalaire de déformation.....	55
II.1.2.1. Normes des tenseurs de déformation.....	55
II.1.2.2. Déformation plastique équivalente.....	55
II.1.3. Exemples numériques.....	57
II.1.3.1. Traction simple.....	57
II.1.3.2. Cisaillement simple.....	59
II.2. Modélisation mécanique à cas générale.....	62
II.2.1. Equation de l'équilibre dynamique.....	62
II.2.2. Equation de l'incompressibilité.....	63
II.2.3. Les conditions aux limites.....	63
II.2.4. Les lois de comportement.....	64
II.2.4.1. Les lois rhéologiques.....	64
II.2.4.2. Elasticité.....	65
II.2.4.3. Elastoplasticité.....	66
II.2.4.3.1. Critère de plasticité.....	66
II.2.4.3.2. Loi d'écoulement plastique : règle de normalité.....	67
II.3. Méthodes de calcul en rigide plastique.....	69
II.3.1. Méthodes des tranches.....	69
II.3.1.1. Bipoinçonnement en déformation plane : produit mince.....	69
II.3.1.2. Bipoinçonnement d'une tôle épaisse.....	74
II.3.1.3. Laminage à froid de tôles minces.....	76
II.3.2. Méthodes extrémales.....	80
II.3.2.1. Méthode de la borne inférieure.....	80
II.3.2.2. Méthode de la borne supérieure.....	81
II.4. Conclusion.....	82

Chapitre III Analyse des erreurs et simulation de la mise en forme de matériaux à comportement rigide- plastique

III.1. Test de convergence de la méthode MLS	84
III.1.1. Poutre de Timochenko.....	84
III.1.2. Analyse des erreurs de la méthode MLS.....	87
III.2. Proposition de nouvelles fonctions de poids.....	91
III.2.1. Analyse des erreurs suivant la forme générale des nouvelles fonctions de poids.....	91
III.2.2. Analyse des erreurs des nouvelles fonctions de poids.....	94
III.3. Modélisation de matériaux rigides-plastiques.....	96
III.3.1. Modélisation mécanique de mise en forme de matériaux rigides plastiques.....	96
III.3.2. Analyse numérique de mise en forme de matériaux rigides plastiques.....	98

III.3.3. Pseudo code pour mise en forme de matériau plastique par MLS	100
III.4. Validation numérique.....	102
III.4.1. Caractéristiques du matériau choisi.....	102
III.4.2. Conditions aux limites.....	102
III.4.3. Choix des paramètres numériques.....	103
III.4.4. Exemples d'application.....	104
III.5. Conclusion.....	115
Conclusion et perspectives.....	116
Références bibliographiques.....	117
Bibliographie générale.....	122
Annexe.....	123

Introduction générale

La modélisation des procédés de mise en forme des pièces mécaniques est devenue une nécessité dans le contexte industriel actuel. Comme ces procédés sont très complexes, il est difficile, même impossible, de les traiter par des méthodes analytiques. En 1960, la méthode des éléments finis (MEF) a été introduite et a permis de résoudre de nombreux problèmes de mécanique et de génie civil. Beaucoup de travaux ont été consacrés à ce domaine. En mécanique des matériaux, la MEF est encore la plus utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Bien que cette méthode soit basée sur un fondement très solide, sa mise en œuvre reste difficile et coûteuse dans un certain nombre de problèmes, notamment dans le domaine de la modélisation des grandes déformations en formulations Lagrangiennes.

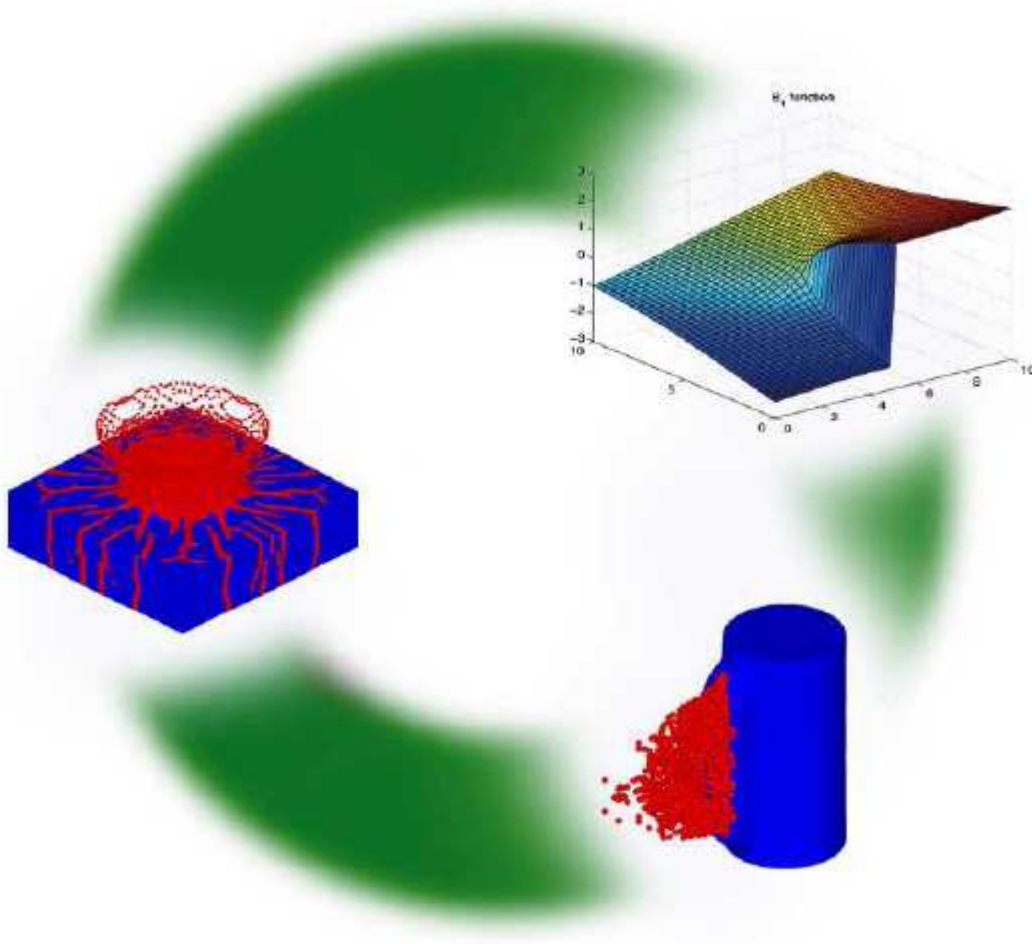
En effet des procédures de remaillage sont nécessaires en grandes déformations car le maillage est nécessairement très déformé ayant pour conséquences : une perte de précision, des problèmes de convergence ou même un arrêt intempestif de la simulation. Les méthodes sans maillage ont été développées dans le but d'alléger les problèmes liés aux étapes de remaillage dans la MEF et sont basées sur des méthodes d'interpolation purement nodales (c'est-à-dire sans recours à la notion d'élément). L'absence de remaillage est un avantage important en termes de gain de précision et de gain de temps de calcul.

Le but de notre travail est de proposer un code de calcul permettant la modélisation et la simulation d'un procédé de mise en forme par forgeage d'un matériau rigide-plastique en deux dimensions avec une méthode sans maillage sous environnement MATLAB et trouver les moyens d'augmentation de la performance de la méthode.

Ce présent travail est composé de trois chapitres dont le premier traite des généralités et des fondements mathématiques sur les méthodes sans maillage avec une description et une comparaison des deux grandes méthodes de type sans maillage à savoir : la méthode des éléments naturels NEM et la méthode des moindres carrés mobiles (moving least squares) MLS. Le second chapitre est un rappel approfondi des différentes lois de comportement en mécanique des milieux continus. La notion de déformation en mise en forme et ses paramètres essentiels est définie avec des exemples simples à traiter, ensuite, des formulations principales et générales sur le procédé de mise en forme ont été exposées. Dans le chapitre trois, nous exposons un test de convergence de l'une des méthodes citée ci-dessus (MLS) en utilisant un problème de poutre encastree en élasticité linéaire. La solution numérique est comparée à la solution exacte du problème avec proposition de nouvelles fonctions de poids apportant plus précision. Ensuite, nous présentons les résultats de la modélisation mécanique et numérique du problème de mise en forme par forgeage en déformation plane d'un métal rigide-plastique avec validation numérique de plusieurs exemples de complexités variables.

Chapitre I.

Méthode sans maillage



Nous débutons ce chapitre par des généralités sur les méthodes des éléments finis et l'introduction à la méthode sans maillage. Ensuite nous décrivons deux méthodes sans maillage, la méthode des éléments naturels (NEM) et la méthode des moindres carrés mobiles (MLS). Dans la dernière partie, nous faisons une comparaison des deux méthodes suivie d'une conclusion.

I.1. Généralités

Nous débuterons ce chapitre par la présentation de la méthode des éléments finis [1] (définitions et théorèmes principaux), car c'est la méthode la plus courante au sein du milieu scientifique et notamment en mécanique des petites déformations. Ensuite, nous exposerons la méthode sans maillage et ses applications.

I.1.1. Présentation générale de la méthode des éléments finis

I.1.1.1. Méthode de Galerkin

Divers problèmes d'équations aux dérivées partielles pouvaient se mettre sous la forme vibrationnelle suivante :

$$\bullet \text{ déterminer } u \in E \text{ tel que } \rightarrow a(u, v) = L(u), \quad \forall v \in E \quad (\text{I.1.1})$$

Avec : $a(u, v)$ Forme bilinéaire,
 $L(u)$ Forme linéaire,
 E Espace vectoriel normé de dimension infinie.

Soit $E_h \subset E$ un sous-espace vectoriel de E de dimension finie m ; on considérera que E_h est engendré par les fonctions de base $\varphi_j(x)$, où $j = 1, \dots, m$. On cherche la solution du problème, qu'on notera u_h , pour spécifier qu'elle appartient à E_h , sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions tests $\varphi_j(x) \in E_h$, soit :

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^m \mu_j \varphi_j(x) \quad (\text{I.1.2})$$

Et l'on considère le problème en dimension finie associé au problème (I.1.1), que l'on écrit comme suit :

$$\bullet \text{ déterminer } u_h \in E_h \text{ tel que } \rightarrow a(u_h, v_h) = L(u_h), \quad \forall v_h \in E_h \quad (\text{I.1.3})$$

Théorème 1. La forme bilinéaire étant symétrique, alors la résolution du problème (I.1.3) aboutit à la résolution d'un système algébrique linéaire dont la matrice $A = (a(\varphi_j, \varphi_i))$ est symétrique.

Théorème 2. Soit u la solution du problème (I.1.1) et u_h celle du problème (I.1.3), on a alors la majoration :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in E_h} \|u - v_h\|_E, \quad \forall v_h \in E_h \quad (\text{I.1.4})$$

I.1.1.2. Introduction des éléments finis en 2D

On effectue une « triangulation » du domaine Ω , c'est-à-dire que l'on suppose que l'on peut découper Ω en M triangles K_j , tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^M K_i, \text{ avec } K_i \cap K_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{un sommet, où } i \neq j \\ \text{un côté,} \end{cases} \quad (\text{I.1.6})$$

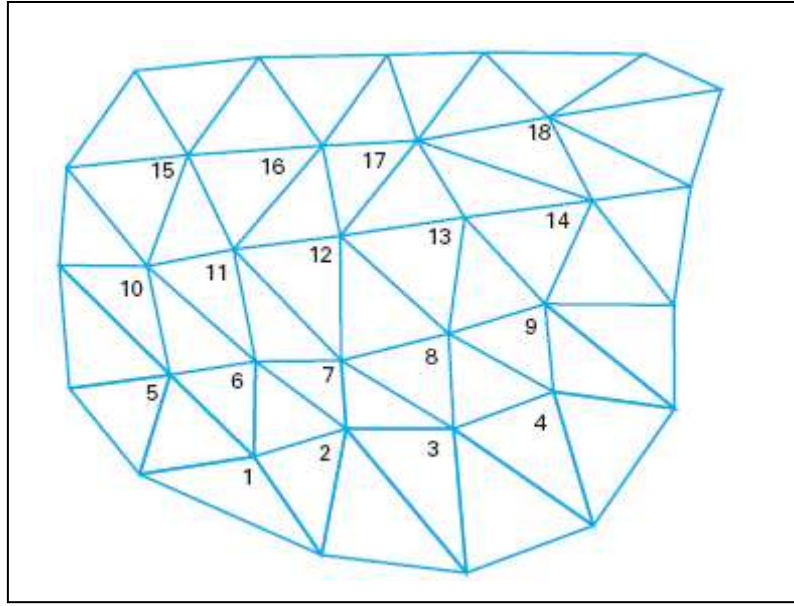


Figure I.1.1. Exemple de maillage par des triangles

Théorème 3. Soit un triangle K dont les sommets A_i ont les coordonnées (x_i, y_i) . Alors il existe un unique polynôme $p(x, y) \in P_1$ de degré inférieur ou égal à un, prenant des valeurs données arbitraires p_i , aux sommets A_i , avec $1 \leq i \leq 3$.

Théorème 4. Soit M un point quelconque de coordonnées (x, y) intérieur au triangle K de sommets non alignés A_i ; soit (x_i, y_i) , les coordonnées des sommets du triangle. On appelle coordonnée barycentrique du point M par rapport aux trois points A_i , les scalaires $\lambda_i(M) = \lambda_i(x, y)$, vérifiant les relations ci-dessous :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x, y) &= 1 \\ \sum_{i=1}^3 x_i \lambda_i(x, y) &= x \\ \sum_{i=1}^3 y_i \lambda_i(x, y) &= y \end{aligned} \quad , \text{ avec } 1 \leq i \leq 3. \quad (\text{I.1.7})$$

Théorème 5. Les coordonnées barycentriques du point M , $\lambda_i(x, y)$ sont des polynômes de degré 1 en x et en y , vérifiant de plus $\lambda_i(A_j) = \delta_{i,j}$. Le polynôme $p(x, y)$ de degré un prenant les valeurs données arbitraires p_i , aux sommets s'exprime au moyen des coordonnées barycentriques de la façon suivante :

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^3 p_i \lambda_i(x, y) \quad (\text{I.1.8})$$

Et la restriction de $p(x, y)$ pour un point M appartenant au côté $A_i A_k$ est un polynôme de degré 1 qui ne dépend que des valeurs p_i et p_k .

I.1.2. Notion de la méthode sans maillage

La méthode est dite sans maillage car elle ne demande qu'un ensemble de noeuds et une description de la frontière pour construire une solution approchée [2]. Cette opposition entre la méthode sans maillage et la méthode des éléments finis est schématisée sur la figure I.1.2. Dans cette dernière, il faut découper le domaine en éléments. La valeur d'une certaine fonction approchée en un point du domaine dépend de l'élément auquel ce point appartient par interpolation entre les valeurs de la fonction aux noeuds qui appartiennent à cet élément. Dans la méthode sans maillage, on associe à chaque noeud une fonction poids, non nulle sur un petit domaine appelé domaine d'influence. La valeur de la fonction approchée en un point dépend des noeuds dont le domaine d'influence comprend le point par approximation à partir des valeurs de la fonction aux noeuds par une technique appelée l'approximation au sens des moindres carrés mobiles (ou moving least squares approximation, approximation MLS).

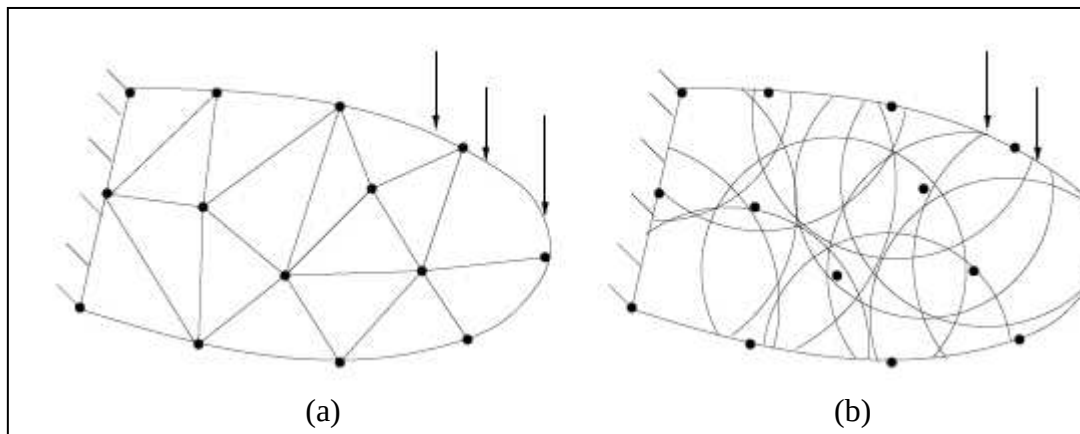


Figure I.1.2. (a) Méthode des éléments finis ; (b) méthode sans maillage

I.1.3. Généralités sur les méthodes sans maillage, historique

Depuis de nombreuses années, la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies, ou des volumes finis se sont imposées pour la résolution des équations aux dérivées partielles décrivant les systèmes physiques et mécaniques. Cependant, ces techniques souffrent de limitations pour certaines classes de problèmes.

Ces inconvénients ont entraîné le développement, depuis un certain nombre d'années, d'une nouvelle classe de méthodes appelées *méthodes sans maillage*.

Dans toute méthode numérique de résolution des équations aux dérivées partielles, une étape nécessaire est la recherche de la solution du problème dans un espace fonctionnel de dimension finie, en se basant généralement sur une discrétisation spatiale du domaine. Ceci permet d'obtenir un nombre fini d'inconnues dans le problème. Contrairement à l'approche éléments finis dans laquelle l'approximation est liée aux éléments, dans les méthodes sans maillage l'approximation est construite exclusivement à l'aide des données nodales. Même si certaines approches sans maillage comme la NEM utilisent néanmoins un maillage sous-jacent (pour définir les connectivités et réaliser une partition du domaine pour l'intégration), celui-ci n'est pas utilisé pour construire l'interpolation, et sa qualité n'influe donc pas sur la qualité des résultats. En contrepartie, un certain nombre de difficultés apparaissent dans les méthodes sans maillage. Néanmoins, ces techniques semblent prometteuses pour remédier aux difficultés rencontrées dans la méthode des éléments finis. Nous présentons ici un bref historique des méthodes sans maillage les plus utilisées. Bien que l'origine des méthodes sans maillage remonte à la fin des années 70, l'effort de recherche consacré à ce thème jusqu'au début des années 90 est resté très faible. Les méthodes sans maillage furent initiées en 1977 avec la méthode *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH) [3], qui fut créée à l'origine pour la simulation des phénomènes astrophysiques non bornés tels que l'explosion des étoiles ou encore les mouvements dans les nuages de poussière. Le nombre de publications concernant cette méthode fut alors modeste et seules quelques améliorations furent apportées à cette période [4], [5], sans réelles études concernant la qualité de la solution obtenue pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Plus tard, Swegle, Hicks and Attaway [6] ont montré l'origine de certains problèmes numériques de la méthode, tels que le phénomène d'instabilité sur les bords libres (*tensile instability*) et ont proposé d'inclure une viscosité artificielle pour stabiliser le phénomène. Johnson et Beissel [7] ont proposé une technique pour améliorer le calcul des contraintes. L'avancée la plus notable fut l'introduction d'une fonction de correction dans le noyau d'approximation par Liu et al [8] pour pouvoir obtenir la consistance linéaire (voir chapitre suivant pour la définition) ou d'ordre supérieure. Liu *et al* ont également étendu la méthode aux formulations variationnelles, alors que la méthode SPH est une méthode de type collocation. L'introduction d'une fonction de correction dans le noyau d'approximation des méthodes SPH a donné naissance à la méthode *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM). Partant d'une idée différente, Nayroles, Thouzot et Villon [9] ont proposé d'utiliser une approximation de type moindres carrés mobiles dans un schéma de discrétisation de type Galerkin. La méthode fut alors baptisée *méthode des éléments diffus*. La technique dite Element Free Galerkin (EFG) [10] proposée par Belytschko *et al.* est une modification de la méthode des éléments diffus dans laquelle les dérivées des fonctions de forme sont calculées exactement (il faut souligner cependant que les dérivées au sens diffus sont plus simples à calculer et convergent vers les dérivées exactes). Cette classe de méthodes est convergente et stable, mais plus coûteuse que la méthode SPH. Plus récemment une avancée dans la compréhension théorique de ces méthodes a été fournie grâce aux travaux de Duarte et Oden [11] et de Babuska et Melenk [12]. Ces auteurs ont montré que lorsque les fonctions de forme ϕ_i d'un schéma d'approximation forment une *partition de l'unité* ($\sum_{i=1}^n \phi_i = 1$), il est alors possible d'enrichir ces fonctions de forme avec d'autres fonctions quelconques, reproduites alors exactement par le schéma d'approximation.

Ces auteurs ainsi que Liu et al [8] furent également les premiers à prouver la convergence de cette classe de méthodes.

Les avantages et inconvénients de ces méthodes ont été discutés et comparés par Belytschko *et al.* [13], [14], Liu et al [8], [15], et dans le cas de quelques problèmes non linéaires par Chen et al [16]. Belytschko a également montré dans [17], que les méthodes sans maillage basées sur les moindres carrées mobiles (EFG, RKPM) construisent des approximations strictement identiques. D'autres approches ont été proposées comme la méthode des différences finies généralisées, pouvant être appliquées pour des nuages de noeuds quelconques. Une des contributions les plus anciennes fut proposée par Perrone et Kao [18], mais la plus robuste de ces méthodes fut développée dans les années 80 par Liszka et Orkisz [19]. Récemment, les améliorations apportées à ces méthodes les rapprochent de plus en plus des méthodes de type moindre carrés mobiles et de type partition de l'unité. Breitkopf et al ont amélioré la convergence de ce type de méthodes (consistance quadratique) par le biais d'une *double grille* pour construire l'approximation [20].

Une méthode sans maillage basée sur des principes totalement différents a émergé très récemment sous le nom de *méthode des éléments naturels* [21], [22], [23].

Cette technique utilise des fonctions de forme très particulières, basées sur les constructions géométriques telles que le *diagramme de Voronoï* et la *triangulation de Delaunay*.

Nous détaillerons cette méthode dans la partie 3.1. Cette technique, comme nous le montrerons par la suite, offre presque tous les avantages des méthodes sans maillage tout en éliminant un grand nombre d'inconvénients. De plus, les fonctions de forme, bien que construites uniquement à partir des noeuds, deviennent linéaires sur les bords du domaine, ce qui permet de les substituer directement aux fonctions de forme éléments finis (dans le cas des éléments finis linéaires) dans un code de calcul conçu au départ sur la base d'une interpolation éléments finis.

I.1.4. Application de la méthode sans maillage

Les méthodes sans maillage ont été utilisées avec succès dans un très grand nombre d'applications où l'utilisation de la méthode des éléments finis est limitée par les problèmes de remaillage incluant, de manière non exhaustive : l'étude de la fissuration statique et la propagation des fissures non-coïncidentes avec le maillage [24], [14], [25], [26], [17], l'analyse des matériaux hyperélastiques en très grandes déformations [27], [28], la mise en forme des matériaux métalliques élastoplastique en grandes déformations [29], [30], [31]..., les problèmes de grandes déformations dynamiques [32], [33], la propagation des bandes de cisaillement [15], [34], [35], l'apparition de plis dans l'emboutissage des tôles [36], la fissuration ductile avec endommagement [37], le traitement de problèmes d'interaction fluide-structure dans lesquels une formulation lagrangienne est utilisée pour décrire le mouvement du fluide [38], l'injection des polymères [39], la simulation de l'usinage [40] ou encore l'extrusion des métaux [41].

I.2. Méthode des éléments naturels (NEM)

I.2.1. Diagramme de Voronoï et voisins naturels

Les notions de voisins naturels et d'interpolation basée sur les éléments naturels ont été introduites par Sibson [42] pour réaliser des interpolations à partir d'ensembles de points très irréguliers. Cette interpolation est basée sur les constructions géométriques connues sous le nom de diagramme de Voronoï et de triangulation de Delaunay. Le concept de diagramme de Voronoï a été introduit à l'origine par les mathématiciens (Dirichlet, 1850 ; Voronoï, 1908) [43] et plus tard appliqué dans de nombreux domaines scientifiques.

Le diagramme de Voronoï est défini de la manière suivante : un diagramme de Voronoï d'un ensemble de points dans R^m divise l'espace de dimension m en régions T_i , chacune associée à un nœud n_i , telles que tout point à l'intérieur d'une de ces régions soit plus proche du nœud définissant la cellule que de n'importe quel autre nœud. Un exemple de diagramme de Voronoï dans le cas 2D est présenté dans la figure I.2.1.

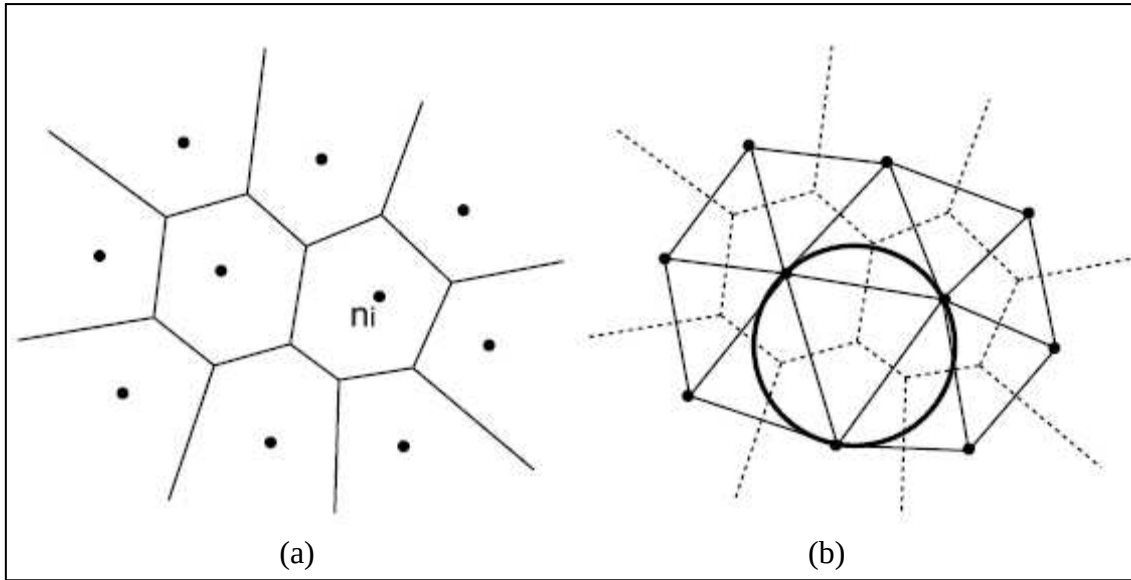


Figure. I.2.1. (a) Diagramme de Voronoï d'un ensemble de points dans le plan ; (b) Triangulation de Delaunay associée et cercle circonscrit à un triangle.

Le diagramme de Voronoï est unique pour un ensemble de points donné. Il réalise une partition de l'espace et peut être étendu à n'importe quelle dimension. Le diagramme de Voronoï est formellement défini par :

$$T_i = \{x \in R^m : d(x, x_i) < d(x, x_j), \forall j \neq i\}, \quad \forall i \quad (\text{I.2.1})$$

où T_i est une cellule de Voronoï associée à un nœud n_i , x est la position d'un point quelconque x , x_i définit les coordonnées du nœud n_i , et $d(x, x_i)$ est la distance entre le nœud n_i et un point x .

Les voisins naturels d'un nœud sont les nœuds associés aux cellules de Voronoï voisines, ou encore qui sont connectées au nœud par une arête d'un triangle (tétraèdre en 3D) de Delaunay. On peut remarquer que dans tous les cas, même lorsque la disposition des nœuds est irrégulière, que la distance entre nœuds est importante dans certaines zones ou encore que la distribution nodale est fortement anisotrope, l'ensemble des voisins naturels d'un nœud représente toujours le meilleur choix possible de nœuds voisins. Ces nœuds sont donc de bons candidats pour définir un schéma d'interpolation locale.

1.2.2. Fonctions de forme éléments naturels

Les fonctions de forme éléments naturels ont été introduites par Sibson [42] pour construire une interpolation à partir de nuages de nœuds quelconques. Les concepts de voisin le plus proche et de voisins naturels sont associés aux cellules de Voronoï décrites précédemment, appelées encore cellules du premier ordre. Par extension, on peut définir des cellules de Voronoï d'ordre supérieur (à l'ordre k , $k > 1$). Le cas de l'ordre 2 a un intérêt particulier. Une cellule de Voronoï du second ordre T_{ij} est associée à un couple de nœuds (k nœuds pour l'ordre k), telle que T_{ij} est la zone dans laquelle tout point x a pour plus proche voisin le nœud n_i et pour deuxième voisin le plus proche le nœud n_j . La cellule du second ordre T_{ij} est définie formellement par [42] :

$$T_{ij} = \{x \in R^m : d(x, x_i) < d(x, x_j) < d(x, x_k); \forall k \neq i, \forall k \neq j, i \neq j\} \quad (I.2.2)$$

Si l'on considère l'exemple 2D de la figure I.2.2, la cellule du premier ordre T_x associée au point x est le polygone ($bcef$) et la cellule du second ordre T_{xi} associée au point x et au nœud n_i est le polygone ($abcd$).

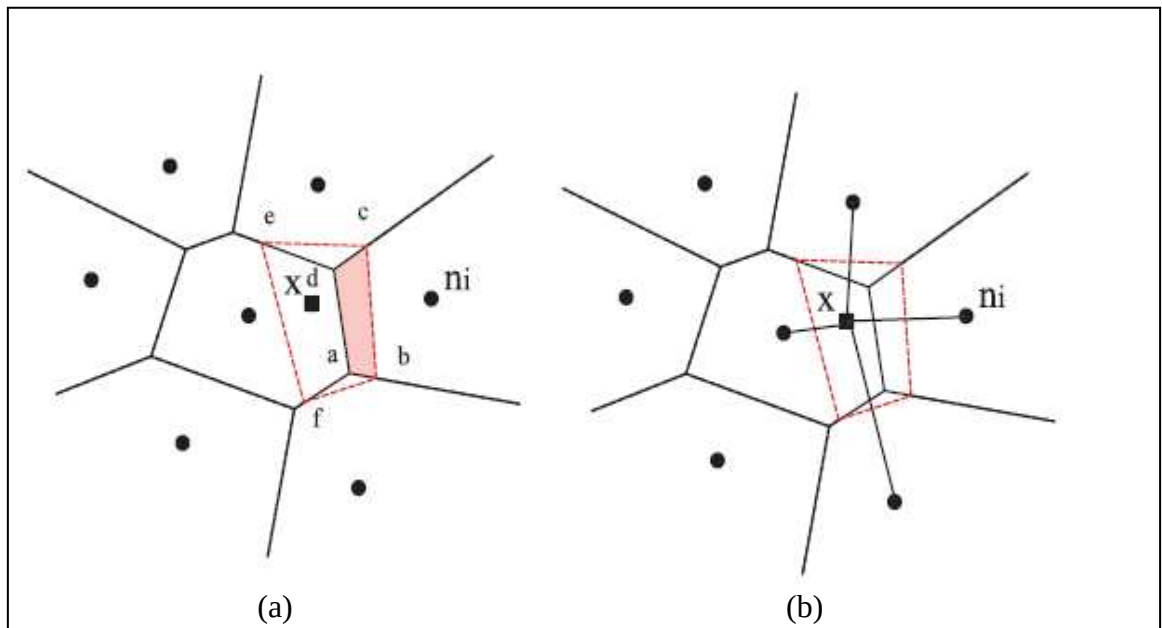


Figure. I.2.2. (a) Calcul des fonctions de forme de Sibson; (b) Calcul des fonctions de forme de Laplace.

Pour calculer la valeur de l'interpolation en un point x , on construit la cellule de Voronoï associée au point x dans le diagramme de Voronoï du nuage de points. L'expression des fonctions de forme est donnée ci-dessous.

I.2.2.1. Fonctions de forme de Sibson

Soit k_x une mesure de Lebesgue (longueur en 1D, aire en 2D, volume en 3D) de la cellule du premier ordre T_x et k_{xi} la mesure de Lebesgue de la cellule du second ordre T_{xi} . La fonction de forme calculée au point x associé au nœud n_i est défini comme le rapport entre k_{xi} et k_x , soit :

$$k_x = \sum_{i=1}^n k_{xi},$$

$$\phi_i(x) = \frac{k_{xi}}{k_x} \quad (I.2.3a, b)$$

$$\phi_{i,j}(x) = \frac{k_{xi,j} - \phi_i(x)k_{x,j}}{k_x} \quad \text{où } j = 1, 2.$$

Si l'on considère l'exemple 2D de la figure I.2.2 (a), la fonction de forme calculée en x et associée au nœud n_i est donnée par :

$$\phi_i(x) = \frac{\text{Aire}(abcd)}{\text{Aire}(bcef)} \quad (I.2.4)$$

I.2.2.2. Fonctions de forme de Laplace (ou *non-Sibsoniennes*)

Il existe d'autres fonctions de forme similaires de type éléments naturels, appelées fonctions de forme de Laplace ou fonctions de forme non-Sibsoniennes [14]. Soit f_i la mesure de Lebesgue de la face de Voronoï (longueur en 2D et aire en 3D) séparant le point x du nœud n_i et d_i la distance euclidienne entre x et n_i (voir figure I.2.2 (b)). Les fonctions de forme sont alors données par l'expression suivante:

$$\alpha_i(x) = \frac{f_i(x)}{d_i(x)} \quad (I.2.5)$$

$$\text{où } \phi_i(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\sum_{j=1}^n \alpha_j(x)}$$

n étant le nombre de voisins naturels. Les fonctions de forme de Laplace sont moins coûteuses à calculer que les fonctions de forme de Sibson, car elles ne nécessitent que l'évaluation de longueurs (aires en 3D), alors que les fonctions de forme de Sibson nécessitent l'évaluation des aires (volumes en 3D) des intersections entre cellules de Voronoï. Cependant, les fonctions de forme de Laplace possèdent seulement une

continuité C^0 sur les cercles de Delaunay alors que les fonctions de Sibson sont C^1 sur ces mêmes cercles.

I.2.3. Support des fonctions de forme éléments naturels

Toutes les fonctions de forme de type éléments naturels citées précédemment possèdent un support (domaine d'influence) défini comme l'union des n cercles (sphères en 3D) passant par les sommets des triangles (tétraèdres en 3D) de Delaunay contenant le nœud n_i . Ce support est local (compact) et est automatiquement défini par le voisinage d'un nœud n_i , aucun paramètre associé à sa taille n'est impliqué, contrairement au support des fonctions de forme de type moindres carrés mobiles ou RKPM. Ce support représente toujours le meilleur voisinage, même lorsque la distribution relative des nœuds est fortement irrégulière ou anisotrope. Une comparaison entre les supports NEM et moindres carrés mobiles est donnée dans la figure I.2.3

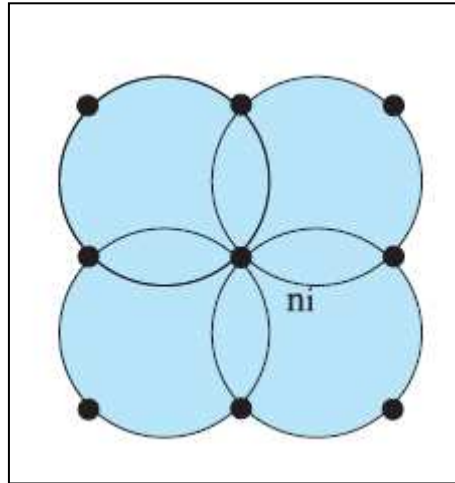


Figure. I.2.3. Supports d'éléments naturels.

I.2.4. Propriétés de l'interpolation éléments naturels

Braun et Sambridge [22] ont été les premiers à appliquer les fonctions de forme de Sibson dans un schéma d'approximation de type Galerkin pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans lequel les fonctions d'approximation et les fonctions test sont toutes deux évaluées par les fonctions de forme de Sibson. Ces auteurs ont nommé cette méthode la méthode des éléments naturels (Natural Element Method). Par la suite, nous désignerons cette méthode sous le sigle NEM.

Ainsi, l'interpolation d'une fonction quelconque $u^h(x)$ (scalaire, vectorielle. . .) est donnée par :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi(x) u_i \quad (I.2.6)$$

où u_i ($i \in [1, \dots, n]$) représente $u(x_i)$ (x_i sont les coordonnées du nœud n_i), n est le nombre de voisins naturels du point x , et $\phi_i(x)$ est la fonction de forme associée au nœud n_i et donnée par l'équation (I.2.4) ou (I.2.5).

- **La propriété du delta de Kroenecker**

Les fonctions de forme NEM partagent la propriété suivante avec les fonctions de forme éléments finis :

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (I.2.7)$$

Ce qui implique $u^h(x_i) = u_i$. Ainsi, avec la propriété de linéarité de l'interpolation sur les bords convexes (voir ci dessous), l'imposition directe des conditions aux limites de type Dirichlet (déplacements, températures. . .) est direct pour les nœuds concernés, ce qui est une des principales difficultés rencontrées dans les méthodes sans maillage habituelles.

- **La partition de l'unité**

Par construction nous avons la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega \quad (I.2.8)$$

Cette propriété assure la reproduction des champs constants, mais autorise surtout l'enrichissement de ces fonctions de forme avec n'importe quelle autre fonction dans le cadre de la partition de l'unité proposée par Melenk et Babuška [12].

- **Consistance linéaire**

Sibson [42], Piper [44] et Hiyoshi et Sugihara [HIY02] ont démontré que les fonctions de forme NEM possèdent par construction la consistance linéaire, c'est-à-dire :

$$x = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) x_i \quad (I.2.9)$$

ce qui implique qu'avec l'équation (I.2.8), les fonctions de forme NEM peuvent reproduire exactement l'espace des champs linéaires.

Une autre propriété particulièrement intéressante est la linéarité des fonctions de forme sur les bords des domaines convexes (voir démonstration dans [21]), ce qui, combiné avec la propriété du delta de Kronecker, rend l'imposition des conditions aux limites de type Dirichlet comme dans le cas des éléments finis. Cependant, la propriété n'est plus vérifiée sur les bords des domaines non convexes, comme nous le détaillerons plus tard.

- **Linéarité sur les bords convexes**

Les fonctions de forme NEM sont les seules fonctions de forme meshless strictement linéaires sur les bords convexes du domaine. Nous reprenons ici pour le cas bidimensionnel la démonstration faite par Sukumar [21] de cette propriété. Soit un domaine convexe Ω modélisé par un ensemble de noeud N et dont le bord $\partial\Omega$ de l'enveloppe convexe $CH(N)$ est discrétisé par un ensemble de segments linéaires. Sur le bord du domaine convexe, la fonction d'approximation $u^h(x)$ est strictement linéaire entre deux noeuds appartenant à un segment du bord. On cherche à évaluer la fonction d'approximation $u^h(\xi)$ au point ξ le long de l'arête $n_1 - n_2$ (voir figure I.2.4). Comme on le voit sur cette figure, le point ξ a quatre voisins, car la cellule du premier ordre T_ξ partage les faces avec les noeuds n_1, n_2, n_3 et n_4 . Nous utilisons un système de coordonnées locales ξ le long de l'arête $n_1 - n_2$ telle que $\xi = 0$ au noeud n_1 et $\xi = 1$ au noeud n_2 . Par définition, les fonctions de forme sont données dans ce cas par :

$$\phi(\xi) = A_i(\xi) / A(\xi) \quad (I.2.10)$$

$$\text{où } A(\xi) = \sum_{i=1}^n A_i(\xi)$$

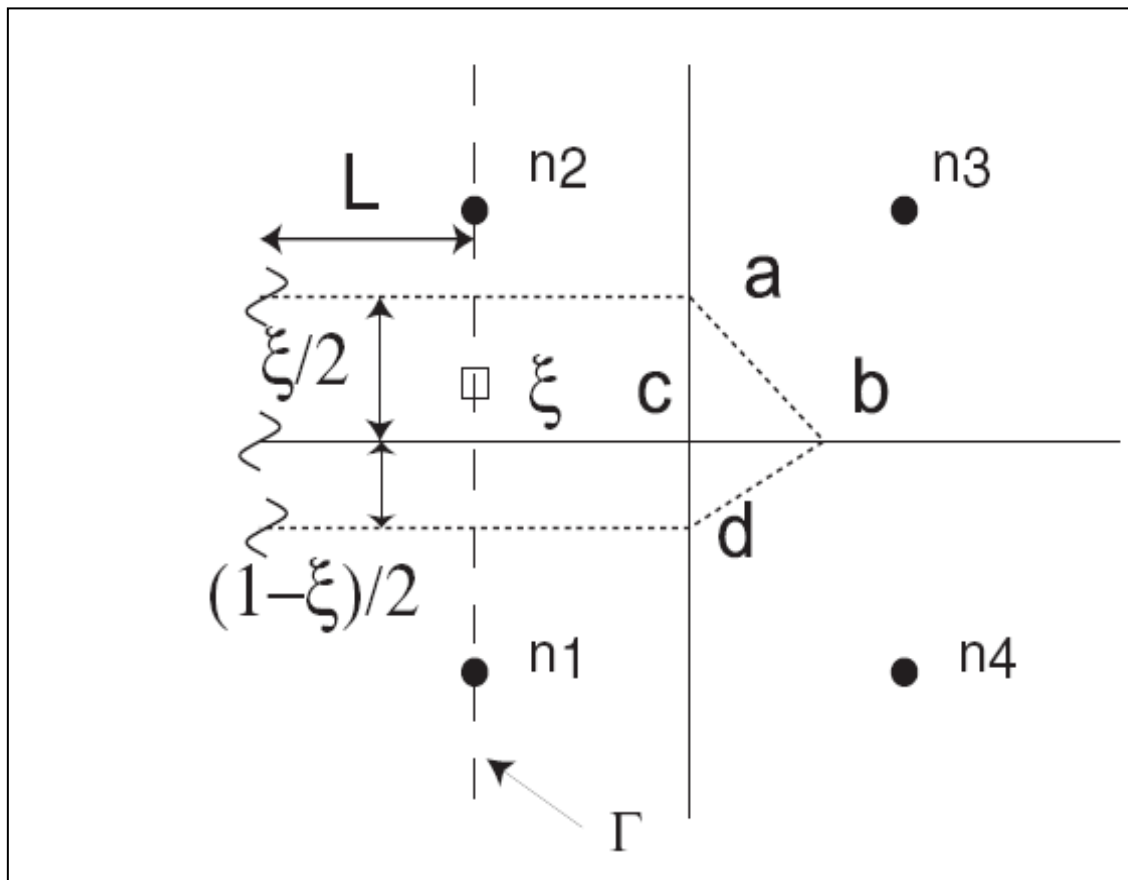


Figure I.2.4. Linéarité des fonctions de forme NEM sur les bords.

Les cellules de Voronoi des noeuds du bord convexe sont non bornées. Nous pouvons alors exprimer A_1, A_2, A_3, A_4 comme suit :

$$\begin{aligned} A_1 &= L\xi_1 + \delta_1 & A_2(\xi) &= L\xi_2 + \delta_2 \\ A_3(\xi) &= \delta_3 & A_4(\xi) &= \delta_4 \end{aligned} \quad (I.2.11)$$

Où $\xi_1 = (1-\xi)/2$, $\xi_2 = (\xi)/2$ et $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ et δ_4 sont finies. Par exemple, sur la figure 3.4,

δ_3 est donnée par l'aire du triangle Δ_{abc} . En utilisant l'Equation. (I.2.10), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L(1-\xi) + 2\delta_1}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 + 2\delta_4} \\ \phi_2(\xi) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L\xi + 2\delta_2}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 + 2\delta_4} \\ \phi_3(\xi) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\delta_3}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 + 2\delta_4} \\ \phi_4(\xi) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\delta_4}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 + 2\delta_4} \end{aligned} \quad (I.2.12)$$

En prenant la limite $L \rightarrow \infty$ dans les équations précédentes, on obtient : $\phi_1(\xi) = 1 - \xi$, $\phi_2(\xi) = \xi$, $\phi_3(\xi) = \phi_4(\xi) = 0$. Ainsi, le long de l'arête $n_1 - n_2$, seules les fonctions de forme associées aux noeuds n_1 et n_2 sont non nulles. Ce résultat est valable pour un nombre de voisins quelconque. En utilisant l'équation précédente, la fonction d'approximation est bien linéaire et s'écrit :

$$u^h(\xi) = (1-\xi)u_1 + \xi u_2 \quad (I.2.13)$$

Associée à la propriété donnée par l'Equation. (I.2.7), on peut remarquer que bien qu'étant de continuité C^∞ à l'intérieur du domaine (sauf sur les cercles de Delaunay et aux noeuds), les fonctions de forme NEM dégénèrent en fonctions de forme linéaires sur les bords convexes

I.2.5. Intégration numérique

Récemment, de nouveaux schémas d'intégration ont été introduits dans le cadre des méthodes sans maillage. Les schémas d'intégration utilisant un schéma de type Gauss ne sont pas adaptés aux méthodes sans maillage car généralement, le support des fonctions de forme ne coïncide pas avec la cellule d'intégration choisie. Une autre source d'erreur provient du fait que les fonctions de forme sont non polynomiales, ce qui rend l'intégration de Gauss non optimale [45]. D'un autre côté, l'intégration nodale directe, en utilisant les noeuds comme points d'intégration, conduit à des instabilités

numériques [26]. Dans cette étude, nous utilisons le schéma d'intégration proposé par Chen et al [27] : l'intégration nodale stabilisée (Stabilized Conforming Nodal Integration -SCNI). Dans cette approche, un lissage du gradient au nœud est effectué dans le but de stabiliser l'intégration nodale.

Dans la méthode d'intégration de type SCNI, un gradient moyen est défini au point d'intégration (nœud) [27] :

$$\tilde{\nabla} u^h(x) = \frac{1}{A_i} \int_{\Omega_i} \nabla u^h(x) d\Omega \quad (\text{I.2.14})$$

où les x_i sont les coordonnées du nœud n_i , et Ω_i son domaine représentatif (cellule de Voronoï), A_i étant sa mesure.

Ainsi la déformation (exprimée sous forme de vecteur) est donnée, dans le contexte de l'élasticité plane en HPP, par :

$$\tilde{e}^h(x_i) = \frac{1}{A_i} \int_{\Omega_i} e^h(x) d\Omega = \frac{1}{A_i} \int_{\Omega_i} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_1^h(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2^h(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1^h(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^h(x)}{\partial x_1} \end{array} \right\} d\Omega \quad (\text{I.2.15})$$

A présent, en appliquant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\tilde{e}^h(x_i) = \frac{1}{A_i} \int_{\Gamma_i} \left\{ \begin{array}{c} u_1^h(x) v_1 \\ u_2^h(x) v_2 \\ u_1^h(x) v_2 + u_2^h(x) v_1 \end{array} \right\} d\Gamma \quad (\text{I.2.16})$$

où comme indiqué précédemment Ω_i est la cellule de Voronoï contrainte associée au nœud n_i dont le bord est noté par Γ_i (avec v_1 et v_2 les composantes du vecteur unitaire normal à Γ_i), A_i étant son aire.

On obtient après intégration :

$$\tilde{e}^h(x_i) = \begin{Bmatrix} \tilde{b}_{11}(x_i) & 0 & \tilde{b}_{12}(x_i) & 0 & \dots & \tilde{b}_{1N}(x_i) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{21}(x_i) & 0 & \tilde{b}_{22}(x_i) & \dots & 0 & \tilde{b}_{2N}(x_i) \\ \tilde{b}_{21}(x_i) & \tilde{b}_{11}(x_i) & \tilde{b}_{22}(x_i) & \tilde{b}_{12}(x_i) & \dots & \tilde{b}_{2N}(x_i) & \tilde{b}_{1N}(x_i) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N1} \\ u_{N2} \end{Bmatrix} = \tilde{B}_i d \quad (I.2.17)$$

Où $\tilde{b}_{1j}(x_i)$ et $\tilde{b}_{2j}(x_i)$ sont définis par :

$$\begin{cases} \tilde{b}_{1j}(x_i) = \frac{1}{A_i} \int_{\Gamma_i} \phi_j v_1(x) d\Gamma \\ \tilde{b}_{2j}(x_i) = \frac{1}{A_i} \int_{\Gamma_i} \phi_j v_2(x) d\Gamma \end{cases} \quad (I.2.18)$$

On peut remarquer que la plupart des composantes de la matrice $\tilde{B}_i$ sont nulles grâce au support compact des fonctions de forme (les seules composantes non nulles correspondent aux nœuds voisins du point x).

Chen et al. [27] ont proposé d'utiliser l'intersection entre le diagramme de Voronoï et le domaine pour définir les domaines d'intégration Ω_i . Nous étendons cette définition de manière immédiate aux cellules de Voronoï contraintes, mieux adaptées à représenter des domaines dans le voisinage des bords non convexes.

En plus, l'utilisation du théorème de la divergence évite le calcul des dérivées des fonctions de forme, ne nécessitant que le calcul des fonctions de forme sur les bords des cellules de Voronoï contraintes. Le fait d'intégrer ces fonctions (plus régulières que leurs dérivées) sur des éléments de dimensions inférieures (sur des arêtes en 2D), permet d'obtenir une très bonne qualité d'intégration comparée aux autres techniques [46]. Elle permet même de passer le patch test, avec une grande précision, alors que les fonctions de forme ne sont pas polynomiales.

I.2.6. Stratégie de raffinement

Nous proposons la stratégie suivante : à partir d'une configuration de référence (instant t_0), on effectue un nombre fixé d'incréments dans le cadre d'une procédure Lagrangienne, jusqu'à un temps t_a . Pour les cellules (nœuds) dépassant le seuil d'erreur toléré, des nœuds sont ajoutés entre le nœud et ses voisins naturels dans la configuration de référence. Le calcul est repris au temps t_0 , avec de nouveaux nœuds.

Tableau I.2.1. Procédure de raffinement adaptatif dans le cadre de la méthode NEM pour les problèmes non linéaires avec variables d'histoire.

TANT QUE $t < t_{finale}$ (1) Actualiser la configuration $\Omega_{ref}(X)$, α^{ref}
(2) Effectuer la simulation à l'aide de la procédure Lagrangienne jusqu'au temps t_a , $x = X + u(X, t)$
(3) Evaluer l'erreur globale a posteriori.
(4) SI $ERR > TOL$ a) Rajouter des noeuds de coordonnées X' dans la configuration de référence $\Omega_{ref}; X \leftarrow X \cup X'$; b) Actualiser le pas de temps c) Interpoler les variables internes des nouveaux noeuds à partir des variables dans la configuration de référence : $\alpha(X) = \sum_{i=1}^n \phi_i(X) \alpha_i^{ref}$; d) Interpoler les variables internes des nouveaux noeuds e) Retourner en (1) SINON Aller en (5)
(5) Initialiser : $X = x, \alpha^{ref} = \alpha^{ta}$ et retourner en (1)

On va ensuite de nouveau jusqu'au temps t_a , et ainsi jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cellules dépassant le seuil d'erreur toléré. Si au temps t_a il n'y a plus de cellules à subdiviser, la configuration est actualisée au temps t_a et devient la nouvelle configuration de référence. Le résumé de cette procédure est montré sur le tableau I.2.1. En partant d'un nuage de nœuds initial, on construit d'abord le diagramme de Voronoï associé. On reconstruit le diagramme de Voronoï associé au nouveau nuage obtenu, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'erreur globale soit sous la tolérance fixée.

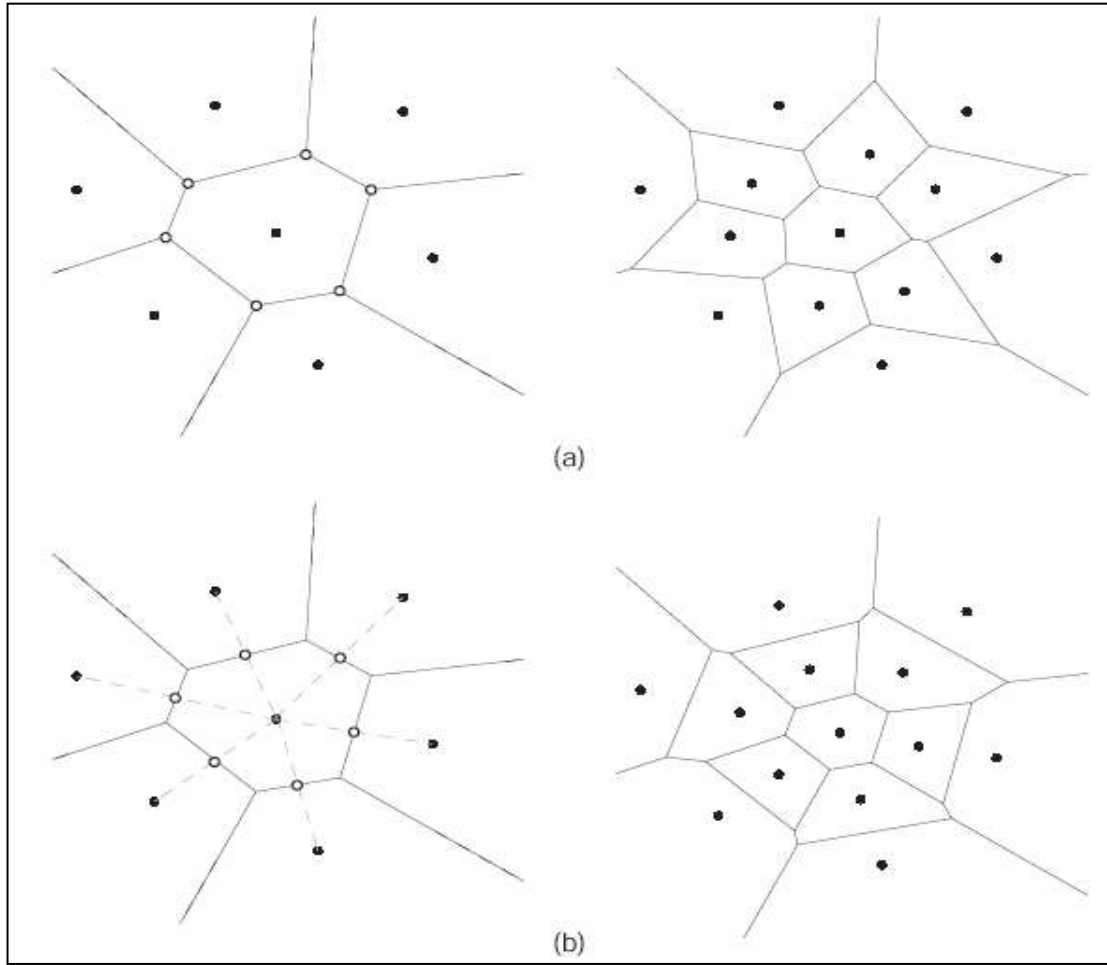


Figure. I.2.5. Stratégies de raffinement nodal basées sur les cellules de Voronoï, nœuds additionnels, (a) Méthode de Sibson, (b) Méthode de Laplace.

I.2.7. Procédé informatique numérique pour fonctions de forme de NEM

I.2.7.1. Aire de triangle

Considérons un triangle $t(A, B, C)$ avec des points $A(a)$, $B(b)$, et $C(c)$, où $a = (a_1, a_2)$,

$b = (b_1, b_2)$, et $c = (c_1, c_2)$ (figure I.2.6). L'aire Δ_{abc} est donné par:

$$A = \frac{(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (b_1 - c_1)(a_2 - c_2)}{2} \quad (\text{I.2.19})$$

Si $a \equiv a(x) = (a_1(x), a_2(x))$, $b \equiv b(x) = (b_1(x), b_2(x))$, et (c_1, c_2) sont indépendant de x , alors les dérivés de A peuvent être écrites comme suit:

$$A_i(x) = \frac{(a_1(x) - c_1)b_{2,i}(x) + (b_2(x) - c_2)a_{1,i}(x)}{2} - \frac{(b_1(x) - c_1)a_{2,i}(x) + (a_2(x) - c_2)b_{1,i}(x)}{2}$$

où $i = 1, 2,$ (I.2.20)

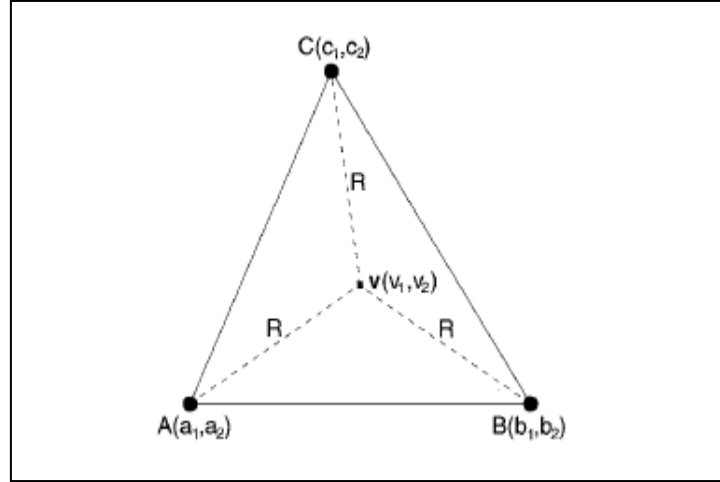


Figure. I.2.6. Centre et rayon d'un triangle

I.2.7.2. Centre et rayon d'un triangle

Considérons un triangle $t(A, B, C)$ (figure I.2.6). Le cercle circonscrit de Δ_{ABC} est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle. Son centre est $v(v_1, v_2)$ et son rayon R est le rayon de triangle.

En considérant les arêtes AC et BC dans la figure I.2.6, un système de deux équations linéaires est obtenu. A la mise en oeuvre de la solution et après quelques manipulations algébriques, nous obtenons les expressions suivantes pour le centre de Δ_{ABC} :

$$v_1 = \frac{(a_1^2 - c_1^2 + a_2^2 - c_2^2)(b_2 - c_2) - (b_1^2 - c_1^2 + b_2^2 - c_2^2)(a_2 - c_2)}{D}$$

$$v_2 = \frac{(b_1^2 - c_1^2 + b_2^2 - c_2^2)(a_1 - c_1) - (a_1^2 - c_1^2 + a_2^2 - c_2^2)(b_1 - c_1)}{D} \quad (\text{I.2.21 a, b})$$

$$\text{Où } D = 2[(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (b_1 - c_1)(a_2 - c_2)] \quad (\text{I.2.22})$$

Du point de vue de l'efficacité informatique (fonctionnements réduits de multiplication), la différence carrée de deux limites dans les équations ci-dessus est représentée comme produit de leurs sommes et différences dans l'exécution numérique.

Par exemple, $(a_1^2 - c_1^2)$ dans l'équation (I.2.21 a) est calculé comme $(a_1 - c_1)(a_1 + c_1)$, etc.

Si le point d'intersection $C(c)$ coïncide avec le point x , lorsque $x=(x_1, x_2)$, donc $c_1=x_1$ et $c_2=x_2$.

Supposons que les coordonnées a_1, a_2, b_1 , et b_2 sont indépendantes de x_1 et x_2 , Les dérivés des coordonnées du centre de triangle peuvent alors être écrits sous la forme simplifiée suivante:

$$\begin{aligned} v_{1,1}(x) &= \frac{(x_1 - v_1(x))D_{,1}(x)}{D(x)} \\ v_{1,2}(x) &= \frac{(\alpha + x_2 D_{,1}(x) - v_1(x) D_{,2}(x))}{D(x)} \\ v_{2,1}(x) &= \frac{(-\alpha + x_1 D_{,2}(x) - v_2(x) D_{,1}(x))}{D(x)} \\ v_{2,2}(x) &= \frac{(x_2 - v_2(x))D_{,2}(x)}{D(x)} \end{aligned} \quad (\text{I.2.23 a, b, c, d})$$

Où $v_1(x)$, $v_2(x)$, et $D(x)$ sont données dans l'équation (I.2.21)

Avec :

$$\alpha = (b_1 + a_1)(b_1 - a_1) + (b_2 + a_2)(b_2 - a_2) \quad (\text{I.2.24})$$

$$D_{,1}(x) = 2(a_2 - b_2)$$

$$D_{,2}(x) = 2(b_1 - a_1) \quad (\text{I.2.25 a, b})$$

Par définition, le rayon est la distance du centre du triangle à un point d'intersection de Δ_{ABC} . Par conséquent le carré du rayon peut être écrit comme suit:

$$R^2(x) = (a_1 - v_1(x))^2 + (a_2 - v_2(x))^2 \quad (\text{I.2.26})$$

I.2.7.3. Calculs de fonction de forme

L'ensemble nodal original, le diagramme de Voronoï (lignes tirées), et les cercles circonscrits de voisins naturels sont montrés dans figure I.2.7. Le point x est introduit en jeu, et les voisins naturels de x comme les valeurs des fonctions de forme de voisins naturels et de leurs dérivés par rapport à x doivent être calculées. La méthodologie informatique pour l'évaluation des fonctions de forme est basée sur le fait que la cellule Voronoï de second ordre sur x (figure I.2.2) peut être calculée comme addition des airs des triangles. On suppose que la connectivité nodale pour chaque triangle de Delaunay est stockée dans l'orientation (sens contraire des aiguilles d'une montre), et par conséquent le signe approprié est automatiquement choisi quand l'air d'un triangle est calculé. Pour calculer la fonction de forme, il faut déterminer le nombre de voisins naturel n_i . Le moyen simple de déterminer que l'un des nœuds est un voisin naturel d'un

point x , est d'utiliser le critère vide de cercles circonscrits, si le polygone de la distance euclidienne de x au centre du cercle circonscrit d'un voisin naturel (lié aux nœuds n_i , n_j et n_k) plus petit que le polygone du rayon du cercle circonscrit, dont nœuds n_i , n_j et n_k sont les voisins naturels du point x :

$$\|v - x\|^2 < R^2 \quad (\text{I.2.27})$$

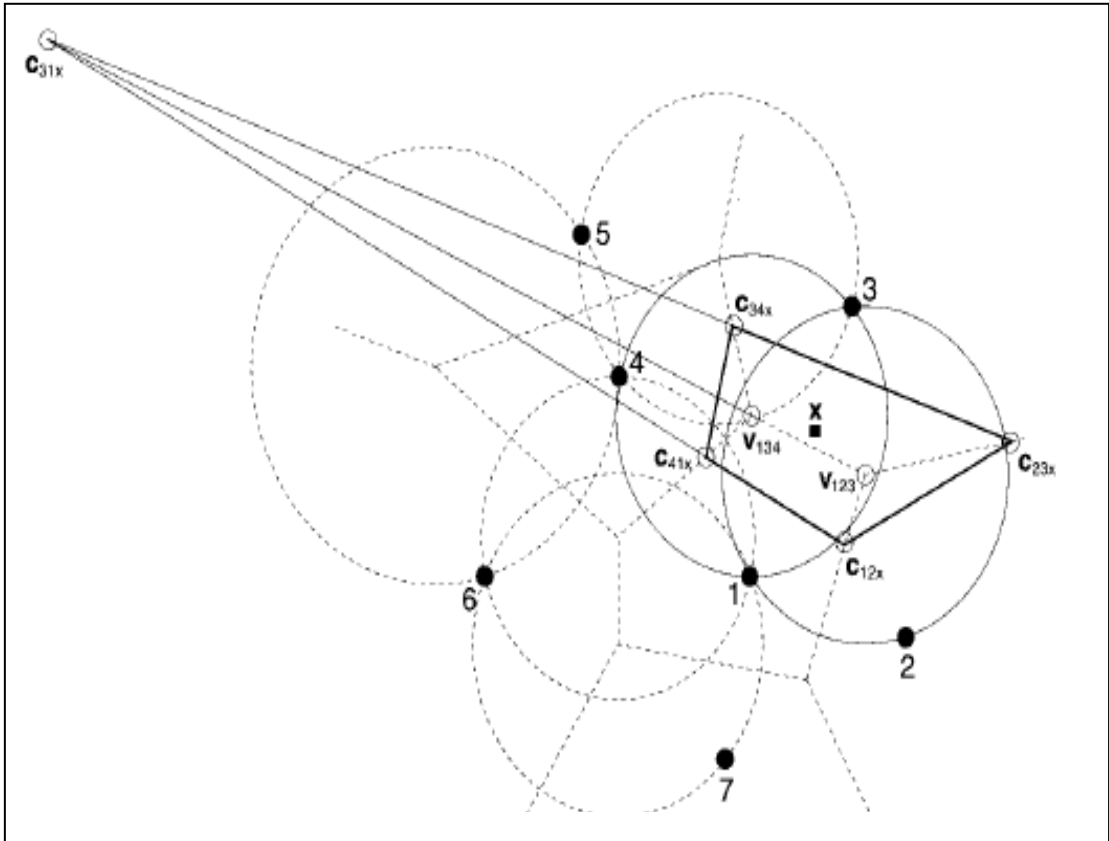


Figure. I.2.7. Calcul des fonctions de forme pour voisins naturels.

Nous avons un triangle avec des points d'intersection (p, q, r) et de centre v , où $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$, $r = (r_1, r_2)$ et $v = (v_1, v_2)$. Pour chaque triangle t de Delaunay choisi sur la base de l'équation (I.2.27), nous formons un nouvel ensemble de trois triangles $\{t_1, t_2, t_3\}$ où chaque x et deux points de la sommets de triangle t sont leurs points d'intersection. En considérant les points d'intersection a_i des nouveaux triangles t_i . Nous pouvons écrire le centre des nouveaux triangles ainsi construit et leurs dérivés sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned} c_i(x) &= \Theta(a_j, a_k, x) \\ c_{i,m}(x) &= \Theta_{,m}(a_j, a_k, x) \end{aligned} \quad (\text{I.2.28}), (\text{I.2.29})$$

Où $m = 1, 2$ et i, j , et k sont les permutations dans le sens contraire des aiguilles de répétition de 1,2,3. Dans les équations ci-dessus, Θ et $\Theta_{,m}$ sont les représentations fonctionnelles pour le centre d'un triangle et de ses dérivés qui sont données par les équations (I.2.21), (I.2.22) et (I.2.23), respectivement. Les points c_1, c_2, c_3 sont les centres des triangles des points d'intersections (2, 3, x), (3, 1, x), et (1, 2, x), respectivement.

La prochaine étape comporte la construction des triangles secondaires en utilisant des combinaisons de la collection $\{c_1(x), c_2(x), c_3(x), v\}$, tels que v apparaît dans tous les triangles secondaires. Ici la permutation cyclique de 123 est maintenue. Clairement, trois tels triangles secondaires peuvent être construits, à savoir $(c_1(x), c_2(x), v)$ [nœud 3], $(c_2(x), c_3(x), v)$ [nœud 1], et $(c_1(x), c_3(x), v)$ [nœud 2], où l'association nodale est indiquée dans le crochet. Les airs de ces triangles secondaires et leurs dérivés peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{aligned}\alpha_{i_t}(x) &= \Psi(c_j(x), c_k(x), v) \\ \alpha_{i_t,m}(x) &= \Psi_{,m}(c_j(x), c_k(x), v)\end{aligned}\tag{I.2.30), (I.2.31)}$$

Où $m = 1, 2$ et i, j , et k sont des permutations dans le sens contraire des aiguilles de répétition de 123. Dans les équations ci-dessus, Ψ et $\Psi_{,m}$ sont les représentations fonctionnelles pour l'air d'un triangle et ses dérivés qui sont données par les équations (I.2.19) et (I.2.20), respectivement.

La contribution de l'air à chaque nœud global et sa mise à compte ont fait par les tâches symboliques conceptuelles suivantes:

$$\begin{aligned}\beta_t(x) &\leftarrow \beta_t(x) + \alpha_{i_t}(x) \\ \beta_{t,m}(x) &\leftarrow \beta_{t,m}(x) + \alpha_{i_t,m}(x)\end{aligned}\tag{I.2.32), (I.2.33)}$$

Où $\beta_t(x)$ et $\beta_{t,m}(x)$ sont placés à zéro pour tous les voisins naturels avant les calculs de fonction de forme. Le procédé ci-dessus est suivi pour tous les triangles t de Delaunay ($t=1,2,\dots, t_n$). Par conséquent l'air de la cellule du second ordre Voronoï et ses dérivés sont maintenant indiquées par :

$$\begin{aligned}A_t(x) &= \beta_t(x) \\ A_{t,m}(x) &= \beta_{t,m}(x)\end{aligned}\tag{I.2.34), (I.2.35)}$$

Pour $m= 1,2$ et $I = 1,2,\dots, n$ nous avons

$$A(x) = \sum_{I=1}^n A_I(x) \quad (I.2.36), (I.2.37)$$

$$A_{,m}(x) = \sum_{I=1}^n A_{I,m}(x)$$

Les fonctions de formes de voisins naturels et leurs dérivés sont données par:

$$\phi_I(x) = \frac{A_I(x)}{A(x)} \quad (I.2.38), (I.2.39)$$

$$\phi_{I,m}(x) = \frac{A_{I,m}(x) - \phi_I(x)A_{,m}(x)}{A(x)}$$

Remplaçons $A_I(x)$, $A_{I,m}(x)$, $A(x)$, et $A_{,m}(x)$ dans les équations (I.2.34), (I.2.35), (I.2.36), et (I.2.37), respectivement. Dans les équations ci-dessus, la fonction de forme $\phi_I(x)$ et ses dérivés $\phi_{I,m}(x)$ sont calculés pour tous les voisins naturels. En utilisant figure I.2.7 pour illustrer l'application des calculs de fonction de forme. En notant le local $\rightarrow$ global nodal associations, nous obtenons les résultats suivants:

$$A_1(x) = \Psi(c_{31x}, c_{12x}, v_{123}) + \Psi(c_{41x}, c_{31x}, v_{134}) \equiv \text{Aire.quadrilatère}(12x - 123 - 134 - 41x)$$

$$A_2(x) = \Psi(c_{12x}, c_{23x}, v_{123}) \equiv \text{Aire.triangle}(12x - 23x - 123)$$

$$A_3(x) = \Psi(c_{23x}, c_{31x}, v_{123}) + \Psi(c_{13x}, c_{34x}, v_{134}) \equiv \text{Aire.quadrolatère}(134 - 123 - 23x - 34x)$$

$$A_4(x) = \Psi(c_{34x}, c_{41x}, v_{134}) \equiv \text{Aire.triangle}(34x - 41x - 134)$$

(I.2.40 a, b, c, d)

$$A(x) = \sum_{I=1}^4 A_I(x) \quad (I.2.41)$$

$$\phi_I(x) = \frac{A_I(x)}{A(x)} \quad (I=1, 2, 3, 4) \quad (I.2.42)$$

Comme indiqué dans l'équation ci-dessus, les fonctions de forme pour chaque nœud sont justes les airs normalisés en ce qui concerne la surface totale. [22] a employé cet algorithme pour calculer la fonction de forme de voisins naturels dans leur application. Cette méthode est robuste, et est applicable à un point quelconque du domaine pour des calculs de fonction de forme.

I.3. Méthode des moindres carrés mobiles (MLS)

I.3.1. Approximation classique au sens des moindres carrés

Considérons une certaine fonction inconnue u de la variable x dont on connaît quelques valeurs u_i aux points d'échantillonnage x_i , appelés noeuds, en nombre N .

Nous cherchons l'équation d'une fonction approchée $u^h(x)$ en nous basant sur ces quelques valeurs. Dans un des cas les plus simples, nous cherchons une fonction approchée linéaire. Cette situation peut se rencontrer par exemple pour déduire une loi linéaire à partir de quelques résultats expérimentaux dispersés, obtenus pour certaines valeurs d'une grandeur caractéristique. L'approximation est

$$u^h(x) = a_0 + a_1 x \quad (\text{I.3.1})$$

où a_0 et a_1 sont des paramètres à déterminer. Pour obtenir la droite qui approxime les valeurs échantillonnées au sens des moindres carrés comme sur la figure I.3.1, on forme la norme d'ordre 2 de l'écart entre la solution approchée et les valeurs connues aux points d'échantillonnage :

$$S = \sum_{i=1}^N [a_0 + a_1 x_i - u_i]^2 \quad (\text{I.3.2})$$

Et on obtient a_0 et a_1 en minimisant cette somme. Les deux équations $\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0$ et

$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$ sont suffisantes pour trouver les deux inconnues a_0 et a_1 . Il est possible

d'accorder un poids différent à chaque valeur en cherchant plutôt à minimiser

$$S = \sum_{i=1}^N w_i [a_0 + a_1 x_i - u_i]^2 \quad (\text{I.3.3})$$

où w_i est le poids que l'on donne à la valeur u_i . Ce poids doit être positif pour que la fonction d'approximation s'approche bel et bien des valeurs connues et non qu'elle s'en éloigne. Cette situation se rencontre par exemple si l'indice de confiance en certains résultats expérimentaux est plus élevé qu'en d'autres.

Nous réécrivons ces expressions sous forme vectorielle pour faciliter l'extension à des fonctions non-linéaires et/ou à plusieurs variables. L'approximation est donnée par

$$u^h(x) = p^T(x).a \quad (\text{I.3.4})$$

Avec les deux fonctions de base

$$p^T(x) = [1, x] \quad (\text{I.3.5})$$

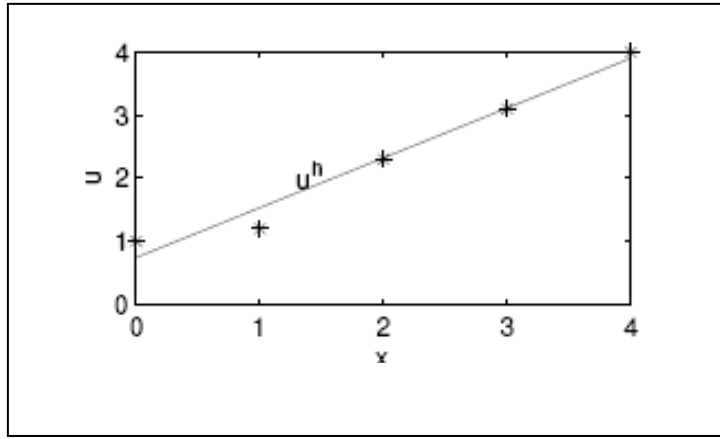


Figure. I.3.1. Approximation au sens des moindres carrés de certains points par une droite

et les deux coefficients

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.3.6})$$

La norme pondérée vaut

$$S = \sum_{i=1}^N w_i [p^T(x_i) \cdot a - u_i]^2 \quad (\text{I.3.7})$$

qu'il convient de minimiser pour trouver les coefficients

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad (\text{I.3.8})$$

soit

$$\sum_{i=1}^N 2w_i \cdot p(x_i) [p^T(x_i) \cdot a - u_i] = 0 \quad (\text{I.3.9})$$

Nous trouvons les coefficients en résolvant le système linéaire suivant

$$A \cdot a = b \quad (\text{I.3.10})$$

où la matrice carrée A est donnée par la somme pondérée des produits dyadiques des fonctions de base aux points d'échantillonnage :

$$A = \sum_{i=1}^N w_i \cdot p(x_i) \cdot p^T(x_i) \quad (\text{I.3.11})$$

et où le vecteur b fait intervenir les valeurs connues u_i :

$$b = \sum_{i=1}^N w_i \cdot p(x_i) \cdot u_i \quad (\text{I.3.12})$$

Il est possible d'approximer au sens des moindres carrés par une fonction non linéaire. Ainsi, pour approximer par une parabole, il suffit de prendre les trois fonctions de base suivantes

$$p^T(x) = [1, x, x^2] \quad (\text{I.3.13})$$

et les équations (I.3.10), (I.3.11) et (I.3.12) ci-dessus restent valables pour déterminer les trois coefficients. De même, pour une fonction de plusieurs variables, ces équations demeurent à condition de remplacer le scalaire x par un vecteur $x = (x, y)$. Par exemple, une fonction de deux variables est approximée par un plan en utilisant la base à trois fonctions

$$p^T(x) = [1, x, y] \quad (\text{I.3.14})$$

avec trois coefficients à déterminer par les équations ci-dessus et par une fonction quadratique en utilisant la base à six fonctions

$$p^T(x) = [1, x, y, x^2, y^2, xy] \quad (\text{I.3.15})$$

avec six coefficients à déterminer.

Pour que la matrice A soit inversible, il faut que les noeuds soient en nombre suffisant : $N > m$ où m est la taille du vecteur des fonctions de base p . En outre, il ne faut pas qu'ils occupent une configuration dégénérée, qui dépend de la base choisie. Par exemple, pour la base linéaire à deux dimensions, il ne faut pas que les N noeuds x_i soient tous alignés. Ces deux conditions s'expriment plus mathématiquement comme suit : il faut au moins m parmi les N matrices des produits dyadiques $p(x_i)p^T(x_i)$ linéairement indépendantes. Il faut remarquer que, dans ces conditions, A est symétrique définie strictement positive puisque il vient, en utilisant (I.3.10),

$$y^T A y = \sum_{i=1}^N w_i (p(x_i) \cdot y)^2 > 0 \quad (\text{I.3.16})$$

car les poids sont positifs.

I.3.2. Définition de l'approximation MLS

D'abord, nous cherchons à construire une approximation locale, au voisinage d'un certain point $\tilde{x}$, sous la forme

$$u_{local, \tilde{x}}^h(x) = p^T(x) \cdot a(\tilde{x}) \quad (\text{I.3.17})$$

où les coefficients a dépendent du point $\tilde{x}$ autour duquel l'approximation est construite. La norme de l'écart entre l'approximation autour de $\tilde{x}$ et les valeurs connues s'écrit comme pour l'approximation classique au sens des moindres carrés mais dépend naturellement de ce point $\tilde{x}$:

$$S(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n\tilde{x}} w_i(\tilde{x}) [p^T(x_i) \cdot a(\tilde{x}) - u_i]^2 \quad (\text{I.3.18})$$

Dans cette norme, chaque noeud contribue à l'approximation avec un poids w_i plus ou moins important selon la distance qui le sépare du point $\tilde{x}$. C'est la raison pour laquelle nous écrivons $w_i(\tilde{x})$. Pratiquement, chaque fonction poids w_i est positive comme dans le cas de l'approximation au sens des moindres carrés classique et non nulle uniquement sur un petit domaine entourant le noeud x_i auquel elle correspond. Ainsi, la somme dans l'équation (I.3.18) se limite à un petit nombre de termes $n^{\tilde{x}}$ qui est plus petit que le nombre total de noeuds N . La minimisation de S par rapport aux coefficients a nous donne la valeur de ces coefficients comme dans la section précédente.

Ensuite, nous construisons une approximation globale qui vaut en tout point l'approximation locale que nous venons de décrire, construite autour du point considéré. Soit

$$u_{(global)}^h(x) = u_{local,x}^h(x) = p^T(x).a(x) \quad (I.3.19)$$

La minimisation de l'erreur permet de trouver les coefficients :

$$A(x).a(x) = \sum_{i=1}^{nx} w_i(x).p(x_i).u_i \quad (I.3.20)$$

avec

$$A(x) = \sum_{i=1}^{nx} w_i(x).p(x_i).p^T(x_i) \quad (I.3.21)$$

En inversant l'équation (I.3.20) et en utilisant l'équation (I.3.19), nous aboutissons à la forme suivante pour l'approximation MLS où nous omettons désormais l'indice « global » :

$$u^h(x) = p^T(x).A^{-1}(x) \left(\sum_{i=1}^{nx} w_i(x).p(x_i).u_i \right) \quad (I.3.22)$$

que nous réécrivons

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N \phi(x).u_i \quad (I.3.23)$$

où la fonction de forme associée au noeud i est donnée par

$$\phi_i(x) = c^T(x).p(x_i).w_i(x) \quad (I.3.24)$$

avec

$$c(x) = A^{-1}(x).p(x) \quad (I.3.25)$$

Une illustration à une dimension de l'utilisation des fonctions de forme MLS est représentée par la figure I.3.2. Cinq noeuds sont uniformément répartis sur l'intervalle $[0, 4]$. Les valeurs d'une fonction à approcher y sont données par tableau I.3.1. Dans la colonne de gauche, l'interpolation par éléments finis est illustrée pour comparer.

• Tableau I.3.1 Valeurs d'un objet

x_i	0	1	2	3	4
u_i	1	2	4	3	2.5

La figure (a) présente les fonctions de forme des éléments finis linéaires construits sur les noeuds et montre en gras la fonction de forme du noeud central. La figure (b) présente l'interpolation de la fonction inconnue obtenue en multipliant les fonctions de forme par les valeurs connues et en sommant les contributions. Dans la colonne de droite, trois figures illustrent l'approximation MLS. Les fonctions poids $w_i(x)$ choisies sont présentées sur la figure (c) en mettant à nouveau en évidence le noeud central. Les fonctions de forme $\phi_i(x)$ construites à l'aide de celles-ci sont présentées sur la figure (d). Enfin, l'approximation MLS de la fonction inconnue, obtenue en multipliant les fonctions de forme par les valeurs connues et en sommant les contributions par application de (I.3.23), est illustrée sur la figure (e). Le support d'influence d'un élément de moindre carré mobile en deux dimensions est montré sur la figure I.3.3.

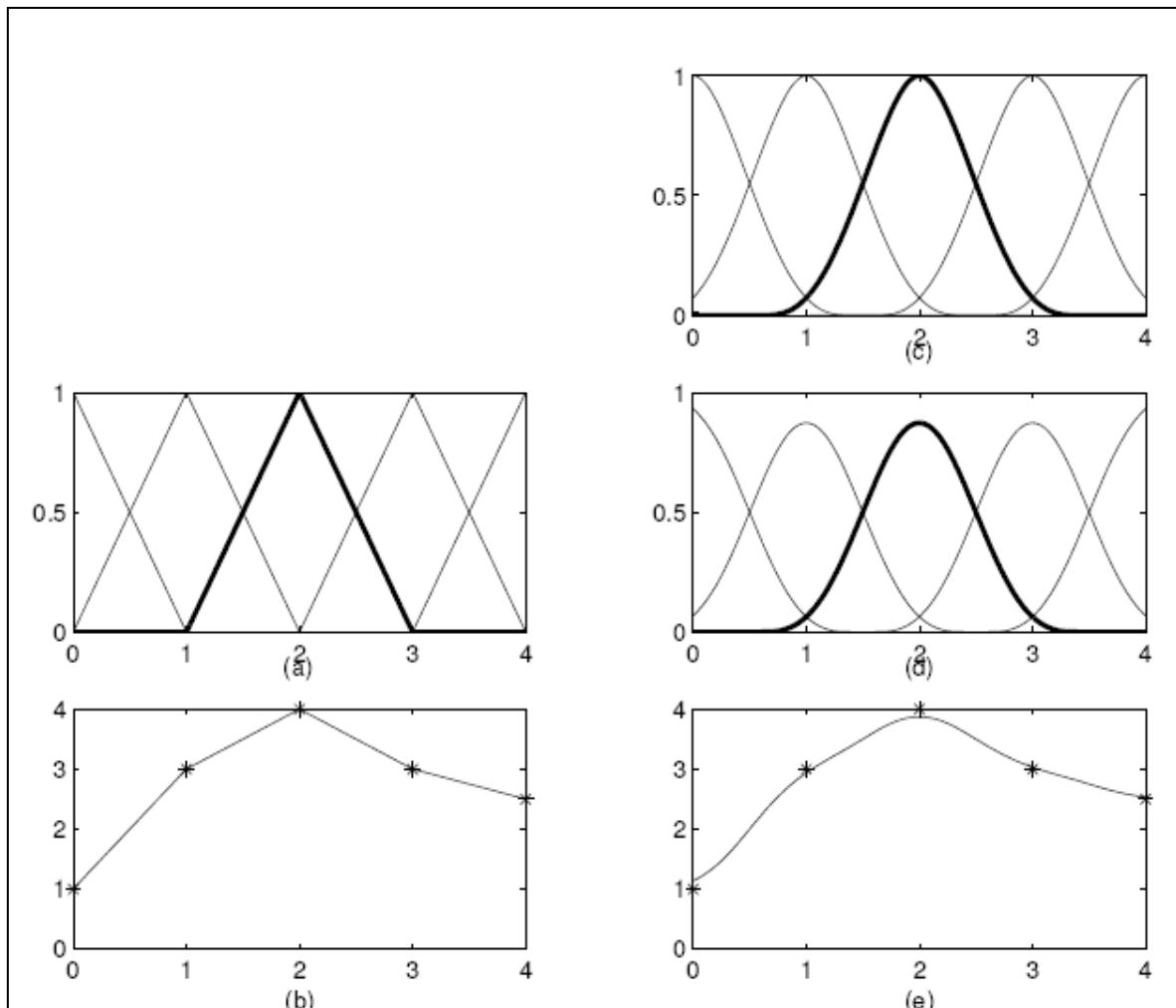


Figure I.3.2. Interpolation par éléments finis et approximation sans maillage, (a) Fonctions de forme de méthode des éléments finis, (b) L'interpolation par méthode des éléments finis, (c) Fonction de poids de méthode sans maillage MLS, (d) Fonctions de forme de méthode sans maillage MLS, (e) L'interpolation par méthode sans maillage MLS

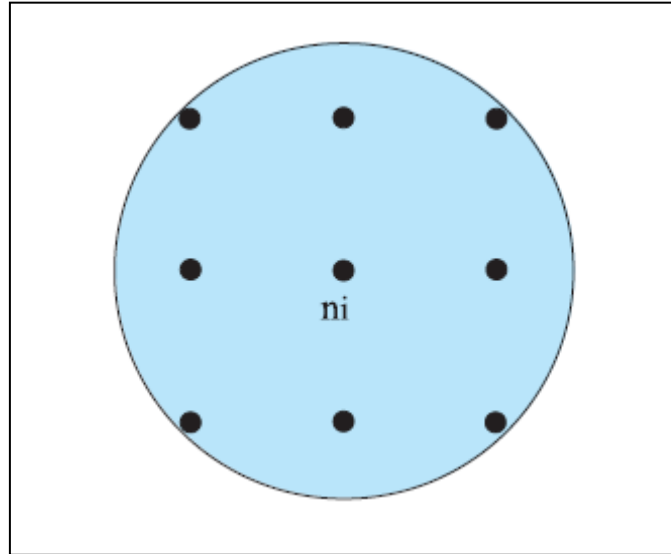


Figure I.3.3. Support d'élément de moindres carrés mobiles

I.3.3. Propriétés des fonctions de forme MLS

La première propriété des fonctions de forme MLS à noter est qu'elles ne dépendent effectivement d'aucun maillage. Seuls un vecteur de fonctions de base $p(x)$ et un ensemble de noeuds à chacun desquels correspond une fonction poids $w_i(x)$ sont nécessaires. En un point donné, les fonctions de forme sont toutes construites simultanément. Les trois étapes de cette construction sont :

- la construction de la matrice A par la formule (I.3.21) en ajoutant la contribution de chaque noeud au point considéré (en pratique, seuls les noeuds de poids non-nul en ce point contribuent) ;
- l'inversion de la matrice A ;
- la calcul de chaque fonction de forme par les formules (I.3.24) et (I.3.25).

D'autres propriétés remarquables des fonctions de forme MLS sont :

- **Localité**

La fonction de forme $\phi_i(x)$ est nulle en-dehors du support de la fonction poids $w_i(x)$. Cela se voit immédiatement sur l'équation (I.3.24) par la présence du facteur $w_i(x)$. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes autorisés à faire la somme (I.3.23) jusque N plutôt que n^* car cela revient à ajouter des termes nuls. Notons que $\phi_i(x)$ peut-être négatif alors que $w_i(x)$ est toujours choisi positif.

- **Condition d'existence**

La fonction de forme $\phi_i(x)$ est bien définie sur le domaine Ω de l'approximation si et seulement si $A(x)$ est inversible en tout point x du domaine. Pour que ce soit le cas, de manière semblable à l'approximation au sens des moindres carrés classique, il faut que chaque point soit couvert par au moins m supports dont les matrices $p(x_i)p^T(x_i)$ associées sont linéairement indépendantes. Une condition

nécessaire est $n^x \geq m$ en tout point x . Pour une base linéaire à deux dimensions par exemple, il faut et il suffit que chaque point soit couvert par au moins 3 supports de noeuds non-alignés. Pratiquement, cette condition impose une limite inférieure à la taille des supports : il faut que les supports soient « suffisamment » grands pour que chaque point soit « suffisamment » couvert.

- **Absence d'interpolation**

À la différence des fonctions de forme de la méthode des éléments finis, les fonctions de forme MLS sont différentes de 1 au nœud auquel elles sont associées et ne sont pas nécessairement nulles aux autres noeuds :

$$\phi_i(x_j) \neq \delta_{ij} \quad (I.3.26)$$

C'est pour cette raison que l'approximation MLS est effectivement une approximation et non une interpolation :

$$u^h(x_i) \neq u_i \quad (I.3.27)$$

Cet effet est visible sur la figure I.3.2(e) : la courbe qui approxime ne passe pas par les points d'échantillonnage.

- **Consistance**

Les fonctions de forme MLS peuvent reproduire exactement toute fonction appartenant au noyau de $p(x)$. En effet, une fonction du noyau de $p(x)$ a la forme

$$u(x) = p^T(x) \cdot \alpha \quad (I.3.28)$$

Si nous prenons comme coefficients $a(x) = \alpha$, la norme S est nulle. Sachant que S est par définition positive ou nulle, notre choix de coefficients est bien celui qui minimise S et l'approximation est donnée par

$$u^h(x) = p^T(x) \cdot \alpha = u(x) \quad (I.3.29)$$

Par exemple, si les points (x_i, u_i) sont alignés et qu'une base linéaire $[1, x]$ est utilisée, la fonction approchée u^h est la droite passant par ces points, quelles que soient les fonctions poids choisies.

- **Continuité**

Les fonctions de forme ont le même degré de continuité que la fonction la moins continue parmi la fonction de base et les fonctions poids. Formellement, si les $\phi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sont bien définies (c'est-à-dire si la condition d'existence est satisfaite) et si

$$p_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \in C^l(\Omega) \quad (l \geq 0) \quad (I.3.30)$$

et

$$w_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \in C^q(\Omega) \quad (q \geq 0) \quad (\text{I.3.31})$$

alors

$$\phi_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \in C^{\min(l, q)}(\Omega) \quad (\text{I.3.32})$$

Les démonstrations de la condition d'existence et de la propriété de continuité se trouvent dans Duarte et Oden, [11].

I.3.4. Choix des fonctions de base

Si en théorie, n'importe quelle fonction peut être présente dans le vecteur des fonctions de base, en pratique, dans la quasi-unanimité des travaux présents dans la littérature, le choix est limité à l'ensemble des monômes jusqu'à un certain ordre. Ce tableau reprend les bases constantes, linéaires et quadratiques à une, deux et trois dimensions.

Tableau I.3.2 Différentes fonctions de base de la méthode MLS

	1D	2D	3D
Constant	[1]	[1]	[1]
Linéaire	[1, x]	[1, x, y]	[1, x, y, z]
Quadratique	[1, x, x ²]	[1, x, y, x ² , y ² , xy]	[1, x, y, z, x ² , y ² , z ² , xy, xz, yz]

Puisque toutes ces fonctions de base appartiennent à $C^\infty(\Omega)$, les fonctions de forme MLS ont le même degré de continuité que les fonctions poids. Comme la fonction constante est toujours présente dans l'ensemble des fonctions de base, la propriété de consistance implique que

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{I.3.33})$$

Notons que cette propriété est partagée par les fonctions de forme de la méthode des éléments finis classique. Voyant dans cette propriété un partage par les fonctions de forme de la fonction constante unitaire, Melenk et Babuška [47] ont baptisé celle-ci : partition de l'unité. Le cas particulier de l'approximation MLS avec une base constante est l'approximation de Shepard [48], qui est en fait bien antérieure à l'approximation MLS. Elle donne une expression des fonctions de forme plus simple car la matrice $A(x)$ est réduite à la taille 1×1 :

$$\phi_i^{\text{Shepard}}(x) = \frac{w_i(x)}{\sum_{j=1}^{nx} w_j(x)} \quad (\text{I.3.34})$$

Dans la suite, nous utilisons une base linéaire sauf mention contraire. Les raisons de ce choix, qui est le choix habituel dans la littérature, sont doubles :

- une base constante est plus économe en temps de calcul mais l'approximation n'est alors pas capable de représenter exactement un champ linéaire, ce qui est requis pour le champ de déplacement dans une méthode de Galerkin;
- une base quadratique demande à ce que chaque point du domaine soit couvert par un nombre plus important de supports et une matrice A à inverser en chaque point de taille plus importante que pour une base linéaire et ce surcoût de temps de calcul conduit à un rapport coût/performance qui se révèle plus important à l'usage.

I.3.5. Choix des fonctions poids

Le choix habituel pour les fonctions poids est une fonction qui décroît avec la distance avec le noeud auquel elle est associée et qui possède la forme d'une cloche. A une dimension, si s est la distance normalisée entre un noeud i et un point x quelconque, on aura :

$$s = \left| \frac{x_i - x}{d_i} \right| \quad (\text{I.3.35})$$

- une spline d'ordre 3

$$f_1(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 & \text{si } |s| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \text{si } \frac{1}{2} < |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{I.3.36})$$

- une spline d'ordre 4

$$f_2(s) = \begin{cases} 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4 & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{I.3.37})$$

- une gaussienne tronquée

$$f_3(s) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2} & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{I.3.38})$$

- une gaussienne modifiée

$$f_4(s) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2} - e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}} & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{I.3.39})$$

qui a le désavantage d'être discontinue en $s = 1$ bien que cette discontinuité passe inaperçue numériquement si α est suffisamment grand ;
où d_i est la taille du support du noeud i , quelques choix courants pour $w_i(x)$ sont
L'expérience montre que les résultats obtenus varient peu selon la fonction poids choisie. Par la suite, nous utiliserons cette dernière spline d'ordre 4. L'illustration à une dimension de la figure I.3.2 utilisait déjà la spline d'ordre 4.

À deux ou trois dimensions, une des fonctions ci-dessus est choisie et les fonctions poids ont soit un domaine circulaire

$$w_i(x) = f_\alpha\left(\frac{\|x - x_i\|}{d_i}\right) \quad (\text{I.3.40})$$

soit un domaine rectangulaire

$$w_i(x) = f_\alpha\left(\frac{|x - x_i|}{d_i^x}\right) f_\alpha\left(\frac{|y - y_i|}{d_i^y}\right) \quad (\text{I.3.41})$$

à deux dimensions et

$$w_i(x) = f_\alpha\left(\frac{|x - x_i|}{d_i^x}\right) f_\alpha\left(\frac{|y - y_i|}{d_i^y}\right) f_\alpha\left(\frac{|z - z_i|}{d_i^z}\right) \quad (\text{I.3.42})$$

à trois dimensions.

Par la suite, sauf à la section 2.5.2, nous utilisons un domaine circulaire.

Une illustration à deux dimensions est représentée par les figures suivantes. Sur la figure I.3.4, nous montrons l'ensemble de noeuds utilisé et leur support : 5×5 noeuds sont distribués uniformément dans un domaine carré $[-2, 2] \times [-2, 2]$ et les fonctions poids sont des splines d'ordre 4 définies sur un domaine circulaire de rayon 1, 4. Sur la figure I.3.5, nous traçons à gauche le poids du noeud central, dont le support est mis en évidence sur la figure précédente, et à droite la fonction de forme associée à ce noeud par utilisation d'une base linéaire. Le calcul des fonctions de forme est possible car tous les points sont bien recouverts par au moins trois supports, grâce au rayon de longueur choisi suffisant. Nous remarquons que l'aspect de la fonction poids et la fonction de forme associée est semblable, même si l'amplitude de ces fonctions est différente (les échelles pour l'élévation sont différentes sur les deux graphes). D'autres graphes de ressemblance entre la fonction de forme et la fonction poids se trouvent dans Atluri, Kim et Cho [49]. Pour comparer, nous montrons sur la figure I.3.7 la fonction de forme associée au noeud central, appartenant à l'ensemble des fonctions de forme construites sur les éléments finis triangulaires linéaires qui maillent l'ensemble des 5×5 noeuds de la manière illustrée sur la figure I.3.6.

Sur la figure I.3.5 à deux dimensions comme précédemment sur la figure I.3.2, nous avons utilisé un ensemble de noeuds équidistants avec des poids identiques mais insistons sur le fait que ce n'est pas une obligation. Les noeuds peuvent bien entendu être dispersés irrégulièrement. De même, les poids peuvent varier autant en forme (circulaire, rectangulaire ou autre), en taille (d_i) et en nature (spline d'ordre 4, exponentiel ou autre). Les seules contraintes sont que les poids soient tous positifs et

qu'il y ait suffisamment de poids non nuls en tout point pour que l'approximation soit bien définie. Cette liberté dans les poids tranche avec le choix de l'ensemble des fonctions de base : celui-ci est unique pour toute l'approximation.

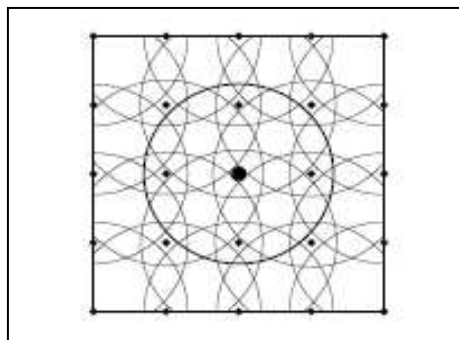


Figure. I.3.4. Distribution régulière de 5×5 nœuds

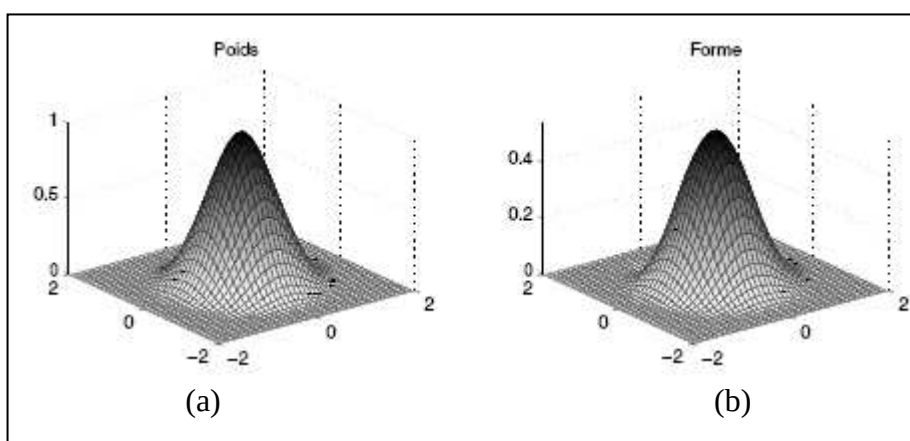


Figure. I.3.5. (a) Fonction poids ; (b) Fonctions de forme

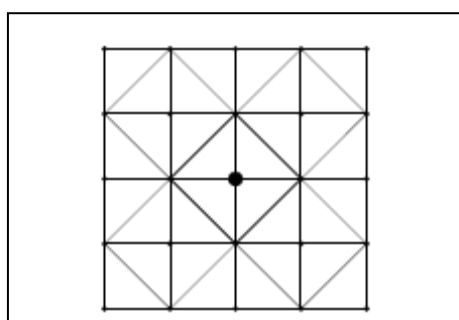


Figure. I.3.6. Maillage éléments finis sur 5×5 nœuds

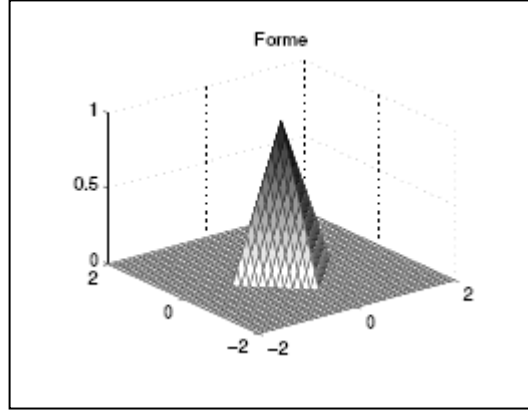


Figure. I.3.7. Fonction de forme éléments finis

Finalement, il est possible de calculer les dérivées des fonctions poids de manière analytique. Pour la spline d'ordre 4 défini sur un domaine circulaire par exemple, nous avons, en notant

$$w_{i,k}(x) = f_4' \frac{x_k - x_{ik}}{s.d_i^2} \quad (\text{I.3.43})$$

avec,

$$w_{i,kl} = \left(f_4'' - \frac{f_4'}{s} \right) \frac{(x_k - x_{ik})(x_l - x_{il})}{s^2 d_i^4} + f_4' \frac{\delta_{kl}}{s.d_i^2} \quad (\text{I.3.44})$$

$$f_2'(s) = \begin{cases} -12s + 24s^2 - 12s^3 & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{I.3.45})$$

$$f_2''(s) = \begin{cases} -12 + 48s - 48s^2 & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{I.3.46})$$

dont la définition en $x = x_i$ est bien unique : $w_{i,k}(x_i) = 0$ et $w_{i,kl}(x_i) = -\frac{12\delta_{kl}}{d_i^2}$.

I.3.6. Algorithmes pour le calcul efficace des fonctions de forme MLS

Nous décrivons deux algorithmes dont la mise en place est indispensable en pratique pour utiliser une méthode sans maillage sur des problèmes réels, surtout à trois dimensions.

- **Sélection des nœuds**

Le calcul des fonctions de forme MLS en un point est donné par la formule (I.3.24) qui repose sur les formules (I.3.25) et (I.3.21). Ce calcul demande de former la matrice.

A en sommant des contributions apportées par chacun des noeuds dont le support recouvre le point considéré. Il est essentiel pour l'efficacité de la méthode de trouver rapidement quels sont les noeuds qui jouent un rôle dans le calcul des fonctions de forme MLS en un point. Contrairement à ce que prétendent certains articles de la littérature, c'est bien cette étape de sélection des noeuds qui est la plus coûteuse en temps de calcul et non l'inversion de la matrice A (qui est simplement de taille 3×3 pour une base linéaire à deux dimensions par exemple).

Nous expliquons d'abord la méthode de sélection à deux dimensions et généralisons ensuite. Le principe de notre méthode est le suivant :

- nous construisons avant tout une liste de carrés disjoints, dont l'union recouvre tout le domaine, auquel est associée la liste des noeuds avec le support desquels ils ont une intersection non vide ;
- ensuite, pour chaque point considéré, nous déterminons rapidement le carré auquel il appartient et nous prenons comme liste réduite des noeuds qui peuvent influencer ce point la liste associée au carré trouvé ;
- nous calculons le poids de chacun de ces noeuds candidats tour à tour, ignorons les noeuds de poids nul et retenons le poids des noeuds de poids non-nul.

Le découpage du domaine en carrés se fait de manière récursive et les données sont conservées dans un arbre. À chaque noeud de l'arbre¹, nous retenons les coordonnées d'un carré et la liste des x_i qui ont une intersection non-nulle avec le carré. Les étapes de la procédure récursive sont les suivantes :

• Initiation

Au sommet de l'arbre sont associés un carré dans lequel le domaine est inscrit et la liste de l'ensemble des x_i . Ce noeud de l'arbre est le noeud courant et il passe par l'étape de division.

• Division

Si le critère d'arrêt est vérifié pour le noeud courant, remonter d'un niveau dans la procédure récursive : le noeud courant devient le noeud père. S'il n'est pas vérifié,

- créer 4 noeuds fils du noeud courant, découper le carré en 4 carrés égaux et associer chacun à un fils ;
- pour chaque fils, parcourir la liste des x_i et insérer dans la liste du fils les x_i qui ont une intersection non-nulle avec le carré associé à ce fils (certains x_i se retrouvent dans plusieurs listes);
- faire passer au premier fils l'étape de division, qui devient le noeud courant;
- faire de même pour les trois autres fils tour à tour ;
- supprimer la liste des x_i devenue inutile une fois la répartition parmi les 4 fils effectuée ;
- la division de ce noeud achevée, remonter d'un niveau et sortir si le noeud courant est le sommet.

• Critère d'arrêt

Le critère d'arrêt est vérifié si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée

- La principale condition est de cesser de diviser si la taille de la liste des x_i du noeud courant est inférieure à une certaine valeur fixée. Cette valeur résulte d'un compromis : si elle est trop grande, la liste des x_i candidats pour un point donné est

trop importante et si elle est trop petite, l'arbre à parcourir pour obtenir la liste des x_i candidats est trop profond. Le compromis à faire dépend de la taille des supports des x_i : avec de grands supports, il y a des recouvrements de nombreux supports et il est préférable de choisir une limite plus haute que pour des petits supports. D'après l'expérience, une liste de taille maximale de $40 x_i$ à deux dimensions et $80 x_i$ à trois dimensions convient.

- La condition précédente n'est pas suffisante pour exclure une récursion infinie. La division est arrêtée également si la taille du carré du nœud courant est inférieure à une certaine limite.

Une fois l'arbre construit, étant donné un point appartenant au domaine, nous pouvons rapidement descendre dans l'arbre du sommet jusqu'à la feuille du carré auquel appartient le point considéré et obtenir les candidats. Il suffit de comparer les coordonnées du point avec les coordonnées du centre du carré du nœud courant pour choisir le bon fils parmi les quatre à chaque étage. La taille de la liste des candidats diminue exponentiellement puisqu'elle est approximativement divisée par quatre à chaque étage. Pour donner un ordre de grandeur, avec le type d'ensembles de x_i que nous utiliserons en pratique dans nos exemples de résultats, la profondeur de l'arbre est de 5 niveaux environ. Donc, environ 5 simples opérations de comparaison des coordonnées de deux points (le point considéré et les centres des carrés), nous réduisons ainsi la liste des candidats de plusieurs centaines à une vingtaine.

. Ils sont aisément introduits au sommet de l'arbre puis descendus de manière récursive jusqu'aux feuilles qui possèdent les carrés qui ont une intersection non-nulle avec leur support.

Le type d'arbre que nous venons de décrire s'appelle *Quadtree*. De manière similaire à cet arbre à deux dimensions où il est formé de carrés à diviser en quatre, il est possible d'accélérer la sélection des nœuds candidats en pratiquant des découpes en deux sur des segments à une dimension et à des découpes en huit sur des cubes à trois dimensions. À trois dimensions, l'arbre porte le nom d'*octree*.

Nous détaillons l'algorithme sur l'exemple de la figure I.3.8 pour clarifier. Dans un carré, 45 supports circulaires sont présents, qui sont plus nombreux et petits dans le coin supérieur droit. Pour cet exemple, nous choisissons une limite de $25 x_i$ par feuille de l'arbre. L'algorithme débute avec le grand carré qui est associé aux 45 supports. Celui-ci est divisé en 4 carrés A, B, C et D. Ce sont les fils du grand carré. Nous faisons une boucle sur A, B, C, D pour leur attribuer les supports parmi les 45 avec lesquels ils ont une intersection. Il y a 21 supports à attribuer à A. Nous descendons en A, constatons que le critère d'arrêt est vérifié et remontons aussitôt. Il y a 27 supports à attribuer à B, qui sont représentés en trait plein (fin ou gras). Nous descendons en B et constatons que la division n'est pas finie. Nous divisons B en 4 carrés (a, b, c et d) et attribuons à chacun les supports parmi les 27 avec lesquels ils ont une intersection. Le critère d'arrêt est vérifié pour chacun. Par exemple, il y a 21 supports attribués à b, qui sont représentés en trait plein gras. Nous pouvons supprimer la liste des supports en B qui n'est plus nécessaire. Nous remontons d'un étage où nous traitons C (14 supports) puis D (21 supports). Nous pouvons à présent supprimer la liste associée au grand carré. Nous remontons alors d'un étage mais comme nous sommes à la racine, l'algorithme s'achève. Désormais, si nous cherchons les fonctions poids au point représenté par une étoile, il est très rapide de comparer ses coordonnées avec celles du centre du grand carré pour déterminer qu'il appartient à B, puis de les comparer au centre de B pour conclure qu'il appartient à b.

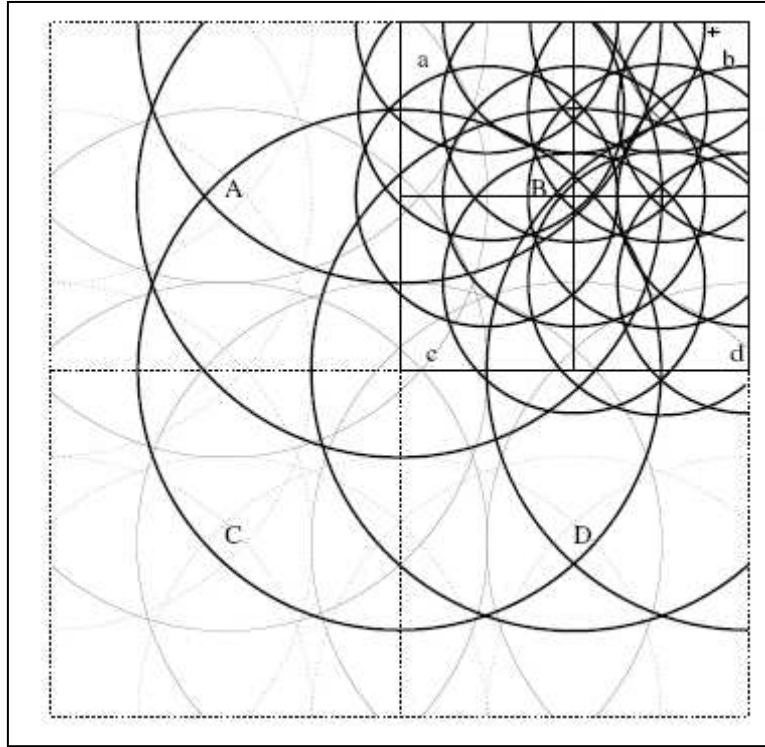


Figure. I.3.8. Quadtree pour sélectionner les nœuds

Nous cherchons donc simplement les poids potentiellement non nuls en ce point parmi les 21 supports candidats de b, plutôt que sur l'ensemble initial des 45 supports. Évidemment, le gain sur un exemple réel possédant nettement plus de noeuds est plus important que sur ce petit exemple.

• Implémentation des formules

L'expression utilisée dans l'équation (I.3.24) pour la fonction de forme sépare les facteurs $c(x)$ qui dépend du point d'évaluation, $p(x_i)$ qui dépend du noeud et $w_i(x)$ qui dépend des deux. Pour rappel :

$$\phi_i(x) = c^T(x) p(x_i) w_i(x) \quad (\text{I.3.47})$$

Avec

$$c(x) = A^{-1}(x).p(x) \quad (\text{I.3.48})$$

Cette expression facilite le calcul efficace des fonctions de forme et de leurs dérivées. En effet, elle met en évidence le fait que, en un point donné, il est préférable de calculer le vecteur c dans un premier temps puisqu'il est le même pour tous les noeuds, ce qui nécessite une seule inversion de la matrice A puis seulement de faire une boucle sur les noeuds de poids non-nul au point considéré pour calculer leur fonction de forme. Elle est différente de l'expression originale de Nayroles, Touzot et Villon [9] qui a été reprise par Belytschko, Lu et Gu [10] puis dans tous les articles sur la méthode sans maillage :

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) (A^{-1}(x) B(x))_{ji} \quad (\text{I.3.49})$$

Avec

$$B(x) = [w_1(x)p(x_1), w_2(x)p(x_2), \dots, w_N(x)p(x_N)] \quad (\text{I.3.50})$$

Où on suggère au contraire de faire une substitution arrière pour chaque noeud. Plus encore, si les dérivées des fonctions de forme sont nécessaires comme c'est le cas quand l'approximation MLS est utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles par une méthode sans maillage, la dérivation de l'équation (I.3.24) montre qu'il n'est nécessaire de factoriser qu'une seule fois la matrice A et de faire une substitution arrière une fois pour c et une fois pour chacune des dérivées $c_{,k}$

avec $k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$. En effet, les dérivées sont données par :

$$\phi_{i,k}(x) = c_{,k}^T(x) \cdot p(x_i) \cdot w_i(x) + c^T(x) \cdot p(x_i) \cdot w_{i,k}(x) \quad (\text{I.3.51})$$

avec

$$\begin{aligned} c_{,k}(x) &= (A^{-1})_{,k}(x) \cdot p(x) + A^{-1}(x) \cdot p_{,k}(x) \\ &= -A^{-1}(x) \cdot A_{,k}(x) \cdot A^{-1}(x) \cdot p(x) + A^{-1}(x) \cdot p_{,k}(x) \\ &= A^{-1}(x) \cdot [-A_{,k}(x) \cdot c(x) + p_{,k}(x)] \end{aligned} \quad (\text{I.3.52})$$

Et

$$A_{,k}(x) = \sum_{i=1}^{nx} w_{i,k}(x) \cdot p(x_i) \cdot p^T(x_i) \quad (\text{I.3.53})$$

Nous remarquons encore que dans les équations (I.3.21) et (I.3.53) les matrices symétriques des produits dyadiques $p(x_i)p^T(x_i)$ qui interviennent ne dépendent pas du point où nous cherchons à évaluer les fonctions de forme. C'est aussi le cas pour les vecteurs $p(x_i)$ qui interviennent dans les équations (I.3.24) et (I.3.51).

Donc, si la taille du problème le permet, il est plus efficace de calculer une fois pour toutes ces grandeurs et de les conserver à chaque noeud à côté des grandeurs qui définissent le noeud que sont les coordonnées du noeud et le pointeur vers la fonction poids. Finalement, en remarquant que la première des fonctions de base est la fonction unité et qu'elle est suivie des fonctions linéaires si la base est au moins linéaire, on peut astucieusement se contenter de conserver uniquement $p(x_i)p^T(x_i)$ et d'y retrouver $p(x_i)$ et les coordonnées x_i . Par exemple, pour une base linéaire bidimensionnelle, le produit dyadique est

$$p(x_i)p^T(x_i) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ x_i & x_i^2 & x_i y_i \\ y_i & x_i y_i & y_i^2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.3.54})$$

Il suffit de conserver la partie inférieure de cette matrice au nœud i dans un tableau I.3.3

Tableau I.3.3. Base linéaire bidimensionnelle

	Constant	Linéaire		Quadratique
	1	$x_i \quad y_i$		$x_i^2 \quad x_i y_i \quad y_i^2$

Et de programmer de telle sorte que le tableau des éléments 2 et 3 soit retourné si les coordonnées sont demandées et que le tableau des éléments 1, 2 et 3 soit retourné si les fonctions de base sont demandées.

L'algorithme détaillé pour calculer ϕ_i et $\phi_{i,k}$ en un point x donné est le suivant :

- Trouver la liste des noeuds candidats à l'aide de l'arbre.
- Initialiser les matrices symétriques A et $A_{,k}$ ($k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$) à 0.
- Faire une boucle sur les noeuds candidats et calculer le poids de ce noeud et ses dérivées en x . Si ce poids est non-nul,
 - o retenir le numéro de ce noeud dans le tableau des noeuds d'influence ;
 - o conserver la valeur du poids et de ses dérivées ;
 - o ajouter la contribution de ce noeud à A , (I.3.21) et $A_{,k}$, (I.3.53) pour $k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$ à l'aide des matrices des produits dyadiques pré-calculées.
- Calculer la factorisation de Cholesky de A . Nous pouvons utiliser la factorisation de Cholesky, plus efficace que la factorisation LU plus générale, car A est symétrique définie positive.
- Évaluer p .
- Calculer $c = A^{-1} \cdot p$ par substitution arrière sur la matrice A factorisée.
- Pour $k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$,
 - o évaluer $p_{,k}$;
 - o calculer $c_{,k} = A^{-1} [-A_{,k}c + p_{,k}]$ par substitution arrière sur la matrice A factorisée.
- Faire une boucle sur les noeuds d'influence retenus à l'étape 3 ($i = 1, 2, \dots, n^x$):
 - o Calculer $d = c^T p(x_i)$ à l'aide du vecteur $p(x_i)$ pré calculé,
 - o Calculer $\phi_i = d \cdot w_i(x_i)$ grâce au poids que nous avons conservé à l'étape 3b.
 - o Pour $k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$, calculer $\phi_{i,k}$ par (I.3.51) connaissant $d, c_{,k}$, le vecteur $p(x_i)$ pré calculé et les valeurs $w_i(x)$ et $w_{i,k}(x)$ retenues plus haut.
 - o Les dérivées secondes sont données par

$$\begin{aligned} \phi_{i,kl}(x) = & c_{,kl}^T(x) \cdot p(x_i) \cdot w_i(x) + c_{,kl}^T(x) \cdot p(x_i) \cdot w_{i,l}(x) + c_{,l}^T(x) \cdot p(x_i) \cdot w_{i,k}(x) \\ & + c^T(x) \cdot p(x_i) \cdot w_{i,kl}(x) \end{aligned} \quad (\text{I.3.55})$$

Avec

$$c_{,kl}(x) = A^{-1}(x) [p_{,kl}(x) - A_{,k}(x)c_{,l}(x) - A_{,l}(x)c_{,k}(x) - A_{,kl}(x)c(x)] \quad (I.3.56)$$

Et

$$A_{,ki}(x) = \sum_{i=1}^N w_{i,kl}(x) \cdot p(x_i) p^T(x_i) \quad (I.3.57)$$

L'algorithme pour obtenir les fonctions de forme et les deux premières dérivées est semblable à l'algorithme précédemment décrit pour le calcul des fonctions de forme et des dérivées premières. Il faut y ajouter le calcul de $w_{,kl}$ à l'étape 3, de $A_{,kl}$ à l'étape 3c, de $c_{,kl}$ comme étape 7c et de $\phi_{,kl}$ comme étape 8d.

I.3.7. Imposition des conditions aux limites essentielles

I.3.7.1. Principe variationnel modifié avec des multiplicateurs de Lagrange supplémentaires

Cette méthode, proposée par Belytschko, Lu et Gu [10], se base sur la forme faible suivante, où des multiplicateurs de Lagrange sont utilisés pour imposer les conditions aux limites sur le déplacement. Le sens physique des multiplicateurs de Lagrange est la réaction à la fixation.

- Déterminer les déplacements $u \in H^1(\Omega)$, les déformations $\varepsilon \in H^0(\Omega)$, les contraintes $\sigma \in H^0(\Omega)$ et les multiplicateurs de Lagrange $\lambda \in H^0(\Omega)$ qui sont tels que le principe variationnel suivant est vérifié pour tout $\delta u \in H^1(\Omega)$ et $\delta \lambda \in H^0(\Omega)$.

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta u^T : \sigma \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \cdot \bar{b} \cdot d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot \bar{t} \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (u - \bar{u}) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u \cdot \lambda \cdot d\Gamma = 0 \quad (I.3.72)$$

Cette forme faible est discrétisée en utilisant une approximation MLS pour u et δu comme ci-dessus et une interpolation pour le champ de multiplicateur de Lagrange (défini seulement sur Γ_u)

$$\lambda = \sum_k \psi_k(s) \lambda_k \quad (I.3.73)$$

$$\delta \lambda = \sum_k \psi_k(s) \cdot \delta \lambda_k \quad (I.3.74)$$

Où les ψ_k sont des fonctions de forme d'interpolation dont la variable est la coordonnée curviligne s le long de Γ_u . En substituant les approximations dans le principe variationnel, nous aboutissons à un système linéaire qui permet de déterminer les inconnues q_i et λ_k :

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g \\ h \end{Bmatrix} \quad (\text{I.3.75})$$

Avec, comme précédemment

$$K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T [D] B_j d\Omega \quad (\text{I.3.76})$$

$$g_i = \int_{\Omega} \phi_i \bar{b} . d\Omega + \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{t} . d\Gamma \quad (\text{I.3.77})$$

Et, en plus,

$$G_{ik} = - \int_{\Gamma_u} \phi_i \psi_k S . d\Gamma \quad (\text{I.3.78})$$

$$h_k = - \int_{\Gamma_u} \psi_k S . \bar{u} . d\Gamma \quad (\text{I.3.79})$$

Où S est une matrice diagonale dont l'élément S_{ii} vaut 1 si le déplacement est imposé selon x_i et 0 sinon.

Remarquons que le système linéaire complet à résoudre est symétrique mais non défini positif.

I.3.7.2. Principe variationnel modifié sans multiplicateurs de Lagrange supplémentaires

Cette méthode, proposée par Belytschko, Lu et Gu [10], repose sur la forme faible précédente où les multiplicateurs de Lagrange sont identifiés dès le début à la réaction à la fixation. Celle-ci s'énonce alors :

- Déterminer les déplacements $u \in H^1(\Omega)$, les déformations $\varepsilon \in H^0(\Omega)$ et les contraintes $\sigma \in H^0(\Omega)$ qui sont tels que le principe variationnel suivant est vérifié pour tout $\delta u \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta u^T : \sigma . d\Omega - \int_{\Omega} \delta u . \bar{b} . d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u . \bar{t} . d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \alpha . (u - \bar{u}) . d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u . t . d\Gamma = 0 \quad (\text{I.3.80})$$

avec $t = (D : \nabla_s u) . n$ et $\alpha = (D : \nabla_s \delta u) . n$.

En substituant les approximations dans le principe variationnel, nous aboutissons à un système linéaire qui permet de déterminer les inconnues q_i

$$Kq = g \quad (\text{I.3.81})$$

Avec

$$K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T [D] B_j d\Omega - \int_{\Gamma_u} (\phi_i S [N] [D] B_j + B_i^T [D]^T [N]^T S \phi_j) d\Gamma \quad (I.3.82)$$

$$g_i = \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_i \bar{b} d\Omega - \int_{\Gamma_u} B_i^T [D]^T [N]^T S \bar{u} d\Gamma \quad (I.3.83)$$

où N est donné par (I.3.18b) à deux dimensions et (I.3.22b) à trois dimensions.

Le système linéaire à résoudre est plus petit que par la méthode précédente. La matrice est encore symétrique non définie positive (contrairement à ce qu'écrivent Lu, Belytschko et Gu).

I.3.7.3. Principe variationnel modifié avec une pénalité

Cette méthode, proposée par Belytschko, Gu et Lu (1994), consiste à ajouter un terme de pénalité à la forme faible :

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta u^T : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \bar{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u \bar{t} d\Gamma - \frac{\beta}{2} \delta \left(\int_{\Gamma_u} \|u - \bar{u}\|^2 d\Gamma \right) = 0 \quad (I.3.84)$$

Qui conduit au système linéaire habituel

$$Kq = g \quad (I.3.85)$$

Avec

$$K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T [D] B_j d\Omega - \beta \int_{\Gamma_u} \phi_i \phi_j d\Gamma \quad (I.3.86)$$

$$g_i = \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_i \bar{b} d\Omega - \beta \int_{\Gamma_u} \phi_i \bar{u} d\Gamma \quad (I.3.87)$$

Il faut bien entendu faire un compromis sur la valeur de β : trop élevé, le système est mal conditionné ; trop faible, la condition sur le déplacement n'est pas précisément imposée.

I.3.7.4. Connexion à un maillage éléments finis

Krongauz et Belytschko [13] proposent une méthode couplée entre la méthode sans maillage et la méthode des éléments finis. Dans une région du domaine, le déplacement est approximé à l'aide des fonctions de forme MLS et dans une autre, il est approximé par les fonctions de forme des éléments finis. Une couche de transition est nécessaire pour garantir la continuité du déplacement. Le déplacement y est approximé par $R u_{\text{sans maillage}} + (1 - R) u_{\text{elements finis}}$ où R est une fonction rampe variant de 0 à 1 de la

région éléments finis à la région sans maillage. Si la frontière Γ_u borde uniquement la région éléments finis, les conditions essentielles peuvent être imposées comme dans la méthode des éléments finis. Cette technique est aussi utile pour limiter la région sans maillage, où le calcul est plus coûteux, à la région où l'on souhaite profiter des avantages que cette méthode offre.

I.3.7.5. Propriété d'interpolation grâce à des fonctions de forme singulières

Pour obtenir la propriété d'interpolation $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ qui permet d'égaliser directement les degrés de liberté aux déplacements imposés, Kaljevic et Saigal [50] proposent d'utiliser des fonctions poids singulières telles que

$$\lim_{x \rightarrow x_i} w_i(x) = \infty \quad (\text{I.3.88})$$

Nous constatons directement sur les fonctions de forme de Shepard (I.3.34) que nous avons bien

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \phi_i(x) = 1 \quad (\text{I.3.89})$$

Dans ce cas puisque le poids au numérateur croît vers l'infini de manière égale la somme des poids au dénominateur. Il est aisé de vérifier que c'est aussi le cas pour les fonctions de forme générales (I.3.24). L'inconvénient de cette méthode est la perte de continuité des dérivées des fonctions de forme.

I.3.8. Intégration

Le calcul de la matrice de raideur K et du vecteur de charge g par les formules ci-dessus demande l'évaluation de certaines intégrales. Des intégrales sur certains contours sont nécessaires pour la contribution des forces de surface au vecteur de charge et, éventuellement, pour la contribution à la matrice de raideur de l'imposition des conditions aux limites essentielles selon la méthode choisie. Une intégrale sur le domaine est nécessaire pour la contribution des forces de volume au vecteur de charge et pour la contribution principale à la matrice de raideur en $\int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega$.

Les intégrations sur le contour s'évaluent numériquement sans difficulté puisqu'une description des frontières est connue, que ce soit de manière analytique ou comme sortie d'un outil de CAO. Il est aisé de découper les frontières en petits intervalles sur lesquels une intégration de Gauss est réalisée. À deux dimensions, les intervalles sont des morceaux de courbe sur lesquels une intégration de Gauss simple est réalisée alors qu'à trois dimensions, les intervalles sont des morceaux de surface sur lesquels une intégration de Gauss double est réalisée.

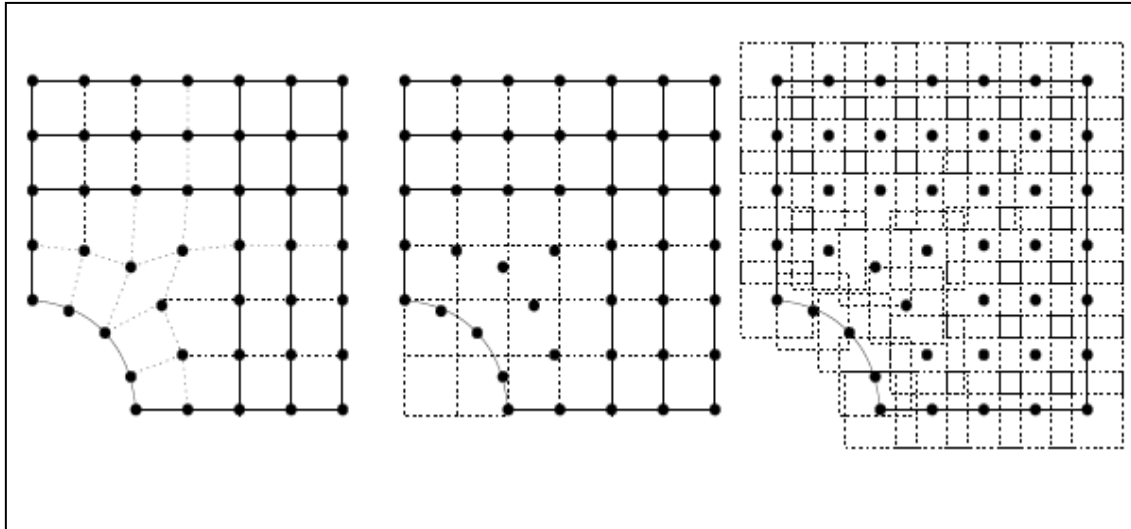


Figure. I.3.9. Intégration

L'évaluation numérique des intégrales sur le domaine est moins aisée. En effet, nous connaissons seulement la pièce par la description de ses frontières à l'intérieur desquelles un ensemble de noeuds est distribué. Au contraire de la méthode des éléments finis, nous ne possédons pas le maillage utilisé pour construire les fonctions de forme et qui convient en plus naturellement comme base pour intégrer, en réalisant une intégration de Gauss sur chaque élément. Les deux méthodes d'intégration les plus communes sont présentées à gauche et au milieu de la figure I.3.9 dans le cas bidimensionnel. À gauche, une découpe de la pièce en cellules est effectuée et une intégration de Gauss est réalisée sur chaque cellule. Sur cette figure, la découpe illustrée est celle d'un maillage d'éléments finis construit sur l'ensemble des nœuds de l'approximation MLS. Ainsi, la densité des points de Gauss sera plus élevée là où l'espacement nodal local est faible, autrement dit là où les intégrantes varient le plus rapidement. Il s'agit de la manière de procéder habituellement utilisée mais il faut préciser que la découpe en cellules ne doit pas nécessairement satisfaire les mêmes exigences qu'un maillage en éléments finis. Au milieu de la figure est illustrée une deuxième technique qui consiste à utiliser une division uniforme en cellules carrées dans laquelle est incluse la pièce. L'intégration de Gauss est réalisée sur chaque cellule en attribuant un poids nul aux points de Gauss qui se trouvent en-dehors de la pièce. Plutôt que d'utiliser des cellules uniformes, nous pourrions aussi partir du quadrilatère construit précédemment et réaliser une intégration de Gauss sur chacun des carrés disjoints dont l'union recouvre la pièce.

I.4. Comparaison entre les méthodes NEM et MLS

Nous avons exposé deux méthodes sans maillage, la méthode des éléments naturels NEM et la méthode des moindres carrés mobiles MLS. Ces deux méthodes ont des propriétés communes et distinctes, qui impliquent des avantages et inconvénients communs et distincts. Elles sont basées sur la construction des fonctions de forme en chaque point, le calcul de leurs dérivés, l'imposition des conditions aux limites et enfin l'intégration comme c'est le cas en méthode des éléments finis. Le tableau 4.1 montre une comparaison entre les deux méthodes avec avantages et inconvénients par rapport à la méthode élément finis.

Tableau I.4.1. Propriétés des méthodes NEM et MLS

Propriétés	NEM	MLS
	Présence d'interpolation $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$	Absence d'interpolation $\phi_i(x_j) \neq \delta_{ij}$
	Le support est défini comme union de n cercle, figure I.2.3.	Le support est défini par un cercle, figure I.3.3.
	Linéarité sur les bords convexes	
	La partition de l'unité $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega$	
	Consistance linéaire $x = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) x_i$	
	Continuité de fonction de forme	

Tableau I.4.2. Avantages des méthodes NEM et MLS

Avantages	NEM	MLS
		La non-nécessité de raffinement permet de réduire une part importante de calcul.
		Le coût de calcul pour définir le support d'influence de chaque nœud n'existe pas, car, le support est indépendant des positions des nœuds.
		Le support relativement large des fonctions de forme permet de remédier à un certain degré aux problèmes de blocages rencontrés dans les problèmes d'incompressibilité.
	La non-nécessité de construire un maillage pour la construction de l'approximation permet de traiter des domaines de géométries complexes, en utilisant seulement le nuage de noeuds [39].	
	La qualité de la solution est beaucoup moins sensible à la position relative des noeuds, autorisant, dans les formulations lagrangiennes actualisées, de construire la solution à partir de positions relatives entre les noeuds interdites dans la MEF.	
	Dans les formulations lagrangiennes, totales l'opérateur gradient de la transformation calculé en un point d'intégration est construit sur la base d'un voisinage de noeuds généralement plus important que les seuls noeuds de l'élément dans la MEF [34].	
	Les fonctions de forme sont généralement très isotropes, et réduisent considérablement le problème de la dépendance entre la direction des bandes de cisaillement ou des fissures et la direction du maillage.	
	La possibilité d'insérer, ou de retirer des noeuds très facilement, la position relative des noeuds entre eux étant très peu influente sur la qualité de la solution.	

Tableau I.4.3. Inconvénients des méthodes NEM et MLS

Inconvénients	NEM	MLS
		Le support doit couvrir un nombre suffisant de particules pour que la méthode soit stable et donc être suffisamment large. Au contraire, un support trop large entraîne des coûts de calcul plus importants et une qualité fortement dégradée.
		La difficulté liée à l'imposition des conditions aux limites. En effet, pour pouvoir imposer les conditions aux limites de type Dirichelt de manière directe comme dans la méthode des éléments finis, il est nécessaire (a) que l'approximation construite passe par les valeurs nodales (interpolation stricte) (b) que l'influence des noeuds intérieurs s'annule sur le bord du domaine.
		La difficulté de traiter les problèmes de trois dimensions.
	Le second inconvénient est lié à l'intégration numérique. En effet, dans la majorité des cas, les fonctions de forme meshless ne sont pas polynomiales mais rationnelles, ce qui rend les schémas d'intégration très fins pour minimiser l'erreur due à la non-coïncidence entre le support des fonctions de forme et les cellules d'intégration, entraînant des coûts de calcul excessifs à cause d'un nombre de points d'intégration nécessaire très important.	
	Les difficultés apparaissent pour des géométries non convexes, comme par exemple la présence d'un bord concave, d'une cavité ou d'une fissure, Le problème essentiel lors de la présence de bords non-convexes est lié une fois encore à la définition du support des fonctions de forme (domaine d'influence d'un noeuds).	

I.5. Conclusion

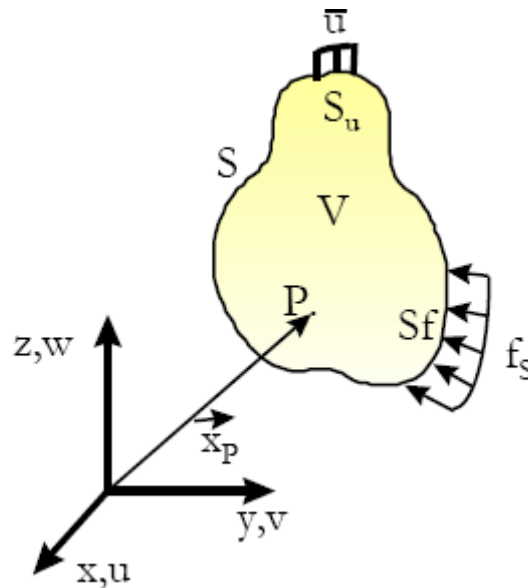
La simulation des procédés de mise en forme est généralement caractérisée par des modèles de géométries complexes, pouvant fortement évoluer si de grandes transformations interviennent, avec d'éventuelles discontinuités matérielles. Face à ces difficultés, la génération automatique des maillages dans le cadre de la méthode des éléments finis se heurte toujours aujourd'hui au cas des géométries complexes tridimensionnelles, spécialement dans le cas où des éléments hexaédriques sont utilisés, leur qualité étant meilleure que celle des éléments tétraédriques. Les méthodes sans maillage, développées depuis maintenant une dizaine d'années, permettent d'éviter de construire la solution à partir d'un maillage d'éléments, en prenant seulement en compte le nuage de noeuds. La majorité des méthodes sans maillage est cependant associée à des temps de calcul beaucoup plus importants que dans le cadre de la MEF, et de difficultés dans l'imposition des conditions aux limites. Malgré ces problèmes, les méthodes sans maillage ont été appliquées avec succès dans de nombreuses simulations de procédés très difficiles à traiter par la méthode des éléments finis. Nous avons présenté et comparé deux méthodes de type sans maillage (NEM, MLS). La méthode MLS présente certains avantages particuliers comme :

- Le raffinement n'est pas nécessaire ;
- Le support est indépendant de la position des nœuds ;
- Le support relativement large des fonctions de forme permet de remédier à un certain degré aux problèmes de blocages rencontrés dans les problèmes d'incompressibilité.

Donc, nous choisirons la méthode MLS pour la simulation et modélisation mécanique de la mise en forme d'un matériau rigide plastique en 2D.

Chapitre II.

Modélisation mécanique de la mise en forme de matériaux rigide-plastique



Nous débutons ce chapitre par un rappel mathématique sur la déformation en mise en forme avec des exemples simples, ensuite, nous donnons les formulations principales et générales sur le procédé de mise en forme. Finalement, nous exposons deux méthodes de calcul appliquées aux matériaux à comportement rigide-plastique.

II.1. Rappels mathématiques sur la mise en forme

L'expérience de la déformation d'un corps est courante et permet une compréhension intuitive de la notion de déformation : à la différence d'un mouvement de corps rigide, on dit qu'un corps s'est déformé si les distances relatives de ses points matériels ont varié au cours du mouvement. Cela conduit à introduire de manière relativement simple la mesure de la déformation comme l'étude des variations de longueurs et d'angles d'éléments de matière, observées au cours du mouvement. Dans cette partie, nous allons donner quelques idées générales sur les mesures mathématiques possibles de la déformation, que nous comparerons sur des exemples simples, et nous ferons le lien avec la simulation physique.

II.1.1. Tenseur de déformation

II.1.1.1. Tenseurs de déformation lagrangiens

Considérons le schéma de la figure 1.1. Au temps $t = 0$, chaque point matériel M_0 est repéré dans un repère fixe de l'espace par un vecteur X décomposable suivant les axes 1, 2, 3 en x_1, x_2, x_3 .

Au temps $t = t_f$, après une déformation qui amène le point M_0 en M , le point M est repéré par le vecteur position x . Au cours du mouvement, chacun des points s'est déplacé ; on définit le champ de vecteur déplacement u , puis son gradient, et le tenseur F ou application linéaire tangente tels que :

$$u = x - X \quad (\text{II.1.1})$$

$$\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial X} \quad (\text{II.1.2})$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = 1 + \text{grad}(u) \quad (\text{II.1.3})$$

On définit le *tenseur de déformation de Cauchy-Green droit* :

$$C = F^T \cdot F = 1 + \text{grad}(u) + \text{grad}^T(u) + \text{grad}^T(u) \cdot \text{grad}(u) \quad (\text{II.1.4})$$

On rappelle [51] que :

- les termes diagonaux C_{ij} représentent les rapports de longueurs de vecteurs initialement unitaires et parallèles aux axes du repère (figure II.1.1) :

$$C_{11} = (l_1 / L_1)^2 \quad (\text{II.1.5})$$

- les termes non diagonaux $C_{ij}, i \neq j$, représentent les variations d'angles entre deux vecteurs initialement unitaires portés par les axes du repère :

$$\sin \alpha_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}} \quad (\text{II.1.6})$$

En l'absence de déformation (mouvement de corps rigide), $C = 1$. On utilisera donc plutôt le tenseur de Green-Lagrange L , qui s'annule s'il n'y a pas déformation :

$$L = \frac{1}{2}(C - 1) = \frac{1}{2}[\text{grad}(u) + \text{grad}^T(u) + \text{grad}^T(u).\text{grad}(u)] \quad (\text{II.1.7})$$

En négligeant les termes d'ordre 2, on retrouve le tenseur de petites déformations bien connu :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\text{grad}(u) + \text{grad}^T(u)] \quad (\text{II.1.8})$$

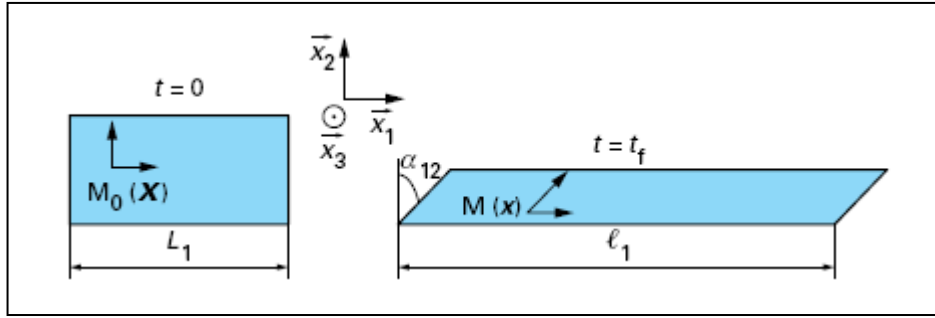


Figure II.1.1. Définition de la déformation d'un milieu continu

II.1.1.2. Tenseurs de déformation eulériens

De la même façon, on définit le *tenseur de Cauchy-Green gauche* :

$$B = F.F^T = 1 + \text{grad}(u) + \text{grad}^T(u) + \text{grad}^T(u).\text{grad}(u) \quad (\text{II.1.9})$$

dont on tire le tenseur de déformation d'Euler-Almansi :

$$E = \frac{1}{2}(1 - B^{-1}) \quad (\text{II.1.10})$$

$$\text{sachant que : } F^{-1} = \frac{\partial X}{\partial x}.$$

II.1.1.3. Autres mesures tensorielles de la déformation

On montre que le tenseur F peut être décomposé de deux façons en une rotation pure (matrice R) et une élongation pure représentée par une matrice symétrique (U ou V) :

$$F = R.U \quad (\text{II.1.11})$$

$$\text{ou } F = V.R \quad (\text{II.1.12})$$

U est le tenseur d'élongation droit, V le tenseur d'élongation gauche de cette décomposition polaire. On notera que, puisque $R^T.R = R.R^T = 1$:

$$C = U^2 \quad (\text{II.1.13})$$

$$B = V^2 \quad (\text{II.1.14})$$

On introduit alors deux familles de tenseurs de déformation :

$$I_\alpha = \frac{1}{\alpha} [U^\alpha - 1] \text{ (Lagrangiens). Par continuité, on définit } I_0 = \log(U) \quad (\text{II.1.15})$$

$$V_\alpha = \frac{1}{\alpha} [U^\alpha - 1] \text{ (Eulériens). Par continuité, on définit } e_0 = \log(V) \quad (\text{II.1.16})$$

On remarque que $L = I_2$ et que $E = e_2$. En pratique, seuls ceux-là et les formes logarithmiques sont employés.

Remarque : nous employons ici le symbole Log pour indiquer qu'il s'agit du logarithme d'une matrice.

II.1.2. Mesure scalaire de déformation

II.1.2.1. Normes des tenseurs de déformation

Par exemple :

$$\|L\| = \sqrt{L:L} = \left(\sum_{i,j=1}^3 L_{ij}^2 \right)^{0.5} \quad (\text{II.1.17})$$

Remarque : on emploie ici le signe : pour indiquer le produit doublement contracté de deux tenseurs.

On dispose ainsi, avec $\|L\|$, $\|E\|$, $\|I_\alpha\|$ et $\|e_\alpha\|$ d'une infinité de mesures scalaires de la déformation, mesures toutes aussi correctes les unes que les autres, mais différentes, les unes étant lagrangiennes (rapportées aux longueurs initiales), les autres eulériennes (rapportées aux longueurs courantes). $\|\mathcal{E}\|$, elle, est une approximation utilisable seulement pour de petites déformations ($\|\mathcal{E}\| \ll 1$).

II.1.2.2. Déformation plastique équivalente

On considère de nouveau la vitesse $v = \frac{du}{dt}$, dont on définit le gradient :

$$grad(v) = \frac{\partial v}{\partial x} = \dot{F} \cdot F^{-1} \quad (II.1.18)$$

Le tenseur (symétrique) de vitesse de déformation s'écrit :

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} [grad(v) + grad^T(v)] \quad (II.1.19)$$

La vitesse de déformation généralisée (scalaire) s'écrit :

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon} \quad (II.1.20)$$

Le facteur arbitraire $2/3$ n'est présent que pour retrouver une vitesse de déformation égale à V/l en traction simple sur éprouvette cylindrique (V étant la vitesse de traction et la longueur finale).

La déformation cumulée s'écrit :

$$\bar{\epsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}} dt \quad (II.1.21)$$

On démontre que :

$$\bar{\epsilon} = \int_0^t \sqrt{\frac{1}{6} Tr([C^{-1}(t) \cdot \dot{C}(t)]^2)} dt \quad (II.1.22)$$

où $\dot{C}$ est la dérivée particulière $\frac{dC}{dt}$; C^{-1} est la matrice inverse de C .

Remarque : la définition ci-dessus de la vitesse de déformation équivalente n'est valable que pour un matériau rigide-plastique (sans élasticité), isotrope et incompressible (par exemple un matériau de type Von Mises). Dans le cas d'un comportement régi par une loi d'anisotropie [52] ou de compressibilité [53], on peut définir des vitesses de déformation équivalentes $\dot{\epsilon}_{eq}$, variables conjuguées des contraintes équivalentes σ_{eq} (c'est-à-dire que le produit $\sigma_{eq} \cdot \dot{\epsilon}_{eq}$ est égal à la puissance dissipée). Mais leur définition fait nécessairement intervenir des propriétés plastiques du matériau (coefficients d'anisotropie, fonctions décrivant la compressibilité plastique). On conclut donc que, si le tenseur de vitesse de déformation est une variable purement cinématique, la vitesse de déformation équivalente ne l'est pas, sauf dans le cas particulier d'un comportement rigide-plastique isotrope et incompressible. Il en est de même pour les déformations équivalentes que l'on peut alors définir par :

$$\epsilon_{eq} = \int_0^t \dot{\epsilon}_{eq} dt \quad (II.1.23)$$

II.1.3. Exemples numériques

II.1.3.1. Traction simple

Considérons la figure II.1.2. On tire sur le matériau à la vitesse V ; on pose $\lambda = l / L$, et on suppose le matériau incompressible :

$$\begin{aligned} u_x &= (a - A)(X / A) = (1/\sqrt{\lambda} - 1)X = (a - A)(x / a) \\ u_y &= (a - A)(Y / A) = (1/\sqrt{\lambda} - 1)Y = (a - A)(y / a) \\ u_z &= (l - L)(Z / L) = (\lambda - 1)Z = (l - L)(z / l) \end{aligned} \quad (\text{II.1.24a,b,c})$$

$$\begin{aligned} v_x &= -Vx / 2l \\ v_y &= -Vy / 2l \\ v_z &= -Vz / 2l \end{aligned} \quad (\text{II.1.25a,b,c})$$

En appliquant les équations ci-dessus nous avons:

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \begin{pmatrix} -1 + 1/\sqrt{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -1 + 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \varepsilon \quad (\text{II.1.26})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1/\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.27})$$

$$F = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.28})$$

$$B = C = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.29})$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1 + 1/\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(-1 + 1/\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.30})$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-1/\lambda^2) \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.31})$$

$$U = V = F \rightarrow \log U = \log V = F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\log(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\log(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \log(\lambda) \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.32})$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}}\|L\| &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\lambda-1)\sqrt{(\lambda+1)^2 + 2/\lambda^2} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\|E\| &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\lambda-1)\sqrt{[(\lambda+1)/\lambda^2]^2 + 2} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\|\varepsilon\| &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\lambda-1)\sqrt{4\left[1 + 2/\left(\lambda(\sqrt{\lambda}+1)^2\right)\right]} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\|\log(U)\| &= \ln(\lambda) \end{aligned} \quad (\text{II.1.33a,b,c,d})$$

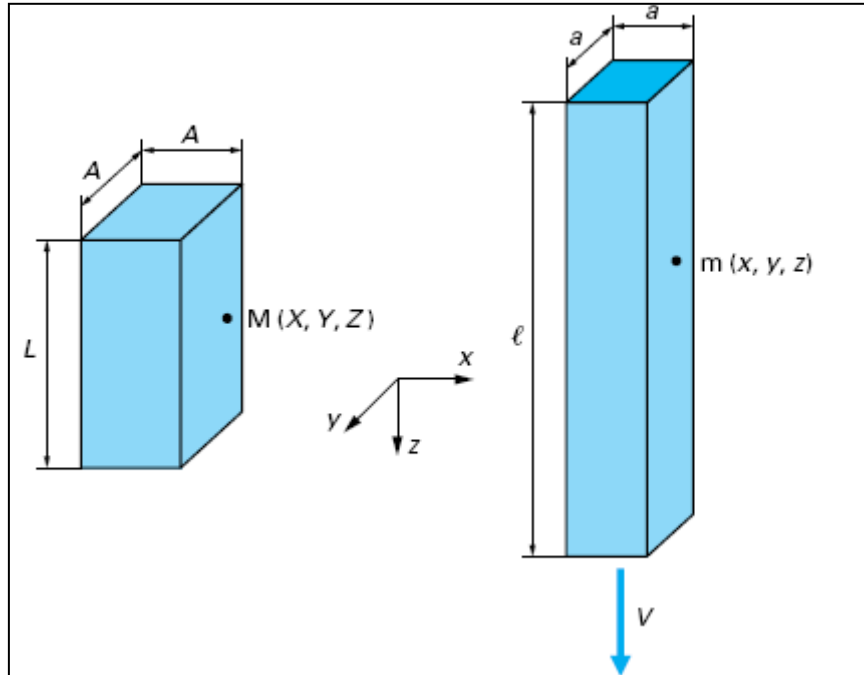


Figure II.1.2. traction simple

On notera que toutes ces mesures sont équivalentes à $\lambda - 1$ quand λ tend vers 1 (déformations infinitésimales). Quant à la déformation cumulée, il est facile d'écrire le tenseur de vitesse de déformation et la vitesse de déformation équivalente :

$$\dot{\epsilon} = \begin{pmatrix} -\frac{V}{2l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{V}{2l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{l} \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\bar{\epsilon}} = V/l \quad (\text{II.1.34})$$

Tableau II.1.1. Comparaison numérique des mesures scalaires

λ	$\bar{\epsilon} = \ln(\lambda) = \bar{\epsilon}_{\min}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \ \log(U)\ = \bar{\epsilon}_{\min}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \ \epsilon\ $	$\sqrt{\frac{2}{3}} \ L\ $	$\sqrt{\frac{2}{3}} \ E\ $
1,0	0	0	0	0	0
1,01	0,00995	0,00995	0,00998	0,01000	0,0099
1,1	0,09531	0,09531	0,09775	0,100052	0,0914
1,25	0,22314	0,22314	0,23776	0,25704	0,2059
1,5	0,40547	0,40547	0,45996	0,54539	0,3671
2,0	0,69315	0,69315	0,88377	1,25831	0,6536

II.1.3.2. Cisaillement simple

Considérons la figure II.1.3 avec un cisaillement simple en déformation plane à la vitesse V ; on suppose le matériau incompressible.

On pose $\chi = c/a$:

$$\begin{aligned} u_x &= \chi \cdot Y = \chi \cdot y \\ u_y &= 0 \quad (y = Y) \\ u_z &= 0 \quad (z = Z) \end{aligned} \quad (\text{II.1.35a,b,c})$$

$$\begin{aligned} v_x &= -Vy/a \\ v_y &= 0 \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.1.36a,b,c})$$

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \begin{pmatrix} 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{II.1.37})$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \chi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.38})$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \chi/2 & 0 \\ \chi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.39})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \chi & 0 \\ \chi & 1+\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.40})$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \chi/2 & 0 \\ \chi/2 & \chi^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.41})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1+\chi^2 & \chi & 0 \\ \chi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.42})$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \chi/2 & 0 \\ \chi/2 & -\chi^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.43})$$

En décomposant F en une matrice orthogonale de rotation et une matrice symétrique, on trouve :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \tan \beta = -\chi/2 \quad (\text{II.1.44})$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+\chi^2/4}} \begin{pmatrix} 1 & \chi/2 & 0 \\ \chi/2 & 1+\chi^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.45})$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{1+\chi^2/4}} \begin{pmatrix} 1+\chi^2/2 & \chi/2 & 0 \\ \chi/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.46})$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{3}}\|L\| &= \sqrt{\frac{2}{3}}\|E\| = \frac{\chi}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\chi^2/2} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\|\varepsilon\| &= \frac{\chi}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\|\log(U)\| &= \frac{2}{\sqrt{3}}\ln(\chi/2 + \sqrt{1+\chi^2/4}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\|\log(V)\|\end{aligned}\quad (\text{II.1.47a,b,c})$$

On notera que toutes ces mesures sont équivalentes à $\chi/\sqrt{3}$ quand χ tend vers 0 (déformations infinitésimales). Quant à la déformation cumulée, il est facile d'écrire le tenseur de vitesse de déformation et la vitesse de déformation équivalente, puis la déformation cumulée :

$$\dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{V}{2a} & 0 \\ \frac{V}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.48})$$

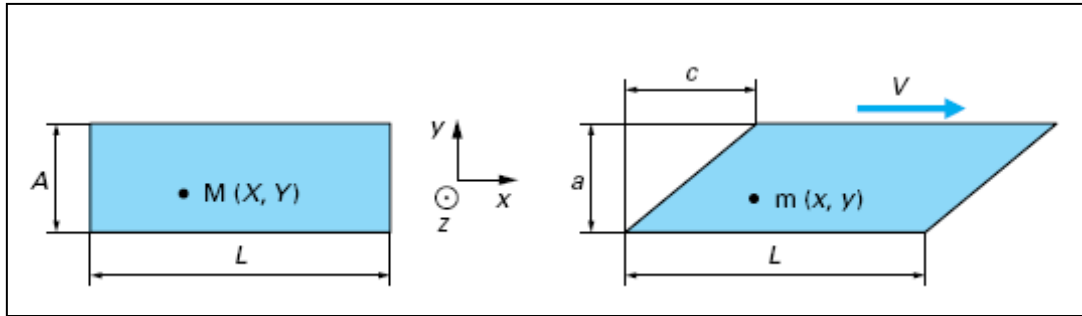


Figure II.1.3. Cisaillement simple

Tableau II.1.2. Comparaison numérique des mesures scalaires

χ	$\bar{\varepsilon} = \chi/\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\ \log(U)\ = \bar{\varepsilon}_{\min}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\ \varepsilon\ $	$\sqrt{\frac{2}{3}}\ L\ $	$\sqrt{\frac{2}{3}}\ E\ $
0,0	0	0	0	0	0
0,01	0,00577	0,00577	0,00577	0,00577	0,00577
0,1	0,05774	0,05771	0,05774	0,05788	0,05788
0,25	0,14434	0,14396	0,14434	0,14658	0,14658
0,5	0,28868	0,28575	0,28868	0,30619	0,30619
1,0	0,57735	0,55566	0,57735	0,70711	0,70711

II.2. Modélisation mécanique du cas général

À l'échelle macroscopique, on assimile le métal à forger, occupant un domaine fini Ω , à un milieu continu et homogène [54]. Le modèle mathématique du problème est donc basé sur les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus, à savoir l'équation de conservation de la matière et l'équation de l'équilibre dynamique. Pour que le problème soit correctement posé, des équations relatives aux conditions aux limites sont introduites.

II.2.1. Equation de l'équilibre dynamique

Pour un solide occupant un domaine fini Ω , l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\text{div} \sigma + F_v = \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\text{Grad} v) \cdot v \right] \quad (\text{II.2.1})$$

où σ est le tenseur symétrique des contraintes, ρ est la masse volumique du matériau, v est la vitesse de la matière, t est le temps et F_v désigne les efforts volumiques décrivant les forces de la gravité.

Pour le problème de la mise en forme de matériaux, il est courant de faire les deux hypothèses suivantes :

- les forces de la gravité sont négligeables devant les efforts de la plasticité.

Soit σ_0 la contrainte d'écoulement d'un lopin en acier de hauteur h , et g est l'accélération de la pesanteur, on suppose alors :

$$\frac{\rho \cdot h g}{\sigma_0} \ll 1 \quad (\text{II.2.2})$$

En effet, pour les aciers σ_0 est de l'ordre de 10^8 Pa , la masse volumique est de l'ordre de $6 \cdot 10^3 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Si $g \approx 10 \text{ m} / \text{s}^2$ alors la hauteur du lopin h doit atteindre 100 mètres pour que les forces de gravité soient de l'ordre de seulement 6% de la contrainte d'écoulement de l'acier.

- les forces d'inerties sont aussi négligeables devant les efforts de la plasticité.

Soit v la vitesse de la matière, on suppose alors :

$$\frac{\rho \cdot v^2}{\sigma_0} \ll 1 \quad (\text{II.2.3})$$

Pour que les forces d'inerties soient de l'ordre de 10% des forces de plasticité il faut que la vitesse de la matière atteigne 41m/s.

Ces deux hypothèses reviennent à dire qu'au cours du procédé de forgeage, le matériau se déforme uniquement sous l'effet des forces imposées par les outillages. L'équation d'équilibre du problème mécanique s'écrit finalement:

$$\text{div} \sigma = 0 \quad (\text{II.2.4})$$

II.2.2. Equation de l'incompressibilité

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (\text{II.2.5})$$

En considérant, d'une part, l'hypothèse de cas stationnaire, la dérivée par rapport au temps de la masse volumique s'annule. D'autre part, si on suppose que le matériau est parfaitement *incompressible* (on néglige sa déformation élastique), ce qui revient à dire que sa masse volumique est constante, l'équation de l'incompressibilité découle de l'équation de conservation de la masse et s'écrit :

$$\text{div} v = 0 \quad (\text{II.2.6})$$

II.2.3. Les conditions aux limites

On désigne par $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la frontière du volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ occupé par le matériau à forger, qu'on appelle *lopin*. Cette frontière peut être décomposée en plusieurs parties disjointes (voir figure II.2.1) : une frontière libre notée $\partial_L\Omega$, une frontière à chargement imposé est notée $\partial_T\Omega$, une frontière à vitesse imposée notée $\partial_V\Omega$ et une frontière en contact avec les outils notée $\partial_C\Omega$.

$$\partial\Omega = \partial_L\Omega \cup \partial_T\Omega \cup \partial_V\Omega \cup \partial_C\Omega \quad (\text{II.2.7})$$

- sur la frontière libre $\partial_L\Omega$ on écrit que la contrainte normale est nulle.

$$\sigma.n = 0 \quad (\text{II.2.8})$$

où n est la normale sortante à la surface de la pièce (voir figure II.2.1). Sur la frontière chargée $\partial_T\Omega$ on écrit que la contrainte normale est égale au vecteur contrainte imposée T :

$$\sigma.n = T \quad (\text{II.2.9})$$

- sur la frontière $\partial_V\Omega$, on écrit que la vitesse est égale à la vitesse imposée v_0 .
- sur la frontière $\partial_C\Omega$ on considère deux types de conditions imposées :
 - une condition relative au contact de type unilatéral entre la pièce et les outils : ce type de contact est décrit par les conditions de Signorini :

$$\begin{aligned} (u - u^{out}).n &\leq \delta \\ (\sigma.n).n = \sigma_n &\leq 0 \\ [(u - u^{out}).n - \delta]\sigma_n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.2.10})$$

où u^{out} est le déplacement de l'outil, σ_n est la pression de contact et δ est une distance de pénétration calculée dans la direction normale de l'outil. En effet, Au cours d'un incrément de calcul, un nœud de la zone de contact peut quitter le contact ou pénétrer dans l'outil :

$$\begin{cases} \text{noeud à l'extérieur de l'outil : } \delta < 0 \\ \text{noeud à la surface de l'outil : } \delta = 0 \\ \text{noeud intérieur à l'outil : } \delta > 0 \end{cases} \quad (\text{II.2.11})$$

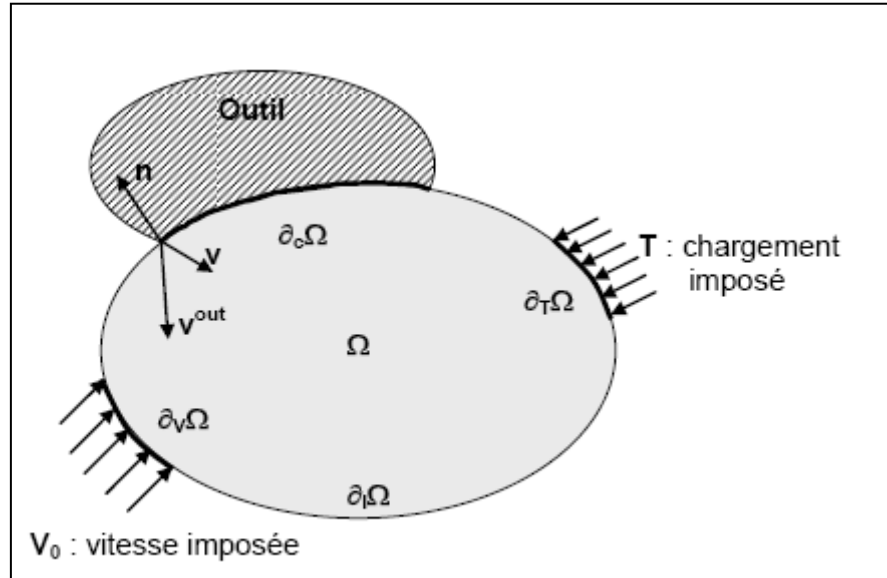


Figure II.2.1 : Conditions aux limites

- une condition relative au frottement entre la pièce et les outils est écrite dans la direction tangentielle et permet d'introduire la cission de frottement τ :

$$\tau = \sigma \cdot n - (\sigma \cdot n \cdot n) \cdot n \quad (\text{II.2.12})$$

II.2.4. Les lois de comportement

II.2.4.1. Les lois rhéologiques

Les lois rhéologiques sont des modélisations de l'écoulement de la matière au cours de sa mise en forme. Pour établir un modèle rhéologique fiable, le comportement du matériau face à différentes sollicitations mécaniques et thermiques est analysé afin de dresser le bilan des paramètres qui caractérisent son comportement. Une loi rhéologique est généralement représentée sous forme d'une relation reliant la contrainte σ à la déformation ε , la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ et la température T^0 :

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T^0, P) \quad (\text{II.2.13})$$

P est l'ensemble des coefficients intervenant dans la loi rhéologique appelés «paramètres rhéologiques». La fiabilité d'une loi dépend de la forme de la relation (II.2.13) et de l'ensemble des paramètres P .

Le tenseur des contraintes est décomposé en une partie déviatorique s et une partie sphérique pI :

$$\sigma = p.I + s \quad (\text{II.2.14})$$

s est le déviateur des contraintes, I est le tenseur identité et p est la pression hydrostatique définie par:

$$\begin{cases} p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \\ s_1 = \sigma_1 - p \equiv 2\sigma_1/3 - (\sigma_2 + \sigma_3)/3 \\ s_2 = \sigma_2 - p \equiv 2\sigma_2/3 - (\sigma_3 + \sigma_1)/3 \\ s_3 = \sigma_3 - p \equiv 2\sigma_3/3 - (\sigma_1 + \sigma_2)/3 \end{cases} \quad (\text{II.2.15})$$

Le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon}$ s'écrit :

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad}(v) + \text{grad}(v)^t) \quad (\text{II.2.16})$$

Des représentations unidimensionnelles de la contrainte et de la déformation sont données par :

- la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)} \quad (\text{II.2.17})$$

- le taux de déformation équivalente :

$$\dot{\epsilon}_e = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2)} \quad (\text{II.2.18})$$

- la déformation équivalente :

$$\epsilon_e = \int_0^t \dot{\epsilon}_e dt \quad (\text{II.2.19})$$

Selon la température du procédé on distingue différents types de lois rhéologiques. Pour les procédés à chaud la déformation élastique est souvent négligée et le comportement du matériau est modélisé par une loi viscoplastique. Dans le cas de procédé à froid l'élasticité ne peut pas être négligée, des lois de type élastoplastique, élasto-viscoplastique ou thermo-élastoviscoplastique sont considérées.

II.2.4.2. Elasticité

L'élasticité se manifeste par un comportement linéaire et réversible. La rhéologie d'un matériau linéaire élastique et isotrope est représentée par la loi de Hooke :

$$\dot{\sigma} = C.\dot{\varepsilon}^{el} = 2\mu.\dot{\varepsilon}^{el} + \lambda.trace(\dot{\varepsilon}^{el})I \quad (II.2.20)$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé qui sont constants pour un matériau homogène :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ et } \lambda = \frac{E.\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (II.2.21)$$

E est le module de Young et ν est le coefficient de poisson, $\dot{\varepsilon}^{el}$ est la vitesse de déformation élastique et $\dot{\sigma}$ est la dérivée particulaire du tenseur des contraintes.

Remarque

Sous l'hypothèse des petites déformations nous utilisons la dérivée particulaire du tenseur des contraintes $\dot{\sigma}$ et non la dérivée objective (telle que la dérivée au sens de Jaumann).

La forme inverse de la loi de Hooke s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}^{el} = C^{-1}\dot{\sigma} = \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma} - \frac{\nu}{E}trace(\dot{\sigma})I \quad (II.2.22)$$

II.2.4.3. Elastoplasticité

La loi de comportement élastoplastique modélise la rhéologie d'un matériau à froid. Le comportement élastoplastique peut être résumé de la manière suivante :

- tant que la contrainte σ est inférieure à une contrainte donnée σ_0 (contrainte d'écoulement) le matériau a un comportement purement élastique décrit par la loi de Hooke (II.2.20).
- dès que la contrainte atteint la valeur σ_0 le comportement du matériau contient une partie plastique. La vitesse de déformation totale se décompose en la somme d'une déformation élastique et une déformation plastique :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{pl} \quad (II.2.23)$$

La partie élastique de la vitesse de déformation est calculée par la loi de Hooke (II.2.22).

Cette additivité des déformations est bien vérifiée pour les métaux où les déformations élastiques sont petites face aux déformations plastiques. La contrainte d'écoulement σ_0 est la contrainte nécessaire pour provoquer une déformation plastique. Celle-ci est généralement déterminée par un essai de traction uni-axiale d'une éprouvette métallique.

II.2.4.3.1. Critère de plasticité

Le comportement élastoplastique est résolu par la loi de Prandtl-Reuss avec le critère de Von Mises. Le critère de plasticité est défini par une surface de charge f . Pour un matériau isotrope et écrouissable il fait intervenir le tenseur des contraintes σ et la contrainte d'écoulement σ_0 :

$$\phi(\sigma, \sigma_0) \leq 0 \quad (II.2.24)$$

Le comportement plastique apparaît lorsque la contrainte σ annule le critère (II.2.24). Ainsi, le critère de plasticité délimite le domaine d'élasticité :

$$\begin{aligned} \phi(\sigma, \sigma_0) &\leq 0 & \text{Comportement élastique} \\ \phi(\sigma, \sigma_0) &> 0 & \text{Comportement plastique} \end{aligned} \quad (II.2.25)$$

Selon le critère de Von Mises, la surface de charge f est représentée par l'équation d'un cylindre à base circulaire de rayon $R = \sigma_0$ et axé sur la trisectrice du repère des contraintes principales $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$:

$$\phi = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 - 2\sigma_0^2 \quad (II.2.26)$$

On démontre que dans un repère quelconque (x, y, z) le critère de Von Mises s'écrit :

$$\phi = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 6.\sigma_{12}^2 + 6.\sigma_{13}^2 + 6.\sigma_{23}^2 - 2\sigma_0^2 \quad (II.2.27)$$

où encore en utilisant la décomposition (II.2.14) des contraintes principales le critère (II.2.26) s'écrit :

$$\phi = 3(s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2) - 2\sigma_0^2 \quad (II.2.28)$$

L'écoulement plastique apparaît donc si :

$$\frac{2}{3}\sigma_0^2 = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad (II.2.29)$$

En utilisant la définition de la contrainte équivalente (II.2.17) l'équation (II.2.29) s'écrit :

$$\sigma_e = \sigma_0 \quad (II.2.30)$$

La fonction f du critère de plasticité s'écrit finalement sous la forme simple :

$$\phi = \sigma_e - \sigma_0 \quad (II.2.31)$$

II.2.4.3.2. Loi d'écoulement plastique : règle de normalité

En plasticité associée, le taux de déformation plastique est défini par la loi d'écoulement :

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda}^{pl} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (\text{II.2.32})$$

L'écoulement plastique se produit dans la direction normale à la surface de plasticité avec une intensité donnée par le scalaire $\dot{\lambda}^{pl}$.

La déformation plastique étant incompressible, on écrit alors :

$$\left(\dot{\epsilon}^{pl}_1 + \dot{\epsilon}^{pl}_2 + \dot{\epsilon}^{pl}_3 \right) = 0 \quad (\text{II.2.33})$$

Pour un matériau de Von Mises l'équation (II.2.32) s'écrit :

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda}^{pl} \frac{3}{2} \frac{s}{\sigma_0} \quad (\text{II.2.34})$$

et le déviateur des contraintes pour un matériau plastique est donné par :

$$s = \frac{2}{3} \sigma_0 \frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{\dot{\epsilon}^{pl}} \quad (\text{II.2.35})$$

En résumé, les équations de l'élastoplasticité s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{pl} \\ \dot{\epsilon}^{el} = D^{-1} \dot{\sigma} \\ \dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda}^{pl} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ f(\sigma, \sigma_0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.2.36})$$

II.3. Méthode de calcul en rigide plastique

Les méthodes de calcul en plasticité ont profondément évolué ces dix dernières années, à partir des travaux des pionniers en viscoplasticité [55] [56] [57] et en élastoplasticité [58]. Les méthodes utilisées jusque là : méthode des tranches, méthodes extrémales, méthode des lignes de glissement, méthode de viscoplasticité, sont progressivement remplacées par la méthode des éléments finis dont la puissance et la souplesse permettent de prendre en compte des géométries complexes, des comportements de plus en plus réalistes, et de développer des codes de calcul utilisables dans l'industrie. Ces changements ont été rendus possibles par l'augmentation spectaculaire des performances des ordinateurs de coût abordable par une entreprise moyenne, et par l'apparition des stations de travail comportant un terminal graphique évolué. Néanmoins les anciennes méthodes, outre leur intérêt historique, conservent un intérêt pédagogique indéniable et leur application intelligente à des problèmes complexes, en simplifiant au maximum les conditions physiques, permet d'obtenir des ordres de grandeur utiles, qu'il est souvent intéressant de comparer aux modèles sophistiqués dans lesquels une erreur de donnée est possible, et parfois difficile à détecter. Dans ce qui suit, certaines de ces méthodes seront donc rappelées brièvement en donnant les éléments indispensables à leur mise en oeuvre.

II.3.1. Méthode de tranches

Cette méthode s'applique essentiellement aux produits plats, mais nous présenterons également un exemple différent dans lequel cette condition n'est pas vérifiée, mais où la méthode permet encore d'obtenir un résultat intéressant, qualitativement en accord avec des observations expérimentales. Bien que des justifications théoriques puissent être développées (méthode de Hill, ou intégration des équations exactes pour obtenir une moyenne sur l'épaisseur), nous nous bornerons ici à illustrer par des exemples de plus en plus généraux, les principes de base de la méthode.

II.3.1.1. Bipoinçonnement en déformation plane : produit mince

Cette configuration, représentée sur la figure II.3.1, est un test de laboratoire fréquemment utilisé non seulement pour déterminer la contrainte d'écoulement du matériau bipoinçonné, mais également pour déduire le coefficient de frottement en effectuant des essais sous différentes charges [59].

Dans la pratique, la largeur L de la tôle poinçonnée est assez grande par rapport à la largeur du poinçon $2a$, pour que l'on puisse considérer que l'écoulement au cours de l'écrasement correspond à une déformation plane selon le plan Oxy , comme cela est schématisé sur la figure II.3.2.

Compte tenu de la symétrie du problème, on constate que la matière s'écoulera vers la droite de l'axe Oy pour $x > 0$, et vers la gauche si $x < 0$, l'axe Oy lui-même correspond à une ligne neutre où la composante horizontale de la vitesse est nécessairement nulle. Nous supposerons que le matériau est rigide plastique, qu'il obéit au critère de von Mises, que toute la zone sous le poinçon est plastifiée et que le frottement à l'interface poinçon-tôle est de type Tresca.

À ce stade nous ajouterons les hypothèses propres à la méthode des tranches :

- Les axes Ox , Oy sont des axes principaux pour les contraintes dans toute la zone déformée plastiquement ;
- les contraintes sont constantes dans l'épaisseur, et ne dépendent donc que de x .

Nous analyserons donc la partie que l'on découpe en tranches verticales infinitésimales comme indiqué sur la figure II.3.2.
L'équilibre de chaque tranche est ensuite envisagé (figure II.3.3).

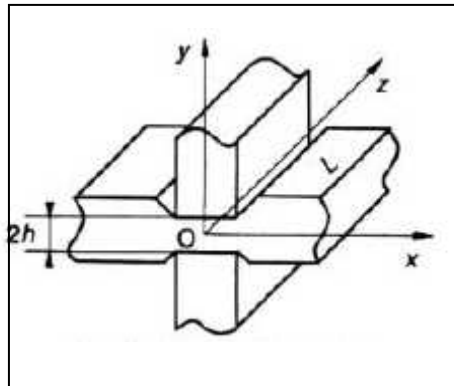


Figure II.3.1. Schématisation du bipoinçonnement d'un produit plat

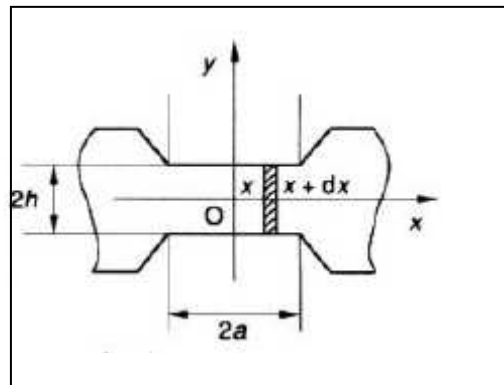


Figure II.3.2. Bipoinçonnement d'un produit plat : découpage en tranches verticales

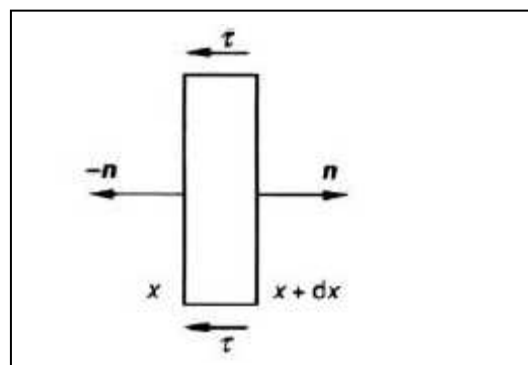


Figure II.3.3. Analyse d'une tranche

Compte tenu de nos hypothèses, le tenseur des contraintes prend la forme simple :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x) & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.1})$$

Il faudrait évidemment y ajouter la composante :

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{II.3.2})$$

Cette forme n'est pas rigoureuse, en particulier, aux interfaces tôle-poinçon où le frottement introduit une cisssion non nulle, mais nous admettons que la perturbation n'affecte qu'une épaisseur négligeable.

Nous écrirons alors le bilan des forces horizontales sur chaque tranche, en considérant une longueur unité selon la direction Oz (dans le cas contraire, il suffira de multiplier toutes les forces f obtenues par la longueur L) :

- face verticale correspondant à l'abscisse x : la normale sortante est dirigée vers les x négatifs ; on aura donc :

$$f_x = -\sigma_{xx}(x).2h \quad (\text{II.3.3})$$

- face verticale correspondant à $x + dx$: ici la normale est portée selon Ox :

$$f_{x+dx} = -\sigma_{xx}(x + dx).2h \quad (\text{II.3.4})$$

- faces horizontales : comme indiqué sur la figure II.3.3, la tranche de matière étant animée d'un mouvement dirigé selon Ox , les forces de frottement sont résistantes, soit :

$$df_\tau = -2\tau.dx \quad (\text{II.3.5})$$

où la cisssion de frottement est donnée par la loi de Tresca, soit :

$$\tau = \bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{II.3.6})$$

avec $\bar{m}$ coefficient de frottement de la loi de Tresca ($0 \leq \bar{m} \leq 1$) ;

σ_0 contrainte d'écoulement en traction monoaxiale.

En l'absence de force d'inertie nous écrirons donc :

$$f_x + f_{x+dx} + df_\tau = 0 \quad (\text{II.3.7})$$

ce qui permet d'écrire après simplification :

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = \frac{1}{h} \bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{II.3.8})$$

On supposera que les bords de la tôle sont libres, ce qui se traduit en particulier par $\sigma_{xx}(a) = 0$ et permet d'intégrer l'équation différentielle précédente en :

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{h} \bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} (a - x) \quad (\text{II.3.9})$$

Pour obtenir la composante σ_{yy} nous utiliserons l'expression du critère de plasticité de von Mises en déformation plane, qui s'écrit :

$$|\sigma_{yy} - \sigma_{xx}| = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{II.3.10})$$

En observant que le procédé correspond à une compression, on doit obtenir $\sigma_{yy} < 0$ pour $0 \leq x \leq 1$, ce qui conduit à :

$$\sigma_{yy} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{\bar{m}}{2h} (a - x) \right] \quad (\text{II.3.11})$$

Tenant compte de la symétrie du problème, l'allure des courbes $\sigma_{xx}(x)$ et $\sigma_{yy}(x)$ est donnée sur la figure II.3.4 : on parle de « colline de pression » pour caractériser l'allure de σ_{yy} .

L'effort de bipoinçonnement est obtenu en intégrant σ_{yy} et en tenant compte de la symétrie, soit :

$$F_y = 2 \int_0^a \sigma_{yy}(x) dx = -\frac{4\sigma_0}{\sqrt{3}} a \left(1 + \bar{m} \frac{a}{4h} \right) \quad (\text{II.3.12})$$

On observe que le terme dépendant du frottement peut devenir prépondérant lorsque le rapport $\frac{a}{h}$ devient grand, et que le coefficient de frottement est important (à chaud on estime que $\bar{m}$ varie entre 0,3 et 0,5).

Remarque : il est possible de réaliser des calculs pour différents taux d'écrasement, il est alors préférable de prendre en compte l'écrouissage du matériau : on montre que lorsque l'épaisseur passe de h_0 à h l'hypothèse de déformation homogène permet d'écrire :

$$-\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\dot{h}}{h} < 0 \quad \text{et} \quad \dot{\bar{\epsilon}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\dot{h}}{h} \quad (\text{II.3.13})$$

avec $\dot{\epsilon}_{xx}, \dot{\epsilon}_{yy}$ composantes du vecteur des vitesses de déformation,
 $\dot{\bar{\epsilon}}$ vitesse de déformation généralisée ;

d'où
$$\bar{\varepsilon} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \ln \frac{h}{h_0} \quad (\text{II.3.14})$$

On voit que la prise en compte de l'écroutissement isotrope se fait naturellement en introduisant $\sigma_0(\bar{\varepsilon})$ dans les formules (II.3.9), (II.3.10), (II.3.11) et (II.3.12).

Une autre loi de frottement très utilisée en plasticité est la loi de Coulomb, elle s'écrit :

$$\tau = \mu |\sigma_n| \quad (\text{II.3.15})$$

où σ_n est la contrainte normale, qui doit être de compression,

μ est le coefficient de frottement de Coulomb,

τ est la cission de frottement .

Il est possible de conduire la même analyse à l'aide de cette loi en écrivant :

$$\tau = -\mu \sigma_{yy} \quad (\text{II.3.16})$$

on obtient alors :

$$\sigma_{xx} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ \exp \left[\mu \frac{(a-x)}{h} \right] - 1 \right\} \quad (\text{II.3.17})$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \exp \left[\mu \frac{(a-x)}{h} \right] \quad (\text{II.3.18})$$

$$F_y = -\frac{4\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{h}{\mu} \left\{ \exp \left[\mu \frac{a}{h} \right] - 1 \right\} \quad (\text{II.3.19})$$

Remarque : On suppose que, $2\mu \exp \left(\mu \frac{a}{h} \right) \leq 1$, sinon le calcul est un peu plus compliqué).

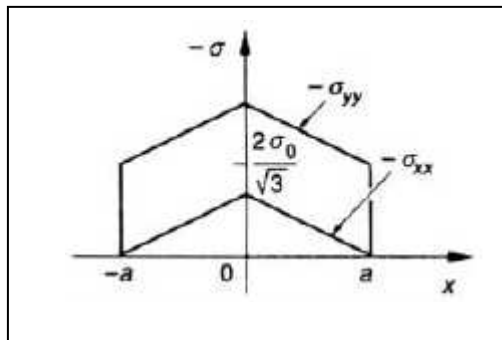


Figure II.3.4. Colline de pression

Un raisonnement analogue peut également être adapté au bipoinçonnement axisymétrique : chacun des poinçons est un cylindre de rayon R . Il est facile de voir que pour un frottement de Tresca on obtient :

$$F_z = -\pi R^2 \sigma_0 \left(1 + \frac{\bar{m}}{3\sqrt{3}} \frac{R}{h} \right) \quad (\text{II.3.20})$$

Oz étant l'axe des cylindres.

II.3.1.2. Bipoinçonnement d'une tôle épaisse

Ici on supposera $h \geq a$, ce qui interdit d'adopter un découpage en tranches verticales. On utilisera alors des tranches horizontales comme indiqué sur la figure II.3.5.

On supposera que le repère Oxy est principal mais, compte tenu de l'orientation des tranches, on imposera à σ_{xx} et σ_{yy} de n'être fonction que de y , et on écrira l'équilibre des forces verticales pour $y \geq 0$:

- force sur la face située à la cote y

$$f_y = -\sigma_{yy}(y).2a \quad (\text{II.3.21})$$

- force sur la face de cote $y + dy$

$$f_{y+dy} = \sigma_{yy}(y + dy).2a \quad (\text{II.3.22})$$

- force sur les faces verticales :

$$df_y = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} dy \quad (\text{II.3.23})$$

en effet les tranches correspondant à $y > 0$ ont un mouvement orienté vers le bas, auquel s'oppose une cisssion, qui est la cisssion limite de la matière sur elle-même, soit $\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$.

Le bilan de ces forces conduit à l'équation :

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dy} = -\frac{1}{a} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{II.3.24})$$

Si le matériau est homogène dans l'épaisseur, le critère de plasticité s'écrit :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} = Cte \quad (\text{II.3.25})$$

d'où

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dy} = \frac{d\sigma_{yy}}{dy} = -\frac{1}{a} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{II.3.26})$$

L'intégration de ces équations introduit une constante que l'on peut éliminer en écrivant que la résultante des forces horizontales sur le bord droit (non poinçonné) est nulle, en l'absence de traction sur l'échantillon, soit :

$$2 \int_0^h \sigma_{xx}(y) dy = 0 \quad (\text{II.3.27})$$

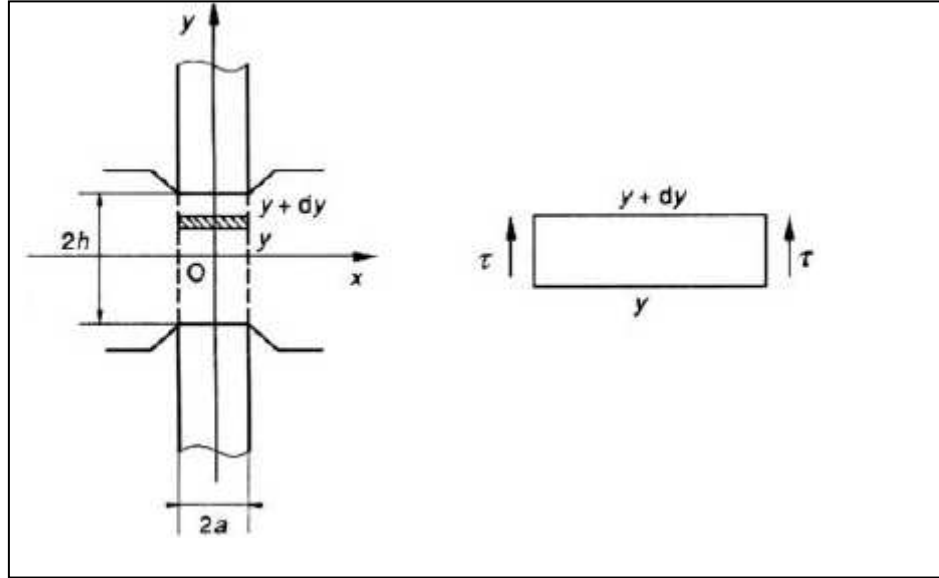


Figure II.3.5. Bipoinçonnement d'un produit épais : découpage en tranches horizontales

On obtient finalement ($y > 0$) :

$$\sigma_{xx} = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{1}{2a} (2y - h) \quad (\text{II.3.28})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{1}{2a} (4a + 2y - h) \quad (\text{II.3.29})$$

On observe que la force de bipoinçonnement (par unité de longueur) est donnée par l'expression :

$$F_y = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} (4a) \cdot \left(1 + \frac{h}{4a}\right) \quad (\text{II.3.30})$$

Mais il est également intéressant d'observer l'état de pression à mi-épaisseur de l'échantillon (pour $y = 0$) :

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{h}{2a} \quad (\text{II.3.31})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{h}{4a} - 1 \right) \quad (\text{II.3.32})$$

On a toujours $\sigma_{xx} > 0$, mais lorsque $\frac{h}{2a} > 1$ on a également $\sigma_{yy} > 0$, on obtient alors un état de bitraction à coeur comme indiqué sur la figure II.3.6.

Cet état de bitraction est particulièrement endommageant pour le matériau lorsqu'il est associé à une déformation plastique notable : il peut conduire à des décohésions à coeur, alors que l'état de contrainte en surface est compressif. Ce calcul approché permet de comprendre, par analogie, la possibilité du défaut en chevron observé en filage avant (figure II.3.7).

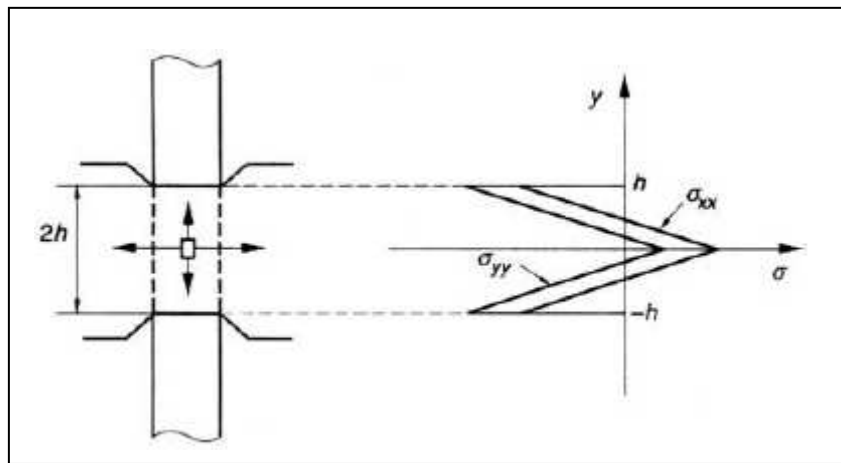


Figure II.3.6. Bipoinçonnement d'un produit épais : représentation des contraintes dans l'épaisseur (cas d'une bitraction à coeur)

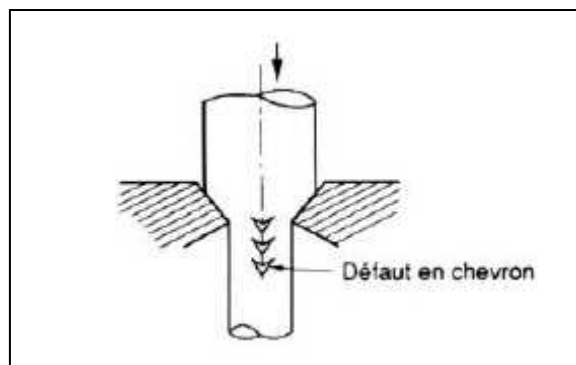


Figure II.3.7 – Défaut en chevron en filage avant

II.3.1.3. Laminage à froid de tôles minces

La géométrie du procédé est schématisée sur la figure II.3.8, où nous n'avons considéré que le cylindre et le demi-produit supérieurs.

L'épaisseur du produit étant supposée faible par rapport à la longueur de l'emprise (partie déformée plastiquement), nous introduirons un découpage en tranches verticales,

la position des faces verticales des tranches étant repérée soit par son abscisse x , soit par l'angle polaire φ , comme indiqué sur la figure II.3.8.

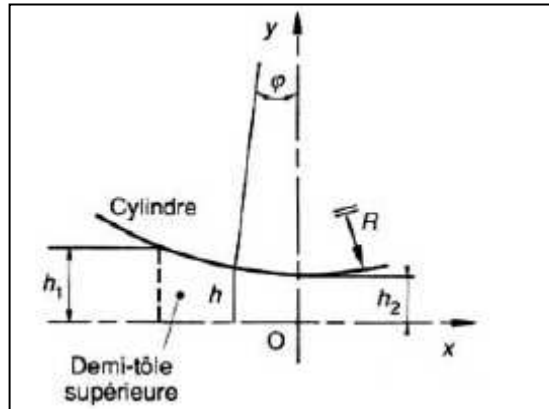


Figure II.3.8 – Schématisation du laminage de produits plats

On constate que l'on a la relation :

$$x = R \cdot \sin \varphi \quad (\text{II.3.33})$$

et que la demi-épaisseur du produit correspondant à φ est donnée par :

$$h = h_2 + R \cdot (1 - \cos \varphi) \quad (\text{II.3.34})$$

si h_2 est la demi-épaisseur de sortie.

Nous introduirons également la contrainte normale $\sigma_n = -s$ à l'interface tôle-cylindre, qui permet d'écrire la loi de frottement de Coulomb :

$$\tau = \pm \mu \cdot s \quad (\text{II.3.35})$$

avec τ cisaillement de frottement,

μ coefficient de frottement.

Le signe dépendra de la vitesse relative tôle-cylindre : nous admettrons l'existence d'un point neutre où tôle et cylindre vont à la même vitesse. À droite du point neutre, la tôle est accélérée par la réduction d'épaisseur et le frottement est résistant ($\tau < 0$) ; à gauche du point neutre, la tôle se déplace à une vitesse inférieure à celle du cylindre et le frottement est moteur ($\tau > 0$). Dans ce qui suit nous poserons $\tau > 0$, il suffira de changer le signe devant les termes contenant le facteur μ pour obtenir l'expression à droite du point neutre. Le bilan des forces est schématisé sur la figure II.3.9, la principale difficulté réside dans le fait que le bord supérieur de la tranche n'est plus horizontal : il est parallèle au vecteur t de composantes $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ et sa normale est n de composantes $(-\sin \varphi, \cos \varphi)$. On constate alors que la projection sur l'axe Ox de l'ensemble des forces agissant sur la demi-tranche supérieure conduit à l'équation :

$$-h(\varphi).\sigma_{xx}(\varphi) + h(\varphi + d\varphi).\sigma_{xx}(\varphi + d\varphi) + s.\sin \varphi \frac{dx}{\cos \varphi} + \mu.s.\cos \varphi \frac{dx}{\cos \varphi} = 0 \quad (\text{II.3.36})$$

Pour éliminer l'inconnue supplémentaire s que nous avons introduite, nous écrivons l'égalité des forces verticales sur la facette supérieure. En projetant sur Oy la force normale et la force de cisssion, on obtient :

$$df_y = -s.\cos \varphi \frac{dx}{\cos \varphi} + \mu.s.\sin \varphi \frac{dx}{\cos \varphi} \quad (\text{II.3.37})$$

Mais on peut également exprimer cette projection à partir de la composante verticale du vecteur $T = \sigma.n$, ce qui donne après multiplication par l'élément de surface de la facette :

$$df_y = \sigma_{yy} \cos \varphi \frac{dx}{\cos \varphi} \quad (\text{II.3.38})$$

L'égalité de (II.3.37) et (II.3.38) permet d'écrire :

$$s = \frac{-\sigma_{yy}}{1 - \mu \tan \varphi} \quad (\text{II.3.39})$$

Si l'on utilise encore le critère de Von Mises en déformation plane, on obtient :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} + \frac{2.\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{II.3.40})$$

et à partir de (II.3.36) et (II.3.39), et en utilisant (II.3.33) on peut écrire :

$$\frac{d}{d\varphi} \left[h \left(\sigma_{yy} + \frac{2.\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \right] = R.\sigma_{yy} \frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{1 - \mu \tan \varphi} \quad (\text{II.3.41})$$

Cette équation peut être intégrée analytiquement moyennant certaines approximations (ou bien numériquement telle quelle), en utilisant les conditions aux limites aux deux extrémités de la zone déformée plastiquement : en l'absence de traction et de contre-traction nous aurons :

$$\sigma_{xx}(\varphi_1) = \sigma_{xx}(0) = 0 \text{ soit } \sigma_{yy}(\varphi_1) = \sigma_{yy}(0) = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{II.3.42})$$

On intégrera donc (II.3.41) pour φ croissant de φ_1 à 0, qui n'est valable que pour des tranches à gauche du point neutre. Nous intégrerons également l'équation (II.3.43) correspondant à un frottement résistant soit :

$$\frac{d}{d\varphi} \left[h \left(\sigma_{yy} + \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \right] = R\sigma_{yy} \frac{\sin \varphi - \mu \cos \varphi}{1 + \mu \tan \varphi} \quad (\text{II.3.43})$$

Pour φ décroissant de 0 à φ_1 . Le point neutre est déterminé par l'intersection des deux courbes comme cela est schématisé sur la figure II.3.10.

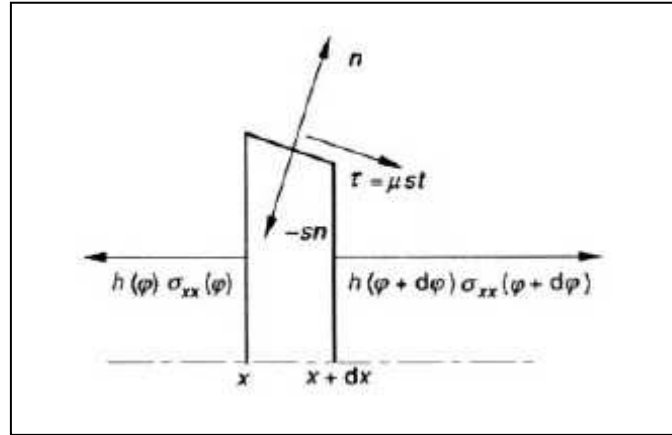


Figure II.3.9. Laminage de produit plat : équilibre d'une tranche

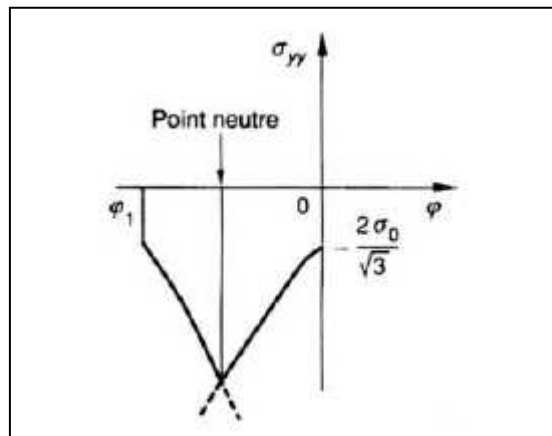


Figure II.3.10. Laminage de produit plat : colline de pression

La force d'écartement des cylindres est obtenue en calculant l'intégrale :

$$F_E = \int_{\varphi_1}^0 \sigma_{yy}(\varphi) \frac{dx}{\cos \varphi} \quad (\text{II.3.44})$$

On peut alors observer qualitativement l'effet d'une traction F_T on aura dans ce cas :

$$\sigma_{xx}(0) = \frac{F_T}{2h_2} \quad (\text{II.3.45})$$

(on suppose toujours que la largeur de la tôle est l'unité).

L'intégration de (II.3.43) est inchangée, celle de (II.3.44) doit être réalisée à partir de la condition limite :

$$\sigma_{xx}(0) = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} + \frac{F_T}{2h_2} \quad (\text{II.3.46})$$

On voit aisément que la courbe correspondante sur la figure II.3.10 est translatée vers le haut, ce qui a pour effet :

- de déplacer le point neutre vers la gauche ;
- de diminuer la force d'écartement F_E des cylindres.

Cette modélisation est très utilisée dans l'industrie dans la mesure où différents phénomènes peuvent être pris en compte : écrouissage, élasticité, déformation du cylindre [AYA84].

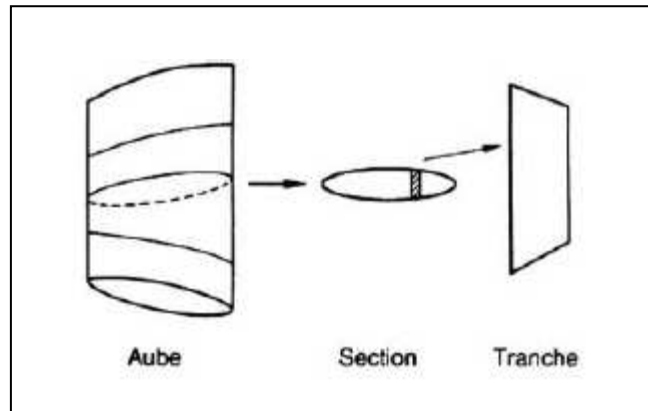


Figure II.3.11. Découpage d'une aube de compresseur en sections puis en tranches

II.3.2. Méthodes extrémales

La *méthode de la borne inférieure* et la *méthode de la borne supérieure* découlent de l'application des théorèmes extrémaux établis pour les matériaux dont le comportement est décrit par l'approximation rigide plastique. En toute rigueur, ces théorèmes ne donnent accès qu'à des grandeurs globales : forces et couples, et ils ne fournissent d'information ni sur la distribution des contraintes, ni sur les déformations locales ou globales. Toutefois, dans de nombreux cas, ce type d'information a pu être approché grâce à ces méthodes, à condition d'étayer les résultats par une confrontation avec des relevés expérimentaux sur un certain nombre de cas particuliers.

II.3.2.1. Méthode de la borne inférieure

La méthode repose sur le théorème de la borne inférieure, elle peut être schématisée de la façon suivante :

- Construction d'un champ de contrainte approché, dépendant éventuellement de paramètres, et vérifiant les hypothèses du théorème (équilibre, condition sur le critère, conditions aux limites en contrainte) ;
- Calcul de la puissance des efforts extérieurs associés à ce champ de contrainte soit :

$$\dot{W}^* = \int_{\partial\Omega} T^* v^d d\mathcal{S} \quad (\text{II.3.47})$$

avec v^d vitesse imposée définie sur la surface de Ω

W^* puissance dissipée approchée,

T^* vecteur contrainte approché,

$\partial\Omega$ surface limitant le corps Ω .

dont on sait qu'elle constitue une borne inférieure pour la valeur correspondant à la solution exacte ;

- Le cas échéant, optimisation de la valeur de par rapport aux paramètres : le théorème permet d'affirmer que la valeur la plus proche de la valeur exacte est celle qui correspond à son maximum, pour l'ensemble des valeurs des paramètres introduits dans le champ de contrainte approché.

Remarque : L'emploi systématique de la méthode de la borne inférieure se heurte à deux difficultés principales :

- Construire un champ de contrainte en équilibre, ce qui limite souvent la recherche à des champs de contraintes constants par morceaux ;
- Respecter la condition non linéaire imposée par le critère de plasticité.

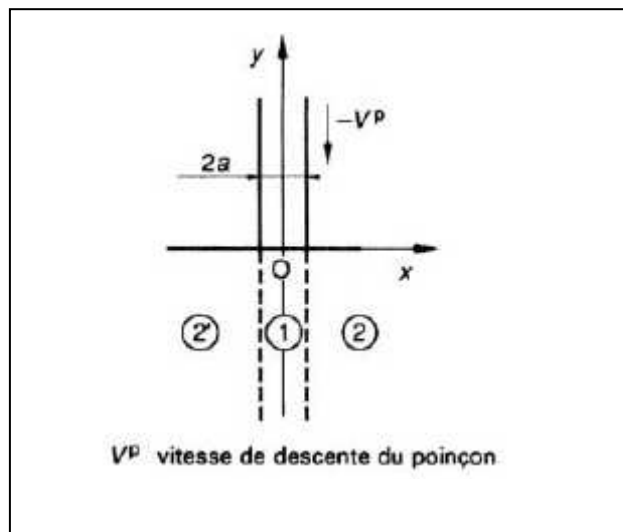


Figure II.3.12 – Poinçonnement d'un massif semi-infini en déformation plane

Le schéma de principe est identique à celui de la figure 12. Nous allons cette fois introduire un champ de vitesse dit par blocs rigides, pour lequel la déformation se fera uniquement aux interfaces entre ces blocs.

II.3.2.2. Méthode de la borne supérieure

On utilise ici le théorème de la borne supérieure, qui permet d'envisager la méthode selon les étapes suivantes :

- Construction d'un champ de vitesse v^* incompressible (tel que $\text{div}(v^*) = 0$), vérifiant les conditions aux limites et dépendant éventuellement d'un ensemble de paramètres ;
- Calcul de la puissance approchée des efforts extérieurs, soit :

$$\dot{W}^* = \int_{\Omega} \sigma_0 \dot{\varepsilon}^* dV - \int_{\partial\Omega} T^d v^* d\mathfrak{S} \quad (\text{II.3.48})$$

- Sachant que la puissance dissipée correspondant à la solution exacte est inférieure à cette valeur approchée, la meilleure solution est recherchée en minimisant $\dot{W}^*$ par rapport aux paramètres.

La figure II.3.13 indique le principe général du champ de vitesse proposé : il dépend du paramètre h qui caractérise la profondeur de la zone déformée plastiquement.

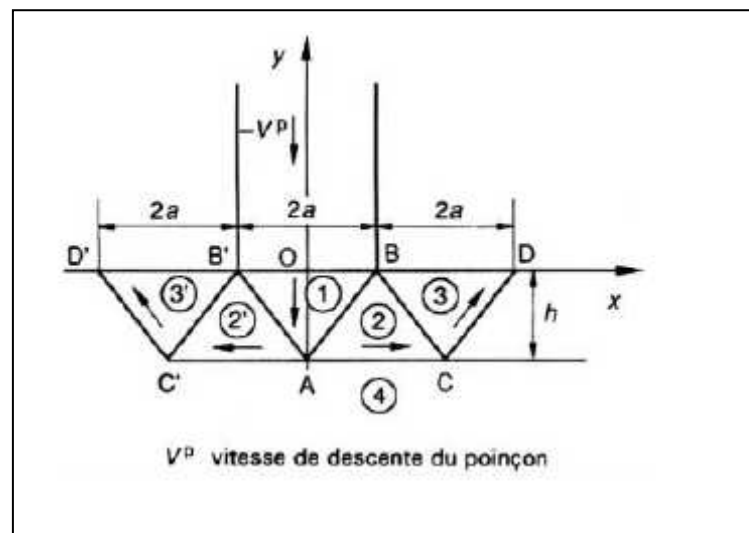


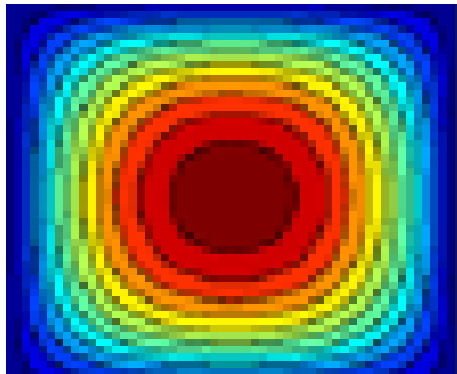
Figure II.3.13 – Poinçonnement d'un massif semi infini : découpage en blocs rigides

II.4. Conclusion :

Nous avons représenté dans ce chapitre les principes généraux de la mécanique des milieux continus et les lois de comportement accompagnant la mise en forme visée dans notre travail. Le détail des calculs pour matériaux à comportement rigide plastique est largement exposé. Quelques méthodes de calcul rigide plastique appliquées au laminage et au bi poinçonnage des corps massiques ont été développées et sur le plan pratique et sur le plan théorique.

Chapitre III.

Analyse des erreurs et simulation de la mise en forme de matériaux rigide-plastique



Dans ce chapitre nous allons d'abord tester la convergence de la méthode MLS, en utilisant une barre encastree, ensuite nous presenterons la methode de calcul plastique avec la methode MLS avec validation numerique sur plusieurs exemples de complexite variable.

III.1. Test de convergence de la méthode MLS

Pour tester la convergence de la méthode, nous avons choisi l'exemple d'une poutre encastrée [61] (figure III.1.1) à élasticité linéaire et analysée en utilisant la méthode des moindres carrés mobiles MLS avec différentes fonctions de poids. La solution numérique du problème est ensuite comparée à la solution exacte.

III.1.1. Poutre de Timochenko

Dans cette section, la poutre encastrée de comportement élastique linéaire est analysée en employant la méthode MLS. La solution numérique est ensuite comparée à la solution exacte pour illustrer l'exécution et la convergence de la méthode MLS. La poutre à comportement élastique linéaire est sollicitée comme indiquée sur la figure.III.1.1. Elle est articulée aux points de coordonnées $(0, \pm D/2)$ et $(0,0)$.

La solution exacte du problème est :

$$u_x = -\frac{Py}{6EI} \left[x(6L - 3x) + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (\text{III.1.1})$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[x^2(3L - x) + 3\nu y^2(L - x) + \left(\frac{4 + 5\nu}{4} \right) D^2 x \right] \quad (\text{III.1.2})$$

Avec

$$I = \frac{D^3}{12} \quad (\text{III.1.3})$$

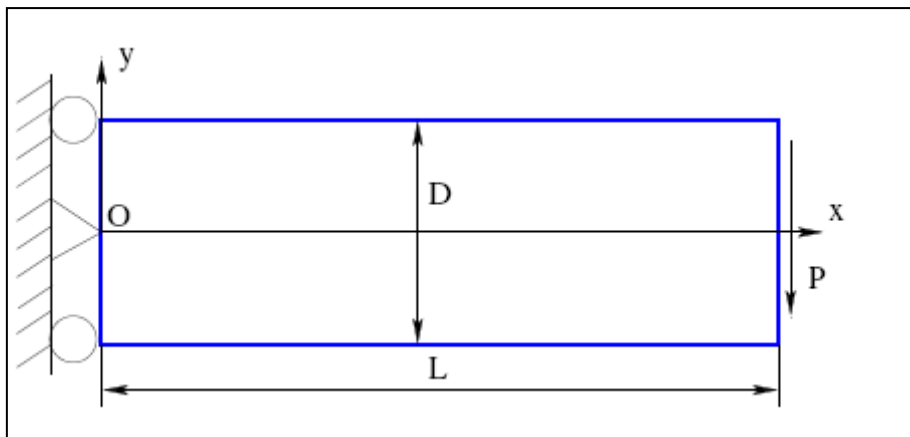


Figure III.1.1. Poutre à élasticité linéaire sollicitée en cisaillement.

Les efforts correspondant aux équations. (III.1.1) et (III.1.2) sont

$$\sigma_x = -\frac{P}{I}(L-x)y \quad (\text{III.1.4})$$

$$\sigma_y = 0 \quad (\text{III.1.5})$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{P}{2I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \quad (\text{III.1.6})$$

Le problème est résolu en contrainte plane avec :

- $P = 1000, E = 3.0 \times 10^7, D = 12, L = 48$;(la largeur de la poutre étant égale à l'unité) ;
- Deux matériaux de modules de Poisson $\nu = 0,25$ et 0.4999 sont utilisés.
- Les conditions de frontière sont choisies comme montré sur la figure III.1.1 ;
- La distribution régulière des nœuds $N_D, N_L = (7 \times 11)$ est utilisé ;
- Dans tous les cas, le rayon r du sub-domaine Ω_x est pris de $r = 1.3 h$ à $r = 6 h$, où les valeurs de h sont donnés par:

$$h = \text{MAX}\left[\frac{D}{(N_D - 1)} \quad \frac{L}{(N_L - 1)}\right]. \quad (\text{III.1.7})$$

Résultats :

On remarque :

- Une bonne symétrie de la distribution de contraintes par rapport à l'axe x , avec des contraintes positives au dessus de la fibre neutre et des contraintes négatives au dessous de la fibre neutre.
- La ligne moyenne de la poutre n'est soumise à aucune sollicitation, ce qui est exprimé mathématiquement par la formule (1.6),
- Les valeurs maximales de la contrainte suivant l'axe x sont localisées au niveau des articulations aux points $(0, D/2)$ et $(0, -D/2)$.

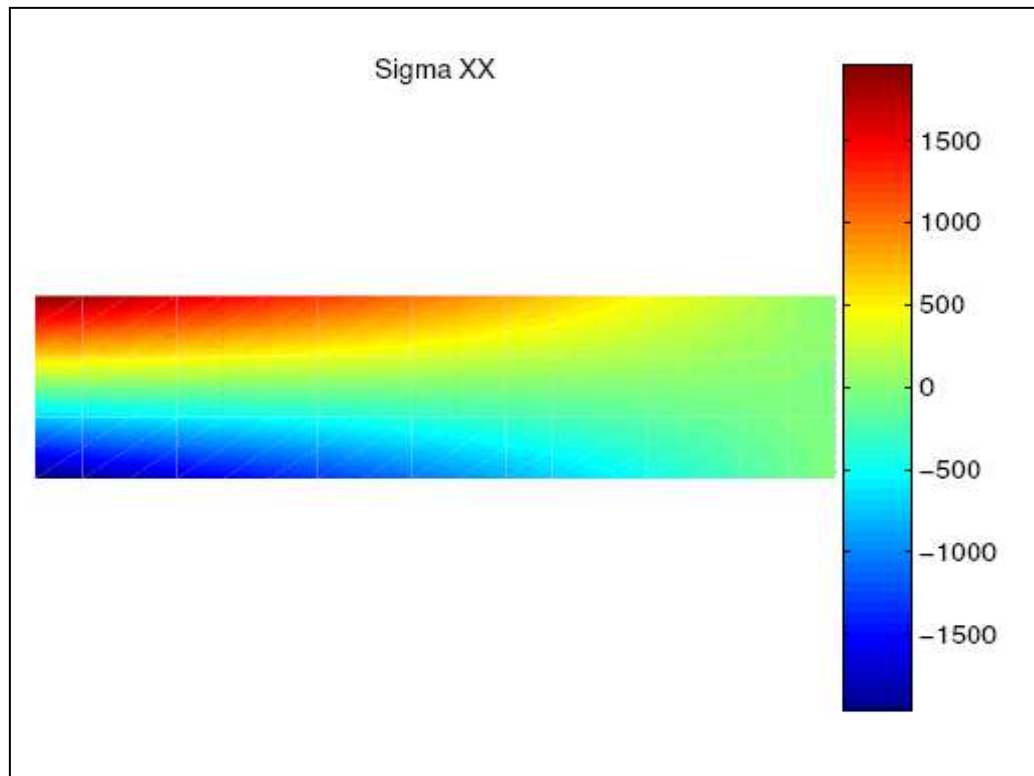


Figure III.1.2. Distribution de contraintes dans la poutre.

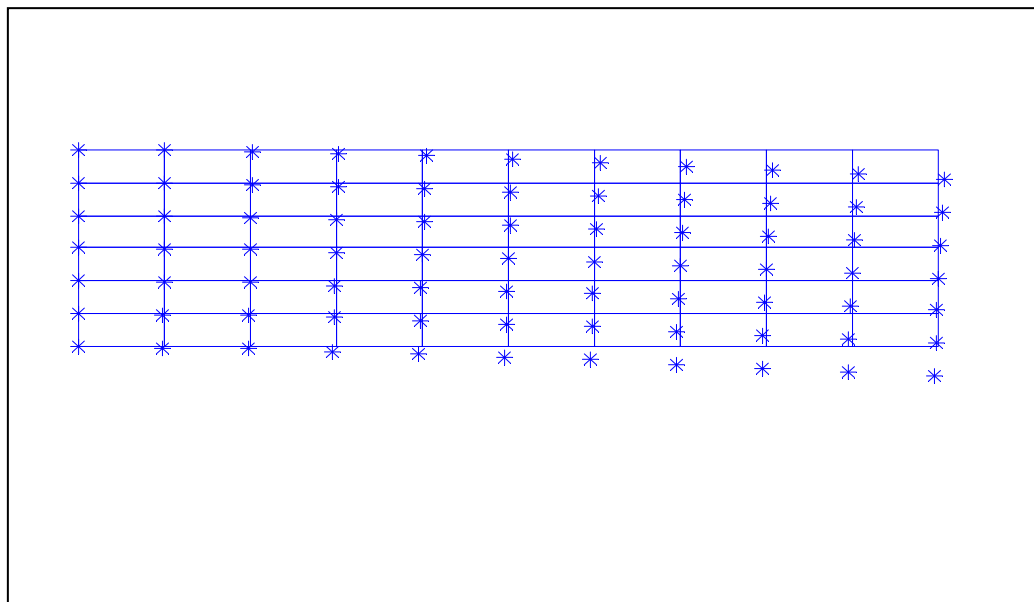


Figure III.1.3. Distribution de nœuds dans la poutre.

III.1.2. Analyse des erreurs de la méthode MLS

Afin d'évaluer les erreurs et les études de convergence, la norme de déplacement $\|u\|$ est calculée. Cette norme est définie par

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} u^T \cdot u \cdot d\Omega \right)^{1/2} \quad (\text{III.1.8})$$

L'erreur relative r_u pour $\|u\|$ est défini par

$$r_u = \frac{\|u^{num} - u^{exa}\|}{\|u^{exa}\|} \quad (\text{III.1.9})$$

Le tableau 1.1 donne les paramètres utilisées de toutes les conditions aux limites essentielles (avec et sans Lagrange), valeur de coefficient de Poisson, type de fonctions de poids (spline d'ordre 3, spline d'ordre 4, gaussienne tronquée et gaussienne modifiée, sont mentionnées par les formules I.3.36,37,38,39). Les résultats des erreurs correspondants aux déplacements nodaux sont calculés par la méthode MLS et représentés par les figures. III.1.3, III.1.4, III.1.5 et III.1.6.

Tableau III.1.1. Codification des méthodes de simulations.

	Imposition des conditions aux limites essentielles	Coefficient de Poisson ν	Fonction de Poids w
S1	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,25	Spline d'ordre 3
S2	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,25	Spline d'ordre 3
S3	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	Spline d'ordre 3
S4	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	Spline d'ordre 3
S5	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,25	Spline d'ordre 4
S6	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,25	Spline d'ordre 4
S7	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	Spline d'ordre 4
S8	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	Spline d'ordre 4
G1	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,25	Gaussienne tronquée
G2	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,25	Gaussienne tronquée
G3	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	Gaussienne tronquée
G4	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	Gaussienne tronquée
G5	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,25	Gaussienne modifiée
G6	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,25	Gaussienne modifiée
G7	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	Gaussienne modifiée
G8	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	Gaussienne modifiée

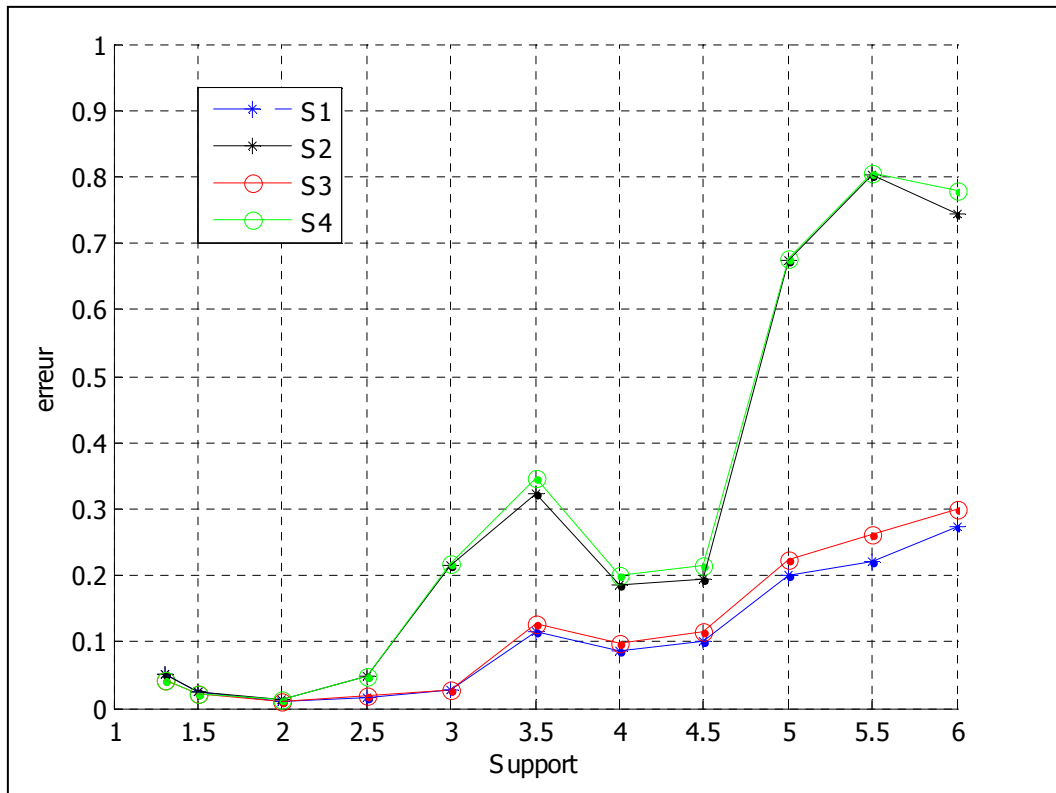


Figure III.1.3. Erreur pour le problème de poutre encastrée avec la fonction de poids : Spline d'ordre 3.

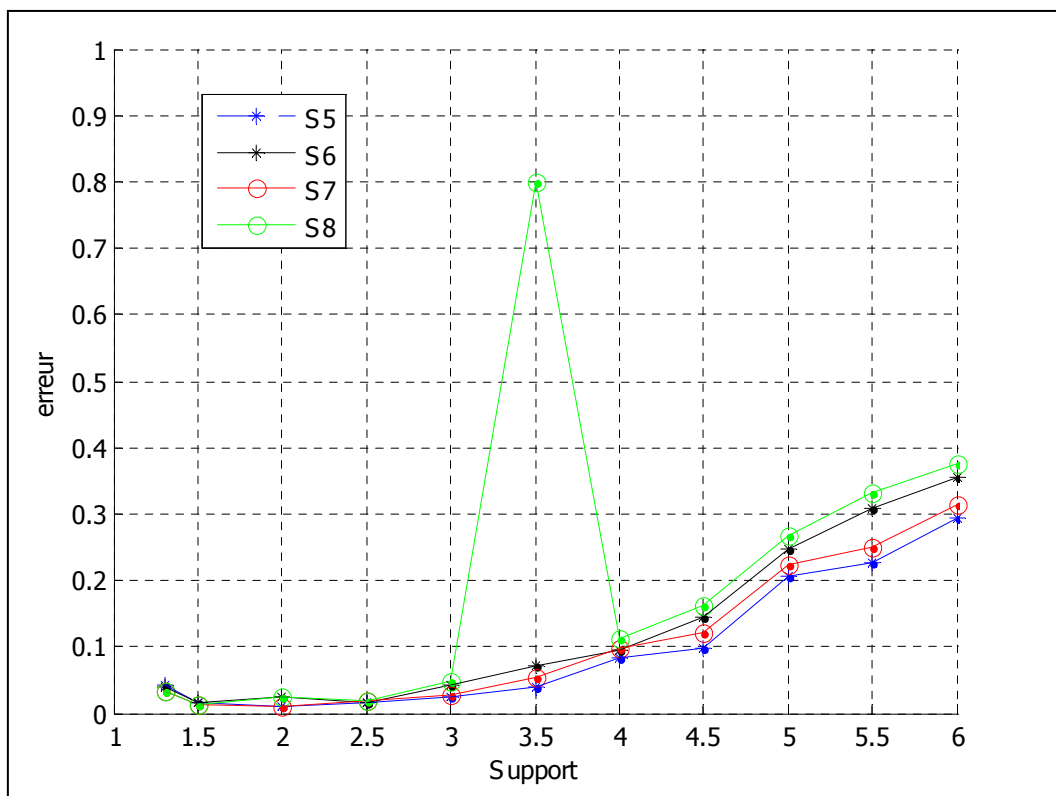


Figure III.1.4. Erreur pour le problème de poutre encastrée avec la fonction de poids : Spline d'ordre 4.

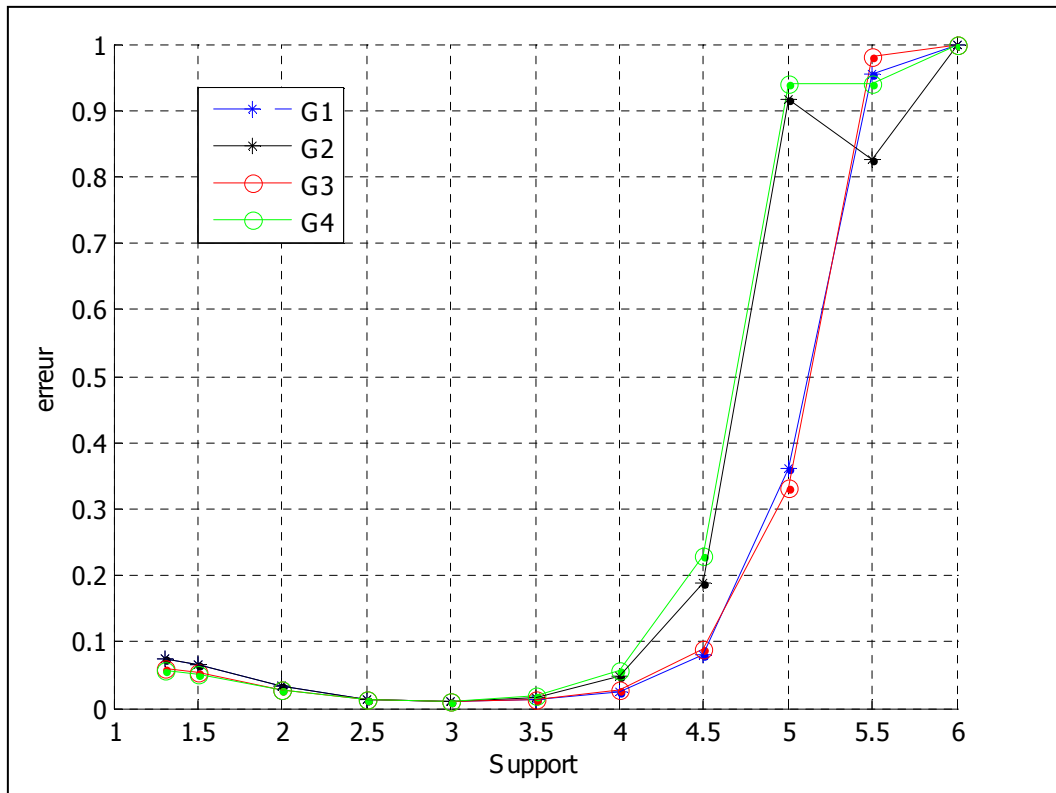


Figure III.1.5. Erreur pour le problème de poutre encastree avec fonction de poids : Gaussienne tronquee.

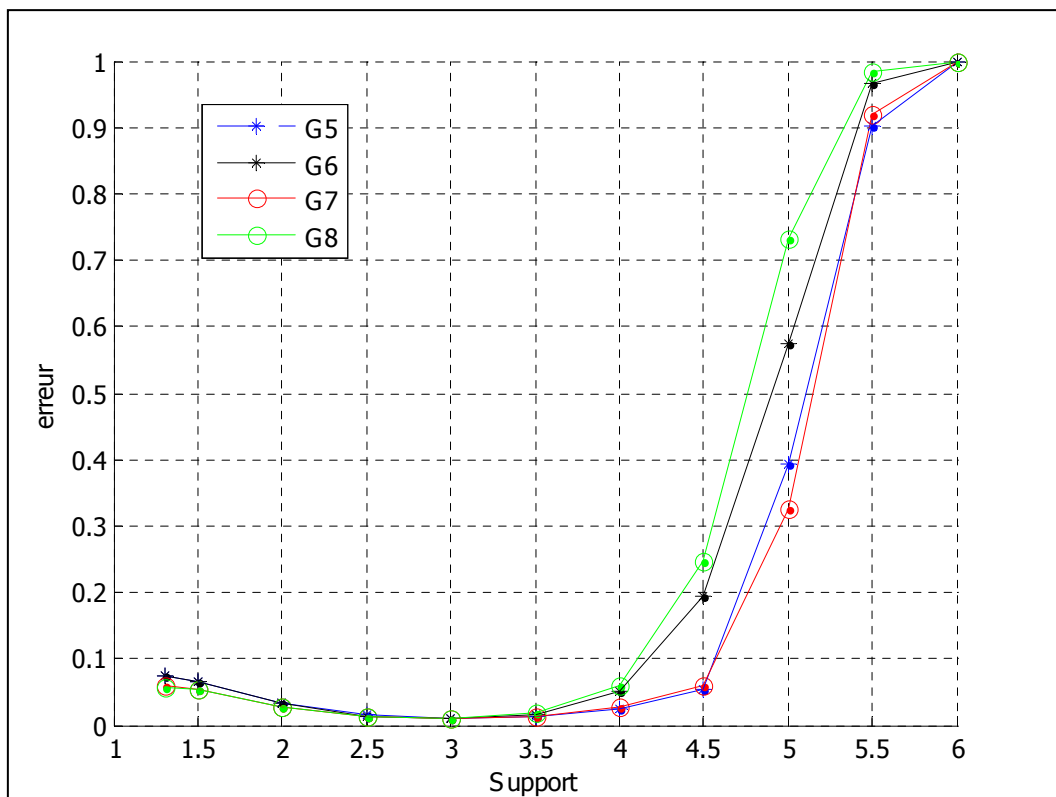


Figure III.1.6. Erreur pour le problème de poutre encastree avec fonction de poids : Gaussienne modifiee.

Analyse des résultats :

Les figures III.1.3, III.1.4, III.1.5 et III.1.6 représentent l'erreur en fonction de la taille du support du domaine d'influence de chaque fonctions de poids : spline d'ordre 3, spline d'ordre 4, gaussienne tronquée et gaussienne modifiée, respectivement. Chaque figure présente quatre courbes de couleurs différentes désignant chacune les conditions numériques de l'imposition des conditions aux limites essentielles ainsi que la valeur du coefficient de Poisson. On peut remarquer que :

- Il est possible de partager les quatre figures en trois zones,

Zone (1) : Le nombre nœuds inclus dans le domaine d'influence est insuffisant et la précision est faible, cette zone correspond à l'intervalle :

-] 1,0 1,5] pour les figures III.1.3 et III.1.4 ;
-] 1,0 2,0] pour les figures III.1.5 et III.1.6 ;

Zone (2) : La courbe est stabilisée sur une bonne précision, cette zone correspond à l'intervalle:

-] 1,5 3,0] pour les figures III.1.3 et III.1.4 ;
-] 2,0 3,5] pour les figures III.1.5 et III.1.6 ;

Zone (3) : Le courbe est instable et présente une précision très faible, à cause du grand nombre de nœuds inclus dans le domaine d'influence ce qui a pour effet d'augmenter divergence entre la solution numérique et la solution exacte, cette zone correspond à l'intervalle :

-] 3,0 6,0] pour les figures III.1.3 et III.1.4 ;
-] 3,5 6,0] pour les figures III.1.5 et III.1.6 ;

- Toutes les courbes sont semblables dans les zones 1 et 2, alors que, alors que dans la zone 3 elles sont distinctes.
- La précision d'interpolation par la fonction de poids Gaussienne a une meilleurs stabilité que la précision d'interpolation par la fonction de poids spline en fonction des conditions numériques utilisées.
- L'interpolation avec l'imposition des conditions aux limites essentielles avec multiplicateurs de Lagrange est plus précise que sans multiplicateurs de Lagrange.

III.2. Proposition de nouvelles fonctions de poids

II.2.1. Analyse des erreurs suivant la forme générale des nouvelles fonctions de poids

Nous avons constaté que la fonction de poids joue un rôle considérable par rapport à la précision dans la méthode MLS. Pour atteindre une meilleure précision, nous avons joué sur les valeurs des paramètres A et B des deux formules (III.1.10) et (III.1.11).

Les formules $f_1(s)$ et $f_2(s)$ seront notées T1 et T2, respectivement. On aura ainsi :

- une fonction T1

$$f_1(s) = \begin{cases} e^{-A|s|^B} & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{III.1.10})$$

- une fonction T2

$$f_2(s) = \begin{cases} \frac{e^{-A|s|^B} - e^{-A}}{1 - e^{-A}} & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{III.1.11})$$

Pour déterminer la fonction de poids minimisant l'erreur, nous avons choisis des valeurs pour chacun des paramètres A et B allant de 1, 2, 3, ... jusqu'à 30 pour A et de 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 et 3.0 pour B. En utilisant les deux fonctions T1 et T2 comme fonction de poids avec la valeur de support $h=3$, Les figures III.1.7-8 représentent les courbes d'erreurs en fonction du paramètre A pour chaque valeur B, avec imposition des conditions aux limites essentielles avec multiplicateurs de Lagrange et coefficient de Poisson de 0.25 pour les fonctions T1 et T2 (III.1.10,11), respectivement.

Analyse des résultats :

On a tracé plusieurs courbes d'erreurs de la solution numérique de l'interpolation par la méthode sans maillage MLS pour plusieurs fonctions de poids définies par leurs paramètres (A, B) pour les deux fonctions T1 et T2. On peut constater que :

*Ces fonctions de poids présentent plusieurs degrés de précision, notamment, pour les valeurs de A inférieures à 20 ;

*On remarque que certaines fonctions de poids apportent une meilleure précision que celles apportées par les fonctions de poids gaussienne et spline.

Pour analyser cette différence, on choisit des fonctions de poids ayant plusieurs degrés de précision. Ces dernières sont classées par ordre décroissant dans le tableau III.1.2 (c'est-à-dire de la plus mauvaise à la meilleure précision). Ces fonctions sont représentées par les figures III.1.9 et III.1.10.

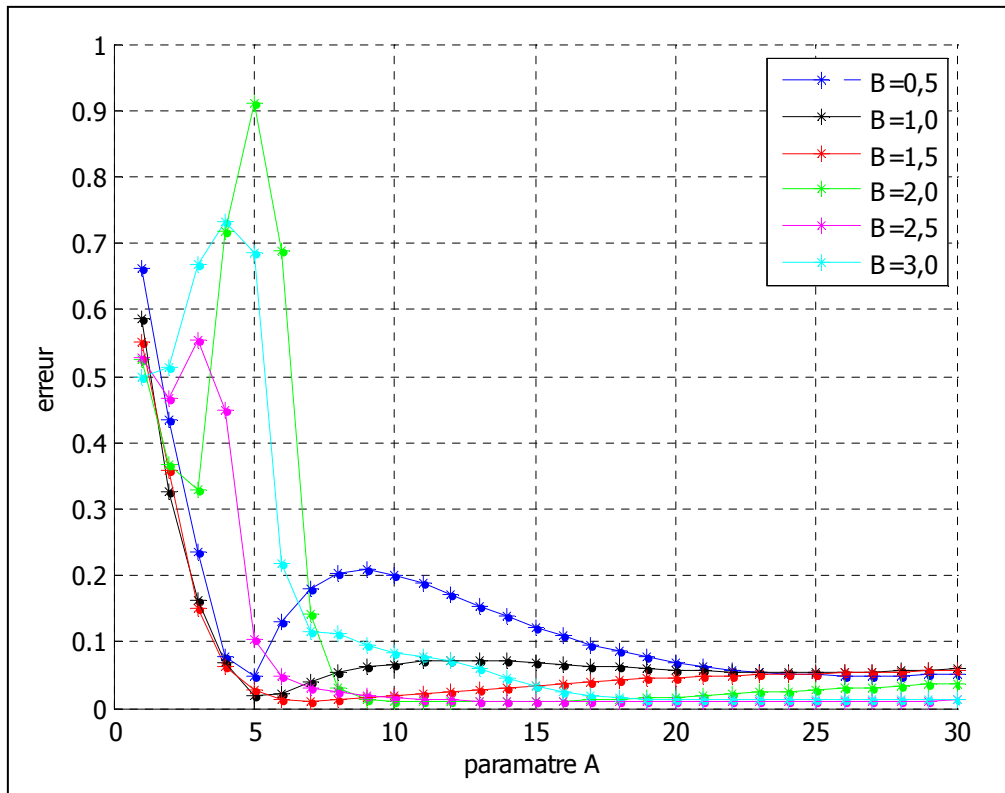


Figure III.1.7.Erreur de calcul avec imposition des conditions aux limites essentielles avec multiplicateurs de Lagrange, coefficient de Poisson $\nu=0.25$ et fonction de poids T_1 .

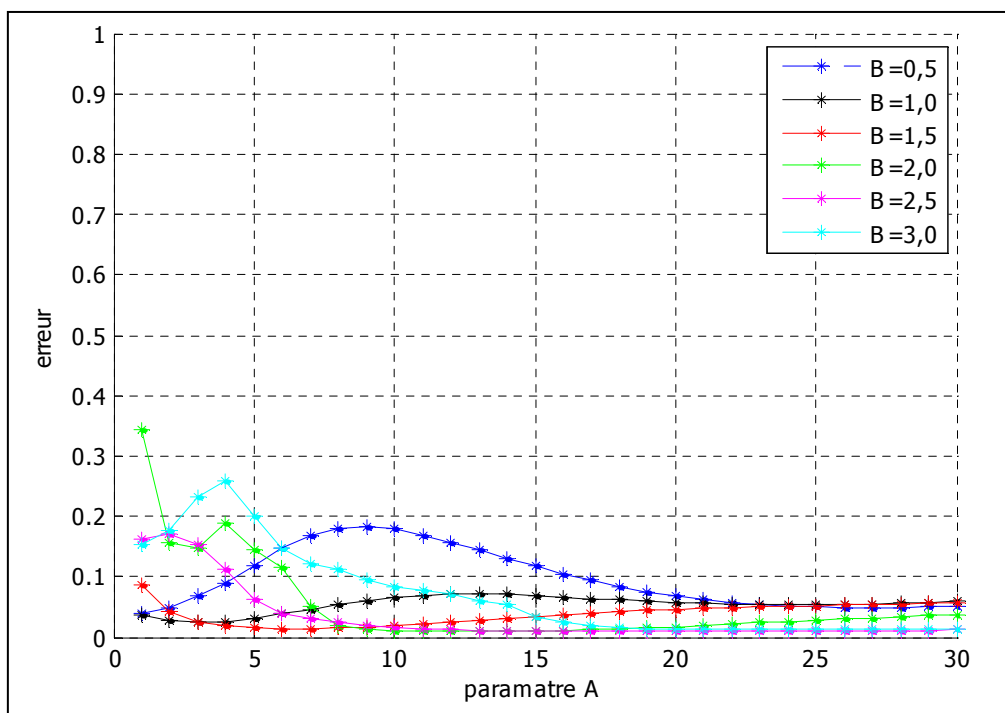


Figure III.1.8.Erreur de calcul avec imposition des conditions aux limites essentielles avec des multiplicateurs de Lagrange, coefficient de Poisson $\nu=0.25$ et fonction de poids T_2 .

Tableau III.1.2. Classification des fonctions de poids

Pour la fonction de poids T1				Pour la fonction de poids T2			
	A	B	Erreur		A	B	Erreur
F1	5	2,0	0,9099	F5	1	2,0	0,3446
F2	3	2,5	0,5540	F6	4	3	0,2586
F3	8	0,5	0,2045	F7	2	2,5	0,1700
F4	22	2,5	0,0089	F8	22	2,5	0,0089

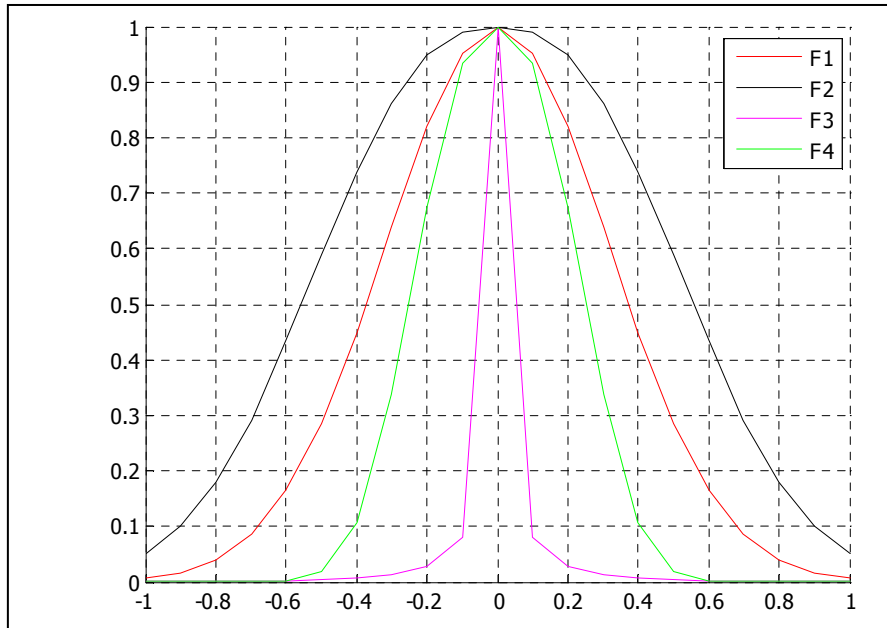


Figure III.1.9. Courbes des fonctions de poids T1.

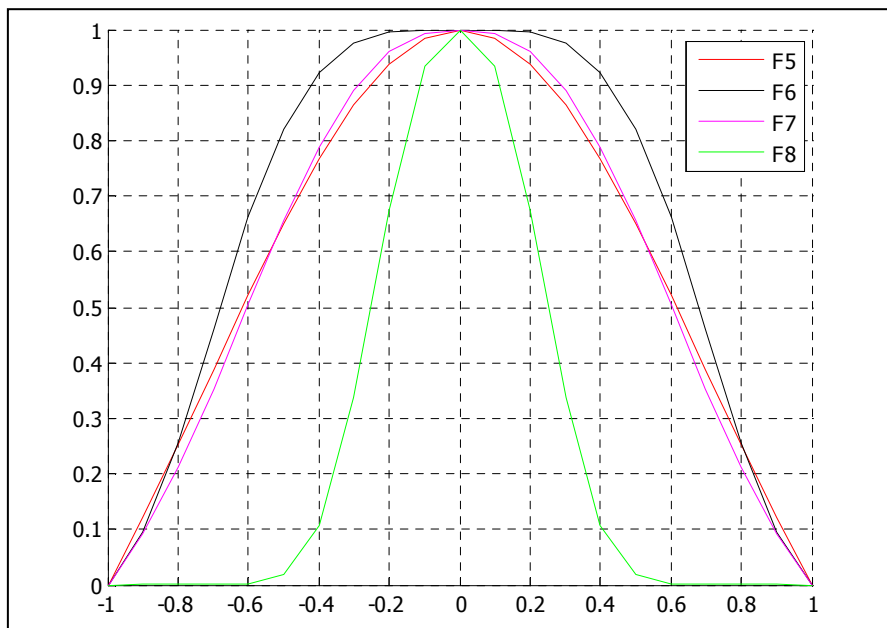


Figure III.1.10. Courbes des fonctions de poids T2.

Les figures III.1.9 et III.1.10 représentent les courbes des fonction de poids T1 et T2 avec différents paramètres A et B, on peut justifier le perte de précision soit par manque de continuité au point $s=1$, (c'est-à-dire $f(1)$ n'est pas nul), ou par la forme de la courbe (comme c'est le cas de la fonction F3).

III.2.2. Analyse des erreurs des nouvelles fonctions de poids

Parmi toutes les fonctions de poids étudiées, nous remarquons que ce sont les fonctions F4 et F8 des fonctions de poids T1 et T2 respectivement qui minimisent l'erreur.

Pour ces raisons, nous avons sélectionné les fonctions F4 et F8 pour la modélisation des erreurs et pour la prochaine interpolation puisqu'ils avaient la meilleure précision. Elles sont données par :

- Fonction F4

$$f_1(s) = \begin{cases} e^{-22|s|^{2,5}} & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{III.1.12})$$

- Fonction F8

$$f_2(s) = \begin{cases} \frac{e^{-22|s|^{2,5}} - e^{-22}}{1 - e^{-22}} & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (\text{III.1.13})$$

Le tableau III.1.3 présente les codifications de tous les cas suivant l'imposition des conditions aux limites essentielles, coefficient de Poisson et fonctions de Poids. L'erreur d'interpolation est représentée par les figures III.1.11 et III.1.12.

En comparant toutes les courbes des figures III.1.11 et III.1.12 avec celles des figures III.1.3 à III.1.6, il est clair que les nouvelles fonctions de poids ont meilleures précision et stabilité pour les conditions numériques imposées.

Tableau III.1.3. Codification des méthodes de simulations.

	Imposition des conditions aux limites essentielles	Coefficient de Poisson ν	Fonction de Poids w
P1	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,25	F4
P2	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,25	F4
P3	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	F4
P4	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	F4
P5	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,25	F8
P6	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,25	F8
P7	Avec des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	F8
P8	Sans des multiplicateurs de Lagrange	0,4999	F8

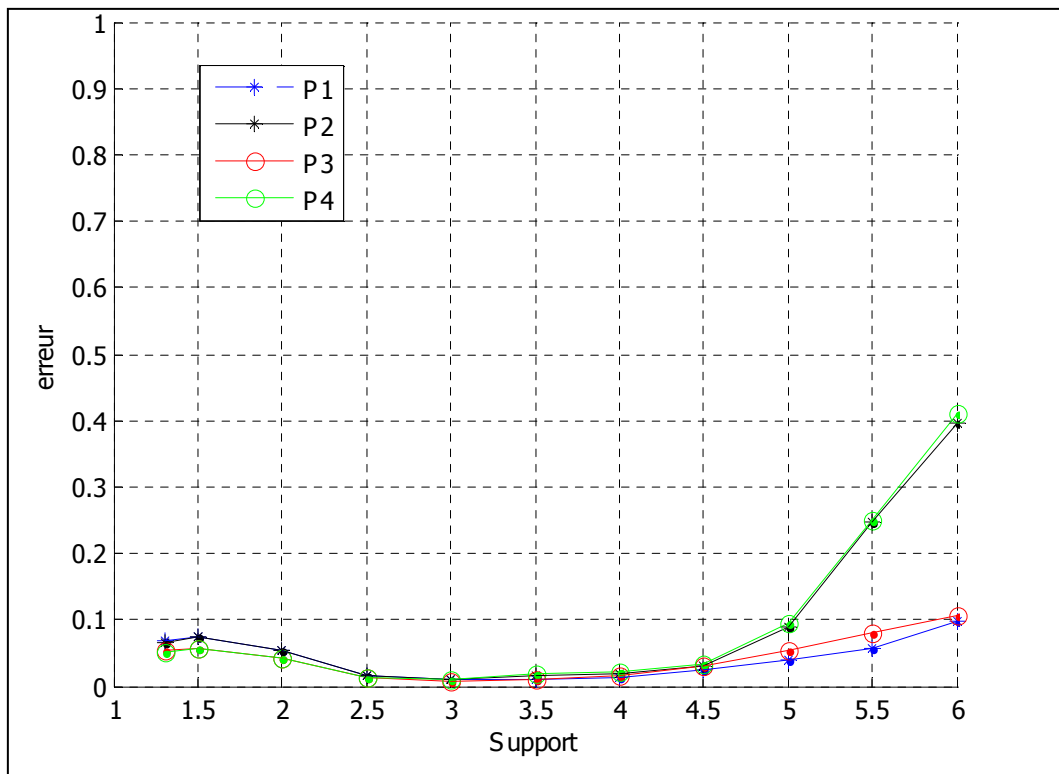


Figure III.1.11. Erreur pour le problème de la poutre encastree avec fonction de poids T1.

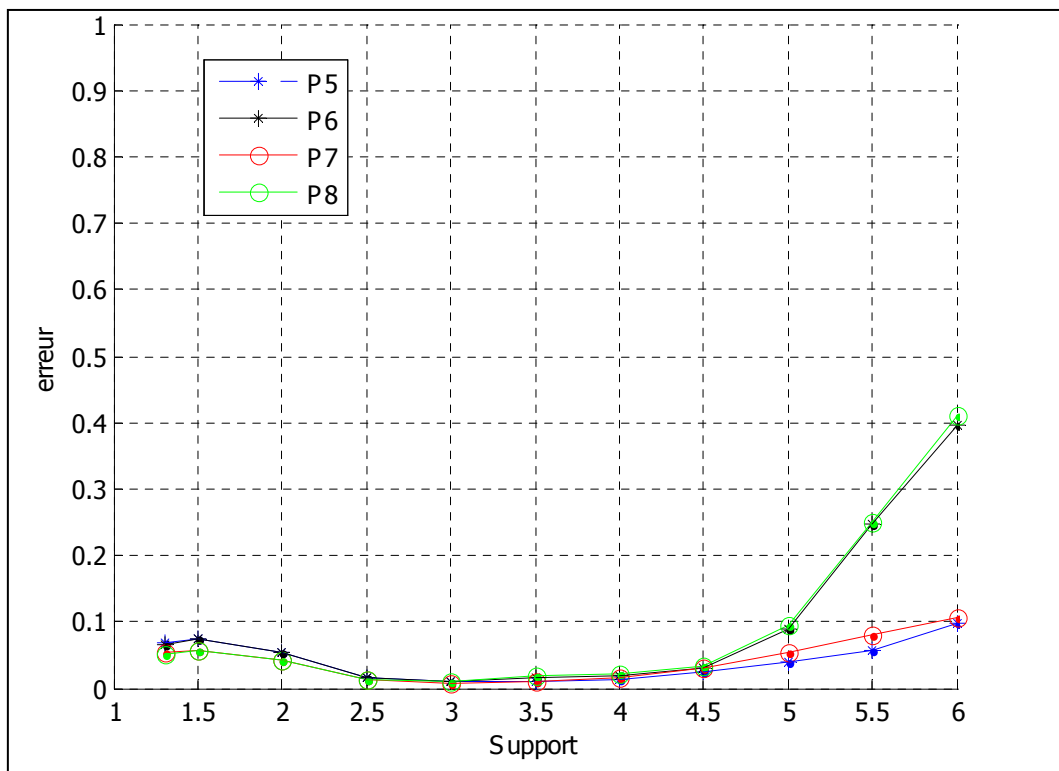


Figure III.1.12. Erreur pour le problème de la poutre encastree avec fonction de poids T2.

III.3. Modélisation de matériaux rigide-plastique

Nous avons appliqués la méthode sans maillage MLS pour étudier un problème de mise en forme de métaux. Pour cela nous avons analysé le comportement rigide-plastique d'une pièce forgée en déformation plane.

III.3.1. Modélisation mécanique de mise en forme de matériaux rigide-plastique

Dans le domaine Ω d'une déformation plane d'un problème de mise en forme [61], la déformation dans une direction (x_3 par exemple) est nulle, par règle d'écoulement, la contrainte dévia torique relative à cette direction est aussi nulle ($s_3 = 0$).

Donc

$$\sigma_3 = p = (1/2)(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (\text{III.2.1})$$

Et , l'équation (III.2.15) du chapitre II devient :

$$\begin{cases} p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 \\ s_1 = \sigma_1 - p \equiv (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \\ s_2 = \sigma_2 - p \equiv (\sigma_2 - \sigma_1)/2 \\ s_3 = \sigma_3 - p \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{III.2.2})$$

De même à partir des équations (III.2.17) et (III.2.18) du même chapitre, nous tirons :

- la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_1 - \sigma_2] \quad (\text{III.2.3})$$

- le taux de déformation équivalente :

$$\varepsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} \quad (\text{III.2.4})$$

Les équations partielles de l'équilibre mécanique peuvent être exprimées par

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{III.2.5})$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{III.2.6})$$

Où σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} sont les composants d'effort. Par le concept se référant à l'origine (non linéaire) du solide visqueux, l'équation de relation du vecteur d'effort σ et vecteur déformation ε peut être écrite sous la forme :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (\text{III.2.7})$$

où

$$\sigma = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T \quad (\text{III.2.8})$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{12}]^T \quad (\text{III.2.9})$$

Le critère de Von Mises devient :

$$\phi = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4.\sigma_{12}^2 - 4.\sigma_0^2 \quad (\text{III.2.10})$$

et

$$\frac{\varepsilon_1}{(1/2)(\sigma_1 - \sigma_2)} = \frac{-\varepsilon_2}{(1/2)(\sigma_1 - \sigma_2)} = \frac{\varepsilon_{12}}{\sigma_{12}} \quad (\text{III.2.11})$$

Pour les matériaux rigides plastiques :

$$D = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \left[\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{g} - \frac{2}{9} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \quad (\text{III.2.12})$$

où σ_e est la contrainte équivalente, ε_e est le taux de déformation équivalente et g est une constante matérielle (fonction de densité matérielle pour les matériaux légèrement compressibles).

L'équation de rapport de déplacement et taux de déformation peut être écrite sous forme :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \quad (\text{III.2.13})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \quad (\text{III.2.14})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \quad (\text{III.2.15})$$

Où u^1 et u^2 sont les composantes du vecteur déplacement.

L'équation non-linéaire de l'équilibre mécanique est donnée par

$$\nabla^2 u + f = 0 \quad (\text{III.2.16})$$

Où u est le vecteur déplacement

$$u = [u^1 \quad u^2]^T \quad (III.2.17)$$

Et

$$f = [f^1 \quad f^2]^T \quad (III.2.18)$$

En substituant les équations (III.2.13), (III.2.14) et (III.2.15) aux équations (III.2.5), (III.2.6) (III.2.17) et (III.2.16), nous obtenons:

$$f^1 = \left(\frac{3}{g} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x^1} + \left(\frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial x^1} - \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial x^1} \right) \left[2\varepsilon_{11} + \left(\frac{3}{g} - \frac{2}{3} \right) \varepsilon_v \right] + \left(\frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial x^2} - \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial x^2} \right) \varepsilon_{12} \quad (III.2.19)$$

$$f^2 = \left(\frac{3}{g} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial x^2} - \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial x^2} \right) \left[2\varepsilon_{22} + \left(\frac{3}{g} - \frac{2}{3} \right) \varepsilon_v \right] + \left(\frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial x^1} - \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial x^1} \right) \varepsilon_{12} \quad (III.2.20)$$

ε_v est le taux de déformation volumétrique

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \quad (III.2.21)$$

III.3.2. Analyse numérique de mise en forme des matériaux rigide-plastiques

Dans le sub-domaine Ω_x , et par approximation MLS [61], le vecteur déplacement u de l'équation. (III.2.16) peut être écrit sous forme :

$$u^1 = u_a^1 = N^T \hat{u}^1 \quad (III.2.22)$$

$$u^2 = u_a^2 = N^T \hat{u}^2 \quad (III.2.23)$$

Par substitution des équations (III.2.22) et (III.2.23) dans l'équation (III.2.16), les équations partielles sur les composantes nodales de déplacement $\hat{u}_i^1$ et $\hat{u}_i^2$ dans Ω_x sont :

$$\nabla^2 N^T \hat{u}^1 + f^1(\hat{u}^1, \hat{u}^2) = 0 \quad (III.2.24)$$

$$\nabla^2 N^T \hat{u}^2 + f^2(\hat{u}^1, \hat{u}^2) = 0 \quad (III.2.25)$$

En déformation plane, les équations partielles suivantes peuvent être obtenues pour tous les points considérés (nœuds) dans le domaine entier Ω

$$\nabla^2 N_k^T \hat{u}^1 + f_k^1(\hat{u}^1, \hat{u}^2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (III.2.26)$$

$$\nabla^2 N_k^T \hat{u}^2 + f_k^2(\hat{u}^1, \hat{u}^2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (\text{III.2.27})$$

Où L est le nombre de nœuds dans Ω .

A la frontière de Ω (sur Γ) et sur les nœuds frontaux, on peut écrire :

- La condition de déplacement de frontière :

$$\sum_{i=1}^n N_i \hat{u}_i^1 = u_C^1 \quad (\text{III.2.28})$$

$$\sum_{i=1}^n N_i \hat{u}_i^2 = u_C^2 \quad (\text{III.2.29})$$

Où u_C^1 et u_C^2 sont les composantes du déplacement de frontière.

- Les efforts de frontière :

$$p_n = p_{nC} \quad (\text{III.2.30})$$

$$p_t = p_{tC} \quad (\text{III.2.31})$$

Où p_n et p_t sont les efforts normal et tangentiel, respectivement.

$$p_n = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \left[\frac{2}{9} \left[(2n_1^2 - n_2^2) \varepsilon_{11} + (2n_2^2 - n_1^2) \varepsilon_{22} + 3n_1 n_2 \varepsilon_{12} \right] + \frac{1}{g} \varepsilon_v \right] \quad (\text{III.2.32})$$

$$p_t = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \frac{1}{3} \left[2n_1 n_2 (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) + (n_1^2 - n_2^2) \varepsilon_{12} \right] \quad (\text{III.2.33})$$

n_1 et n_2 sont les cosinus directeurs normal et tangentiel de frontière, p_{nC} et p_{tC} sont les efforts normal et tangentiel, respectivement.

dans le cas où la frontière une surface libre :

$$p_{nC} = 0 \quad (\text{III.2.34})$$

$$p_{tC} = 0 \quad (\text{III.2.35})$$

L'état de frontière de frottement est :

$$p_t = \mu K \quad (\text{III.2.36})$$

Où μ est le facteur de frottement, et K est l'effort de cisaillement de rendement du matériel.

Les équations. (III.2.26) à (III.2.31) et (III.2.36) peuvent être résolues par la méthode Newton– Raphson itérativement jusqu'à ce qu'un champ nodal stable de déplacement soit obtenu.

Il est possible de réaliser des calculs pour différents taux d'écrasement, il est alors préférable de prendre en compte l'écrouissage du matériau : on montre que lorsque l'épaisseur passe de h_0 à h , l'hypothèse de déformation homogène permet d'écrire :

$$-\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{dh}{h} < 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_e = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{dh}{h} \quad (\text{III.2.37})$$

Où dh est l'incrément de pénétration du processus,

$$\text{D'où} \quad \varepsilon_e = \frac{-2}{\sqrt{3}} \ln \frac{h}{h_0} \quad (\text{III.2.38})$$

III.3.3. Pseudo code pour mise en forme de matériau plastique par MLS

Début

Début

Effacer toute les donnés précédent

Les donnés d'entrés

- a. Nombres des nœuds suivant X,
- b. Nombres des nœuds suivant Y,
- c. La déformation initiale est nulle,
- d. Pas de descente de matrice de forgeage,
- e. Fonction de poids et taille de support,
- f. Imposition des conditions aux limites essentielles,
- g. Caractéristique du matériau.
- h. Dimensions des pièces D et L

Fin

Début

Incrémenter les nœuds adjacents de la matrice de forgeage

Calculer la matrice de la raideur et le résidu

Début

- a. Calculer ϕ_i et $\phi_{i,k}$ en un point x donné est le suivant
 - Trouver la liste des noeuds appartiens aux supports d'influence.
 - Initialiser les matrices symétriques A et $A_{,k}$ ($k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$) à 0.
 - Calculer le poids de ce noeud et ses dérivées en x .
 - Calculer la factorisation de Cholesky de A .
 - Évaluer p .
 - Calculer $c = A^{-1} \cdot p$
 - Pour $k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$,
 - évaluer $p_{,k}$;
 - calculer $c_{,k} = A^{-1}[-A_{,k}c + p_{,k}]$ par substitution arrière sur la matrice A factorisée.
 - Calculer $d = c^T p(x_i)$ à l'aide du vecteur $p(x_i)$ pré calculé,
 - Calculer $\phi_i = d \cdot w_i(x_i)$ grâce au poids que nous avons conservé à l'étape 3b.
 - Pour $k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$, calculer $\phi_{i,k}$ connaissant $d, c_{,k}$, le vecteur $p(x_i)$ pré calculé et les valeurs $w_i(x)$ et $w_{i,k}(x)$ retenues plus haut.

Fin

Début

- b. Par assemblage de $\phi_{i,k}$, calculer K
- c. Par (III.2.19-31), calculer vecteur de déplacement u
Par (III.2.37) calculer déformation et nouvelle distribution nodales

Fin

Si descente de matrice est supérieur à D

Fin

Fin

III.4. Validation numérique

III.4.1. Matériau choisi

La constante du matériau g est supposée égale à 0.007, la contrainte d'écoulement caractéristique du matériau est donnée par l'expression [61]:

$$\sigma_e = 589.86 \varepsilon_e^{0.0625} \text{ MPa} \quad (\varepsilon_e \geq 0.002) \quad (\text{III.3.1})$$

$$\sigma_e = 400 \text{ MPa} \quad (\varepsilon_e \leq 0.002) \quad (\text{III.3.2})$$

Où ε_e est la déformation équivalente.

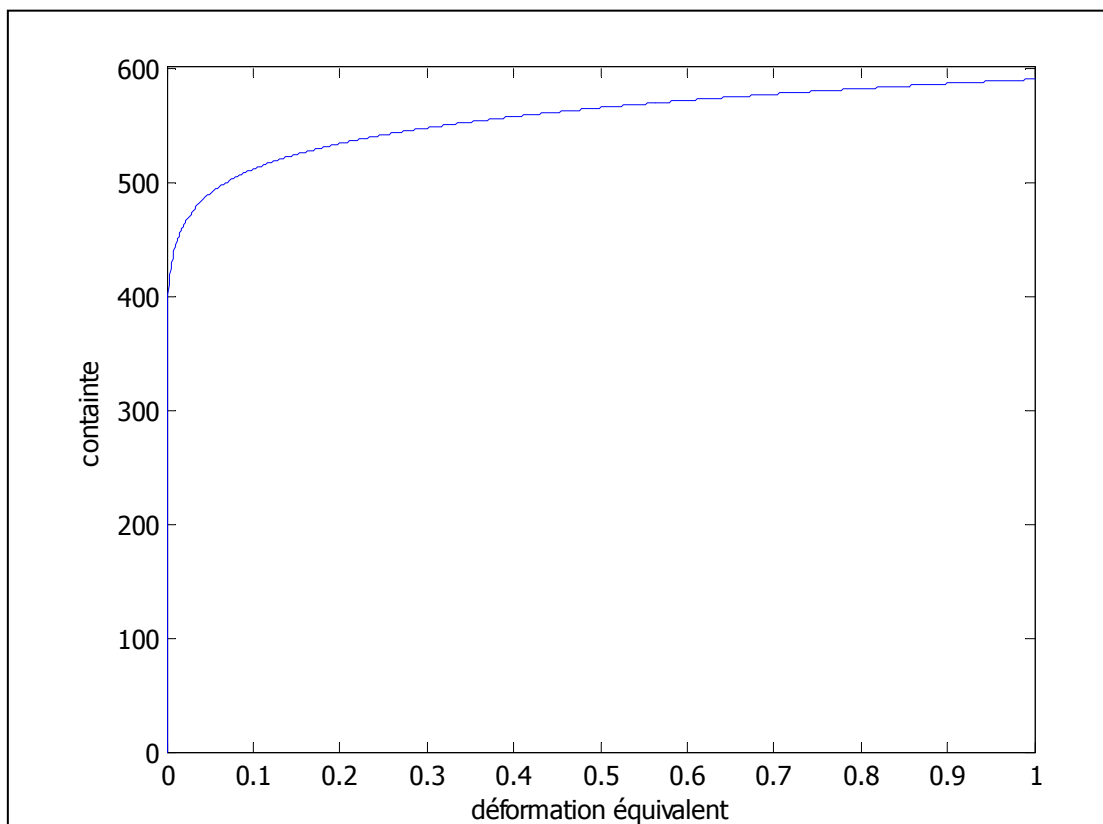


Figure III.3.1. Contrainte d'écoulement en fonction de la déformation équivalente.

III.4.2. Conditions aux limites

La pièce à forger est représentée par la figure III.3.2. C'est une pièce parallélépipédique de dimensions $L \times D = 20\text{cm} \times 20\text{cm}$. Il s'agit d'une mise en forme en déformation plane puisque l'épaisseur de la pièce est prise très grande par rapport aux deux autres dimensions. Les matrices de forgeages fixe et mobile sont semblables. Vu la symétrie de la pièce et celle du chargement (les matrices de forgeages fixe et mobile semblables), seul le quart de la pièce a été simulé. Le coefficient de frottement μ entre la pièce et les matrices de forgeages est pris égal à 0.3. L'incrément de

réduction est de 2% de D . La matrice mobile se déplace à une vitesse constante $V=0,4\text{m/s}$.

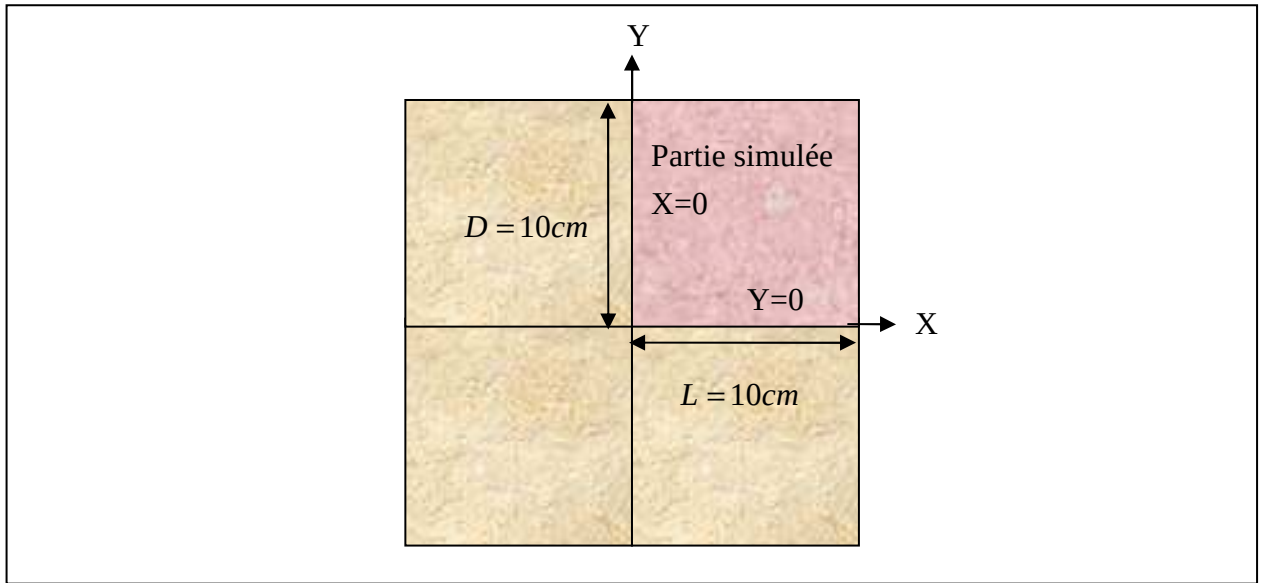


Figure III.3.2. Conditions de frontières et dimensions initiales de la pièce à forger.

III.4.3. Choix des paramètres numériques

Pour la simulation du forgeage de la pièce, nous avons utilisés les conditions numériques suivantes :

- * Approximation au sens des moindres carrés mobiles (méthode MLS)
- * Base quadratique.
- * Fonction de poids T1 (donnée par la formule 1.9) avec les paramètres $A=22$ et $B=2.5$.
- * Densité nodale : 100 ($m \times n = 10 \times 10$).

Le remaillage de la méthode de MLS n'étant pas nécessaire et le rayon r du sub-domaine Ω_x est pris égal à $r=2.5h$, où $h = \frac{L}{n-1} = 10/9$, (figure III.3.3).

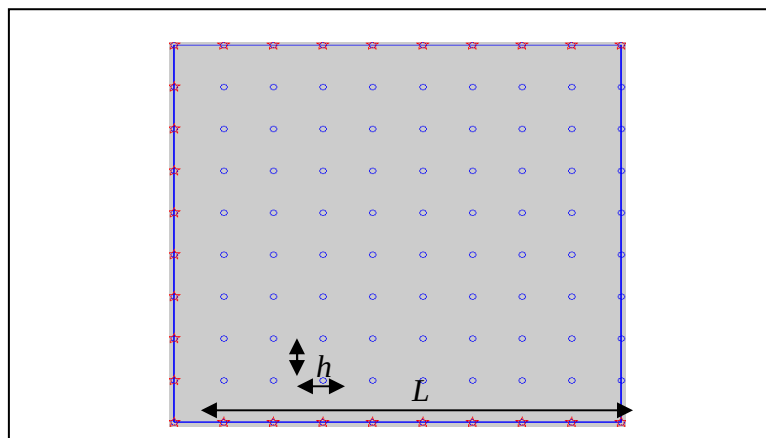


Figure III.3.3. Distribution de nœuds.

III.4.4. Exemples d'application

Nous avons traité cinq exemples de mise en forme (forgeage) de métal à comportement rigide-plastique avec la méthode sans maillage MLS. Pour les différents exemples, Les pièces à forger ont les mêmes formes et dimensions mais les matrices de forgeages ont les formes et dimensions suivantes :

- * Matrices de forgeages de forme plate et de longueur supérieure à $2L$
- * Matrices de forgeages de forme plate et de longueur égale à $2L/3$
- * Matrices de forgeages de forme cylindrique et de rayon L
- * Matrices de forgeages de forme cylindrique et de rayon $L/2$
- * Matrices de forgeages de forme plate avec bridage

Les caractéristiques du matériau sont données par la courbe de la figure III.3.1.

Nous avons appliqué les mêmes conditions aux limites et numériques citées ci-dessus pour chacun des cinq exemples. Pour chaque cas, nous avons utilisé quatre taux d'écrasement différents.

Résultats :

Les courbes ci-dessous donnent les taux de déformation équivalente, les contraintes équivalentes et les champs de déplacement des nœuds pour les différents taux d'écrasement et les différentes formes de matrices de forgeages. La simulation de la pièce montre plusieurs zones de déformation (ou contrainte), de couleurs allant du bleue jusqu'au rouge suivant l'ordre croissant de valeurs de déformation (ou contrainte).

Pour ce problème de grande déformation, nous avons appliqué l'algorithme de Newton Raphson, la procédure de remaillage n'est pas nécessaire et le coût de calcul est réduit.

Exemple1: Matrices de forgeage de forme plate et de longueur supérieure à $2L$

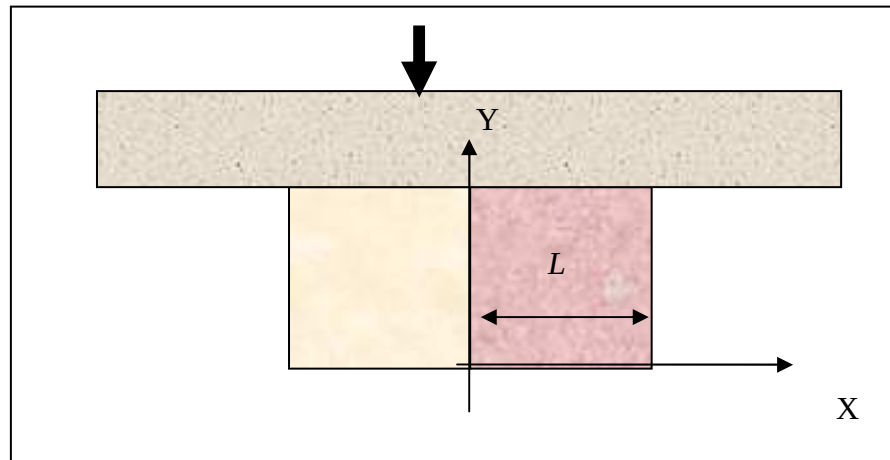


Figure III.3.4. Matrices de forgeage de forme plate et de longueur supérieure à $2L$

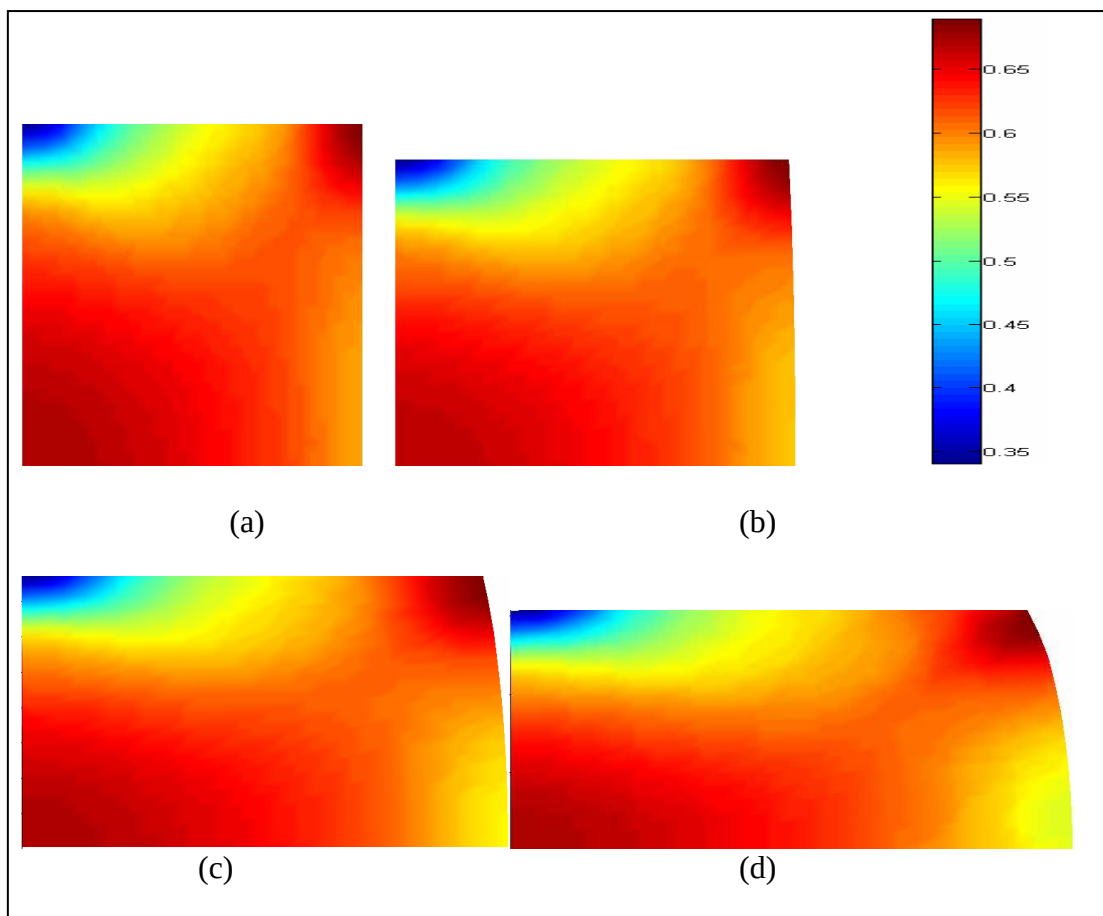


Figure III.3.5. Taux de déformation équivalente avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme plate et de longueur supérieure à $2L$, avec descente de : (a) 1%, (b) 10%, (c) 25%, (d) 35%.

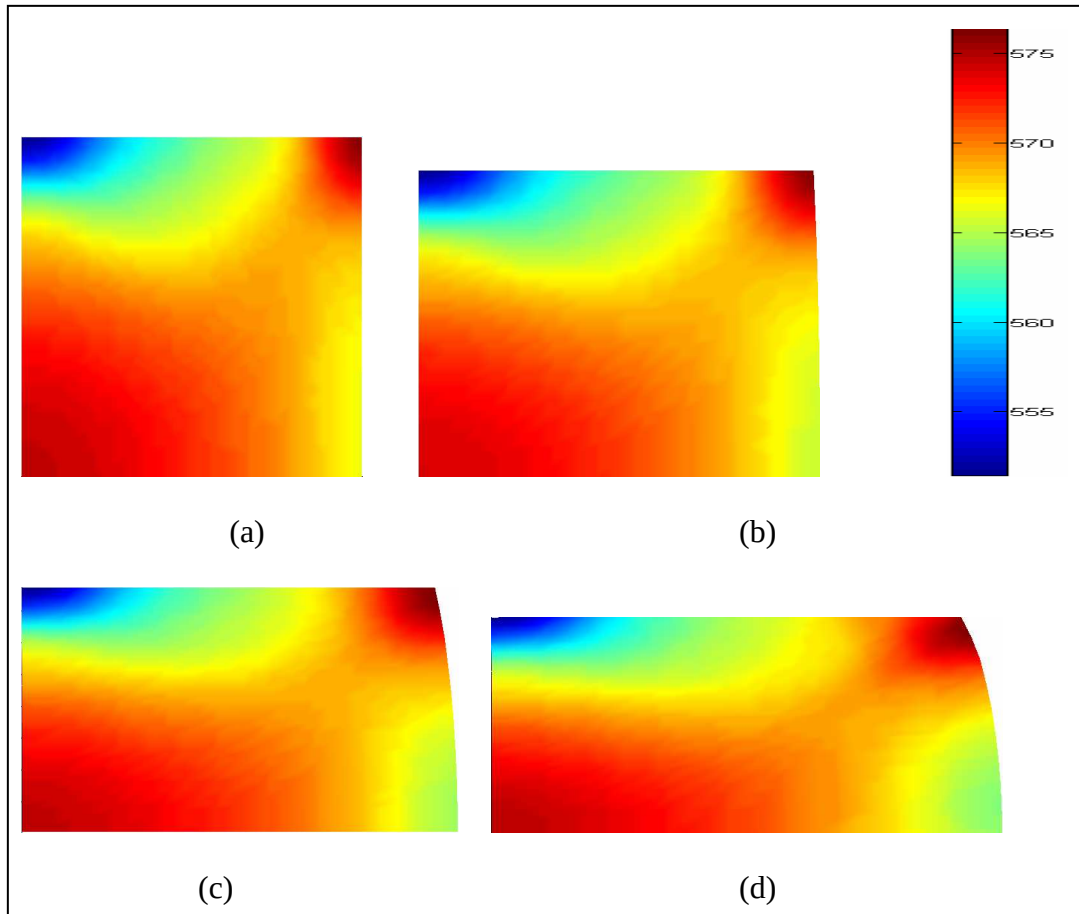


Figure III.3.6. Contraintes équivalentes avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme plate et de longueur supérieure à $2L$, avec descente de : (a) 1%, (b) 10%, (c) 25%, (d) 35%.

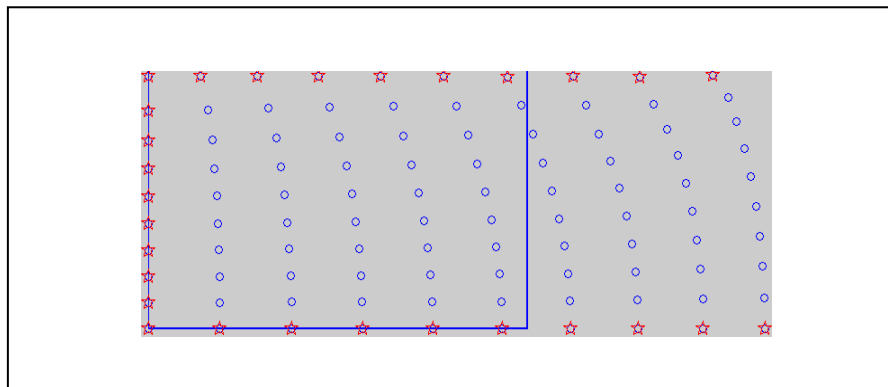


Figure III.3.7. Champs de déplacement des nœuds avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme plate et de longueur supérieure à $2L$, avec descente de 35%.

Exemple 2 : Matrice mobile de forme plate et de longueur $L/3$

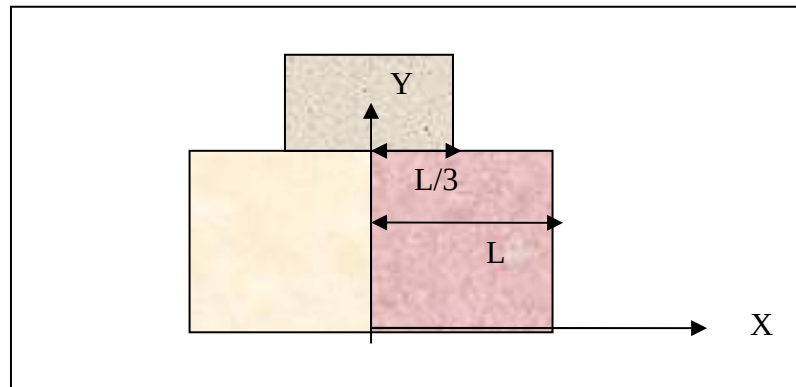


Figure III.3.8. Matrices de forgeage de forme plate de longueur $2L/3$

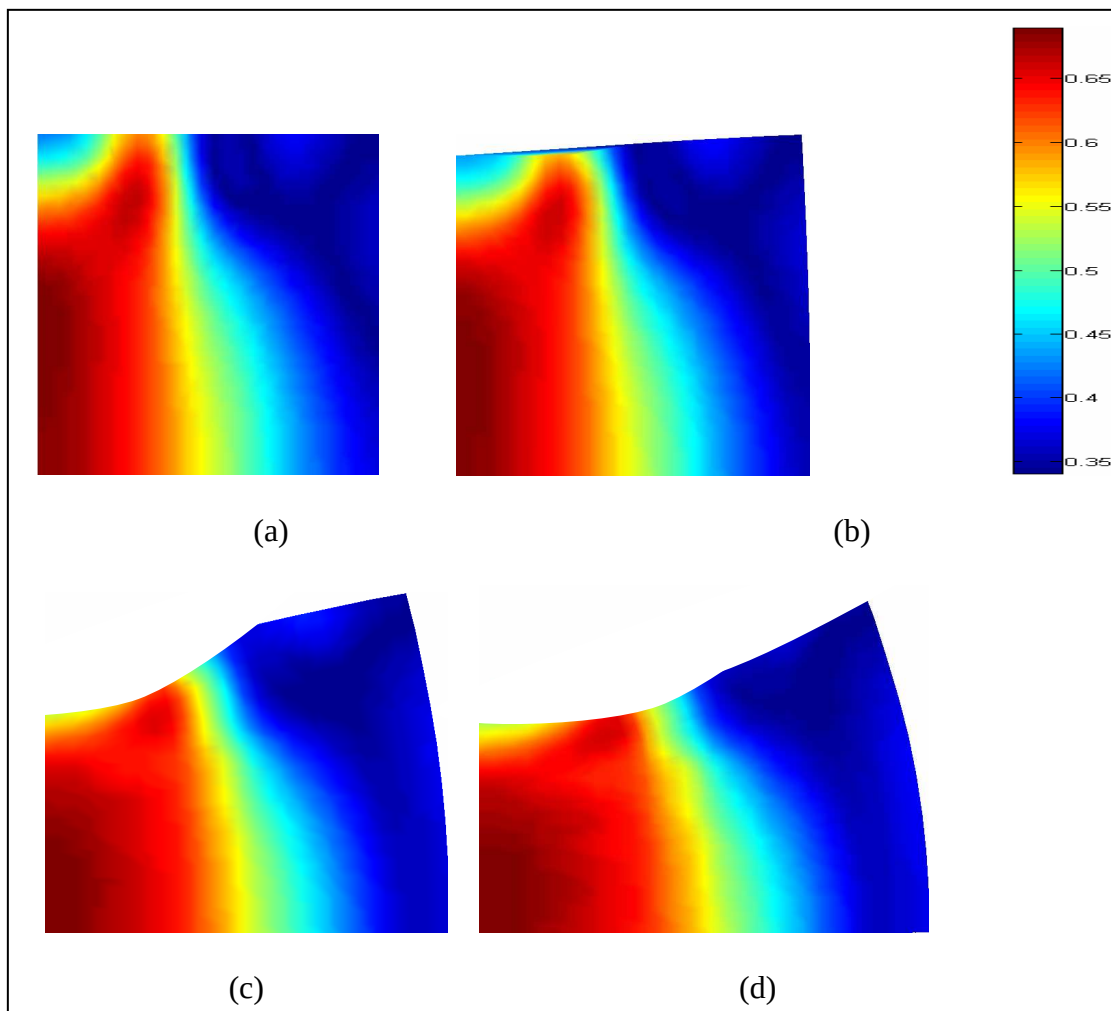


Figure III.3.9. Taux de déformation équivalente avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme plate et de longueur supérieure à $2L/3$, avec descente de : (a) 1%, (b) 10%, (c) 25%, (d) 35%.

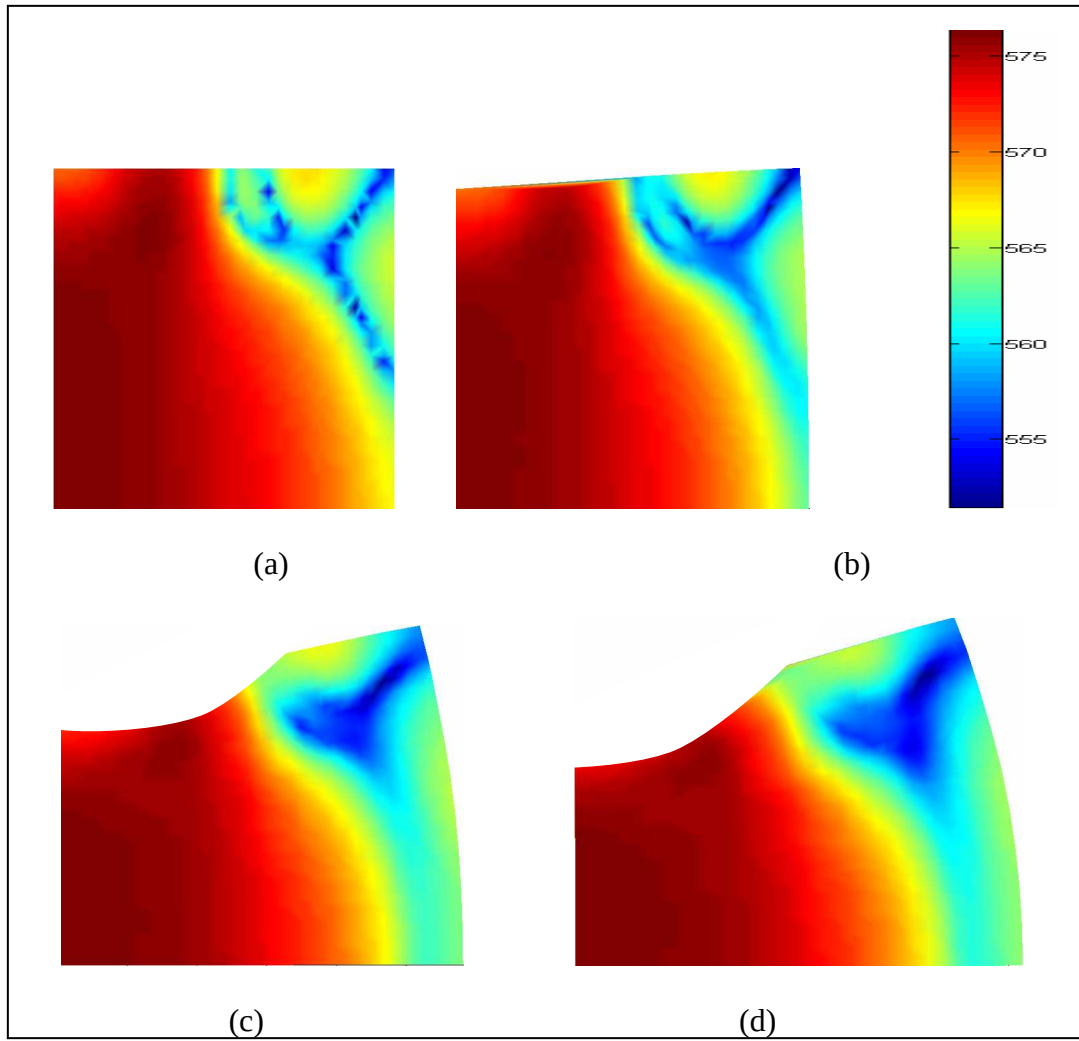


Figure III.3.10. Contraintes équivalentes avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme plate et de longueur supérieure à $2L/3$, avec descente de : (a) 1%, (b) 10%, (c) 25%, (d) 35%.

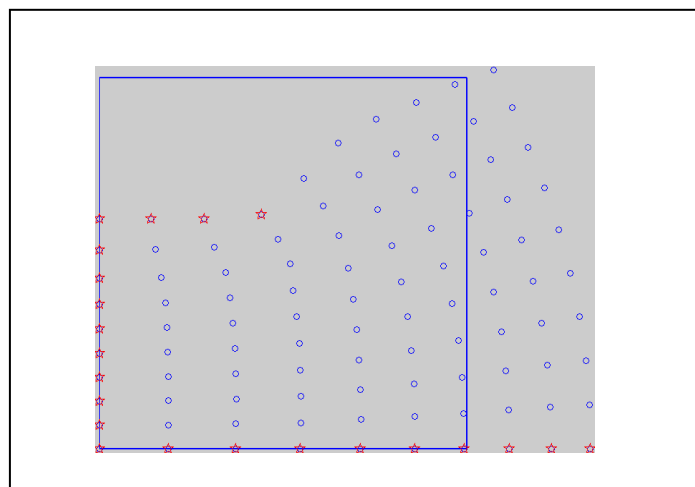


Figure III.3.11. Champs de déplacement des nœuds avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme plate et de longueur supérieure à $2L/3$, avec descente de 35%.

Exemple 3 : Matrice de forme cylindrique et de rayon L

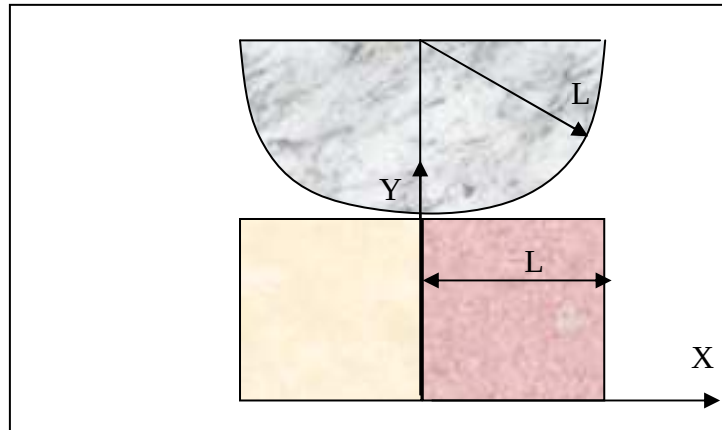


Figure III.3.12. Matrices de forgeage de forme cylindrique et de rayon L

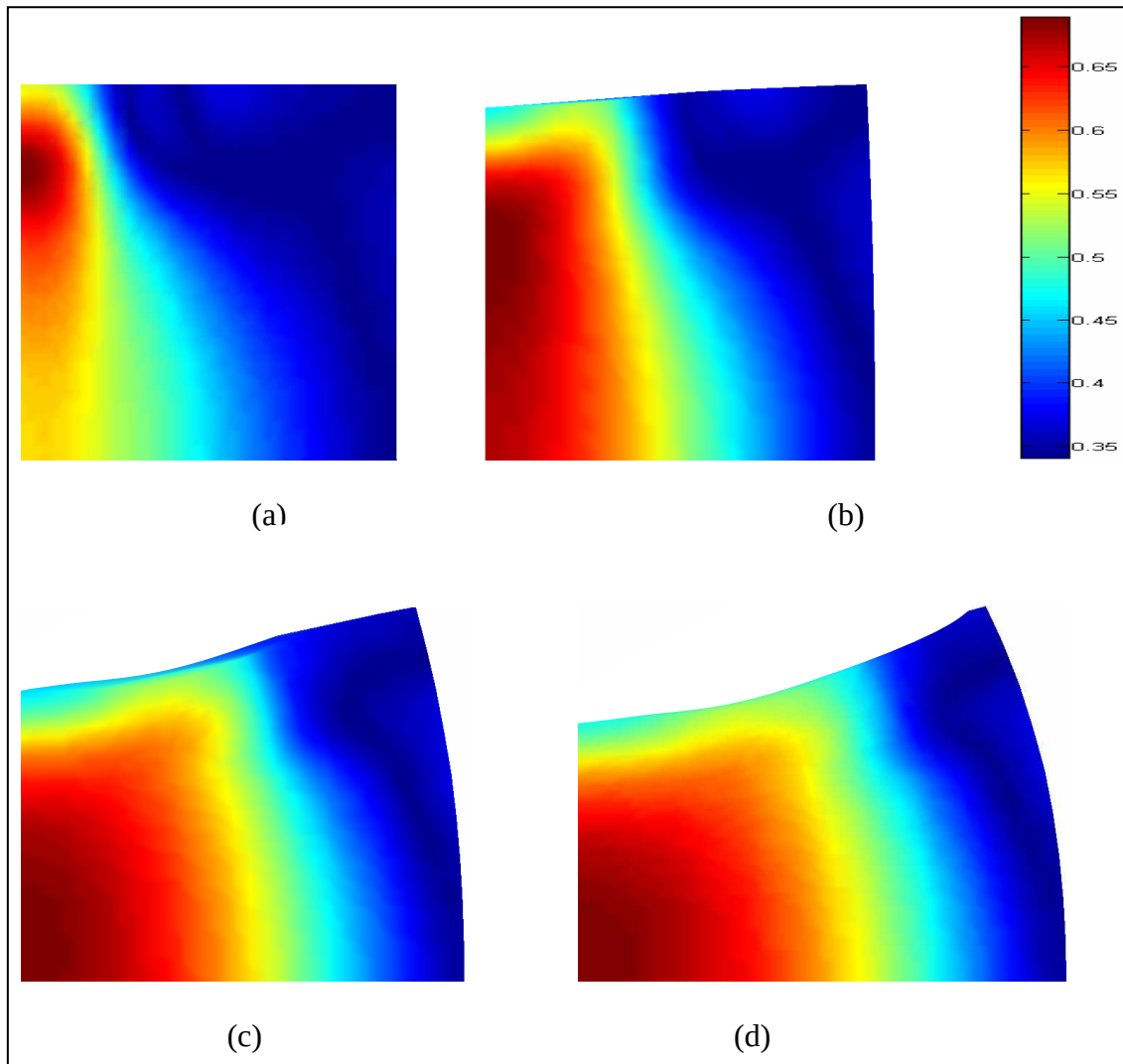


Figure III.3.13. Taux de déformation équivalent avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme cylindrique et de rayon L, avec descente de : (a) 1%, (b) 10%, (c) 25%, (d) 35%.

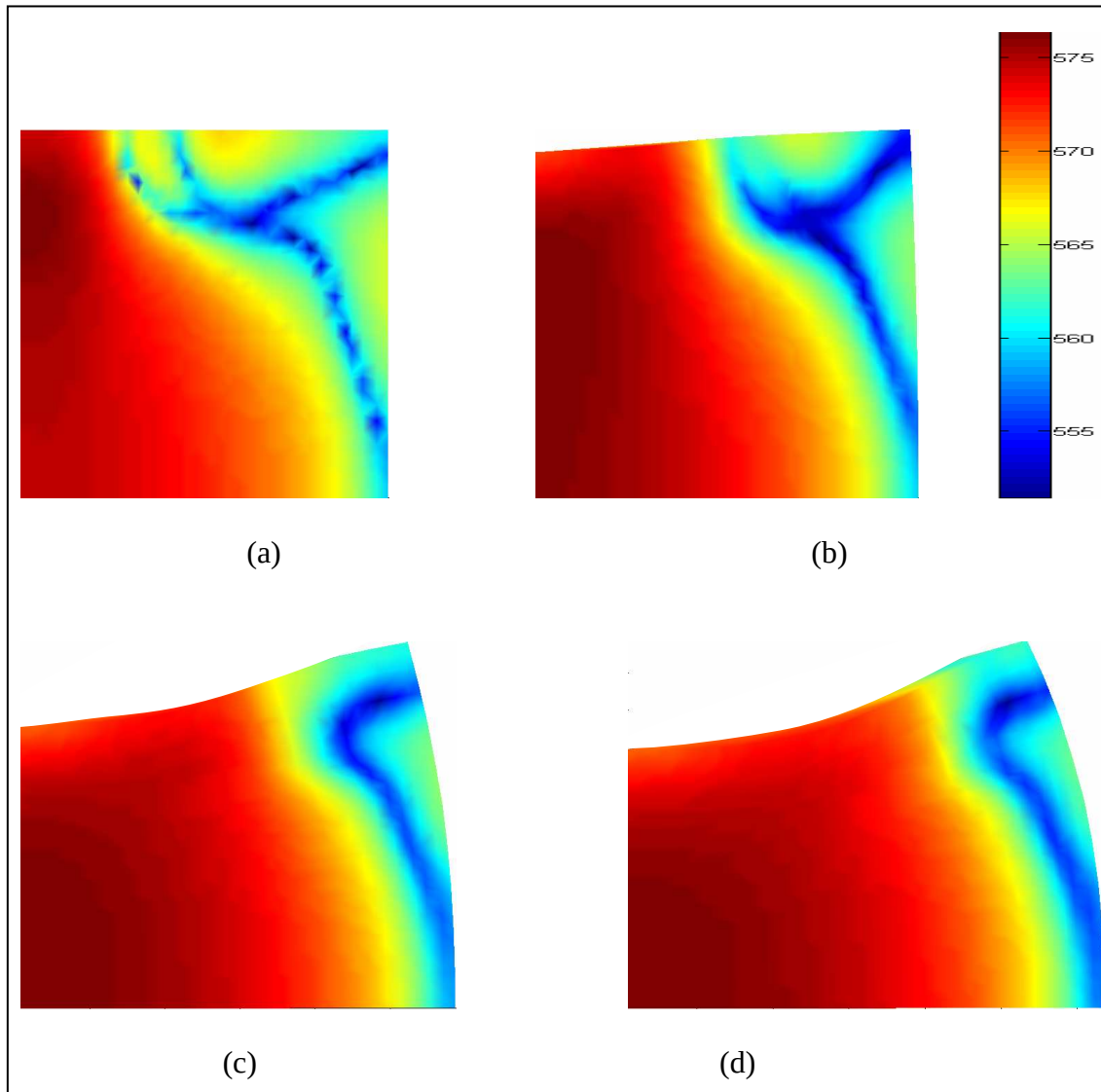


Figure III.3.14. Contraintes équivalentes avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme cylindrique et de rayon L , avec descente de : (a) 1%, (b) 10%, (c) 25%, (d) 35%.

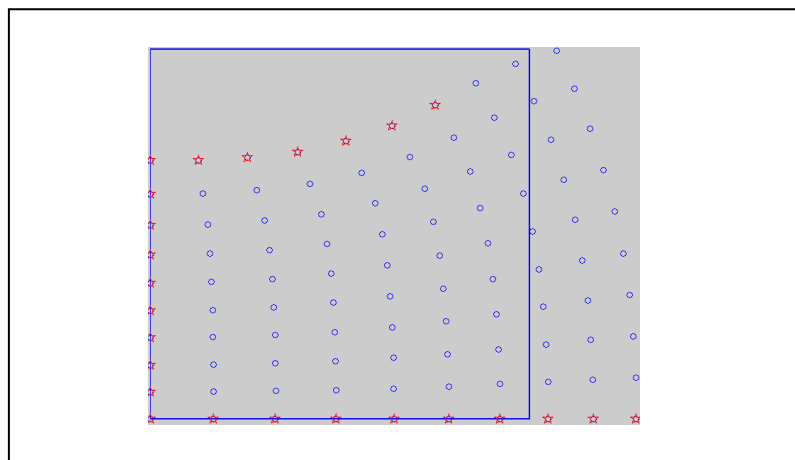


Figure III.3.15. Champs de déplacement des nœuds avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme cylindrique et de rayon L , avec descente de 35%.

Exemple 4 : Matrices de forgeage de forme cylindrique et de rayon $L/2$

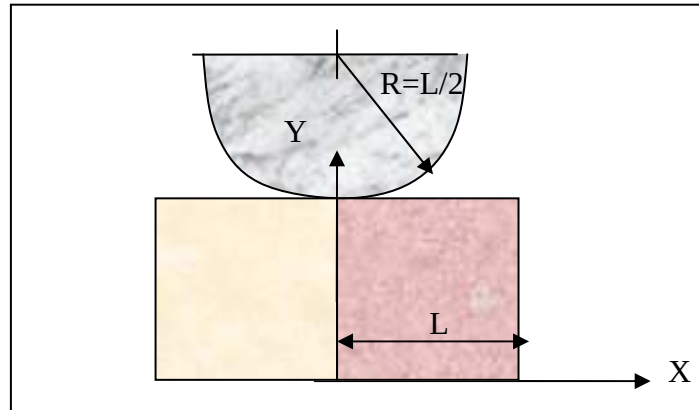


Figure III.3.16. Matrices de forgeage de forme cylindrique et de rayon $L/2$

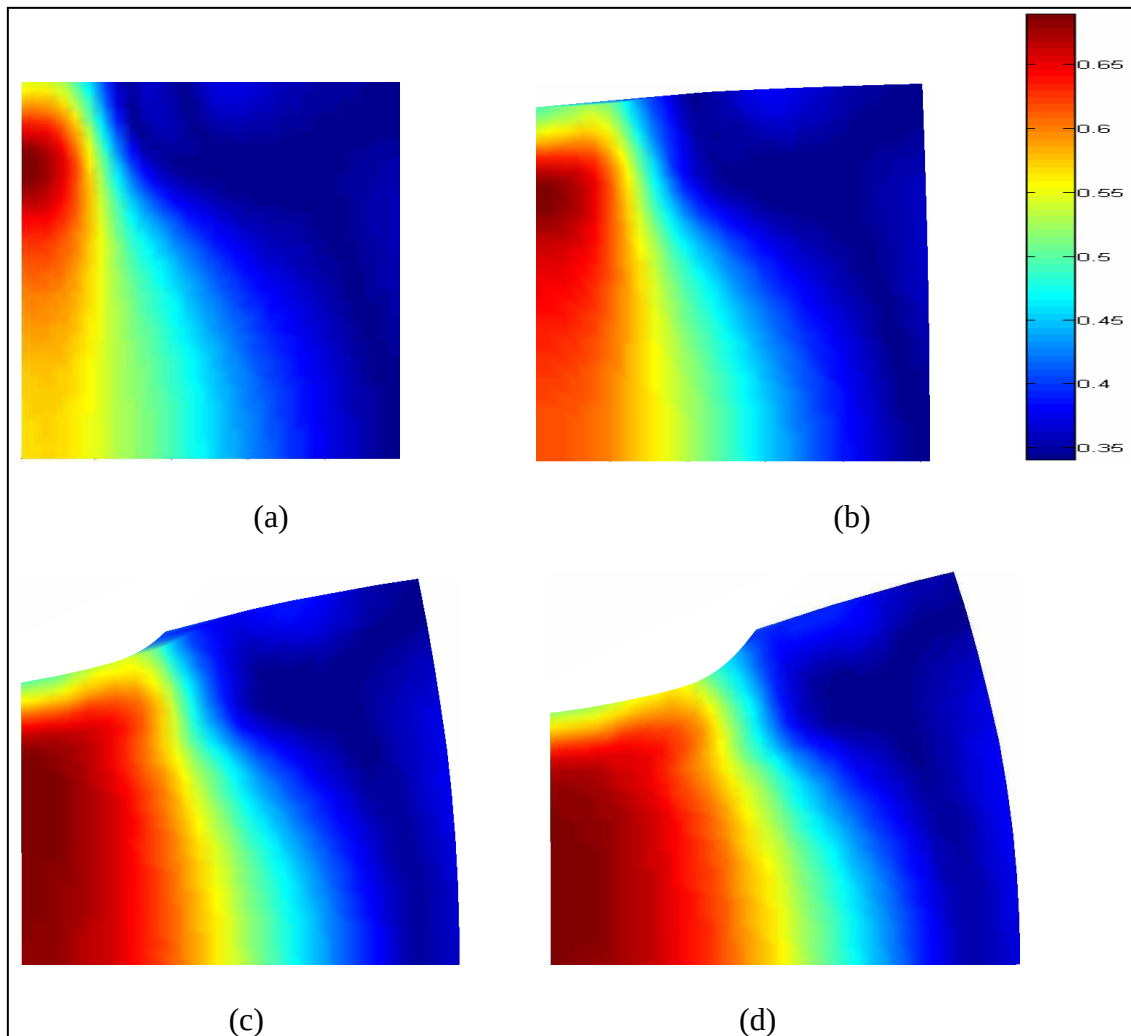


Figure III.3.17. Taux de déformation équivalents avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme cylindrique et de rayon $L/2$, avec descente de : (a) 1%, (b) 10%, (c) 25%, (d) 35%.

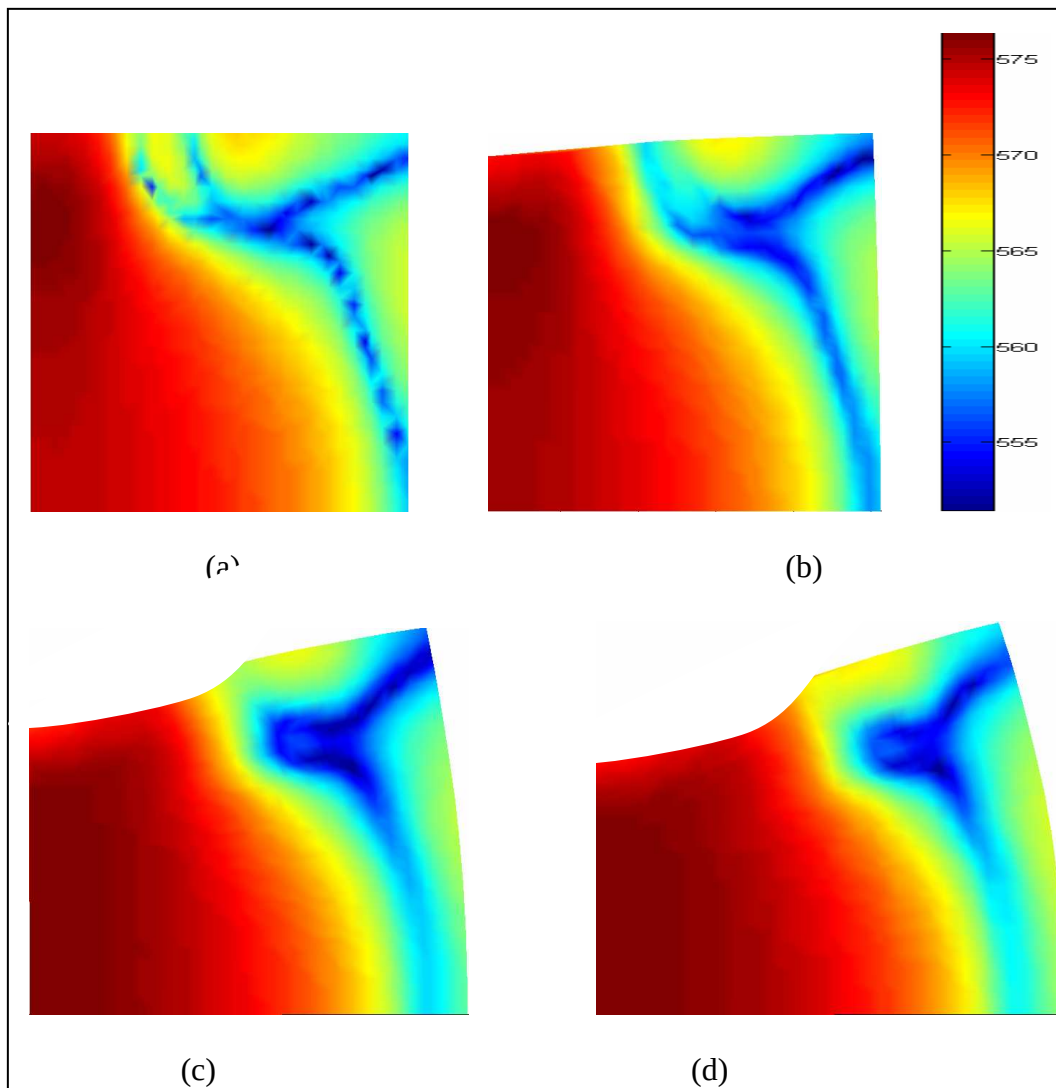


Figure III.3.18. Contraintes équivalentes avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme cylindrique et de rayon $L/2$, avec descente de : (a) 1%, (b) 10%, (c) 25%, (d) 35%.

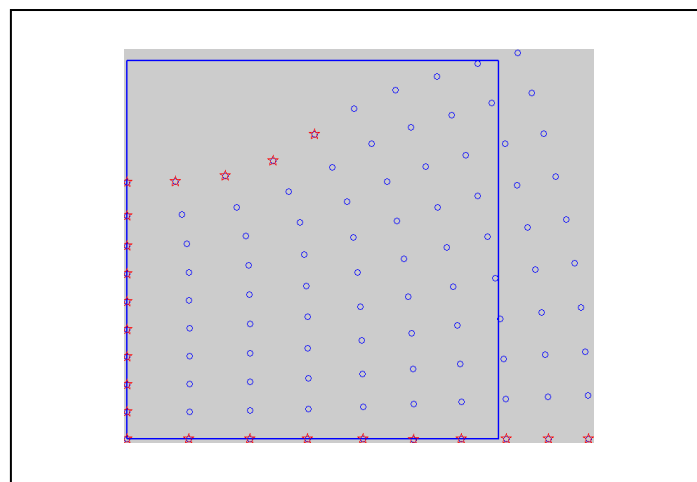


Figure III.3.19. Champs déplacement des nœuds avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme cylindrique et de rayon $L/2$, avec descente de 35%.

Exemple 5 : Matrices de forgeage de forme plate avec bridage

Dans cet exemple la pièce est fixée par Brides portées les matrices de forgeage fixe et mobile (voir figure III.3.20).

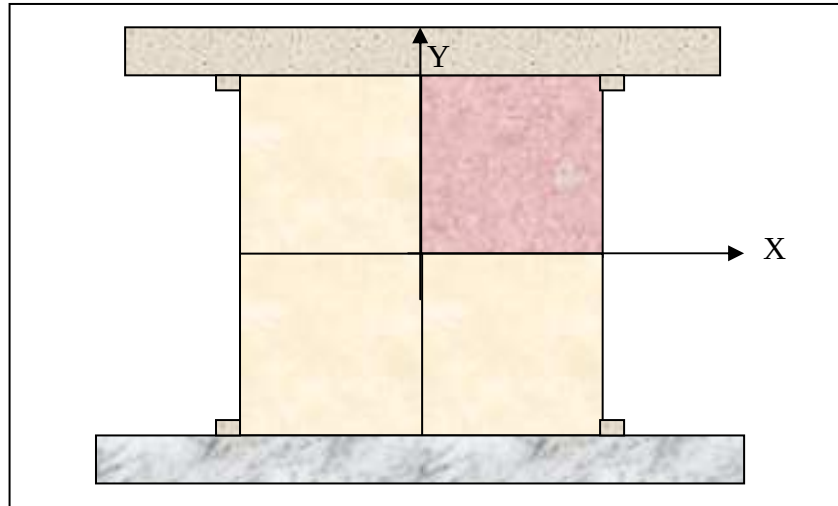


Figure III.3.20. Matrice de forme plate avec bridage.

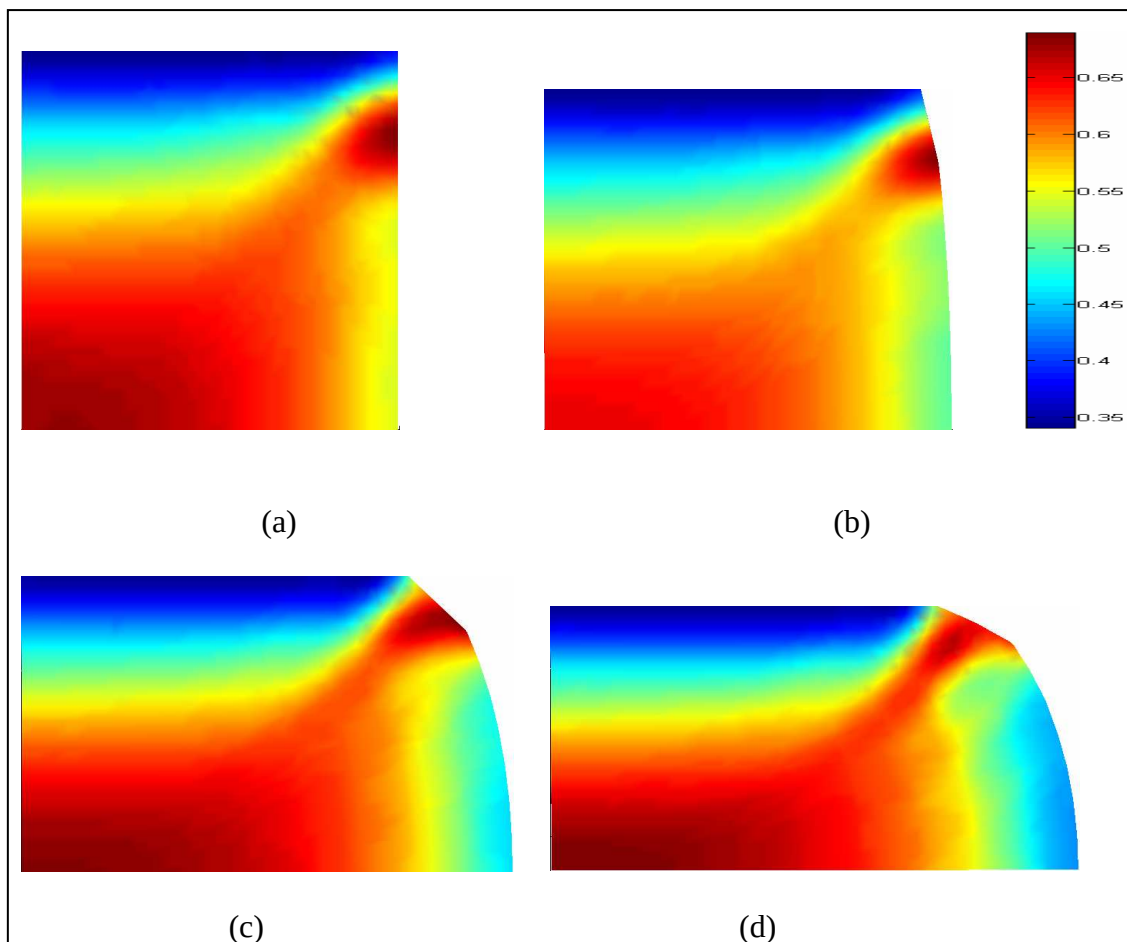


Figure III.3.21. Taux de déformation équivalente avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme plate avec bridage, avec descente de : (a) 1%, (b) 10%, (c) 25%, (d) 35%.

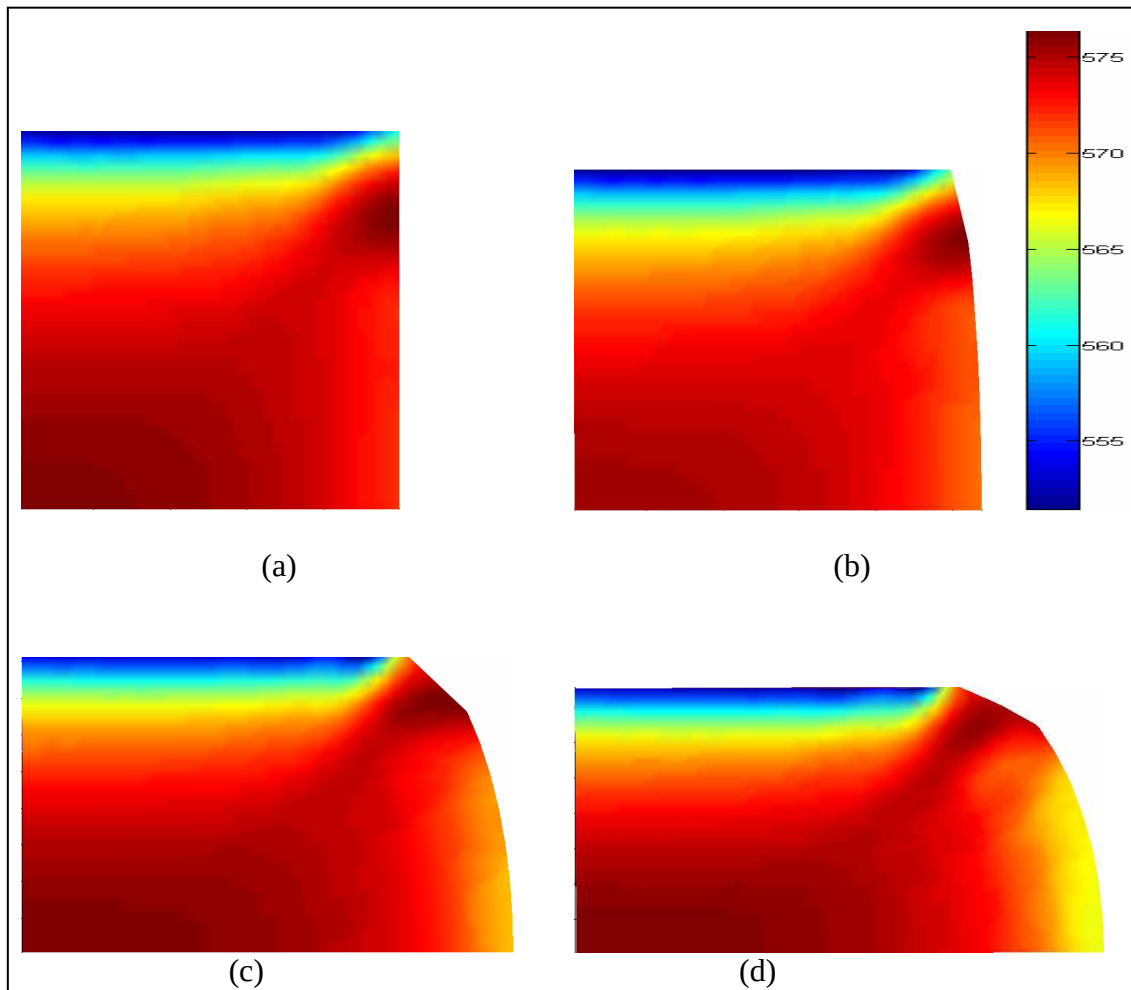


Figure III.3.22. Contraintes équivalentes avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme plate avec bridage, avec descente de : (a) 1%, (b) 10%, (c) 25%, (d) 35%.

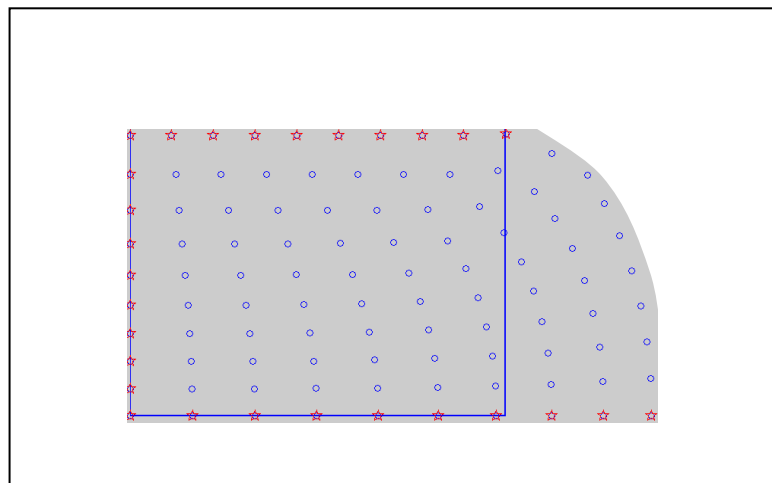


Figure III.3.23. Champs de déplacement des nœuds avec mise en forme sous matrices de forgeage de forme plate avec bridage, avec descente de 35%.

II.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué un test de convergence de la méthode sans maillage en fonction des paramètres numériques, qui consiste à comparer la solution numérique du problème élastique de la poutre encastrée en élasticité linéaire et la solution exacte, il nous a permis de déterminer les paramètres agissants sur la précision de calcul, et mettre la lumière sur les nouvelles fonctions de poids ayant plus d'efficacité numérique. Par suite, nous avons appliqué la méthode « sans maillage MLS » aux matériaux à comportement rigide-plastique. Le temps de calcul est plus économisé puisque avec cette méthode la procédure de maillage et remaillage est évitée. Nous avons effectué une modélisation mécanique en déformation plane sur une pièce mécanique forgée par compression et dont le comportement est rigide plastique. Vu la symétrie géométrique de la pièce et du chargement, seul le premier quart de pièce a été simulé. Les conditions aux limites utilisées sont : la ligne centrale horizontale suivant l'axe y , et la ligne centrale verticale suivant l'axe x .

La simulation montre les zones de grande déformation en rouge, et les zones de petite déformation en bleu, le taux de déformation et l'intensité de contrainte évoluent fonction du pas de la matrice mobile, et de la forme des matrices de forgeage (fixe et mobile). Les résultats de simulation sont raisonnables du point de vue évaluatif.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les méthodes sans maillage, développées depuis maintenant une dizaine d'années, permettent d'éviter de construire la solution à partir d'un maillage d'éléments, en prenant seulement en compte le nuage de noeuds. La majorité des méthodes sans maillage est cependant associée à des temps de calcul beaucoup plus importants que dans le cadre de la mise en forme, et de difficultés dans l'imposition des conditions aux limites. Malgré ces problèmes, les méthodes sans maillage ont été appliquées avec succès dans de nombreuses simulations de procédés très difficiles à traiter par la méthode des éléments finis, puisqu'elles ont certains avantages comme:

- La génération de maille et le remaillage ne sont pas nécessaires;
- La possibilité d'insérer, ou de retirer des noeuds très facilement ;
- La qualité de la solution est beaucoup moins sensible à la position relative des noeuds.

Deux méthodes sans maillage (méthode des éléments naturels NEM et méthode des moindres carrés mobiles MLS) ont été étudiées et comparées et par suite le choix de la méthode MLS pour la modélisation numérique a été fait puisque celle-ci est plus avantageuse pour les raisons suivantes :

- Le raffinement n'est pas nécessaire ;
- Le support est indépendant de la position des noeuds ;
- Le support relativement large des fonctions de forme permet de remédier à un certain degré aux problèmes de blocage rencontrés dans les problèmes d'incompressibilité.

Nous avons traité le problème de poutre élastique linéaire en utilisant la méthode MLS pour un support de domaine d'influence convenable de la fonction de poids, par suite, nous avons proposé deux nouvelles fonctions de poids dont la précision d'interpolation est meilleure que celles des fonctions de poids Spline et Gauss. Nous avons exploité le meilleur support de domaine d'influence avec la nouvelle fonction de poids sélectionnée pour le problème de mise en forme.

Dans le cadre des méthodes de calcul plastique, nous avons présenté une méthode MLS et sa validation numérique dans la mise en forme en cas de déformation plane de matériau rigide-plastique non linéaire. Nous avons développé un code de calcul pour la simulation de cette méthode avec logiciel MATLAB. La modélisation étant réalisée en deux dimensions en raison de simplification du problème. Plusieurs résultats ont été visualisés dans le cadre de la validation de la méthode étudiée et du code de calcul utilisé.

De futurs travaux pourraient être envisagés en prenant en considération les points suivants :

- Enrichissement du code de calcul réalisé et introduction du problème en trois dimensions,
- Utilisation de plusieurs types de matériaux et comparaison entre les différents comportements,
- Elargissement de l'étude vers le domaine viscoplastique,
- Recherche des moyens mathématiques ou numériques pour augmenter les performances de la méthode,
- Possibilité de couplage avec un code d'optimisation (comme les algorithmes génétiques) en vue de la résolution de certains problèmes plus complexes.

Références bibliographiques

- [1] Duflot M, Application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture. Thèse de Doctorat, Université de Liège (2004).
- [2] Pierre S, *Introduction à la méthode des éléments finis*, Docteurs sciences mathématiques, Technique de l'ingénieur, AF504 (1900).
- [3] Lucy L.B, *A numerical approach to the testing of fusion process*. The astronomic journal, 88: 1013–1024, 1977.
- [4] Monaghan J.J, *Why particle methods work*. SIAM Journal of scientific and statistical computing, 3(4):422–, 1982.
- [5] Monaghan J.J, *An introduction to SPH*. Computer Physics Communications, 48:89–96, 1988.
- [6] Attaway S.W, Heinstein M.W, Swegle J.W, *Coupling of smooth particle hydrodynamics with the finite element method*. Nuclear engineering and design, 150: 199-205, 1994.
- [7] Johnson G.R, Beissel S.R, *Normalized smoothing functions for SPH impact computations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996.
- [8] Liu W.K, Jun S, Zhang Y.F, *Reproducing Kernel Particle Methods*. Int. J. Numer. Methods Fluids, 1996.
- [9] Nayroles B, Touzot G, Villon P. *Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements*. Computational mechanics , 10: 307–318, 1992.
- [10] Belytschko T, Lu Y.Y, Gu L. *Element-free Galerkin methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37:229–256, 1994.
- [11] Duarte, C. A. et Oden, J. T. (1996b). *Hp clouds—an hp meshless method*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 12:673–705.
- [12] Babuska I, Melenk J.M, *The partition of unity finite element method: basic theory and applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139:289–314, 1996.
- [13] Belytschko, T, Krongauz, Y, Fleming, M, Organ, D. et Liu, W. K. (1996a). *Smoothing and accelerated computations in the element-free Galerkin method*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 74:111–126.
- [14] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P. *Meshless methods: an overview and recent developments*. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering , 139:3–47, 1997.

- [15] Liu W.K, Hao S, Belytschko T, Li S.F, Chang C.T, *Multiple scale meshfree methods for damage fracture and localization*. Computational materials science, 16: 197–205, 1999.
- [16] Chen J.S, Pan C, Wu C.T, Liu W.K, *Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of nonlinear structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 139: 195–229, 1997.
- [17] Belytschko T, Fleming M, *Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method*. Computers and Structures, 71:173–195, 1999.
- [18] Perrone N, Kao R, *A general finite difference method for arbitrary meshes*. Computers and structures, 5:45–58, 1975.
- [19] Liszka T, Orkisz J, *The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics*. Computers and structures, 11: 83–95, 1980.
- [20] Breitkopf P, Touzot G, Villon P, *Double grid collocation method*, Computational Mechanics , 25:199–206, 2000.
- [21] Sukumar N, Moran B, Belytschko T. *The natural elements method in solid mechanics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43:839–887, 1998.
- [22] Sambridge M, Braun J, McQueen M. *Geophysical parameterization and interpolation of irregular data using natural neighbors*. Geophys. J. Int, 122: 837–857, 1995.
- [23] Cueto E, Sukumar, N, Calvo B, Cegonino J, Doblaré M, *Overview and recent advances in Natural Neighbour Galerkin Methods*. Archives of computational methods in engineering, 10(4):307–384, 2003.
- [24] Fleming M, Chu Y.A, Moran B, Belytschko T, *Enriched Element-Free Galerkin methods for crack tip fields*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 40:1483–1504, 1997.
- [25] Rao B.N, Rahman S, *Mesh free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials*. Engineering fracture mechanics, 70(1): 1–27, 2003.
- [26] Chen Y.P, Lee J.D, Eskandarian A, *Dynamic meshless method applied to non local crack problems*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics , 38: 293–300, 2002.
- [27] Chen J.S, Wu C.T, Yoon Y, *A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering , 50:435–466, 2001.
- [28] Chen J.S, Roque C.M.L, Pan C, Tonini Botton S, *Analysis of metal forming process based on meshless method*, Journal of Material Processings technology, 80-81:642–646, 1998.

- [29] Chen J.S, Wang H.P, *New Boundary conditions treatments in meshfree computation of contact problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 187:441–468, 1998.
- [30] Chen J.S, Pan C, Roque C.M.L, Wang H.-P, *A Lagrangian reproducing kernel particle method*, Computational Mechanics , 22:289–307, 1998.
- [31] Yoon S, Chen J.S, *Accelerated meshfree method for metal forming simulation*, Finite Element in Analysis and Design, 38: 937–948, 2002.
- [32] Danielson K.T, Hao S, Liu W.K, Uras A, Li S, *Parallel computation of meshless methods for explicit dynamic analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 47:1323–1341, 2000.
- [33] Li S, Qian D, Liu W.K, Belytschko T, *A mesh-free contact-detection algorithm*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190:3271–3292, 2001.
- [34] Li S, Hao W, Liu W.K. *Mesh-free simulations of shear banding in large deformation*. Int. J. Solids Struct, 37: 7183–7206, 2000.
- [35] Li S, Liu W.K, Rosakis A, Belytschko T, Hao W, *Mesh-free Galerkin simulations of dynamic shear band propagation and failure mode transition*. International Journal of solids and structures, 37:7183–7206, 2000.
- [36] Lu H, Cheng H.S, Cao J, Liu W.K. *Adaptive enrichment simulation and experiment on buckling and post-buckling analysis in sheet metal forming*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, à paraître.
- [37] Hao S, Liu W.K, Chang C.T, *Computer implementation of damage models by finite element and meshfree methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 187:401–440, 2000.
- [38] Idelsohn S.R, Onate E, Del Pin F, *A Lagrangian meshless finite element method applied to fluid-structure interaction problems*. Computers and Structures, 81:655–671, 2003.
- [39] Martinez M.A, Cueto E, Alfaro I, Doblaré M, Chinesta F, *Updated lagrangian free surface flow simulations with Natural Neighbour Galerkin methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 60(13):2105– 2129, (2004).
- [40] Chinesta F, Lorong P, Ryckelynck D, Martinez M.A, Cueto E, Doblaré M, Coffignal G, Touratier M, Yvonnet J, *Thermomechanical cutting model discretization: eulerian or lagrangian, mesh or meshless*, International Journal of forming processes, 7 (2):83–97, (2004).
- [41] Alfaro I, Yvonnet J, Cueto E, Chinesta F, Doblaré M, *Meshless methods with application to metal forming*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, accepté pour publication, (1995).

- [42] Sibson R, *A vector Identity for the Dirichlet tessellations*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc, 87:151–155, (1980).
- [43] Voronoï G.M, *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire: recherches sur les paralléloèdres primitifs.* . J. Reine Angew. Math. , 134:198–287, (1908).
- [44] Piper B, *Properties of local coordinates based on Dirichlet tessellations*. Computing Suppl, 8: 227–239, (1993).
- [45] Dolbow J, Belytschko T, *Volumetric locking in the finite element free Galerkin method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 46:925–942, (1999).
- [46] Gonzalez D, Cueto E, Martinez M.A, Doblaré M, *Numerical integration in Natural Neighbour Galerkin Methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 60(12):2077–2104, (2004).
- [47] Melenk, J. M, et Babuška, I, *The partition of unity finite element method: Basic theory and applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139:289–314, (1996).
- [48] Shepard, D, *A two-dimensional function for irregularly spaced points*. In 23rd ACM National Conference, pages 517–524, (1968).
- [49] Atluri, S. N, Kim, H.-G. et Cho, J. Y, *A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin and local boundary integral equation methods*. Computational Mechanics, 24:348–372, (1999).
- [50] Kaljevic I, Saigal S, *An improved element free Galerkin formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40:2953-2974, (1997).
- [51] Boucher M. *Mécanique des milieux continus*. A 249, traité Sciences fondamentales, vol. A F4 (1987).
- [52] Hill R, *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*. Proc. Roy. Soc. A 193, p. 281-297, (1948).
- [53] Abouaf M, *Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées – approches par la mécanique des milieux continus*. Thèse de Doctorat, INP Grenoble, (1985).
- [54] Ramzy B, *Estimateurs d’erreur et remaillage adaptatif: application à la simulation 3D des procédés de mise en forme des matériaux*. Thèse de Docteur-Ingénieur, École des Mines de Paris, (2005).
- [55] Cornfield G.C et Johnson R.H, *Theoretical prediction of plastic flow in hot rolling including the effect of temperature distribution*. J. Iron Steel Inst, 211, p. 567, (1973).

- [56] Lee C.H et Kobayashi S, *New solutions to rigid-plastic deformation problems using a matrix method*. Trans. ASME, J. Eng. Ind, 95, p. 865, (1973).
- [57] Zienkiewicz O.C et Godbole P.N. *Flow of plastic and visco-plastic solids with special reference to extrusion and forming processes*. Int. J. Num. Meth. Eng, 8, p. 3, (1974).
- [58] Zienkiewicz O.C, Valliapan S et King I.P. *Elastoplastic solutions of engineering problems initial stress finite element approach*. Int. J. Numer. Meth. Eng, 1, p. 75-100, (1969).
- [59] Kuble J, *Le test bipoinçonnement*. Thèse de Docteur-Ingénieur, École des Mines de Paris, (1980).
- [60] Ayache G, *Contribution à l'étude de la lubrification en laminage à froid de produits plats*. Thèse de Docteur-Ingénieur de l'EMP, (1984).
- [61] Yong G, *A nonlinear rigid-plastic analysis for metal forming problem using the rigid point collocation method*. Advances in Engineering Software 36 234–242, (2005).

Bibliographie générale

- [AXE84] Axelson O et Barker V.A, *Finite element solution of boundary value problems*. Theory and computation. Academic Press, (1984).
- [DUA96a] Duarte C.A, Oden J.T, An H-p *adaptative method using clouds*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 139:237–262, (1996).
- [HIY 02] Hiyoshi H, Sugihara K, *Improving continuity of Voronoi-based interpolation over Delaunay spheres*. *Computational Geometry*, 22:167–183, (2002).
- [LAN81] Lancaster P et Salkauskas, K., *Surfaces generated by moving least squares methods*. *Mathematics of Computation*, 37:141–158, (1981).
- [LAS83] Lasserre J. B, *An analytical expression and an algorithm for the volume of a convex polyhedron*, *J. Optimiz. Theory Appl*, 39(3), 363-377, (1983).
- [RAV83] Raviart P.A et Thomas J.M, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées, Masson, (1983).
- [ROU94] J. O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, (1994).
- [YOU 03] You Y, Chen J.S, Lu H, *Filters, Reproducing Kernel, and Adaptive Meshfree Method*. *Computational mechanics*, 31: 316–326, (2003).
- [YVO04] Abouaf M, *Novelles approches sans maillage bases sur la méthode des éléments naturels pour la simulation numérique des procédés de mise en forme*. Thèse de Doctorat, ENSAM, Centre de Paris, (2004).
- [WAT81] Watson D.F, *Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes*. *Computer Journal*, 24: 167–172, (1981).
- [HIL86] Hill R, *Extremal paths of plastic work and deformation*. *J. Mech. Phys. Solids* 34, p. 511-523, (1986).
- [DAM78] Damame G, *Minimum de la déformation généralisée d'un élément de matière, pour les chemins de déformation passant d'un état initial à un état final donnés*. *C. R. Ac. Sci. Paris, A* 287, p. 895, (1978).

Annexe :

A1). Erreur de solution calculée par méthode MLS en fonction du support du domaine (Figure III.1.3,4,5,6).

	<i>h</i>										
	1,3	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6,5
S1	0,0522	0,0257	0,0096	0,0152	0,0266	0,1147	0,0871	0,0995	0,1991	0,2208	0,2747
S2	0,0520	0,0255	0,0137	0,0488	0,2155	0,3220	0,1870	0,1942	0,6749	0,8029	0,7456
S3	0,0416	0,0210	0,0097	0,0180	0,0290	0,1280	0,0971	0,1142	0,2231	0,2604	0,2999
S4	0,0415	0,0206	0,0143	0,0480	0,2191	0,3469	0,2012	0,2158	0,6782	0,8058	0,7807
S5	0,0410	0,0171	0,0094	0,0149	0,0257	0,0393	0,0825	0,0994	0,2048	0,2269	0,2943
S6	0,0408	0,0169	0,0254	0,0153	0,0435	0,0708	0,0964	0,1448	0,2465	0,3086	0,3548
S7	0,0328	0,0140	0,0098	0,0197	0,0292	0,0533	0,0988	0,1219	0,2249	0,2489	0,3146
S8	0,0326	0,0137	0,0260	0,0195	0,0469	0,801	0,1137	0,1634	0,2666	0,3324	0,3747
G1	0,0743	0,0667	0,0349	0,0145	0,0099	0,0127	0,0249	0,0792	0,3602	0,9544	0,9998
G2	0,0737	0,0662	0,0347	0,0145	0,0101	0,0161	0,0495	0,1875	0,9172	0,8262	1,000
G3	0,0593	0,0536	0,0286	0,0121	0,0096	0,0138	0,0288	0,0902	0,3314	0,9798	0,9999
G4	0,0581	0,0526	0,0282	0,0120	0,0098	0,0177	0,0580	0,2292	0,9415	0,9415	1,000
G5	0,0746	0,0668	0,0349	0,0149	0,0099	0,0126	0,0251	0,0555	0,3942	0,9014	0,9999
G6	0,0740	0,0663	0,0347	0,0145	0,0101	0,0161	0,0526	0,1940	0,5746	0,9671	1,000
G7	0,0596	0,0537	0,0286	0,0121	0,0096	0,0137	0,0289	0,0585	0,3252	0,9204	1,000
G8	0,0584	0,0527	0,0282	0,0120	0,0098	0,0177	0,0612	0,2468	0,7320	0,9825	1,000

A2) Erreur de calcul avec imposition des conditions aux limites essentielles avec multiplicateurs de Lagrange, coefficient de Poisson $\nu=0.25$ et fonction de poids T1 (Figure III.1.7).

B/A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,5	0,6629	0,4336	0,2367	0,0782	0,0471	0,1304	0,1811	0,2045	0,2088	0,2014
1,0	0,5874	0,3268	0,1629	0,0688	0,0185	0,0226	0,0406	0,0532	0,0616	0,0671
1,5	0,5518	0,3574	0,1502	0,0626	0,0270	0,0133	0,0116	0,0136	0,0161	0,0188
2	0,5263	0,3656	0,3287	0,7178	0,9099	0,6890	0,1404	0,0297	0,0143	0,0114
2,5	0,5267	0,4655	0,5540	0,4475	0,1039	0,0470	0,0300	0,0243	0,0198	0,0158
3	0,4986	0,5133	0,6688	0,7313	0,6861	0,2167	0,1162	0,1138	0,0949	0,0842
B/A	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,5	0,1878	0,1714	0,1544	0,1379	0,1226	0,1087	0,0964	0,0857	0,0767	0,0691
1,0	0,0702	0,0716	0,0715	0,0704	0,0686	0,0665	0,0642	0,0619	0,0599	0,0581
1,5	0,0217	0,0248	0,0281	0,0313	0,0343	0,0371	0,0397	0,0419	0,0439	0,0456
2	0,0104	0,0100	0,0099	0,0101	0,0106	0,0115	0,0126	0,0140	0,0156	0,0174
2,5	0,0132	0,0117	0,0109	0,0106	0,0104	0,0101	0,0097	0,0095	0,0093	0,0091
3	0,0767	0,0716	0,0602	0,0451	0,0331	0,0248	0,0193	0,0161	0,0146	0,0140
B/A	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0,5	0,0630	0,0582	0,0546	0,0520	0,0503	0,0494	0,0491	0,0495	0,0502	0,0514
1,0	0,0566	0,0555	0,0548	0,0545	0,0545	0,0548	0,0554	0,0562	0,0573	0,0585
1,5	0,0472	0,0485	0,0498	0,0510	0,0521	0,0531	0,0541	0,0551	0,0560	0,0570
2	0,0193	0,0213	0,0234	0,0254	0,0275	0,0295	0,0315	0,0335	0,0354	0,0374
2,5	0,0089	0,0089	0,0089	0,0090	0,0093	0,0097	0,0102	0,0108	0,0116	0,0124
3	0,0139	0,0139	0,0138	0,0138	0,0136	0,0134	0,0131	0,0128	0,0124	0,0120

A3). Erreur de calcul avec imposition des conditions aux limites essentielles avec multiplicateurs de Lagrange, coefficient de Poisson $\nu=0.25$ et fonction de poids T2 (Figure III.1.8).

B/A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,5	0,0401	0,0476	0,0686	0,0880	0,1176	0,1465	0,1686	0,1809	0,1835	0,1788
1,0	0,0362	0,0268	0,0245	0,0261	0,0310	0,0383	0,0466	0,0546	0,0613	0,0664
1,5	0,0852	0,0410	0,0238	0,0184	0,0158	0,0146	0,0145	0,0153	0,0168	0,0191
2	0,3446	0,1561	0,1488	0,1895	0,1437	0,1168	0,0521	0,0179	0,0134	0,0114
2,5	0,1611	0,1700	0,1525	0,1131	0,0618	0,0397	0,0310	0,0250	0,0200	0,0159
3	0,1548	0,1768	0,2329	0,2586	0,1990	0,1490	0,1200	0,1136	0,0952	0,0844
B/A	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,5	0,1694	0,1573	0,1440	0,1305	0,1174	0,1052	0,0941	0,0842	0,0757	0,0686
1,0	0,0696	0,0711	0,0712	0,0702	0,0685	0,0664	0,0642	0,0619	0,0598	0,0581
1,5	0,0218	0,0249	0,0281	0,0313	0,0343	0,0371	0,0397	0,0419	0,0439	0,0456
2	0,0104	0,0100	0,0099	0,0101	0,0106	0,0115	0,0126	0,0140	0,0156	0,0174
2,5	0,0132	0,0117	0,0110	0,0106	0,0104	0,0101	0,0097	0,0095	0,0093	0,0091
3	0,0767	0,0716	0,0602	0,0541	0,0331	0,0248	0,0193	0,0161	0,0146	0,0140
B/A	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0,5	0,0627	0,0580	0,0544	0,0519	0,0502	0,0493	0,0491	0,0494	0,0502	0,0514
1,0	0,0566	0,0555	0,0548	0,0545	0,0545	0,0548	0,0554	0,0562	0,0573	0,0585
1,5	0,0472	0,0485	0,0498	0,0510	0,0521	0,0531	0,0541	0,0551	0,0560	0,0570
2	0,0193	0,0213	0,0234	0,0254	0,0275	0,0295	0,0315	0,0335	0,0354	0,0374
2,5	0,0089	0,0089	0,0089	0,0090	0,0093	0,0097	0,0102	0,0108	0,0116	0,0124
3	0,0139	0,0139	0,0138	0,0138	0,0136	0,0134	0,0131	0,0128	0,0124	0,0120

A4). Erreur de la solution calculée par la méthode MLS en fonction du support du domaine avec les nouvelles fonctions de poids (Figure III.11).

	h										
	1,3	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6,5
P1	0,0677	0,0746	0,0531	0,0167	0,0089	0,0104	0,0138	0,0251	0,0385	0,0579	0,0984
P2	0,0672	0,0743	0,0530	0,0173	0,0108	0,0164	0,0190	0,0312	0,0906	0,2472	0,3961
P3	0,0537	0,0584	0,0425	0,0126	0,0081	0,0106	0,0151	0,0301	0,0538	0,0818	0,1068
P4	0,0525	0,0576	0,0422	0,0134	0,0111	0,0178	0,0207	0,0345	0,0948	0,2497	0,4120
P5	0,0677	0,0746	0,0531	0,0167	0,0089	0,0104	0,0138	0,0251	0,0385	0,0579	0,0984
P6	0,0672	0,0743	0,0530	0,0173	0,0108	0,0164	0,0190	0,0312	0,0906	0,2472	0,3961
P7	0,0537	0,0584	0,0425	0,0126	0,0081	0,0106	0,0151	0,0301	0,0538	0,0818	0,1068
P8	0,0525	0,0576	0,0422	0,0134	0,0111	0,0178	0,0207	0,0345	0,0948	0,2497	0,4120