

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université M'hamed BOUGARA Boumerdes.



Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département : Maintenance Industrielle
Laboratoire : Dynamique des Moteurs et Vibroacoustique

Mémoire de Magister

Thème :

*Structures fissurées, méthode numérique aux éléments
Frontières*

Présenté par : ROUABAH SALAH

Soutenu le : 24 / 04 / 2006 à 14h30

Devant le jury composé par :

MM.

A. NOUR	Professeur	UMB. Boumerdes	Président
S. RECHAK	Professeur	ENP El Harrach	Encadreur
B. NECIB	Professeur	UMM. Constantine	Examineur
A. KHALFI	Professeur	UDL. Sidi Bel Abbès	Examineur
M.O. SI-CHAIB	M.C	UMB. Boumerdes	Examineur
R. SACI	M.C	UMB. Boumerdes	Examineur

Année universitaire 2005/2006

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de mémoire, Professeur Said RECHAK, pour son soutien moral, sa confiance et ses précieux conseils qui m'ont été d'un grand intérêt, et sa passion de la recherche qu'il m'a transmis. Sa compétence, son dévouement et son souci constant de l'excellence susciteront toujours mon respect et mon admiration.

Je remercie le professeur, Abdelkader NOUR, le directeur du laboratoire dynamique des moteurs et vibroacoustique pour ses conseils appréciables, sa modestie, son soutien moral et de m'avoir supporter ces deux années.

Je remercie le professeur Brahim NECIB, le professeur Ali KHALFI, le docteur Rachid SACI, le docteur SI-CHAIB Mohamed pour avoir accepté à examiner ce modeste travail.

Ce travail représente l'aboutissement d'un parcours difficile qu'il ne m'aurait sans doute pas été possible sans l'amour et le soutien moral et inconditionnel de mes parents, mes frères et mes sœurs.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Abed ZIANE et Nouredine CHIKH pour leur soutien, l'encouragement qu'ils m'ont donné, leurs conseils appréciables m'ont guidé de manière forte.

Un remerciement spécial au cher frère Salah AGUIB, qui par sa disponibilité permanente a permis à ce travail d'aboutir, tout en gardant une fidèle amitié durant plus de huit ans.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du laboratoire, qui durant ces deux années mon permis de travailler dans un cadre agréable.

Je tiens à remercier mes collègues en post-graduation, surtout les suivant, Mahfoud, Toufik, Brahim, Mohammed, Idriss, Ahmed, Saida (Gâteaux et eau froide) et à tous mes collègues étudiants, les anciens et ceux encore en activité.

Je tiens également à remercier le professeur Ahcene BOUABEDALLAH pour sa passion et les efforts consentis pour la recherche.

Symboles et notations

σ : contrainte.

t : Vecteur contrainte.

u : Déplacement.

c_{ij} : Les constantes élastiques.

λ, μ : Coefficients de Lamé.

ϕ, ψ : Fonctions complexes.

∇ : Le laplacien.

x, y, z : Axes de coordonnées.

b, a : axes mineur et majeur de l'ellipse.

$\mathfrak{S}$: Le taux de rejet d'énergie.

k : Module géométrique ou indice.

K_i : Facteur d'intensité de contrainte.

$\overline{K}_i$: Facteur d'intensité de contrainte adimensionnel.

$E(k)$: L'intégrale elliptique du deuxième genre.

ki : L'intégrale élémentaire (au programme).

$[kki]$: Matrice de rigidité partielle (au programme).

$[kk]$: Matrice de rigidité totale (au programme).

$[K]$: Matrice de rigidité totale.

p : Point source.

q : Point courant.

$U_i^k(p, q)$: Solution de Kelvin en déplacement.

$\Sigma_{ij}^k(p, q)$ Où $T_i^k(p, q)$: Solution de Kelvin en contrainte.

$r(p, q)$: La distance euclidienne entre p et q .

Ω : Le domaine d'étude.

$\partial\Omega$: La frontière du domaine.

ξ_1, ξ_2 : Coordonnées de l'élément de référence (antécédent de q).

η_1, η_2 : Coordonnées de l'élément de référence (antécédent de p).

N_E : Nombre d'éléments.

i, j, k, l, m, n : Indices.

(ρ, α) : Coordonnées polaires.

Liste des figures

Figure 1.1 : Les trois modes de rupture	18
Figure 1.2 : Geometrie de la fissure elliptique et representation de contraintes	33
Figure 2.1 : Domaine reel Ω et domaine auxiliaire E servant a definir $U^k(p, q)$	41
Figure 2.2 : Voisinage d'exclusionv. (p) et autres notations utilisees pour le passage a la limite	45
Figure 2.3 : Domaine Ω_R pour le passage a la limite $R \rightarrow \infty$	47
Figure 3.1 : Element de frontiere E_e et element de reference A_e	51
Figure 3.2 : Parametrage d'un element frontiere quadrangulaire a 9 nceuds.....	52
Figure 3.3 : Coordonnees polaires sur l'élément de reference	60
Figure 3.4 : Subdivision de l'élément de reference en triangles	64
Figure 4.1 : exemple demonstratif.....	68
Figure 4.2 : Subdivision des elements d'integrales singulieres	70
Figure 4.3 : description d'un element singulier	72
Figure 4.4 : schema descriptif des elements reguliers	74
Figure 5.1 : Fissure elliptique dans un solide infini	82
Figure 5.2 : Elements descriptifs et conditions aux limites	83
Figure 5.3 : Description du technique d'extrapolation cinematique	84
Figure 5.4 : Definitions geometriques pour une fissure elliptique	85
Figure 5.5 : Exemple du modele de millage manuel de la fissure elliptique.....	85
Figure 5.6 : Variation de K_I en fonction d'angle elliptique θ , $(b/a = 0.2)$	88
Figure 5.7 : Variation de K_I en fonction d'angle elliptique θ , $(b/a = 0.5)$	91
Figure 5.8 : Variation de K_I en fonction d'angle elliptique θ , $(b/a = 0.8)$	94
Figure 5.9 : Fissure circulaire plane de rayon a	95
Figure 5.10 : Exemple du modèle de millage manuel de la fissure circulaire.....	95
Figure 5.11 : le facteur K_I adimensionnel pour une fissure circulaire	97
Figure B.1 : Triangle a trois nceuds et quadrangle a quatre nceuds.....	115

Liste des tableaux

Tableau 5.1 : Facteur d'intensite de contrainte	87
Tableau 5.2 : Facteur d'intensite de contrainte adimensionnel.....	87
Tableau 5.3 : Facteur d'intensite de contrainte	90
Tableau 5.4 : Facteur d'intensite de contrainte adimensionnel.....	90
Tableau 5.5 : Facteur d'intensite de contrainte	93
Tableau 5.6 : Facteur d'intensite de contrainte adimensionnel.....	93
Tableau 5.7 : Facteur d'intensite de contrainte adimensionnel	96
Tableau B.1 : Points et poids de Gauss pour l'integration sur un triangle.....	116

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES	1
INTRODUCTION GENERALE ET ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	4
 CHAPITRE I : Les contraintes tridimensionnelles autour des fissures elliptiques.	
I.1 Introduction.....	17
I.2 Les contraintes au front de fissure	17
I.3 Les contraintes tridimensionnelles autour des fissures elliptiques dans les solides isotropes transversales.....	19
I.3.1 Distribution symétrique de la contrainte	22
I.3.2 Distribution symétrique inclinée ou non symétrique de contraintes	27
I.3.3 Les contraintes en front de fissure et le taux de travail à l'intérieur	31
I.4 Conclusion et commentaires	38
 CHAPITRE II : Equations intégrales pour les solides élastiques fissurés.	
II.1 Introduction	39
II.2 Représentations et équations intégrales pour l'élastostatique	39
II.2.1 Hypothèses géométriques	39
II.2.2 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti	39
II.2.3 Solutions élémentaires de l'élasticité linéaire	40
II.2.4 Équilibre global	41
II.2.5 Espace infini : Solution de Kelvin	42
II.3 Formules de représentation intégrale	42
II.3.1 Formule de représentation intégrale du déplacement	43
II.3.2 Formule de représentation intégrale du tenseur de contrainte	43
II.4 Nécessité d'une équation intégrale	43
II.4.1 Équation intégrale régularisée en déplacement	44
II.4.2 Passage à la limite	45
II.4.3 Équation intégrale de frontière	46
II.4.4 Équations intégrales pour les problèmes extérieurs	46
II.4.5 Équation intégrale régularisée en contraintes	48
II.5 conclusion et commentaires.....	48
 CHAPITRE III : La méthode des éléments frontières.	
III.1 Introduction.....	49
III.2 Représentation de la géométrie par éléments de frontières	50
III.2.1 Description des éléments par nœuds et fonctions de forme.....	50
III.2.2 Construction de la frontière approchée	52
III.2.3 Construction de la fonction de forme	53

III.3	Description des inconnues	53
III.3.1	<i>Interpolations conformes, non conformes, isoparamétriques</i>	54
III.4	Construction et résolution numérique du problème discrétisé	54
III.5	Assemblage du système linéaire	56
III.6	Incorporation des conditions aux limites	56
III.7	Évaluation des intégrales élémentaires	57
III.7.1	<i>Calcul des intégrales élémentaires régulières</i>	57
III.7.1.1	<i>Principe de l'intégration par points de Gauss</i>	57
III.7.1.2	<i>Choix du nombre de points de Gauss</i>	59
III.7.2	<i>Calcul des intégrales élémentaires singulières</i>	59
III.7.2.1	<i>Problèmes tridimensionnels</i>	60
III.7.2.2	<i>Technique alternative de Marc bonnet</i>	61
III.7.2.3	<i>Technique de Sladèk</i>	62
III.7.2.4	<i>Calcul de I_1, I_2 par points de Gauss</i>	64
III.7.3	<i>Traitement des intégrales de volume</i>	65
III.8	conclusion et commentaires.....	666

CHAPITRE IV : Implantation numérique.

IV.1	Introduction	67
IV.2	Démonstration	68
IV.2.1	<i>Calcul numérique des intégrales élémentaires</i>	68
IV.2.2	<i>Assemblage d'intégrales élémentaires</i>	74
IV.2.3	<i>Incorporation des conditions aux limites</i>	77
IV.3	Etapas essentielles de calculs numériques.....	79
IV.4	Organigramme de l'opération de l'assemblage	79
IV.5	Algorithme d'assemblage.....	81
IV.6	conclusion et commentaires	82

CHAPITRE V : Applications.

V.1	Introduction	81
V.2	Application I	82
V.2.1	<i>Fissure elliptique plane</i>	82
V.2.2	<i>Évaluation du facteur d'intensité de contraintes</i>	83
V.2.3	<i>Premier cas : $b/a = 0.2$</i>	86
V.2.3.1	<i>Facteur d'intensité de contrainte</i>	87
V.2.3.2	<i>Facteur d'intensité de contrainte adimensionnel</i>	87
V.2.3.3	<i>Représentation graphique</i>	88
V.2.4	<i>Deuxième cas $b/a = 0.5$</i>	89
V.2.4.1	<i>Facteur d'intensité de contrainte</i>	90

V.2.4.2	<i>Facteur d'intensité de contrainte adimensionnel</i>	90
V.2.4.3	<i>Représentation graphique</i>	91
V.2.5	<i>Troisième cas $b/a = 0.8$</i>	92
V.2.5.1	<i>Facteur d'intensité de contrainte</i>	93
V.2.5.2	<i>Facteur d'intensité de contrainte adimensionnel</i>	93
V.2.5.3	<i>Représentation graphique</i>	94
V.3	<i>Application II</i>	95
V.3.1	<i>Facteur d'intensité de contrainte adimensionnel</i>	96
V.3.2	<i>Représentation graphique</i>	97
V.4	<i>Conclusion et Commentaires</i>	98
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES		99
BIBLIOGRAPHIE		101
Annexes		108.

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE ET ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Introduction générale

La mécanique de la rupture est une philosophie de conception, visant à développer un critère de ruine prenant en considération les fissures existant au sein du matériau. Ces fissures sont dangereuses à cause des concentrations de contraintes qui se produisent à leur voisinage. Pour cela, il importe de pouvoir comparer un facteur de charge à un paramètre caractéristique du matériau. La première étape consiste donc en la définition d'un facteur caractérisant la sévérité de la solution obtenue par application d'une charge sur une pièce fissurée [1]. Ce facteur s'obtient par considération des contraintes au voisinage du front de la fissure [2].

Le premier obstacle dans l'utilisation de ces concepts réside dans la détermination des facteurs d'intensité de contraintes [3], traduisant l'état de contrainte au voisinage du front de fissure. En effet, les géométries et chargements des pièces réelles sont souvent complexes, de sorte que la détermination analytique exacte est difficile et fait appel à des procédures mathématiques et numériques. Ceci ne signifie nullement que les méthodes analytiques ou les recueils de valeurs de K soient inutiles.

La modélisation numérique des fissures en milieux tridimensionnels et de leur croissance des composants structuraux est importante pour plusieurs champs de technologie. Actuellement les méthodes numériques sont les plus couramment utilisées, elles sont largement répandues à cause du développement d'outils numériques, et de la disponibilité des machines de calcul et de simulation en temps rapide. La méthode de base et la plus populaire est celle d'éléments finis (FEM), est utilisée pour la modélisation dans plusieurs secteurs de technologie, incluant la mécanique de rupture [8]. Les diverses techniques d'éléments finis pour l'analyse de la mécanique de rupture ont été développées par plusieurs auteurs [9]. Une difficulté remarquable en s'appliquant la méthode d'éléments finis à l'analyse des fissures tridimensionnelles, est liée à la génération des mailles appropriées, pour les fissures tridimensionnelles et particulièrement à modifier l'élément fini généré pendant la progression de la fissure. Aussi l'obligation du maillage tridimensionnel (éléments volumiques), y' compris la surface de la fissure, qui exige un choix d'éléments appropriées, malgré que, récemment les auteurs ont présenté une nouvelle technique d'éléments finis dite la méthode prolongée, " X-FEM "[40] et [49], qui permette une meilleure modélisation des fissures, où

les surfaces qui ne sont pas nécessaires coïncident avec des surfaces d'éléments. Mais cette méthode d'éléments finis prolongés exige habituellement les mailles de raffinement.

L'appel à d'autres méthodes numériques et en particulier celle d'éléments de frontières [23] qui s'est avérée être une technique numérique puissante est indispensable, est ce par certains avantages, dont la méthode d'éléments frontières (BEM) est applicable pour des problèmes linéaires, et la maille devrait être créée seulement pour la frontière du domaine. La génération des mailles d'éléments de frontière pour la surface est plus simple que la génération d'éléments finis pour le domaine entier avec une fissure.

La méthode d'éléments de frontière repose sur la discrétisation d'équations intégrales de frontière. Ces équations intégrales issues de la théorie du potentiel porte sur une inconnue intermédiaire : une distribution (réelle ou fictive) de sources. Une approche de régularisation de ces équations intégrales est qualifiée d'"indirecte" : ces dernières sont classiquement utilisées pour la formulation des problèmes fondamentaux (de Dirichlet, Neumann ou Robin). L'autre approche dite "directe" : les équations intégrales établissent une relation entre les variables physiques (potentiels et flux, déplacement et vecteur-contrainte) sur la frontière du domaine d'étude, et leurs applicabilité n'est pas restreinte à des conditions aux limites spécifiques. Cette méthode d'éléments de frontière repose fortement sur l'adaptation des notions initialement créées et développées dans le contexte d'éléments finis [21], maillage, interpolation par fonctions à support borné. L'avantage conceptuel de cette méthode sur d'autres techniques comme les éléments finis est le gain d'une dimension pour la discrétisation : le support des inconnues est la frontière, et non le domaine qu'elle limite.

La question d'efficacité relative aux méthodes d'éléments finis et d'éléments de frontière, objet de nombreuses discussions [93], nous semble peu pertinente. La méthode d'éléments finis occupe une position dominante, son champ d'application étant incontestablement plus vaste que celui d'éléments de frontière, et notre intention dans cette étude n'est nullement de défendre un point de vue contraire. La méthode " BEM " présente une supériorité pour le traitement de certaines situations (problèmes linéaires, propagation d'ondes, présence de milieux infinis, frontières mobiles ou inconnues).

On présente dans ce mémoire, l'étude des fissures elliptiques par l'évaluation du facteur d'intensité de contraintes en mode I, dit mode d'ouverture, pour les structures tridimensionnelles élastiques et isotropes.

Au premier chapitre, on présente une théorie des fonctions complexes permettant l'étude du champ de contraintes élastiques tridimensionnelles autour des fissures elliptiques et

les premières investigations dans le domaine de rupture, ainsi que les différentes solutions obtenues.

Au deuxième chapitre on évalue les formulations permettant la construction des représentations et d'équations intégrales de frontière, pour les problèmes d'équilibre en élasticité linéaire tridimensionnelle et sous l'hypothèse des petites perturbations. Les solutions élémentaires prises dans notre étude sont celles de Kelvin [93], pour un espace infini élastique et isotrope. Par suite les différents principes de la méthode d'éléments de frontière et la mise en œuvre de la résolution de ces équations intégrales d'élasticité avec la discrétisation de ces dernières par une méthode dite de collocation qui consiste à forcer l'équation intégrale à être vérifiée exactement en un nombre fini de points de collocations, (N_c) , est présentée au troisième chapitre. Une fois le maillage généré, la discrétisation est effectuée par report des interpolations pour la géométrie et pour les variables, d'où les équations intégrales résolues présentent des singularités numériques lorsque les deux points courant q et source p se coïncident.

Le traitement de singularités présente le problème majeur dans cette étude. En effet, on est appelé à régulariser en sens numérique les intégrales singulières, à des intégrales purement régulières pour pouvoir les résoudre. Le manque de précision dans le traitement de ces intégrales, dégrade sérieusement les résultats recherchés. Dans le cas tridimensionnel les intégrales élémentaires portent sur des éléments de surface. La solution élémentaire de Kelvin est singulière comme $|q - p|^{-2}$. La technique d'intégration singulière repose sur l'introduction d'un système de coordonnées polaires (ρ, α) . Le calcul numérique effectif de ces expressions régularisées nécessite un autre changement de variables [93] et [96], pour pouvoir exploiter les avantages de la méthode aux points de Gauss sur le carré $[-1, 1]^2$: précision et stabilité, évite les difficultés liées aux valeurs principales de Cauchy, et permet une évaluation fiable et précise de ces intégrations singulières.

Au quatrième chapitre, on traduit le traitement numérique présenté au chapitre précédent en programme. Différentes fonctions s'avèrent nécessaires afin de concrétiser cette étude en résultats numériques exploitables. Le programme évalué en Matlab 6.5 comprend un fichier principal reliant un bon nombre de fonctions construites spécialement pour ce genre de problèmes.

Cette étude est finalisée par deux applications pour valider cette implantation. La première application consiste à évaluer le champ de déplacements pour une fissure elliptique plane incorporée dans un massif infini élastique isotrope, sous chargement d'ouverture

uniforme. Le rapport entre la largeur et la longueur de la fissure est pris avec des valeurs variantes entre 0.2 et 0.8, tandis que, la deuxième application est faite sur une structure infinie contenant une fissure circulaire. Les champs de déplacements trouvés sont utilisés pour calculer les facteurs d'intensité de contraintes K_I . Ces déplacements sont évalués sur une seule lèvre de la fissure au lieu des deux lèvres, et ceci est dû à l'effet de la symétrie du domaine traité, ainsi que, le chargement uniforme pris pour simplifier la mise en œuvre d'applications du programme et de les valider avec des exemples simples qui ont des solutions exactes développées analytiquement. Des comparaisons sont faites avec d'autres outils disponibles en bibliographie en citant la méthode X-FEM et la méthode d'éléments finis. Une conclusion générale résume l'ensemble des travaux effectués dans ce mémoire de magister.

– Analyse des travaux réalisés dans le calcul des facteurs d'intensité de contraintes

Le contrôle de la rupture est basé généralement sur deux types d'analyse, à savoir l'analyse de la contrainte résiduelle par la détermination de la taille maximale de la fissure qui peut être tolérée, et l'analyse sous-critique de progression de la fissure (habituellement, contrainte due aux effets de la corrosion ou de fatigue) par le calcul du moment de la progression de la fissure d'une certaine taille initiale, jusqu'à la taille maximale tolérée de fissure. L'intervalle d'inspection peut alors être déterminé.

L'analyse de progression de la fissure est habituellement basée sur K_I , et l'analyse de la contrainte résiduelle est aussi souvent basée sur K_I . La connaissance du facteur d'intensité de contrainte est ainsi un antécédent à l'exercice du contrôle de rupture. Cependant le facteur d'intensité de contrainte peut toujours être exprimé comme $K = \beta\sigma\sqrt{\pi a}$, le problème réside dans la détermination de la fonction β .

Des expressions pour β pour des configurations simples ont été évaluées par plusieurs auteurs, Kassir et Sih [1], Raju et Newman [2], et Isida [3]. Dans la plus part des cas, K a été exprimé en termes de charges, au lieu de la contrainte. Selon les auteurs il est plus facile de définir ces expressions de K_I en termes de charges que de contraintes dans un massif de tension compacte. Des expressions pour des configurations sous un chargement plus ou moins abordable sont les plus particulièrement rencontrées dans la bibliographie, Des solutions pour beaucoup de configurations, ont été obtenues. Les compilations des solutions aussi, connues sous le nom de manuels de facteur d'intensité de contrainte. Dans la plupart des cas, les résultats ont été obtenus au moyen de calculs numériques, pour lesquels les courbes de β sont présentées en fonction de a/L , L étant la longueur. Dans beaucoup de cas des ajustements polynomiales de courbe ont été obtenus, dont on fournit la possibilité de calcul de β , au lieu d'une dérivation graphique.

Pour les configurations structurales qui sont assez compliquées, pour lesquelles la solution peut ne pas être fournie par les manuels. Dans ce cas il y a de diverses démarches pour arriver aux valeurs approximatives de β , Par exemple, la superposition d'un certain nombre de cas pour lesquels le facteur d'intensité de contrainte est connue. Par exemple celle donnée dans [6], montre comment le facteur d'intensité de contrainte pour un trou de rivet, chargé est obtenu à partir de la superposition de deux configurations plus simples, tous les

deux cas sont connus. Alors des solutions pour diverses géométries peuvent être atteintes d'une façon semblable.

Il est utile de noter que la superposition, est l'addition des facteurs d'intensité de contrainte, et pas de valeurs de β . Donc les valeurs de β pour chaque cas, doivent être obtenues séparément. Alors les facteurs d'intensité de contraintes sont calculés séparément et se sont alors ajoutés. Si σ , dans l'équation $K = \beta\sigma\sqrt{\pi a}$, soient les mêmes dans tous les cas superposés, on peut introduire le principe de superposition directement sur β .

La superposition n'est plus réalisable, pour les cas pratiques de chargement complexe, pour laquelle les champs de contraintes et déplacements, sont plus difficiles à évaluer. Pour cela diverses méthodes plus formelles pour obtenir des évaluations raisonnables du facteur d'intensité de contrainte sont discutées.

Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques pour la détermination du facteur d'intensité de contrainte ont servi de base au développement de la mécanique de rupture. Elles fournissent les équations de base pour les champs de contraintes et de déplacement du front de fissure qui servent toujours comme le point de départ d'autres solutions [1] et [3]. La connaissance des champs de contrainte et de déplacement pour l'un ou l'autre mode de rupture prennent toujours la possibilité de déterminer le facteur d'intensité de contrainte d'une manière indirecte, comme nous allons le montrer plus tard dans notre étude. Cependant, les méthodes analytiques sont moins intéressantes d'un point de vue de technologie. En général, elles essayent de satisfaire les conditions aux limites exactes, c'est possible seulement dans le cas d'une structure plane ou dans un massif infini. Dans les solutions analytiques les auteurs ont essayé toujours de trouver une fonction très utile de contrainte pour résoudre le problème étudié.

Pour les problèmes du mode I, il est souvent commode de se servir de la fonction de contrainte de Westergaard [1] de la forme :

$$\Psi = \text{Re } \bar{Z} + Y \text{Im } \bar{Z} .$$

Kassir et Sih, ont montré comment la fonction de Westergaard mène à la solution générale du problème du mode I. D'autres formes de fonctions complexes de contrainte existent, celle développée par Muskhelishvili. Selon Sih [1] et Irwin [4], cette fonction est particulièrement utile dans pas mal de cas, dont elle est fiable pour l'étude des fissures dans les trous, la fonction de Muskhelishvili prend la forme :

$$\psi = \operatorname{Re} \left[\bar{z} \Phi(z) + \int \psi(z) dz \right] .$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} .$$

Cette méthode est discutée en détail par Sih, celle a été employée aussi par Erdogan dans la solution d'un problème de fissure dans un plan infini.

Quelques autres méthodes analytiques ont été proposées par d'autres auteurs. Une approche intéressante est basée sur des distributions continues des dislocations. La fissure est représentée par une discontinuité de déplacement résultant d'un choix de dislocation.

Si une résolution analytique des équations n'est pas possible, des procédures numériques peuvent être appliquées pour arriver aux figures approximatives. Pour cela diverses méthodes numériques ont été développées pour évaluer les facteurs d'intensité de contrainte.

Méthodes numériques

Les méthodes numériques présentent un chemin très important dans l'étude de la rupture, y' compris la recherche du facteur d'intensité de contrainte, particulièrement pour les problèmes complexes de chargement et de géométrie. D'où on est obligé d'appeler ces méthodes pour la mise en œuvre de différentes solutions permettant l'évaluation de ces quantités recherchées.

En premier lieu on trouve la méthode d'éléments finis qui constitue un outil fondamental dont il est utilisé pour résoudre ces problèmes de rupture mécanique. Concernant l'évaluation du facteur d'intensité de contraintes, on trouve par exemple Muller et autres [7] qui ont présenté une méthode mixte entre les éléments finis et éléments de frontières pour la prédiction de la direction de rupture d'un matériau composite. Cervenka et Saouma [8] qui ont évalué le facteur d'intensité de contraintes pour une fissure de forme arbitraire avec un maillage arbitraire.

Joch et Ptak [9] ont présenté une approche de calcul par éléments finis du facteur d'intensité de contrainte de mode mixte avec des conditions de charge différentes, avec des exemples d'applications pour des fissures de diverses formes. Mukarami [10] a présenté une approche très importante pour l'évaluation du facteur d'intensité de contraintes en bidimensionnel.

Papaioannou [11] a évalué le facteur d'intensité de contraintes des matériaux composites pour diverses applications.

Les fonctions de poids sont aussi d'un emploi assez large dans ce genre de problèmes. Rechak, Hachi et autres [13] ont proposé une technique d'hybridation. Elle consiste à employer deux fonctions de poids pour modéliser les fissures elliptiques par le calcul du facteur d'intensité de contraintes " SIF " en mode I. l'idée de l'hybridation est de diviser l'ellipse en deux zones, puis on utilise chaque fonction de poids dans la zone où elle est plus efficace. La proportion entre les deux zones est déterminée par l'optimisation du rapport d'axes de l'ellipse. Un code de calcul par la machine est développé pour le calcul du SIF. Le traitement des procédures numériques comprenant des singularités est présenté en détail. L'approche est examinée sur plusieurs applications (fissure elliptique dans le corps infini, fissures semi elliptiques dans des cylindres minces et épais), pour démontrer son exactitude par la minimisation de l'erreur de SIF et de sa corrélation, en comparant avec d'autres chercheurs.

Autres méthodes numériques qui sont utilisées par les auteurs, mais avec un peu d'importance et pour des problèmes spéciaux, à titre d'exemple la méthode de point de force par Chen [14], méthode de discontinuité de déplacements par Bobet et autres [15], la méthode de Galerkin par Sukumar et autres [16], la méthode de forces de volume "body force method" [17].

Méthodes expérimentales

Une détermination expérimentale du facteur d'intensité de contrainte est parfois utile pour obtenir une valeur approximative. Le facteur d'intensité de contrainte ne peut pas être mesuré directement dans une expérience, mais il peut être trouvé par les relations entre K_I et une quantité mesurable, telle que la contrainte, la déformation, et le déplacement. Quelques méthodes sont applicables seulement dans des expériences de laboratoire, mais quelques unes peuvent avoir une utilisation limitée dans des conditions de service, si la charge sur la structure peut être mesurée également. Ceci permettrait une appréciation du danger impliqué dans une fissure inattendue de service, en attendant une analyse plus raffinée.

Une technique de laboratoire typique est l'utilisation du principe de photoélasticité. Les problèmes tridimensionnels peuvent être étudiés par l'utilisation d'une technique de contrainte dite frozen-stress. Elle n'est pas pratique pour employer une fissure pointue normale dans le matériel photoélastique. La fissure doit être simulée par une cavité usinée, d'où il est nécessaire aussi d'introduire les facteurs de correction. Par exemple le facteur d'intensité de

contrainte pour un mode mixte de chargement est déterminé à partir du modèle photoélastique, Loakimidis et autres [18].

D'autres procédures expérimentales peuvent être utilisées, Shin [12], Gallager [19], James et autres [20].

– La méthode des éléments frontières et les facteurs d'intensité de contraintes

Il est bien connu que la méthode d'éléments de frontière, soit un outil puissant dans la solution des problèmes pratiques dans l'engineering. Bien que, de telles formulations aient été à l'origine pensées pour avoir intérêt théorique, pendant les deux dernières décennies, elles ont été appliquées à un éventail de problèmes linéaires et non linéaires en mécanique des solides.

La méthode d'éléments de frontière actuellement, populaire dans l'élasticité linéaire et est basée sur une représentation intégrale pour des inconnues qui sont donnés en termes de tractions et déplacements sur la frontière (Rizzo 1967, Cruse 1969). Le champ de contraintes dans la formulation de BEM est calculé en différenciant le champ de déplacement au point source, pour obtenir la déformation puis on applique la loi de Hooke pour obtenir le champ de contraintes. Malheureusement, cette méthode fonctionne bien à l'intérieur du corps, mais à la frontière elle provoque les intégrales hyper-singulières, qui sont insurmontables, d'un point de vue numérique. Par conséquent, pour éviter cette situation à la frontière, les techniques suivantes ont été adoptées jusqu'ici : on calcule les gradients tangentiels des déplacements par une approximation de différences finies des déplacements de frontière, ou par la différenciation des fonctions de forme liées aux déplacements nodaux (Cruse 1969, Lachat et Waston 1975), soit en remaniant l'équation intégrale qui implique que les dérivées de déplacements plutôt que les déplacements sur la frontière qui ont provoqué des singularités au sens numérique dans une autre forme (Ghosh et autres 1986, Okada et autres 1988). Plusieurs travaux ont été fait dans l'application de la méthode d'éléments de frontière en élasticité linéaire. On essaie de présenter dans ce qui suit la plus part des travaux qui apparaissent dans la partie références bibliographiques.

Aliabadi [22] a présenté une méthode duale d'éléments de frontières, pour l'analyse des problèmes de rupture mécanique, les formalismes décrits font inclure l'élastostatique, le thermo-élastique, l'élasto-plastique et l'élasto-dynamique. En outre, il a présenté des formulations concernant les matériaux anisotropes. Une attention particulière est donnée en la modélisation de la progression de fissure. Des exemples sont présentés pour démontrer les possibilités et la robustesse de cette nouvelle génération des méthodes d'éléments de frontière.

Pan [23] a présenté une analyse de la méthode d'éléments de frontière (BEM) appliquée à la mécanique élastique linéaire de rupture, en solides bidimensionnels. Le dispositif le plus exceptionnel de cette nouvelle analyse est l'usage de la méthode de simple-domaine, très précis, efficace et souple. Les propriétés matérielles dans le milieu peuvent être anisotropes, aussi bien, qu'isotropes. Le domaine du problème peut être fini, infini ou semi infini. Les fissures peuvent être de type multiple, embranché, interne ou de bord, avec une forme droite ou incurvée. Un concept de la méthode d'éléments de frontières, pour résoudre le problème de contraintes dans les fissures, et une solution analytique pour une fissure 2-D incorporée dans un massif infini et soumise à un chargement arbitraire, a été présentée par Rajiah et Atluri [24]. Cette solution a été employée pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes K , et les fonctions de poids pour des fissures en mode mixte, dans un corps élastique finis, les fissures multiples et celles de bords, ont été présentés aussi. Selon [24], la méthode d'éléments de frontière est la plus appropriée pour ce genre de problèmes, puisque l'évaluation des déplacements et de contraintes est plus précise, et les résultats trouvés sont fortement précis, même en comparant avec ceux d'éléments finis. Une étude dont la méthode d'éléments de frontière (BEM) pour l'élasticité linéaire est utilisée, laquelle est basée dans cette étude sur l'équation intégrale de frontière de déplacements, est présentée par Chien et autres [25], le champ de contraintes à l'intérieur du massif est calculé par la différentiation du champ de déplacements au point source dans la BEM. Sladèk et autres [26] ont évalué la formulation locale d'intégrales de frontière pour un corps élastique avec les propriétés matérielles non homogènes. Tous les points nodaux sont entourés par une surface simple centrée au point de collocation. Seulement un point nodal est inclut dans chaque domaine secondaire. Sur la surface du domaine secondaire, les déplacements et les vecteurs de traction sont généralement inconnus. Si la solution fondamentale pour l'équation régissant, qui disparaît sur la frontière locale est choisie, on élimine la valeur de traction des équations intégrales locales de frontière pour tous les points intérieurs. Pour chaque domaine secondaire, les constantes matérielles correspondent aux points de collocation au centre du domaine secondaire. Les approximations polynomiales des éléments de déplacements et le maillage sur les frontières locales sont considérés dans l'analyse numérique.

Une analyse d'éléments de frontière de mécanique élastique linéaire de rupture, en fissures tridimensionnelles, des solides anisotropes, a été présentée par Pan et Yuan [27]. La méthode est basée sur le simple-domaine "single-domain method". Ainsi elle peut modéliser les solides avec les fissures multiples agissantes l'une sur l'autre. En outre, la méthode appliquée analyse la rupture des solides anisotropes infinis, et les facteurs d'intensité de

contraintes (SIF) sont déduits directement des solutions d'éléments de frontière. Yuuki et Cho [28] ont clarifié les facteurs d'intensité de contraintes d'une fissure d'interface, entre deux matériaux différents et une méthode d'extrapolation pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes, d'une fissure d'interface est proposée. La BEM employant la solution fondamentale de Hetenyi est appliquée aux problèmes de fissures entre deux matériaux différents, de divers résultats numériques des facteurs d'intensité de contraintes obtenus sont comparés aux solutions exactes et à d'autres résultats. [28] Confirme que la méthode actuelle est très utile pour l'analyse des problèmes de fissures d'interface.

Teong et autres [29] ont traité les équations intégrales de frontière pour la solution d'importants problèmes de fissures élastiques, la méthode reste applicable, pour les fissures dont les deux faces sont en contact, et des exemples de problèmes numériques sont considérés. Pour illustrer l'application de cette méthode, des solutions fondamentales de discontinuité de déplacements pour les problèmes tridimensionnelles, de rupture mécanique sont obtenues, en utilisant la méthode transformée d'intégrales, combinée avec les équations intégrales de frontière [30]. Par l'usage des intégrales de part-fini "finit-part integrals", la méthode de discontinuité de déplacements des éléments de frontière est réalisée, et finalement, ils ont validé les exemples numériques en comparant avec ceux trouvés dans la littérature. Olsen [31] a présenté une nouvelle méthode pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes, K_I et K_{II} . La méthode est basée sur les lois de conservation.

Une approche d'éléments de frontière pour l'analyse des problèmes tridimensionnels de fissure en solides transversalement isotropes dans des conditions de charge dynamiques harmoniques, et de chargement statique, est présentée par Dominguez et Ariza [32]. Une simple approche basée sur la représentation intégrale de tractions pour les solides anisotropes sous les charges statiques et dynamiques, est aussi évaluée. Des éléments hyper-singuliers et fortement singuliers qui apparaissent dans la formulation, sont régularisés avant n'importe quelle discrétisation. Différentes géométries de fissures sous les charges dynamiques et celles statiques sont étudiées. Des facteurs d'intensité de contraintes sont calculés à partir de déplacements d'ouverture de fissure "COD", d'éléments quadratiques de quart-point. Les résultats obtenus pour des situations où les solutions précédentes existent, montrent une bonne concordance avec d'autres résultats. Le nombre d'éléments exigés pour l'analyse est plutôt petit.

Un procédé pour des calculs dynamiques, de facteurs d'intensité de contraintes, en utilisant les éléments singuliers de frontière, de quart-point, de traction a été évalué par Chirino et Dominguez [33]. Des fissures dans un espace complet, un demi-espace et un corps

fini chargés par des ondes d'équilibre, "steady state waves", sont étudiés. Des courbes pour des facteurs elasto-dynamiques d'intensité de contraintes et la fréquence sont présentées. Des facteurs instantanés d'intensité de contraintes sont calculés, au moyen de transformée de Fourier. Les résultats sont comparés à d'autres auteurs et s'avèrent précis dans tous les cas. Les facteurs dynamiques d'intensité de contraintes, sont calculés d'une manière directe et facile de mettre en application, ce procédé souple tient compte, de l'étude des problèmes, avec la géométrie complexe, qui incluent un ou plusieurs fissures. Marrero et Dominguez [34] ont traité l'analyse dite temps-domaine "Time-domain" des problèmes dynamiques instantanés tridimensionnels de fissure. La formulation de temps-domaine de la méthode d'éléments de frontière pour les problèmes 3-D elasto-dynamiques, est employée. Le Quart-point et les éléments singuliers de quart-point représentent des déplacements et des tractions, respectivement, près du front de fissure. Une particulière attention est prêtée à l'intégration et aux algorithmes, pour préserver la stabilité. Fissures dans des corps finies et infinies sous des conditions de charges dynamiques simples et mixtes sont étudiées. Selon les auteurs, aucune approche antérieure d'analyse d'éléments de frontière, pour les problèmes élasto-dynamiques tridimensionnels, de fissures basés sur la représentation de déplacement, de temps-domaine, 'time domain' existe.

Dans une autre étude faite par Phan et autres [35], dont laquelle un cadre d'éléments de frontière de Galerkin symétrique, pour l'analyse de rupture, avec le contact de friction (frottement de fissure) sur les surfaces de fissure, a été présenté. L'algorithme utilise une interpolation continue sur la surface de fissure (utilisant les éléments quadratiques de frontière) et permet la détermination de deux quantités importantes, pour le problème, à savoir les tractions et les déplacements normaux locaux de glissement, sur les surfaces de fissure. Les auteurs ont proposé, aussi, un arrangement itératif pour résoudre ce problème de valeur non linéaire. Les résultats des exemples d'essais sont comparés aux solutions analytiques disponibles, ou à ceux obtenus à partir de la méthode de discontinuité de déplacement (DDM) employant les éléments linéaires, et la collocation interne. Les résultats démontrent que la méthode fonctionne bien pour des problèmes de fissures de jonction. Cheung et autres [36] ont considéré le problème d'élasticité plane pour une plaque finie avec une fissure incurvée. La tension uniforme sur la frontière extérieure est choisie comme la charge appliquée. Les facteurs d'intensité de contraintes aux bouts de fissures sont calculés, en employant la méthode de collocation de frontière. Les résultats obtenus par cette méthode rivalisent favorablement avec les solutions existantes pour les cas infinies. Des solutions pour les plaques finies sont données pour montrer les effets des dimensions.

Un concept de la méthode alternée, de Schwartz-Neumann, est combinée avec la méthode d'éléments de frontière, pour résoudre le problème de contraintes dans un corps fissuré et une solution analytique, pour une fissure 2-D incorporée soumise au chargement arbitraire de fissure dans un domaine infini, est employée pour déterminer les facteurs K de mode mixte et les fonctions de poids pour des fissures dans les corps finis [37]. Les situations des fissures de bords, aussi bien, les fissures multiples, sous le chargement de mode mixte, sont considérées. Selon [37], La méthode d'éléments de frontière est appropriée à ce genre de problèmes, puisque, l'évaluation de champs de contraintes près de la fissure dans un corps fissuré, est plus précise et simple, une fois que les tractions et les déplacements sur la frontière sont déterminés. La méthode ci-dessus donne des résultats fortement plus précis, même comparée à celle d'éléments finis. Qin et autres [38] ont évalué une ensemble d'équations intégrales hyper-singulières pour des solides élastiques tridimensionnelles avec une fissure plane, incorporée dans dedans, soumise à un chargement arbitraire, puis une nouvelle méthode numérique pour résoudre ces équations, est proposée par l'usage de la méthode des éléments frontières, combinée avec la méthode d'intégrales de part-finis "finite-part integral method" , conformément à la théorie des équations intégrales hyper-singulières pour les problèmes de fissures planes, les modèles de racine carré de discontinuité de déplacement, dans les éléments près au front de fissure sont appliqués. Le facteur d'intensité de contrainte est calculé directement a partir de ces résultats. Finalement des solutions de facteur d'intensité de contraintes pour plusieurs problèmes de fissures planes, dans les solides finis sont évaluées.

Blanford [39] a présenté une formulation d'éléments de frontière dite "multidomain boundary element method ", pour l'analyse des fissures planes en bi-dimensionel. Les résultats numériques sont précis et efficaces. Les analyses ont été exécutées, en utilisant l'élément quart-point singulier de traction, sur chaque côté de la fissure avec et sans les éléments de transition. Les éléments de frontière singuliers de quart-point contiennent le déplacement correct de $\sqrt{r}$ et les variations de traction $\frac{1}{\sqrt{r}}$ en front de fissure.

Finalement, On doit signaler que plusieurs autres études utilisant la méthode d'éléments de frontière appliquée aux problèmes d'élasticité linéaire, citées dans la bibliographie, n'ont pas fait l'objet dans cette discussion. Pour cette raison, le lecteur est invité à consulter la bibliographie dont laquelle tous les articles utilisés dans l'étude sont mentionnés.

CHAPITRE I

CHAPITRE PREMIER :**LES CONTRAINTES TRIDIMENSIONNELLES AUTOUR DES FISSURES
ELLIPTIQUES.****1.1 Introduction**

La signification du champ tridimensionnel de contraintes élastiques autour de la frontière d'une fissure elliptique formée a été précisée par Kassir et Sih (1966). Brièvement, le champ de contrainte en front de fissure dans un solide isotrope, a toujours la même distribution angulaire et varie seulement dans l'intensité, d'un cas à un autre. L'importance de ces efforts locaux, peut être décrit en termes de trois paramètres connus sous le nom de facteurs d'intensité de contrainte. En général, chacun des trois d'entre eux est plus important à la frontière de fissure et leur effet combiné peut être considéré comme la cause directe de la propagation de fissure.

Cependant, l'application des concepts ci-dessus de mécanique de rupture aux solides isotropes, exige une connaissance de leurs champs de contrainte en front de fissure et les paramètres de contrôle. Essentiellement, l'objectif de ce chapitre est de fournir ces informations plus précises sur l'état de contraintes au voisinage de ces fissures.

Plusieurs problèmes de valeur limite traitant les systèmes symétriques et non symétriques de contraintes, seront discutés, accompagnés avec leurs solutions pour les solides isotropes.

1.2 Les contraintes au front de fissure

Une fissure dans un solide peut être soumise à une contrainte en trois modes, comme illustré sur le schéma 1.1. Les efforts normaux provoquent le "mode d'ouverture" ou le chargement du mode I, les déplacements des surfaces de fissure sont perpendiculaires au plan de cette fissure.

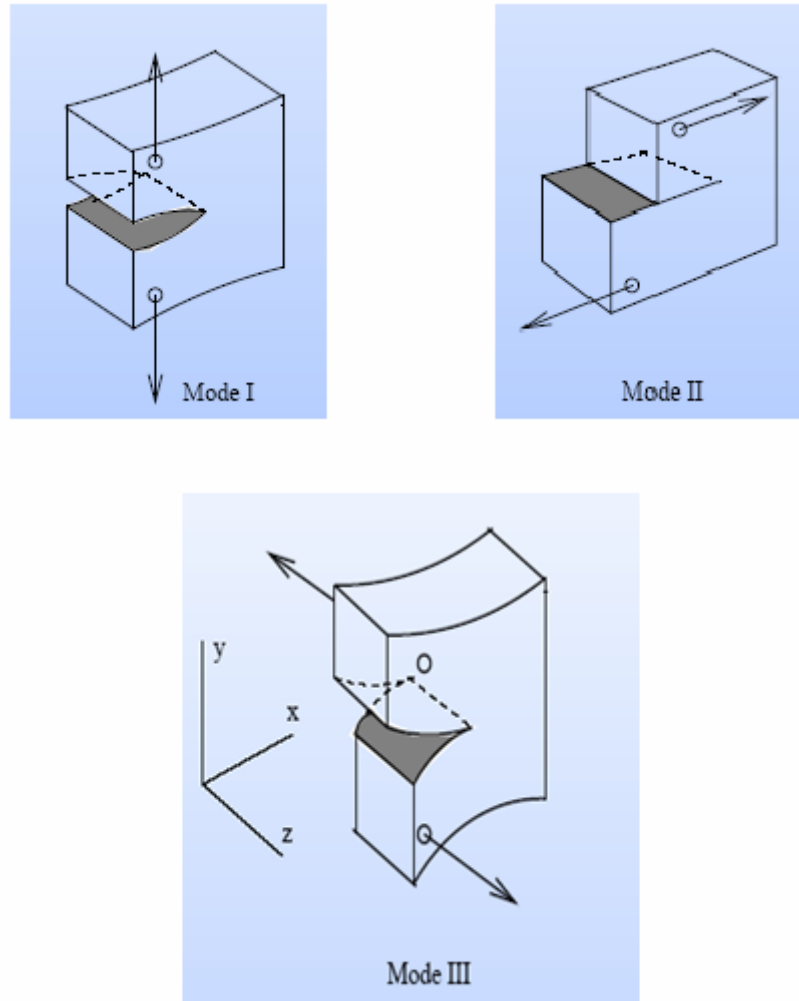


Figure 1.1 : Les trois modes de rupture

Le cisaillement dans le plan, a comme conséquence le mode II, ou " mode du glissement ", le déplacement des surfaces de fissure est dans le plan de la fissure et perpendiculaire au bord principal de la fissure. Le mode de cisaillement hors plan ou " le mode III " est dû au cisaillement hors plan. Les déplacements extérieurs de fissure sont dans le plan de la fissure et parallèles au bord principal de cette dernière. La superposition des trois modes décrit le cas général du chargement. Le mode I est techniquement le plus important.

Le champ de contrainte élastique dans le chargement du mode I, peut être calculé par diverses manières. On considère une fissure à travers l'épaisseur d'une taille arbitraire a , dans un massif de forme arbitraire et soumis à un chargement arbitraire du mode I. Dans le système de coordonnées de la figure 1-2, la contrainte au front de fissure plane, toujours, peut être exprimée par :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

1.3 Les Contraintes tridimensionnelles autour des fissures elliptiques dans les solides isotropes transversales [1]

Le matériau est considéré " transversalement isotrope " dont il possède un axe de symétrie élastique où toutes les directions qui ont des angles droits à cet axe sont équivalentes. Un tel matériau appartient à la classe des cristaux du système hexagonal et peut être décrit par cinq constantes élastiques indépendantes.

Dans un système de coordonnées cartésiennes, les composantes des déplacements sont u_x, u_y , et u_z et celles de contraintes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \sigma_{xy}$, Tenir compte du système spécial des constantes élastiques $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}$ et C_{44} , pour un solide transversalement isotrope, les relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \sigma_{xy} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \sigma_{yy} &= c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{11} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \sigma_{zx} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \sigma_{xy} &= \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

La réduction de ces équations au cas isotrope peut être aisément faite par :

$$c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12} = c_{13} = \lambda, \quad c_{44} = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) = \mu \quad (1.2)$$

Où λ, μ sont les coefficients de Lamé pour un matériau isotrope. Imposons les conditions d'équilibre aux composantes de contraintes en (1.1), afin de construire les équations régissant le champ de déplacement :

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] &= 0 \\ \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} (c_{11} + c_{13}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] &= 0 \\ c_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_z + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Un des premiers investigateurs dans ce domaine est Michell (1900), qui a obtenu la solution (1.3) pour le problème de demi espace transversalement isotrope, dont la surface est soumise à une force normale concentrée. Quelques années après, Lekhnitsky a trouvé une

solution plutôt générale de la déformation axisymétrique d'un corps transversalement isotrope de révolution. Sa solution est une généralisation de la fonction bi harmonique pour des problèmes de symétrie en rotation. Elliot (1949) a également présenté une solution pour le matériau transversalement isotrope en termes de deux fonctions de contrainte, chacune satisfaisant une équation partielle de second ordre, et a résolu un certain nombre de problèmes spéciaux, dont un s'intéresse à une fissure semi sphérique "penny-shaped" sous la pression uniforme. Ce travail a été prolongé aux problèmes impliquant la fissure elliptique en matériaux hexagonaux par Shield (1951). Le progrès à cet égard a été accompli par Hu (1953) qui a donné une nouvelle solution en termes d'une autre fonction de contrainte différente de celle fournie plus tôt par Elliot. Les solutions potentielles ont été employées par Chen (1966) pour discuter le problème de la fissure elliptique sous la contrainte de cisaillement. Cependant, les détails des conditions de contrainte près du front de fissure n'ont pas été donnés précédemment. Dans ce qui suit, le développement d'équations s'appuie sur le travail d'Elliot et de Hu pour déterminer la distribution de contrainte à proximité du front de fissure.

Selon Elliot et Hu, les déplacements u_x, u_y et u_z peuvent être exprimés en termes de deux fonctions ϕ et ψ par :

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u_z = m \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.4)$$

Où m est une constante déterminée plus tard, pour plus de clarté, on considère deux cas spéciaux comme suit :

- Premier cas : $\phi \neq 0, \psi = 0$

Pour $\psi = 0$;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ c_{11} \nabla_1^2 \phi + [c_{44} + m(c_{13} + c_{44})] \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ [c_{13} + (1+m)c_{44}] \nabla_1^2 \phi + m.c_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

D'où ∇_1^2 est l'opérateur laplacien en deux dimensions ;

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Une solution non triviale tridimensionnelle appropriée de (1.5) peut être trouvée si les deux équations sont identiques, et ceci se produit quand :

$$\frac{c_{44} + m(c_{13} + c_{44})}{c_{11}} = \frac{m.c_{33}}{c_{13} + (1+m)c_{44}} = n \quad (1.6)$$

La constante m peut être éliminée pour avoir l'équation quadratique :

$$c_{11}c_{44}n^2 + [c_{13}(c_{13} + 2c_{44}) - c_{11}c_{33}].n + c_{33}c_{44} = 0 \quad (1.7)$$

Où n peut avoir deux racines possibles n_1, n_2 , pour la quelle m_1, m_2 sont :

$$m_j = \frac{c_{11}n_j - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} = \frac{(c_{13} + c_{44})n_j}{c_{33} - c_{44}n_j}, \quad j = 1, 2. \quad (1.8)$$

Ainsi, la solution se compose de deux fonctions scalaires ϕ_1, ϕ_2 satisfaisant une équation du second degré du type :

$$\left(\nabla_1^2 + n_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

Les racines n_1, n_2 peuvent être réelles ou complexes selon les cinq valeurs des constantes élastiques c_{ij} . Par exemple, pour le magnésium, les racines sont réelles tandis que pour le zinc elles sont complexes. Quand les n_j sont complexes, la valeur principale de $n_{j1/2}$ est employée. La même chose s'applique pour m_j .

– Deuxième cas : $\phi = 0, \psi \neq 0$

Dans ce cas, la satisfaction de (1.3) mène simplement à :

$$\left(\nabla_1^2 + n_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0.$$

D'où n_3 est donnée par :
$$n_3 = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}$$

La solution complète pour les déplacements peut être écrite sous la forme :

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}(\phi_1 + \phi_2) - \frac{\partial \phi_3}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial}{\partial y}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{\partial \phi_3}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial}{\partial z}(m_1\phi_1 + m_2\phi_2) \quad (1.9)$$

D'où $\phi_3 = \psi$. Et la fonction potentielle décrite comme :

$$\left(\nabla_1^2 + n_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.10)$$

Les composantes de contraintes correspondantes aux déplacements précédentes sont :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \left(c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\phi_1 + \phi_2) + c_{13} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2) - (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial y} \\
 \sigma_{yy} &= \left(c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\phi_1 + \phi_2) + c_{13} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2) + (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial y} \\
 \sigma_{zz} &= c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{ (1 + m_1) n_1 \phi_1 + (1 + m_2) n_2 \phi_2 \} \\
 \sigma_{yz} &= c_{44} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [(1 + m_1) \phi_1 + (1 + m_2) \phi_2] + \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right\} \\
 \sigma_{zx} &= c_{44} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(1 + m_1) \phi_1 + (1 + m_2) \phi_2] - \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right\} \\
 \sigma_{xy} &= (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\phi_1 + \phi_2) + \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \left(\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Lorsque (1.7) rend les racines égales, c.-à-d. $n_1 = n_2 = n$, les formes des solutions de la fonction potentiel sont quelque peu différentes et sont données par:

$$u_x = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad u_y = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad \text{et} \quad u_z = m \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} + z \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) - \frac{n^{1/2} c_{11} + c_{44}}{n(c_{13} + c_{44})} \phi_2$$

1.3.1 Distribution symétrique de la contrainte

Limitant l'étude aux problèmes de fissures ayant une symétrie de distribution de contraintes, il est avantageux de mettre :

$$\phi_1 = \frac{n_1^{1/2}}{1 + m_1} f(x, y, z_1), \phi_2 = -\frac{n_2^{1/2}}{1 + m_2} f(x, y, z_2), \quad \phi_3 = 0. \tag{1.12}$$

D'où :

$$\nabla^2 f(x, y, z) = 0, \quad z_j = z / n_j^{1/2}, \quad j = 1, 2$$

Par conséquent, le problème a été réduit à celui de la théorie potentielle classique. Des équations (1.12) peuvent être mises dans (1.9) et les résultats peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{n_1^{1/2}}{1+m_1} f(x, y, z_1) - \frac{n_2^{1/2}}{1+m_2} f(x, y, z_2) \right] \\ u_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{n_1^{1/2}}{1+m_1} f(x, y, z_1) - \frac{n_2^{1/2}}{1+m_2} f(x, y, z_2) \right] \\ u_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{n_1^{1/2}}{1+m_1} f(x, y, z_1) - \frac{n_2^{1/2}}{1+m_2} f(x, y, z_2) \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

De (1.11) on tire :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \left(c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\frac{n_1^{1/2}}{1+m_1} f(x, y, z_1) - \frac{n_2^{1/2}}{1+m_2} f(x, y, z_2) \right] \\ &\quad + c_{13} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{m_1 n_1^{1/2}}{1+m_1} f(x, y, z_1) - \frac{m_2 n_2^{1/2}}{1+m_2} f(x, y, z_2) \right] \\ \sigma_{yy} &= \left(c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\frac{n_1^{1/2}}{1+m_1} f(x, y, z_1) - \frac{n_2^{1/2}}{1+m_2} f(x, y, z_2) \right] \\ &\quad + c_{13} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{m_1 n_1^{1/2}}{1+m_1} f(x, y, z_1) - \frac{m_2 n_2^{1/2}}{1+m_2} f(x, y, z_2) \right] \\ \sigma_{zz} &= c_{44} \left[n_1^{1/2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, z_1) - n_2^{1/2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, z_2) \right] \\ \sigma_{yz} &= c_{44} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} f(x, y, z_1) - \frac{\partial}{\partial z_2} f(x, y, z_2) \right] \\ \sigma_{xy} &= (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{n_1^{1/2}}{1+m_1} f(x, y, z_1) - \frac{n_2^{1/2}}{1+m_2} f(x, y, z_2) \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Soit le plan de la discontinuité dans la forme d'une ellipse : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ situé dans le plan xy , et a et b sont les deux axes majeur et mineur respectivement de l'ellipse dont le centre coïncide avec l'origine du système de coordonnées. Dans le plan $z = 0$, c. à. d. $z_1 = z_2 = 0$, les contraintes de cisaillement σ_{yz}, σ_{xz} disparaissent, les contraintes et les

déplacements restant peuvent être exprimés en termes de fonction harmonique $f(x, y, z)$ et ces dérivées évaluées à $z = 0$. En particulier les quantités plus intéressantes sont :

$$u_z = \alpha_1 \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right]_{z=0}, \quad \sigma_{zz} = \beta_1 \left[\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} \right]_{z=0} \quad (1.15)$$

D'où :

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{1+m_1} - \frac{m_2}{1+m_2}, \quad \beta_1 = c_{44}(n_1^{1/2} - n_2^{1/2}) \quad (1.16)$$

On rappelle que $f(x, y, z)$ satisfait l'équation de Laplace à trois dimensions, et les valeurs des déplacements et contraintes normales pour $z = 0$ sont similaires à celles données par Green et Sneddon, pour un matériau isotrope.

Les solutions correspondantes de problèmes de fissures pour les solides hexagonaux sont exprimées, en effet sur le plan $z = 0$, les solutions pour les matériaux isotropes et hexagonaux peuvent être établies :

$$\alpha_1 = -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \beta_1 = -2\mu \quad (1.17)$$

Ce qui sera utilisé plus tard pour résoudre quelques problèmes d'intérêt.

a. Tension uniforme sur une surface.

Supposons qu'une fissure elliptique est ouverte par une pression extérieure uniforme p , on suppose que les déplacements et les contraintes disparaissent à l'infini, pour ce problème les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= p, & \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, z = 0 \right) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 0, & \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, z = 0 \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Puisque les conditions imposées en $f(x, y, z)$ dans (1.18) sont identiques à celles dans (1.10), la solution est essentiellement connue :

$$f(x, y, z_j) = -\frac{ab^2 p}{4\beta_1 E(k)} \int_{\xi_j}^{\infty} \left[\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z_j^2}{s} - 1 \right] \frac{ds}{\sqrt{Q(s)}}, \quad j = 1, 2 \quad (1.19)$$

Où $Q(s) = s(a^2 + s)(b^2 + s)$.

Et $(\delta_j, \tau_j, \zeta_j)$ sont les coordonnées ellipsoïdes du point (x, y, z_j) . Les racines cubiques dans

$$s \text{ sont : } \frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z_j^2}{s} = 1, \quad j = 1, 2$$

Dans ces coordonnées, la surface intérieure de l'ellipse est donnée par $\delta = 0$, est l'extérieure par $\tau = 0$. Dans le plan $z = 0$, $(\delta_j, \tau_j, \zeta_j)$ sont identiques avec (δ, τ, ζ) utilisé dans le cas isotrope, l'intégrale elliptique du second genre et $E(k)$ associé avec le module :

$$k = (1 - b^2 / a^2)^{1/2}$$

L'équation (1.19) fournit des informations suffisantes pour trouver les contraintes et les déplacements dans tout le solide hexagonal, et ont été obtenus la première fois par Shield (1951). Son travail est brièvement décrit ici afin de rendre une dérivation systématique de la distribution de contrainte autour des fissures.

b. Cas où la pression varie linéairement.

Si les surfaces de la fissure elliptique sont chargées par une pression variant linéairement le long de l'axe majeur px , les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} &= px, \quad \delta = 0. \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 0, \quad \tau = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

doivent être satisfaites. Pour le cas isotrope, les conditions aux limites peuvent être :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x\Phi) + \int_z^\infty z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dz \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x\Phi) + \int_z^\infty z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dz \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= x \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned}$$

D'où $\Phi(x, y, z)$ est harmonique c. à. d:

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) = 0.$$

Appliquant l'analogie en équation (1.7), on peut facilement avoir :

$$\Phi(x, y, z_j) = -\frac{pa^3}{4\beta_1} \frac{k^2 k'^2}{E(k) - k'^2 P(k)} \int_{\xi_j}^\infty \left[\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z_j^2}{s} - 1 \right] \frac{ds}{\sqrt{Q(s)}}, \quad j = 1, 2 \tag{1.21}$$

L'équation (1.21) est en effet la solution au problème à étudier. Quand la pression extérieure est proportionnelle à x^n, y^n , où $n \geq 2$, la formulation semble être limitée dans le sens où les conditions aux limites de contraintes ne peuvent pas être indiquées arbitrairement.

c. *Déplacement normal.*

Soit la valeur du déplacement normal est connue pour toute la surface elliptique :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} &= S(Z), \quad \xi = 0. \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} &= 0, \quad \eta = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

D'où la variable Z est :

$$Z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Le problème est de déterminer quelle distribution de pression produira une fissure de forme prescrite. Les conditions aux limites (1.22), sont de type courant dans le problème de Dirichlet pour la fonction harmonique $\partial f / \partial z$. Par conséquent :

$$f(x, y, z_j) = \int_{\xi_j}^{\infty} \lambda[\varpi(s)] \frac{ds}{\sqrt{(Q(s))}}, \quad j = 1, 2 \quad (1.23)$$

D'où la fonction $\lambda[\varpi(s)]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \lambda[\varpi(s)] &= \frac{-ab}{2\alpha_1\pi} \int_0^{\infty} \frac{S(Z)}{\sqrt{\varpi - Z}}. \\ \text{Et} \quad \varpi(s) &= 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z_j}{s}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

A partir de l'équation (1.23), le caractère général de la pression qui doit être assuré pour maintenir certaine forme de la fissure elliptique. Le résultat peut être énoncé dans un théorème qui suit directement celui obtenu pour le cas isotrope.

1.3.2 Distribution symétrique inclinée ou non symétrique de contraintes

Le problème à étudier est celui soumis à un chargement symétrique incliné d'une fissure elliptique située dans le plan xy . Si les charges appliquées sont telles que σ_{zz} s'annule sur le plan $z = 0$ et $u_x = u_y = 0$ pour $\tau = 0$ c. à. d. en dehors de la région elliptique. La formulation mathématique doit satisfaire les conditions antérieures de la symétrie oblique, et par conséquent est plus compliquée que celle du problème de la symétrie. Elle nécessite donc l'introduction des fonctions $G_j, H_j (j = 1, 2, 3)$, et leurs rapports avec $\phi_j (j = 1, 2, 3)$ donnés dans l'équation (1.9) sont :

$$\phi_1 = \frac{1+m_1}{m_1-m_2} \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} \right), \phi_2 = -\frac{1+m_1}{m_1-m_2} \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} \right), \phi_3 = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial x} \right) \quad (1.24)$$

Les équations régissantes sur les fonctions G_j et H_j deviennent ainsi :

$$\left(\nabla_1^2 + n_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G_j = 0, \quad \left(\nabla_1^2 + n_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_j = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

L'insertion de (1.24) dans (1.9) donne les composantes des déplacements suivantes :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1+m_2}{m_1-m_2} \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{1+m_1}{m_1-m_2} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \\ u_y &= \frac{1+m_2}{m_1-m_2} \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{1+m_1}{m_1-m_2} \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ u_z &= \frac{m_1}{n_1^{1/2}} \left(\frac{1+m_2}{m_1-m_2} \right) \frac{\partial F_1}{\partial z_1} - \frac{m_1}{n_2^{1/2}} \left(\frac{1+m_1}{m_1-m_2} \right) \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Par les mêmes procédures, les efforts sont obtenus :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{1}{m_1-m_2} \left(c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [(1+m_1)F_1 - (1+m_2)F_2] + c_{13} \left[\frac{m_1}{n_1} \left(\frac{1+m_2}{m_1-m_2} \right) \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} \right] \\ &\quad - (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{m_1-m_2} \left(c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [(1+m_1)F_1 - (1+m_2)F_2] + c_{13} \left[\frac{m_1}{n_1} \left(\frac{1+m_2}{m_1-m_2} \right) \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} \right] \\ &\quad + (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz} = c_{44} \frac{(1+m_1)(1+m_2)}{m_1-m_2} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2^2} \right]. \quad (1.26)$$

$$\sigma_{yz} = c_{44} \frac{(1+m_1)(1+m_2)}{m_1-m_2} \left[\frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z_1} - \frac{1}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z_2} \right] + \frac{c_{44}}{\sqrt{n_3}} \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z_3}.$$

$$\sigma_{zx} = c_{44} \frac{(1+m_1)(1+m_2)}{m_1-m_2} \left[\frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z_1} - \frac{1}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z_2} \right] - \frac{c_{44}}{\sqrt{n_3}} \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z_3}.$$

$$\sigma_{xy} = \frac{c_{11}-c_{12}}{m_1-m_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(1+m_2)F_1 - (1+m_1)F_2] + \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} \right).$$

Où F_j ($j=1,2,3$) sont définies par :

$$F_1 = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y}, F_2 = \frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} \quad \text{Et} \quad F_3 = \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial H_3}{\partial x}.$$

Les expressions des équations (1.25) et (1.26) se simplifient considérablement dans le plan $z=0$, puisque les indices inférieurs dans G_j et H_j peuvent être abandonnés.

D'ailleurs, en prenant :

$$g = \frac{\partial G}{\partial z}, \quad h = \frac{\partial H}{\partial z}$$

La dépendance fonctionnelle du champ de déplacement dans le plan xy est identique avec la formulation isotrope c. à d :

$$u_x = \frac{\partial g}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial h}{\partial z}, \quad u_z = \left(\frac{1}{m_1-m_2} \right) \left[\frac{m_1-(1+m_2)}{\sqrt{n_1}} - \frac{m_2(1+m_1)}{\sqrt{n_2}} \right] \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right). \quad (1.27)$$

Dans le seul but d'établir certaines relations simples entre les solutions pour un solide transversalement isotrope et les solutions correspondantes pour un corps isotrope, seulement les contraintes de cisaillement, σ_{yz}, σ_{zx} sont exigées :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xz}}{\alpha_2 c_{44}} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\beta_2 \partial^2 g}{\alpha_2 \partial y^2} + \left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}, \quad z=0, \\ \frac{\sigma_{yz}}{\alpha_2 c_{44}} &= \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\beta_2 \partial^2 h}{\alpha_2 \partial x^2} + \left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}, \quad z=0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

D'où :

$$\alpha_2 = \frac{(1+m_1)(1+m_2)}{(m_1-m_2)} \left[\frac{1}{\sqrt{n_1}} - \frac{1}{\sqrt{n_2}} \right], \quad \beta_2 = -\frac{1}{\sqrt{n_3}}. \quad (1.29)$$

Les paramètres α_2 et β_2 peuvent être liés aux coefficients de Lamé λ, μ dans l'élasticité isotrope pour $z = 0$. Les résultats sont :

$$\alpha_2 c_{44} = 2\mu, 1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (1.30)$$

a. *Contrainte de cisaillement uniforme :*

On considère la déformation d'une fissure elliptique plate incorporée dans un solide infini due aux conditions :

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= q \cos \varpi, \quad \sigma_{yz} = q \sin \varpi, \quad \tau = 0. \\ u_x &= u_y = 0, \quad \tau = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

La contrainte de cisaillement de l'intensité q est appliqué dans une direction qui fait un angle ϖ mesuré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à partir de l'axe principal (ou de l'axe des abscisses) de l'ellipse. En dehors de l'ellipse, les quantités u_z, σ_{xz} et σ_{yz} doivent être continues à travers le plan $z = 0$. Pour ce problème, les fonctions :

$$g_j(x, y, z_j) = \frac{\partial G_j}{\partial z_j}, \quad h_j(x, y, z_j) = \frac{\partial H_j}{\partial z_j}, \quad j = 1, 2, 3 \text{ pas de sommation sur } j$$

peuvent être déduites au moyen de l'équation (1.30), c.-à-d.

$$\begin{bmatrix} g_j(x, y, z_j) \\ n_j(x, y, z_j) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \int_{\xi_j}^{\infty} \frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z_j^2}{s} - 1 \Big] \frac{ds}{\sqrt{Q(s)}}. \quad (1.32)$$

Les constantes A_1 et B_1 , sont déterminées à partir de l'équation (1.31) :

$$\begin{aligned} 2\alpha_2 C_{44} A_1 &= \frac{ab^2 k^2 q \cos \varpi}{\left[k^2 - 1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right] E(k) + \left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) k'^2 P(k)} \\ 2\alpha_2 C_{44} B_1 &= \frac{ab^2 k^2 q \sin \varpi}{\left[k^2 + \left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) k'^2 \right] E(k) - \left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) k'^2 P(k)} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Ceci satisfait les solutions du problème aux valeurs limites.

b. Cisaillement linéairement variable.

Le problème où la contrainte de cisaillement appliquée varie linéairement au-dessus de la surface de fissure peut être résolu de la même manière. Les conditions aux limites sont :

$$\sigma_{xx} = qx, \sigma_{yx} = 0, \quad \xi = 0 \quad (1.34)$$

Et les données sont $u_x = u_y = 0$ pour $\tau = 0$ et $\sigma_{zz} = 0$ dans le plan $z = 0$, l'équation (1.34) conduit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\beta^2 \partial^2 g}{\alpha_2 \partial y^2} + \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha_2}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial_x \partial_y} &= \frac{qx}{\alpha_2 C_{44}}, \quad \delta = 0 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\beta^2 \partial^2 h}{\alpha_2 \partial x^2} + \left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial_x \partial_y} &= 0, \quad \delta = 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ces équations peuvent être satisfaites simultanément si deux fonctions harmoniques $\Psi(x, y, z)$ et $\Omega(x, y, z)$ sont choisies tels que :

$$\frac{\partial g}{\partial z} = x \frac{\partial \Psi}{\partial z} - z \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = y \frac{\partial \Omega}{\partial z} - z \frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

Les nouvelles fonctions présentées sont liées avec G_j et H_j ($j = 1, 2, 3$) par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_j}{\partial z_j^2} &= \frac{\partial g_j}{\partial z_j} = \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi_j(x, y, z_j), \quad j = 1, 2, 3. \\ \frac{\partial^2 H_j}{\partial z_j^2} &= \frac{\partial h_j}{\partial z_j} = \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \Omega_j(x, y, z_j). \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Connaissant la structure de la fonction harmonique pour le potentiel de la gravité d'un disque elliptique plat, les fonctions Ψ_j et Ω_j sont déterminés :

$$\begin{bmatrix} \Psi_j(x, y, z_j) \\ \Omega_j(x, y, z_j) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \int_{\xi_j}^{\infty} \left[\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z_j^2}{s} - 1 \right] \frac{ds}{\sqrt{Q(s)}} \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.36)$$

Dans lesquelles les A_2 et B_2 sont des fonctions compliquées de la géométrie de la fissure :

$$A_2 = \frac{ab^2 q}{2\alpha_2 C_{44}} \frac{k^2 N(k) - 3k^4 E(k) + \left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) k'^2 M(k)}{N^2(k) - 3k^2 N(k) E(k) + \left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) [3M(k) E(k) - M(k) N(k)]}.$$

$$B_2 = \frac{\left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) M(k) A_2}{\left(1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) k'^2 M(k) + k^2 N(k) - 3k^4 E(k)}. \quad (1.37)$$

Dans l'équation (1.37), $M(k)$ et $N(k)$ représentent :

$$\begin{aligned} M(k) &= (1 + k'^2) E(k) - 2k'^2 P(k) \\ N(k) &= k'^2 P(k) + (k^2 - k'^2) E(k). \end{aligned}$$

Où $P(k)$ est l'intégrale elliptique complète du premier genre.

c. *Déplacement tangentiel.*

Dans le cas où le déplacement tangentiel u_x est prescrit sur la surface de la fissure :

$$u_x = \begin{cases} T(Z), \xi = 0 \\ 0, n = 0 \end{cases}. \quad (1.38)$$

Avec les conditions aux limites : $\frac{\partial g}{\partial z} = T(Z), \xi = 0$.

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 0, \eta = 0. \quad (1.39)$$

On ramène encore le problème au type de Dirichlet pour la fonction harmonique dg/dz par des procédures semblables à celles de l'équation (1.23), les potentiels inconnus sont déterminés :

$$g_j(x, y, z_j) = \int_{\xi_j}^{\infty} \lambda[\varpi(s)] \frac{ds}{\sqrt{Q(s)}}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.40)$$

D'où :

$$\lambda[\varpi(s)] = -\frac{ab}{2\pi} \int_0^{\varpi} \frac{T(Z) dZ}{\sqrt{\varpi - Z}}.$$

1.3.3 Les contraintes en front de fissure et le taux de travail à l'intérieur

En examinant la stabilité des fissures, il est primordial de déterminer les rapports entre les contraintes élastiques et le taux d'énergie d'entrée ou le taux de rejet d'énergie de tension dans la prolongation de fissure. Le taux de rejet d'énergie élastique peut être considéré comme la force tendant à ouvrir la fissure et est donné par le symbole $\mathfrak{I}_j$.

La valeur critique de $\mathfrak{I}_j$ pour la propagation de fissure $(\mathfrak{I}_j)_{cr}$ est une propriété matérielle, tandis que $\mathfrak{I}_j$ est principalement une fonction du chargement et de la géométrie à travers le paramètre K_j connu sous le nom de facteur d'intensité de contrainte, qui représente l'importance du champ de contrainte local.

En général, il est nécessaire de distinguer trois modes possibles de prolongation de fissure en examinant la rupture. Les valeurs de $\mathfrak{I}_j$ pour ces trois modes seront dénotées par $\mathfrak{I}_1$, pour le mode d'ouverture, et les $\mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3$ pour les autres modes du cisaillement. Pour une fissure elliptique dans un solide transversalement isotrope soumis aux conditions de charge générales, chacun des trois modes se produit simultanément sur le front de fissure. Mathématiquement, chacun des valeurs de $\mathfrak{I}_j$ peut être calculé individuellement. D'ailleurs, la détermination analytique est considérée facile en décrivant les conditions menant à la rupture en termes de facteurs d'intensité de contraintes K_j , ($j=1,2,3$) qui peuvent être extraits à partir de la distribution de contraintes dans le voisinage de la fissure par les formules :

$$K_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r(\sigma_{zz})_{\theta=0}}, \quad K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r(\sigma_{nz})_{\theta=0}}, \quad \text{et} \quad K_3 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r(\sigma_{tz})_{\theta=0}} \quad (1.41)$$

On considère le voisinage d'un point arbitraire p sur la surface de la fissure elliptique comme il est montré dans la figure 1.2. Un système de coordonnées local normal avec l'origine au point p est présenté tels que l'axe $\vec{n}$ est dirigé le long de la normale vers la surface de la fissure, l'axe $\vec{t}$ le long de la tangente de la frontière de fissure et l'axe $\vec{z}$ est perpendiculaire au plan de la fissure. Les coordonnées polaires r et θ sont définies dans le plan nz (figure 1.2). Bien que la dérivation des déplacements et des contraintes locaux soit fondamentalement semblable à celle du travail de Kassir et de Sih (1966) pour le cas isotrope, les résultats finaux sont différents. En utilisant un procédé semblable à celui décrit par Sih, les formes limites de $(\delta_j, \tau_j, \zeta_j)$ à (r, θ) peuvent être comme suit :

$$\delta_j = \frac{abr}{(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/2}} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_j^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]$$

$$\tau_j = \frac{abr}{(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/2}} \left[\cos \theta - (\cos^2 \theta + n_j^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right] \quad j = 1, 2, 3$$

$$\zeta_j = \zeta = -(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi).$$

Dans ces expressions, les limites d'ordre supérieur dans r ont été négligées. Cependant, dans l'esprit que K est défini par l'équation (1.41), les déplacements près du point p dans la figure 1.2, pour le problème symétrique peuvent être obtenus à partir des fonctions $f(x, y, z_j)$, d'équations (1.19) et (1.13) :

$$u_x = \frac{b \cos \phi}{(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/2}} \frac{K_1 \sqrt{r}}{\beta_1} \left\{ \frac{\sqrt{n_1}}{1+m_1} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{n_2}}{1+m_2} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right\} + \dots$$

$$u_y = -\frac{a \sin \phi}{(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/2}} \frac{K_1 \sqrt{r}}{\beta_1} \left\{ \frac{n_1^{1/2}}{1+m_1} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \\ \left. - \frac{n_2^{1/2}}{1+m_2} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right\} + \dots$$

$$u_z = \frac{K_1 \sin \theta \sqrt{r}}{\beta_1} \left[\frac{m_1}{n_1(1+m_1)} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \\ \left. - \frac{m_2}{n_2(1+m_2)} \left[\cos \theta + (\cos^2 \theta + n_2^{-1} \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{1/2} \right] + \dots$$

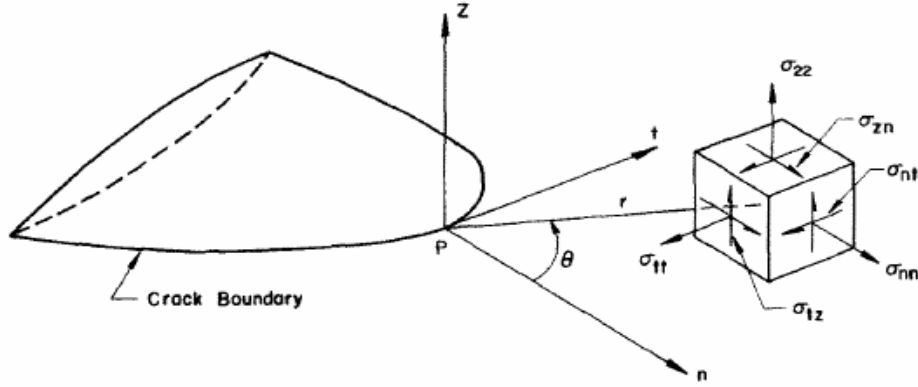


Figure 1.2 : Géométrie de la fissure elliptique et représentation de contraintes

Où ϕ est l'angle défini dans les équations paramétriques :

$$x = a \cos \phi, \quad y = b \sin \phi$$

La référence des composantes de déplacement au système de coordonnées (n, t, z) et les transformations suivantes seront utilisées :

$$u_n = (u_x b \cos \phi + u_y a \sin \phi)(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{-1/2}$$

$$u_t = (-u_x a \sin \phi + u_y b \cos \phi)(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{-1/2}.$$

$$u_z = u_z,$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} u_n &= -\frac{K_1 \sqrt{r}}{\beta_1} \left[\frac{n_1^{1/2}}{1+m_1} \left[\cos \vartheta + \cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_2^{1/2}}{1+m_2} \left[\cos \vartheta + \cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta \right]^{1/2} \right] + 0(r) \\ u_t &= 0(r), \\ u_z &= \frac{K_1 \sin \vartheta \sqrt{r}}{\beta_1} \left\{ \frac{m_1}{n_1(1+m_1)} \left[\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} \right]^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_2}{n_2(1+m_2)} \left[\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \right]^{-1/2} \right\} + 0(r). \end{aligned} \quad (1.42)$$

De même, les contraintes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \frac{K_1}{2\beta_1 \sqrt{r}} \left\{ \frac{C_{13}m_1 - C_{11}n_1}{(1+m_1)n_1^{1/2}} \left[\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} \right]^{1/2} \times \right. \\ &\quad \left. (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} - \frac{C_{13}m_2 - C_{11}n_2}{(1+m_2)n_2^{1/2}} \left[\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} \right]^{1/2} \times \right. \\ &\quad \left. (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \right\} + 0(r^\circ). \\ \sigma_{tt} &= \frac{K_1}{2\beta_1 \sqrt{r}} \left\{ \frac{C_{13}m_1 - C_{12}n_1}{(1+m_1)n_1^{1/2}} \left[\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} \right]^{1/2} \right\} \\ &\quad \times (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} - \frac{C_{13}m_1 - C_{12}n_2}{(1+m_1)n_2^{1/2}} \left[\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} \right]^{1/2} \\ &\quad \times (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \} + 0(r^\circ). \\ \sigma_{zz} &= \frac{K_1 C_{44}}{2\beta_1 \sqrt{r}} \left\{ n_1^{1/2} \left[\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} \right]^{1/2} \times \right. \\ &\quad \left. (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} - n_2^{1/2} \left[\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} \right]^{1/2} \times \right. \\ &\quad \left. (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \right\} + 0(r^\circ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{nz} &= \frac{K_1}{2(n_1^{1/2} - n_2^{1/2})\sqrt{r}} \left\{ \left[(\cos^2 \theta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} - \cos \vartheta \right]^{1/2} \times \right. \\
&\quad \left. (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} - \left[(\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} - \cos \vartheta \right]^{1/2} \times \right. \\
&\quad \left. (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \right\} + 0(r^\circ). \\
\sigma_{tz} &= 0(r^\circ), \quad \sigma_{nt} = 0(r^\circ).
\end{aligned} \tag{1.43}$$

A la différence de la solution isotrope, la distribution angulaire des déplacements et contraintes au front de fissure en matériaux hexagonaux est plus impliquée. Effectuant un processus de limite difficile ($n_1 \rightarrow 1, n_2 \rightarrow 1$), le champ de contrainte isotrope peut être déterminé. En outre, il est utile de noter qu'il y'a pas de différence entre les résultats obtenus en équations (1.42) et (1.43), pour les contraintes et les déplacements près d'une fissure dans un corps linéairement anisotrope (analyse bidimensionnelle de Sih, Paris et Irwin (1965)).

Cependant, il est mathématiquement possible d'ouvrir une longueur d'arc d'unité de la frontière de fissure par une quantité ε mesurée à partir du bord de fissure le long de l'axe $\vec{n}$ où la force tendant à répondre la fissure est la plus grande. Pour une fissure elliptique, un tel point se produit à l'intersection du front de la fissure et de l'axe mineur. Par conséquent, le taux de travail d'entrée dans le processus de rupture est :

$$\mathfrak{T}_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \sigma_{zz}(\varepsilon - r, 0) u_z(r, \pi) dr. \tag{1.44}$$

On substitue les valeurs appropriées du déplacement et de contraintes d'équations (1.42) et de (1.43) dans l'équation (1.44), on obtient :

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{\pi k_1^2 c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})}{2c_{44} (c_{13} + c_{44}) (1 + m_1) (1 + m_2)}. \tag{1.45}$$

Pour les charges uniformes appliquées symétriquement aux surfaces de la fissure, le facteur d'intensité de contrainte, peut être défini en quelque sorte conforme à un matériau isotrope. Pour être plus spécifique, la valeur de K , pour le cas d'une fissure elliptique ouverte par la pression uniforme p agissant sur les plans de fissure prend la forme :

$$K_1 = \frac{p}{E(k)} \left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/2}, \quad b < a \tag{1.46}$$

Pour le cas d'un chargement symétrique incliné, la contrainte et le déplacement autour de la fissure elliptique peuvent être déterminés de la même manière. On peut montrer qu'à partir des fonctions $g_j(x, y, z_j)$ et $h_j(x, y, z_j)$ dans l'équation (1.32) que les déplacements sont :

$$\begin{aligned}
 u_n &= -\frac{K_2(n_1 n_2)^{1/2} \sin \vartheta \sqrt{r}}{c_{44}(n_1^{1/2} - n_2^{1/2})} \left\{ [(1+m_1)n_1]^{-1} [\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2}]^{-1/2} \right. \\
 &\quad \left. - [(1+m_2)n_2]^{-1/2} [\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2}]^{-1/2} + 0(r) \right\} \\
 u_t &= \frac{K_3 n_3^{1/2} \sin \vartheta \sqrt{r}}{c_{44}(m_2 - m_1)} \left\{ \frac{1+m_2}{n_1} [\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2}]^{-1/2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1+m_1}{n_2} [\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2}]^{-1/2} \right\} + 0(r). \tag{1.47} \\
 u_z &= \frac{K_2 \sqrt{r}}{\alpha_2 c_{44}(m_1 - m_2)} \left\{ \frac{m_1(1+m_1)}{n_1^{1/2}} [\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2}]^{1/2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{m_2(1+m_1)}{n_2^{1/2}} [\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2}]^{1/2} \right\} + 0(r).
 \end{aligned}$$

Et les contraintes :

$$\begin{aligned}
 \sigma_m &= \frac{K_2}{2\alpha c_{44}(m_1 - m_2)\sqrt{r}} \left\{ (1+m_2)(C_{13}m_1 - C_{11}n_1)n_1^{-1} \right. \\
 &\quad \times [(\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} - \cos \vartheta]^{1/2} (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \\
 &\quad - (1+m_1)(C_{13}m_2 - C_{11}n_2)n_2^{-1} [(\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} - \cos \vartheta]^{1/2} \\
 &\quad \times (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \left. \right\} + 0(r^0), \\
 \sigma_{tt} &= \frac{K_2}{2\alpha_2 c_{44}(m_1 - m_2)\sqrt{r}} \cdot \left\{ (1+m_2)(C_{13}m_1 - C_{12}n_1)n_1^{-1} \right. \\
 &\quad \left[(\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} - \cos \vartheta \right]^{1/2} (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \\
 &\quad - (1+m_1)(C_{13}m_2 - C_{12}n_2)n_2^{-1} [(\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} - \cos \vartheta]^{1/2} \\
 &\quad (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \left. \right\} + 0(r^0), \tag{1.48} \\
 \sigma_{zz} &= \frac{K_2(n_1 n_2)^{1/2}}{2(n_2^{1/2} - n_1^{1/2})\sqrt{r}} \left\{ [(\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} - \cos \vartheta]^{1/2} (\cos^2 \vartheta + n_1^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \right. \\
 &\quad \left. - [(\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} - \cos \vartheta]^{1/2} (\cos^2 \vartheta + n_2^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} \right\} + 0(r^0),
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{tz} = \frac{K_3}{2\sqrt{r}} \left[\cos \vartheta + (\cos^2 \vartheta + n_3^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} \right]^{1/2} (\cos^2 \vartheta + n_3^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} + 0(r^\circ),$$

$$\sigma_{nt} = \frac{K_3 n_3^{1/2} (C_{11} C_{12})}{2C_{44}} \left[(\cos^2 \vartheta + n_3^{-1} \sin^2 \vartheta)^{1/2} \cos \vartheta \right]^{1/2} (\cos^2 \vartheta + n_3^{-1} \sin^2 \vartheta)^{-1/2} + 0(r^\circ).$$

On note que les modes de glissement dans le plan et hors plan de la prolongation de la fissure, identifiés par K_2 , et K_3 respectivement, sont présents sur la frontière de la fissure. Comme décrit précédemment, les taux de rejet d'énergie $\mathfrak{I}_1$ et $\mathfrak{I}_2$ peuvent être également calculés :

$$\mathfrak{I}_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \sigma_{nz}(\epsilon - r, 0) u_n(r, \pi) dr, \quad (1.49)$$

$$\mathfrak{I}_3 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \sigma_{tz}(\epsilon - r, 0) u_t(r, \pi) dr, \quad (1.50)$$

En prenant compte de ces considérations, on arrive à :

$$\mathfrak{I}_2 = \frac{\pi K_2^2 c_{11} (n_1 n_2)^{1/2} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})}{2c_{44} (c_{13} + c_{44}) (1 + m_1) (1 + m_2)}.$$

$$\mathfrak{I}_3 = \frac{\pi K_3^2 n_3^{1/2}}{2c_{44}}.$$

Les deux facteurs d'intensité de contrainte K_1 et K_2 sont des fonctions de dimensions de la fissure, et ils changent aussi le long de la frontière de cette fissure. Leurs valeurs pour deux types d'applications sont calculées :

a. *Cisaillement uniforme.*

$$\begin{aligned} K_2 &= -\frac{2\alpha_2 c_{44} (aB_1 \sin \phi + bA_1 \cos \phi)}{(ab)^{3/2} (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/4}} \\ K_3 &= \frac{2\beta_2 c_{44} (aA_1 \sin \phi - bB_1 \cos \phi)}{(ab)^{3/2} (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/4}} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Cisaillement linéairement variable.

$$\begin{aligned} K_2 &= -\frac{2\alpha_2 c_{44} (A_2 \cos^2 \phi + B_2 \sin^2 \phi)}{(ab)^{1/2} (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/4}} \\ K_3 &= \frac{2\beta_2 c_{44} (a^2 A_2 - b^2 B_2) \sin \phi \cos \phi}{(ab)^{3/2} (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/4}} \end{aligned} \quad (1.52)$$

1.4 Conclusion et commentaires

On présente dans ce chapitre la formulation de base des équations intégrales, décrivant l'analyse de contraintes : calcul des déplacements et vecteurs contraintes en milieux tridimensionnels, au voisinage des fissures de forme elliptiques, sous un chargement quelconque, en concentrant l'étude à l'état de chargement de contrainte symétrique. Ces formulations nous a aidé à comprendre l'effet de singularité de contraintes au voisinage de zones fissurées, ainsi d'enrichir notre recherche bibliographique sur les premières investigations dans le domaine de la mécanique de la rupture.

CHAPITRE II

CHAPITRE II

EQUATIONS INTEGRALES POUR LES SOLIDES ELASTIQUES FISSURES

II.1 Introduction

Les méthodes d'équations intégrales de frontière sont d'un emploi assez fréquent en mécanique de la rupture. Outre l'avantage du gain d'une dimension d'espace par rapport aux méthodes d'éléments finis, une meilleure précision est obtenue dans l'évaluation des grandeurs locales (par exemple : les facteurs d'intensité de contraintes) au voisinage du front de fissure. Enfin, pour la simulation numérique de trajets d'extension de fissures dans des situations tridimensionnelles, il est beaucoup plus facile de réactualiser le maillage en éléments de frontière d'une surface que le maillage en éléments finis d'un volume. Le problème du remaillage étant généralement compliqué par la nécessité de transporter un raffinement de maillage au voisinage du front de fissure [93].

II.2 Représentations et équations intégrales pour l'élastostatique

On présente dans cette partie les représentations et équations intégrales pour les problèmes d'équilibre en élasticité linéaire et sous l'hypothèse des petites perturbations, La présentation est centrée sur les situations tridimensionnelles.

II.2.1 Hypothèses géométriques

On considère un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$, supposée régulière (C^2 au moins) par morceaux, admet la présence de coins ou d'arrêtes et n'est pas nécessairement connexe. L'intérieur de chacune des composantes connexes est supposé de mesure non nulle. La normale unitaire est, par convention, extérieure à Ω .

II.2.2 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

L'identité de réciprocité pour l'élasticité est une conséquence du théorème des travaux virtuels, qui s'énonce :

Quel que soit le champ de contraintes σ en équilibre statique avec F (c'est-à-dire vérifiant $\text{div}\sigma + F = 0$), quel que soit le champ de vecteurs ("déplacement virtuel") u' continûment différentiable sur Ω :

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u') dV - \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot n) \cdot u' dS - \int_{\Omega} \rho F \cdot u' dV = 0 \quad (2.1)$$

On considère alors deux états élastostatiques (u_1, σ_1, F_1) et (u_2, σ_2, F_2) distincts sur Ω . Appliquant le théorème des travaux virtuels à (u_1, σ_1, F_1) travaillant dans le déplacement virtuel u_2 , puis à (u_2, σ_2, F_2) travaillant dans le déplacement virtuel u_1 , et retranchant les relations obtenues, on obtient :

$$\int_{\Omega} [\sigma_1 : \varepsilon(u_2) - \sigma_2 : \varepsilon(u_1)] dV - \int_{\Omega} [\rho F_1 \cdot u_2 - \rho F_2 \cdot u_1] dV = \int_{\partial\Omega} [T_n(u_1) \cdot u_2 - T_n(u_2) \cdot u_1] dS$$

De plus la symétrie donnée par (A.4) de la loi de comportement élastique implique l'égalité :

$$\sigma_1 : \varepsilon(u_2) = \sigma_2 : \varepsilon(u_1)$$

Il en résulte que tout couple (u_1, σ_1, F_1) , (u_2, σ_2, F_2) d'états élastostatiques sur Ω vérifie l'identité de réciprocité de Maxwell-Betti :

$$\int_{\partial\Omega} [(\sigma_1 \cdot n) \cdot u_2 - (\sigma_2 \cdot n) \cdot u_1] dS = \int_{\Omega} [\rho F_2 \cdot u_1 - \rho F_1 \cdot u_2] dV \quad (2.2)$$

Qui peut s'écrire, compte tenu de l'équation de Navier (A.5) satisfaite par les deux états élastiques, sous la forme d'une identité mathématique associée à l'opérateur Δ^* et analogue à la troisième formule de Green (A.11) :

$$\int_{\partial\Omega} [T_n(u_1) \cdot u_2 - T_n(u_2) \cdot u_1] dS = \int_{\Omega} [(\Delta^* u_1) \cdot u_2 - (\Delta^* u_2) \cdot u_1] dV \quad (2.3)$$

II.2.3 Solutions élémentaires de l'élasticité linéaire

Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Omega \subseteq E$. On appelle solution élémentaire de l'élastostatique un état élastostatique (U_k, Σ_k, F_k) associé à une force ponctuelle unitaire appliquée en un point fixé $x \in E$ et de direction e_k :

$$\rho F_k(q) = \delta(q - p)e_k \quad q \in E \quad (2.4)$$

Le vecteur déplacement $U_k(p, q)$ et le tenseur des contraintes élastiques $\Sigma_k(p, q)$ dépendent du point courant q , du point d'application p et de la direction $\vec{k}$ de la force ponctuelle. Les composantes cartésiennes $U_i^k(p, q), \Sigma_{ij}^k(p, q)$ de toute solution élémentaire vérifient les équations d'équilibre et de comportement :

$$\Sigma_{ij,j}^k(p, q) + \delta(q - p)\delta_{ik} = 0 \quad \Sigma_{ij}^k(p, q) = C_{ijab}U_{a,b}^k(p, q) \quad (2.5)$$

La notation $f_{,a}(p, q)$ désigne par convention la dérivée partielle de f par rapport à la composante q_a du point courant q . On introduit également la notation $T_i^k(p, q)$ pour désigner le vecteur-contrainte associé à la solution élémentaire au point q :

$$T_i^k(p, q) = \Sigma_{ij}^k(p, q)n_j(y) = (T^n U^k(p, q))_i \quad (2.6)$$

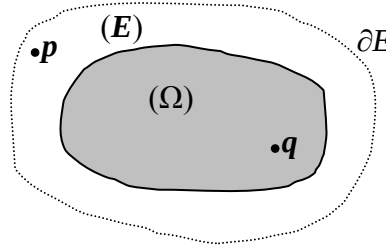


Figure 2.1 : Domaine réel Ω et domaine auxiliaire E servant à définir $U^k(p, q)$

II.2.4 Équilibre global

Pour toute solution élémentaire de l'élastostatique linéaire, pour tout domaine $\Omega \subseteq E$ et tout point fixé $p \in E$, $p \notin \partial E$, l'intégration sur Ω de l'équation d'équilibre et l'application de la formule de la divergence conduisent à l'identité :

$$\kappa \delta_{ik} + \int_{\partial\Omega} T_i^k(p, q) dS = 0 \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} \kappa = 1 & p \in \Omega \\ \kappa = 0 & p \notin \Omega \end{cases} \quad (2.7)$$

Qui traduit simplement l'équilibre entre les efforts de contact T_i^k sur $\partial\Omega$ et la force ponctuelle unitaire exercée en p (n est la normale unitaire extérieure à Ω).

II.2.5 Espace infini : Solution de Kelvin

Il y'a autant de solutions élémentaires que de choix du domaine E et des conditions aux limites sur ∂E , la plus simple correspond à l'espace infini élastique isotrope avec condition de décroissance à l'infini. Le calcul de la réponse élastique à l'application d'une force ponctuelle dans un massif infini ($E = \mathbb{R}^3$), appelé solution de kelvin, est un problème classique, présenté en annexe A. la solution de Kelvin est donnée par :

$$U_i^k(p, q) = \frac{1}{16 \pi \mu (1 - \nu) r} [r_{,i} r_{,k} + (3 - 4\nu) \delta_{ik}] \quad (2.8)$$

$$\sum_{ij}^k(p, q) = -\frac{1}{8 \pi (1 - \nu) r^2} [3 r_{,i} r_{,k} r_{,j} + (1 - 2\nu)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k})] \quad (2.9)$$

Où $r = |r| = |q - p|$ est la distance euclidienne entre les points courants q et source p .

II.3 Formules de représentation intégrale

On considère un solide élastique Ω borné. Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti est appliquée à l'état élastostatique inconnu (u, σ, F) et à une solution élémentaire définie par les équations (2.4-2.5) associé à un ouvert E compatible avec Ω [93]. Le point source p est pris hors de la frontière $\partial\Omega$. Cela conduit à :

$$\int_{\Omega} \delta_{ik} \delta(q - p) u_i(q) dV_q = \int_{\partial\Omega} \{t_i(q) U_i^k(p, q) - u_i(q) T_i^k(p, q)\} dS_q + \int_{\Omega} \rho F_i(q) U_i^k(p, q) dV_q \quad (2.10)$$

Où $t = T^n(u)$ est le vecteur-contrainte élastiquement associé au déplacement u . De plus, par définition de la mesure de Dirac, on a :

$$\int_{\Omega} \delta_{ik} \delta(q - p) u_i(q) dV_q = \kappa u_k(p) \quad \begin{cases} \kappa = 1 & (p \in \Omega) \\ \kappa = 0 & (p \notin \Omega) \end{cases} \quad (2.11)$$

II.3.1 Formule de représentation intégrale du déplacement

Pour tout point $p \in E$ non situé sur $\partial\Omega$, le déplacement en p est donné en fonction des variables élastiques sur la frontière par la formule :

$$\kappa u_k(p) = \int_{\partial\Omega} \{t_i(q)U_i^k(p, q) - u_i(q)T_i^k(p, q)\} dS_q + \int_{\Omega} \rho F_i(q)U_i^k(p, q) dV_q \quad (2.12)$$

II.3.2 Formule de représentation intégrale du tenseur de contrainte

Lorsque $p \notin \partial\Omega$, les intégrales de l'équation (2.12) sont des fonctions différentiables de p , la représentation intégrale du gradient de u est donc obtenue par simple dérivation de cette dernière sous le signe intégral :

$$\kappa u_{k,l}(p) = \int_{\partial\Omega} \{t_a(q)U_{a,l}^k(p, q) - u_a(q)n_b \Sigma_{ab,l}^k(p, q)\} dS_q + \int_{\Omega} \rho F_a(q)U_{a,l}^k(p, q) dV_q \quad (2.13)$$

L'application de la loi de Hooke (A.2) et les propriétés de symétrie données par (A.15) conduit à la représentation intégrale des contraintes élastiques :

$$\kappa \sigma_{ij}(p) = \int_{\partial\Omega} \{t_a(q)\Sigma_{ij}^a(p, q) - u_a(q)n_b(q)C_{abkl}\Sigma_{ij,l}^k(p, q)\} dS_q + \int_{\Omega} \rho F_a(q)\Sigma_{ij}^a(p, q) dV_q \quad (2.14)$$

Si p est extérieur au domaine d'étude Ω (et donc $\kappa = 0$ dans (2.12), (2.13), (2.14)), on parle alors de *formule de représentation extérieure*.

II.4 Nécessité d'une équation intégrale

Pour p intérieur à Ω , les expressions des équations (2.12) et (2.14) donnent ainsi la valeur en un point p du déplacement u et de la contrainte σ en termes des efforts de volume ρF et des valeurs prises sur la frontière $\partial\Omega$. Pour tout problème d'élasticité bien posé, la moitié des composantes scalaires de $(u, t)|_{\partial\Omega}$ est donnée par les conditions aux limites, l'autre moitié restante inconnue. Les formules de représentations de ces dernières équations montrent que la résolution d'un problème d'élasticité se ramène à la détermination de celles des composantes de $(u, t)|_{\partial\Omega}$ qui ne sont pas prescrites par les conditions aux limites. Elles

réalisent une "quasi inversion " de l'équation de Navier. Reportant la recherche d'inconnus sur la frontière.

Il reste donc de définir une équation intégrale de frontière portant seulement sur les champs élastiques à la frontière. Il n'est toutefois pas correct de se contenter d'écrire les équations (2.12) ou (2.14) pour des points p de la frontière $\partial\Omega$: $\Sigma(p, q)$ étant singulier comme $|q - p|^{-2}$, les intégrales de frontière cessent à priori d'avoir un sens pour $p \notin \partial\Omega$. D'autre part, la relation (2.12) ne vaut que pour $p \notin \partial\Omega$. L'établissement d'une équation intégrale doit donc recourir à une procédure de passage à la limite tenant compte du caractère singulier de la solution élémentaire employée.

II.4.1 Equation intégrale régularisée en déplacement

A fin de préparer le passage à la limite [93], on considère une solution particulière, à savoir un déplacement de translation rigide du solide borné Ω avec forces de volume nulles, soit :

$$u(q) = u_0 \text{ (Constant)} \quad \sigma(q) = 0 \quad q \in \Omega$$

Cela définit un état élastostatique, solution de l'équation de Navier (A.5). La formule donnée par l'équation (2.12) lui est donc applicable et conduit à l'identité de corps rigide :

$$\kappa u_k^0 + u_i^0 \int_{\partial\Omega} T_i^k(p, q) dS_q = 0 \quad (2.15)$$

Qui peut également être obtenue à partir de l'équation (2.7). Elle vaut en particulier pour $u^0 = u(p)$, c'est-à-dire la translation égale en tout point de Ω à la valeur en p du déplacement inconnu, ce qui donne [22] :

$$\kappa u_k^0(p) + u_i^0(p) \int_{\partial\Omega} T_i^k(p, q) dS_q = 0 \quad (2.16)$$

L'identité ci-dessus est alors retranchée de l'équation (2.12), cela mène à la relation :

$$\int_{\partial\Omega} \{ [u_i(q) - u_i(p)] T_i^k(p, q) - t_i(q) U_i^k(p, q) \} dS_q = \int_{\Omega} \rho F_i(q) U_i^k(p, q) dV_q \quad (2.17)$$

Qui est valable pour tout point source p non situé sur la frontière $\partial\Omega$.

II.4.2 Passage à la limite

Le point source p maintenant supposé situé sur la frontière $\partial\Omega$, et supposons que $\partial\Omega$ est de continuité C^2 en p . Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère un voisinage $v_\varepsilon(p)$ de p , connexe [93], de diamètre $\leq \varepsilon$, appelé voisinage d'exclusion. Le domaine $\Omega_\varepsilon(p) = \Omega - v_\varepsilon(p)$ est obtenu en retranchant du domaine Ω le voisinage $v_\varepsilon(p)$ (figure 2.2) est tel que le point p est extérieur à $\Omega_\varepsilon(p)$. La frontière de Ω_ε est alors $\partial\Omega_\varepsilon = (\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon$, en posant $s_\varepsilon = \Omega \cap \partial v_\varepsilon$, et $e_\varepsilon = \partial\Omega \cap v_\varepsilon$. L'idée poursuivie est de prendre la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ de l'identité (2.17) prise pour le domaine Ω_ε , de frontière $(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon$ soit :

$$\int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} \{ [u_i(p) - u_i(q)] T_i^k(p, q) - t_i(q) U_i^k(p, q) \} dS_q = \int_{\Omega_\varepsilon} \rho F_i(q) U_i^k(p, q) dV_q \quad (2.18)$$

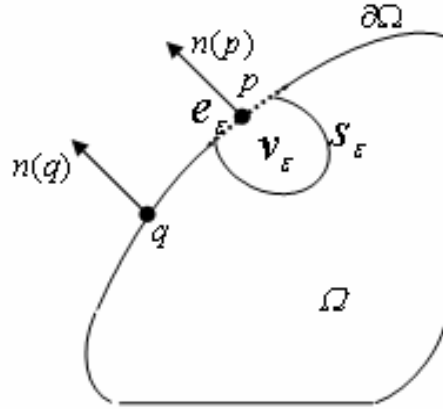


Figure 2.2 : Voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(p)$ et autres notations utilisées pour le passage à la limite

Par construction, $p \notin \Omega_\varepsilon$. Si l'état élastostatique est inconnu et tel que $u \in C^{0,\alpha}$ en p , c'est-à-dire vérifie :

$$\exists(\alpha, C) > 0, \quad |u(q) - u(p)| \leq C |q - p|^\alpha \quad (2.19)$$

Alors le tenseur des contraintes $\sigma(q)$ vérifie, pour q voisin de p :

$$|\sigma(q)| \leq C |q - p|^{\alpha-1}$$

Et compte tenu des propriétés de singularité (A.12) :

$$\begin{aligned} |[u_i(q) - u_i(p)]T_i^k(p, q)| &\leq C |q - p|^{\alpha-2} \\ |t_i(q)U_i^k(p, q)| &\leq C |q - p|^{\alpha-2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'équation (2.18) est maintenant considéré. Les intégrales sur s_ε , sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$ et sur Ω_ε sont traités séparément.

II.4.3 Equation intégrale de frontière

Le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'équation (2.18) conduit donc à l'équation intégrale de frontière en déplacement recherchée [22], [29] :

$$\int_{\partial\Omega} \{[u_i(q) - u_i(p)]T_i^k(p, q) - t_i(q)U_i^k(p, q)\} dS_q = \int_{\Omega} \rho F_i(q)U_i^k(p, q) dV_q \quad (2.21)$$

Celle-ci lie les valeurs des variables u, t sur $\partial\Omega$ et ne fait pas intervenir les inconnues aux points intérieurs du domaine et gouverne tout état élastostatique sur Ω vérifiant l'équation (2.20). Elle ne fait intervenir que des intégrales convergentes, présentant des singularités intégrables en $q = p$, et pour cela est dite régularisée.

II.4.4 Equations intégrales pour les problèmes extérieurs

On considère un massif élastique infini occupant le domaine $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$, Ω étant un domaine borné. On suppose momentanément $\rho F = 0$, on montre que l'équation intégrale précédente et les représentations des équations (2.12), (2.14) s'étendent aux domaines infinis, à condition que u, σ vérifient certaines conditions de décroissance à l'infini.

On peut pour cela procéder à un passage à la limite pour un domaine borné arbitrairement grand. Pour un point $p \in \mathbb{R}^3$, on considère une surface fermée régulière S_R choisie de façon à enfermer la boule de centre p et de rayon R fixé et à entourer la frontière

$\partial\overline{\Omega}$. L'équation intégrale (2.21) est alors écrite pour le domaine élastique borné $\Omega_R \subset \Omega$ limité extérieurement par S_R (figure 2.3) :

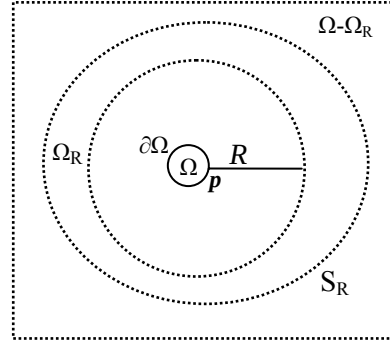


Figure 2.3 : Domaine Ω_R pour le passage à la limite $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\partial\Omega} \{ [u_i(q) - u_i(p)] T_i^k(p, q) - t_i(q) U_i^k(p, q) \} dS_q = \int_{S_R} \{ t_i(q) U_i^k(p, q) - [u_i(q) - u_i(p)] T_i^k(p, q) \} dS_q \quad (2.22)$$

Et puisque on se propose de faire tendre $R \rightarrow \infty$, la solution élémentaire utilisée est nécessairement celle de Kelvin.

Le passage à la limite $R \rightarrow \infty$ dans l'équation (2.22) a donc pour résultat l'équation intégrale régularisée en déplacement pour un domaine $\overline{\Omega}$ non borné :

$$u_k(p) + \int_{\partial\Omega} \{ [u_i(q) - u_i(p)] T_i^k(p, q) - t_i(q) U_i^k(p, q) \} dS_q = 0 \quad (2.23)$$

Commentaire :

Cette équation intégrale gouverne tout état élastostatique sur $\overline{\Omega}$ vérifiant les conditions de décroissance qui suivent l'équation (2.24), et diffère de son homologue équation (2.21) pour un solide borné par l'apparition d'un terme libre $u_k(p)$ hors signe intégral et par l'orientation de la normale unitaire n , extérieure au solide borné $\overline{\Omega}$, donc intérieure à $\partial\overline{\Omega}$.

$$\text{Conditions de décroissance : } u(q) = o(1), \quad \sigma(q) = o(R^{-1}) \quad q \in S_R \quad (2.24)$$

II.4.5 Equation intégrale régularisée en contraintes

Par une même procédure suivie en équation intégrale de frontière en déplacements, on peut construire l'équation intégrale de frontière en traction [93]. La représentation intégrale du gradient de déplacement en un point frontière admet la forme explicite et régularisée, (la régularisation de cette équation est indirecte) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_{k,l}(p) = & \int_{\partial\Omega} [D_{lb} u_a(q) - D_{lb} u_a(p)] \Sigma_{ab}^k(p, q) dS_q - \int_{\partial\Omega} [t_a(q) - t_a(p)] U_{a,l}^k(p, q) dS_q \\ & + D_{lb} u_a(p) A_{ab}^k(p, \partial\Omega) - t_a(p) B_{al}^k(p, \partial\Omega) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dans laquelle toutes les équations intégrales sont convergentes. Les termes résiduels A_{ab}^k, B_{al}^k Sont donnés en annexe (A.23). L'application de la loi de Hooke $\sigma(p) = C : \nabla u(p)$ fournit ensuite facilement la représentation intégrale du tenseur des contraintes élastiques en un point frontière sous forme explicite et régularisée :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_{ij}(p) = & C_{ijkl} \int_{\partial\Omega} [D_{lb} u_a(q) - D_{lb} u_a(p)] \Sigma_{ab}^k(p, q) dS_q - \int_{\partial\Omega} [t_a(q) - t_a(p)] \Sigma_{ij}^a(p, q) dS_q \\ & + D_{lb} u_a(p) C_{ijkl} A_{ab}^k(p, \partial\Omega) - t_a(p) A_{ij}^a(p, \partial\Omega) \end{aligned} \quad (2.26)$$

La formulation de ce résultat utilise la propriété de symétrie (A.13) de la solution de Kelvin isotrope, à travers les relations :

$$C_{ijkl} U_{a,l}^k(p, q) = \Sigma_{ij}^a(p, q) \Rightarrow C_{ijkl} B_{al}^k(p, \partial\Omega) = A_{ij}^a(p, \partial\Omega). \quad (2.27)$$

Nous nous limiterons à la présentation détaillée pour l'équation intégrale de frontière en déplacements pour la raison de la similitude du procédé de développement d'équations intégrales, et du fait que le traitement numérique des deux chapitres 4 et 5, repose seulement sur l'équation intégrale en déplacements.

II.5 Conclusion et commentaires

Le présent chapitre a pour but la présentation des deux équations intégrales de frontière en déplacement (2.9) et en traction (2.11). Pour cela on a débuté par des formulations de base dites les représentations intégrales des déplacements et de contraintes, puis en introduisant le principe de passage à limite afin de construire les équations intégrales de déplacements et celles de contraintes, qui devraient être utilisées pour résoudre le problème de la modélisation de la fissure tridimensionnelle, par la résolution de ces équations intégrales à la frontière, en appuyant sur la méthode d'éléments frontières " BEM ", présentée au chapitre 3.

CHAPITRE III

CHAPITRE III

METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES

III.1 Introduction

La modélisation d'un grand nombre de situations d'intérêt pratique pour l'ingénieur conduit à la recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles, assorties de conditions aux limites et pour les problèmes d'évolution, conditions initiales, posées notamment par la mécanique des solides ou des fluides, l'acoustique, la thermique, l'électromagnétisme. Ces équations sont généralement posées sur les domaines géométriques ne permettant pas l'emploi des techniques classiques de recherche de solutions exactes : séparation des variables, transformations intégrales, et doivent donc être résolues par des méthodes numériques. Les méthodes les plus couramment utilisées sont les différences finies, les éléments finis et les éléments de frontière [22]. D'autres méthodes peuvent être aussi rencontrées.

La méthode des éléments frontières repose sur la discrétisation d'équations intégrales de frontière. L'étude de ces dernières a commencé il y a plus d'un siècle et constitue une branche importante de la physique mathématique classique. Le développement de la méthode des éléments frontières en tant qu'outil de résolution numérique est toutefois postérieur à celui des éléments finis et différences finies. Les premiers développements numériques d'éléments frontières ont été proposés durant les années 1960 : Rizzo (1967), Cruse (1969) par exemple.

III.2 Représentation de la géométrie par éléments de frontières

On expose ici la méthode de collocation qui consiste à discrétiser l'équation intégrale prise pour un nombre fini de points de collocation p [22], suffisant pour fournir au moins autant d'équations que le problème discret compte d'inconnues [23].

La discrétisation par éléments de frontière résulte d'une transposition directe des méthodes de représentation de la géométrie et des variables par fonctions de formes et valeurs nodales décrites classiquement dans le contexte des méthodes d'éléments finis

Le point de départ de discrétisation consiste en l'introduction d'une partition de la frontière $\partial\Omega$ en N_E éléments de frontière $E_1, \dots, E_{N_E}$ disjoints : $\partial\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_E} E_e$. Les E_e sont ainsi des portions de courbes (domaines Ω plans) ou de surfaces (domaines Ω tridimensionnels). L'équation intégrale (2.23) est alors écrite comme une somme d'intégrales élémentaires :

$$u_k(p) + \sum_{e=1}^{N_E} \{ [u_i(q) - u_i(p)] T_i^k(p, q) - t_i(q) U_i^k(p, q) \} dS_q = 0 \quad (3.1)$$

Le calcul effectif de ces dernières repose sur une description analytique de chaque élément de frontière, par un paramétrage :

$$\xi \in \Delta_e \rightarrow q(\xi) \in E_e \quad (1 \leq e \leq N_E)$$

Chaque élément E_e de l'espace physique étant rapporté à un *élément de référence* Δ_e , domaine du plan $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ si $\partial\Omega$ est une surface.

III.2.1 Description des éléments par nœuds et fonctions de forme

Le plus souvent on ne cherche pas à présenter exactement la frontière $\partial\Omega$, opération en général complexe et se prêtant peu à des algorithmes généraux et applicables à des classes étendues de frontières $\partial\Omega$. On préfère introduire des descriptions paramétriques génériques (généralement polynomiales) [93], dépendant pour chaque élément d'un petit nombre de coefficients. Ce procédé ne permet en général que la construction d'une frontière approchée $\tilde{\partial\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_E} E_e$ de $\partial\Omega$, mais donne en contrepartie une méthode unifiée de représentation de frontières quelconques.

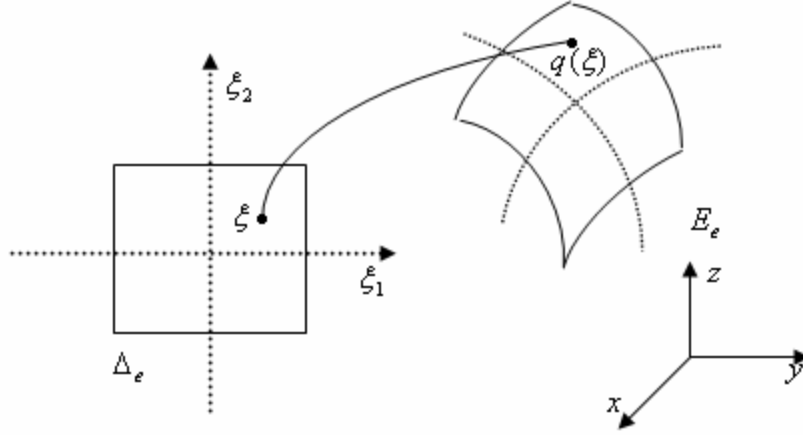


Figure 3.1 : Élément de frontière E_e et élément de référence Δ_e

Les éléments de référence Δ_e sont choisis de forme simple : segment $\xi \in [-1,1]$ pour les problèmes plans, carré $\xi \in [-1,1]^2$ ou triangle $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$ et $1 - \xi_1 - \xi_2 \geq 0$ pour les problèmes tridimensionnels. Chaque élément E_e de la frontière approchée $\partial\bar{\Omega}$ est décrit par un paramétrage de la forme :

$$\xi \in \Delta_e \rightarrow q(\xi) = \sum_{m=1}^{N_e} N_m(\xi) q_m \quad \xi \notin \Delta_e \quad (3.2)$$

Pour lequel on suppose :

- i. N_e points $q_1, \dots, q_{N_e}$ de $\partial\Omega$ appelés *nœuds géométriques*, donnés ici en *numérotation locale* $1 \leq m \leq N_e$
- ii. N_e fonctions de forme $N_1(\xi), \dots, N_{N_e}(\xi)$ (habituellement polynomiales), vérifiant les propriétés suivantes :

$$N_i(\xi_k) = \delta_{ik} \quad \sum_{m=1}^{N_e} N_m(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in \Delta_e \quad (3.3)$$

Où $\xi_k \in \Delta_e$ est l'*antécédent* du nœud $q_k \in E_e$. Il y'a bien sûr un lien entre le nombre N_e de nœuds choisis pour décrire l'élément et le type de fonction de forme utilisée.

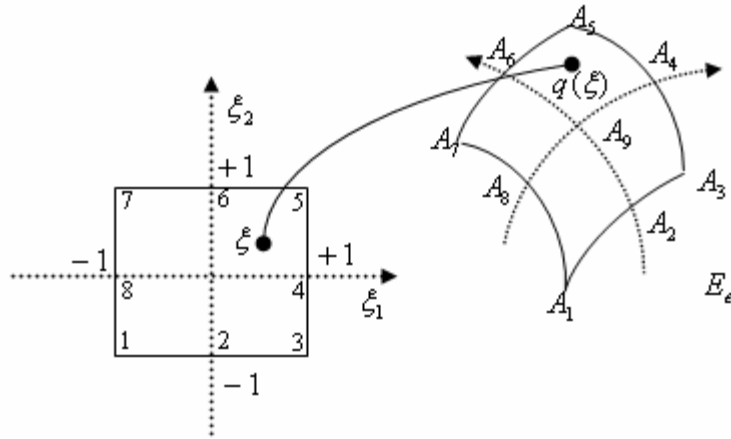


Figure 3.2 : Paramétrage d'un élément frontière quadrangulaire à 9 nœuds

III.2.2 Construction de la frontière approchée

Elle consiste à accomplir les étapes suivantes :

1. choix de N_N nœuds géométriques $q_1, \dots, q_{N_N}$ situés sur $\partial\Omega$. Cette information est consignée sous la forme d'une *table de coordonnées*, donnant pour chaque nœud m $1 \leq m \leq N_N$ les coordonnées cartésiennes du nœud q_m .
2. partition de $\partial\Omega$ en N_E éléments (segments, triangles ou quadrangles curvilignes). La *table de connectivité* $e, h \rightarrow n(e, h)$ donne, pour un nœud q_h de numéro local h sur l'élément de numéro e , son numéro global $n(e, h)$, $1 \leq n(e, h) \leq N_N$. Inversement, l'élément E_e est défini pour la donnée des N_e nœuds $q_{n(e,1)}, \dots, q_{n(e, N_e)}$.

Les tables de coordonnées et de connectivité sont les deux composantes essentielles du maillage, et le définissent complètement. La surface approchée complète résulte alors d'une interpolation de type (3.2) sur chaque élément.

III.2.3 Construction de la fonction de forme

Toute représentation approchée de $\partial\Omega$ en éléments de frontière $(E_1, \dots, E_{N_E})$ doit être telle que deux éléments voisins se raccordent exactement et ne présentent entre eux ni recouvrement, ni "trous". Les fonctions de forme classiquement utilisées en éléments finis sont construites pour vérifier ces critères (quelques familles de fonctions de forme usuelles son rappelées en annexe B). Il est nécessaire que deux éléments adjacents partagent les mêmes nœuds-frontière (caractère conforme du maillage). L'approximation de $\partial\Omega$ par nœuds et fonction de forme garantit alors :

- i. L'existence de la continuité du plan tangent et de la normale en tout point intérieur d'un élément.
- ii. La continuité et le non-recouvrement de $\partial\tilde{\Omega}$ à la jonction entre deux éléments.

Le plan tangent et la normale sont généralement discontinus à la traversée de la frontière entre deux éléments.

III.3 Description des inconnues

La représentation des variables u, t sur la frontière reprend encore le formalise de la méthode des éléments finis. Une famille de N_I points de $\partial\Omega$ $x_1, \dots, x_{N_I}$ (en numérotation globale), appelés nœuds d'interpolation [27], est choisie. Chacun des $N_I(e)$ nœuds d'interpolation, $p_k \left\{ (1 \leq k \leq N_I(e)) \right\}$, en numérotation locale } situé sur l'élément E_e où sa frontière est associée à une fonction d'interpolation $M_k(\xi)$, vérifiant les propriétés données par l'équation (3.3). Une approximation des variables u, t sur E_e est définie par :

$$\tilde{u}(q) = \sum_{k=1}^{N_I(e)} M_k(\xi) u_k \quad \tilde{t}(q) = \sum_{k=1}^{N_I(e)} M_k(\xi) t_k \quad (\xi \in \Delta_e) \quad (3.4)$$

Où les $(u_k, t_k) (1 \leq k \leq N_I(e))$ sont les valeurs nodales $\tilde{u}(x_k), \tilde{t}(x_k)$ du déplacement et contrainte aux nœuds d'interpolation, q et ξ étant homologues par le paramétrage décrit par l'équation (3.2).

III.3.1 Interpolations conformes, non conformes, isoparamétriques

Une interpolation est dite *conforme* quand elle est construite de manière à garantir la continuité du champ interpolé à la jonction de deux éléments. Les conditions de conformité sont les mêmes que pour l'interpolation géométrique.

L'équation intégrale (3.1) n'a de sens que si $u \in C^{0,\alpha} (\alpha > 0)$ en p , ce qui implique la continuité de u en p . Par conséquent, bien qu'on puisse *à priori* envisager d'approcher u , continu sur $\partial\Omega$, par une représentation $\tilde{u}$ présentant des discontinuités (par exemple à l'aide de fonctions constantes par élément), celle-ci doit être continue au point de collocation p . Il existe donc des choix incompatibles des fonctions d'interpolation $M_k(\xi)$ et de point de collocation p : par exemple, utiliser des fonctions M_k constantes par élément n'est possible que si p est intérieur à un élément. Les interpolations conformes sont de loin les plus utilisées pour u . En revanche, une interpolation non conforme de t est en pratique acceptable.

La définition décrite par l'équation (3.4) est écrite en termes des mêmes fonctions d'interpolation pour u et t : ce choix est fréquent mais pas obligatoire. Il est parfois bon d'utiliser des interpolations différentes de u et t , notamment en présence d'arrêtes ou de coins.

Le plus souvent les nœuds géométriques sont aussi pris comme nœuds d'interpolation, on a alors $N_N = N_I$ et $q_i = p_i$, ($1 \leq i \leq N_N$) et les fonctions de forme et d'interpolation sont alors identiques : $N_k(\xi) = M_k(\xi)$, ($1 \leq k \leq N_N$). Ce type de représentation, dit isoparamétrique, est nécessairement conforme pour u et t , et c'est le choix qu'on a fait pour la présente étude.

III.4 Construction et résolution numérique du problème discrétisé

La méthode de collocation consiste à forcer l'équation (3.1) à être vérifiée exactement en certains *points de collocation* p_c [93], en nombre fini N_C . Une fois le maillage créé, la discrétisation est effectuée par rapport à des interpolations, pour la géométrie et pour les variables de l'équation ci-dessous :

$$\sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \{ [\tilde{u}_i(q) - \tilde{u}_i(p)] T_i^k(p_c, q) - \tilde{t}_i(q) U_i^k(p_c, q) \} dS_q = 0 \quad 1 \leq c \leq N_e \quad (3.5)$$

Cette équation fait intervenir des intégrales élémentaires régulières ($p_c \notin E_e$) ou singulières ($p_c \in E_e$). Pour un point $p \in \partial\Omega$ donné, posons :

$$I(p) = \{e \in [1, N_E], p \in E_e\} \quad \bar{I}(p) = [1, N_E] - I(p).$$

En d'autres termes, une intégrale élémentaire sur E_e est singulière pour $e \in I(p)$ et régulière pour $e \in \bar{I}(p)$. Le support des intégrations élémentaires singulières pour le point de collocation p est la réunion d'éléments $\bigcup_{e \in I(p)} E_e$.

L'équation intégrale discrétisée prend alors la forme suivante, en distinguant intégrations singulières et régulières :

$$0 = \sum_{e \in I(p)} \sum_{h=1}^{N_I(e)} \{AS_i^k(e, h)u_i^{n(e, h)} - B_i^k(e, h)t_i^{n(e, h)}\} + \sum_{e \in \bar{I}(p)} \sum_{h=1}^{N_I(e)} \{AR_i^k(e, h)u_i^{n(e, h)} - B_i^k(e, h)t_i^{n(e, h)}\} - u_i(p_c) \sum_{e \in I(p)} \hat{AR}_i^k(e) \quad (3.6)$$

Avec les intégrales élémentaires [93]:

$$\begin{aligned} AS_i^k(e, h) &= \int_{E_e} [M_h(\xi) - M_h(\eta_e)] T_i^k(p, q) J(\xi) d\xi \\ B_i^k(e, h) &= \int_{E_e} M_h(\xi) U_i^k(p, q) J(\xi) d\xi \\ AR_i^k(e, h) &= \int_{E_e} M_h(\xi) T_i^k(p, q) J(\xi) d\xi \\ \hat{AR}_i^k(e) &= \int_{E_e} T_i^k(p, q) J(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.7)$$

Le calcul numérique de ces différentes intégrales est traité au chapitre 4.

Pour un élément $E_e, e \in I(p_c)$, l'antécédent de p_c par le paramétrage (équation (3.2)) est noté : $\eta_e \in \Delta_e$, ou plus simplement η en l'absence d'ambiguïté concernant l'élément considéré. L'expression de l'intégrale AS tient compte de ce que l'équation (3.4) appliquée au point p_c donne :

$$\forall e \in I(p_c) \quad u(p_c) = \sum_{h=1}^{N_I(e)} M_h(\eta_e) u^{n(e, h)} \quad (3.8)$$

Où les M_h sont des fonctions d'interpolation associées à l'élément E_e . Par conséquent :

$$\forall e \in I(p_c) \quad u(q) - u(p_c) = \sum_{h=1}^{N_I(e)} [M_h(\xi) - M_h(\eta_e)] u^{n(e, h)} \quad (3.9)$$

III.5 Assemblage du système linéaire

Les $6N_I$ équations scalaires (3.6) présentent la forme matricielle :

$$[A]\{u\} + [B]\{t\} = 0 \quad \{u\} = \{u_i^n\} \quad \{t\} = \{t_i^n\} \quad (1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq n \leq N_I) \quad (3.10)$$

Les matrices $[A]$ et $[B]$, de dimensions $N_c \times N_I$ sont pleines, ce qui constitue une différence majeure par rapport aux méthodes d'éléments finis. Cela est dû au fait que, par l'intermédiaire des solutions élémentaires $U(p, q), T(p, q)$, tout point de $\partial\Omega$ a une influence sur tout point de $\partial\Omega$, et ce quel que soit la méthode d'interpolation de (u, t) utilisée.

L'équation (3.10) est une relation linéaire en les $6N_I$ valeurs nodales (u_i^n, t_i^n) . En outre, des conditions aux limites bien posées contraignent chaque couple (u_i^n, t_i^n) à vérifier une relation, de sorte qu'il reste finalement N_I scalaires inconnues. Il est donc nécessaire d'avoir au moins N_I équations indépendantes dans (3.6). Le plus simple est d'opérer la collocation de l'équation intégrale en tout nœud d'interpolation $(p_c = q_c, 1 \leq c \leq N_I)$. Ce qui permet de réutiliser des points déjà définis. Il y'a alors autant de points de collocation que de nœuds d'interpolation, $(N_c = N_I)$, c'est le choix le plus courant en pratique et c'est notre choix comme on l'a signalé précédemment.

III.6 Incorporation des conditions aux limites

Les composantes de $\{u\}$ et $\{t\}$, qui sont données par les conditions aux limites sont remplacées par leurs valeurs dans (3.10) et les colonnes correspondantes envoyées au second membre, cela donne un système linéaire carré :

$$[K]\{x\} = \{f\} \quad (3.11)$$

Dans lequel $\{x\}$ désigne le vecteur formé des composantes de $\{u\}, \{t\}$ restées inconnues, $[K]$ est formée des colonnes de $[A]$ et $[B]$, associées aux composantes de $\{x\}$. $\{f\}$ est le second membre formé par la somme des colonnes de $[A]$ et $[B]$ associées aux composantes connues de $\{u\}$ et $\{t\}$, multipliées par la valeur de ces dernières. Par exemple, pour un problème à

conditions aux limites mixtes ($t = t^D$ sur S_t , $u = u^D$ sur $S_u = \partial\Omega - S_t$), moyennant une éventuelle renumérotation des colonnes de l'équation (3.10) s'écrivent :

$$[A_1, A_2] \{u', u^D\}^T + [B_1, B_2] \{t^D, t'\}^T = 0 \quad (3.12)$$

Et le système final, dont les inconnues sont les sous vecteurs $\{u'\}, \{t'\}$, devient :

$$[A_1, B_2] \{u', t'\}^T = -[A_2, B_1] \{u^D, t^D\}^T \quad (3.13)$$

Soit l'équation (3.14) :

$$[K] = [A_1, B_2] . \quad \{x\} = \{u', t'\}^T . \quad \{f\} = [A_2, B_1] \{u^D, t^D\}^T \quad (3.14)$$

III.7 Evaluation des intégrales élémentaires

III.7.1 Calcul des intégrales élémentaires régulières

Le calcul numérique des intégrales régulières qui apparaissent dans l'équation intégrale discrétisée (3.6) et les représentations intégrales discrétisées, repose habituellement [27], comme pour les méthodes d'éléments finis, sur l'utilisation de formules de quadrature par points de Gauss.

III.7.1.1 Principe de l'intégration par points de Gauss

On se contente ici de quelques brefs rappels, renvoyant le lecteur de ce travail aux ouvrages de l'intégration numérique.

Intégrales simples.

La valeur approchée d'une intégrale sur le segment $[-1,1]$ est donnée par la formule :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (3.15)$$

Où les x_i et w_i sont respectivement les points de Gauss et poids associés à ces points. Ils sont déterminés de manière unique pour N donné, et tabulé dans la littérature : l'annexe B donne les valeurs de ces points, généralement pour $N \leq 7$. Les points de Gauss sont caractérisés par le fait que l'intégration des monômes de degré $\leq 2N - 1$ est exacte :

$$\forall k, 0 \leq k \leq 2N - 1. \quad \int_{-1}^1 x^k = \sum_{i=1}^N w_i x_i^k \quad (3.16)$$

L'intégration par points de gauss est optimale parmi les formules utilisant N points et poids.

Les points de gauss sont intérieurs au segment : $\forall (i, N), x_i \in]-1, 1[$, et les poids sont strictement positifs : $\forall (i, N), w_i > 0$. Leur répartition est symétrique par rapport au milieu du segment :

$$\forall (i, N), x_i = x_{N-i}, w_i = w_{N-i}$$

Le calcul numérique d'une intégrale sur $[a, b]$ demande un changement de variable :

$$\int_a^b f(p) dp = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \xi\right) d\xi \quad (3.17)$$

Il existe aussi des familles de points de gauss modifiés pour l'évaluation d'intégrales du type :

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \hat{w}_i f(\hat{x}_i) \quad (3.18)$$

Contenant un poids $g(x) \geq 0$ intégrable sur $[-1, 1]$. Elles permettent par exemple le calcul numérique d'intégrales faiblement singulières, le poids $g(x)$ incorporant la singularité.

L'intégration numérique unidimensionnelle en présence d'une singularité logarithmique est :

$$[a, b] = [0, 1] \quad g(x) = \log \frac{1}{x}$$

Intégrales doubles.

Les intégrales doubles sur le carré $[-1, 1]^2$ sont évaluées par utilisation de la « formule produit » :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j f(x_i, x_j) \quad (3.19)$$

Où les x_i, w_i sont les points et les poids de Gauss pour l'intervalle $[-1, 1]$ utilisés dans l'équation (3.16).

Intégrales doubles sur le triangle τ : $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, 1 - \xi_1 - \xi_2 \geq 0$. le changement de variables $\xi_1 = 0.25(1+u)(1-v), \xi_2 = 0.5(1+v)$ transforme le triangle τ en le carré $[-1, 1]^2$. Cela permet d'appliquer la formule produit de l'équation (3.19) :

$$\begin{aligned} \int_{\tau} f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(u, v) \frac{1}{8} (1-v) du dv \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j g(x_i, x_j) (1 - y_j) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mais cette méthode brise la symétrie du triangle en concentrant des points d'intégration près du sommet $x = 0, y = 1$, qui devient privilégié. Il existe d'autre part des formules d'intégration numérique utilisant des points (x_i^T, y_i^T) et poids w_i^T spécialement adaptés au triangle et respectant la symétrie ternaire. Les intégrations numériques prennent alors la forme :

$$\int_T f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^N w_i^T f(x_i^T, y_i^T) \quad (3.21)$$

L'annexe B donne les (x_i^T, y_i^T, w_i^T) pour quelques valeurs de N .

III.7.1.2 Choix du nombre de points de Gauss

Le nombre N de points de gauss à utiliser pour une intégration régulière sur un élément de frontière E varie selon que la frontière est une courbe ou une surface.

Il dépend entre autre, comme pour la méthode des éléments finis, de la représentation de la géométrie (variation du jacobien $J(\xi)$) et des inconnues (degré de fonction d'interpolation M_k utilisée). Dans les cas courants (fonctions d'interpolation polynomiales usuelles, élément ne présentant pas de distorsion sévère), un nombre modéré de points de Gauss (2×2 , ou 3×3 sur un carré est suffisant.

III.7.2 Calcul des intégrales élémentaires singulières

Les intégrales élémentaires sont singulières quand p est situé sur l'élément E . Les formulations intégrales classiques font intervenir des intégrations en valeur principale de Cauchy [69], dont l'évaluation numérique correcte n'est maîtrisée que de manière générale et satisfaisante que depuis peu. La démarche présentée au chapitre 2, fondée sur la régularisation directe [96], permet de n'avoir à traiter que des intégrales faiblement singulières. Cet avantage demande toutefois à être concrétisée par une méthode numérique adaptée, car les formules de quadrature gaussiennes ne s'appliquent qu'aux intégrales régulières. Nous l'a présentons ci-après pour les deux types d'intégrales élémentaires singulières apparaissent dans (3.6) :

$$I_1 = \int_{E_e} [N_h(\xi) - N_h(\eta)] T(p, q) J(\xi) d\xi \quad (3.22)$$

$$I_2 = \int_{E_e} N_h(\xi) U(p, q) J(\xi) d\xi \quad (3.23)$$

III.7.2.1 Problèmes tridimensionnels

Les intégrales élémentaires portent sur des éléments de surface. $T(p, q)$ est singulier comme $|q - p|^{-2}$. La technique d'intégration singulière repose sur l'introduction d'un système de coordonnées polaires (ρ, α) centré en η dans l'élément de référence Δ_e :

$$(\xi_1, \xi_2) = (\eta_1, \eta_2) + \rho(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

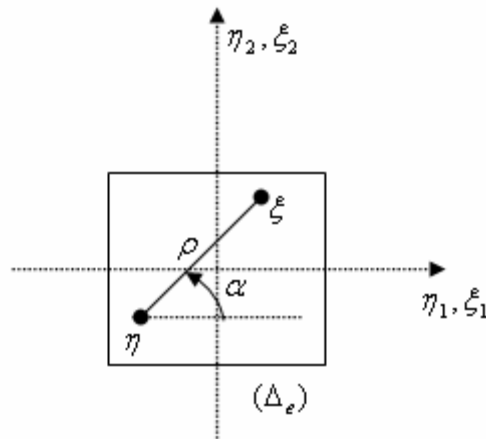


Figure 3.3 : Coordonnées polaires sur l'élément de référence

Pour le traitement d'intégrales singulières plusieurs procédures nous permettent de rendre ces intégrales sous forme complètement régulière, parmi elles, on trouve la technique de fonction de forme réduite présenté par Marc Bonnet [93], cette technique alternative repose sur l'introduction d'une fonction de forme modifiée, dite réduite, en appuyant sur le développement en série de Taylor, d'où l'apparition de ρ en facteur de $\hat{N}_i$ est le but principal de cette manipulation, ainsi on trouve une présentation différente de Sladèk [96]. Pour la régularisation d'intégrales singulières en reposant toujours sur le principe du système de coordonnées polaires.

III.7.2.2 Technique alternative de Marc bonnet

i. Fonctions de forme réduites :

En vertu de la formule de Taylor pour les polynômes à deux variables, il existe des polynômes, $N_{h,\alpha}^I(\xi;\eta)$ tel que :

$$N_h(\xi) - N_h(\eta) = (\xi_\alpha - \eta_\alpha) N_{h,\alpha}^I(\xi;\eta) \quad (3.24)$$

Le rapport du passage en coordonnées polaires donne alors :

$$\begin{aligned} N_h(\xi) - N_h(\eta) &= \rho [\cos \alpha \cdot N_{h,1}^I(\xi;\eta) + \sin \alpha \cdot N_{h,2}^I(\xi;\eta)] \\ &= \rho \hat{N}_h(\rho, \alpha; \eta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ce qui définit des fonctions de forme modifiées $\hat{N}_h(\rho, \alpha; \eta)$. Par exemple, dans le cas le plus simple des fonctions de forme linéaires (3.8) pour l'élément triangulaire [69], il est facile de montrer que les fonctions $\hat{N}$ associées s'écrivent :

$$N_1 = -(\cos \alpha + \sin \alpha) \quad N_2 = \cos \alpha \quad N_3 = \sin \alpha$$

Les fonctions de forme modifiées associées aux éléments de frontière usuels sont données en annexe B.

ii. Expression des intégrales singulières dans le système ρ, α :

Compte tenu de ce qui précède, $|q - p|$ est maintenant exprimé, à partir du paramétrage (3.2) du point courant sur l'élément, à l'aide des *fonctions de forme réduites* :

$$q - p = \sum_{i=1}^{N_e} [N_i(\xi) - N_i(\eta)] q_i = \sum_{i=1}^{N_e} \rho \hat{N}_i q_i \quad (3.26)$$

De façon à mettre ρ en facteur de $(q - p)$. En poussant le développement (3.24) à un ordre supérieur, on peut écrire que :

$$N_{h,\alpha}^I(\xi, \eta) = N_{h,\alpha}(\eta) + \frac{1}{2}(\xi_\beta - \eta_\beta) N_{h,\alpha\beta}^{II}(\xi; \eta) \quad (3.27)$$

Ce qui permet de voir que :

$$\sum_{i=1}^{N_e} \hat{N}_i q_i = a_1(\eta) \cos \alpha + a_2(\eta) \sin \alpha + \rho O(1) \quad (3.28)$$

D'autre part le caractère linéairement indépendant en tout point de la base naturelle a_1, a_2 entraîne $a_1(\eta) \cos \alpha + a_2(\eta) \sin \alpha \neq 0$ quel que soit l'angle α . On a ainsi prouvé que $r = |q - p|$ peut être réécrit sous la forme :

$$r = \rho \cdot \hat{r}(\rho, \alpha; \eta) = \rho \left| \sum_{i=1}^{N_e} \hat{N}_i q_i \right| \quad (3.29)$$

Où le facteur $\hat{r}$ est non nul en $\rho = 0$. Les solutions élémentaires U, T sont alors mises sous la forme :

$$T(p, q) = \frac{1}{\rho^2} \hat{T}(\rho, \alpha; \eta) \quad U(p, q) = \frac{1}{\rho} \hat{U}(\rho, \alpha; \eta) \quad (3.30)$$

Où U, T sont non-singulières en $\rho = 0$. Enfin l'élément différentiel devient :

$$d\xi = \rho d\rho d\alpha$$

La combinaison des équations (3.25, 3.29, 3.30), permet finalement de réécrire les intégrales singulières (3.22, 3.23) sous une forme complètement régulière dans le système ρ, α :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{E_e} M_h(\rho, \alpha; \eta) \hat{T}(\rho, \alpha; \eta) J(\xi) d\rho d\alpha \\ I_2 &= \int_{E_e} M_h(\xi) \hat{U}(\rho, \alpha; \eta) J(\xi) d\rho d\alpha \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ainsi la mise en facteur de ρ via l'introduction des fonctions de forme modifiées, permet de concrétiser l'effet régularisant du terme $N_h(\xi) - N_h(\eta)$ dans l'équation (3.22).

III.7.2.3 Technique de Sladèk

La technique de Sladèk repose sur l'introduction du développement en série de Laurent [96], pour les expressions d'intégrales singulières en ρ , comme suit :

Prenant par exemple l'intégrale :

$$I_1 = \int_{E_e} [N_h(\xi) - N_h(\eta)] T(p, q) J(\xi) d\xi,$$

On peut réécrire cette intégrale sous la forme :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_{\theta(\varepsilon, \alpha)} F(\varepsilon, \alpha) d\rho d\alpha \text{ telle que : } F(\varepsilon, \alpha) \text{ est écrite en développement en série de Laurent}$$

comme :

$$F = \frac{F_{-2}}{\rho^2} + \frac{F_{-1}}{\rho} + O(1), \text{ avec : } F_{-2}, F_{-1} \text{ sont des fonctions réelles de } \alpha, \text{ en élastostatique.}$$

Donc :

$$q_i - p_i = \left[\frac{\partial q_i}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi=\eta} (\xi_1 - \eta_1) + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} (\xi_2 - \eta_2) \right] + \left[\frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=\eta} \frac{(\xi_1 - \eta_1)^2}{2} + \frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_1 \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} (\xi_1 - \eta_1)(\xi_2 - \eta_2) + \frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=\eta} \frac{(\xi_2 - \eta_2)^2}{2} \right] + \dots \quad (3.32)$$

Après avoir introduire le système de coordonnées polaires (ρ, α) , centré en η . L'équation (3.32) devient :

$$q_i - p_i = \rho \left[\frac{\partial q_i}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi=\eta} \cos \alpha + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} \sin \alpha \right] + \rho \left[\frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=\eta} \frac{\cos^2 \alpha}{2} + \frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_1 \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} \cos \alpha \times \sin \alpha + \frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=\eta} \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right] + \dots \quad (3.33)$$

Ou tout simplement :

$$q_i - p_i = \rho A_i(\alpha) + \rho^2 B_i(\alpha) + O(\rho^3). \quad (3.34)$$

A_i et B_i sont des fonctions trigonométriques simples de α .

On définit :

$$A(\alpha) = \left\{ \sum_{k=1}^i [A_k(\alpha)]^2 \right\}^{1/2} > 0, \quad (3.35)$$

$$C(\alpha) = \sum_{k=1}^i A_k(\alpha) B_k(\alpha). \quad (3.36)$$

Le développement en série de Taylor de $r = |q - p|$ est :

$$r^n = \rho^n A^n \left(1 + n \rho \frac{C}{A^2} \right) + O(\rho^{n+2}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.37)$$

De l'équation (3.35) et (3.37) pour $n = 1$, on peut avoir les dérivées de r sous la forme :

$$r_{,i} = \frac{q_i - p_i}{r} = \frac{\rho A_i + \rho^2 B_i + O(\rho^3)}{\rho A \left(1 + \rho \frac{C}{A^2} \right) + O(\rho^3)} = \frac{A_i}{A} + \rho \left(\frac{B_i}{A} - A_i \frac{C}{A^3} \right) + O(\rho^2). \quad (3.38)$$

On peut avoir aussi l'ordre de discontinuité r^{-3} comme suit :

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\rho^3 A^3} - \frac{3C}{\rho^2 A^5} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (3.39)$$

III.7.2.4 Calcul de I_1, I_2 par points de Gauss

Le calcul numérique effectif des expressions (3.31) ci-dessus nécessite un dernier changement de variable [93]. En effet, la description de l'élément de référence Δ_e en coordonnées polaires (ρ, α) utilise une subdivision en triangles (quatre et trois triangles respectivement pour l'élément de référence carré et triangulaire), selon la figure 3.4. Chacun de ces triangles est caractérisé par la donnée de quatre paramètres $\rho_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_m$ et contient les points $\xi(\rho, \alpha)$ tels que :

$$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad 0 \leq \rho \leq \rho_0 / \cos(\alpha - \alpha_m)$$

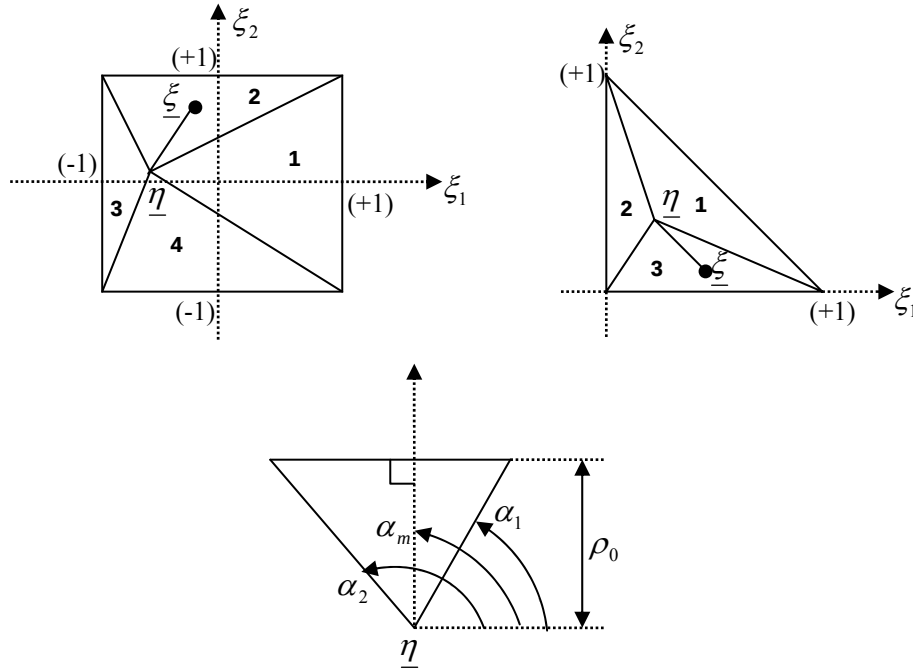


Figure 3.4 : Subdivision de l'élément de référence en triangles.

Pour le cas général où η est un point intérieur de Δ_e , on prend $\alpha_m = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (Δ_e : carré de référence) ou $\alpha_m = \pi/4, \pi, 3\pi/2$ (Δ_e : triangle de référence). Sur chacun des

triangles de la subdivision de Δ_e , on considère alors le changement de variables $(v_1, v_2) \rightarrow (\rho, \alpha)$ défini par :

$$\alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} v_2 + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \quad \rho = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)} (1 + v_1) \quad (3.40)$$

Les variables (v_1, v_2) parcourent le carré $[-1, 1]^2$ pour chaque triangle de la figure 3.4.

L'élément différentiel se transforme :

$$d\rho d\alpha = \frac{1}{4} (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)} dv_1 dv_2 \quad (3.41)$$

Cet ultime changement de variables permet ainsi de calculer les intégrales singulières I_1, I_2 à l'aide de points de Gauss sur le carré $[-1, 1]^2$.

Commentaire :

Insistons ici sur l'effet que cette procédure d'intégration singulière concrétise l'opération de régularisation des équations intégrales. Elle exploite ainsi les avantages de la méthode des points de Gauss : précision et stabilité, évite les difficultés liées aux valeurs principales de Cauchy et permet enfin une évaluation fiable et précise des intégrales singulières.

III.7.3 Traitement des intégrales de volume

En présence de sources volumiques non nulles, l'équation intégrale (2.21) comporte au seconde membre le terme [27] :

$$\int_{\Omega} b(q) U(p, q) dV_q$$

Sa conversion en intégrales de frontière est souhaitable, afin de restreindre le support géométrique de l'ensemble des calculs d'intégrales au maillage de la frontière $\partial\Omega$: cela est parfois réalisable au moyen de la méthode de réciprocité multiple. Sinon, il faut recourir à des intégrations de domaine, qui utilisent habituellement des cellules d'intégration sur lesquelles la méthode des points de Gauss est utilisée.

La méthode de réciprocité multiple proposée par Brebbia et Nowak (1989), elle repose sur la construction d'une suite $U^{(N)}(p, q), N \geq 0$ de solutions élémentaires telle que :

$$U^{(N)}(p, q) = \Delta U^{(N+1)}(p, q) \quad (3.42)$$

De terme initiale $U^{(0)}(p, q) = U(p, q)$. Pour le cas usuel $U = U^{(0)} = \frac{1}{4\pi.r}$, on trouve :

$$U^{(N)} = \frac{1}{4\pi} \frac{r^{2N-1}}{(2N)!} \quad (n \geq 0) \quad (3.43)$$

On peut alors écrire, par application itérée de la troisième formule de Green pour tout champ b suffisamment régulier :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b U dV_q &= \int_{\Omega} \Delta b U^{(1)} dV_q + \int_{\partial\Omega} (U^{(1)}_{,n} b - U^{(1)} b_{,n}) dS_q \\ &= \int_{\Omega} \Delta \Delta b U^{(2)} dV_q + \int_{\partial\Omega} (U^{(2)}_{,n} b - U^{(2)} b_{,n}) dS_q \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (U^{(2)}_{,n} \Delta b - U^{(2)} (\Delta b)_{,n}) dS_q \\ &= \int_{\Omega} \Delta^N b U^{(N)} dV_q + \sum_{p=0}^{N-1} \int_{\partial\Omega} (U^{(p+1)}_{,n} \Delta^p b - U^{(p+1)} (\Delta^p b)_{,n}) dS_q \end{aligned} \quad (3.44)$$

Pour un entier quelconque N , et où Δ^p désigne le laplacien itéré p fois (p représente un indice). Si le terme de volume résiduel :

$$\int_{\Omega} \Delta^N b U^{(N)} dV_q$$

peut être rendu suffisamment petit au-delà d'une certaine valeur de N , on a réalisé la conversion approchée de l'intégrale de domaine en intégrales de frontières.

Le problème de la conversion des intégrales de volume n'est toutefois pas complètement résolu par cette méthode. La convergence vers zéro du terme de volume résiduel, suggérée par l'apparition des inverses de $(2N+2)!$ dans $U^{(N)}$, reste à établir formellement. Ce traitement se prête surtout au cas où la distribution volumique de sources b est donnée analytiquement, car il semble illusoire de prétendre disposer de valeurs correctes de laplaciens itérés d'un champ b connu seulement par des valeurs numériques en un nombre fini de points, en raison du caractère mal posé de la dérivation numérique.

III.8 Conclusion et commentaires

On a évalué dans ce chapitre les principaux concepts de la méthode d'éléments frontières, utilisée pour résoudre les équations intégrales présentées au chapitre 2. La formulation d'éléments frontières repose sur la discrétisation des inconnues sur la frontière du domaine, et une fois les inconnues physiques : déplacements et contraintes sont évalués à

cette frontière, et par l'intermédiaire des équations de représentations intégrales, on peut évaluer ces quantités physiques dans tout le domaine d'étude.

CHAPITRE IV

CHAPITRE IV

IMPLANTATION NUMERIQUE

IV.1 Introduction

Le programme a pour but la résolution d'équations intégrales de frontière en déplacements. La frontière est celle d'un solide élastique fini ou infini, ces équations de frontière, sont exploitées pour évaluer les inconnues : déplacements, déformations, et contraintes dans tous le domaine à partir de ces valeurs en frontières, et ceci par l'intermédiaire des représentations intégrales présentées en chapitre 2. Pour les domaines élastiques infinis, on peut considérer que la frontière est celle d'une inclusion ou d'une fissure introduite dans ces domaines élastiques infinis.

Dans la présente étude, les déplacements évalués en certains points dits de collocations, sont à utiliser dans une relation empirique pour évaluer le facteur d'intensité de contraintes K_I en front d'une fissure de forme circulaire ou elliptique plane en chargement du mode I, avec un maillage par éléments triangulaires linéaires.

Le programme est évalué en MATLAB 6.5, il se compose d'un fichier principal reliant des fonctions créées spécialement pour évaluer les variables et les quantités des matrices d'intégrales élémentaires, régulières et singulières, afin de construire la matrice de rigidité globale du système. Différents outils nécessaires pour la résolution de ces dernières, sont développés.

On présente dans ce chapitre les détails des calculs numériques et la méthodologie permettant à aboutir à ce programme de calcul. La théorie décrite au chapitre 3 représente les principaux outils des éléments frontières qui nous permettent l'évaluation des intégrales régulières et singulières à la frontière, ainsi que les différentes techniques suivies pour se méfier des singularités rencontrées dans l'intégration numérique, lorsque les deux points courant q et source p coïncident (cas où le dénominateur de la solution élémentaire est nul).

Le problème de singularité dans les équations intégrales de frontière, provient de la solution élémentaire (équations (2.8) et (2.9)). L'ordre de singularité ou de discontinuité dans les solutions élémentaires est de $\frac{1}{r^3}$, provenant de la solution de Kelvin pour le vecteur contrainte décrite par l'équation (2.9).

IV.2 Démonstration

Pour la démonstration des calculs on utilise un maillage simple de dix nœuds et huit éléments triangulaires, issus d'une structure simple figure 4.1, et ceci en raison de la taille élevée de la matrice réelle.

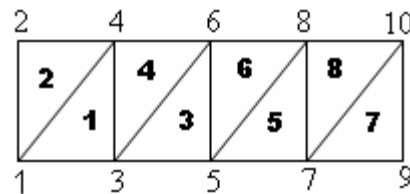


Figure 4.1 : exemple démonstratif

IV.2.1 Calcul numérique des intégrales élémentaires

La matrice élémentaire d'une intégrale est construite de trois valeurs, reliant un nœud de collocation, qui représente le point source et les trois nœuds d'un élément qui représentent le point courant, (trois valeurs en raison du type d'élément utilisé). Donc chaque nœud du système doit balayer tous les autres nœuds connectés en éléments triangulaires.

L'intégrale est dite régulière lorsque le point de collocation p , n'appartient pas à l'élément avec lequel l'intégration est faite, et sera singulière lorsque le point p appartient à l'élément avec lequel l'intégration est exécutée.

Le test du point de collocation est faite lors de l'évaluation de la distance entre ce dernier et les trois nœuds de l'élément, c. à. d. si l'un des éléments de la matrice élémentaire

est nul, on est dans ce cas en présence d'intégrale singulière, si non, on est appelé à effectuer l'intégration régulièrement.

Les intégrales élémentaires présentées dans l'équation intégrale en déplacements données par (2.21) sont celles présentées en équation (3.7) :

$$AS_i^k(e, h) = \int_{E_e} [M_h(\xi) - M_h(\eta_e)] T_i^k(p, q) J(\xi) d\xi \dots \dots AS \text{ (intégrale élémentaire singulière)}$$

$$B_i^k(e, h) = \int_{E_e} M_h(\xi) U_i^k(p, q) J(\xi) d\xi \dots \dots \dots B \text{ (intégrale élémentaire singulière ou régulière)}$$

$$AR_i^k(e, h) = \int_{E_e} M_h(\xi) T_i^k(p, q) J(\xi) d\xi \dots \dots \dots AR \text{ (intégrale élémentaire régulière)}$$

$$\hat{AR}_i^k(e) = \int_{E_e} T_i^k(p, q) J(\xi) d\xi \dots \dots \dots ARR \text{ (intégrale élémentaire régulière)}$$

La première étape suivie, pour l'évaluation numérique des intégrales élémentaires singulières, est d'introduire le changement de variables suivant :

$$(\xi_1, \xi_2) = (\eta_1, \eta_2) + \rho(\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (4.1)$$

Une fois le changement de variables introduit, on utilise la technique de Marc Bonnet décrite au chapitre 3, pour régulariser les deux intégrales singulières incluses dans les équations ci-dessus dénommées *AS* et *B* :

Les équations deviennent alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{E_e} M_h(\rho, \alpha; \eta) \hat{T}(\rho, \alpha; \eta) J(\xi) d\rho d\alpha \\ I_2 &= \int_{E_e} M_h(\xi) \hat{U}(\rho, \alpha; \eta) J(\xi) d\rho d\alpha \end{aligned} \quad (4.2)$$

$M_h(\rho, \alpha; \eta)$: est la fonction de forme réduite.

$\hat{T}(\rho, \alpha; \eta)$: La solution élémentaire en fonction de $\hat{r}$, au lieu de r (voir chapitre 3).

$J(\xi)$: Le jacobien du changement de variable.

Puis en construisant les algorithmes, permettant l'évaluation des intégrales par points de Gauss. $d\rho d\alpha$ dans les intégrales précédentes l'on obtient :

$$d\rho d\alpha = \frac{1}{4}(\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)} dv_1 dv_2 \quad (4.3)$$

(v_1, v_2) : Sont des variables qui parcourent le carré $[-1,1]^2$, sur chaque triangle (figure 4.2).

L'intégration est faite selon les techniques habituelles (points de Gauss par exemple), on prend pour ce genre d'intégrales un nombre de 7 points sur ξ_1 et ξ_2 , ce nombre est largement suffisant, puisque les fonctions de formes utilisées sont polynomiales usuelles, les éléments ne présentent pas de distorsion, notamment pour les cas de surfaces planes.

Pour les éléments triangulaires linéaires on peut intégrer les équations par deux méthodes, soit par la technique présentée par l'équation (3.20), ou celle présentée par l'équation (3.21). Dans le cas de notre programme on a choisi de travailler avec l'équation (3.21) en utilisant les points et poids associés à l'intégration sur un triangle. Les détails sont donnés en annexe B.

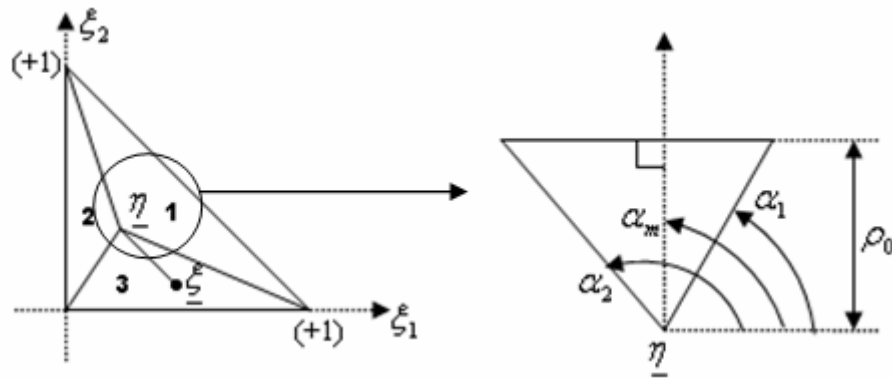


Figure 4.2 : Subdivision des éléments d'intégrales singulières

Les deux intégrales singulières I_1, I_2 , deviennent :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sum_m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} M_h(\rho, \alpha; \eta) \hat{T}(\rho, \alpha; \eta) J(\xi)(\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)} dv_1 dv_2 \\
 &= \sum_m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \frac{1}{4} M_h(x_i, x_j) \hat{T}(x_i, x_j) [J(\xi)(\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)}]_{(x_i, x_j)} \\
 I_2 &= \sum_m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} M_h(\xi) \hat{U}(\rho, \alpha; \eta) J(\xi)(\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)} dv_1 dv_2 \\
 &= \sum_m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \frac{1}{4} M_h(x_i, x_j) U(x_i, x_j) [J(\xi)(\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)}]_{(x_i, x_j)} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

m : est un nombre qui varie selon la position du point de collocation p sur l'élément de référence Δ_e .

$m = 1$: Le point de collocation est l'un des nœuds de l'élément.

$m = 2$: Le point de collocation est sur l'un des segments de l'élément.

$m = 3$: Le point de collocation est intérieur dans l'élément triangulaire.

x_i, x_j : Points de Gauss.

w_i, w_j : Poids de Gauss.

$n = 7$: Nombre de points et poids choisis pour l'intégration numérique.

L'évaluation des intégrales régulières est simple par rapport à l'intégration singulière. L'intégration est faite directement sur l'élément de référence Δ_e : l'antécédent de l'élément physique et les coordonnées ξ_1, ξ_2 sont remplacées directement par les points de Gauss dans "l'appel à l'intégration numérique".

Après la construction des algorithmes concrétisant ces quantités numériques, on fait le test principal dans le programme, ce test vérifie l'appartenance du point de collocation (source). Donc si le point de collocation appartient à l'élément (figure 4.3), nous sommes appelé à effectuer une intégrale singulière.

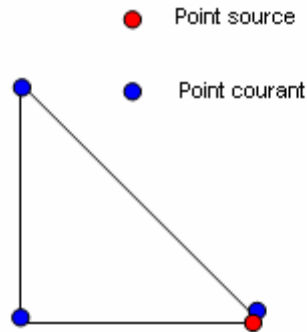


Figure 4.3 : description d'un élément singulier

Dans la figure 4.3, le point source est confondu avec l'un des nœuds de l'élément (points courant), cette intégrale, est illustrée sur la matrice suivante :

```
dist1 =
    3.0000    4.1231    3.1623
    3.1623    4.0000    3.0000
    2.0000    3.1623    2.2361
    2.2361    3.0000    2.0000
    1.0000    2.2361    1.4142
    1.4142    2.0000    1.0000
         0     1.4142    1.0000
    1.0000    1.0000         0
    1.0000    1.0000    1.4142
    1.4142         0     1.0000
```

Les trois lignes où l'une des distances est nulle, démontrent le cas des intégrales singulières. Donc pour les évaluer on doit annuler les autres valeurs du même élément, et de représenter ces dernières dans un autre système de coordonnées polaires.

Les autres lignes où les trois valeurs sont non nulles, représentent les intégrales élémentaires régulières, et cela en raison de trois distances non nulles entre un point source et les trois nœuds qui représentent le point courant (figure 4.4)

- Exemple d’une intégrale élémentaire singulière.

```

k2 =
1.0e-007 *
    0    0    0
    0    0    0
    0    0    0
    0    0    0
    0    0    0
    0.0700    0.1018   -0.0664
    0.1400    0.1018    0.1328
    0         0         0
   -0.1400    0.1018   -0.2656
    0         0         0

```

On remarque que toutes les intégrales élémentaires régulières sont affectées par une valeur nulle, et il nous reste que trois intégrales élémentaires singulières correspondant aux trois points du triangle (point courant q) où un de ces nœuds est confondue avec le point source p .

- Exemple d’une intégrale élémentaire régulière :

```

1.0e-005 *
    0.2112    0.1537    0.2004
    0.2004    0.1584    0.2112
    0.3168    0.2004    0.2834
    0.2834    0.2112    0.3168
    0.6337    0.2834    0.4481
    0.4481    0.3168    0.6337
    0         0         0
    0         0         0
    0.6337    0.6337    0.4481
    0         0         0

```

On remarque que toutes les valeurs correspondant aux matrices élémentaires singulières sont affectées par des zéros (résultat du test), et les autres correspondant aux intégrales régulières sont des valeurs non nulles.

Cette technique d’annulation des valeurs d’intégrales est utilisée pour pouvoir séparer les deux types d’intégrales singulières et régulières.

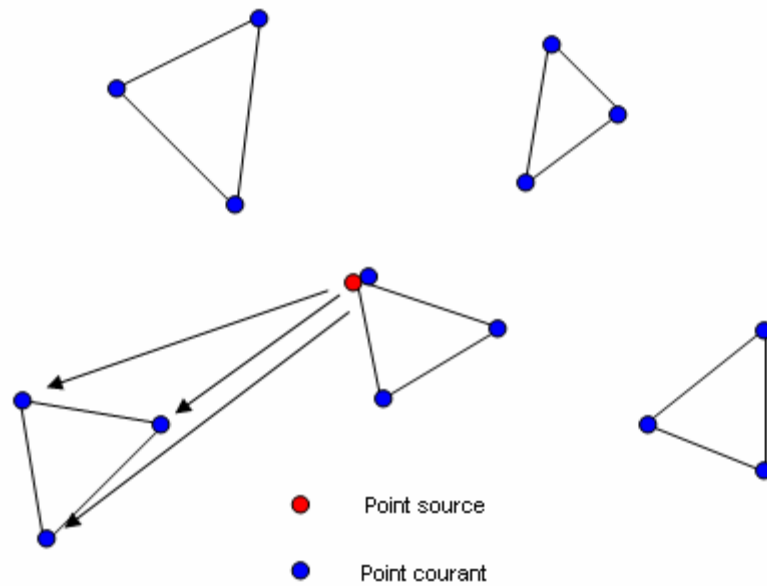


Figure 4.4 : schéma descriptif des éléments réguliers

IV.2.2 Assemblage d'intégrales élémentaires

L'assemblage d'intégrales élémentaires, peut être réalisé par plusieurs algorithmes, connus dans la méthode des éléments finis sous le nom d'algorithmes d'assemblage. Les intégrales précédentes sont assemblées séparément, par exemple : l'intégrale singulière AS connue dans le programme de calcul sous le nom de $k1$ et assemblée dans la matrice globale appelée $kk1$:

- Exemple de $k1$:

```

k1 =

1.0e-003 *

      0      0      0
      0      0      0
      0      0      0
      0      0      0
      0      0      0
    -0.2261  -0.2742   0.2860
     0.4522  -0.5484  -0.5720
      0      0      0
     0.4522  -0.5484   0.5720
      0      0      0

```

– Assemblage de $k1$: $kk1 =$

0.0009	-0.0006	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0	0	0
-0.0002	0.0003	0	-0.0003	0	0	0	0	0	0
0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0
0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003	0	0	0	0
0	0	0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011	0	0
0	0	0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003	0	0
0	0	0	0	0.0005	0	-0.0001	0.0006	-0.0005	-0.0006
0	0	0	0	0.0002	0.0006	-0.0003	-0.0003	0	0
0	0	0	0	0	0	0.0005	0	-0.0005	0.0006
0	0	0	0	0	0	-0.0002	0	-0.0003	0.0003

 $kk1 =$

0.0009	-0.0006	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0	0	0
-0.0002	0.0003	0	-0.0003	0	0	0	0	0	0
0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0
0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003	0	0	0	0
0	0	0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011	0	0
0	0	0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003	0	0
0	0	0	0	0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011
0	0	0	0	0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003
0	0	0	0	0	0	0.0005	0	-0.0005	0.0006
0	0	0	0	0	0	0.0002	0.0006	-0.0003	-0.0003

On remarque que la matrice singulière $kk1$ est semblable à celle des éléments finis (matrice bande), sauf que celle-ci n'est pas symétrique. La raison est que l'intégrale singulière est effectuée seulement lorsque le point source et le point courant sont dans un même élément, c'est pour cela que les valeurs qui sont loin de la bande sont nulles.

- Exemple d'assemblage d'intégrales régulières :

Prenant par exemple AR , ces dernières sont connues sous le nom de $k3$. Leur matrice assemblée est dénommée $kk3$:

```

k3 =

1.0e-006 *

    0         0         0
    0.1069    0.0267    0.0356
    0.1069    0.0338    0.0478
    0.0756    0.0356    0.0535
    0.0535    0.0478    0.0756
    0.0478    0.0535    0.1069
    0.0356    0.0756    0.1069
    0         0         0
    0.0267    0.1069    0.0756
    0         0         0

```

- Assemblage de $k3$:

```

kk3 =

1.0e-006 *

    0         0    0.2139    0.0756    0.1604    0.1435    0.0713    0.0676    0.0267    0.0259
    0.1069         0    0.2268    0.2139    0.1435    0.1604    0.0676    0.0713    0.0259    0.0267
    0.1069    0.0756         0    0.1069    0.2139    0.0756    0.1069    0.0956    0.0356    0.0338
    0         0    0.1069         0    0.2268    0.2139    0.0956    0.1069    0.0338    0.0356
    0.1069    0.0478    0.2139    0.2268         0    0.1069    0.1069         0    0.0535    0.0478
    0.0956    0.0535    0.0756    0.2139    0.1069         0    0.1512    0.1069    0.0478    0.0535
    0.0713    0.0338    0.1604    0.1435    0.2139    0.2268         0    0.1069         0         0
    0.0676    0.0356    0.1435    0.1604    0.0756    0.2139    0.1069         0    0.0756    0.1069
    0.0535    0.0259    0.1069    0.1014    0.1604    0.1435    0.1069    0.1512         0         0
    0.0519    0.0267    0.1014    0.1069    0.1435    0.1604    0.0756    0.2139         0         0

```

```

kk3 =

1.0e-006 *

    0         0    0.2139    0.0756    0.1604    0.1435    0.1069    0.1014    0.0267    0.0519
    0.1069         0    0.2268    0.2139    0.1435    0.1604    0.1014    0.1069    0.0259    0.0535
    0.1069    0.0756         0    0.1069    0.2139    0.0756    0.1604    0.1435    0.0356    0.0676
    0         0    0.1069         0    0.2268    0.2139    0.1435    0.1604    0.0338    0.0713
    0.1069    0.0478    0.2139    0.2268         0    0.1069    0.2139    0.0756    0.0535    0.0956
    0.0956    0.0535    0.0756    0.2139    0.1069         0    0.2268    0.2139    0.0478    0.1069
    0.0713    0.0338    0.1604    0.1435    0.2139    0.2268         0    0.1069         0         0
    0.0676    0.0356    0.1435    0.1604    0.0756    0.2139    0.1069         0    0.0756    0.1069
    0.0535    0.0259    0.1069    0.1014    0.1604    0.1435    0.2139    0.2268         0    0.1069
    0.0519    0.0267    0.1014    0.1069    0.1435    0.1604    0.0756    0.2139         0         0

```

Contrairement aux intégrales singulières, les intégrales régulières sont calculées entre des points sources et courants qui sont loin l'un et l'autre, pour cela la matrice assemblée est quasiment pleine en triangles supérieur et inférieur. Les éléments de la bande sont nuls puisque ils correspondent aux éléments singuliers.

La matrice de rigidité finale n'a pas une forme unique, mais dépend du type du problème à résoudre et des conditions aux limites à introduire.

IV.2.3 Incorporation des conditions aux limites

Les conditions aux limites rencontrées fréquemment sont mixtes d'où une partie des déplacements nodaux est connue, avec une autre partie de contraintes due au chargement est connue. On peut se placer aussi dans le cas où tous les valeurs nodales du déplacement sont imposés, donc on recherche les contraintes (problème de Neumann), ou bien le cas contraire où les valeurs de contraintes sont imposées, et on recherche cette fois ci les déplacements (problème de Dirichlet).

Dans notre cas on évalue les inconnues nodales pour une fissure plane dans un massif infini sous chargement de traction unitaire, donc on connaît toutes les charges imposées aux nœuds de cette surface en appliquant les conditions aux limites du problème (chapitre 5).

Après avoir introduit les conditions aux limites du problème on peut obtenir un système d'équations linéaire :

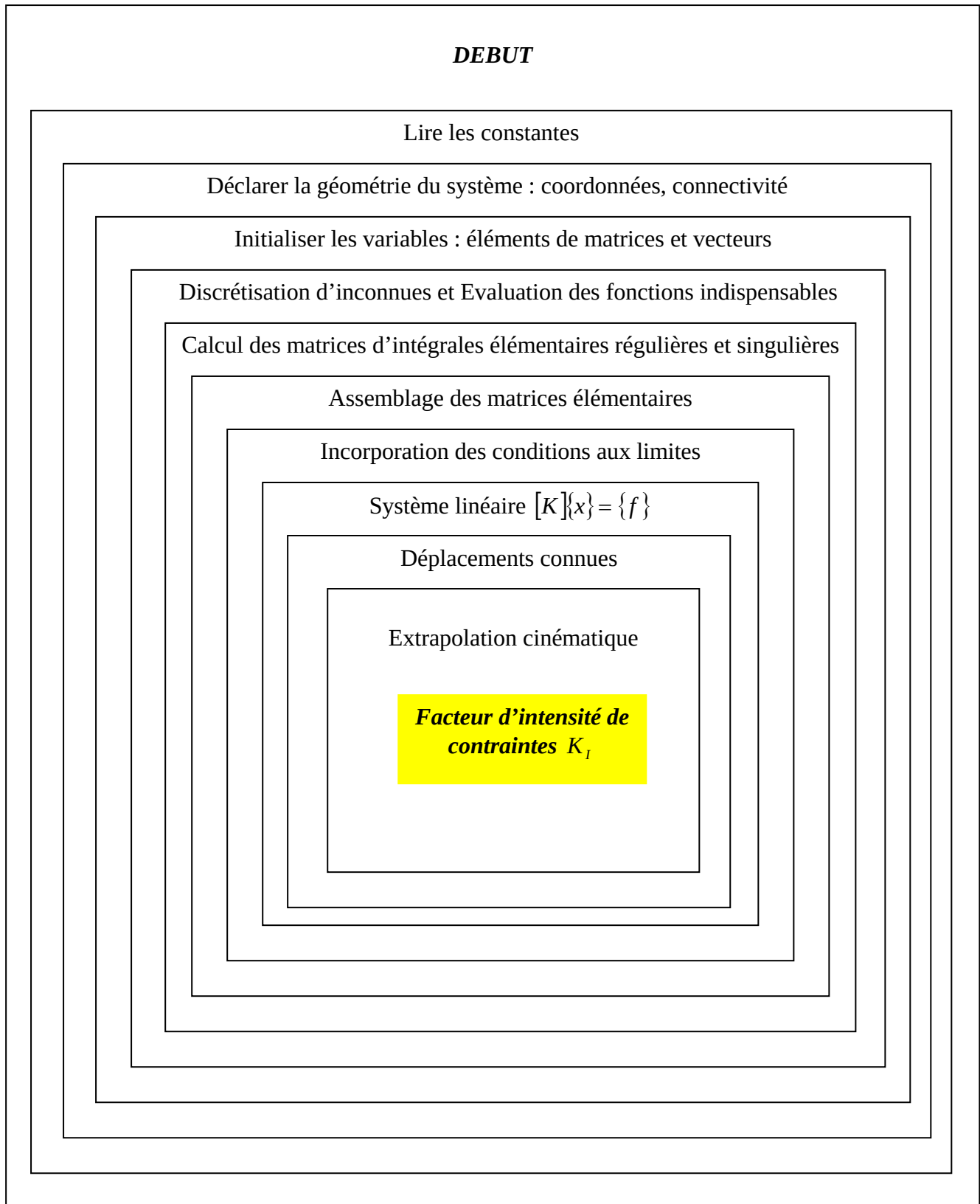
$$[K]\{x\} = \{f\}$$

La matrice $[K]$ finale, est généralement pleine, non symétrique. Ce fait constitue une différence notable par rapport à la méthode d'éléments finis. Cette dernière conduit toujours à une matrice de rigidité bande et symétrique.

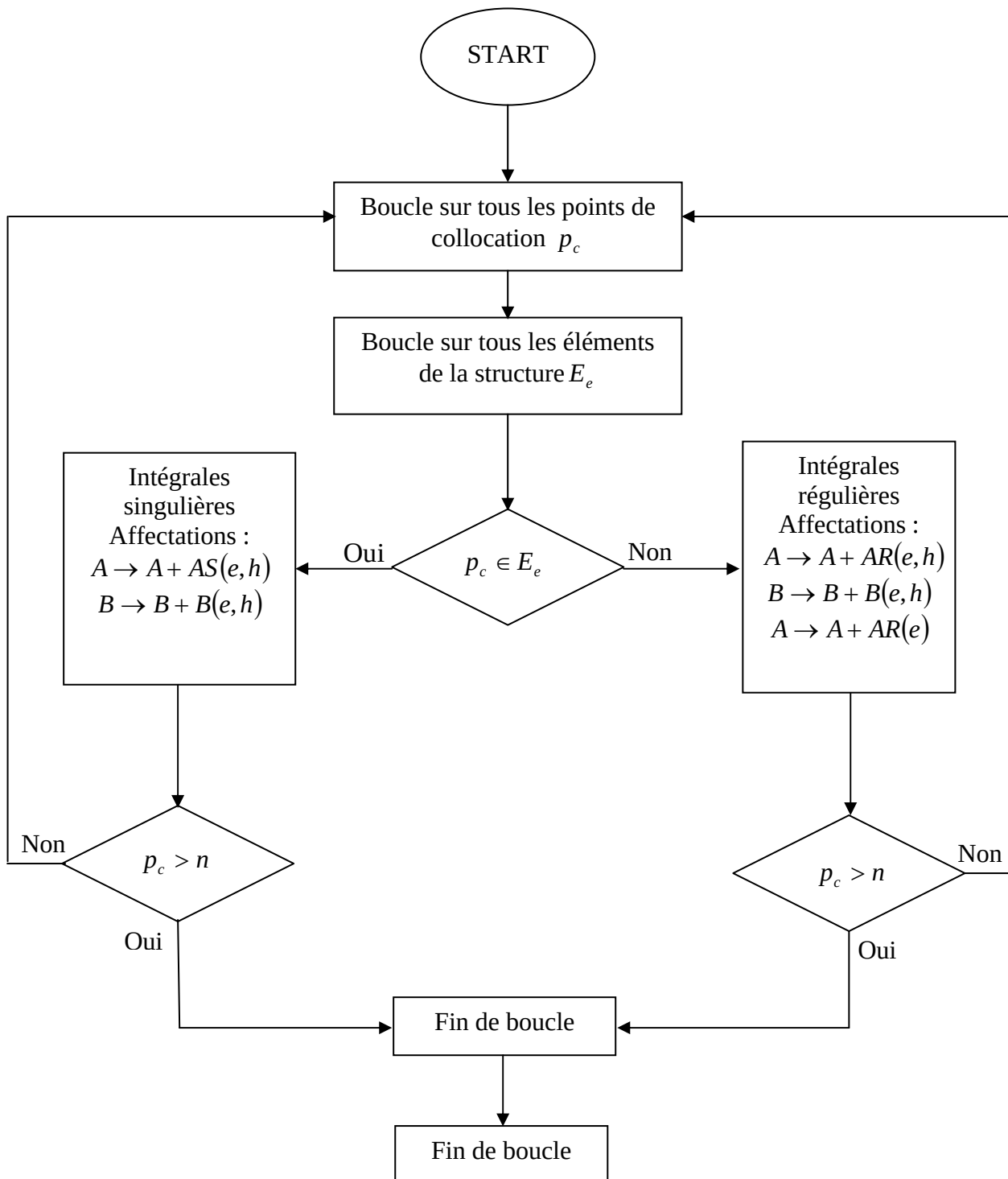
Ce système est classiquement résolu par élimination de Gauss, La matrice $[K]$ est transformée en une matrice triangulaire supérieure, ce qui permet ensuite de calculer $\{x\}$, par remontée. Des méthodes itératives peuvent être également utilisées.

Dans notre programme de calcul on n'a pas utilisé les méthodes précédemment décrites pour résoudre le système. Puisque en Matlab, la résolution de ce genre de systèmes est proprement faite, et ceci nous fait gagner un énormément de temps.

IV.3 Etapes essentielles de calculs numériques



IV.4 Organigramme de l'opération de l'assemblage



p : Point de collocation.

n : Nombre de points de collocation.

IV.5 Algorithme d'assemblage

La construction des matrices $[A]$ et $[B]$, appelée opération d'assemblage, on procède schématiquement comme suit :

Boucle sur les N_c points de collocation p_c .

Pour chaque p_c , boucle sur les N_E éléments : $1 \leq e \leq N_E$

Test : $e \in I(p_c)$?

- *Si oui : intégrations singulières sur E_e , puis affectation :*

$$A_{cn} \leftarrow A_{cn} + AS(e, h) \quad B_{cn} \leftarrow B_{cn} + B(e, h) \quad n = n(e, h)$$

- *Si non, intégrations régulières sur E_e , puis affectation :*

$$A_{bn} \leftarrow A_{bn} + AR(e, h) \quad B_{cn} \leftarrow B_{cn} + B(e, h) \quad n = n(e, h)$$

Et

$$A_{cc} \leftarrow A_{cc} + \hat{AR}(e)$$

Fin de boucle

Fin de boucle

Et le nombre d'intégrales à calculer est proportionnel à $N_E \times N_c$, N_c étant lui-même proportionnel à N_e .

IV.6 Conclusion et commentaires

Ce chapitre traduit le modèle numérique conçu pour l'évaluation de l'équation intégrale en déplacements (2.9), pour le but d'évaluer les déplacements nodaux, afin d'estimer le facteur d'intensité de contraintes en mode I, sous un chargement symétrique unitaire. le facteur d'intensité de contraintes en mode I, sous un chargement symétrique unitaire.

ILes principaux inconvénients de cette méthode : le calcul des intégrales à la frontière,

spécifiquement les intégrales élémentaires singulières qui représente le problème majeur dans le traitement numérique.

CHAPITRE V

CHAPITRE V

APPLICATIONS

V.1 Introduction

Les grandes structures, dont les dégâts dûs à la rupture causeraient des pertes économiques considérables et, le plus susceptible, est la perte de beaucoup de vies humaines, ces structures doivent être dimensionnées d'une manière à limiter les problèmes de rupture en premier lieu. Les exemples de telles structures sont : les bateaux, les avions, les ponts, les canalisations, les réservoirs de stockage, les navires de pression et les enveloppes de moteurs de fusées. Bien que le nombre de problèmes soit bas relativement au nombre de structures en fonction, le nombre absolu est toujours trop élevé. L'échec de service d'un navire simple d'avion ou de réacteur est déjà une catastrophe importante. Les pertes financières dues à l'échec d'un réservoir de stockage, ou dues au temps de panne d'une centrale après un échec important, sont exprimées en millions de dollars. Les critères classiques de conception de technologie sont insatisfaisants pour rapporter des démarches préventives de rupture, ceci est l'expérience triste de beaucoup d'accidents mortels. Des critères "d'empêchement" de rupture peuvent être dérivés des principes de la mécanique de la rupture. Plus d'amélioration dans les méthodologies de la mécanique de la rupture sont certainement nécessaires. Pourtant les concepts de la mécanique de la rupture de nos jours, correctement appliqués, fournissent quelques moyens pouvant réaliser la sûreté contre la rupture et la surveillance de la rupture des structures coûteuses. Pour cela nous avons traités des applications ayant rapport avec les fissures dans les structures.

On présente dans la première application le cas d'une fissure elliptique dans un massif élastique infini, tandis que la deuxième application concerne le cas d'une fissure circulaire dans une structure élastique infinie.

V.2 Application I

V.2.1 Fissure elliptique plane

On évalue dans la première application, le facteur d'intensité de contraintes en mode d'ouverture, K_I . Cette fissure est de forme elliptique incorporée dans un massif infini élastique et isotrope, figure 5.1. La fissure est plane sous un chargement de traction unitaire uniforme, et symétrique par rapport au plan de la fissure, ce qui nous permet de résoudre l'équation intégrale de frontière en déplacements (équation 2.21) sur une seule lèvre de la fissure.

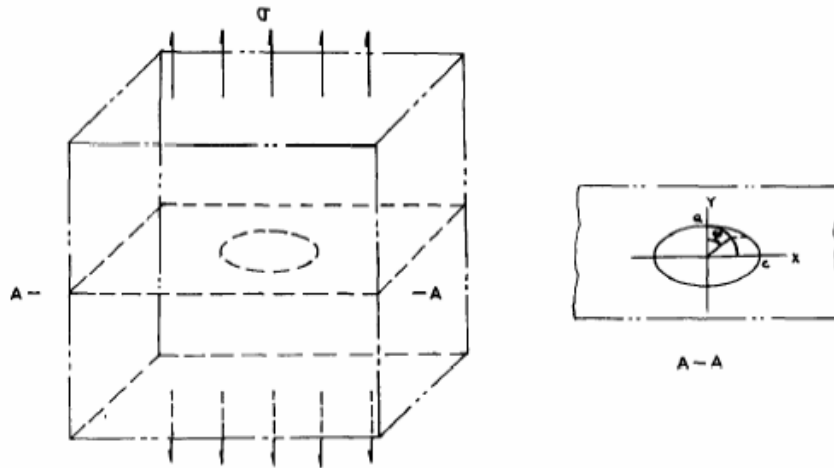


Figure 5.1 : Fissure elliptique dans un solide infini

Notant $u^\pm, t^\pm$ les déplacements et contraintes élastiques sur les deux lèvres $\Gamma^\pm$. Ce problème de la fissure chargée en milieu infini correspond aux conditions suivantes sur $\Gamma^\pm$ (efforts exercés sur les faces de la fissure et continuité de déplacements et du vecteur contrainte à travers $\tilde{\Gamma}$).

$$\begin{cases} (t^+.n) = F^+ & (\text{Sur } \Gamma^+) \\ (t^-.n) = F^- & (\text{Sur } \Gamma^-) \end{cases} \quad \begin{cases} u^+ = u^- \\ (t.n)^+ = -(t.n)^- \end{cases} \quad \text{Sur } \tilde{\Gamma} \quad (5.1)$$

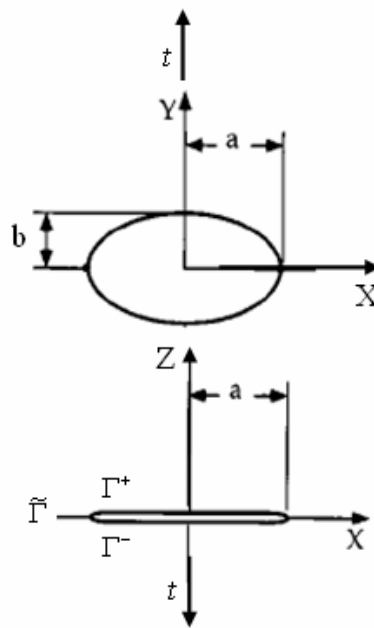


Figure 5.2 : Éléments descriptifs et conditions aux limites

V.2.2 Evaluation du facteur d'intensité de contraintes

Le calcul du facteur d'intensité de contrainte " FIC " est également compliqué parce que c'est une fonction de la position le long du front de fissure, de la taille de fissure ainsi que de sa forme, du type de chargement, et de la géométrie de la structure.

Des solutions tridimensionnelles de " FIC " peuvent être calculées en utilisant une technique d'extrapolation cinématique de déplacements [62], cela implique la corrélation des déplacements d'éléments de frontière sur la surface de la fissure avec celles des valeurs théoriques de la formule d'Irwin. Cette technique d'extrapolation est illustrée sur le schéma présenté par la figure 5.3. Les résultats de " FIC " sont calculés à deux endroits éloignés du bout de fissure en utilisant les équations (5.2) et (5.3). Ces résultats sont ensuite extrapolés au bout de fissure en utilisant l'équation (5.4). Donc par l'utilisation de cette technique on peut avoir le facteur d'intensité de contrainte K_I à n'importe quel point du front.

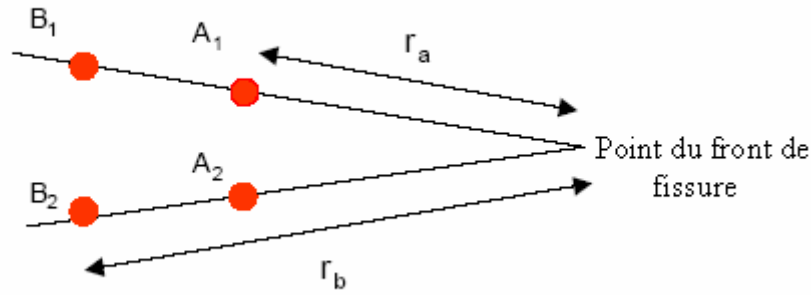


Figure 5.3 : Description de la technique d'extrapolation cinématique

$$K_{IA} = \frac{2\mu}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r_a}} (\delta_{A1} - \delta_{A2}) \quad (5.2)$$

$$K_{IB} = \frac{2\mu}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r_b}} (\delta_{B1} - \delta_{B2}) \quad (5.3)$$

$$K_I = 2K_{IA} - K_{IB} \quad (5.4)$$

Le facteur d'intensité de contrainte exacte K_I pour ce cas (fissure elliptique) est décrit dans la littérature spécialisée comme suit [1] :

$$K_I = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi b}}{E(k)} \Pi^{1/4}(\theta) \quad \text{Au tableau c'est : } K_{I0} \quad (5.5)$$

D'où :

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)} d\theta : \text{L'intégrale elliptique de second genre.}$$

K_I : Est le facteur d'intensité de contrainte en mode I.

σ_0 : Contrainte uniforme unitaire.

θ : L'angle polaire du point M .

$$\Pi = [\sin^2(\theta) + \alpha^2 \cos^2(\theta)]$$

$$\alpha = b/a, \quad b < a. \quad k = \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Le facteur d'intensité adimensionnel est de la forme suivante :

$$K_I / K_{I0} = \bar{K}_I = \frac{K_I(BEM)E(k)}{\sqrt{\pi b} \Pi^{1/4}(\theta)} \quad (5.6)$$

La discrétisation est faite en éléments triangulaires linéaires (maillage manuel de 151 nœuds et 256 éléments). L'application est réalisée pour différents rapports de b/a :

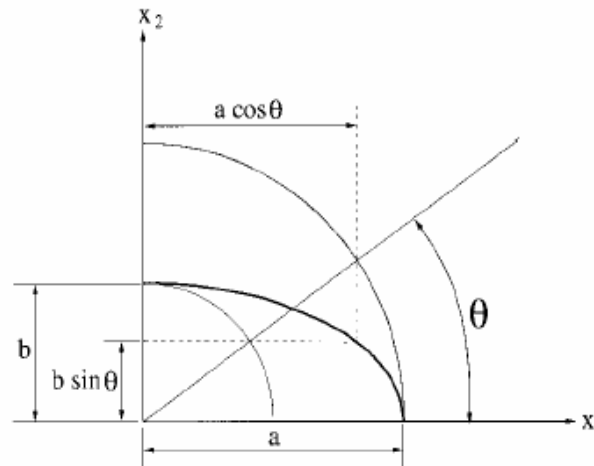


Figure 5.4 : Définitions géométriques pour une fissure elliptique

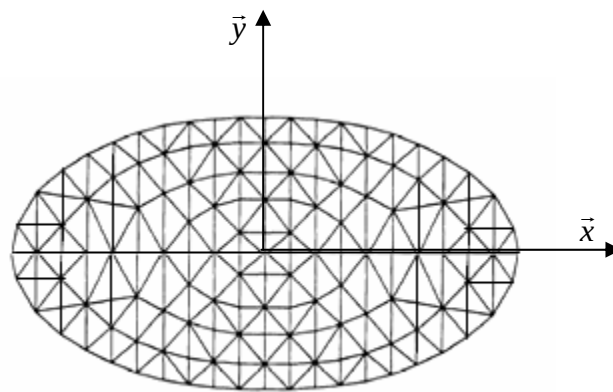


Figure 5.5 : Exemple du modèle de maillage manuel de la fissure elliptique

V.2.3 Premier cas : $b/a = 0.2$, telle que : $b = 4\text{mm}$ et $a = 20\text{mm}$.

Déplacements nodaux : (u_3 en mm , valeur $\times 10^{-3}$).

1	0.2624	36	0.1963	71	0.1943	106	0.1943
2	0.1453	37	0.2740	72	0.1881	107	0.1881
3	0.1962	38	0.1990	73	0.1660	108	0.1660
4	0.1451	39	0.2491	74	0.2014	109	0.2014
5	0.1935	40	0.1804	75	0.2052	110	0.2052
6	0.0949	41	0.2638	76	0.1345	111	0.1345
7	0.2208	42	0.1945	77	0.1167	112	0.1167
8	0.1530	43	0.1882	78	0.1498	113	0.1498
9	0.1477	44	0.1650	79	0.1442	114	0.1442
10	0.2281	45	0.2015	80	0.1674	115	0.1674
11	0.1671	46	0.2054	81	0.2011	116	0.2011
12	0.2369	47	0.1345	82	0.1606	117	0.1606
13	0.2092	48	0.1165	83	0.2265	118	0.2265
14	0.3523	49	0.1496	84	0.1587	119	0.1587
15	0.2819	50	0.1442	85	0.2259	120	0.2259
16	0.1989	51	0.1676	86	0.1588	121	0.1588
17	0.2351	52	0.2022	87	0.2005	122	0.2005
18	0.1632	53	0.1653	88	0.1688	123	0.1688
19	0.1968	54	0.2326	89	0.1633	124	0.1633
20	0.1505	55	0.1632	90	0.1588	125	0.1588
21	0.1712	56	0.2269	91	0.1282	126	0.1282
22	0.2369	57	0.1587	92	0.1690	127	0.1690
23	0.1411	58	0.2006	93	0.1399	128	0.1399
24	0.2427	59	0.1692	94	0.1428	129	0.1428
25	0.5344	60	0.1637	95	0.3027	130	0.3027
26	0.2603	61	0.1590	96	0.2060	131	0.2060
27	0.2143	62	0.1298	97	0.0684	132	0.0684
28	0.2187	63	0.1744	98	0.0853	133	0.0853
29	0.7754	64	0.1399	99	0.1257	134	0.1257
30	0.2454	65	0.1426	100	0.1299	135	0.1299
31	0.3982	66	0.3015	101	0.1595	136	0.1595
32	0.2082	67	0.1965	102	0.1624	137	0.1624
33	0.2130	68	0.0683	103	0.1786	138	0.1786
34	0.1703	69	0.0853	104	0.1504	139	0.1504
35	0.1866	70	0.1259	105	0.1930	140	0.1930
			141	0.1589			
			142	0.1589			
			143	0.1922			
			144	0.1503			
			145	0.1802			
			146	0.1649			
			147	0.1664			
			148	0.1444			
			149	0.1609			
			150	0.1244			
			151	0.1029			

1. **Tableau 5.1** : Facteur d'intensité de contrainte: $K_I \left(\frac{daN}{mm^2} \sqrt{mm} \right)$

Angle (degré°)	K_{I0} : Exact	K_I : X-FEM	K_I : FEM	K_I : BEM
0	1.4079	1.4232	1.4352	1.3328
10	1.6733	1.7088	1.6832	1.6261
20	1.9668	1.9880	1.9401	1.9358
30	2.2902	2.2770	2.2075	2.2774
40	2.5593	2.5213	2.5096	2.5852
50	2.7748	2.7342	2.7534	2.8314
60	2.9396	2.9225	2.9161	3.0022
70	3.0560	3.0135	3.0227	3.1248
80	3.1253	3.0921	3.0678	3.1989
90	3.1484	3.1538	3.0810	3.2227

2. **Tableau 5.2** : Facteur d'intensité de contrainte adimensionnel : K_I / K_{I0}

Angle (degré °)	K_I / K_{I0} : Exact	K_I / K_{I0} :X-FEM et l'erreur en %	K_I / K_{I0} : FEM et l'erreur en %	K_I / K_{I0} : BEM (présente étude) et l'erreur en %
0	1.00	1.0109 1.09 %	1.0194 1.94 %	0.9467 5.33 %
10	1.00	1.0212 2.12 %	1.0059 0.59 %	0.9718 2.82 %
20	1.00	1.0108 1.08 %	0.9864 1.36 %	0.9842 1.58 %
30	1.00	0.9942 0.58 %	0.9639 3.61 %	0.9944 0.56 %
40	1.00	0.9852 1.48 %	0.9806 1.94 %	1.0101 1.01 %
50	1.00	0.9854 1.46 %	0.9923 0.77 %	1.0204 2.04 %
60	1.00	0.9942 0.58 %	0.9920 0.80 %	1.0213 2.13 %
70	1.00	0.9861 1.39 %	0.9816 1.84 %	1.0225 2.25 %
80	1.00	0.9894 1.06 %	0.9786 2.14 %	1.0235 2.35 %
90	1.00	1.0017 0.17 %	0.9891 1.09 %	1.0236 2.36 %

3. Représentation graphique

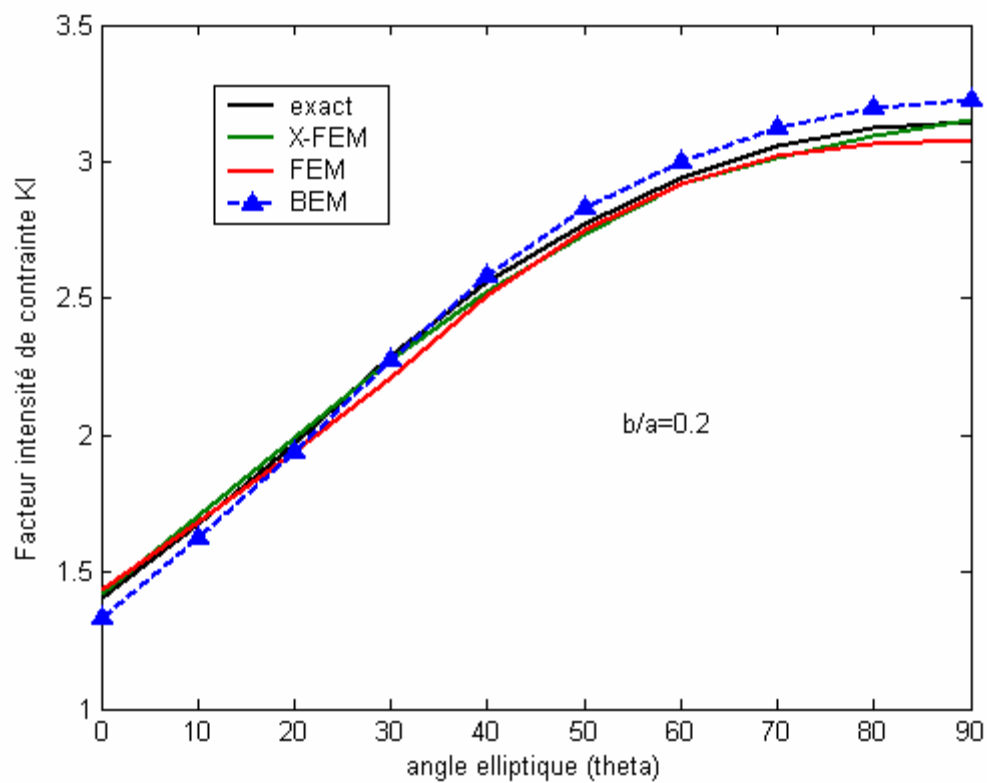


Figure 5.6 : Variation de K_I en fonction d'angle elliptique θ , ($b/a = 0.2$)

Les résultats comparatifs présentés dans les tableaux et figures pour les trois cas de cette application sont ceux des références suivantes :

X-FEM : [40], [49].

FEM : [8], [10].

V.2.4 Deuxième cas : $b/a = 0.5$, telle que : $b = 10\text{mm}$ et $a = 20\text{mm}$.

Déplacements nodaux : (u_3 en mm , valeur $\times 10^{-3}$).

1	0.2770	36	0.2333	71	0.1236	106	0.2295
2	0.1945	37	0.2724	72	0.1516	107	0.2337
3	0.1662	38	0.2278	73	0.1453	108	0.2093
4	0.1941	39	0.2746	74	0.1561	109	0.2326
5	0.1648	40	0.2258	75	0.1491	110	0.2478
6	0.1296	41	0.2667	76	0.1656	111	0.1661
7	0.2082	42	0.2307	77	0.1537	112	0.1482
8	0.2064	43	0.2345	78	0.1544	113	0.1865
9	0.1869	44	0.2062	79	0.1661	114	0.1810
10	0.2610	45	0.2333	80	0.1500	115	0.1800
11	0.2041	46	0.2489	81	0.1581	116	0.2138
12	0.2885	47	0.1660	82	0.1492	117	0.1782
13	0.2522	48	0.1479	83	0.1594	118	0.2188
14	0.3261	49	0.1861	84	0.1350	119	0.1811
15	0.3043	50	0.1819	85	0.1660	120	0.2196
16	0.2367	51	0.1816	86	0.1270	121	0.1793
17	0.2833	52	0.2165	87	0.1641	122	0.2157
18	0.2068	53	0.1816	88	0.2706	123	0.1817
19	0.2679	54	0.2214	89	0.3036	124	0.1855
20	0.1991	55	0.1842	90	0.2693	125	0.1973
21	0.2321	56	0.2219	91	0.2525	126	0.1641
22	0.2489	57	0.1797	92	0.2510	127	0.2083
23	0.1539	58	0.2165	93	0.2883	128	0.1520
24	0.2600	59	0.1835	94	0.2480	129	0.1613
25	0.3250	60	0.1872	95	0.2889	130	0.2413
26	0.2725	61	0.1982	96	0.2472	131	0.2103
27	0.2566	62	0.1685	97	0.2520	132	0.1124
28	0.2717	63	0.2078	98	0.2011	133	0.1068
29	0.3158	64	0.1519	99	0.2311	134	0.1367
30	0.2633	65	0.1608	100	0.2297	135	0.1233
31	0.2961	66	0.2278	101	0.2639	136	0.1512
32	0.2519	67	0.2050	102	0.2234	137	0.1446
33	0.2499	68	0.1123	103	0.2669	138	0.1550
34	0.2007	69	0.1070	104	0.2247	139	0.1476
35	0.2318	70	0.1373	105	0.2657	140	0.1640
			141	0.1523			
			142	0.1531			
			143	0.1651			
			144	0.1493			
			145	0.1576			
			146	0.1487			
			147	0.1587			
			148	0.1336			
			149	0.1588			
			150	0.1272			
			151	0.1604			

1. **Tableau 5.3** : Facteur d'intensité de contrainte: $K_I \left(\frac{daN}{mm^2} \sqrt{mm} \right)$

Angle (degré°)	K_{I0} : Exact	K_I : X-FEM	K_I : FEM	K_I : BEM
0	3.2095	3.2095	3.2718	3.0982
10	3.2798	3.2567	3.2992	3.1847
20	3.4602	3.4300	3.4131	3.3841
30	3.6915	3.9384	3.5582	3.6380
40	3.9263	3.719	3.8501	3.8870
50	4.1370	4.1557	4.1051	4.1370
60	4.3093	4.2745	4.2748	4.3517
70	4.4360	4.3952	4.3876	4.4804
80	4.5131	4.4674	4.4301	4.5673
90	4.5390	4.4983	4.4419	4.6021

2. **Tableau 5.4** : Facteur d'intensité de contrainte adimensionnel : K_I / K_{I0}

Angle (degré °)	K_I / K_{I0} : Exact	K_I / K_{I0} : X-FEM et l'erreur en %	K_I / K_{I0} : FEM et l'erreur en %	K_I / K_{I0} : BEM (présente étude) et l'erreur en %
0	1.0000	1.0000 0.00 %	1.0194 1.94 %	0.9653 3.47 %
10	1.0000	0.9930 0.70 %	1.0059 0.59 %	0.9710 2.90 %
20	1.0000	0.9913 0.87 %	0.9864 1.36 %	0.9780 2.20 %
30	1.0000	1.0074 0.74 %	0.9639 3.61 %	0.9855 1.45 %
40	1.0000	1.0031 0.31 %	0.9806 1.94 %	0.9900 1.00 %
50	1.0000	1.0045 0.45 %	0.9923 0.77 %	1.0000 0.00 %
60	1.0000	0.9919 0.81 %	0.9920 0.80 %	1.0098 0.98 %
70	1.0000	0.9908 0.92 %	0.9891 1.09 %	1.0100 1.00 %
80	1.0000	0.9899 1.01 %	0.9816 1.84 %	1.0120 1.20 %
90	1.0000	0.9910 0.90 %	0.9786 2.04 %	1.0139 1.39 %

3. Représentation graphique

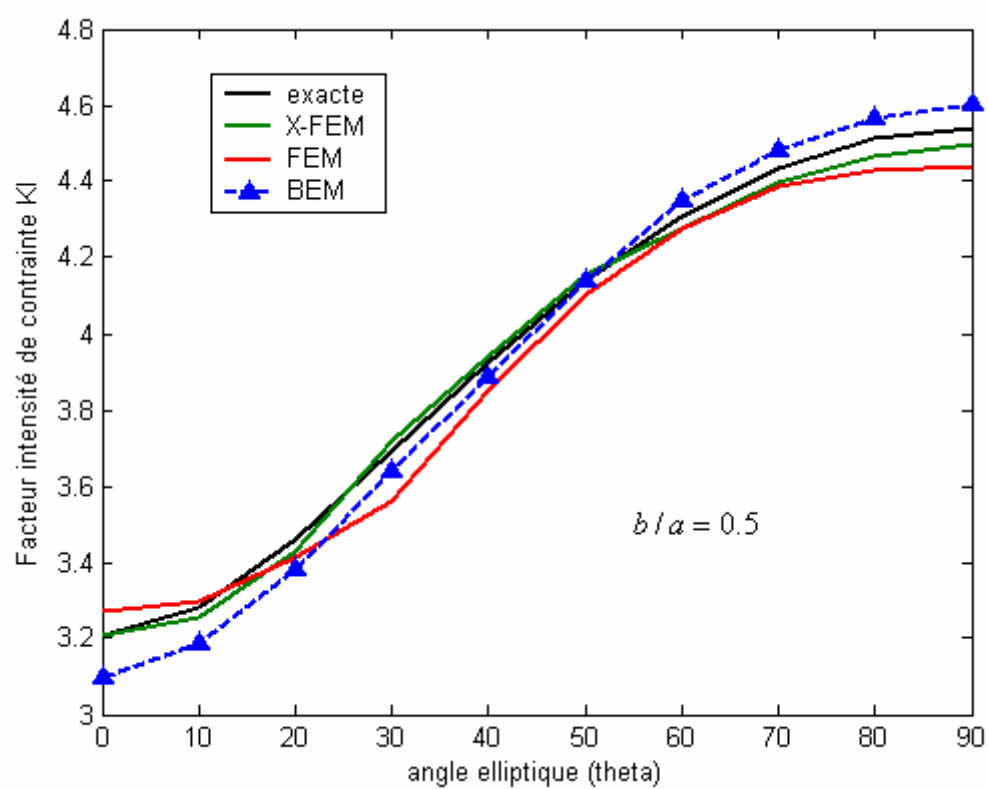


Figure 5.7 : Variation de K_I en fonction d'angle elliptique θ , ($b/a = 0.5$)

V.2.5. Troisième cas : $b/a = 0.8$ telle que : $b = 16mm$ et $a = 20mm$.

Déplacements nodaux : (u_3 en mm , $valeur \times 10^{-3}$).

1	0.2880	36	0.2555	71	0.1240	106	0.2525
2	0.1469	37	0.2943	72	0.1504	107	0.2637
3	0.1539	38	0.2323	73	0.1340	108	0.2339
4	0.1473	39	0.2913	74	0.1455	109	0.2775
5	0.1530	40	0.2332	75	0.1383	110	0.2974
6	0.1441	41	0.2934	76	0.1546	111	0.1742
7	0.2303	42	0.2551	77	0.1413	112	0.1644
8	0.2444	43	0.2657	78	0.1420	113	0.1969
9	0.2211	44	0.2275	79	0.1556	114	0.1969
10	0.3277	45	0.2793	80	0.1398	115	0.1900
11	0.2295	46	0.2994	81	0.1476	116	0.2369
12	0.3422	47	0.1741	82	0.1373	117	0.1855
13	0.2649	48	0.1644	83	0.1563	118	0.2394
14	0.3401	49	0.1962	84	0.1318	119	0.1867
15	0.3321	50	0.1984	85	0.1622	120	0.2402
16	0.2555	51	0.1918	86	0.1386	121	0.1871
17	0.3366	52	0.2390	87	0.1843	122	0.2394
18	0.2339	53	0.1876	88	0.2746	123	0.1907
19	0.3362	54	0.2410	89	0.3175	124	0.2008
20	0.2365	55	0.1886	90	0.2774	125	0.2067
21	0.2795	56	0.2420	91	0.2652	126	0.1805
22	0.2866	57	0.1866	92	0.2670	127	0.2135
23	0.1605	58	0.2407	93	0.3087	128	0.1726
24	0.2676	59	0.1943	94	0.2567	129	0.1913
25	0.3622	60	0.2040	95	0.3102	130	0.2548
26	0.2876	61	0.2079	96	0.2632	131	0.2441
27	0.2759	62	0.1875	97	0.2674	132	0.1350
28	0.2893	63	0.2081	98	0.2216	133	0.1231
29	0.3265	64	0.1724	99	0.2597	134	0.1419
30	0.2694	65	0.1909	100	0.2524	135	0.1234
31	0.3219	66	0.2284	101	0.2883	136	0.1496
32	0.2734	67	0.2398	102	0.2330	137	0.1331
33	0.2640	68	0.1349	103	0.2862	138	0.1445
34	0.2217	69	0.1237	104	0.2349	139	0.1372
35	0.2612	70	0.1435	105	0.2920	140	0.1536
			141	0.1404			
			142	0.1410			
			143	0.1547			
			144	0.1389			
			145	0.1469			
			146	0.1366			
			147	0.1555			
			148	0.1307			
			149	0.1582			
			150	0.1353			
			151	0.1810			

1. **Tableau 5.5** : Facteur d'intensité de contrainte: $K_I \left(\frac{daN}{mm^2} \sqrt{mm} \right)$

Angle (degré°)	K_{I0} : Exact	K_I : X-FEM	K_I : FEM	K_I : BEM
0	4.4661	4.4301	4.4427	4.4829
10	4.4849	4.4579	4.4646	4.4997
20	4.5378	4.5279	4.5261	4.5405
30	4.6154	4.6171	4.588	4.6090
40	4.7056	4.7099	4.6943	4.6909
50	4.7962	4.8085	4.7793	4.7779
60	4.8768	4.8947	4.8578	4.8650
70	4.9398	4.9543	4.9160	4.9357
80	4.9796	5.0094	4.9780	4.99040
90	4.9932	5.0123	5.0263	5.00183

2. **Tableau 5.6** : Facteur d'intensité de contrainte adimensionnel : K_I / K_{I0}

Angle(degré °)	K_I / K_{I0} : Exact	K_I / K_{I0} : X-FEM et l'erreur en %	K_I / K_{I0} : FEM et l'erreur en %	K_I / K_{I0} : BEM (présent étude) et l'erreur en %
0	1.0000	0.9919 0.81 %	0.9948 0.52 %	1.0038 0.38 %
10	1.0000	0.9940 0.60 %	0.9955 0.45 %	1.0033 0.33 %
20	1.0000	0.9978 0.22 %	0.9974 0.26 %	1.0006 0.06 %
30	1.0000	1.0004 0.04 %	0.9941 0.59 %	0.9986 0.14 %
40	1.0000	1.0009 0.09 %	0.9976 0.24 %	0.9969 0.31 %
50	1.0000	1.0026 0.26 %	0.9965 0.35 %	0.9962 0.38 %
60	1.0000	1.0037 0.37 %	0.9961 0.39 %	0.9976 0.24 %
70	1.0000	1.0029 0.29 %	0.9952 0.48 %	0.9992 0.08 %
80	1.0000	1.0060 0.60 %	0.9997 0.03 %	1.0022 0.22 %
90	1.0000	1.0078 0.78 %	1.0066 0.66 %	1.0053 0.53 %

3. Représentation graphique

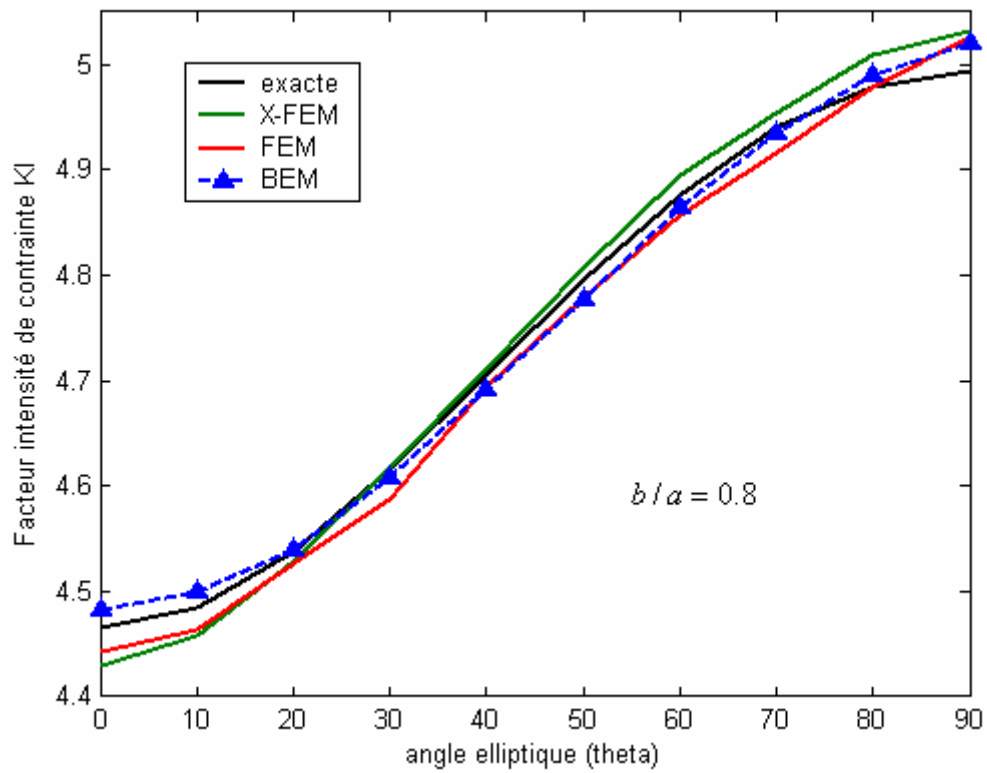


Figure 5.8 : Variation de K_I en fonction d'angle elliptique θ , ($b/a = 0.8$)

V.3 Application II

Dans la deuxième application, On présente le facteur d'intensité de contraintes en mode d'ouverture, K_I . La fissure est de forme circulaire incorporée dans un massif infini élastique isotrope, figure 5.9. Cette fissure plane est sous un chargement de traction unitaire uniforme, et symétrique par rapport au plan de la fissure.

Les conditions aux limites sont exactement les mêmes que celles de la première application. On veut ici apprécier le rôle du raffinement de maillage en comparant nos résultats avec ceux évalués par Sukumar [49], qui utilise la méthode X-FEM pour deux maillages différents, où l'on remarquant une réduction du taux d'erreurs très intéressante, par raffinement du maillage de la structure au niveau des éléments qui présentent une variation importante dans les inconnues physiques (déplacements).

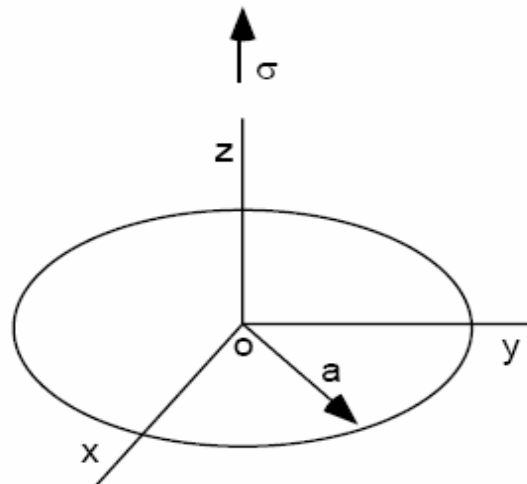


Figure 5.9 : Fissure circulaire plane de rayon a

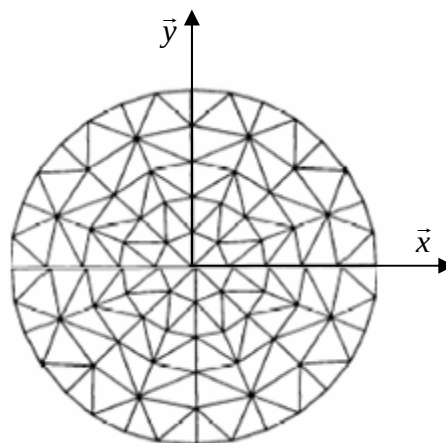


Figure 5.10 : Exemple du modèle de maillage manuel de la fissure circulaire

Soient a le rayon de cette fissure circulaire, et $\sigma_0(\bar{z}) = \text{unité}$ la contrainte due au chargement uniforme en traction, la solution exacte décrite par Irwin pour ce cas de fissure est :

$$K_{I0} = 2\sigma_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad (5.7)$$

Pour notre cas de figure on prend une fissure circulaire de rayon $a = 20\text{mm}$, et un maillage manuel de 151 nœuds et 256 éléments triangulaires linéaires.

Le facteur d'intensité de contrainte adimensionnel prend la forme suivante :

$$K_{add} = K_I / K_{I0} = \frac{K_I}{2\sigma_0} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{K_I}{K_{I0}} \quad (5.8)$$

1. Tableau 5.7 : Facteur d'intensité de contrainte adimensionnel : K_{add} .

Angle (degré °)	K_I / K_{I0} : Exact	K_I / K_{I0} : X-FEM1 et l'erreur en %	K_I / K_{I0} : X-FEM2 et l'erreur en %	K_I / K_{I0} : BEM (présente étude) et l'erreur en %
0	1.0000	1.0126 1.26 %	0.9832 1.68 %	1.0104 1.04 %
10	1.0000	0.9818 1.82 %	1.0042 0.42 %	1.0100 1.00 %
20	1.0000	0.9974 0.26 %	1.0067 0.67 %	0.9709 2.91 %
30	1.0000	1.0075 0.75 %	0.9997 0.03 %	1.0013 0.13 %
40	1.0000	0.9481 5.19 %	0.9908 0.92 %	1.0000 0.00 %
50	1.0000	0.9480 5.20 %	0.9908 0.92 %	0.9800 2.00 %
60	1.0000	1.0070 0.70 %	0.9717 2.83 %	1.0290 2.90 %
70	1.0000	0.9974 0.26 %	1.0067 0.67 %	0.9806 1.94 %
80	1.0000	0.9817 1.83 %	1.0042 0.42 %	0.9873 1.27 %
90	1.0000	1.019 1.90 %	0.9832 1.68 %	1.0010 0.10 %

2. Représentation graphique

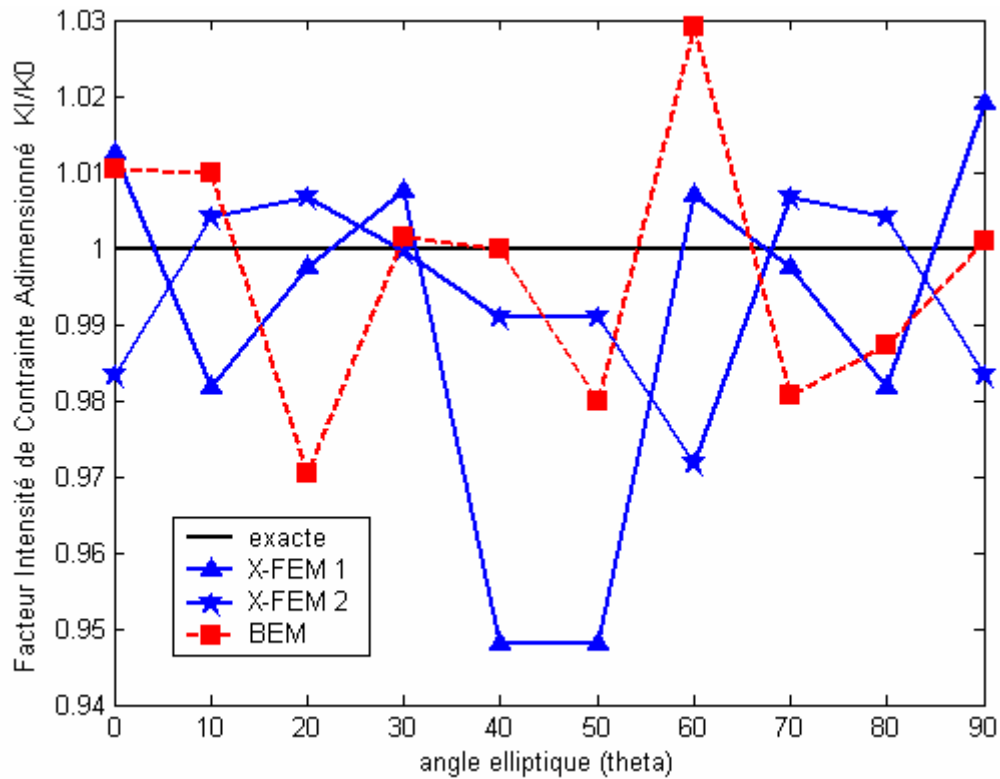


Figure 5.11 : le facteur K_I adimensionnel pour une fissure circulaire

Les résultats comparés avec les nôtres pour cette application sont ceux de la référence suivante :

X-FEM1 et X-FEM2 : [40].

V.4 Conclusion et Commentaires

En bibliographie, les travaux qui ont précédé la méthode des équations intégrales de frontière, ont pu avoir de très bons résultats, où le taux d'erreurs ne dépasse pas les 3 %. En comparant avec les nôtres qui atteignent les 5,3 % (cas où $b/a = 0.2$), qui sont dûs à l'effet géométrique influant sur la qualité des mailles construites manuellement, ainsi qu'aux effets de maillage manuel par lesquels les équations intégrales sont discrétisées, en absence d'un élément de calcul automatique de maillage.

Le maillage manuel non raffiné ne nous permette pas d'avoir d'excellents résultats. En remarquant à la figure 5.11, où la différence est importante entre les deux cas de maillage pour une seule méthode de résolution (X-FEM), dont on peut souligner que ce dernier doit être évalué d'une manière où les éléments sont raffinés sur tout le front de la fissure raison pour laquelle l'existence d'une variation rapide des valeurs de déplacements en se rapprochant de la zone singulière.

Une autre solution peut être discutée est celle du changement de représentations des inconnues physiques, de telle façon à prendre les points de collocation à l'intérieur des éléments, tout en gardant les interpolations conformes classiques, mais cela conduit à un système linéaire surdéterminé à résoudre aux sens des moindres carrés. Cette méthode est assez facile pour des cas plans (éléments curvilignes), et très délicat pour les géométries tridimensionnelles (éléments de surface).

La convergence de la méthode est assurée sur le plan numérique : toutes les intégrales singulières sont intégrables, et que tous les termes fortement singuliers s'annulent d'une manière automatique.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Au terme de ce travail, se rapportant au développement d'un outil numérique, permettant la concrétisation de la méthode d'éléments de frontière "BEM", appliquée aux problèmes d'initiation de fissures introduites dans les solides élastiques sous chargement statique, et plus précisément, l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte, en mode I, autour des fissures elliptiques.

On a procédé par une synthèse des méthodes et des diverses procédures utilisées dans l'analyse des contraintes autour des fissures en milieux tridimensionnels. On a présenté les formulations d'équations intégrales de frontière, qui ont été définies à l'aide de passage à la limite de représentations extérieures, quand la taille ε d'un voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(p)$ tend vers zéro. Les équations intégrales décrites au chapitre II.4, sont équivalentes à celles présentées dans la littérature spécialisée, ne reposant que sur la notion classique de convergence d'intégrales impropres et sont exprimées uniquement, à l'aide de singularités intégrables. Cela tient essentiellement, au fait que les contributions des termes très singuliers s'annulent réciproquement : par exemple, la somme du terme libre et de la valeur principale présente dans l'identité de Somigliana (annexe A) est connue, exactement et sans calcul, à l'aide de l'identité de corps rigide (paragraphe II.4). Ainsi, sur un plan fondamental, les résultats obtenus sont en fait, indépendant du type de convergence des intégrales, et semblent ainsi, moins arbitraires. Le caractère fortement singulier des équations intégrales en déplacement ou en traction, est apparent plus que réel sur le plan pratique. L'implantation numérique est facilitée par le fait que toutes les singularités sont intégrables.

La régularisation des équations intégrales exposées au chapitre II, repose sur deux approches distinctes, l'une est directe pour l'équation intégrale en déplacement (ou identité de Somigliana A.29) pour laquelle ces deux dernières sont discrétisées : le passage à la limite, étant reporté au niveau des calculs des intégrales élémentaires. Cela, impose de tenir soigneusement compte de la forme du voisinage d'exclusion lors du changement de variables (paramétrage de l'élément de référence). Les intégrales élémentaires étant évaluées sur ce dernier. L'autre approche est indirecte pour l'équation intégrale en traction (paragraphe II.4) : elle repose sur la connaissance des identités intégrales particulières, vérifiées par les solutions élémentaires (quantité de corps rigide).

Les éléments de frontière utilisés pour la discrétisation du problème dans le programme, sont des éléments triangulaires linéaires. En supposant que la surface de la fissure est plane

pour simplifier les solutions élémentaires utilisées, cela implique des singularités, plus au moins, abordables au sens numérique. Contrairement au cas où la surface de la fissure est tridimensionnelle d'où la nécessité de deux types de maillage. L'un est celui de la surface de la fissure et l'autre est celui de la frontière de cette dernière (discrétisation de la frontière de la fissure par des segments). Mais ce maillage n'est nullement compliqué en comparant au traitement numérique des singularités, qui constitue une vraie obstruction vis-à-vis de l'avancement du programme ainsi que la maîtrise des résultats des intégrales singulières.

Pour plus de détails sur les problèmes rencontrés dans l'implantation numérique en citant l'évaluation des fonctions de formes réduites où la présence de deux changements de variables successifs est nécessaire: L'un, est l'introduction d'un système des coordonnées polaires (ρ, α) centré en η (antécédent du point source p). L'autre, est le changement de variables permettant la description de l'élément de référence Δ_e , en introduisant une subdivision en triangles qui permet, à son tour, de parcourir le carré $[-1,1]^2$ pour chacun d'eux afin de pouvoir intégrer par points de Gauss sur ces derniers.

La mise en œuvre numérique de ces changements de variables représente une difficulté majeure pour la construction des algorithmes de calcul. Une mauvaise évaluation des intégrales singulières est source d'erreurs importantes.

En bibliographie, les travaux qui ont précédé la méthode des équations intégrales de frontière, ont pu avoir de très bons résultats, où le taux d'erreurs ne dépasse pas les 2%. En comparant avec les nôtres qui atteignent les 5,3 % (cas où $b/a = 0.2$), qui sont dûs à l'effet géométrique influant sur la qualité des mailles construites manuellement, ainsi qu'aux effets de maillage manuel par lesquels les équations intégrales sont discrétisées, en l'absence d'un élément de calcul automatique de maillage, ou d'une fonction destinée au maillage et au raffinement dont on a besoin.

En perspective, nous souhaitons étendre notre modèle numérique à des problèmes plus compliqués, tout en généralisant la solution élémentaire à des cas de fissures de surfaces tridimensionnelles, ainsi que la construction d'une bibliothèque d'éléments différents, avec la mise en œuvre de leurs fonctions de forme. L'évolution de nombres de degrés de liberté des éléments frontières, nous permet de pouvoir traiter les problèmes de fissures sous chargement mixte et d'une géométrie arbitraire de ces dernières. Un modèle de maillage automatique et un raffinement d'éléments selon la variation des résultats d'inconnus physiques est fortement préconisé pour ce genre de problèmes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. K. Kassir and G. C. Sih, Three-dimensional stresses around elliptical cracks in transversely isotropic solids, *Engin. Fract. Mechcs.* 1968, Vol. 1, pp. 327-345.
- [2] I S. Raju and J C Newman, Jr., Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates, *Engin. Fract. Mechcs.* 1979, Vol. 11, pp. 817-829.
- [3] M. Isida, On the determination of stress intensity factors for some common structural problems, *Engin. Fract. Mechcs.* 1970. Vol. 2, pp. 61-79.
- [4] G. R. Irwins, Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control, *Engin. Fract. Mechcs.* 1968, Vol. 1, pp. 241-257.
- [5] J. J. Mc. Gowan and M. Raymund, Stress intensity factor solutions for internal longitudinal semi-elliptical surface flaws in a cylinder under arbitrary loading, *Fracture Mechanics, ASTM STP 677, C. W. Smith, Ed., American Society for testing and materials*, 1979, pp. 365-380.
- [6] M. Gosz, B. Moran, Stress-Intensity Factors for Elliptical Cracks Emanating From Countersunk Rivet Holes April 1998 Report U.S. Department of Transportation Federal Aviation Administration, DOT/FAA/AR-95/111.
- [7] A. Muller, J. Wenck , S. Goswami , J. Lindemann , J. Hohe , W. Becker, The boundary finite element method for predicting directions of cracks emerging from notches at bimaterial junctions, *Engin. Fract. Mechcs.* 2005, Vol.72, pp.373-386.
- [8] Jan Cervenka and Victor Saouma, Numerical evaluation of 3-D SIF for arbitrary finite element meshes, *Engin. Fract. Mechcs.* 1997, Vol. 57, No. 5, pp. 541-563.
- [9] J. Joch and S. Ptak, On stress intensity factor computation by finite element method under mixed mode loading conditions, *Engin. Fract. Mechcs.* 1989, Vol. 34, No.1, pp. 169-177.
- [10] Y. Mukakami, A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method , *Engin. Fract. Mechcs*, 1976, Vol. 8, pp. 643-655.
- [11] Spiros George Papaioannou, Peter D. Hilton and Robert A. Lucas, A finite element method for calculating stress intensity factors and its application to composites, *Engin. Fract. Mechcs.* 1974, Vol. 6, pp. 807-823.
- [12] C.S. Shin and C.Q. Cai, Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending, *Inter. J. Fract.* 2004, Vol. 129, pp. 239-264.

- [13] B. E. K. Hachi, Said Rechak, Yacine Belkacemi, Gérard Maurice. Modelling of elliptical cracks in an infinite body and in a pressurized cylinder by a hybrid weight function approach. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 2005, Vol. 82, pp.917-924.
- [14] W.Q. Chen, and C.W. Lim, 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium, *Inter. J. Fract.* 2005, Vol. 131, pp.231-246.
- [15] A. Bobet, O. Mutlu, Stress and displacement discontinuity element method for untrained analysis, *Engin. Fract. Mechcs.* 2005, Vol. 72, pp. 1411-1437.
- [16] N. Sukumar, B. Moran, T. Black, T. Belytschko, An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics, *Computational Mechanics* 1997, Vol.20, pp.170-175.
- [17] Yunitaka Murakami, Application of the body force method to the calculation of stress intensity factors for a crack in the arbitrary shaped plate, *Engin. Fract. Mechcs* , 1978, Vol. 10, pp. 497-513.
- [18] N. I. Ioakimidis and P. S. Theocakis, On the photoelastic determination of complex stress intensity factors, *Engin. Fract. Mechcs.* 1979, Vol. 12. pp. 463-468.
- [19] J. P. Gallagher, Experimentally determined stress intensity factors for several contoured double cantilever beam specimens, *Engin. Fract. Mechcs*, 1971, Vol. 3, pp. 27-43.
- [20] L. A. James, W. E. Anderson, Compendium, A Simple experimental procedure for stress intensity factors calibration, *Engin. Fract. Mechcs.* 1969, Vol. 1, pp. 559-568.
- [21] Yuqing Cao, Three-dimensional finite element modeling of subsurface median crack in trilayer sandwiches due to contact loading, *Engin. Fract. Mechcs*, 2002, Vol. 69, pp. 729-743
- [22] M. H. Aliabadi, A new generation of boundary element methods in fracture mechanics, *Inter. J. Fract.* 1997, Vol. 86, pp. 91–125.
- [23] Ernian Pan, General boundary element analysis of 2D linear elastic fracture mechanics. *Inter. J. Fract.* 1997, Vol. 88, pp. 41–59.
- [24] H. Rajiyah and S. N. Atluri, Evaluation of K-factors and weight functions for 2-D mixed-mode multiple cracks by the boundary element method, *Engin. Fract. Mechcs.* 1989, Vol. 32, No. 6, pp. 911-922.
- [25] C. C. Chien, H. Rajiyah and S. N. Atluri, On the evaluation of hyper-singular integrals arising in the boundary element method for linear elasticity , *Computational mechanics* 1991, Vol. 8, pp. 57-70.
- [26] J. Sladek, V. Sladek, S. N. Atluri, Local boundary integral equation (LBIE) method for solving problems of elasticity with non homogeneous material properties, *Computational Mechanics* 2000, Vol. 24, pp. 456-462 Springer-Verlag 2000.

- [27] Ernian Pan and F. G. Yuan, Boundary element analysis of three-dimensional cracks in anisotropic solids, *Inter. J. Num. Meth. Engin.* 2000, Vol. 48, pp. 211-237.
- [28] Ryoji Yuuki and Sang-bong Cho, Efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface cracks in dissimilar materials, *Engin. Fract. Mechcs.* 1989, Vol. 34, No. I, pp. 179-188.
- [29] Ang Whye Teong and David L. Clements, A boundary integral method for the solution of a class of crack problems, *J. Elasticity*, 1987, Vol. 17, pp. 9-21.
- [30] Zhao Minghao, Liu Yuanjie and Cheng Changjun, Boundary integral equations and the boundary element method for three-dimensional fracture mechanics, *Engin. Analysis with Boundary Elements*. 1994, Vol. 13, pp. 333-338.
- [31] P. C. Olsen, Determining the stress intensity factors and the T-term via the conservation laws using the boundary element, *Engin. Fract. Mechcs.* 1994, Vol. 49. No. I, pp. 49-60.
- [32] J. Dominguez and M. P. Ariza, Transversely isotropic cracked bodies under static and dynamic loads, *Advances in Boundary Elements Techniques*, 2003.
- [33] Francisco Chirino and Jose Dominguez, Dynamic analysis of crack using boundary element method, *Engin. Fract. Mechcs.* 1989, Vol. 34, No. 5/a, pp. 1051-1061, 1989.
- [34] M. Marrero, J. Dominguez, Time-domain BEM for three-dimensional fracture mechanics *Engin. Fract. Mechcs.* , 2004, Vol. 71, pp. 1557-1575.
- [35] A.-V. Phan, J. A. L. Napier, L. J. Gray and T. Kaplan, Symmetric-Galerkin BEM simulation of fracture with frictional contact, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2003, Vol. 57, pp. 835-851.
- [36] Y. K. Chenung, C. W. Woos and Y. h. wang, Stress intensity factors for a circular arc crack by boundary collocation method, *Engin. Fract. Mechcs.* 1989, Vol. 34, No. 4, pp. 841-849.
- [37] H. Rajiah and S. N. Atluri, Evaluation of K-factors and weight functions for 2-D mixed-mode multiple cracks by the boundary element method, *Engin. Fract. Mechcs.* 1989, Vol. 32, N. 6, pp. 911-922.
- [38] T.Y. Qin, W.J. Chen and R.J. Tang, Three-dimensional crack problem analysis using boundary element method with finite-part integrals, *Inter. J. Fract.* 1997, Vol. 84, pp. 191-202.
- [39] George E. Blanford, Two dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method, *Inter. J. Num. Meth. Engin.* 1981, Vol. 17, pp. 387-404.
- [40] N. Sukumar a, D.L. Chopp b, B. Moran c. , Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation, *Engineering Fracture Mechanics* 2003, Vol. 70, pp. 29-48.

- [41] Monchai Prukvilailert a., Hideo Koguchi, Stress singularity analysis around the singular point on the stress singularity line in three-dimensional joints, *International Journal of Solids and Structures* 2005, Vol. 42, pp. 3059-3074.
- [42] Chi King Lee , Lie Seng Tjhen, Chiew Sing Ping, Shao Yongbo, Numerical models verification of cracked tubular T, Y and K-joints under combined loads, *Engin. Fract. Mechcs.* 2005, Vol.72, pp.983-1009.
- [43] J.A. Nairn, Simulation of crack growth in ductile materials, *Engin. Fract. Mechcs.* 2005, Vol.72, pp.961-979.
- [44] D. Peng, C. Wallbrink, R. Jones, An assessment of stress intensity factors for surface flaws in a tubular member, *Engin. Fract. Mechcs.* 2005, Vol.72, pp.357-371.
- [45] D. Peng a,b, C. Wallbrink b, R. Jones, Stress intensity factor solutions for finite body with quarter-elliptical flaws emanating from a notch, *Engin. Fract. Mechcs.* 2005, Vol.72, pp. 1329-1343.
- [46] Nao-akinoda, Toshiaki kihara and Daisuke Beppu, Variations of stress intensity factor of a semi-elliptical surface crack subjected to mixed mode loading, *Inter. J. Fract.* 2004, Vol. 127, pp.167-191.
- [47] R. Kouitat Njiwa , J. von Stebut, Three dimensional boundary element analysis of internal cracks under sliding contact load with a spherical indenter, *Engin. Fract. Mechcs.* 2004, Vol. 71 pp. 2607-2620.
- [48] C.-R. Chiang, Hsin Chu Taiwan, Some crack problems in transversely isotropic solids, *Acta Mechanica* 2004, Vol.170, pp. 1-9.
- [49] N. Sukumarz, N. Moës, B. Moran and T. Belytschko_y. k, Extended finite element method for three-dimensional crack modelling, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2000, Vol.48, pp.1549-1570.
- [50] Yinghua Liu , Xiaofeng Zhang, Zhangzhi Cen, Numerical determination of limit loads for three-dimensional structures using boundary element method, *European Journal of Mechanics A/Solids* 2004, Vol. 23, pp.127-138.
- [51] J. Li, X. Wang, C.L. Tan, Weight functions for the determination of stress intensity factor and T-stress for edge-cracked plates with built-in ends, *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 2004, Vol. 81, pp.285-296.
- [52] Y. Z. Chen, X. Y. Lin and Z. X. Wang, Jiangsu, China, Numerical solutions of a hypersingular integral equation for antiplane elastic curved crack problems of circular regions *Acta Mechanica* 2004, Vol. 173, pp.1-11.

- [53] D.K.L. Tsang , S.O. Oyadiji, A.Y.T. Leung, Multiple penny-shaped cracks interaction in a finite body and their effect on stress intensity factor, *Engin. Fract. Mechcs.* 2003, Vol. 70, pp. 2199-2214.
- [54] M. Denda, The whole crack singular element for 2-D boundary element analysis of multiple straight cracks in the general anisotropic solids, *Electronic Journal of Boundary Elements* 2003, Vol. 1, No. 3, pp. 404-417.
- [55] R. C. Shah and A. S. Kobayashi, On the parabolic crack in an elastic solid, *Engin. Fract. Mechcs.* 1968, Vol. 1, pp. 309-325.
- [56] J.C.F. Telles , A Report on Some Boundary Element Adventures, *Electronic Journal of Boundary Elements* 2003, Vol. 1, No. 1, pp. 56-60.
- [57] Ján Sládek, Vladimír Sládek and Zdeněk P. Bažant, Non-local boundary integral formulation for softening damage, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2003, Vol. 57, pp. 103-116.
- [58] Elmoiz Mahgoub, Xiaomin Deng, Michael A. Sutton, Three-dimensional stress and deformation fields around flat and slant cracks under remote Mode I loading conditions *Engin. Fract. Mechcs* 2003, Vol. 70, pp. 2527-2542.
- [59] M. Gosz A, B. Moran, An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions, *Engin. Frac. Mechcs.* 2002, Vol. 69, pp. 299-319.
- [60] P.H. Wen a, M.H. Aliabadi .and A. Young, Boundary element analysis of flat cracked panels with adhesively bonded patches, *Engin. Fract. Mechcs.* 2002, Vol. 69, pp. 2129-2146.
- [61] Glaucio H. Paulino, Alok Sutradhar and L. J. Gray, Boundary Element Methods for Functionally Graded Materials, *International Association for Boundary Element Methods, UT Austin, TX, USA, May 28-30, 2002.*
- [62] Ryoji Yuuki and Sang-bong Cho, efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface cracks in dissimilar materials, *Engin. Fract. Mechcs.* 1989, Vol. 34, No. 1, pp. 179-188.
- [63] A. Frangi, Fracture propagation in 3D by the symmetric Galerkin boundary element method, *Inter. J. Fract.* 2002, Vol. 116, pp. 313-330.
- [64] C. Rubio-gonzalez and J.J. Mason, Green's functions for the stress intensity factor evolution in finite cracks in orthotropic materials, *Inter. J. Fract.* 2001, Vol. 108, pp. 317-336.
- [65] Jacob Foxen a, Sharif Rahman, Elastic-plastic analysis of small cracks in tubes under internal pressure and bending, *Nuclear Engineering and Design* .2000, 197 ,75-87.
- [66] A. Frangi X. and M. Guiggiani. Y. , A direct approach for boundary integral equations with high-order singularities, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2000, Vol. 49, pp.871-898

- [67] Anisur Rahman, John Bakuckas, Jr. Catherine Bigelow, and Paul Tan, Boundary Correction Factors for Elliptic Surface Cracks Emanating from Countersunk Rivet Holes under Tension, Bending, and Wedge Loading conditions, *Report February 1999*
- [68] M. Gosz, B. Moran, Stress-Intensity Factors along Three-Dimensional Elliptical Crack Fronts, May 1998 DOT/FAA/AR-96/97 *Report*.
- [69] N. I. Ioakimidis, Validity of the hypersingular integral equation of crack problems in three-dimensional elasticity along the crack boundaries, *Engin. Fract. Mechcs.* 1987, Vol. 26, No. 5, pp. 783-788.
- [70] B. Yang and K. Ravi-chandar, A single-domain dual-boundary-element formulation incorporating a cohesive zone model for elastostatic cracks, *Inter. J.Fract.* 1998, Vol. 93, pp. 115-144.
- [71] Zhou Shenjie, Sun Shuxun and Cao Zhiyuan, The dual boundary contour method for two-dimensional crack problems, *Inter. J. Fract.* 1998, Vol. 92, pp. 201-212.
- [72] B. Nuller, Edger Karaption and Mark kachanov, On the stress intensity factor for the elliptical crack , *Inter. J. Fract.* 1998, Vol. 92, pp. 217-220.
- [73] Seok Soon Lee, Analysis of crack closure problem using the dual boundary element method, *Inter. J. Fract.* 1996, Vol. 77, pp. 323-336.
- [74] P. Sollerw , M.H. Aliabadi and D. P. Rooke, Anisotropic analysis of cracks emanating from circular holes in composite laminates using the boundary element method, *Engin. Fract. Mechcs.*, 1994, Vol. 49, No. 2, pp. 213-224.
- [75] Anderea Carpinter, Stress intensity factors for semi-elliptical surface under tension or bending, *Engin Fract. Mechcs.* 1991, Vol. 38, No. 415, pp. 327-334.
- [76] T. Nishioka , S.N. Atluri The first-order variation of the displacement field due to Geometrical changes in elliptical crack , *J. appd. Mechcs.* 1990, Vol. 112.
- [77] Zhou Yong, A new method for solving the circular crack problems under arbitrary normal loading, *Engin Fract. Mechcs.* 1989, Vol. 34, No. I, pp. 201-207.
- [78] H. Tanaka, Stochastic proprieties of semi-elliptical surface crack propagation based upon Newman-Raju's K expression , *Engin. Fract. Mechcs.* 1989, Vol. 34, No. I, pp. 189-200.
- [79] Francisco Chirino and José Dominguez, Dynamic analysis of cracks using boundary element method, *Engin.Fract. Mechcs.* 1989, Vol. 34, No. 5/6, pp. 1051-1061.
- [80] P. S. Theocaris, The COD and SIF variation along the deform crack front of an edge-cracked thick plate, *Engin. Fract. Mechcs.* 1988, Vol. 31, No. 3, pp. 395-403.

- [81] Nabil Fares and Victor C. Li, An indirect boundary element method for 2-D finite regions with multiple displacement discontinuities, *Engin. Fract. Mechcs.* 1987, Vol. 26, No. 1, pp. 127-141.
- [82] H. Grebner and U. Strathmeier, Stress intensity factors for circumferential semi-elliptical surface cracks in a pipe under thermal loading, *Engin. Fract. Mechcs.* 1985, Vol. 22, No. 1, pp. 1-7.
- [83] E. Sommers, An optical method for determining the crack tip stress intensity factor, *Engin. Fract. Mechcs.* 1970. Vol.1, pp. 705-718.
- [84] Y. Murkami, Analysis of stress intensity factors of modes I, II and III for inclined surface cracks of arbitrary shape, *Engin Fract. Mechcs.* 1985, Vol. 22, No. I, pp. 101-114.
- [85] J. C. Newman, Jr. I. S. Raju, Stress intensity factors for internal surface cracks in cylindrical pressure vessels, *J. Pressure Vessels Technolgy*, 1980, Vol. 102, pp. 342-346.
- [86] J. C. Newman, JR. and I. S. Raju, An empirical stress intensity factor equation for the surface crack, *Engin. Fract. Mechcs.* 1981, Vol. 15, No. 1-2, pp. 185-192.
- [87] Norjo Hasebe and Yasuhiro Kutanda, Calculation of stress intensity factor from stress concentration factor, *Engin. Fract. mechcs.* 1978, Vol. 10. pp. 215-221.
- [88] W. S. Johnson and J. M. Straitons, Effective remote stresses and stress intensity factors for an adhesive bonded multi-ply laminates, *Engin. Fract. Mechcs.* 1977, Vol. 9, pp. 411-421.
- [89] Graham Chell, The stress intensity factors for centre edge cracked sheets subject to an arbitrary loading, *Engin. Fract. Mechcs.* 1975, Vol. 7, pp.137-152.
- [90] Francis I. Baraita, Stress intensity factors for internal multiple cracks in thick walled cylinders stressed by internal pressure using load relief factors, *Engin. Fract. Mechcs.* 1974, Vol.10, pp. 691-697.

Livres:

- [91] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, Theory of elasticity, *Univeristé Stanford ...*
- [92] Young W. Kwon, Hyochong Bang, The finite element method using matlab, 1997 *CRC publishers.*
- [93] Marc Bonnet, Equations intégrales et éléments de frontière, 1995, *Eyrolles.*
- [94] David Broek, Elementary engineering fracture mechanics, 1987 *Martinus nijhoff publishers.*
- [95] Batoz J. L and Dhatt G, Modélisation des structures par éléments finis, 1990 *Paris HERMES.*
- [96] V. Sladèk, J. Sladèk, Singular integrals in boundary element method, 1998 *Computational mechanics publications.*

Annexe A : Formulations complémentaires

▪ Elastostatique linéaire.

L'équilibre élastique d'un solide occupant le domaine Ω , sous l'hypothèse des petites perturbations, est caractérisé par les équations locales suivantes reliant les champs de déplacement u , de déformation ε et de contrainte σ vérifiées en tout point de Ω :

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2 \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \quad (\text{A.3})$$

Dans lesquelles la distribution massique de force F peut traduire des effets variés : pesanteur, inertie ou effets thermiques, termes inélastiques, déformations ou contraintes initiales. Les constantes élastiques du matériau, qui interviennent dans la relation de comportement élastique (équation A.2), sont regroupées dans le tenseur du quatrième ordre C , dit tenseur de Hooke. Celui-ci vérifie les symétries :

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (\text{A.4})$$

De sorte que le comportement élastique le plus général est représenté par 21 coefficients indépendants. Tout triplet (u, σ, F) vérifiant les équations (A.1, A.2, A.3) est qualifié *d'état élastostatique* sur Ω .

La frontière $\partial\Omega$ supporte par ailleurs des conditions aux limites : par exemple, efforts de contact t^D appliqués sur $S_T \subset \partial\Omega$:

$$T^n(u) \equiv \sigma \cdot n = t^D \quad \text{Sur } S_T$$

et déplacements u^D imposés sur la portion complémentaire $S_u = \partial\Omega - S_T$:

$$u = u^D \quad \text{Sur } S_u$$

Les relations (A.1), (A.2), (A.3) combinées conduisent à l'équation de Navier gouvernant les déplacements :

$$\Delta^* u + \rho F = 0 \quad \text{Avec} \quad \Delta^* u \equiv C_{ijkl} u_{k,lj} e_i \quad (\text{A.5})$$

Élasticité isotrope :

Le tenseur de Hooke C ne dépend alors plus que de deux constantes élastiques indépendantes : λ, μ (constantes de Lamé) ou E, ν (module d'Young et coefficient de Poisson), tel que :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Ce tenseur est donné par :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \mu \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) \quad (\text{A.6})$$

L'expression du vecteur contrainte en fonction du déplacement est :

$$T^n(u) = 2\mu u_{,n} + \lambda n \operatorname{div} u + \mu n \wedge \operatorname{rot} u \quad (\text{A.7})$$

L'opérateur Δ^* de l'équation de Navier (A.5) s'écrit :

$$\Delta^* = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \quad (\text{A.8})$$

Enfin, on rappelle que toute solution de l'équation de Navier isotrope (équations A.5 et A.8) admet une représentation de la forme :

$$u = 2(1-\nu)\Delta G - \nabla(\operatorname{div} G) \quad (\text{A.9})$$

Où, par substitution de l'équation (A.9) dans (A.5), le vecteur de Galerkin G vérifie :

$$\Delta \Delta G + \frac{\rho}{2\mu(1-\nu)} F = 0$$

Élasticité antiplane : Il s'agit de situations particulières où le domaine d'étude est invariant par translation le long de e_ε et le champ de déplacement cherché est de la forme :

$$u(y) = u(y_1, y_2) e_3$$

Dans ce cas, les seules composantes non nulles de ε et de σ sont :

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = u_{,\alpha} \quad \sigma_{\alpha 3} = 2\mu \varepsilon_{\alpha 3} \quad \alpha = (1, 2)$$

Et l'équation de Navier (A.5) se réduit à l'équation scalaire :

$$\Delta_2 u + F = 0$$

C'est-à-dire l'équation de Poisson en deux dimensions.

▪ *Troisième formule de Green*

Si (u^1, u^2) sont deux potentiels vérifiant l'équation de Poisson $\Delta u + b = 0$ avec les sources (b^1, b^2) , l'application de l'équation de Poisson d'inconnu u^1 par un champ u^2 intégrée sur le domaine Ω , à (u^1, q^1, b^1) pour la fonction test u^2 puis à (u^2, q^2, b^2) pour la fonction test u^1 suivie de la soustraction membre à membre des relations obtenues de l'identité de réciprocité :

$$\int_{\partial\Omega} (q^1 u^2 - q^2 u^1) ds = \int_{\Omega} (b^2 u^1 - b^1 u^2) dV \quad (\text{A.10})$$

Celle-ci peut aussi, compte tenu de l'équation de Poisson vérifiée par les deux états, être écrite sous la forme bien connue de la troisième formule de Green :

$$\int_{\partial\Omega} (q^1 u^2 - q^2 u^1) ds = \int_{\Omega} (u^2 \Delta u^1 - u^1 \Delta u^2) dV \quad (\text{A.11})$$

▪ *Propriétés générales de la solution de Kelvin*

Étant définie pour l'espace infini homogène, la solution de Kelvin est invariante par translation (elle ne dépend de p, q que à travers $r = q - p$) et homogène par rapport à $q - p$:

$$\begin{aligned} U_i^k(\lambda p, \lambda q) &= \lambda^{-1} U_i^k(p, q) & \Sigma_{ij}^k(\lambda p, \lambda q) &= \lambda^{-1} \Sigma_{ij}^k(p, q) \\ U_i^k(p, q) &= o\left(\frac{1}{r}\right) & \Sigma_{ij}^k(p, q) &= o\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Symétrie par rapport aux indices :

$$U_i^k(p, q) = U_k^i(p, q) \quad (\text{A.13})$$

Et l'effet de l'interversion des point p et q :

$$\begin{aligned} U_i^k(p, q) &= U_i^k(q, p) & \Sigma_{ij}^k(p, q) &= -\Sigma_{ij}^k(q, p) \\ U_{i,\bar{l}}^k(p, q) &= -U_{i,l}^k(p, q) & \Sigma_{ij,\bar{l}}^k(p, q) &= -\Sigma_{ij,l}^k(p, q) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Celle-ci entraîne à son tour les relations :

$$C_{ijkl} U_{a,\bar{l}}^k(p, q) = \Sigma_{ij}^a(q, p) \quad C_{ijkl} \Sigma_{ab,\bar{l}}^k(p, q) = C_{abkl} \Sigma_{ij,l}^k(q, p) \quad (\text{A.15})$$

▪ *Intégrale du vecteur contrainte de Kelvin*

On se propose de reformuler la résultante sur S du vecteur contrainte de Kelvin, donnée par :

$$L_i^k(p, S) = \int_S T_i^k(p, q) dS_q = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \int_S (1-2\nu)(\delta_{ik} r_{,n} + n_k r_{,i} - n_i r_{,k}) + 3r_{,i} r_{,k} r_{,n} \frac{dS_q}{r^2} \quad (A.16)$$

À l'aide d'intégrations par parties. En effet, l'équation (A.7) permet d'écrire :

$$\int_S (n_k r_{,i} - n_i r_{,k}) \frac{dS_q}{r^2} = \int_S D_{ik} \frac{1}{r} dS_q = e_{ikp} \int_{\partial S} r_p \frac{dS_q}{r} \quad (A.17)$$

et d'autre part:

$$\begin{aligned} \int_S r_{,i} r_{,k} r_{,n} \frac{dS_q}{r^2} &= \int_S r_{,i} r_{,p} D_{kp} \frac{1}{r} dS_q + \int_S n_k r_{,i} \frac{dS_q}{r^2} \\ &= e_{kpj} \int_{\partial S} r_{,i} r_{,p} \tau_j \frac{dS_q}{r} + \int_S \frac{1}{r} D_{pk}(r_{,i} r_{,p}) dS_q + \int_S n_k r_{,i} \frac{dS_q}{r^2} \end{aligned} \quad (A.18)$$

Compte tenu de :

$$\begin{aligned} D_{pk}(r_{,i} r_{,p}) &= n_p(r_{,ik} r_{,p} + r_{,i} r_{,pk}) - n_k(r_{,ip} r_{,p} + r_{,i} r_{,pp}) \\ &= \frac{1}{r} \{ [\delta_{ik} - r_{,i} r_{,k}] r_{,n} + r_{,i} n_k - r_{,i} r_{,k} r_{,n} - 2n_k r_{,i} \} = \frac{1}{r} \{ [\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}] r_{,n} - n_k r_{,i} \} \end{aligned} \quad (A.19)$$

On obtient :

$$3 \int_S r_{,i} r_{,k} r_{,n} \frac{dS_q}{r^2} = e_{kpj} \int_{\partial S} r_{,i} r_{,p} \tau_j \frac{dS_q}{r} + \int_S r_{,n} \frac{dS_q}{r^2} \quad (A.20)$$

Le report des équations (A.17) et (A.20) dans (A.16) conduit à reformuler $K_i^k(p, S)$ comme :

$$L_i^k(p, S) = \frac{e_{ijp}}{8\pi(1-\nu)} \int_{\partial S} [r_{,j} r_{,k} - (1-2\nu) \delta_{jk}] \tau_p \frac{dS_q}{r} - \delta_{ik} \frac{w(p, S)}{4\pi} \quad (A.21)$$

Si S est fermée et $p \notin S$, les intégrales de contour disparaissent tandis que $w(p, S) = 4\pi$ (p à l'intérieur de S , n étant la normale extérieure) ou $w(p, S) = 0$ (p à l'extérieur de S). On retrouve donc l'équation (2.7).

▪ *Identités intégrales sur les tenseurs de Kelvin*

$$A_{ij}^k(p, S) = \int_S \sum_{ij}^k(p, q) dS_q \quad B_{ij}^k(p, S) = \int_S U_{i,l}^k(p, q) dS_q \quad (A.22)$$

Formées avec la solution de Kelvin (équations 2.8 et 2.9), s'écrivent également :

$$A_{ij}^k(p, S) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)}[(1-2\nu)(\delta_{ik}I_j + \delta_{jk}I_i - \delta_{ij}I_k) + 3J_{ijk}] \quad (\text{A.23})$$

$$B_{il}^k(p, S) = -\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}[(3-4\nu)\delta_{ik}I_l + J_{ikl} - \delta_{lk}I_i - \delta_{il}I_k]$$

Avec les termes des intégrales auxiliaires I_a , J_{abc}

$$I_a(p, S) = \int_S r_{,a} \frac{dS_q}{r^2} \quad J_{abc}(p, S) = \int_S r_{,a} r_{,b} r_{,c} \frac{dS_q}{r^2} \quad (\text{A.24})$$

Les intégrales I_a , J_{abc} contiennent une singularité non intégrable sur une surface et ne sont donc pas définies pour $p \in S$.

Pour $p \notin S$, elles peuvent être reformulées, à l'aide d'intégrations par parties, en termes d'intégrales de contour sur ∂S et d'intégrales convergentes sur S .

– Reformulations de l'intégrale I_a .

Elle repose simplement, par définitions de la dérivée partielle tangentielle D_a , sur :

$$\frac{r_{,a}}{r^2} = -\left(\frac{1}{r}\right)_{,a} = -D_a \frac{1}{r} + n_a \frac{1}{r^2} r_{,n}$$

On a l'équation suivante :

$$\int_S (-n_i C f + D_i f) dS = \int_{\partial S} f \gamma_i dS \quad \text{D'où } C(q) \text{ est l'opposé du double de la courbure moyenne}$$

de S .

$$C(q) = D_i n_i(q) = -(R_1^{-1} + R_2^{-1})$$

Donc d'après cette équation, on arrive au résultat suivant :

$$I_a(p, S) = \int_S \left(\frac{1}{r} r_{,n} - C\right) n_a \frac{dS_q}{r} - \int_{\partial S} \gamma_a \frac{dS_q}{r} \quad (\text{A.25})$$

Avec $r_{,n} = n_p r_{,p}$, $C = D_i n_i$

– Reformulation de l'intégrale J_{abc} .

Tout calcul fait :

$$\begin{aligned}
3J_{abc}(p, S) = & \delta_{ac} I_b(p, S) + \delta_{bc} I_a(p, S) + \int_S [r_{,b} r_{,p} D_{pa} n_c - D_a(n_b n_c) - D_b(n_a n_c)] \frac{dS_q}{r} \\
& + \delta_{ab} \int_S n_c r_{,n} \frac{dS_q}{r^2} + \int_S (2n_a n_b - r_{,a} r_{,b}) n_{,c} C \frac{dS_y}{r} - 2 \int_S n_a n_c n_{b,n} \frac{dS_q}{r^2} \\
& + \int_{\partial S} (\gamma_a n_c n_b + \gamma_b n_c n_a - r_{,a} r_{,b} \gamma_c) \frac{dS_q}{r} + \int_{\partial S} (\gamma_p n_a - \gamma_a n_p) r_{,p} r_{,b} n_c \frac{dS_q}{r}
\end{aligned} \quad (A.26)$$

Cette reformulation présente l'intérêt de faire apparaître des intégrales sur S convergentes quand $p \in S$, $p \notin \partial S$ (les intégrales se comportant en $O(r^{-1})$ et $O(r^{-2} r_{,n})$).

Si S est fermée, les intégrales de contour dans les équations (A.25 et A.26) disparaissent. Si S est régulière par morceaux, les formules (A.25 et A.26) doivent être appliquées à chaque composante intégrale régulière de S et les résultats obtenus additionnés.

Cas particulier d'une surface plane : si S est plane (dans le plan xy par exemple), on remarque que, pour tout $q \in S$

$$K = 0 \quad n_a = \delta_{a3} \quad D_a n_b = 0 \quad \gamma_3 = 0 \quad D_{3\beta} f = f_{,\beta} \quad D_{\alpha\beta} = 0$$

et les expressions (A.25), (A.26) se réduisent à :

$$I_a(p, S) = \delta_{a3} \int_S r_{,3} \frac{dS_q}{r^2} + (\delta_{a3} - 1) \int_{\partial S} \gamma_a \frac{dS_q}{r} \quad (A.27)$$

Si de plus $x \in S$, on a $r_{,3} = r_{,n} = 0$ ce qui conduit à écrire :

$$I_a = -1 \int_{\partial S} \gamma_a \frac{dS_q}{r} \quad \text{Pour lequel l'indice } a \text{ prend la valeur } 1, 2.$$

$$3J_{\alpha\beta\theta}(p, S) = \delta_{\alpha\beta} I_\theta(p, S) + \delta_{\beta\theta} I_\alpha(p, S) - \int_{\partial S} r_{,\alpha} r_{,\beta} \gamma_\theta \frac{dS_q}{r}$$

■ Identité de somigliana

Il est important de se rappeler que l'équation de présentation intégrale classique consiste à effectuer un passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans :

$$\int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) \cup S_\varepsilon} \{ [u_i(q) - u_i(p)] T_i^k(p, q) - t_i(q) U_i^k(p, q) \} dS_q = \int_\Omega \rho F_i(q) U_i^k(p, q) dV_q \quad (A.28)$$

Le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ donne l'identité de somigliana :

$$\kappa_{\mathcal{H}}(p) u_i(p) + \int_{\partial\Omega} \{ [u_i(q) - u_i(p)] T_i^k(p, q) - t_i(q) U_i^k(p, q) \} dS_q = \int_\Omega \rho F_i(q) U_i^k(p, q) dV_q \quad (A.29)$$

Avec le terme libre :

$$\kappa_{\gamma^i}(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_i^k(p, q) dS_q \quad (\text{A.30})$$

Annexe B : Fonctions de forme et Intégrations

Les fonctions de formes les plus couramment utilisées, issues de la méthode des éléments finis, sont des polynômes de degré ≥ 1 en (ξ_1, ξ_2) , construit de manière à satisfaire les propriétés (3.3). Nous donnons pour chaque cas les fonctions de forme classiques $N(\xi)$, et les fonctions de forme "réduites" $\hat{N}(\rho, \alpha; \eta)$, non classiques.

▪ Triangle à trois nœuds

Il est défini au moyen des fonctions de forme :

$$N_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 \quad N_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \quad N_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_2 \quad (\text{B.1})$$

(ξ_1, ξ_2, ξ_3) Sont les coordonnées barycentriques d'un point du triangle de référence, défini par $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \xi_3 \geq 0$. En raison du caractère linéaire des fonctions N_1, N_2, N_3 ci-dessus, l'élément triangulaire à 3 nœuds est plan avec des cotés rectilignes.

Les fonctions de forme réduites pour l'intégration singulière sont données par :

$$\hat{N}_1(\rho, \alpha; \eta) = -(\cos \alpha + \sin \alpha) \quad \hat{N}_2(\rho, \alpha; \eta) = \cos \alpha \quad \hat{N}_3(\rho, \alpha; \eta) = \sin \alpha \quad (\text{B.2})$$

▪ Quadrangle à quatre nœuds (Élément bilinéaire)

Il est défini au moyen des fonctions de forme :

$$\begin{aligned} N_1(\xi_1, \xi_2) &= (1/4)(\xi_1 - 1)(\xi_2 - 1) & N_3(\xi_1, \xi_2) &= (1/4)(\xi_1 + 1)(\xi_2 + 1) \\ N_2(\xi_1, \xi_2) &= (1/4)(\xi_1 + 1)(\xi_2 - 1) & N_4(\xi_1, \xi_2) &= (1/4)(\xi_1 - 1)(\xi_2 + 1) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Son nom provient du fait que ses fonctions de forme sont de degré total 2 mais de degré 1 par rapport à chaque variable. L'élément réel a ses quatre cotés rectilignes, mais affecte la forme d'une surface réglée si ses quatre sommets ne sont pas coplanaires.

Les fonctions de forme réduites pour l'intégration singulière sont données par :

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_1(\rho, \alpha; \eta) &= 1/4[-(1-\eta_1)\sin\alpha - (1-\eta_2)\cos\alpha + \rho\cos\alpha\sin\alpha] \\
 \hat{N}_2(\rho, \alpha; \eta) &= 1/4[-(1+\eta_1)\sin\alpha + (1-\eta_2)\cos\alpha + \rho\cos\alpha\sin\alpha] \\
 \hat{N}_3(\rho, \alpha; \eta) &= 1/4[(1+\eta_1)\sin\alpha + (1+\eta_2)\cos\alpha + \rho\cos\alpha\sin\alpha] \\
 \hat{N}_4(\rho, \alpha; \eta) &= 1/4[(1-\eta_1)\sin\alpha - (1+\eta_2)\cos\alpha + \rho\cos\alpha\sin\alpha]
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

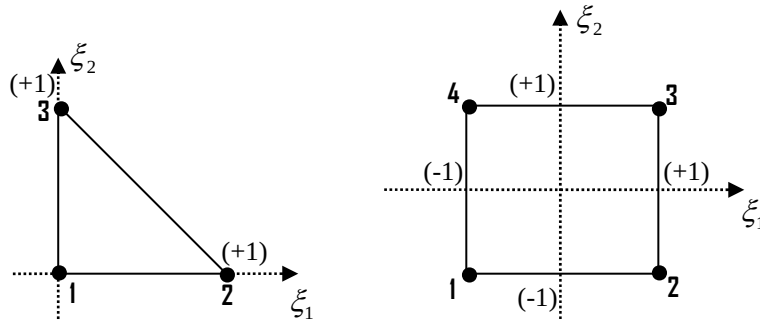


Figure B.1: Triangle à 3 nœuds et quadrangle à 4 nœuds

- *Intégration par points de Gauss*

Dans cette section d'annexe, N désigne le nombre de points de Gauss de la formule d'intégration approchée.

- *Points de Gauss pour le triangle de référence*

Le tableau B.1, présente les points (ξ_1, ξ_2) et poids w_i de Gauss pour le triangle de référence κ . Ils sont intérieurs à κ . D'autre part, ces formules respectent la symétrie ternaire du triangle : toutes les permutations des coordonnées barycentriques $\xi_1, \xi_2, 1 - \xi_1 - \xi_2$ définissent des points de Gauss, les poids étant égaux.

Tableau B.1 : Points et poids de Gauss pour l'intégration sur un triangle.

N	La coordonnée ξ_1	La coordonnée ξ_2	Les poids
3-points	0.16666 66666 667	0.16666 66666 667	0.33333 33333 333
	0.66666 66666 667	0.16666 66666 667	0.33333 33333 333
	0.16666 66666 667	0.66666 66666 667	0.33333 33333 333
7-Points	0.10128 65073 235	0.10128 65073 235	0.12593 91805 448
	0.79742 69853 531	0.10128 65073 235	0.12593 91805 448
	0.10128 65073 235	0.79742 69853 531	0.12593 91805 448
	0.47014 20641 051	0.05971 58717 898	0.13239 41527 885
	0.47014 20641 051	0.47014 20641 051	0.13239 41527 885
	0.05971 58717 898	0.47014 20641 051	0.13239 41527 885
	0.33333 33333 3331	0.33333 33333 333	0.22500 00000 000
	0.06513 01029 022	0.06513 01029 022	0.05334 72356 088
	0.86973 97941956	0.06513 01029 022	0.05334 72356 088
13-points	0.06513 01029 022	0.86973 97941 956	0.05334 72356 088
	0.31286 54960 049	0.04869 03154 253	0.07711 37608 903
	0.63844 41885 698	0.31286 54960 049	0.07711 37608 903
	0.04869 03154 253	0.63844 41885 698	0.07711 37608 903
	0.63844 41885 698	0.04869 03154 253	0.07711 37608 903
	0.31286 54960 049	0.63844 41885 698	0.07711 37608 903
	0.04869 03154 253	0.04869 03154 253	0.07711 37608 903
	0.26034 59660 790	0.26034 59660 790	0.17561 52574 332
	0.47930 80678 419	0.26034 59660 790	0.17561 52574 332
	0.26034 59660 790	0.47930 80678 419	0.17561 52574 332
	0.33333 33333 333	0.33333 33333 333	0.14957 00444 677

Annexe C : Résultats du modèle démonstratif (fig. 4.1)

▪ *Important.*

Toutes les matrices de cette annexe sont dûes au modèle de démonstration présenté en figure 4.1

▪ *Intégrales singulières.*

- ✓ *Exemple d'évaluation de la distance entre les points de collocations et les éléments de la structure.*

dist1 =

3.0000	4.1231	3.1623
3.1623	4.0000	3.0000
2.0000	3.1623	2.2361
2.2361	3.0000	2.0000
1.0000	2.2361	1.4142
1.4142	2.0000	1.0000
0	1.4142	1.0000
1.0000	1.0000	0
1.0000	1.0000	1.4142
1.4142	0	1.0000

dist1 =

3.0000	4.0000	4.1231
3.1623	4.1231	4.0000
2.0000	3.0000	3.1623
2.2361	3.1623	3.0000
1.0000	2.0000	2.2361
1.4142	2.2361	2.0000
0	1.0000	1.4142
1.0000	1.4142	1.0000
1.0000	0	1.0000
1.4142	1.0000	0

- ✓ *Exemple de calcul de la solution élémentaire de déplacements U en intégrales singulières.*

disp2 =

1.0e-005 *

0.2112	0.1537	0.2004
0.2112	0.2174	0.2004
0	0	0
0.2112	0.1537	0.2834
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

disp2 =

1.0e-005 *

0	0	0
0	0	0
0.2112	0.1537	0.2004
0	0	0
0.2112	0.1537	0.2834
0.2112	0.2174	0.2004
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

- ✓ Exemple de calcul de la solution élémentaire de contraintes T en intégrales singulières.

const2 =

0	0	0
-0.0227	-0.0276	-0.0288
-0.0227	-0.0276	-0.0288
0	0	0
-0.0227	-0.0276	-0.0288
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

const2 =

0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
-0.0227	-0.0276	-0.0288
-0.0227	-0.0276	-0.0288
-0.0227	-0.0276	-0.0288
0	0	0
0	0	0

- ✓ Exemple de calcul des matrices élémentaires singulières $AS(k1)$.

k1 =

1.0e-003 *

0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
-0.2261	-0.2742	0.2860
0.4522	-0.5484	-0.5720
0	0	0
0.4522	-0.5484	0.5720
0	0	0

k1 =

1.0e-003 *

0	0	0
0	0	0
0.4522	-0.5484	-0.5720
0	0	0
0.4522	-0.5484	0.5720
-0.2261	-0.2742	0.2860
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

- ✓ Exemple de calcul des matrices élémentaires singulières $B1(k2)$.

k2 =

1.0e-007 *

0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0.0700	0.1018	-0.0664
0.1400	0.1018	0.1328
0	0	0
-0.1400	0.1018	-0.2656
0	0	0

k2 =

1.0e-007 *

0	0	0
0.0700	0.1018	-0.0664
0.1400	0.1018	0.1328
-0.1400	0.1018	-0.2656
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

✓ Assemblage de k_1 .

```

kk1 =

1.0e-003 *

    0.4522    0   -0.5484   -0.5720    0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0
    0.4522    0   -0.5484    0.5720    0    0    0    0    0    0
   -0.2261    0   -0.2742    0.2860    0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0

```

```

kk1 =

    0.0009   -0.0006   -0.0005   -0.0011    0    0    0    0    0    0
   -0.0002    0.0003    0   -0.0003    0    0    0    0    0    0
    0.0005    0   -0.0005    0.0006    0    0    0    0    0    0
    0.0002    0.0006   -0.0003   -0.0003    0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0

```

```

kk1 =

    0.0009   -0.0006   -0.0005   -0.0011    0    0    0    0    0    0
   -0.0002    0.0003    0   -0.0003    0    0    0    0    0    0
    0.0005    0   -0.0001    0.0006   -0.0005   -0.0006    0    0    0    0
    0.0002    0.0006   -0.0003   -0.0003    0    0    0    0    0    0
         0    0    0.0005    0   -0.0005    0.0006    0    0    0    0
         0    0   -0.0002    0   -0.0003    0.0003    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0    0

```

```

kk1 =

    0.0009   -0.0006   -0.0005   -0.0011    0    0    0    0    0    0
   -0.0002    0.0003    0   -0.0003    0    0    0    0    0    0
    0.0005    0    0.0004    0.0000   -0.0005   -0.0011    0    0    0    0
    0.0002    0.0006   -0.0005    0.0000    0   -0.0003    0    0    0    0
         0    0    0.0005    0   -0.0005    0.0006    0    0    0    0
         0    0    0.0002    0.0006   -0.0003   -0.0003    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0    0
         0    0    0         0    0    0    0    0    0    0

```

kk1 =

0.0009	-0.0006	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0	0	0
-0.0002	0.0003	0	-0.0003	0	0	0	0	0	0
0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0
0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003	0	0	0	0
0	0	0.0005	0	-0.0001	0.0006	-0.0005	-0.0006	0	0
0	0	0.0002	0.0006	-0.0003	-0.0003	0	0	0	0
0	0	0	0	0.0005	0	-0.0005	0.0006	0	0
0	0	0	0	-0.0002	0	-0.0003	0.0003	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

kk1 =

0.0009	-0.0006	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0	0	0
-0.0002	0.0003	0	-0.0003	0	0	0	0	0	0
0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0
0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003	0	0	0	0
0	0	0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011	0	0
0	0	0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003	0	0
0	0	0	0	0.0005	0	-0.0005	0.0006	0	0
0	0	0	0	0.0002	0.0006	-0.0003	-0.0003	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

kk1 =

0.0009	-0.0006	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0	0	0
-0.0002	0.0003	0	-0.0003	0	0	0	0	0	0
0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0
0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003	0	0	0	0
0	0	0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011	0	0
0	0	0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003	0	0
0	0	0	0	0.0005	0	-0.0001	0.0006	-0.0005	-0.0006
0	0	0	0	0.0002	0.0006	-0.0003	-0.0003	0	0
0	0	0	0	0	0	0.0005	0	-0.0005	0.0006
0	0	0	0	0	0	-0.0002	0	-0.0003	0.0003

kk1 =

0.0009	-0.0006	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0	0	0
-0.0002	0.0003	0	-0.0003	0	0	0	0	0	0
0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011	0	0	0	0
0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003	0	0	0	0
0	0	0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011	0	0
0	0	0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003	0	0
0	0	0	0	0.0005	0	0.0004	0.0000	-0.0005	-0.0011
0	0	0	0	0.0002	0.0006	-0.0005	0.0000	0	-0.0003
0	0	0	0	0	0	0.0005	0	-0.0005	0.0006
0	0	0	0	0	0	0.0002	0.0006	-0.0003	-0.0003

✓ Assemblage de k2.

kk2 =

1.0e-007 *

0.1400	0	0.1018	0.1328	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.1400	0	0.1018	-0.2656	0	0	0	0	0	0
0.0700	0	0.1018	-0.0664	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

kk2 =

1.0e-007 *

0.2800	0.1328	0.1018	0.2346	0	0	0	0	0	0
0.0700	-0.0664	0	0.1018	0	0	0	0	0	0
-0.1400	0	0.1018	-0.2656	0	0	0	0	0	0
-0.0700	-0.2656	0.1018	0.0355	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

kk2 =

1.0e-007 *

0.2800	0.1328	0.1018	0.2346	0	0	0	0	0	0
0.0700	-0.0664	0	0.1018	0	0	0	0	0	0
-0.1400	0	0.2418	-0.2656	0.1018	0.1328	0	0	0	0
-0.0700	-0.2656	0.1018	0.0355	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.1400	0	0.1018	-0.2656	0	0	0	0
0	0	0.0700	0	0.1018	-0.0664	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

kk2 =

1.0e-007 *

0.2800	0.1328	0.1018	0.2346	0	0	0	0	0	0
0.0700	-0.0664	0	0.1018	0	0	0	0	0	0
-0.1400	0	0.3818	-0.1328	0.1018	0.2346	0	0	0	0
-0.0700	-0.2656	0.1718	-0.0309	0	0.1018	0	0	0	0
0	0	-0.1400	0	0.1018	-0.2656	0	0	0	0
0	0	-0.0700	-0.2656	0.1018	0.0355	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

▪ *Intégrales régulières.*

- ✓ *Exemple de calcul de la solution élémentaire de déplacements U en intégrales régulières.*

1.0e-005 *			1.0e-005 *		
0	0	0	0.2112	0.1537	0.2004
0.6337	0.4481	0.6337	0.2004	0.1584	0.2112
0	0	0	0.3168	0.2004	0.2834
0	0	0	0.2834	0.2112	0.3168
0.3168	0.6337	0.4481	0.6337	0.2834	0.4481
0.2834	0.4481	0.6337	0.4481	0.3168	0.6337
0.2112	0.3168	0.2834	0	0	0
0.2004	0.2834	0.3168	0	0	0
0.1584	0.2112	0.2004	0.6337	0.6337	0.4481
0.1537	0.2004	0.2112	0	0	0

- ✓ *Exemple de calcul de la solution élémentaire de contraintes T en intégrales régulières.*

const1 =			const1 =		
-0.0025	-0.0016	-0.0016	-0.0057	-0.0025	-0.0161
-0.0029	-0.0014	-0.0014	-0.0061	-0.0029	-0.0227
-0.0057	-0.0025	-0.0029	-0.0227	-0.0057	-0.0227
-0.0061	-0.0029	-0.0025	0	0	0
-0.0227	-0.0057	-0.0061	0	0	0
-0.0161	-0.0061	-0.0057	-0.0227	-0.0161	-0.0227
0	0	0	0	0	0
-0.0227	-0.0161	-0.0227	-0.0161	-0.0227	-0.0057
0	0	0	-0.0057	-0.0227	-0.0029
0	0	0	-0.0061	-0.0161	-0.0025

- ✓ *Exemple de calcul des matrices élémentaires régulières AR.*

k3 =			k3 =		
1.0e-006 *			1.0e-006 *		
0.0356	0.0259	0.0259	0	0	0
0.0338	0.0267	0.0267	0.1069	0.0267	0.0356
0.0535	0.0338	0.0338	0.1069	0.0338	0.0478
0.0478	0.0356	0.0356	0.0756	0.0356	0.0535
0.1069	0.0478	0.0478	0.0535	0.0478	0.0756
0.0756	0.0535	0.0535	0.0478	0.0535	0.1069
0	0	0	0.0356	0.0756	0.1069
0.1069	0.1069	0.1069	0	0	0
0.1069	0.1069	0.1069	0.0267	0.1069	0.0756
0	0	0	0	0	0

✓ Exemple de calcul des matrices élémentaires régulières $B2(k4)$.

k4 =

1.0e-003 *

0	0	0
-0.3839	-0.0240	-0.0427
-0.3839	-0.0486	-0.1030
-0.2714	-0.0427	-0.0960
-0.0960	-0.1030	-0.2714
-0.1030	-0.0960	-0.3839
-0.0427	-0.2714	-0.3839
0	0	0
-0.0240	-0.3839	-0.2714
0	0	0

k4 =

1.0e-003 *

0	0	0
-0.3839	-0.2714	-0.0427
0	0	0
-0.2714	-0.3839	-0.0960
-0.0960	-0.3839	-0.2714
-0.1030	-0.2714	-0.3839
-0.0427	-0.0960	-0.3839
0	0	0
-0.0240	-0.0427	-0.2714
-0.0274	-0.0486	-0.3839

✓ Exemple de calcul des matrices élémentaires régulières $ARR(k5)$.

k5 =

0	0	0
-0.0012	-0.0001	-0.0001
-0.0012	-0.0001	-0.0003
-0.0008	-0.0001	-0.0003
-0.0003	-0.0003	-0.0008
-0.0003	-0.0003	-0.0012
-0.0001	-0.0008	-0.0012
0	0	0
-0.0001	-0.0012	-0.0008
0	0	0

k5 =

0	0	0
-0.0012	-0.0008	-0.0001
0	0	0
-0.0008	-0.0012	-0.0003
-0.0003	-0.0012	-0.0008
-0.0003	-0.0008	-0.0012
-0.0001	-0.0003	-0.0012
0	0	0
-0.0001	-0.0001	-0.0008
-0.0001	-0.0001	-0.0012

▪ Assemblage des intégrales élémentaires régulières :

✓ Assemblage de k_3 :

$kk_3 =$

$1.0e-006 *$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1069	0	0.0756	0.1069	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0535	0	0.1069	0.0756	0	0	0	0	0	0
0.0478	0	0.0756	0.1069	0	0	0	0	0	0
0.0356	0	0.0535	0.0478	0	0	0	0	0	0
0.0338	0	0.0478	0.0535	0	0	0	0	0	0
0.0267	0	0.0356	0.0338	0	0	0	0	0	0
0.0259	0	0.0338	0.0356	0	0	0	0	0	0

$kk_3 =$

$1.0e-006 *$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1069	0	0.0756	0.1069	0	0	0	0	0	0
0.1069	0.0756	0	0.1069	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1069	0.0478	0.1069	0.1512	0	0	0	0	0	0
0.0956	0.0535	0.0756	0.2139	0	0	0	0	0	0
0.0713	0.0338	0.0535	0.0956	0	0	0	0	0	0
0.0676	0.0356	0.0478	0.1069	0	0	0	0	0	0
0.0535	0.0259	0.0356	0.0676	0	0	0	0	0	0
0.0519	0.0267	0.0338	0.0713	0	0	0	0	0	0

$kk_3 =$

$1.0e-006 *$

0	0	0.1069	0	0.0535	0.0478	0	0	0	0
0.1069	0	0.1512	0.1069	0.0478	0.0535	0	0	0	0
0.1069	0.0756	0	0.1069	0	0	0	0	0	0
0	0	0.1069	0	0.0756	0.1069	0	0	0	0
0.1069	0.0478	0.1069	0.1512	0	0	0	0	0	0
0.0956	0.0535	0.0756	0.2139	0	0	0	0	0	0
0.0713	0.0338	0.1069	0.0956	0.1069	0.0756	0	0	0	0
0.0676	0.0356	0.0956	0.1069	0.0756	0.1069	0	0	0	0
0.0535	0.0259	0.0713	0.0676	0.0535	0.0478	0	0	0	0
0.0519	0.0267	0.0676	0.0713	0.0478	0.0535	0	0	0	0

$kk_3 =$

$1.0e-006 *$

0	0	0.2139	0.0756	0.0535	0.0956	0	0	0	0
0.1069	0	0.2268	0.2139	0.0478	0.1069	0	0	0	0
0.1069	0.0756	0	0.1069	0	0	0	0	0	0
0	0	0.1069	0	0.0756	0.1069	0	0	0	0
0.1069	0.0478	0.2139	0.2268	0	0.1069	0	0	0	0
0.0956	0.0535	0.0756	0.2139	0	0	0	0	0	0
0.0713	0.0338	0.1604	0.1435	0.1069	0.1512	0	0	0	0
0.0676	0.0356	0.1435	0.1604	0.0756	0.2139	0	0	0	0
0.0535	0.0259	0.1069	0.1014	0.0535	0.0956	0	0	0	0
0.0519	0.0267	0.1014	0.1069	0.0478	0.1069	0	0	0	0

kk3 =

1.0e-006 *

0	0	0.2139	0.0756	0.1069	0.0956	0.0356	0.0338	0	0
0.1069	0	0.2268	0.2139	0.0956	0.1069	0.0338	0.0356	0	0
0.1069	0.0756	0	0.1069	0.1069	0	0.0535	0.0478	0	0
0	0	0.1069	0	0.1512	0.1069	0.0478	0.0535	0	0
0.1069	0.0478	0.2139	0.2268	0	0.1069	0	0	0	0
0.0956	0.0535	0.0756	0.2139	0.1069	0	0.0756	0.1069	0	0
0.0713	0.0338	0.1604	0.1435	0.1069	0.1512	0	0	0	0
0.0676	0.0356	0.1435	0.1604	0.0756	0.2139	0	0	0	0
0.0535	0.0259	0.1069	0.1014	0.1069	0.0956	0.1069	0.0756	0	0
0.0519	0.0267	0.1014	0.1069	0.0956	0.1069	0.0756	0.1069	0	0

kk3 =

1.0e-006 *

0	0	0.2139	0.0756	0.1604	0.1435	0.0356	0.0676	0	0
0.1069	0	0.2268	0.2139	0.1435	0.1604	0.0338	0.0713	0	0
0.1069	0.0756	0	0.1069	0.2139	0.0756	0.0535	0.0956	0	0
0	0	0.1069	0	0.2268	0.2139	0.0478	0.1069	0	0
0.1069	0.0478	0.2139	0.2268	0	0.1069	0	0	0	0
0.0956	0.0535	0.0756	0.2139	0.1069	0	0.0756	0.1069	0	0
0.0713	0.0338	0.1604	0.1435	0.2139	0.2268	0	0.1069	0	0
0.0676	0.0356	0.1435	0.1604	0.0756	0.2139	0	0	0	0
0.0535	0.0259	0.1069	0.1014	0.1604	0.1435	0.1069	0.1512	0	0
0.0519	0.0267	0.1014	0.1069	0.1435	0.1604	0.0756	0.2139	0	0

kk3 =

1.0e-006 *

0	0	0.2139	0.0756	0.1604	0.1435	0.0713	0.0676	0.0267	0.0259
0.1069	0	0.2268	0.2139	0.1435	0.1604	0.0676	0.0713	0.0259	0.0267
0.1069	0.0756	0	0.1069	0.2139	0.0756	0.1069	0.0956	0.0356	0.0338
0	0	0.1069	0	0.2268	0.2139	0.0956	0.1069	0.0338	0.0356
0.1069	0.0478	0.2139	0.2268	0	0.1069	0.1069	0	0.0535	0.0478
0.0956	0.0535	0.0756	0.2139	0.1069	0	0.1512	0.1069	0.0478	0.0535
0.0713	0.0338	0.1604	0.1435	0.2139	0.2268	0	0.1069	0	0
0.0676	0.0356	0.1435	0.1604	0.0756	0.2139	0.1069	0	0.0756	0.1069
0.0535	0.0259	0.1069	0.1014	0.1604	0.1435	0.1069	0.1512	0	0
0.0519	0.0267	0.1014	0.1069	0.1435	0.1604	0.0756	0.2139	0	0

kk3 =

1.0e-006 *

0	0	0.2139	0.0756	0.1604	0.1435	0.1069	0.1014	0.0267	0.0519
0.1069	0	0.2268	0.2139	0.1435	0.1604	0.1014	0.1069	0.0259	0.0535
0.1069	0.0756	0	0.1069	0.2139	0.0756	0.1604	0.1435	0.0356	0.0676
0	0	0.1069	0	0.2268	0.2139	0.1435	0.1604	0.0338	0.0713
0.1069	0.0478	0.2139	0.2268	0	0.1069	0.2139	0.0756	0.0535	0.0956
0.0956	0.0535	0.0756	0.2139	0.1069	0	0.2268	0.2139	0.0478	0.1069
0.0713	0.0338	0.1604	0.1435	0.2139	0.2268	0	0.1069	0	0
0.0676	0.0356	0.1435	0.1604	0.0756	0.2139	0.1069	0	0.0756	0.1069
0.0535	0.0259	0.1069	0.1014	0.1604	0.1435	0.2139	0.2268	0	0.1069
0.0519	0.0267	0.1014	0.1069	0.1435	0.1604	0.0756	0.2139	0	0

✓ Assemblage de k_5 :

$kk_5 =$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0012	0	-0.0008	-0.0012	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0003	0	-0.0012	-0.0008	0	0	0	0	0	0
-0.0003	0	-0.0008	-0.0012	0	0	0	0	0	0
-0.0001	0	-0.0003	-0.0003	0	0	0	0	0	0
-0.0001	0	-0.0003	-0.0003	0	0	0	0	0	0
-0.0001	0	-0.0001	-0.0001	0	0	0	0	0	0
-0.0001	0	-0.0001	-0.0001	0	0	0	0	0	0

$kk_5 =$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0012	0	-0.0008	-0.0012	0	0	0	0	0	0
-0.0012	-0.0008	0	-0.0012	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0006	-0.0003	-0.0012	-0.0016	0	0	0	0	0	0
-0.0006	-0.0003	-0.0008	-0.0023	0	0	0	0	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0003	-0.0006	0	0	0	0	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0003	-0.0006	0	0	0	0	0	0
-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0003	0	0	0	0	0	0
-0.0002	-0.0001	-0.0001	-0.0003	0	0	0	0	0	0

$kk_5 =$

0	0	-0.0012	0	-0.0003	-0.0003	0	0	0	0
-0.0012	0	-0.0016	-0.0012	-0.0003	-0.0003	0	0	0	0
-0.0012	-0.0008	0	-0.0012	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.0012	0	-0.0008	-0.0012	0	0	0	0
-0.0006	-0.0003	-0.0012	-0.0016	0	0	0	0	0	0
-0.0006	-0.0003	-0.0008	-0.0023	0	0	0	0	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0006	-0.0006	-0.0012	-0.0008	0	0	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0006	-0.0006	-0.0008	-0.0012	0	0	0	0
-0.0001	-0.0001	-0.0003	-0.0003	-0.0003	-0.0003	0	0	0	0
-0.0002	-0.0001	-0.0003	-0.0003	-0.0003	-0.0003	0	0	0	0

$kk_5 =$

0	0	-0.0023	-0.0008	-0.0003	-0.0006	0	0	0	0
-0.0012	0	-0.0024	-0.0023	-0.0003	-0.0006	0	0	0	0
-0.0012	-0.0008	0	-0.0012	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.0012	0	-0.0008	-0.0012	0	0	0	0
-0.0006	-0.0003	-0.0023	-0.0024	0	-0.0012	0	0	0	0
-0.0006	-0.0003	-0.0008	-0.0023	0	0	0	0	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0009	-0.0009	-0.0012	-0.0016	0	0	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0009	-0.0009	-0.0008	-0.0023	0	0	0	0
-0.0001	-0.0001	-0.0004	-0.0004	-0.0003	-0.0006	0	0	0	0
-0.0002	-0.0001	-0.0004	-0.0004	-0.0003	-0.0006	0	0	0	0

kk5 =

0	0	-0.0023	-0.0008	-0.0006	-0.0006	-0.0001	-0.0001	0	0
-0.0012	0	-0.0024	-0.0023	-0.0006	-0.0006	-0.0001	-0.0001	0	0
-0.0012	-0.0008	0	-0.0012	-0.0012	0	-0.0003	-0.0003	0	0
0	0	-0.0012	0	-0.0016	-0.0012	-0.0003	-0.0003	0	0
-0.0006	-0.0003	-0.0023	-0.0024	0	-0.0012	0	0	0	0
-0.0006	-0.0003	-0.0008	-0.0023	-0.0012	0	-0.0008	-0.0012	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0009	-0.0009	-0.0012	-0.0016	0	0	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0009	-0.0009	-0.0008	-0.0023	0	0	0	0
-0.0001	-0.0001	-0.0004	-0.0004	-0.0006	-0.0006	-0.0012	-0.0008	0	0
-0.0002	-0.0001	-0.0004	-0.0004	-0.0006	-0.0006	-0.0008	-0.0012	0	0

kk5 =

0	0	-0.0023	-0.0008	-0.0009	-0.0009	-0.0001	-0.0003	0	0
-0.0012	0	-0.0024	-0.0023	-0.0009	-0.0009	-0.0001	-0.0003	0	0
-0.0012	-0.0008	0	-0.0012	-0.0023	-0.0008	-0.0003	-0.0006	0	0
0	0	-0.0012	0	-0.0024	-0.0023	-0.0003	-0.0006	0	0
-0.0006	-0.0003	-0.0023	-0.0024	0	-0.0012	0	0	0	0
-0.0006	-0.0003	-0.0008	-0.0023	-0.0012	0	-0.0008	-0.0012	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0009	-0.0009	-0.0023	-0.0024	0	-0.0012	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0009	-0.0009	-0.0008	-0.0023	0	0	0	0
-0.0001	-0.0001	-0.0004	-0.0004	-0.0009	-0.0009	-0.0012	-0.0016	0	0
-0.0002	-0.0001	-0.0004	-0.0004	-0.0009	-0.0009	-0.0008	-0.0023	0	0

kk5 =

0	0	-0.0023	-0.0008	-0.0009	-0.0009	-0.0003	-0.0003	-0.0001	-0.0001
-0.0012	0	-0.0024	-0.0023	-0.0009	-0.0009	-0.0003	-0.0003	-0.0001	-0.0001
-0.0012	-0.0008	0	-0.0012	-0.0023	-0.0008	-0.0006	-0.0006	-0.0001	-0.0001
0	0	-0.0012	0	-0.0024	-0.0023	-0.0006	-0.0006	-0.0001	-0.0001
-0.0006	-0.0003	-0.0023	-0.0024	0	-0.0012	-0.0012	0	-0.0003	-0.0003
-0.0006	-0.0003	-0.0008	-0.0023	-0.0012	0	-0.0016	-0.0012	-0.0003	-0.0003
-0.0003	-0.0001	-0.0009	-0.0009	-0.0023	-0.0024	0	-0.0012	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0009	-0.0009	-0.0008	-0.0023	-0.0012	0	-0.0008	-0.0012
-0.0001	-0.0001	-0.0004	-0.0004	-0.0009	-0.0009	-0.0012	-0.0016	0	0
-0.0002	-0.0001	-0.0004	-0.0004	-0.0009	-0.0009	-0.0008	-0.0023	0	0

kk5 =

0	0	-0.0023	-0.0008	-0.0009	-0.0009	-0.0004	-0.0004	-0.0001	-0.0002
-0.0012	0	-0.0024	-0.0023	-0.0009	-0.0009	-0.0004	-0.0004	-0.0001	-0.0001
-0.0012	-0.0008	0	-0.0012	-0.0023	-0.0008	-0.0009	-0.0009	-0.0001	-0.0003
0	0	-0.0012	0	-0.0024	-0.0023	-0.0009	-0.0009	-0.0001	-0.0003
-0.0006	-0.0003	-0.0023	-0.0024	0	-0.0012	-0.0023	-0.0008	-0.0003	-0.0006
-0.0006	-0.0003	-0.0008	-0.0023	-0.0012	0	-0.0024	-0.0023	-0.0003	-0.0006
-0.0003	-0.0001	-0.0009	-0.0009	-0.0023	-0.0024	0	-0.0012	0	0
-0.0003	-0.0001	-0.0009	-0.0009	-0.0008	-0.0023	-0.0012	0	-0.0008	-0.0012
-0.0001	-0.0001	-0.0004	-0.0004	-0.0009	-0.0009	-0.0023	-0.0024	0	-0.0012
-0.0002	-0.0001	-0.0004	-0.0004	-0.0009	-0.0009	-0.0008	-0.0023	0	0

Résumé :

Le travail effectué dans le cadre de ce mémoire, se rapporte au développement et la mise en œuvre d'un modèle numérique concrétisant la méthode d'éléments frontières "BEM", pour l'analyse des problèmes tridimensionnels de la mécanique de la rupture linéaire dans les solides élastiques isotropes fissurés. En plus ce modèle peut être appliqué sur les solides finis et infinis.

La présente méthode "BEM" se base sur la résolution des équations intégrales de frontière, notamment, celle en déplacement. Cette dernière est résolue exclusivement sur la frontière de la fissure, dont les inconnues physiques sont les déplacements et/ou contraintes qui sont déterminés sur une seule surface de la fissure (problèmes symétriques).

Deux applications pour l'évaluation du facteur d'intensité de contraintes en mode I dans le cas des fissures circulaires et elliptiques sont réalisées. Les résultats obtenus dans la présente étude sont très concluants.

Mots clés : méthode d'éléments frontières, équations intégrales, rupture mécanique, facteur d'intensité de contraintes.

Abstract :

The present study consists on developing a numerical model for the analysis by the boundary element method (BEM) for solving fracture mechanics problems in three dimensional linear elastic isotropic solids. In addition, the method can be applied to solve fracture problems in both unbounded and bounded isotropic media.

The present element formulation is namely based on displacement boundary integral equations. While the latter is collocated exclusively on the cracked boundary, and is discredited only on one side of the crack surface (case of symmetrical problems), the displacements and/or stresses are used as unknown variables on the cracked boundary (crack surface).

Two numerical examples of stress intensity factors (SIFs) calculation are given for isotropic solids for an elliptical plane and a penny-shaped crack. The (SIFs) obtained with the present formulation are in good agreement with existing solutions.

Key words: boundary element method, integral equations, fracture mechanics, stress intensity factor.

ملخص :

تم في هذه الدراسة إعداد برنامج رقمي، لحل مختلف المشكلات الخاصة بميكانيك التشوهات، الثلاثية الأبعاد في الأجسام الصلبة المتصدعة، بطريقة العناصر الحدودية "BEM"، زد على ذلك، أن هذه الطريقة يمكن تطبيقها على الأجسام المنتهية وغير منتهية.

ترتكز هذه الطريقة، على حل المعادلات التفاضلية و نخص بالذكر تلك المتعلقة بالانتقالات، أين هذه الأخيرة على حدود الشق أو الصدع وذلك لاستخراج التقلات و/ أو الاجهادات على حد واحد فقط لهذا الصدع بدل الاثنين (الحالات المتناظرة).

تطبيقين تم إعدادهما من أجل حساب عامل تأثير الاجهادات، ذو الصنف الأول الخاص بالتشققات ذات كل من الشكل بسم القطع الناقص والدائري. النتائج المحصلة عليها أثبتت فعالية هذه الطريقة، وتطابق جيد مع الحلول المتواجدة سابقاً.

كلمات المفتاح : طريقة العناصر الحدودية "BEM"، المعادلات التفاضلية، ميكانيك التشوهات، عامل تأثير الاجهادات.