

INSTITUT NATIONAL DE GENIE MECANIQUE
I.N.G.M BOUMERDES

LABORATOIRE DE THERMIQUE
ET COMBUSTION

MEMOIRE DE MAGISTER

SPECIALITE : GENIE MECANIQUE

SOUTENU PAR
LOUNICI MOHAND SAID



THEME

**TRANSFERTS CONVECTIFS TRIDIMENSIONNELS
DANS UNE CAVITE TRAPEZOÏDALE**



le ¹²~~03~~ décembre 1997
devant le jury

MM : D. KALACHE	Maitre de conférences	Président
M. BOUHADF	Professeur	Directeur
M. BOUSSAID	Chargé de cours	Co-directeur
A. HARHAD	Maitre de conférences	Examineur
A. BOUHDJAR	Chargé de recherche	Examineur
N. ZERAIBI	Chargé de cours	Examineur

N° : 06/97

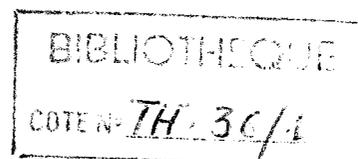
INSTITUT NATIONAL DE GENIE MECANIQUE
I.N.G.M BOUMERDES

LABORATOIRE DE THERMIQUE
ET COMBUSTION

MEMOIRE DE MAGISTER

SPECIALITE : GENIE MECANIQUE

SOUTENU PAR
LOUNICI MOHAND SAID



THEME

**TRANSFERTS CONVECTIFS TRIDIMENSIONNELS
DANS UNE CAVITE TRAPEZOÏDALE**

le ¹⁷~~08~~ décembre 1997
devant le jury

MM :	D. KALACHE	Maitre de conférences	Président
	M. BOUHADF	Professeur	Directeur
	M. BOUSSAID	Chargé de cours	Co-directeur
	A. HARHAD	Maitre de conférences	Examineur
	A. BOUHDJAR	Chargé de recherche	Examineur
	N. ZERAIBI	Chargé de cours	Examineur

N° : 06/97

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قال الله عز وجل:

"و في الارض آيات للموقنين، وفي أنفسكم أفلا تبصرون، وفي السماء رزقكم وما توعدون،
فورب السماء والارض إنه لحق مثل ما أنكم تنطقون."

"أم خَلَقُوا من غير شئ أم هم الخالقون، أم خلقوا السماوات و الارض بل لا يوقنون"

"أ فحسبتم أنما خلقناكم عبثا وأنكم إلينا لا ترجعون، فتعالى الله الملك الحق"

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم

"لا تنزل قدما عبد يوم القيامة حتى يسأل عن أربع خصال:

- عن عمره، فيما أفناه
- وعن شبابه، فيما أبلاه
- وعن ماله من أين اكتسبه و فيما انفقته "
- وعن علمه، ماذا عمل فيه

REMERCIEMENTS

Cette recherche a été effectuée au Laboratoire de Thermique et Combustion de l'Institut National de Génie Mécanique de Boumerdes, sous la direction du Professeur M. BOUHADEF et de Monsieur M. BOUSSAID.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur M. BOUHADEF pour avoir accepté de diriger ce travail et pour l'aide et le soutien qu'il m' a apportés.

Que Monsieur M. BOUSSAID trouve ici toute ma reconnaissance et mes remerciements pour m'avoir proposé cette étude et permis grâce à son aide et son soutien de la mener à bien.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur D. KALACHE qui a bien voulu présider le jury de soutenance.

Je tiens également à adresser mes remerciements à Messieurs A. HARHAD, A. BOUHDJAR et N. ZERAÏBI pour avoir accepté de faire partie du Jury.

Je ne peux oublier de remercier tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

Enfin, je voudrai remercier toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin pour la réalisation de ce travail, en particulier A.BENKHELIFA, N. HEDEILI, S. MENIA et O. DJEBEILI.

Résumé

Nous réalisons une étude numérique basée sur la méthode des volumes finis, de la convection naturelle dans une cavité trapézoïdale chauffée par la paroi basse et refroidie par la paroi inclinée. Cette configuration est caractéristique particulièrement, des systèmes de type comble d'habitation ou distillateur solaire.

Dans beaucoup de travaux concernant les cavités, l'hypothèse de bidimensionnalité est adoptée sans aucune justification physique. Mais cette hypothèse simplificatrice, risque de conduire à des solutions n'ayant aucune existence réelle.

Afin de caractériser numériquement, d'une façon fiable, l'écoulement et le transfert de chaleur, ayant lieu dans une telle configuration, le calcul tridimensionnel s'avère hautement souhaité.

Nous étudions l'écoulement s'établissant dans un système de type considéré, tout en tenant compte du caractère tridimensionnel, pour ainsi évaluer l'ampleur de celui ci et son influence sur le transfert de chaleur.

En vue de valider le modèle utilisé, on procède d'abord à une comparaison de nos résultats avec ceux fournis par la littérature. Il apparaît une concordance appréciable.

L'aspect tridimensionnel de l'écoulement est exploré. A cet effet, plusieurs techniques sont adoptées pour mettre en évidence le caractère tridimensionnel de l'écoulement. L'influence des paramètres physiques et géométriques est examinée. Il en ressort que la tridimensionnalité est nettement dépendante des rapports de forme et du nombre de Rayleigh, l'influence de τ quant à elle est faible.

Une comparaison avec les résultats obtenus par le modèle bidimensionnel est réalisée. On déduit que le flux thermique calculé par le modèle bidimensionnel peut en général, être considéré comme un bon estimé du transfert de chaleur dans la cavité. Par ailleurs, dans un souci de mettre à la disposition de l'ingénieur un outil lui permettant d'évaluer le transfert thermique ayant lieu dans une configuration de type considéré, une corrélation est proposée.

Mots Clefs : Convection naturelle, Cavité trapézoïdale, Ecoulement tridimensionnel,
Volumes finis

ملخص

نعمد إلى دراسة مركزة على طريقة عددية مبنية أساسا على طريقة الهجوم المنتهية، للحمل الطبيعي داخل حاوية ذات شكل شبه منحرف، مستخنة من الاسفل و مبردة من جانبها المنحرف. هذه الحاوية تتميز على الخصوص بعض التجهيزات المستعملة في التطبيقات الشمسية و المعمارية.

في عدة أبحاث سالفة، أعتمدت فرضية الجريان ذو البعدين دون إثبات فيزيائي. بيد أن هذه الفرضية، قد تؤدي إلى الحصول على حلول غير واقعية. ومن ثم تنجلي أهمية الدراسة المركزة على الجريان الثلاثي الابعاد.

ندرس الجريان الناتج داخل حاوية من النوع المعتبر مع الاخذ بعين الاعتبار البعد الثالث، لتقدير أهمية المركبة الثالثة و تأثيرها على الانتقال الحراري.

بداية، نقوم بمقارنة النتائج المحصل عليها مع نظيراتها الموجودة في المراجع، وذلك لغرض المصادقة على النموذج المصاغ. نلاحظ توافق كلي بينها.

بعد ذلك، نخص بالدراسة الجريان من حيث صبغته البعدية. ندرس تأثير الوسائط الهندسية و الفيزيائية. نستنتج ان عدد ريلي ومعامل الشكل يؤثران بطريقة واضحة. فيما يخص قيمة تيطي، فإن تأثيرها طفيف.

نقوم بعد ذلك، بمقارنة النتائج مع تلك المحصل عليها باعتماد فرضية الجريان ذو البعدين. نستنتج أن التدفق الحراري المحصل عليه بواسطة النموذج ذو البعدين يعتبر قيمة تقريبية جيدة. علاوة على ذلك، وحتى نضع بين يدي المهندس أداة تمكنه من حساب التدفق الحراري داخل حاوية من النوع المعتبر، نقترح علاقة تربط عدد نيسالت بسائر الوسائط.

مفاتيح: الحمل الطبيعي، الجريان الثلاثي الابعاد، شكل شبه منحرف، طريقة الهجوم المنتهية.

SUMMARY

We realize a numerical study based on the finites volumes method, of the natural convection within a trapezoidal cavity heated by the low wall and cooled by the inclined one. This configuration defines particularly, systems such as solar stills or fulfils habitation.

In many works concerning cavities, the two-dimensional hypothesis is adopted without no physical justification. But this simplifying hypothesis, may lead to solutions that are not realistic.

In order to characterise numerically, in a reliable manner, the flow and the heat transfer, taking place in such a configuration, a three-dimensional calculation is highly appreciated.

We study the flow being established in the ~~considered~~ type system, ~~taking into account its~~ three-dimensional character, in order to evaluate its size and influence on the heat transfer.

To validate the used model, we proceed first, to a comparison of our results with the provided ones in the literature. It shows a substantial accordance.

The three-dimensional aspect of the flow is explored, several techniques are adopted to put it in evidence. The influence of the physical and geometrical parameters is examined. It is found that the three-dimensionality is clearly dependent on the aspect ratios and the Rayleigh number. The influence of the wall incline is not important.

A comparison with results obtained by the bidimensional model is achieved. We deduce that the thermal flow calculated by bidimensional model, can be in general, considered as a good estimate of the heat transfer in the cavity. Furthermore, in order to put at the disposal of the engineer a tool allowing him to evaluate the thermal transfer taking place in the considered type configuration, a correlation is proposed. This one constitutes a precious tool, because it involves several parameters defining such a configuration.

Keys Words : Natural convection , Trapezoidal cavity , Three-dimensional flow,
Finite volume.

INTRODUCTION	3
---------------------------	---

Chapitre 1: **ETAT DE L'ART**

1. Introduction	5
2. La convection naturelle en cavité fermée	5
2.1. Convection de Rayleigh-Bénard	5
2.2. Cavité verticale différentiellement chauffée	6
3. Position du problème	7
4. Revue bibliographique	9
4.1. Revue bibliographique sur les problèmes tridimensionnels	9
4.2. Revue bibliographiques sur les cavités non rectangulaires	13
5. Remarque	14

Chapitre 2: **FORMULATION MATHEMATIQUE**

1. Hypothèses	15
2. Equations de base	16
3. Adimensionnement	17
4. Conditions initiales et aux limites	19
4.1. Conditions thermiques	19
4.2. Conditions mécaniques	20
5. Commentaire	20

Chapitre 3: **MODELISATION NUMERIQUE ET RESOLUTION**

1. Méthodes numériques.....	21
2. Justification du choix de la méthode de discrétisation	21
3. Principe de la méthode des volumes finis.....	23
3.1. Discrétisation de l'équation générale de transport sans le terme convectif	24

3.2. Les quatre règles de base	26
3.3. Convection-diffusion	28
3.4. Formulation généralisée	29
3.5. L'équation discrétisée pour le cas général	33
3.6. Détermination du champ d'écoulement	36
3.7. Equations des quantités de mouvement	38
3.8. Correction de la pression et de la vitesse	39
3.9. L'équation de correction de la pression	40
3.10. L'algorithme ``SIMPLE``	41
3.11. Un algorithme révisé	42
3.11.1. L'équation de pression	42
3.11.2. L'algorithme ``SIMPLER``	43
4. Discrétisation du domaine	44
5. Résolution du système algébrique obtenu	46
6. Démarche d'extension du code de calcul au cas 3D	50
7. Conclusion	52

Chapitre 4: COMPARAISON ET VALIDATION

1. Cas bidimensionnel	53
1.1. Cavité verticale différentiellement chauffée	53
1.2. Convection de Rayleigh-Bénard	56
2. Cas tridimensionnel	57
2.1. Cavité verticale différentiellement chauffée	57
2.2. Convection de Rayleigh-Bénard	59
3. Comparaison avec des résultats expérimentaux pour une cavité trapézoïdale ...	59
4. Conclusion	59

Chapitre 5: RESULTATS ET INTERPRETATION**Partie 1: ETUDE DES CHAMPS THERMIQUE ET DYNAMIQUE****- ETUDE TRIDIMENSIONNELLE -**

1. Etude du champ thermique	60
1.1. Répartition du champ thermique	60
1.2. Influence des différents paramètres sur la répartition tridimensionnelle du champ thermique	61
2. Etude de l'écoulement	70
3. Etude de l'écoulement transversal	75
4. Influence des différents paramètres sur le caractère tridimensionnel de l'écoulement	75
5. Conclusion	81

Partie 2: ETUDE DES CHAMPS THERMIQUE ET DYNAMIQUE**- APPROCHE BIDIMENSIONNELLE -**

1. Introduction	82
2. Etude des champs thermiques et dynamiques	82
2.1. Influence du nombre de Rayleigh	82
2.2. Influence de l'angle d'inclinaison de la paroi supérieure	92
2.3. Influence du rapport de forme	92
3. Conclusion	92

Partie 3: ETUDE DU TRANSFERT THERMIQUE

1. Comparaison des résultats bi et tridimensionnels	95
2. Etude du transfert thermique moyen	96
5.2. Etude de l'influence des différents paramètres sur le transfert de chaleur	96
5.3. Etablissement d'une corrélation	98

3. Etude du transfert thermique local	102
4. Conclusion	102
CONCLUSION GENERALE	104
ANNEXES	106
Annexe 1: Traitement du terme source	106
Annexe 2: Traitement du terme instationnaire	107
Annexe 3: Schémas de discrétisation du terme de convection-diffusion	110
Annexe 4: L'algorithme de THOMAS	116
BIBLIOGRAPHIE	118

- a : Diffusivité thermique.
 a_p : Coefficient se rapportant aux noeud P.
 a_M ($M = E, W, N, S, T, B$) : Coefficient de l'équation discrétisée.
 a_{nb} : Coefficient se rapportant aux noeuds voisins de P.
 A_m ($m = e, w, n, s, t, b$) : Aire de l'interface.
 $A(|P|)$: Fonction du nombre de Peclet.
 b : Terme constant dans l'équation discrétisée.
 $B(|P|)$: Fonction du nombre de Peclet.
 C_p : Chaleur massique à pression constante.
 D_m : Conductance thermique ($D = \frac{\Gamma}{\delta x}$).
 f : Facteur de poids.
 Fz : Rapport de forme suivant z (ZL / H).
 F_m : Débit massique ($F = \rho u$).
 g : Accélération de la pesanteur.
 Gr : Nombre de Grashof $Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T H^3}{\mu^2}$.
 H : Hauteur médiane de la cavité.
 $H2$: Petite hauteur de la cavité (fig 2.1).
 J_m : Flux total
 k : Conductivité thermique.
 Nu : Nombre de Nusselt.
 P : Pression statique.
 $P_{m(e, w, n, s)}$: Nombre de Peclet ($P_m = F_m / D_m$).
 Pr : Nombre de Prandtl ($Pr = \mu C_p / k$).
 Ra : Nombre de Rayleigh ($Ra = Gr * Pr$).
 Rf : Rapport de forme (XL / H).
 S_ϕ : Terme source relatif à la variable ϕ .
 S_p : Coefficient de ϕ_p dans l'expression du terme source linéarisée.
 S_c : Partie constante de la linéarisation du terme source.
 t : Temps.
 T : Température adimensionnelle.
 u, v, w : Composantes de la vitesse adimensionnelle suivant respectivement $x, y,$ et z .
 \vec{V} : Vecteur vitesse.
 x, y, z : Coordonnées spatiales adimensionnelles.
 XL, YL, ZL : Grandeurs caractéristiques de la cavité (fig 2.1).

Symboles latins

ϕ	: Variable dépendante.
β	: Le coefficient de dilatation thermique.
μ	: Viscosité dynamique.
ρ	: Masse volumique.
λ	: Conductivité thermique du fluide.
Γ	: Coefficient de diffusion dans l'équation générale de transport.
ν	: Viscosité cinématique.
θ	: Angle d'inclinaison de la paroi supérieure.

Indices inférieurs

m	: Moyen.
c	: Relatif à la paroi chaude.
f	: Relatif à la paroi froide.
ϕ	: Relatif à la variable ϕ .
E	: Noeud voisin à l'est du noeud P.
e	: Interface du volume de contrôle entre P et E.
W	: Noeud voisin à l'ouest du noeud P.
w	: Interface du volume de contrôle entre P et W.
N	: Noeud voisin au nord du noeud P.
n	: Interface du volume de contrôle entre P et N.
S	: Noeud voisin au sud du noeud P.
s	: Interface du volume de contrôle entre P et S.
T	: Noeud voisin avant du noeud P.
t	: Interface du volume de contrôle entre P et T.
B	: Noeud voisin arrière du noeud P.
b	: Interface du volume de contrôle entre P et B.

Indices supérieurs

$+$: Adimensionnel.
I	: Relatif au temps $t + \Delta t$.
O	: Relatif au temps t .
$*$: Relatif à un estimé.
$\`$: Relatif à une correction de la variable dépendante.

L'étude de la convection naturelle de fluides confinés dans les cavités, a suscité un grand nombre de travaux de recherche, notamment sous les aspects expérimentaux et numériques.

L'intérêt porté à ce type de problème est motivé par les raisons suivantes :

- A l'origine, cet effort était suscité par les diverses applications techniques; en effet, les retombées technologiques sont importantes dans de nombreuses utilisations industrielles telles que les distillateurs solaires, l'isolation thermique dans l'habitat, la sécurité des réacteurs nucléaires, le refroidissement des organes électroniques et les processus de solidification.
- D'autre part et d'un point de vue fondamental, les instabilités thermoconvectives constituent un problème clé dans la théorie de la transition vers la turbulence. Par ailleurs, ce problème est devenu un problème test pour comparer divers algorithmes numériques utilisés pour résoudre les équations de Navier-Stockes [2], [4], [7], [68].

Dans beaucoup de travaux concernant les cavités, l'hypothèse de bidimensionnalité est adoptée sans aucune justification physique. Mais dans ces conditions, cette hypothèse simplificatrice, risque de conduire à des solutions numériques n'ayant aucune existence réelle.

Le cas qui fait l'objet de notre intérêt, est une enceinte de forme trapézoïdale, chauffée par la paroi basse et refroidie par la paroi inclinée. Cette géométrie est caractéristique particulièrement, de configurations de type comble d'habitation ou distillateur solaire.

En vue de caractériser numériquement, d'une façon fiable, l'écoulement et le transfert de chaleur, ayant lieu dans une telle configuration, le calcul tridimensionnel s'avère à priori, hautement souhaité.

Nous étudions dans ce travail, l'écoulement qui s'établit dans une cavité trapézoïdale, tout en tenant compte de sa composante tridimensionnelle. Nous évaluons l'ampleur de celle ci, ainsi que son influence sur le transfert de chaleur, pour ainsi analyser entre autres, le bien fondé de l'hypothèse de bidimensionnalité. Ce n'est qu'alors, qu'on peut prétendre caractériser d'une façon fiable, l'écoulement et le transfert thermique dans la dite configuration. Ce qui peut être, en pratique, à l'origine de toute amélioration fondée des systèmes industriels.

La présente étude est organisée comme suit:

- Nous donnons succinctement, dans le premier chapitre, des notions sur la convection naturelle dans une cavité fermée. Comme le cas qui fait l'objet de notre étude, présente deux

particularités, en l'occurrence le calcul tridimensionnel et la géométrie non rectangulaire; on donne une revue bibliographique des travaux qui ont touché à ces deux volets.

- Le deuxième chapitre consiste en la formulation mathématique du problème.

- Au troisième chapitre, nous passons à sa résolution. Nous donnons les bases de la mise en œuvre de la méthode de résolution.

- Afin de vérifier nos résultats, nous les confrontons avec ceux de la littérature, objet du quatrième chapitre.

- L'étude tridimensionnelle de l'écoulement et du champ thermique est donnée dans la première partie du cinquième chapitre.

On donne dans la deuxième partie de ce chapitre, les résultats d'approche bidimensionnelle sur les champs thermiques et dynamique.

Enfin, l'étude du transfert thermique a fait l'objet de la dernière partie de ce chapitre.

Chapitre 1

ETAT DE L'ART

1. INTRODUCTION :

Bien que la convection naturelle de fluides confinés dans les cavités n'ait cessé de faire l'intérêt d'un nombre important de recherches, tant sur le plan théorique, expérimental que numérique; elle est loin d'être totalement maîtrisée. Le nombre sans cesse croissant de travaux en témoigne. Toutefois, l'ensemble des travaux qui ont porté sur ce problème, a permis de dégager un certain nombre de concepts le caractérisant. Le présent chapitre est consacré au développement de certaines notions théoriques relatives à ce problème et en particulier les études qui ont trait à notre cas.

2. CONVECTION NATURELLE EN CAVITE FERMEE :

Il est connu que les écoulements de convection naturelle en cavité fermée relèvent de deux catégories de problèmes, suivant que l'orientation de la sollicitation (gradient de température) est normale ou colinéaire au champ de gravité.

Il ressort des études menées sur ces deux catégories de configurations, des résultats qu'on résume comme suit :

2.1. La convection de Rayleigh - Bénard :

La convection de Rayleigh-Bénard est l'appellation assignée à la convection naturelle au sein d'une couche horizontale de fluide, maintenue entre deux parois portées à des températures uniformes et constantes; la paroi inférieure étant à une température plus élevée que celle de la paroi supérieure. Cette configuration dans laquelle le gradient de température est colinéaire au champ de pesanteur et orienté vers le bas peut présenter un état de repos du fluide .

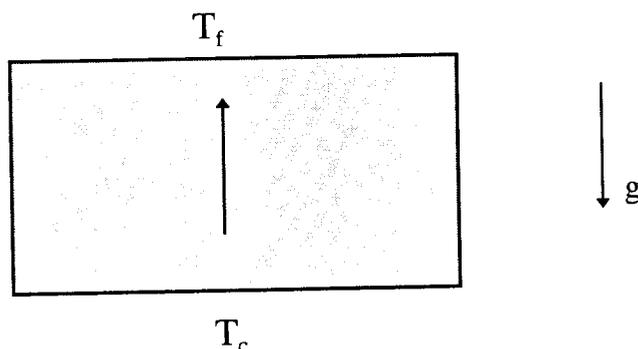


fig 1.1

Lorsque l'écart de température excède une certaine valeur, l'équilibre mécanique du fluide est rompu, et un mouvement convectif se déclenche [68].

2.2. Convection naturelle dans une cavité verticale différentiellement chauffée :

Cette configuration appelée *window problème* [71], est caractérisée par l'existence d'un gradient de température non colinéaire à la gravité, qui engendre par conséquent un mouvement du fluide pour un faible écart de température entre les parois actives. La convection dans ce type de configuration est caractérisée par des structures stables à dominance bidimensionnelle jusqu'à des nombres de Rayleigh élevés.

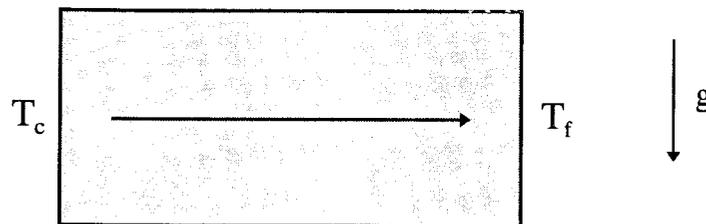


fig 1.2

Dès 1961, Eckert et Carlson [71] ont proposé la classification suivante des régimes d'écoulements qui se produisent dans une telle configuration, à savoir :

- Le régime conductif : pour des nombres de Rayleigh $Ra < 10^3$
- Le régime intermédiaire ou de transition : $10^3 \leq Ra < 10^4$
- Le régime de couches limites séparées : $Ra \geq 10^4$

Le régime de couches limites est caractérisé par des gradients horizontaux de température importants près de la paroi et une zone centrale stratifiée, pratiquement au repos.

Bien que pour des nombres de Rayleigh élevés, l'épaisseur de la couche limite étant mince, rend difficile la mise au point d'un calcul précis [51]; des tentatives de classification des différents régimes ont été enregistrées. Janssen et al [51] stipule que l'écoulement laminaire stationnaire (pour une cavité cubique) perd sa stabilité à un nombre de Raleigh critique

(Ra_c), d'approximativement égal à $1.75 \cdot 10^8$, puis change de caractère à travers différentes étapes appelées *bifurcations* jusqu'à ce qu'un état totalement turbulent s'établisse à un nombre de Rayleigh assez élevé.

3. POSITION DU PROBLEME :

Cette classification de la convection naturelle dans une cavité fermée, étant retenue, il serait intéressant de situer le cas de la cavité trapézoïdale chauffée par le bas par rapport à ces deux catégories de configurations.

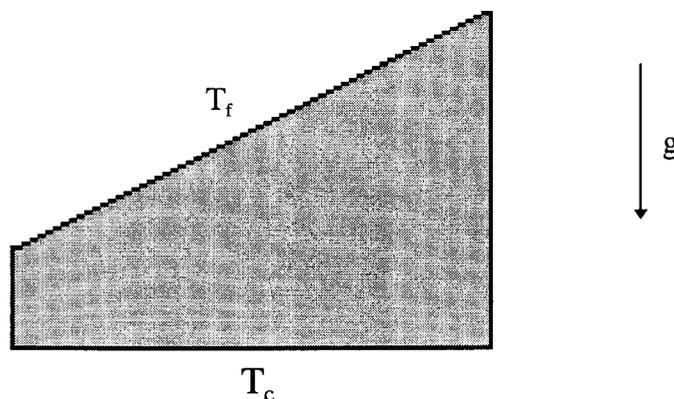


fig 1.3

D'emblée, on aurait tendance à penser à la convection de Rayleigh Bénard. Mais, la présence d'une frontière inclinée induit un gradient horizontal de température. Ainsi, la cavité trapézoïdale échappe à une classification immédiate.

En toute rigueur, l'écoulement de convection naturelle dans une telle enceinte peut être modélisé par les équations tridimensionnelles de Navier - Stokes et celle de l'énergie, tout en tenant compte du caractère turbulent pour des nombres de Rayleigh élevés [68]. Il est évident, vu la complexité d'un tel problème, que tout un chacun aurait tendance à se limiter à une modélisation bidimensionnelle, mais cette hypothèse simplificatrice nous rend à priori, réticents quant à la validité des solutions obtenues par une telle approche.

Il est donc nécessaire de mener une étude tridimensionnelle qui, elle seule hormis l'expérience, peut rendre compte de la réalité, de la façon la plus fiable. Ce n'est qu'alors qu'on peut analyser le bien fondé de l'hypothèse de bidimensionnalité.

On s'intéresse à la caractérisation des champs thermique et dynamique qui ont lieu dans une telle configuration. On évalue l'influence des différents paramètres physiques et géométriques, à savoir l'inclinaison de la paroi supérieure, le facteur de forme et la sollicitation, sur le comportement dynamique et thermique du fluide dans la dite cavité.

On s'intéresse, en particulier, à l'étude du caractère tridimensionnel de l'écoulement. L'étude du transfert de chaleur a aussi fait l'objet de notre intérêt.

4. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE:

4.1. Revue bibliographique sur les problèmes tridimensionnels:

Au cours de ces dernières décennies, un très grand nombre d'investigations sur la convection naturelle dans les cavités a vu le jour. La plupart ont porté essentiellement sur des modélisations bidimensionnelles. Ceci est dû d'une part, à la lourdeur du calcul tridimensionnel et d'autre part aux limitations des moyens de calcul et des algorithmes développés à cet effet. Pourtant, pour simuler des situations pratiques, le calcul tridimensionnel s'avère hautement souhaité [8], [25]. Néanmoins, un nombre notable d'études avec des maillages plus au moins fins a été mené, surtout au cours de ces dernières années, grâce à l'évolution de l'informatique d'une part et au développement des méthodes de calcul d'autre part. Nous présentons dans ce qui suit, un échantillon d'études faites dans ce contexte

- K. AZZIZ et J.Dý Hellums (1967) [3] ont étudié la convection naturelle d'un fluide chauffé par le bas dans une cavité de forme rectangulaire, en deux et trois dimensions. Des solutions stationnaires ont été obtenues pour des Rayleigh allant jusqu'à 3500. Cette étude semble être la première résolution détaillée des équations du mouvement et de l'énergie en trois dimensions. Le maillage adopté est de $11*11*11$.

- RUBY KRISHNAMURTI (1970) [43] a examiné par le biais d'une approche expérimentale les différentes transitions qui apparaissent dans une couche horizontale avant la turbulence, pour des nombres de Prandtl compris entre 1 et 10^4 , dans une gamme des nombres de Rayleigh variant de 10^3 à 10^5 . Il affirme que la deuxième transition apparaît aux environs d'un nombre de Rayleigh égale à douze (12) fois le Rayleigh critique (le Ra_c correspond au passage de la conduction à la convection). Cette transition est un passage de cellules bidimensionnelles permanentes à des cellules régulières permanentes. Cette transition est accompagnée d'un changement brusque de la pente de la courbe du flux de chaleur.

- H. OZOE, K. YAMAMOTO, S.W. CHURCHILL et H. SAYAMA (1976) [18] ont développé un modèle numérique tridimensionnel pour étudier la convection naturelle laminaire dans trois types de configurations, en l'occurrence le cas d'une cavité cubique

chauffée par le bas, celui d'un long canal et enfin entre deux plans horizontaux infinis. L'aspect tridimensionnel a été mis en évidence par le tracé de la trajectoire d'une particule. Pour le cas de la cavité, deux modes de circulation ont été détectés, suivant le type de conditions initiales adopté.

- H.Q. YANG , K.T. YANG et T.R. LLOYD (1987) [24] ont mené une étude numérique pour suivre les transitions de l'écoulement laminaire pour le cas d'une cavité rectangulaire inclinée (angle variable), en trois dimensions.

- D.W. Pepper (1987) [10] a prospecté le cas de la convection naturelle dans une cavité parallélépipédique différentiellement chauffée soit par le bas ou sur les côtés, pour des nombres de Rayleigh de 10^4 et 10^5 et pour un Prandtl égale 1.0 La méthode de résolution est `` *Time-split finite-element* `` , une méthode qui combine la rapidité et la simplicité de la méthode des différences finies avec la précision et les fondements mathématiques de la méthode des éléments finis.

- A.CHIKHAOUI, M.K MASLANIK et R.L. SANI (1987) [20] ont réalisé une étude numérique du régime stationnaire en trois dimensions pour une cavité rectangulaire verticale différentiellement chauffée par la méthode des éléments finis de Galerkin. Les deux surfaces verticales sont maintenues à des températures différentes et constantes, les autres surfaces sont supposées parfaitement conductrices. La cavité est remplie par un fluide de nombre de Prandtl $Pr=0.71$ dans une gamme des nombres de Grashoff allant jusqu'à $1.2 \cdot 10^4$. Les résultats présentés sont obtenus avec une grille de $11 \times 9 \times 53$ pour la moitié de la cavité en imposant la symétrie. L'aspect tridimensionnel de l'écoulement est illustré et comparé avec la solution bidimensionnelle.

- A.AFRID and A.Zebib (1989) [23] ont étudié numériquement la convection naturelle d'un fluide à très petit nombre de Prandtl dans une cavité rectangulaire à surface de dessus libre ou rigide. L'objectif de l'étude est d'étudier les caractéristiques de l'écoulement tridimensionnel

et de déterminer la valeur du nombre de Grashoff critique (Gr_{crit}) pour laquelle l'écoulement devient dépendant du temps. Les équations régissant le phénomène ont été résolues par la méthode des volumes finis.

Quand la valeur du nombre de Grashoff atteint celle de Gr_{crit} , l'écoulement devient oscillatoire. La transition à l'instationnarité est fonction de la géométrie et du type de la surface de dessus. L'épaisseur de la cavité a un effet remarquable sur la transition au régime oscillatoire, il a été trouvé que réduire l'épaisseur de 2 à 1, conduit vers un Gr_{crit} beaucoup plus élevé, rendant les résultats de la simulation bidimensionnelle complètement inadéquats.

- TORU FUSEGI, JAE MIN, KUNIO KUWAHARA & B.FAROUK (1990) [8] ont exploré par le biais d'un calcul numérique tridimensionnel, basé sur la méthode des volumes finis, la convection naturelle de l'air dans une cavité cubique différentiellement chauffée par les faces verticales pour des nombres de Rayleigh $10^3 \leq Ra \leq 10^6$

. L'existence de la composante de vitesse selon z , est clairement visible bien que de faible valeur. Ils ont procédé à une comparaison des résultats tridimensionnels obtenus avec les solutions bidimensionnelles. Les premières montrent un accord raisonnable avec les mesures expérimentales.

- T.FUSEGI, J.HYUN and K.KUWAHARA (1990) [9]

Cette étude consiste en l'exploitation du régime transitoire relatif au cas précédent.

- Trois autres études ont été réalisées par les mêmes auteurs.

L'étude (8) a été reconduite à travers la première investigation[25], pour des Rayleighs: $10^3 \leq Ra \leq 10^{10}$. La grille maximale utilisée est de $122*62*62$.

Une comparaison entre le calcul bidimensionnel et tridimensionnel a été menée. Elle a permis de déduire l'utilité de l'approche tridimensionnelle, pour déterminer avec précision les caractéristiques de l'écoulement et du transfert de chaleur notamment pour des nombres de Rayleigh élevés.

- La seconde étude[7] consiste en l'exploitation du régime instationnaire de l'étude (8) pour $Ra=8.5 \cdot 10^6$. La répartition de la température aux surfaces horizontales est linéaire. Le calcul du régime variable indique clairement la nature périodique de l'écoulement.

- Et enfin, ils ont étudiés [5], l'effet des conditions thermiques aux surfaces horizontales. Deux types de surfaces ont été spécifiés: adiabatiques et parfaitement conductrices. Le calcul a été fait pour Rayleigh égale à 10^5 et 10^6 .

- D.MUKUTMONI et K.T.YANG (1991) [26]

Une étude numérique de la convection de Rayleigh-Benard dans des cavités de faibles rapports de forme avec des parois latérales isolées a été menée. On s'intéresse aux bifurcations et à la physique du champ d'écoulement pour trois rapport de forme 3.3:1.9:1; 3.5:2.1:1 et 4:2:1 et trois nombres de Prandtl 0.5, 0.71 et 2.5.

- B.W.WEBB, T.L.BERGMAN (1992) [28]

Le travail porte sur une étude expérimentale et théorique de la convection naturelle dans une cavité parallélépipédique sollicitée par un flux uniforme à travers les deux surfaces verticales, les autres parois étant maintenues à une température constante. Les équations ont été résolues par la méthode des volumes finis.

- R. J. A. JANSSEN, R.A.W.M HENKES et C.J.HOOGENDOORN (1992) [51]

Une étude numérique du régime stationnaire et périodique de l'écoulement de l'air dans une cavité cubique différentiellement chauffée par les parois verticales a été réalisée par la méthode des volumes finis.

- R.HERNANDEZ et R.L.FREDERICK (1993) [17]

L'étude a porté sur le calcul numérique tridimensionnel de la convection naturelle de l'air dans six cavités parallélépipédiques chauffées par le bas. Un nombre de Rayleigh supercritique ($Ra=8.10^3$), a été fixé pour suivre l'évolution des structures convectives en fonction uniquement du rapport de forme de la cavité.

-Y. ZHANG et G. A . RUFF (1994) [33].

Ils ont utilisé une technique expérimentale basée sur la tomographie optique utilisant des données interférométriques pour évaluer l'écoulement tridimensionnel et le transfert de chaleur dans une cavité cubique différentiellement chauffée. La comparaison des résultats obtenus avec des mesures de températures indépendantes a montré que cette technique

expérimentale peut permettre d'obtenir des résultats d'écoulements tridimensionnels complexes ayant une résolution spatiale suffisante pour vérifier les résultats d'une simulation numérique directe.

4.2. Revue bibliographique sur les cavités bidimensionnelles non rectangulaires:

La plupart des études ayant porté sur des cavités, se sont focalisées aux géométries rectangulaires. C'est uniquement à la fin des années soixante dix que Flack, Konopnicki et Roocke [57] et Flack [55] ont traité pour la première fois, à travers une étude expérimentale le cas d'une cavité triangulaire pour une plage des nombres de Rayleigh de: $7510^4 \pi Ra \pi 10^6$. Par la suite D. Poulikakos et A Bejan (1989) [50] ont repris, toujours par le biais de l'expérience, la même géométrie pour des Rayleighs supérieurs ($10^6 - 10^9$). Haydee Salmun (1993) [46] a résolu le problème numériquement pour des facteurs de forme compris entre 0.1 et 1.0 et un nombre de Rayleigh variant entre 10^2 et 10^5 pour des nombres de Prandtl correspondant à ceux de l'air et de l'eau. Il ressort de son étude que la structure générale de l'écoulement correspond à une cellule convective unique pour des valeurs basses du nombre de Rayleigh et une structure multicellulaire pour des valeurs élevées de ce paramètre. Une dépendance de l'écoulement et du transfert de chaleur des trois paramètres a été mis en évidence pour un nombre de Grashoff supérieur à 10^3 .

Le cas d'une géométrie trapézoïdale a fait l'objet d'une étude numérique et d'une approche expérimentale réalisées par T . S . Lee (1984) [47]. L'influence du nombre de Rayleigh, du facteur de forme ainsi que de l'inclinaison a été mis en évidence. Par la suite Milovan Peric' (1993) [21] en reprenant le même problème numériquement par la méthode des volumes finis, a démontré la fausseté de la solution proposée par T . S . Lee, en proposant des résultats basés sur un maillage indépendant qui diffèrent qualitativement et quantitativement de ceux de Lee.

Dj . Kalache (1987) [68] a de son côté réalisé une étude numérique, suivie d'une approche expérimentale pour caractériser l'écoulement ainsi que le transfert thermique au sein d'une cavité trapézoïdale chauffée par le bas. Une analyse de stabilité des solutions bidimensionnelles a été développée pour dégager le domaine de validité de ces solutions. D'après cette étude, le transfert de chaleur dépend explicitement du nombre de Rayleigh. Flack [55] affirme quant à lui, que pour un Rayleigh donné, le fait de diminuer H/L (pour le

cas triangulaire) induit une augmentation du nombre de Nusselt. Poulikakos et Béjan [50] constatent pour leur part, une légère dépendance de Nu en fonction du facteur de forme.

Enfin la cavité de forme parallélogramme a fait l'objet d'une étude réalisée par J . M . Hyun et B . S . Choi (1990) [53]. Ils étudient la convection naturelle par une approche numérique basée sur la méthode des différences finies. La possibilité d'utiliser ce dispositif comme une diode thermique, en contrôlant l'angle d'inclinaison de la cavité, a été mis en relief. Des résultats sont présentés pour des angles d'inclinaison de 0° , $\pm 15^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$ et des nombres de Rayleigh de 10^5 , 10^6 et 10^7 . L'influence du nombre de Prandtl ainsi que du facteur de forme est examinée. Par la suite G . N . Facas (1993) [41], a cherché pour une géométrie semblable, à caractériser numériquement l'écoulement pour des nombres de Grashoff allant de $9.0 \cdot 10^3$ à $1.25 \cdot 10^5$ et des angles d'inclinaison de -30° à $+30^\circ$ (à partir de la verticale). La présence d'une structure multicellulaire a été remarquée pour tous les Grashoffs et les angles d'inclinaison considérés. Il a été trouvé que la structure de l'écoulement dépend pertinemment des conditions initiales, et dans certains cas un écoulement instationnaire a été constaté en cas de spécification de " fausses " conditions initiales.

5. REMARQUE:

Nous constatons à travers notre recherche bibliographique et dans la limite des documents réunis, que le cas envisagé dans le présent travail, en l'occurrence l'étude tridimensionnelle pour une cavité non rectangulaire, n'a fait l'objet d'aucune étude antérieure.

Chapitre 2

FORMULATION MATHÉMATIQUE

1. HYPOTHESES :

Afin d'atténuer la lourdeur du problème, régi dans le cas le plus général, par des équations phénoménologiques d'une complexité ardue, nous adoptons les hypothèses simplificatrices suivantes, que les particularités du cas que nous traitons permettent de justifier.

* Pour le cas des écoulements de convection naturelle, il est fréquent, voire justifié [3], d'utiliser l'approximation de Boussinesq qui repose sur les hypothèses suivantes [41],[68],[69]:

- La masse volumique du fluide est supposée constante partout sauf dans l'expression de la force de poussée d'Archimède qui est l'élément moteur de l'écoulement; toutes les autres propriétés du fluide sont indépendantes de la température et de la pression.

- Les variations de la masse volumique dans le terme de poussée sont uniquement dues aux variations de température, alors que celles liées aux variations de pression sont négligeables, ainsi en considérant des écarts de températures suffisamment faibles pour que l'on puisse se limiter au premier terme du développement de ρ on obtient l'expression linéarisée suivante:

$$\rho = \rho_m(1 - \beta(T - T_m)) \quad (2.1)$$

avec

T_m est une température de référence caractéristique du problème étudié : $T_m = (T_c + T_f)/2$
 T_c et T_f étant respectivement la température de la paroi chaude et celle de la paroi froide

$$\beta \text{ est le coefficient de dilatation thermique } \beta = \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_m} \quad (2.2)$$

* La dissipation visqueuse de l'énergie est négligeable (cette hypothèse est justifiée par les relatives faibles vitesses mises en jeu dans un mouvement de convection naturelle)

* Le fluide est considéré visqueux et newtonien

* On s'intéresse au régime laminaire. Pour cela, en s'inspirant de l'étude réalisée par Flack [68] qui donne pour le cas d'une cavité triangulaire chauffée par le bas des valeurs du nombre de Grashoff de transition vers la turbulence se situant aux alentours de 10^5 ; on se place dans des marges de sollicitations jugées adéquates.

* Le régime stationnaire est obtenu comme une solution limite des équations instationnaires.

2. EQUATIONS DE BASE :

Le mouvement de convection naturelle est gouverné par les équations de continuité et celles de Navier - Stokes qui dérivent respectivement des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, couplées à l'équation de conservation d'énergie.

Moyennant les hypothèses sus citées, le mouvement sera décrit par les équations (2.3) suivantes:

Equation de continuité:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2.3.a)$$

Equation des quantités de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_m} \vec{\nabla} p + \frac{\rho}{\rho_m} \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.3.b)$$

Equation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = a \nabla^2 T \quad (2.3.c)$$

- ν, a et \vec{g} sont respectivement la viscosité cinématique, la diffusivité thermique et l'accélération de la pesanteur.

3. ADIMENSIONNEMENT :

On introduit ici, des grandeurs adimensionnelles qui permettent d'une part, d'écrire les équations avec un minimum de paramètres, et d'autre part, de conférer une généralité aux résultats numériques. Ainsi, pour ramener les équations phénoménologiques sous une forme adimensionnelle, il est nécessaire de définir, moyennant des grandeurs de référence, des changements de variable.

Grandeurs de référence :

H : la hauteur médiane de la section droite verticale est la longueur de référence.

avec $H=(H_2+Y_L)/2$ (fig 2.1).

(T_c-T_f) : est la température de référence.

a/H : la vitesse de diffusion thermique est la vitesse de référence.

H^2/a : est la grandeur de référence associée au temps.

Les variables réduites sont alors données par :

$$x^+ = x/H, \quad y^+ = y/H, \quad z^+ = z/H$$

$$u^+ = (u * H) / a, \quad v^+ = (v * H) / a, \quad w^+ = (w * H) / a$$

$$T^+ = (T - T_f) / (T_c - T_f), \quad t^+ = (t * a) / H^2, \quad p^+ = (p * H^2) / (\rho_m * a^2)$$

Après développement, en omettant le signe (+), les équations (2-3) s'écrivent sous la forme adimensionnelle comme suit :

Equation de continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4.a)$$

Equations de Navier-Stokes :

suivant x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Pr \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.4.b)$$

suivant y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + Pr \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.4.c)$$

$$+ Pr * Ra * T$$

suivant z :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + Pr \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.4.d)$$

Equation d'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.4.e)$$

Avec : $Ra = Gr * Pr, \quad Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T H^3}{\mu^2} \quad \text{et} \quad Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$

Les groupements Ra, Gr et Pr étant respectivement les nombres adimensionnels de Rayleigh, Grashoff et Prandtl

On remarque que toutes les équations (2.4), étant des équations de transport, elles peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (v \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (w \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (2.5)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_\phi$$

Ceci, en affectant pour chaque équation, les termes donnés par le tableau suivant:

Equation	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Equation de continuité	1	1	0
Des quantités de mouvement suivant x	u	Pr	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
Des quantités de mouvement suivant y	v	Pr	$-\frac{\partial p}{\partial y} + Ra \cdot Pr \cdot T$
Des quantités de mouvement suivant z	w	Pr	$-\frac{\partial p}{\partial z}$
Equation d'énergie	T	1	0

4. CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES :

4.1. Conditions thermiques :

- Au temps $t = 0$, on considère le fluide porté à une température $T = (T_c + T_t)/2$
- Le caractère isotherme de la paroi horizontale et de la paroi inclinée, et l'adiabacité des parois latérales s'expriment par :

Pour $\forall t$ on a :

$$T=1 \quad \text{pour : } y = 0, \quad 0 \leq x \leq XL \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq ZL \quad (\text{paroi horizontale})$$

$$T=0 \quad \text{pour : } y = ax + b, \quad 0 \leq x \leq XL \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq ZL \quad (\text{paroi inclinée})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{pour : } x = 0 \quad \text{et} \quad x = XL, \quad 0 \leq y \leq (H2 \text{ ou } YL) \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq ZL \quad (\text{parois verticales})$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{pour : } z = 0 \quad \text{et} \quad z = ZL, \quad 0 \leq x \leq XL \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq ax + b \quad (\text{parois verticales})$$

4.2. Conditions mécaniques :

- Au temps $t = 0$, le fluide est considéré au repos : $u = v = w = 0$
- La condition d'adhérence au parois se traduit par :

Pour $\forall t$ on a :

$$u = v = w = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x = 0, x = XL & (\text{parois verticales}) \\ y = 0, y = ax + b & (\text{paroi horizontale et celle inclinée}) \\ z = 0, z = ZL & (\text{parois verticales}) \end{cases}$$

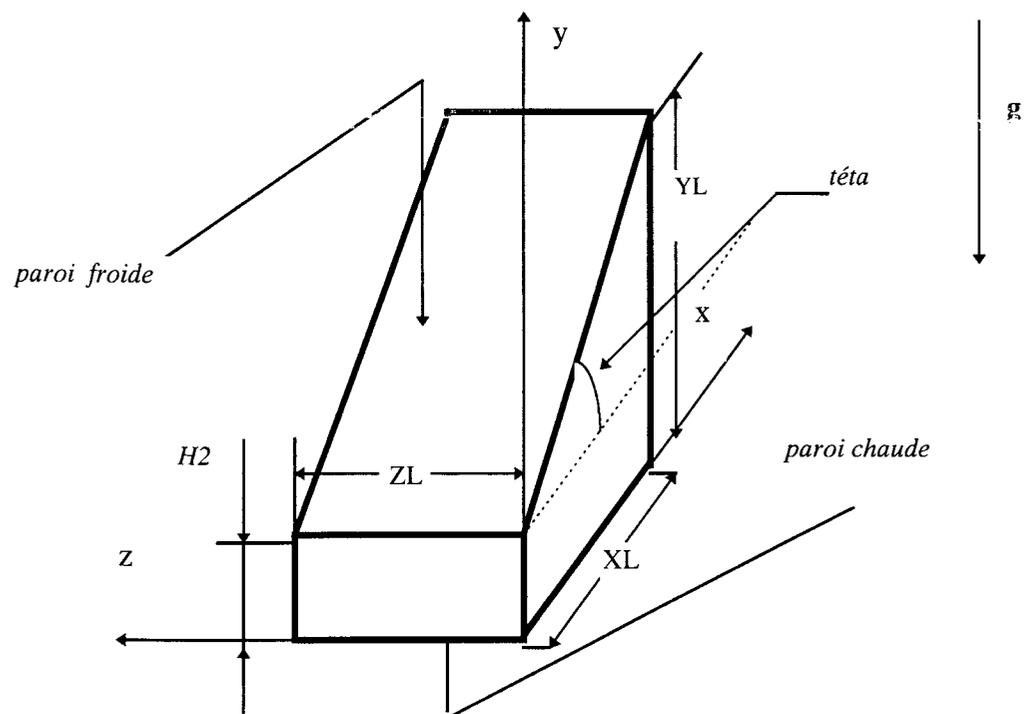


fig 2.1:

5. COMMENTAIRE:

A ce stade, le problème étant complètement formulé, la recherche de sa solution est totalement légitime. Faute de ne pouvoir obtenir analytiquement la solution exacte, on cherche une approximation de celle-ci. Pour cela, l'outil numérique s'avère agréablement performant. Au cours du chapitre suivant, nous développons, la méthode numérique utilisée.

Chapitre 3

MODÉLISATION NUMÉRIQUE ET RÉOLUTION

1. METHODES NUMERIQUES:

L'étude de la convection naturelle au sein de cavités bidimensionnelles de forme non rectangulaire (trapézoïdale par exemple) a fait l'objet d'un certain nombre d'études numériques utilisant différents schémas de discrétisation, M Elshamy en donne une revue relativement détaillée [16]. Parmi ces schémas on cite en particulier :

- La méthode des différences finies: cette méthode peut être adaptée de façon à prendre en considération la forme des géométries non rectangulaires.

- La méthode des éléments finis: elle permet par sa souplesse, de générer des maillages qui épousent la forme de la géométrie quelle que soit sa complexité.

- La méthode des volumes finis: cette méthode peut être soit à base de la méthode des différences finies, soit à base de la méthode des éléments finis; et dans chacun des deux cas, elle rejoint un des cas précédents vis à vis de formes non rectangulaires.

2. JUSTIFICATION DU CHOIX DE LA METHODE DE DISCRETISATION :

Pour résoudre le système d'équations aux dérivés partielles présenté au n° (2.4), nous avons opté pour la procédure des volumes de contrôle (ou volumes finis) développée par S.V. Patankar qui, en raison des avantages qu'elle procure, est devenue fréquemment utilisée.

Pour notre cas, ce choix est motivé par les raisons suivantes :

- Le fait que cette méthode soit bien adaptée à la formulation vitesse-pression

- Etant donné que notre étude a porté essentiellement sur la résolution des équations tridimensionnelles et du fait de la restriction de la notion de fonction de courant (qui a l'avantage de réduire le nombre d'équations à résoudre) au cas bidimensionnel [76], l'usage d'une approche basée sur les vorticités, fait intervenir six variables dépendantes, soient les trois composantes de la vorticité et trois composantes du potentiel vecteur [3], [68]. Ainsi la difficulté est accentuée comparativement à l'usage direct de la vitesse et de la pression;

ajoutons à cela le fait que la première formulation utilise des concepts difficiles à interpréter par rapport à la formulation vitesse - pression (appelée formulation aux variables primitives).

- Facilité de résolution par rapport à la formulation $\psi - \omega$ (et à fortiori du fait de la disponibilité de codes de calcul) avec une précision comparable [10]. Notons que la vorticité aux parois est difficile à spécifier et elle est à l'origine des problèmes de convergence de la solution [76].

- Enfin citons la qualité principale de cette méthode, à savoir la réduction des instabilités numériques pour des sollicitations élevées [76]. Ceci est obtenu grâce à la possibilité de choisir un schéma de discrétisation adéquat.

3. PRINCIPE DE LA METHODE DES VOLUMES DE CONTRÔLE :

L'idée d'utiliser une formulation basée sur le volume de contrôle est simple à comprendre et conduit à une interprétation physique directe.

Le domaine de calcul est divisé en un certain nombre de volumes, entourant chacun un noeud du maillage; l'équation différentielle est ensuite intégrée sur chaque volume de contrôle. Pour pouvoir évaluer ces intégrales, des profils par morceaux `` *piecewise profiles*``, traduisant la variation de (ϕ) entre les noeuds, doivent à priori être choisis. On obtient ainsi les équations discrétisées contenant les valeurs de ϕ pour un ensemble de noeuds. Ces équations discrétisées ainsi obtenues expriment le principe de conservation de la variable dépendante pour chaque volume de contrôle, exactement comme le font les équations différentielles pour un volume de contrôle infinitésimal.

L'aspect le plus attrayant de cette formulation basée sur le volume de contrôle est que la solution vérifie la conservation intégrale des quantités telles que la masse, les quantités de mouvement, l'énergie, pour un ensemble quelconque de volumes de contrôle, et bien sûr pour l'ensemble du domaine de calcul. Cette caractéristique reste valable quel que soit le nombre de points constituant le maillage. Ainsi, même pour un maillage large, la solution vérifie exactement les conservations intégrales.

Pour la méthode des volumes finis, on cherchera la solution sous forme discrète de valeurs aux noeuds. Les profils ou les fonctions d'interpolation par contre, seront considérés comme un artifice qui nous permet d'évaluer les intégrales aux interfaces.

3.1. Discrétisation de l'équation générale de transport sans le terme convectif :

Comme les équations que nous avons à résoudre se présentent toute sous la forme générale (2.5), on illustre la méthode des volumes finis à travers son application à cette équation. Dans une première étape, on considère celle ci sans le terme convectif, qui lui, fera l'objet d'un traitement séparé, en raison des particularités qu'il présente. L'équation (2.5) se ramène donc à l'équation suivante:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_{\phi} \quad (3.1)$$

Pour obtenir l'équation discrétisée de cette équation, on doit en premier lieu, définir un maillage du domaine de calcul (fig 3.1). On fixe notre attention sur le point P, qui a pour voisins les point E (east), W (west), N (nord), S (sud), T et B (suivant la troisième dimension). Les lignes en pointillés constituent les faces des volumes de contrôle.

Intégrons l'équation (3.1) sur le volume de contrôle et sur le pas de temps:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \iiint_{tsw}^{bne} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dy dz dt &= \int_t^{t+\Delta t} \iiint_{tsw}^{bne} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy dz dt \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \iiint_{tsw}^{bne} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy dz dt + \int_t^{t+\Delta t} \iiint_{tsw}^{bne} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dx dy dz dt \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \iiint_{tsw}^{bne} S_{\phi} dx dy dz dt \end{aligned}$$

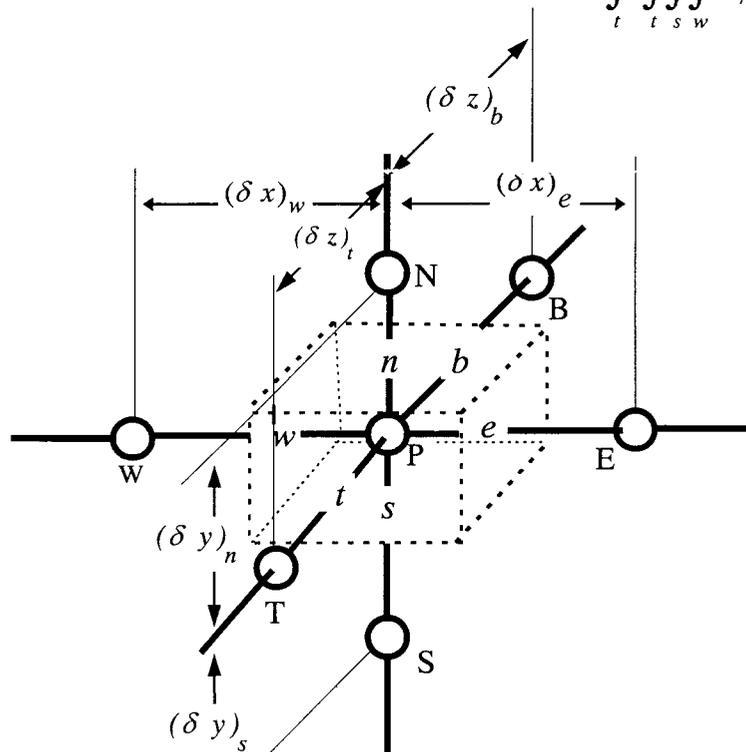


Fig 3.1

$$\begin{aligned} \left(\phi_P^1 - \phi_P^0 \right) \Delta x \Delta y \Delta z = & \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y \Delta z dt \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \Delta z dt \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b - \left(\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_t \right] \Delta x \Delta y dt + \bar{S} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \end{aligned}$$

Afin d'évaluer les dérivées de ϕ aux interfaces, on doit choisir un profil pour ϕ entre les noeuds. Si on évalue les dérivées à partir d'un profil linéaire, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\phi_P^1 - \phi_P^0 \right) \Delta x \Delta y \Delta z = & \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_e (\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w (\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w} \right] \Delta y \Delta z dt \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_n (\phi_N - \phi_P)}{(\delta y)_n} - \frac{\Gamma_s (\phi_P - \phi_S)}{(\delta y)_s} \right] \Delta x \Delta z dt \quad (3.2) \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_b (\phi_B - \phi_P)}{(\delta z)_b} - \frac{\Gamma_t (\phi_P - \phi_T)}{(\delta z)_t} \right] \Delta x \Delta y dt + \bar{S} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \end{aligned}$$

\bar{S} est la valeur moyenne de S dans le volume de contrôle.

Traitement du terme source:

Généralement ce terme est une fonction de la variable dépendante ϕ . Pour construire les équations discrétisées, on doit connaître cette dépendance. Mais on peut cependant, considérer uniquement une forme linéarisée (voir annexe 1). Le système d'équation ainsi obtenu peut être traité comme un système algébrique linéaire.

Ainsi, On exprime \bar{S} sous la forme :

$$\bar{S} = S_c + S_p \phi_p \quad (3.3)$$

Après développement (pour le traitement des instationnarités voir annexe 2), l'équation (3.1) s'écrit sous la forme discrétisée suivante:

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + b \quad (3.4)$$

Avec:

$$a_E = \frac{\Gamma_e \Delta y \Delta z}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\Gamma_w \Delta y \Delta z}{(\delta x)_w}, \quad a_N = \frac{\Gamma_n \Delta x \Delta z}{(\delta y)_n}, \quad a_S = \frac{\Gamma_s \Delta x \Delta z}{(\delta y)_s},$$

$$a_T = \frac{\Gamma_t \Delta x \Delta y}{(\delta z)_t}, \quad a_B = \frac{\Gamma_b \Delta x \Delta y}{(\delta z)_b}, \quad (3.5) \quad a_p^o = \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} \quad (3.6)$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y \Delta z + a_p^o \phi_p^o \quad (3.7)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_p^o - S_p \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (3.8)$$

Le produit $\Delta x \Delta y \Delta z$ est le volume du volume de contrôle.

Vu la diversité des formulations possibles (suivant le choix des profils), on doit arrêter des critères qui nous permettent de ne retenir que les formulations intéressantes. Pour ce faire, on exige que même pour un maillage large, on doit toujours avoir:

- 1) un comportement physique réaliste.
- 2) Conservation globale.

3.2. Les quatre règles de base :

Sur la base des conditions sus citées, on développe les règles de base suivantes:

Règle 1: Consistance aux faces des volumes de contrôle

Lorsqu'une face est commune à deux volumes de contrôle adjacents, le flux qui les traverse doit être représenté par la même expression dans les équations discrétisées pour chacun des deux volumes de contrôle.

Règle 2: Coefficients positifs

La plupart des situations qui feront notre intérêt, sont telles que la valeur de la variable ϕ en un point donné est influencée par ses valeurs aux noeuds voisins seulement à travers les processus de convection et de diffusion. Il s'ensuit qu'une augmentation de la valeur de ϕ en un noeud, engendre une augmentation (non une diminution) pour les valeurs aux noeuds voisins, les autres conditions étant fixées. Pour cela, les coefficients a_p et a_{nb} doivent avoir tous le même signe (On convient de prendre le signe positif).

Règle 3: Pente négative pour le terme source linéarisé

D'après la règle 2, les coefficients a_p et a_{nb} de l'équation (3.4) sont positifs, mais a_p peut éventuellement devenir négatif à cause du terme S_p , entraînant ainsi une possibilité d'instabilité numérique. C'est pourquoi on impose que S_p soit toujours inférieur ou égal à zéro.

Règle 4: Somme des coefficients voisins

En général, les équations différentielles gouvernantes contiennent uniquement les dérivées de la variable dépendante ϕ . Par conséquent, si la fonction ϕ vérifie les équations différentielles, $\phi + c$ (ou c est une constante arbitraire) vérifie aussi ces équations. Cette propriété doit apparaître dans les équations discrétisées c.a.d que l'équation (3.4 bis) doit rester vérifiée lorsque ; ϕ_p et ϕ_{nb} sont augmentées de c . Ce qui exige que a_p soit la somme des coefficients voisins c.a.d

$$a_p = \sum a_{nb} \quad (3.9)$$

Une autre façon de voir cette règle est que : En l'absence du terme source, si les températures (par exemple) voisines T_{nb} sont égales, la température centrale T_p doit leur être égale. Dans ces conditions, il n'y a qu'une mauvaise formulation qui peut prédire le contraire.

3.3. Convection - Diffusion :

On s'intéresse dans ce qui suit au terme convectif de l'équation (2.5). La convection est générée par un écoulement de fluide. Notre but à ce stade, est d'obtenir la solution ϕ en présence de cet écoulement.

Comme le terme convectif est lié au terme diffusion, les deux termes sont manipulés ensemble. Notons que le terme diffusion est utilisé ici dans son sens général.

Etant donné que le champ d'écoulement doit satisfaire à l'équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (3.10)$$

l'équation différentielle générale:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}) + S \quad (3.11)$$

peut s'écrire comme suit:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}) + S \quad (3.12)$$

De cette forme, il apparaît que pour des expressions de ρ, u_j, Γ et S données, toute solution ϕ ainsi que ses variantes ($\phi + \text{constante}$) vont satisfaire l'équation (3.12).

S'intéressant aux termes de convection-diffusion et comme leur traitement est similaire pour les trois directions, on considère par exemple le terme suivant x:

$$\frac{d}{d x}(\rho u \phi) = \frac{d}{d x}(\Gamma \frac{d \phi}{d x}) \quad (3.13)$$

Avec u : la vitesse suivant la direction des x

On s'intéresse dans ce qui suit, aux différents schémas de discrétisation du terme de convection-diffusion.

Considérons un flux total J tel que

$$J = \rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \quad (3.14)$$

L'équation (3.13) s'écrit : $\frac{dJ}{dx} = 0$

3.4. Formulation généralisée :

Les schémas de discrétisation du terme convection-diffusion (annexe 3) diffèrent par le choix du profil adopté pour approximer la solution du problème. Ces schémas ne sont en réalité, que des cas particuliers d'une formulation générale que nous essayerons de donner.

Considérons les nœuds i et $i+1$ séparés par une distance δ (voir figure 3.3). On s'intéresse à la représentation du flux totale J traversant l'interface entre ces deux nœuds. En utilisant l'équation (3.14), on peut écrire:

$$J^* = \frac{J\delta}{\Gamma} = P\phi - \frac{d\phi}{d(x/\delta)}$$

Où P est un nombre de Peclet, défini comme suit:

$$P = \frac{\rho u L}{\Gamma} = F/D$$

La valeur de ϕ à l'interface est la moyenne pondérée de ϕ_i et ϕ_{i+1} et la valeur du gradient

$\frac{d\phi}{d(x/\delta)}$ est un multiple de $\phi_{i+1} - \phi_i$ d'où on propose:

$$J^* = P[\alpha \phi_i + (1 - \alpha)\phi_{i+1}] - \beta(\phi_{i+1} - \phi_i) \quad (3.15)$$

avec α et β des facteurs adimensionnels de pondération dépendant de P

J^* peut encore se mettre sous la forme:

$$J^* = B\phi_i - A\phi_{i+1} \quad (3.16)$$

A et B étant des coefficients adimensionnels dépendant de P .

Remarque:

Le choix d'un schéma donné revient à un choix approprié de α et β pour l'équation (3.15) et de A et B pour l'équation (3.16).

Vu les relations qui existent entre A et B, essayons de réduire ce choix au choix d'un seul coefficient.

Propriétés de A et B:

Si $\phi_i = \phi_{i+1}$, le terme de diffusion s'annule, d'où le flux total est fonction seulement du flux de convection $\rho u \phi$:

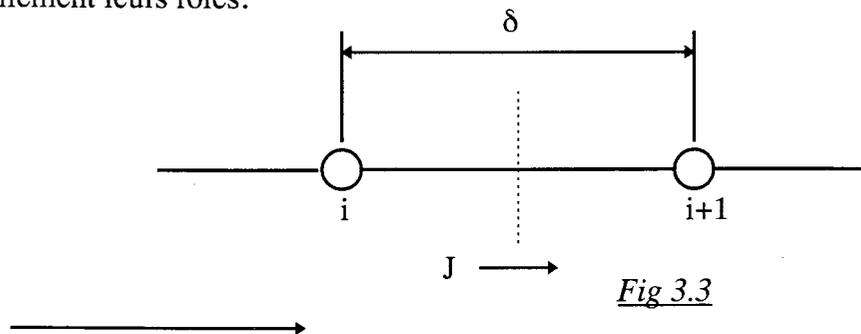
$$\text{Ainsi } J^* = P\phi_i = P\phi_{i+1} \quad (3.17)$$

En combinant cette équation avec l'équation (3.16) on obtient:

$$B = A + P \quad (3.18)$$

La deuxième propriété de A et B est genre d'une symétrie entre eux.

Un changement de sens de l'axe de coordonnées modifie P en -P, et A et B changent mutuellement leurs rôles.



Ainsi on doit avoir:

$$A(-P) = B(P)$$

ou

$$B(-P) = A(P)$$

(3.19)

Ainsi donc on peut déduire que les expressions complètes de A(P) et B(P) peuvent être connues une fois A(P) définie pour $P > 0$

Ainsi pour $P < 0$ on a: $A(P) = B(P) - P$

$$= A(-P) - P = A(|P|) - P \quad (3.20)$$

Et donc pour P quelconque, positif ou négatif on peut écrire

$$A(P) = A(|P|) + \begin{cases} -P, & 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

et on a pour B(P), en utilisant l'équation (3.18)

$$B(P) = A(|P|) + || P, 0 || \tag{3.22}$$

et ainsi en combinant les équations (3.16) et (3.18) on peut écrire:

$$\begin{aligned} J^* - P\phi_i &= A(\phi_i - \phi_{i+1}) \quad (a) \\ J^* - P\phi_{i+1} &= B(\phi_i - \phi_{i+1}) \quad (b) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Deux relations qui seront utilisées ultérieurement.

Si on applique maintenant la relation (3.16) aux interfaces e et w, on obtient la formulation convection-diffusion générale suivante:

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W \tag{3.24}$$

avec:

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + || -F_e, 0 || \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + || F_w, 0 || \\ a_p &= a_E + a_w + (F_e - F_w) \end{aligned}$$

Les différents schémas préalablement définis peuvent maintenant être vus comme des choix particuliers de la fonction A(|P|) et ainsi on définit le tableau suivant:

tableau 3.1: La fonction A(|P|) pour chacun des schémas.

Schéma	expression de A(P)
Centré	1-0.5 P
Upwind	1
Hybride	0, (1 - 0.5 P)
Loi de la puissance	0, (1 - 0.1 P) ⁵
Exponentiel	P / [exp(P)-1]

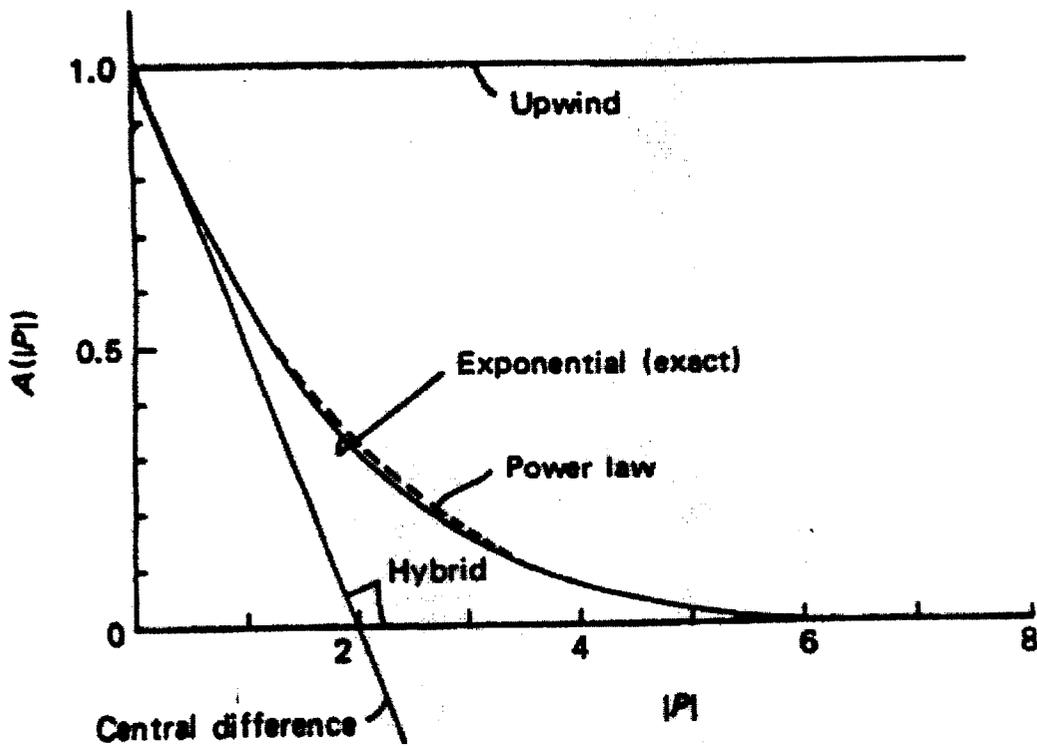


Fig 3.4: La fonction $A(|P|)$ pour chacun des schémas.

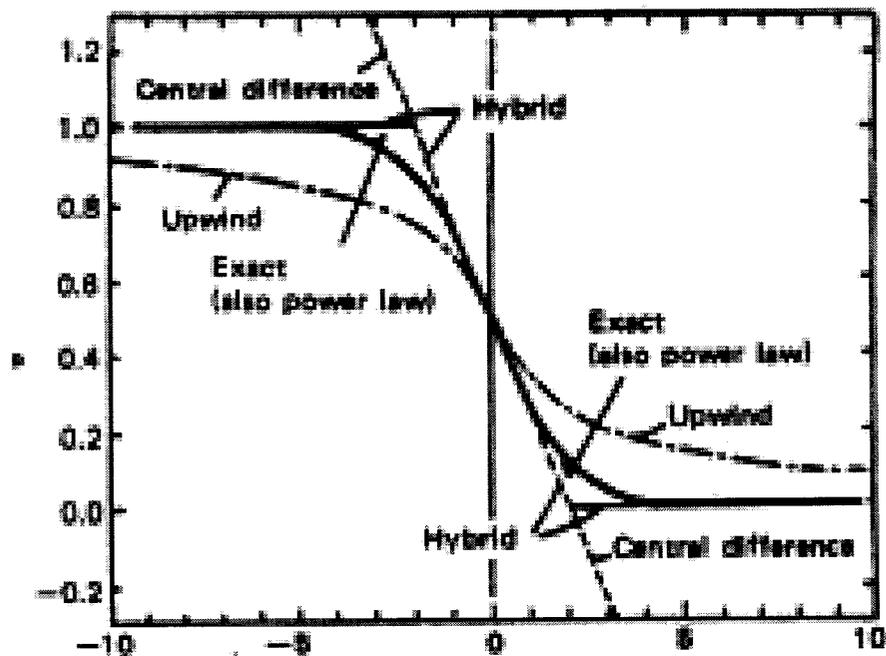


Fig 3.5: Prédiction de ϕ_p par les différents schémas dans un intervalle des nombres de Pelet

3.5. L'équation discrétisée pour le cas général:

A ce stade, nous disposons de tous les ingrédients qui nous permettent d'écrire l'équation discrétisée, correspondant au cas général, régit par l'équation différentielle (2.5). L'équation (2.5) peut se mettre sous la forme:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S \quad (3.25)$$

$$\text{avec } J_x = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$J_y = \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\text{et } J_z = \rho w \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

ou u, v et w sont respectivement les composantes de la vitesse suivant x, y et z . L'intégration de l'équation (3.24) sur le volume schématisé sur la figure (3.6) nous donne:

$$\frac{\rho_p \phi_p - \rho_p^0 \phi_p^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z + J_e - J_w + J_n - J_s + J_b - J_t = (S_c + S_p \phi_p) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3.26)$$

Ceci en linéarisant le terme source, et en considérant pour le terme instationnaire que ρ_p et ϕ_p prévalent le long du volume de contrôle.

$J_e, J_w, J_n, J_s, J_b, J_t$: sont les flux totaux intégrés le long des interfaces e, w, n, s, b, t , respectivement.

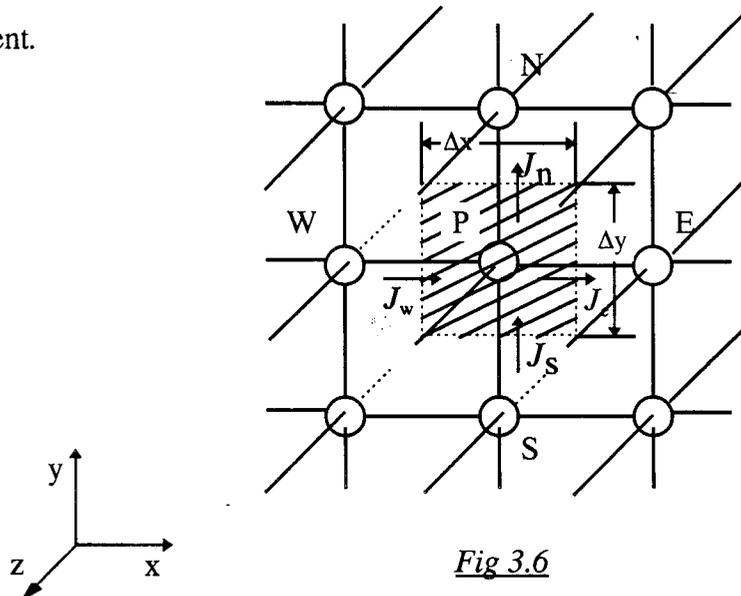


Fig 3.6

On montre que même pour le cas monodimensionnel, on a $a_p = a_E + a_W$ uniquement lorsque l'équation de continuité est vérifiée. Ainsi pour satisfaire la règle 4 stipulant l'égalité des coefficients voisins, on doit inclure l'équation de continuité.

Ainsi en intégrant l'équation de continuité de la même façon que l'équation précédente, sur le volume de contrôle, on obtient:

$$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b = 0 \quad (3.27)$$

avec $F_e, F_w, F_n, F_s, F_t, F_b$ sont les taux d'écoulement de masse (débit massique) à travers les faces du volume de contrôle.

Si on considère ρu constante le long de l'interface e , on a pour F : $F_e = (\rho u)_e \Delta y \Delta z$

Les autres s'obtiennent d'une façon similaire.

En multipliant l'équation (3.27) par ϕ_p et en la retranchant de l'équation (3.26), on obtient:

$$\begin{aligned} (\phi_p - \phi_p^0) \rho_p^0 \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + (J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_p) + (J_n - F_n \phi_p) \\ - (J_s - F_s \phi_p) + (J_t - F_t \phi_p) - (J_b - F_b \phi_p) = (S_c - S_p \phi_p) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (3.28)$$

L'hypothèse d'uniformité le long d'une face du volume de contrôle nous permet de translater les résultats obtenus pour le cas monodimensionnel au cas tridimensionnel.

Ainsi en utilisant les équations (3.23a) et (3.23b), on obtient:

$$J_e - F_e \phi_p = a_E (\phi_p - \phi_E) \quad (3.29a)$$

$$J_w - F_w \phi_p = a_W (\phi_p - \phi_W) \quad (3.29b)$$

$$\text{avec:} \quad a_E = D_e A(|P_e|) + \| -F_e, 0 \| \quad (3.30a)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \| F_w, 0 \| \quad (3.30b)$$

Ici D_e et D_w comme pour F_e et F_w , contiennent $\Delta y \Delta z$, l'aire des faces e et w .

En procédant de même pour J_n, J_s, J_b et J_t et en réarrangeant, on obtient l'équation discrétisée finale suivante:

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + b \quad (3.31)$$

$$\text{avec: } a_E = D_e A(|P_e|) + \|\ -F_e, 0 \|\$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|\ F_w, 0 \|\$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \|\ -F_n, 0 \|\$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \|\ F_s, 0 \|\$$

$$a_T = D_t A(|P_t|) + \|\ -F_t, 0 \|\$$

$$a_B = D_b A(|P_b|) + \|\ F_b, 0 \|\$$

$$a_p^0 = \frac{\rho_p^0 \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y \Delta z + a_p^0 \phi_p^0$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{avec: } D_E = \frac{\Gamma_e \Delta y \Delta z}{(\delta x)_e}, \quad D_W = \frac{\Gamma_w \Delta y \Delta z}{(\delta x)_w}, \quad D_N = \frac{\Gamma_n \Delta x \Delta z}{(\delta y)_n},$$

$$D_S = \frac{\Gamma_s \Delta x \Delta z}{(\delta y)_s}, \quad D_T = \frac{\Gamma_t \Delta x \Delta y}{(\delta z)_t}, \quad D_B = \frac{\Gamma_b \Delta x \Delta y}{(\delta z)_b}$$

F et P étant déjà définis.

La fonction $A(|P|)$ peut être choisie du tableau (3.1) selon le schéma désiré.

On note que le schéma de la loi de la puissance est recommandé [76]. Pour ce choix on a:

$$A(|P|) = \|\ 0, (1 - 0.1|P|)^5 \|\$$

3.6. Détermination du champ d'écoulement :

On a vu précédemment, comment résoudre l'équation différentielle générale en ϕ , en présence d'un champ d'écoulement. Cependant, la question qui se pose, est: comment obtenir ce champ ?

A première vue, comme l'équation des quantités de mouvement est une équation de transport (par conséquent elle peut se mettre sous la forme générale (2.5) (avec $\phi = u, v$ ou w $\Gamma = \mu$)), on a tendance à ignorer la difficulté rencontrée pour la détermination de ce champ. Mais, la difficulté réelle réside dans la méconnaissance du champ de pression.

Le champ de pression est indirectement spécifié par l'équation de continuité. Si le champ de pression réel est remplacé dans les équations de quantité de mouvement, le champ de vitesse résultant satisfera l'équation de continuité. Vu que nous avons opté [76] pour les méthodes itératives pour la résolution des équations discrétisées, cette spécification indirecte, ne peut être utile dans sa forme actuelle. Ainsi la tâche principale de ce qui va suivre, est de transformer cette information indirecte dans l'équation de continuité en un algorithme direct de calcul de la pression. Mais avant cela, on doit signaler certaines difficultés:

a) Représentation du terme de pression:

En écrivant la forme discrétisée de l'équation des quantités de mouvement suivant x (par exemple), le seul terme nouveau est $-\frac{\partial P}{\partial x}$ intégré sur le volume de contrôle, en l'occurrence un terme faisant intervenir $P_w - P_e$. Pour exprimer $P_w - P_e$ en fonction des valeurs aux noeuds, choisissons un profil linéaire entre chaque deux noeuds voisins, et considérons l'interface du volume de contrôle situé à mi-distance entre eux (*fig 3.1*).

On a par conséquent:

$$P_w - P_e = \frac{P_w + P_p}{2} - \frac{P_p + P_e}{2} = \frac{P_w - P_e}{2} \quad (3.32)$$

De ce fait l'équation des quantités de mouvement contiendra la différence de pression entre deux points alternés et non pas adjacents. Par conséquent, la précision de la solution est atténuée du fait que le pas est plus grand .

Plus grave, l'équation des quantités de mouvement considère un champ de pression en zig-zag (fig 3.7), non réaliste, comme un champ uniforme. Ceci est dû au fait que pour un point P quelconque de la grille, $P_w - P_e$ correspondant est nul.

Notons qu'à priori, rien ne peut empêcher un tel profil d'apparaître et d'être préservé jusqu'à convergence, du fait que l'équation des quantités de mouvement lui est indifférente.

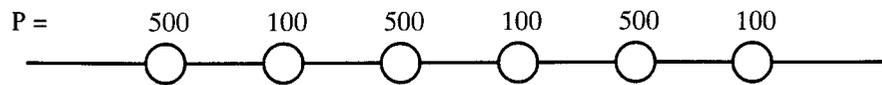


Fig 3.7

b) Représentation de l'équation de continuité:

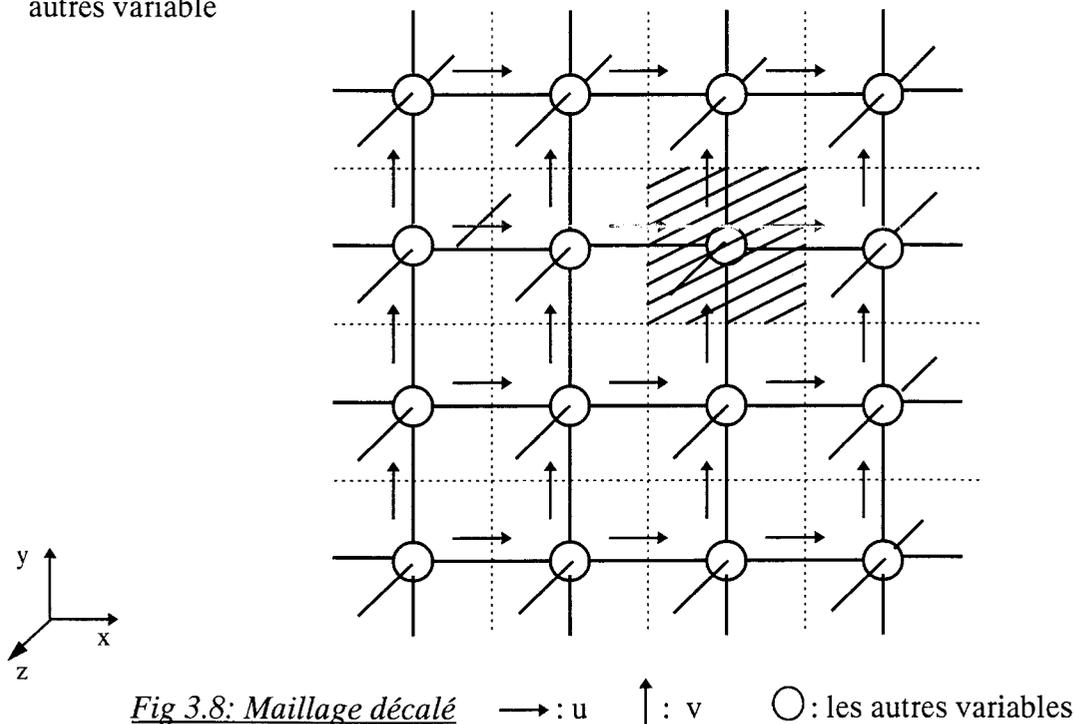
La même difficulté apparaît lors de la discrétisation de l'équation de continuité.

Avant de mettre en oeuvre une méthode numérique incluant les composantes de la vitesse et la pression, on doit pallier à ces difficultés.

Remède:

Maillage décalé ``staggered``:

Les difficultés déjà énoncées peuvent être résolues en préconisant que le calcul des différentes variables ne se fasse pas pour les mêmes noeuds du maillage. Ainsi, les composantes des vitesses sont calculées à des noeuds différents de ceux où on calcule les autres variable



Notons tous de même que le dénouement de ces difficultés n'est pas sans prix, du fait qu'une grille supplémentaire est à définir, mais ceci est d'une importance secondaire comparativement à l'apport de la procédure.

3.7. Equations de quantités de mouvement :

Rappelons qu'une fois le champ de pression connu, la solution de l'équation de quantités de mouvement peut être obtenue en procédant de la même façon que pour la formulation générale en ϕ , ceci en adoptant le maillage décalé approprié.

Ainsi par exemple pour l'équation en x , en décalant le volume de contrôle dans le sens de u on obtient l'équation discrétisée suivante:

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_p - p_E) A_e \quad (3.33)$$

Avec nb : désigne les noeuds voisins

$(p_p - p_E) A_e$: étant la force de pression agissant sur le volume de contrôle

A_e : étant l'aire de la surface sur laquelle agit la différence de pression

Notons que le gradient de pression n'est pas inclut dans le terme source.

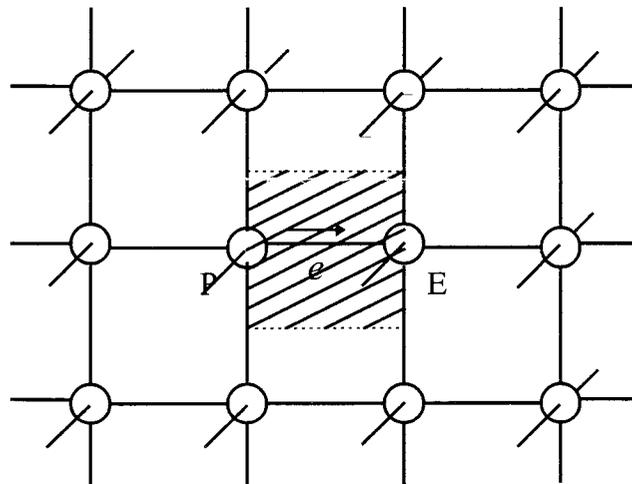


Fig 3.9

Remarque: On procède de la même façon pour v et w .

L'équation des quantités de mouvement ne peut être résolue qu'une fois le champ de pression est donné ou au moins estimé. Tant que le champ de pression réel n'est pas employé, l'équation de continuité n'est pas vérifiée.

Notons par u^* , v^* , w^* le champ de vitesse correspondant au champ de pression estimé P^* , ce champs de vitesse va être obtenu en résolvant les équations discrétisées suivantes:

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_p^* - p_E^*) A_e \quad (3.34a)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + (p_p^* - p_N^*) A_n \quad (3.34b)$$

$$a_t w_t^* = \sum a_{nb} w_{nb}^* + b + (p_p^* - p_T^*) A_t \quad (3.34c)$$

3.8. Correction de la pression et de la vitesse :

Notre objectif à ce stade, est de trouver un moyen pour améliorer l'estimé P^* de façon à vérifier l'équation de continuité .

Posons $P = P^* + P'$ avec P' : correction de la pression

(les composantes de la vitesse réagissent d'une façon similaire à la correction de pression)

Par conséquent : $u = u^* + u'$, $v = v^* + v'$, $w = w^* + w'$ (3.35)

En soustrayant l'équation (3.34a) de l'équation (3.33) on obtient:

$$a_e u_e' = \sum a_{nb} u_{nb}' + (p_p' - p_E') A_e \quad (3.36)$$

A ce stade, si on décide [76], pour une commodité de calcul, de laisser tomber le terme

($\sum a_{nb} u_{nb}'$) de l'équation précédente, on obtient:

$$a_e u_e' = (p_p' - p_E') A_e \quad (3.37)$$

$$\text{ou} \quad u_e' = d_e (p_p' - p_E') \quad (3.38) \quad \text{avec} \quad d_e = \frac{A_e}{a_e}$$

L'équation (3.38) sera appelée la formule de correction de la vitesse qui peut encore se mettre comme:

$$u_e = u_e^* + d_e (p_p' - p_E') \quad (3.39a)$$

D'une façon similaire, on obtient les formules de correction des composantes de la vitesse dans les autres directions:

$$v_n = v_n^* + d_n (p_p' - p_N') \quad (3.39b)$$

$$w_t = w_t^* + d_t (p_p' - p_T') \quad (3.39c)$$

A présent, on a tous les éléments nécessaires pour obtenir une équation discrétisée pour P' .

3.9. L'équation de correction de la pression :

Essayons maintenant de convertir l'équation de continuité en une équation de correction de pression.

L'équation de continuité pour un fluide incompressible peut s'écrire:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.40)$$

En intégrant cette équation sur le volume de contrôle schématisé sur la fig 3.10, On obtient :

$$\begin{aligned} [(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y \Delta z + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta x \Delta z \\ + [(\rho w)_t - (\rho w)_b] \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

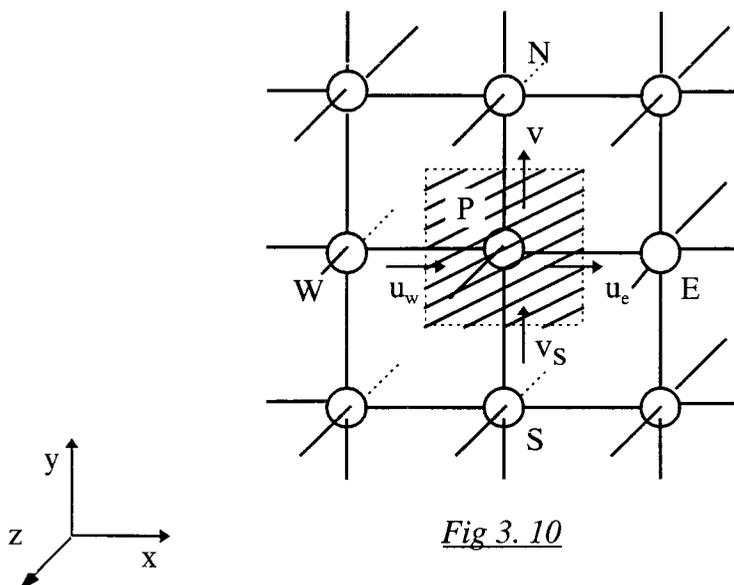


Fig 3. 10

En substituant dans cette équation les composantes de la vitesse par leurs expressions données par les formules de correction de la vitesse, on obtient l'équation discrétisée en P suivante :

$$a_p p'_p = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + a_T p'_T + a_B p'_B + b \quad (3.42)$$

Avec:

$$a_E = \rho_e d_e \Delta y \Delta z \quad (3.43a)$$

$$a_W = \rho_w d_w \Delta y \Delta z \quad (3.43b)$$

$$a_N = \rho_n d_n \Delta x \Delta z \quad (3.43c)$$

$$a_S = \rho_s d_s \Delta x \Delta z \quad (3.43d)$$

$$a_T = \rho_t d_t \Delta x \Delta y \quad (3.43e)$$

$$a_B = \rho_b d_b \Delta x \Delta y \quad (3.43f)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \quad (3.43g)$$

$$b = [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y \Delta z + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n] \Delta x \Delta z + [(\rho w^*)_b - (\rho w^*)_t] \Delta x \Delta y \quad (3.43h)$$

A ce stade, toutes les équations nécessaires pour obtenir les composantes de la vitesse et de la pression sont disponibles.

3.10. L'algorithme SIMPLE :

La procédure suivie pour obtenir le champ d'écoulement, appelé SIMPLE (semi-implicit method for pressure linked equations) présente la séquence d'opérations suivantes :

- 1- Estimer le champ de pression
- 2- Résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir u^* , v^* , w^*
- 3- Résoudre l'équation en P.
- 4- Calculer P en ajoutant P' à P*.
- 5- Calculer u , v , w à partir de leurs estimés, en utilisant les formules de correction de la vitesse (3.39).

6- Résoudre l'équation discrétisée pour d'autres ϕ (comme par exemple la température, la concentration ...) s'ils influencent le champ d'écoulement (dans le cas contraire il est préférable de le faire après convergence du champ d'écoulement).

7- Traiter la pression corrigée P , comme un nouvel estimé P^* , et revenir à l'étape 2, pour répéter la même procédure jusqu'à convergence

3.11. Un algorithme révisé : SIMPLER

Une version améliorée de SIMPLE est l'algorithme de SIMPLER qui signifie SIMPLE revised.

3.11.1. L'équation de pression :

Pour obtenir le champ de pression, on procède comme suit :

On écrit d'abord l'équation des quantités de mouvement sous la forme suivante :

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b}{a_e} + d_e (p_p - p_E) \quad (3.44)$$

Définissons maintenant, une pseudo-vitesse \hat{u}_e par : $\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b}{a_e}$ (3.45)

L'équation (3.44) devient $u_e = \hat{u}_e + d_e (p_p - p_E)$

De la même façon, on obtient:

$$v_n = \hat{v}_n + d_n (p_p - p_N)$$

$$w_t = \hat{w}_t + d_t (p_p - p_T)$$

Il est facile d'observer l'analogie entre ces expressions et celles obtenues pour l'équation de correction de pression au paragraphe (3.11). Par conséquent, on procède de la même façon, pour obtenir l'équation de la pression suivante:

$$a_p p_p = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + a_T p_T + a_B p_B + b$$

$a_E, a_W, a_N, a_S, a_T, a_B$ et a_p sont données par les équations (3.43) et b est donné par:

$$b = \left[(\rho \hat{u})_w - (\rho \hat{u})_e \right] \Delta y \Delta z + \left[(\rho \hat{v})_s - (\rho \hat{v})_n \right] \Delta x \Delta z + \left[(\rho \hat{w})_b - (\rho \hat{w})_t \right] \Delta x \Delta y$$

3.11.2. Algorithme SIMPLER :

La séquence d'opérations peut se réduire principalement aux étapes suivantes :

- 1- Commencer avec un estimé de la vitesse .
- 2- Calculer les coefficients de l'équation de quantité de mouvement et déduire alors $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ d'après les équations telles que (3.45) .
- 3- Calculer les coefficients de l'équation de pression et la résoudre pour obtenir le champ de pression.
- 4- Prendre ce champ comme P^* , et résoudre les équations de quantités de mouvement pour obtenir u^*, v^*, w^* .
- 5- Calculer le terme source de masse b (3.43h) et résoudre l'équation en P'
- 6- Corriger le champ de vitesse en utilisant les formules de correction de vitesse. Notons qu'on ne corrige pas les pressions .
- 7- Résoudre les équations discrétisées en ϕ , si nécessaire .
- 8- Revenir à l'étape 2 pour répéter la procédure jusqu'à convergence.

4. DISCRETISATION DU DOMAINE :

Le maillage adopté est un maillage rectangulaire. La paroi inclinée est approchée par un maillage en escalier. La grille étant assez raffinée (la recherche de l'indépendance de la solution par rapport à la grille ``grid independence`` a fait l'objet de notre intérêt pour la plupart des cas traités), un noeud voisin de la paroi inclinée est soit situé sur celle ci, soit très proche d'elle.

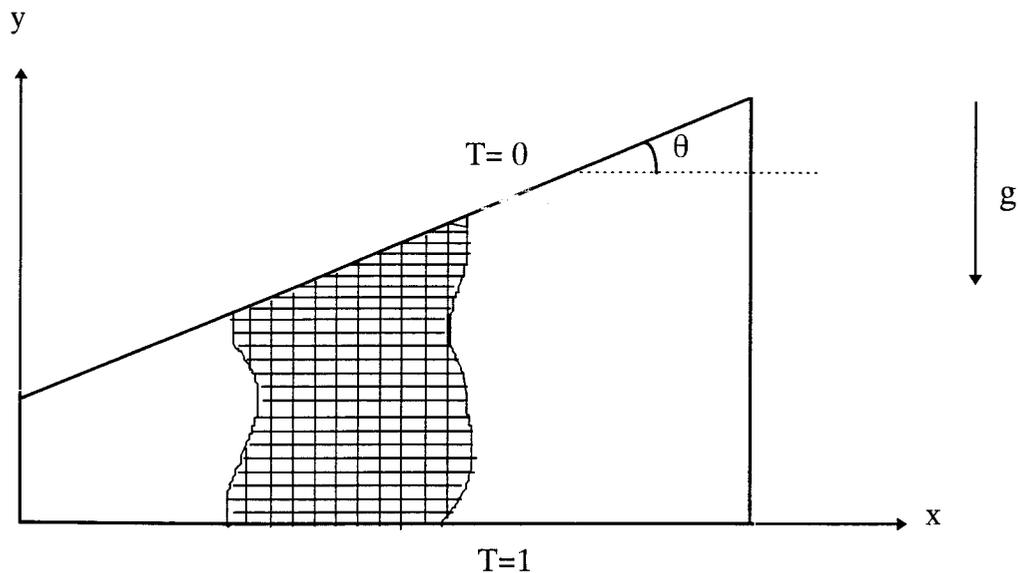


Fig 3.11: Discrétisation du domaine

Il s'agit donc de traiter un domaine de résolution de forme non régulière en adaptant un maillage régulier. Pour ce faire, on doit rendre inactifs ou en d'autres termes bloquer les volumes de contrôle n'appartenant pas au domaine de calcul. Le blocage de ces volumes consiste à maintenir fixes les valeurs des variables dépendantes en ces volumes. Par exemple, si cette région inactive représente une région solide, les composantes de la vitesse doivent rester nulles.

Pour rendre une région inactive deux façons sont possibles [76].

- La première consiste à considérer un terme source très élevé pour les volumes constituant cette région.

$$S_C = 10^{30} \phi_{P, \text{désirée}}$$

$$S_P = -10^{30}$$

Ainsi pour notre cas, comme u , v et w sont nulles dans cette région du fait que la paroi est solide et T l'est aussi (température adimensionnelle de la paroi froide) on a :

$$S_C = 0$$

$$S_P = -10^{30}$$

- La deuxième alternative consiste à fixer un coefficient de diffusion Γ très élevé pour cette zone; ce qui permet de faire prévaloir une valeur prescrite le long de cette région.

Notons toutefois, que malgré la commodité de cette méthode, elle présente quelques inconvénients, en particulier lorsque le nombre de volumes constituant la région inactive est important. En effet, les calculs doivent être fait même pour la région inactive, ce qui nécessite plus de temps de calcul et plus d'espace mémoire.

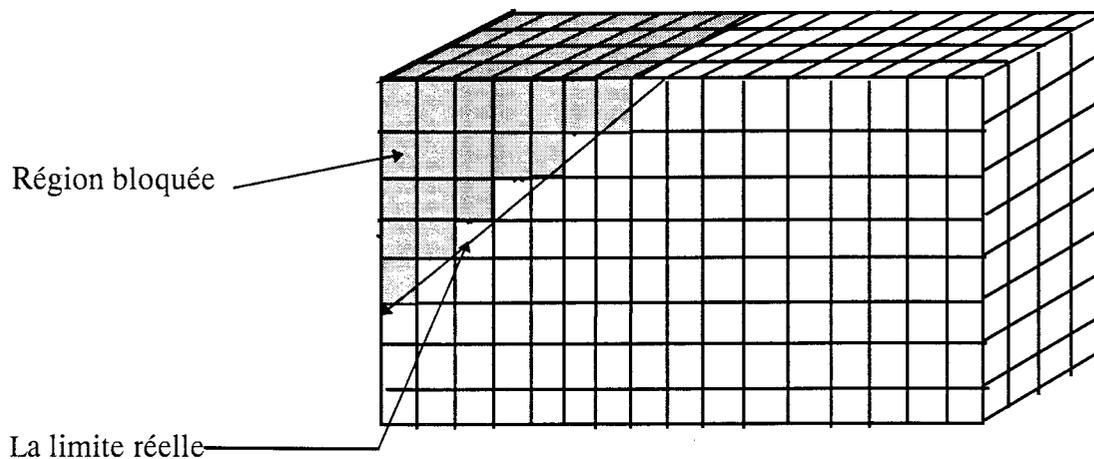


Fig 3.12: Région bloquée dans un maillage régulier

- Pour notre cas, nous avons d'abord testé les deux techniques. Les résultats obtenus dans les deux cas sont pratiquement identiques. Ainsi nous avons choisi de retenir la première procédure pour sa commodité de programmation.

5. RESOLUTION DU SYSTEME ALGEBRIQUE :

Pour résoudre le système d'équations algébrique (3.4) obtenu après discrétisation par la méthode des volumes de contrôles, des équations différentielles phénoménologiques, le choix a été orienté vers les méthodes itératives. Ceci est dû d'une part à la non-nécessité d'une place mémoire additionnelle importante, mais surtout en raison de leur commodités pour manipuler les non-linéarités.

Cependant, il existe plusieurs méthodes itératives. La plus simple est celle de Gauss Seidel. Un inconvénient majeur de celle-ci est le fait que sa convergence soit lente, surtout lorsque la grille est composée d'un nombre important de points. Les problèmes tridimensionnels constituent un cas notoire.

Pour remédier à ces difficultés, une combinaison entre une méthode directe (T.D.M.A) (voir Annexe 4) et la méthode de Gauss Seidel est réalisée. Il s'agit de la méthode dite Ligne par ligne (Line by line method).

5.1. Principe de la méthode :

On choisit une ligne de la grille (disons, dans la direction des y) (fig 3.13). Supposons que les ϕ (variable dépendante) aux noeuds des lignes voisines (c.a.d les lignes voisines dans les directions des x et des z) soient connues à partir de leurs valeurs précédentes. Les valeurs de ϕ aux noeuds situés en dehors de la ligne choisie, étant fixées, le problème est rendu monodimensionnel. On résout alors l'équation le long de cette ligne par la méthode T.D.M.A.

On répète la même procédure pour toutes les lignes dans une direction, puis on refait la même démarche, si nécessaire pour les lignes des autres directions.

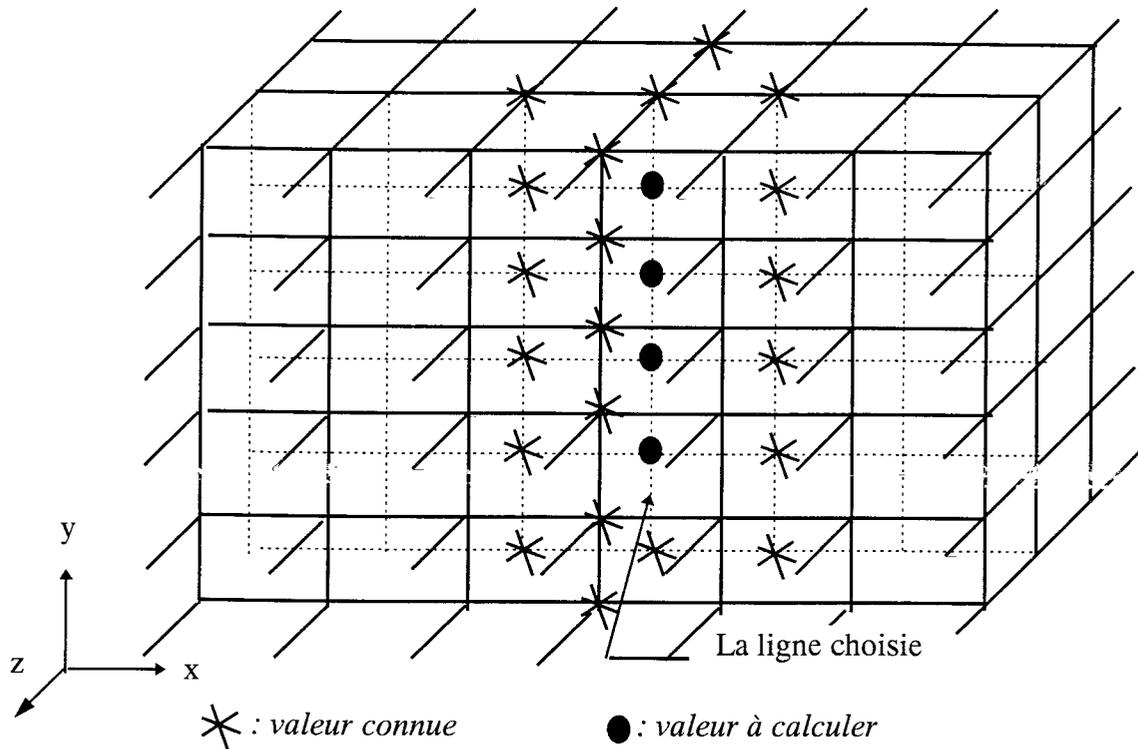


Fig 3.13 : Représentation de la méthode ligne par ligne .

Pour notre cas, le problème étant tridimensionnel, il faut passer par toutes les lignes situées dans les différents plans. Cependant, plusieurs façons peuvent être préconisées pour visiter ces lignes. Le choix de la direction de traverse peut dans certains cas influencer d'une façon importante sur la vitesse de convergence [76]. Pour notre cas, du fait que l'information générant le phénomène est donnée essentiellement par les parois actives (basse et haute), nous avons choisi la direction (y) comme direction de traverse. De même la séquence choisie pour balayer ces lignes peut s'avérer importante, particulièrement pour les problèmes où intervient la convection. En effet, la convergence est plus rapide si on se déplace dans le sens du courant (upstream) d'abord puis en contre courant (downtream) [76]. Pour notre cas, l'écoulement étant de bas en haut et de haut en bas, le choix de cette séquence peut paraître indifférent. Mais vu la forme de la cavité, nous avons choisi de balayer de bas en haut

puis de haut en bas. Ceci pour les différents plans situés suivant z (voir fig 3.14). Notons que le code prévoit en option la même démarche suivant x et y .

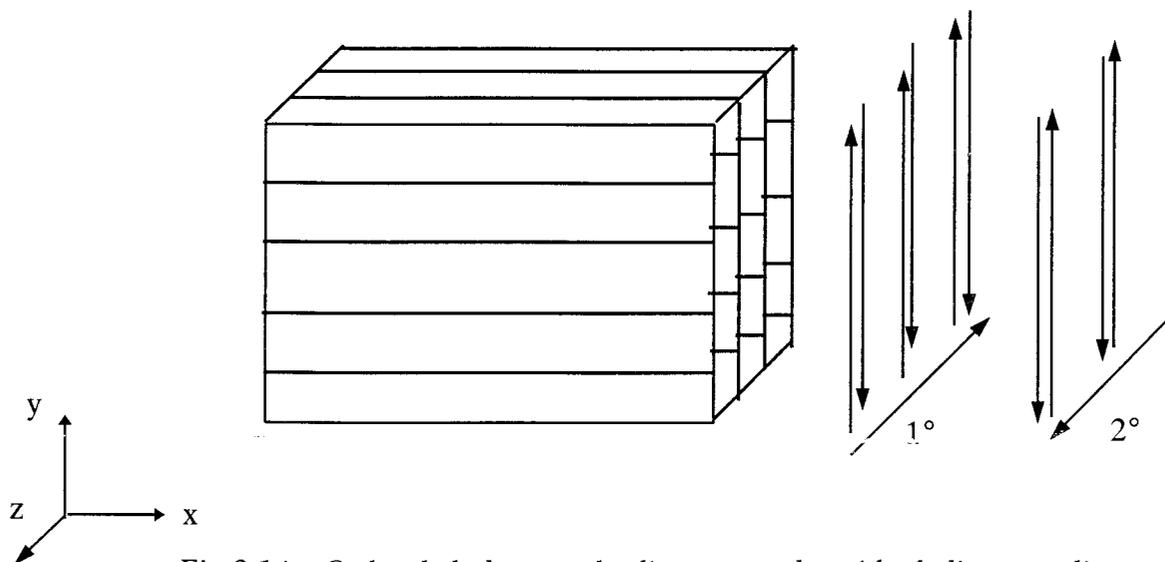


Fig 3.14: Ordre de balayage des lignes pour la méthode ligne par ligne

5.2. Présentation de la méthode:

A l'itération $k+1$, on écrit le système (3.43) sous la forme:

$$a_P \phi_P^{(k+1)} - a_S \phi_S^{(k+1)} - a_N \phi_N^{(k+1)} = b + a_W \phi_W^{(d)} + a_E \phi_E^{(d)} + a_B \phi_B^{(d)} + a_T \phi_T^{(d)} \quad (3.46)$$

ϕ^d : dernière valeur prise par ϕ , avec $\phi^d = \phi^{k+1}$ si elle est déjà calculée, sinon $\phi^d = \phi^k$.

Les ϕ^d étant connus de l'itération courante ($k+1$) ou précédente (k), cette équation ne contient que trois inconnues: $\phi_P^{(k+1)}$, $\phi_S^{(k+1)}$ et $\phi_N^{(k+1)}$.

En écrivant cet équation pour chaque noeud d'une même ligne (constituée de n noeuds), on obtient:

$$\alpha_i \phi_i^{(k+1)} + \beta_i \phi_{i-1}^{(k+1)} + \gamma_i \phi_{i+1}^{(k+1)} = \delta_i \quad (i=2, n-1) \quad (3.47)$$

avec:

$$\alpha_i = a_P$$

$$\beta_i = -a_S$$

$$\gamma_i = -a_N$$

$$\delta_i = b + a_E \phi_E^{(d)} + a_W \phi_W^{(d)} + a_T \phi_T^{(d)} + a_B \phi_B^{(d)}$$

L'ensemble de ces équations forment un système linéaire à matrice tridiagonale. Celui ci est résolu par l'algorithme de Thomas (Annexe 4).

5.3. Remarques :

- La méthode est applicable en deux et trois dimensions.
- La convergence de la méthode ligne par ligne est bien évidemment plus rapide que celle de Gauss Seidel, du fait que l'information disponible aux limites est transmise à la fois, des extrémités de la ligne à l'intérieur du domaine, quelque soit le nombre de points constituant cette ligne. Le taux de transmission de l'information dans les autres directions est similaire à celui de la méthode point par point (Gauss Seidel).

6. EXTENSION DU CODE DE CALCUL AU CAS TRIDIMENSIONNEL:

Au début, le code mis à notre disposition est un programme qui permet de résoudre les équations de transport en deux dimensions par l'algorithme SIMPLER. Ce code est divisé en deux grande parties. La première, appelée invariante, constitue l'ossature du programme. Pour la famille des problèmes pour les quels le code est prévu, l'utilisateur doit l'adapter à son cas à travers la deuxième partie, appelée adapt contenue dans la subroutine USER. En d'autres termes l'utilisateur doit adapter le code à son propre problème, sans avoir à modifier la partie invariante, comme d'ailleurs son nom l'indique.

Ainsi en première étape, le code a été adapté pour simuler la convection naturelle dans une cavité rectangulaire. Cette adaptation a fait l'objet d'une validation (voir chapitre 4).

Pour le cas tridimensionnel, le problème ne peut être appréhendé de la même façon. La partie invariante doit fatalement être modifiée. Pour ce faire, la tâche étant assez complexe et afin de pouvoir maîtriser l'évolution du programme et faciliter la localisation d'éventuelles anomalies, nous avons procédé en gros, étape par étape dans l'ordre suivant:

- Les équations étant bidimensionnelles (dans le code original), on sait que pour la méthode des volumes finis, le volume de contrôle est d'épaisseur unité. Pour cette étape, on conserve le problème bidimensionnel, avec toutefois, une épaisseur Δz au lieu de l'unité. La solution demeure inchangée.

- En deuxième étape, l'épaisseur de la cavité est rendue ZL , différente de l'épaisseur du volume de contrôle (Δz). Par conséquent, On aura à résoudre les équations, toujours bidimensionnelles, dans $(ZL/\Delta z)$ plans parallèles suivant z . Les équations restent bidimensionnelles, aucune interaction entre les différents plans n'est à prévoir. En effet, la solution est identique pour tous les plans.

- En troisième étape, on ajoute la troisième équation (celle en w). Pour vérifier qu'aucune erreur n'est introduite à cette étape, on annule l'effet de la composante v . Ce qui revient à reprendre le problème de l'étape précédente, mais au lieu de u et v on a u et w . Les conditions aux limites sont bien évidemment arrangées de telle façon à avoir une analogie entre les deux cas. Ainsi, une correspondance entre les deux solutions est trouvée.

- A cette étape, on rend toute les équations tridimensionnelles. D'abord, on le fait pour l'équation d'énergie qui en l'absence du champs d'écoulement représente la conduction tridimensionnelle. Pour ce cas, la solution peut être aisément vérifiée. Cette situation a servi particulièrement pour tester l'extension de la subroutine (SOLVE) de résolution des systèmes linéaires par la méthode ligne par ligne au cas tridimensionnel. Enfin, on considère le problème tridimensionnel dans sa totalité et on compare les solutions avec celles de la littérature pour le cas de la convection naturelle tridimensionnelle dans une cavité rectangulaire.

- A présent, on prend en considération l'inclinaison de la paroi supérieure. Pour cela, on adapte la subroutine (GAMSOR) par la technique explicitée au paragraphe 4.

- Pour la résolution du système linéaire obtenu après discrétisation des différentes équations, la subroutine (SOLVE) qui utilise la méthode ligne par ligne est étendue au cas tridimensionnel. Le détail sur la mise en oeuvre de cette méthode, particulièrement pour le cas tridimensionnel, est donné au paragraphe 5.

7. CONCLUSION :

La méthode des volumes finis est adoptée pour résoudre les équations de transfert de chaleur et de quantité de mouvement en deux et trois dimensions. Le code de calcul, basé sur l'algorithme SIMPLER et utilisant le schéma d'approximation de la loi de puissance est adapté pour explorer la convection naturelle bi et tridimensionnelle dans une cavité trapézoïdale chauffée par le bas.

La recherche de l'indépendance de la solution par rapport à la grille ``*grid indépendance*`` a fait l'objet de notre intérêt pour la plupart des cas envisagés. A cet effet, plusieurs grilles sont testées. En général, lorsque la différence entre deux solutions fournies par deux maillages successifs n'excède pas les 5%, la plus raffinée des deux grilles est retenue. On estime la précision de la solution ainsi obtenue satisfaisante.

Le calcul a été effectué sur un P.C muni d'un microprocesseur Pentium Intel de fréquence d'horloge 120 MHZ et d'une mémoire vive de 16 M.Octets.

Pour le cas de l'approche tridimensionnelle, le temps de calcul est d'environ 1 heure pour effectuer 125 itérations, pour un maillage de $40*40*30$. Un nombre de Rayleigh de 10^3 nécessite environ 800 itérations pour satisfaire le test de convergence. Dans le but d'atteindre la ``*grid independence*``, différents maillages sont testés. Le plus important maillage permis par le moyen de calcul sus cité est de $50*50*45$. La grille $40*40*30$ est retenue. On estime que ce maillage permet une précision acceptable avec un coût raisonnable.

Chapitre 4

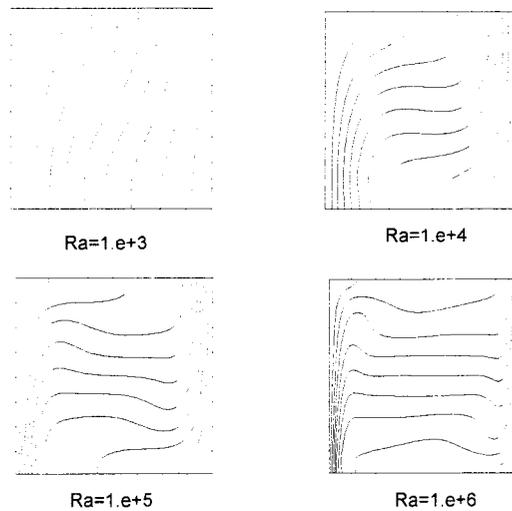
COMPARAISON ET VALIDATION

Dans le présent chapitre, on valide les codes de calcul bi et tridimensionnels. Pour cela, on compare leurs résultats à ceux d'autres travaux, notamment à des solutions communément reconnues comme solutions de référence ``Bench Mark Solution``. Ainsi, on confronte nos résultats à ceux donnés par la littérature, pour trois cas. Le premier consiste en la convection naturelle au sein d'une cavité verticale différentiellement chauffée, le second est la convection de Rayleigh-Bénard et enfin le cas même d'une cavité trapézoïdale.

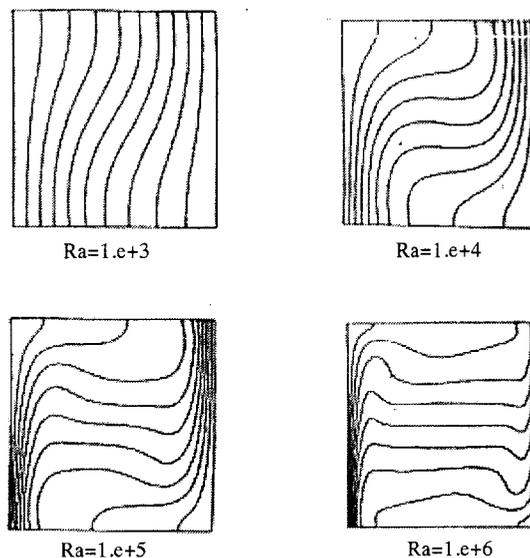
1. CAS BIDIMENSIONNEL :

1.1. Cavité verticale différentiellement chauffée :

La comparaison est d'abord réalisée sur les isothermes. Le fluide considéré est de l'air ($Pr = 0.71$), et les parois horizontales sont adiabatiques.

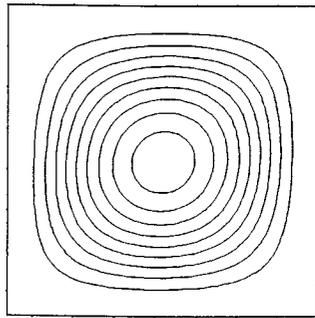
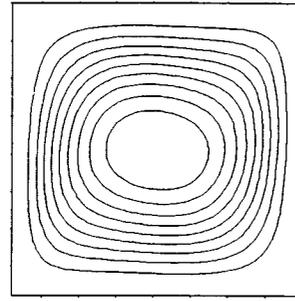
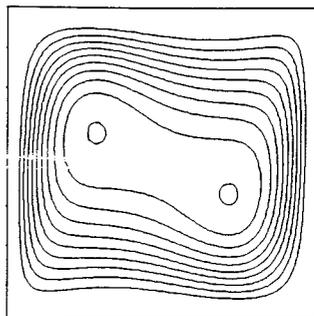
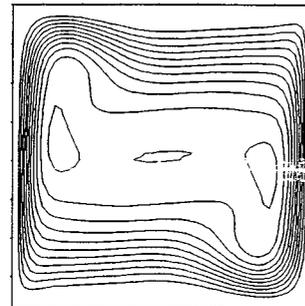


Les isothermes (présent travail)

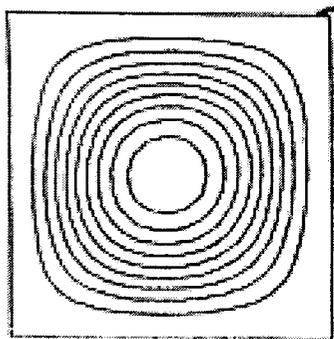
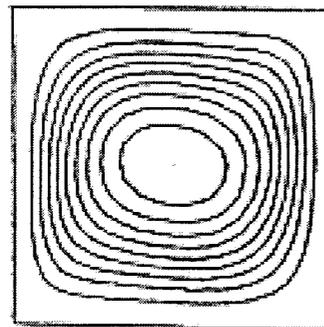
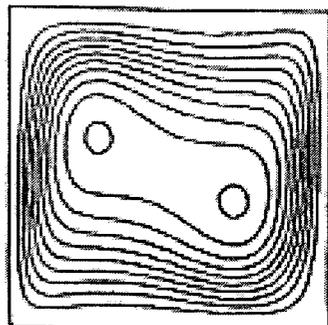
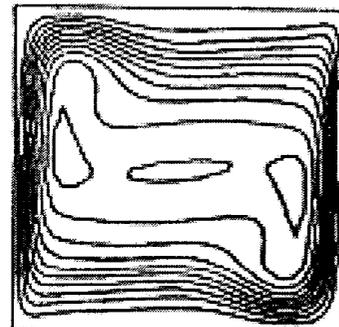


Les isothermes (``Bench Mark solution``)

De même, on compare les lignes de courant, les mêmes conditions étant retenues.

 $Ra=1.e+3$  $Ra=1.e+4$  $Ra=1.e+5$  $Ra=1.e+6$

Les lignes de courant (présent travail)

 $Ra=10^3$  $Ra=10^4$  $Ra=10^5$  $Ra=10^6$

Les lignes de courant (``Bench Mark solution``)

En vue de mener une comparaison plus quantitative, on calcule les caractéristiques suivantes, qu'on compare à celles données par la littérature à maillage égal.

Tableau 1: COMPARAISON DES RESULTATS A MAILLAGE EGAL .

Ra	AUTEUR	Nu moy	Nu max	Nu min	Umax	Vmax
		$ \Delta N_{\text{moy}} / N_{\text{moy}} $	$ \Delta N_{\text{max}} / N_{\text{max}} $	$ \Delta N_{\text{min}} / N_{\text{min}} $	$ \Delta U_{\text{max}} / U_{\text{max}} $	$ \Delta V_{\text{max}} / V_{\text{max}} $
	1*	1.118	1.505	0.692	3.649	3.697
10 ³	2**	1.116 0.179	1.501 0.266	0.694 0.289	3.634 0.411	3.679 0.487
	3****	1.118 0	1.5125 0.498	0.6896 0.347	3.648 0.027	3.701 0.108
	4*****	1.1175 0.045	1.506 0.066	0.692 0	3.6536 0.126	3.693 0.108
	1*	2.243	3.528	0.586	16.178	19.617
10 ⁴	2**	2.234 0.40	3.545 0.482	0.592 1.024	16.182 0.025	19.509 0.55
	3****	2.249 0.267	3.586 1.644	0.585 0.171	16.158 0.124	19.629 0.061
	4*****	2.239 0.178	3.538 0.283	0.592 1.024	16.0389 0.860	19.6049 0.062
	1*	4.519	7.717	0.729	34.73	68.59
10 ⁵	2**	4.510 0.199	7.761 0.570	0.736 0.96	34.81 0.230	68.22 0.539
	3****	4.536 0.376	7.842 1.619	0.73 0.137	34.811 0.233	68.442 0.216
	4*****	4.517 0.044	7.718 0.013	0.738 1.235	34.77 0.115	68.690 0.146
	1*	8.800	17.925	0.989	64.63	219.36
10 ⁶	2**	8.798 0.023	18.076 0.842	1.005 1.618	65.33 1.083	216.75 1.19
	3****	8.999 2.261	18.759 4.653	1.006 1.719	65.388 1.173	219.397 0.017
	4*****	8.807 0.08	17.562 2.025	1.02 3.134	65.95 2.042	220.37 0.46

* : BENCH MARK SOLUTION

*** : NOS RESULTATS (maillage uniforme)

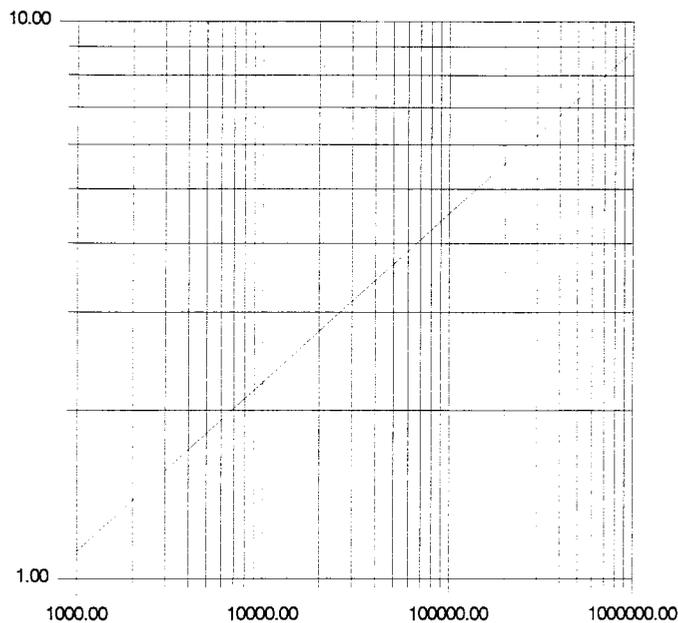
** : G. DE VAHL DAVIS

**** : NOS RESULTATS (maillage non uniforme)

Remarques:

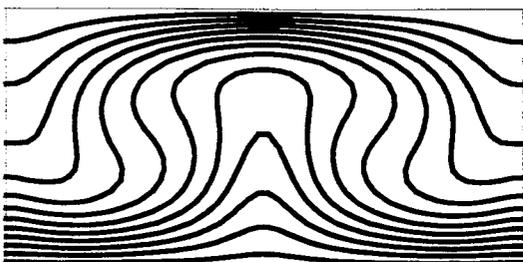
- L'erreur maximale sur les caractéristiques calculées, dans le cas d'un maillage uniforme est de 4.653 %. Elle est de 3.134 % pour un maillage non uniforme.
- Les résultats obtenus avec un maillage non uniforme (serré aux parois) pour des Rayleigh élevés, sont meilleurs que ceux obtenus avec un maillage uniforme. Ce qui confirme l'existence dans ce cas, d'un régime de couche limites séparées.

Sur la base de ces résultats, on propose une corrélation $\overline{Nu}(Ra)$ pour $10^3 \leq Ra \leq 10^6$



CORRELATION PROPOSEE

$$Nu = 0.1408 * Ra^{0.3004}$$

1.2. Convection de Rayleigh - Bénard:

2D



EXPERIENCE [17]

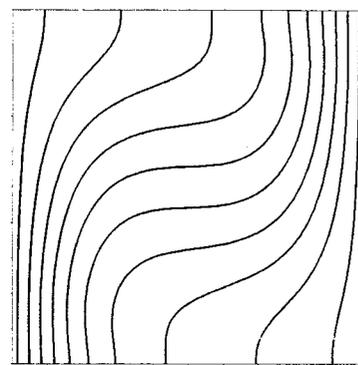
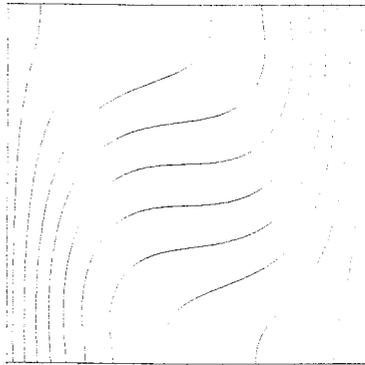
Remarque:

On constate une légère différence au niveau des parois verticales. Elle est due à la délicatesse d'obtention en pratique, de parois adiabatiques.

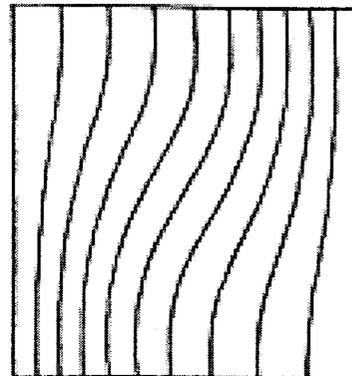
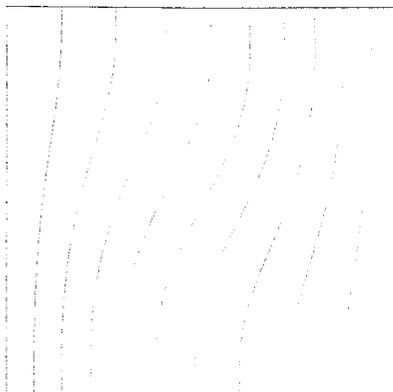
2. CAS TRIDIMENSIONNEL:

2.1. Cavité verticale différentiellement chauffée:

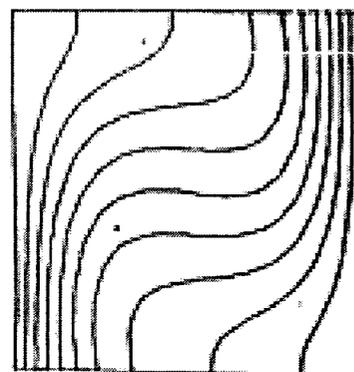
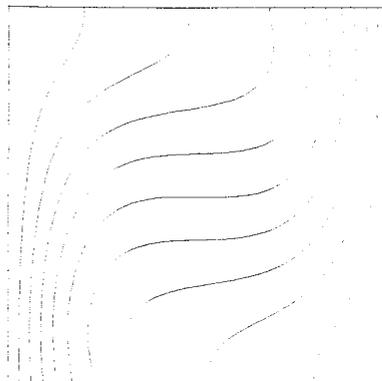
On compare les isothermes du plan $z = 0.5$, obtenues par le présent travail (calcul tridimensionnel) à celles de la solution `` Bench Mark``.



$Ra = 7.e+3$



$Ra = 1.e+3$



$Ra = 1.e+4$

3d au plan $z=0.5$

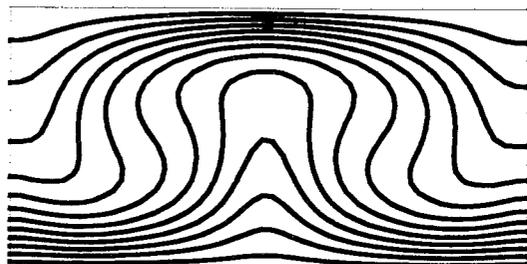
2d

tableau 2 : Comparaison quantitative

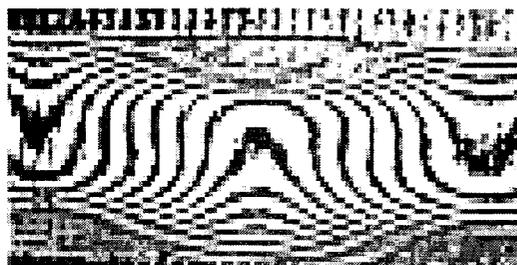
Ra	Auteur	Grille	Umax	Vmax	Numoy	Nugl
10 ³	Fusegi	32 ³	3.5013	3.5170	-----	1.085
	Hernandez[17]	21 ³	3.5330	3.5328	-----	1.084
	De Vahl Davis	----	3.649	3.697	1.118	-----
	Présent travail (3D) -fz =1	40*40	3.5249	3.541	1.09	1.071
	-fz =5	*20	3.649	3.702	-----	1.109
3 10 ³	Le calcul bidimensionnel*	40*40	8.40	8.96	1.505	-----
	Le calcul tridimensionnel (fz=5)	40*40 *30	8.43**	8.99**	1.503**	1.47
7 10 ³	Le calcul bidimensionnel	40*40	13.584	15.748	2.0025	-----
	Le calcul tridimensionnel (fz=5)	40*40 *30	13.583**	15.749**	2.0025**	1.96
10 ⁴	De Vahl Davis	----	16.178	19.617	2.243	-----
	Présent travail (3D) -fz =1	40*40	16.621	18.616	2.256	2.040
	-fz =5	*20	16.159	19.63	-----	2.214
3 10 ⁴	Le calcul bidimensionnel	40*40	24.737	36.327	3.163	-----
	Le calcul tridimensionnel (fz=5)	40*40 *30	24.739**	36.329**	3.164	3.124

* : Ce calcul a déjà fait l'objet d'une validation (voir paragraphe 1.1)

** : au plan z = 0.5

2.2. Convection de Rayleigh - Bénard:

3D (z = 0.5)



Expérience [17]

3. COMPARAISON AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX POUR UNE CAVITE TRAPEZOÏDALE:

tableau 3: comparaison de nos résultats avec les résultats expérimentaux de [68]

Cas	Auteur	Nu	Différence en (%)
téta = 5°, Rf =5 Ra=1.3*10 ⁵	- expérience [68] - présent travail	4.75 4.651	2.1 %
téta = 5°, Rf =5 Ra=2*10 ⁵	-expérience[68] -présent travail	5.41 5.13	5.17 %
téta = 5°, Rf =2 Ra=2*10 ⁵	-expérience[68] -présent travail	5.41 5.063	6.41%
téta = 5°, Rf =15 Ra=2*10 ⁵	-expérience[68] -présent travail	5.41 5.46	-0.92%

4. CONCLUSION:

Après confrontation, il ressort une concordance appréciable de nos résultats avec ceux de la littérature.

Chapitre 5

RÉSULTATS ET INTERPRÉTATION

Partie -1-

ETUDE DES CHAMPS THERMIQUE ET DYNAMIQUE
- ETUDE TRIDIMENSIONNELLE -

1. ETUDE DU CHAMP THERMIQUE :

1.1. Répartition du champ thermique suivant z :

Relevons tout d'abord l'existence de quelques perturbations sur certaines surfaces isothermes. Celles ci peuvent être imputées au nombre limité de points constituant le maillage (40*40*30). Cette restriction est due essentiellement à la capacité mémoire de notre outil de calcul (16 MO).

La répartition des surfaces isothermes peut être interprétée conjointement avec les figures (fig 5.5,5.6,5.7) qui constituent des coupes de ces surfaces. En effet, on remarque une totale conformité entre les tracés des surfaces isothermes avec ceux des lignes isothermes dans les plans $z = 1 / 2$ et $z = 2 / 15$. Ainsi, par exemple, on remarque pour $Ra = 10^4$ et $Ra = 5.10^4$ une courbe en forme de baignoire pour des températures proches de celle de la paroi chaude. Parallèlement, le tracé des lignes isothermes dans les plans transversaux montre que les mêmes isothermes du plan $z = 0.5$, se situent au dessous de celle du plan $z = 2 / 15$. De même pour $Ra = 9.10^4$, le profil des surfaces isothermes présente trois sommets, pour des températures proches de celle de la paroi basse; soient deux aux extrémités et un au centre. Le tracé des lignes isothermes dans les plans $z = 1 / 2$ et $z = 2 / 15$, montre que les isothermes ayant une même cote, sont plus proches que dans le cas des nombres de Rayleigh précédents.

On observe pour $Ra = 10^3$, une répartition pratiquement uniforme des surfaces isothermes suivant z. Des variations tridimensionnelles du champ thermique sont enregistrées pour des sollicitations plus élevées. **La sollicitation est d'autant plus importante que ces variations deviennent plus notables. Notons de plus, que ces variations sont en général concentrées au voisinage des parois verticales. Ces variations peuvent être imputées à la différence d'intensité de l'écoulement entre les plans latéraux (différents z). Celle ci, pour sa part, est due à l'effet des bords.** En effet au fur et à mesure que l'on s'approche des parois, l'écoulement diminue d'intensité (fig 5.8,...., 5.11). Pour des valeurs des isothermes proches de celle de la paroi basse, à des nombres de Rayleigh de 10^4 et 5.10^4 , le tracé montre des profils en formes de baignoire du côté de la paroi verticale supérieure. Ceci est probablement dû au fait que l'écoulement principal devient de plus en plus intense au fur et à mesure qu'on

s'approche du plan $z = 0.5$. Par conséquent, l'épaisseur de la couche limite devient de plus en plus petite. Ainsi les isothermes proches de la paroi basse sont poussées vers elle, au côté de la paroi verticale supérieure vu le sens de l'écoulement. Par contre du côté de la paroi haute, les isothermes deviennent plus courbées au fur et à mesure que l'on s'approche du milieu de la cavité ($z = 0.5$). Ceci est évidemment justifié par le fait que l'écoulement principal devient de plus en plus intense tant qu'on s'éloigne des bords. Pour une sollicitation de 9.10^4 , toujours pour des isothermes proches de celle de la paroi chaude, les surfaces isothermes présentent trois sommets, deux aux extrémités et le troisième au milieu. Cette forme peut être imputé à l'influence de la composante tridimensionnelle sur le champ thermique.

1.2. Influence des différents paramètres sur la répartition tridimensionnelle du champ thermique :

L'influence du nombre de Rayleigh (fig 5.5), de l'inclinaison de la paroi supérieure (fig 5.6), et du rapport de forme (fig 5.7), est explorée, à travers le tracé des lignes isothermes dans des plans latéraux situés à des cotes différentes. **La variation tridimensionnelle du champ thermique est clairement dépendante de Ra et de Rf, par contre l'influence de θ est faible.**

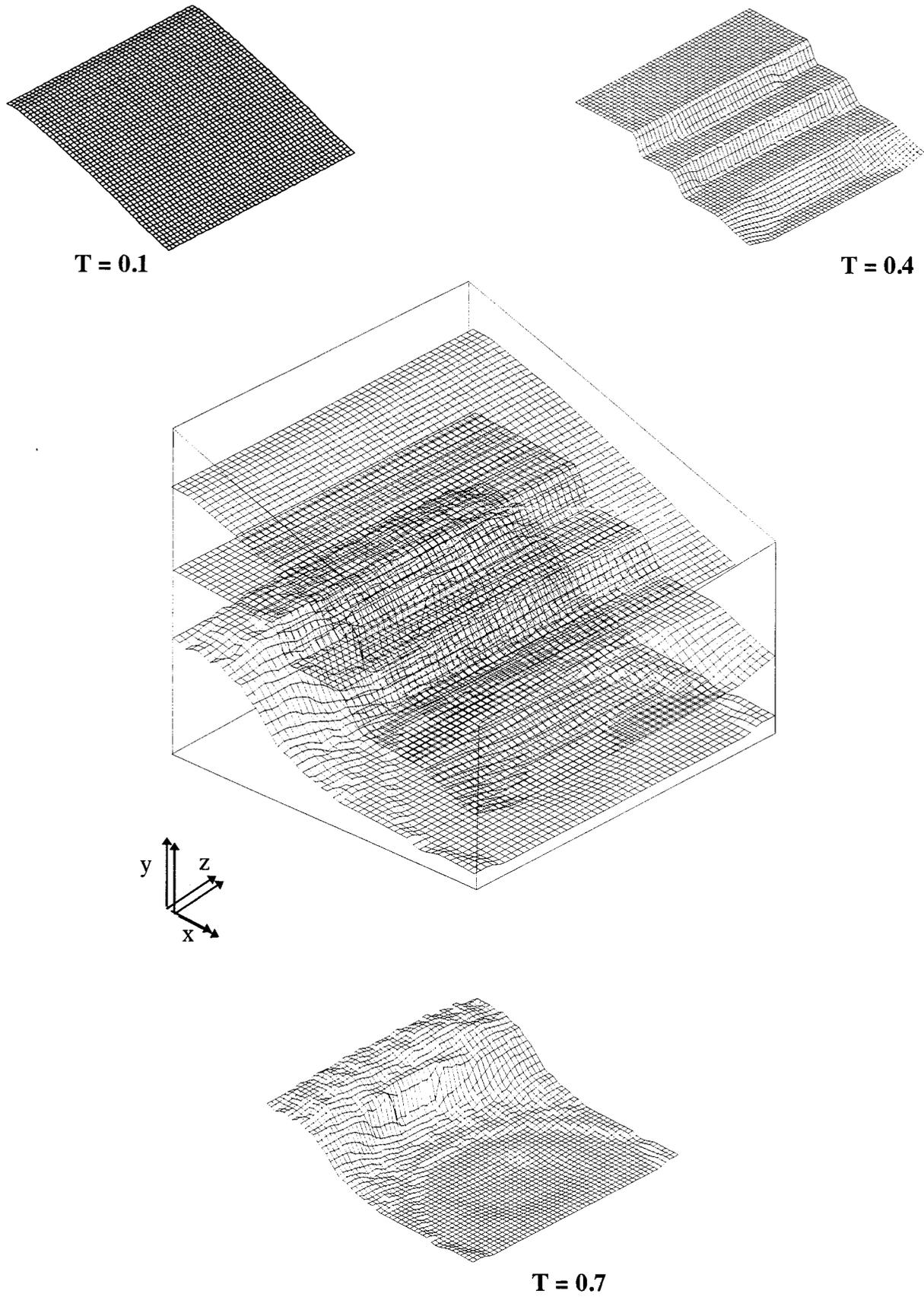


Fig 5.1 : Surfaces isothermes pour $Ra = 10^3$ ($\theta = 25^\circ$, $Rf = 1$, $Fz = 1$)

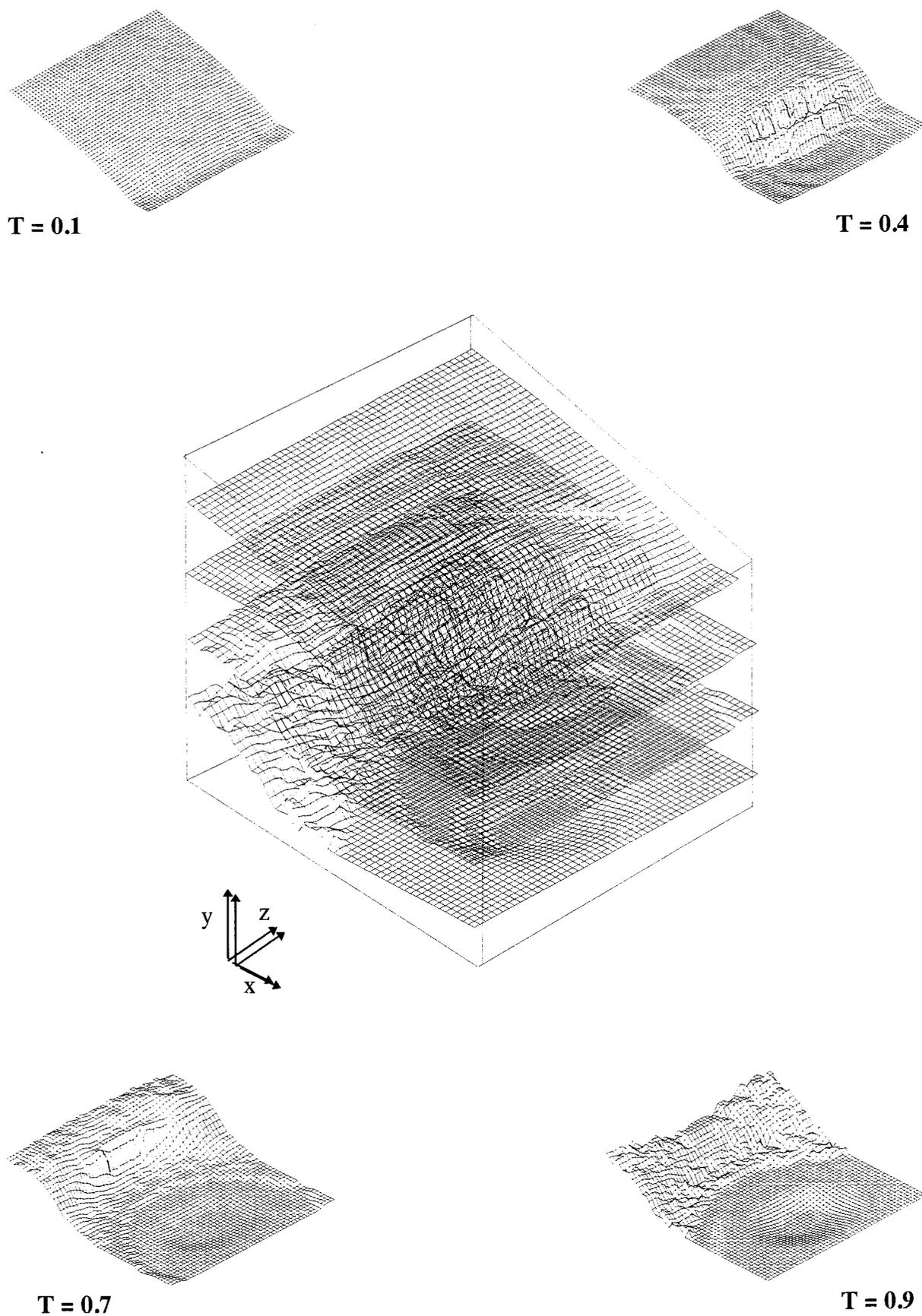


Fig 5.2 : Surfaces isothermes pour $Ra = 10^4$ ($\theta = 25^\circ$, $Rf = 1$, $Fz = 1$)

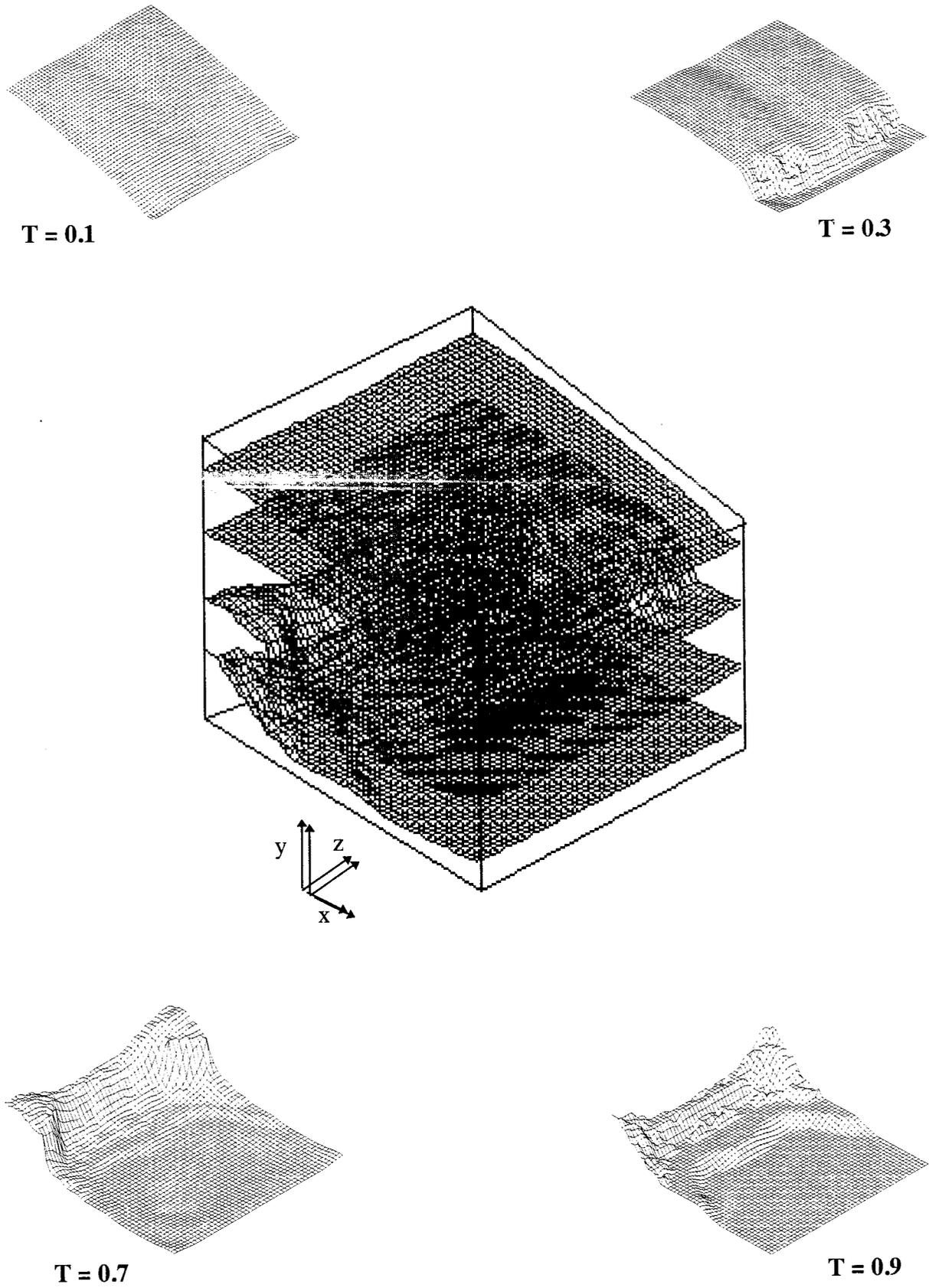


Fig 5.3 : Surfaces isothermes pour $Ra = 5.10^4$ ($\theta = 25^\circ$, $Rf = 1$, $Fz = 1$)

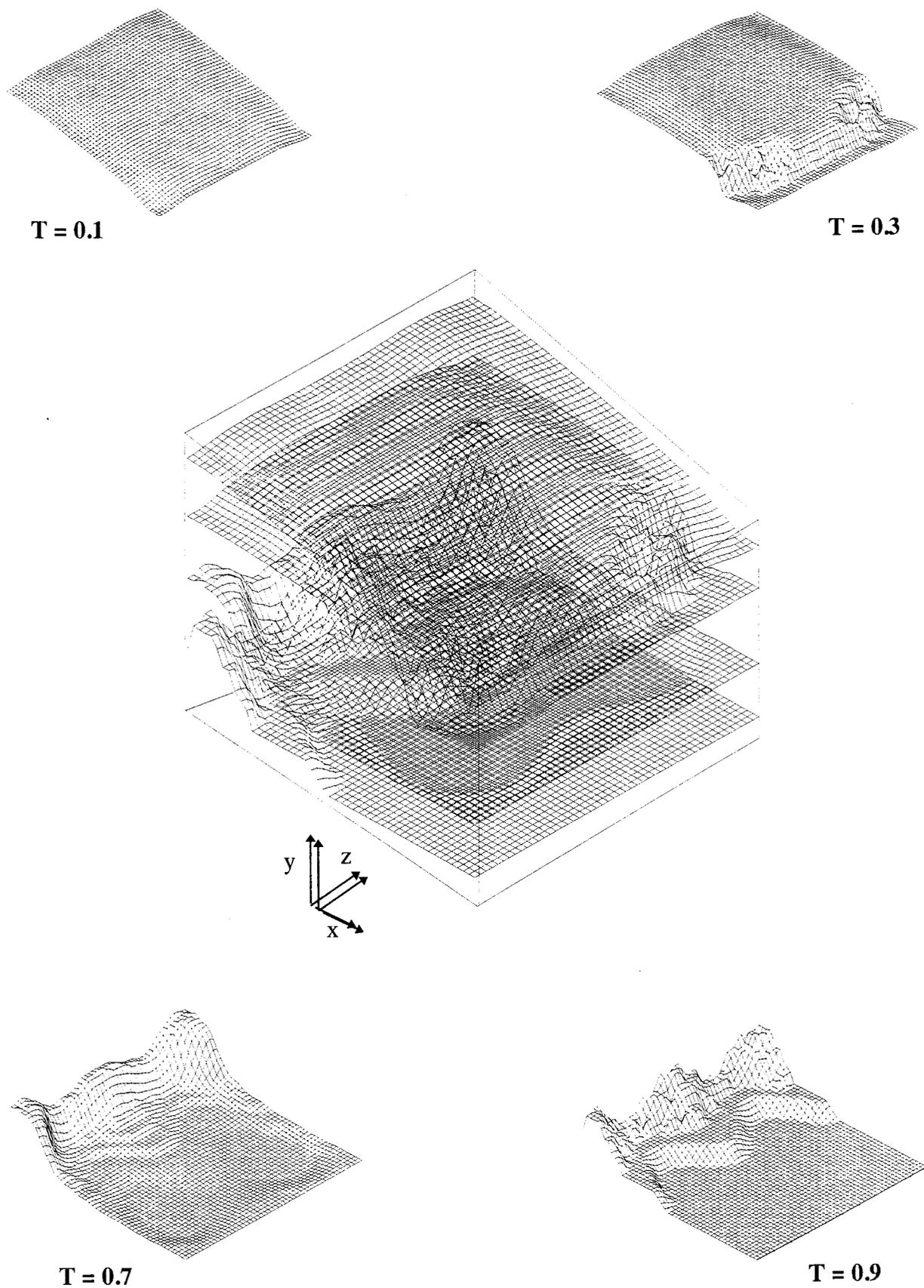
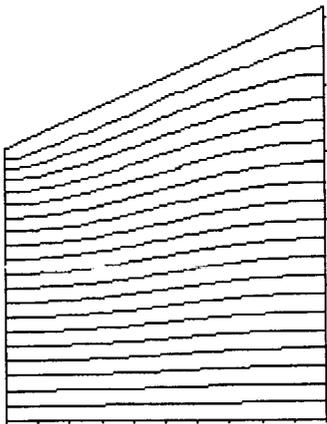
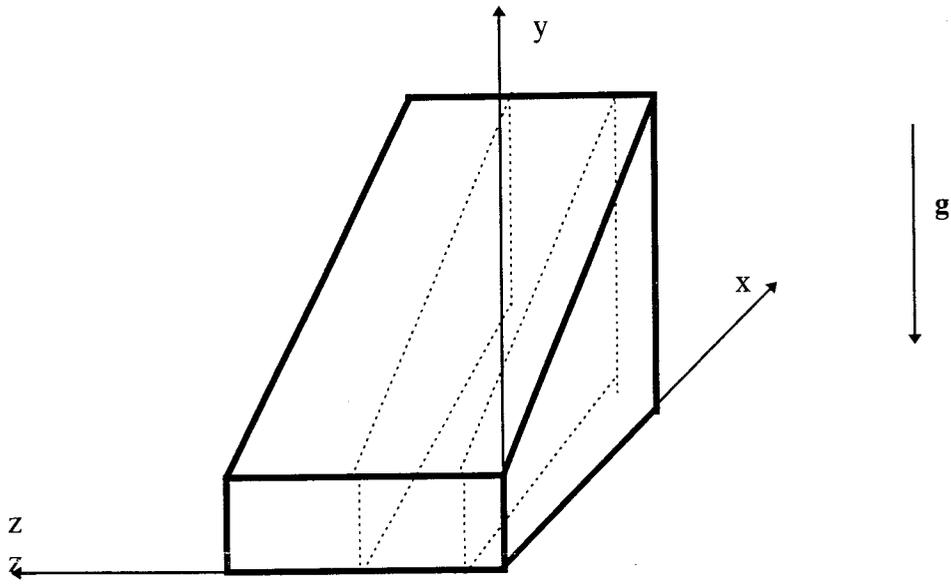
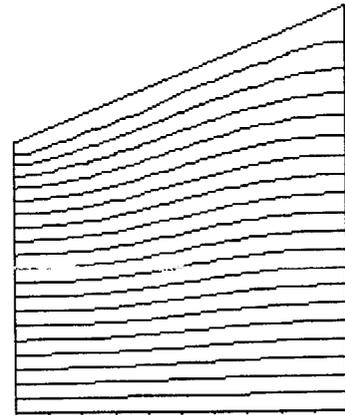


Fig 5.4 : Surfaces isothermes pour $Ra = 9.10^4$ ($\theta = 25^\circ$, $Rf = 1$, $Fz = 1$)

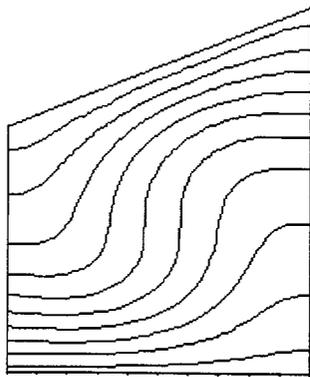


(1)

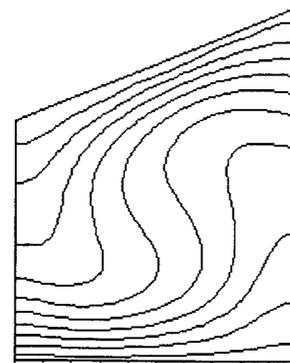
(a) $Ra = 10^3$



(2)

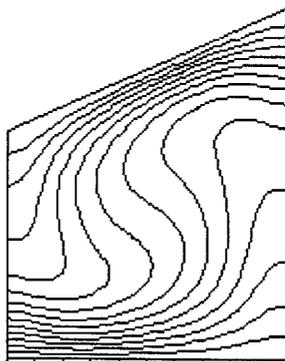


(1)

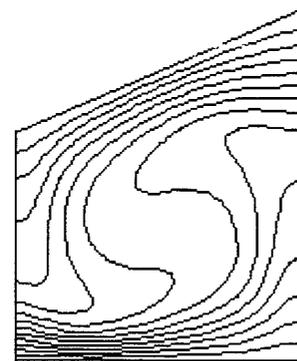


(2)

(b) $Ra = 10^4$

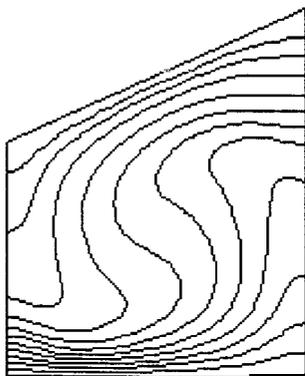


(1)

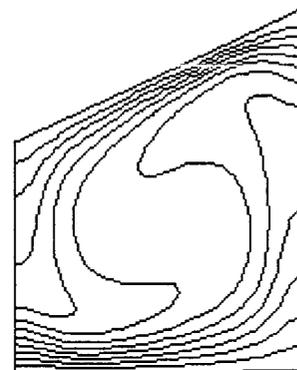


(2)

(c) $Ra = 5 \cdot 10^4$



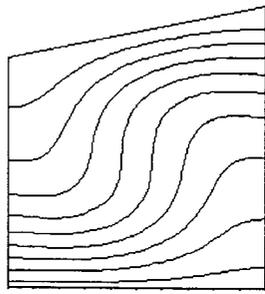
(1)



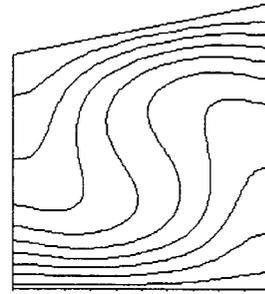
(2)

(d) $Ra = 9 \cdot 10^4$

Fig 5.5 : Comparaison des isothermes des plans (1) $z = 4/30$ et (2) $z = 15/30$ pour différentes valeurs de Ra ($\theta = 25^\circ$, $Rf = 1$, $Fz = 1$)

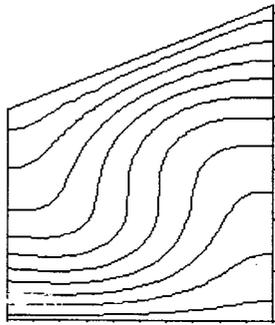


(1)

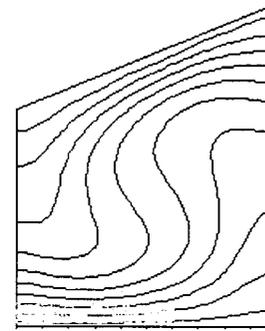


(2)

(a) $\theta = 10^\circ$

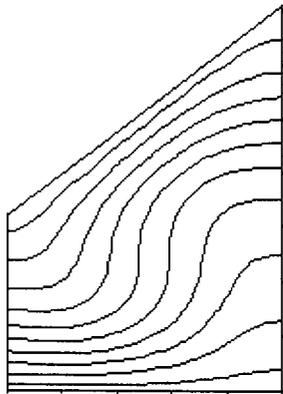


(1)

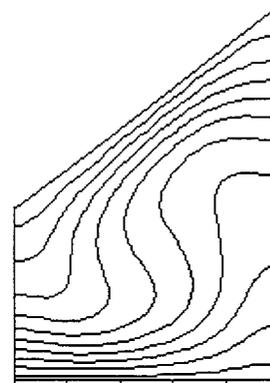


(2)

(b) $\theta = 25^\circ$

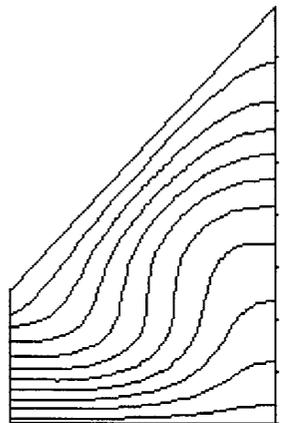


(1)

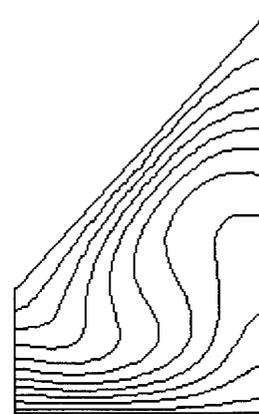


(2)

(c) $\theta = 40^\circ$



(1)



(2)

(d) $\theta = 50^\circ$

Fig 5.6: Comparaison des isothermes des plans (1) $z = 4/30$ et(2) $z = 15/30$ pour différentes valeurs de θ ($Rf = 1$, $Ra = 10^4$, $Fz = 1$)

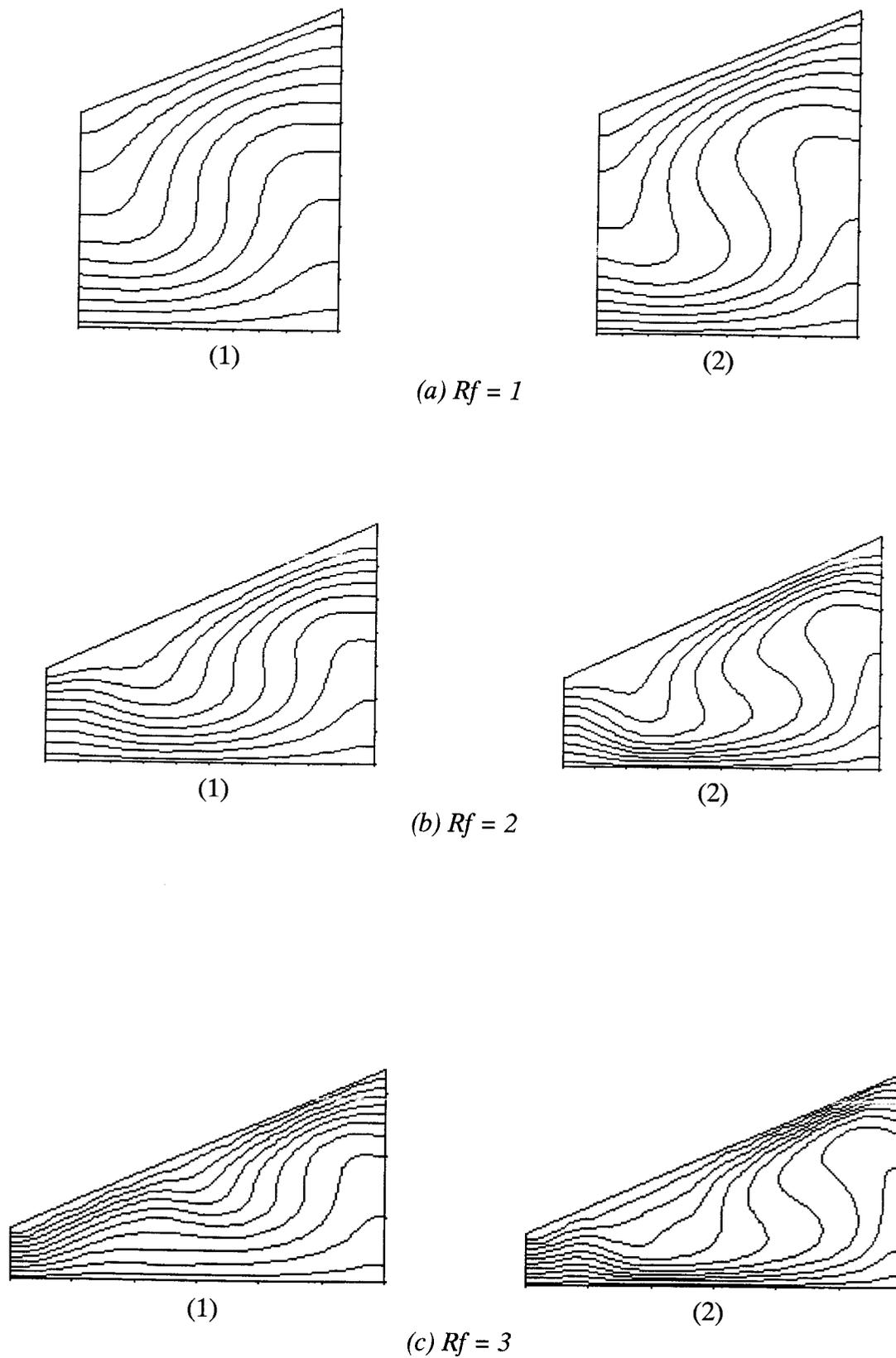


Fig 5.7 : Comparaison des isothermes des plans (1) $z = 4/30$ et (2) $z = 15/30$ pour différentes valeurs de Rf ($\theta = 25^\circ$, $Ra = 10^4$, $Fz = 1$)

2. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT :

Dans le but d'explorer le champ d'écoulement tridimensionnel engendré par le gradient de température appliqué entre la paroi basse et la paroi inclinée, les autres parois étant adiabatiques; nous avons tracé les champs de vitesses dans deux plans parallèles, suivant les trois directions.

Pour un nombre de Rayleigh de 10^3 ($R_f=1$, $f_z=1$, $\theta=25^\circ$) (fig 5.8), l'écoulement est pratiquement bidimensionnel monocellulaire dans la totalité de la cavité. Le fluide chauffé à la paroi basse remonte le long de la paroi verticale supérieure, puis il rejoint la paroi inclinée. Ainsi, au contact de cette paroi froide, il voit sa densité accroître, ce qui lui imprime un écoulement descendant le long de la paroi verticale inférieure. Lorsque le nombre de Rayleigh passe à 10^4 (fig 5.9), la structure monocellulaire de l'écoulement est conservée. Pour ce qui est de l'aspect tridimensionnel, on distingue deux régions (suivant z) : la région centrale de la cavité, d'épaisseur faible et les régions proches des parois. La première région est caractérisée par un écoulement pratiquement bidimensionnel. L'effet des parois sur la deuxième région rend la composante tridimensionnelle de l'écoulement non négligeable. Cette composante est en général orientée vers les parois pour le fluide proche des parois actives et vers le milieu de la cavité pour la partie centrale. Pour le fluide se trouvant à proximité des parois verticales passives, la composante tridimensionnelle est généralement négligeable. Pour des nombres de Rayleigh allant jusqu'à $9 \cdot 10^4$ (fig 5.10,5.11), la même structure de l'écoulement est conservée avec toutefois quelque modifications concernant la composante tridimensionnelle. De plus l'écoulement devient de plus en plus intense au fur et à mesure que la sollicitation augmente.

Par ailleurs, remarquons que le milieu de la cavité ($x = 0.5$) est le siège d'un écoulement particulier. La composante tridimensionnelle est considérablement élevée et le caractère tridimensionnel de l'écoulement dans cette région est clairement perceptible.

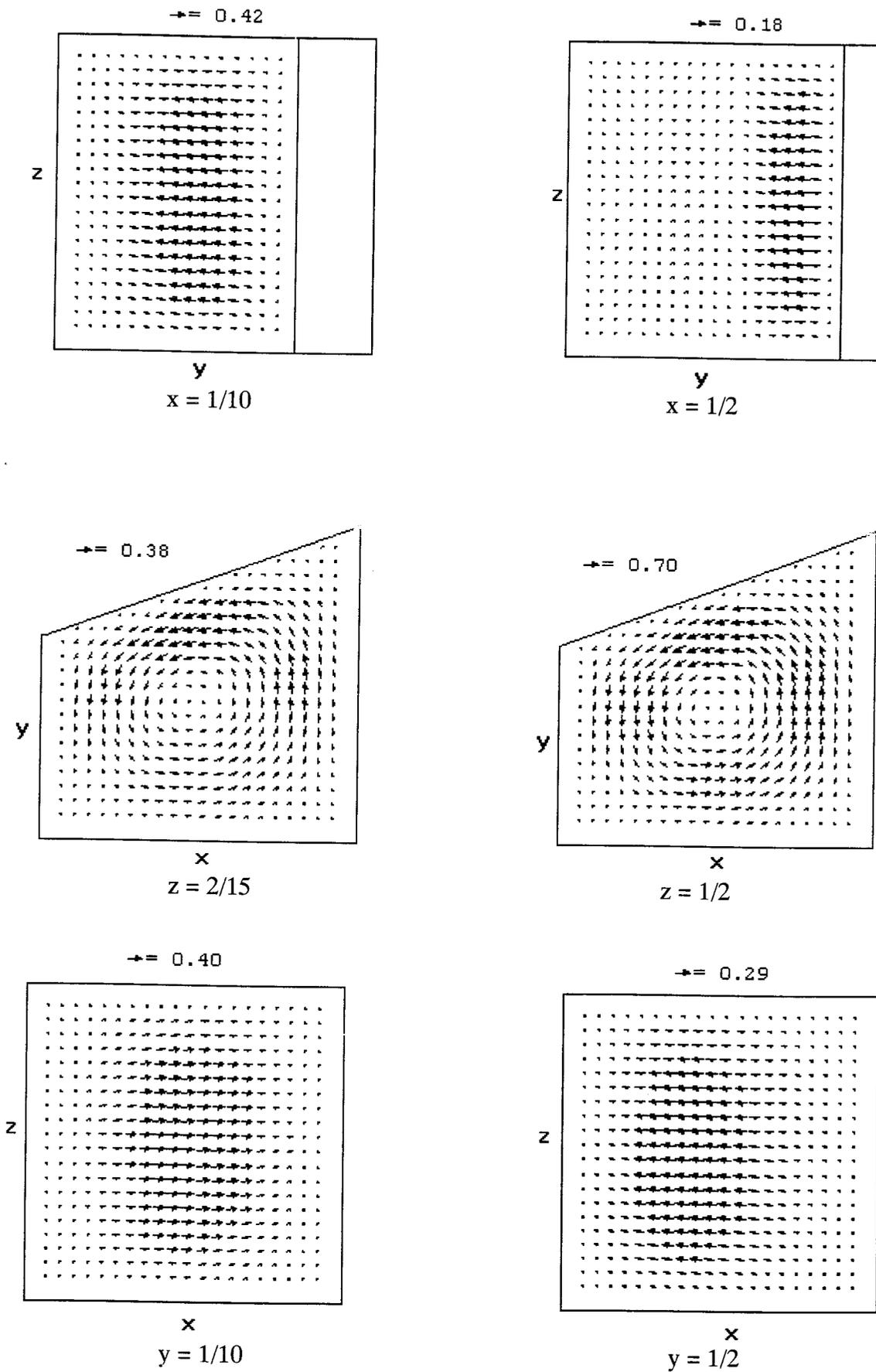


Fig 5.8. : Champs de vitesses pour $Ra = 10^3$ ($\theta = 25^\circ$, $Rf = 1$, $Fz = 1$)

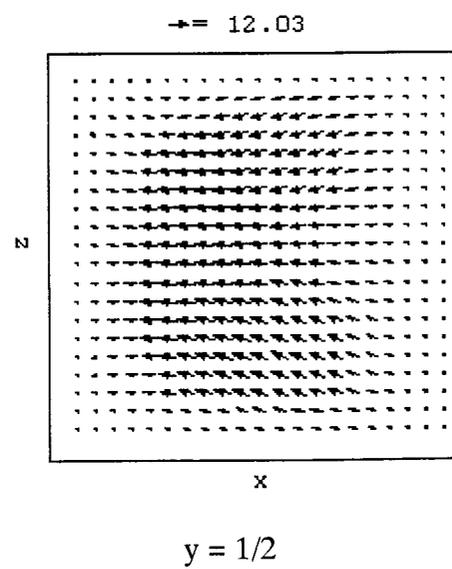
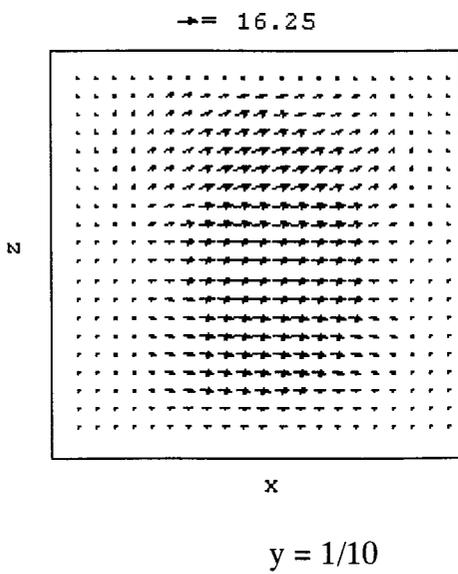
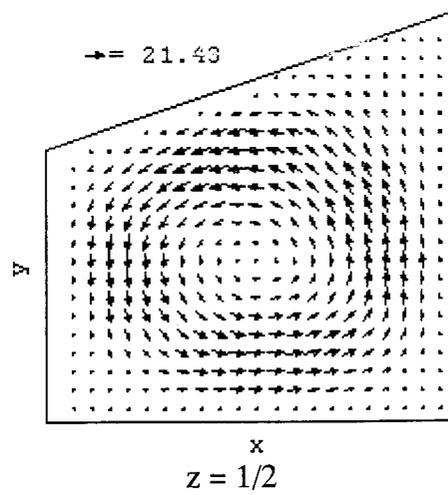
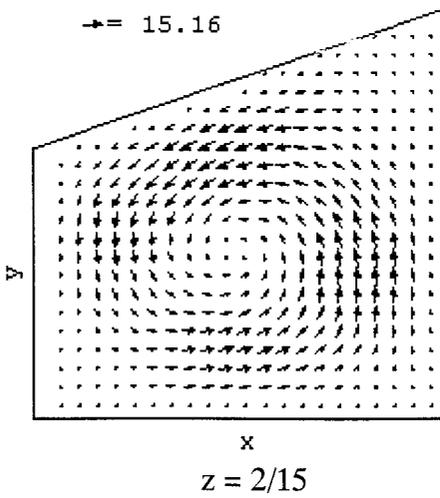
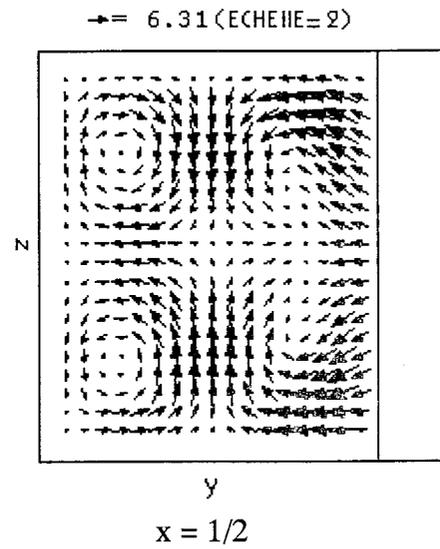
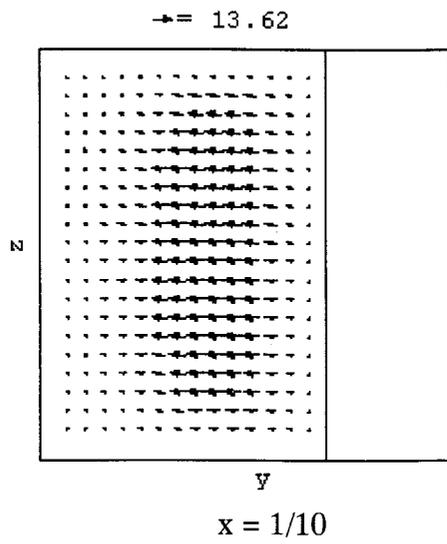


Fig 5.9 : Champs de vitesses pour $Ra = 10^4$ ($\theta = 25^\circ$, $Rf = 1$, $Fz = 1$)

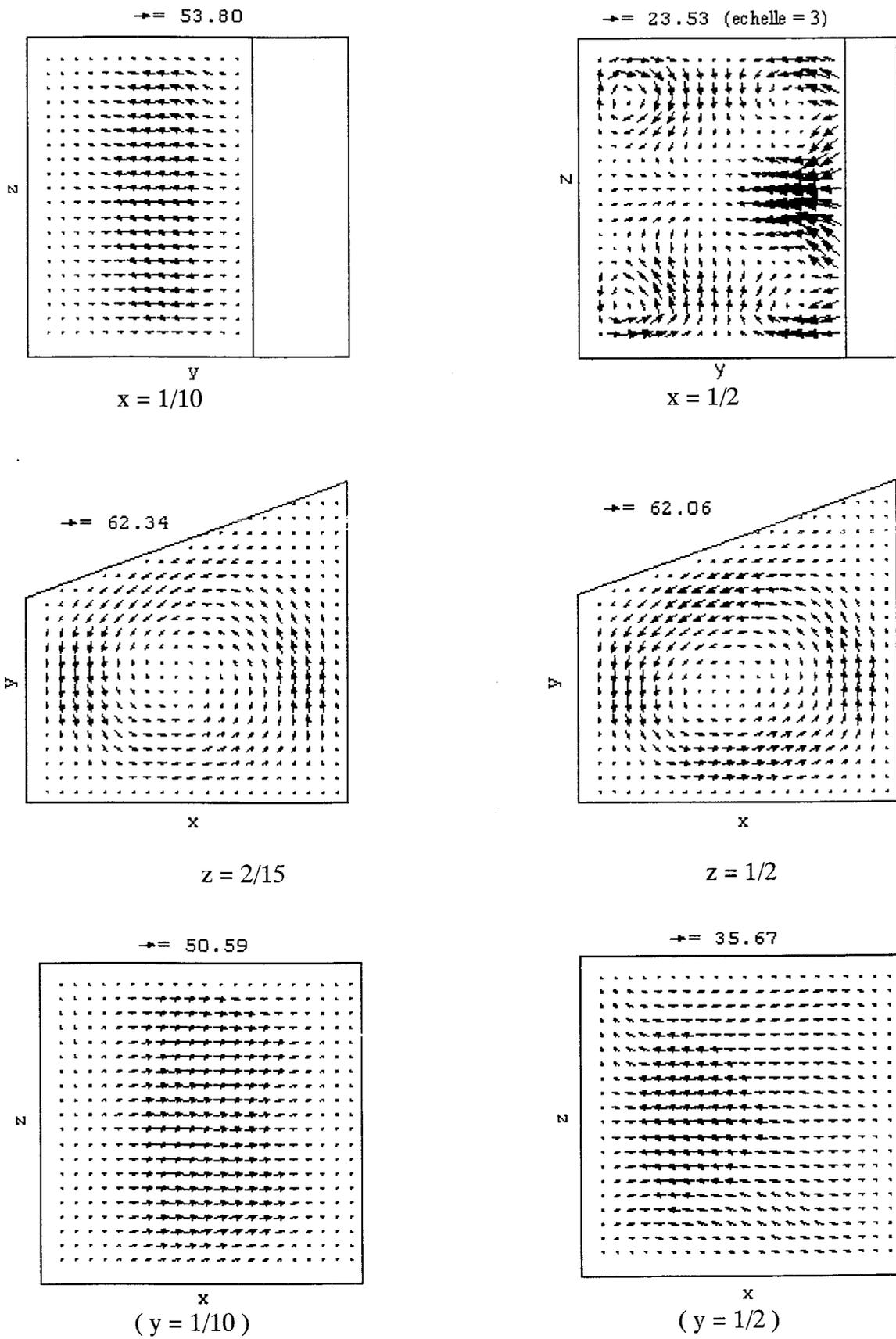


Fig 5.10 : Champs de vitesses pour $Ra = 5.10^4$ ($t\acute{e}ta = 25^\circ$, $Rf = 1$, $Fz = 1$)

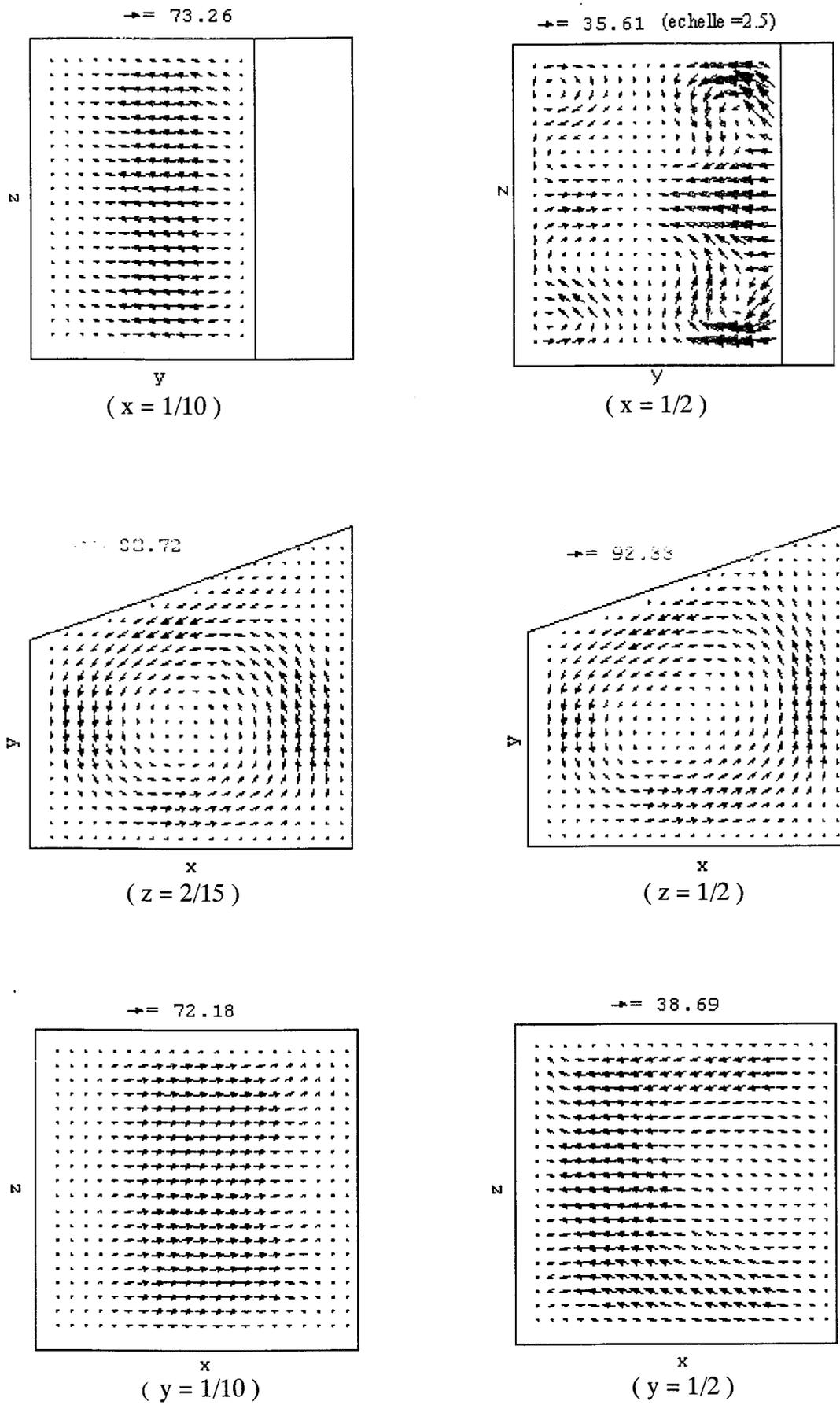


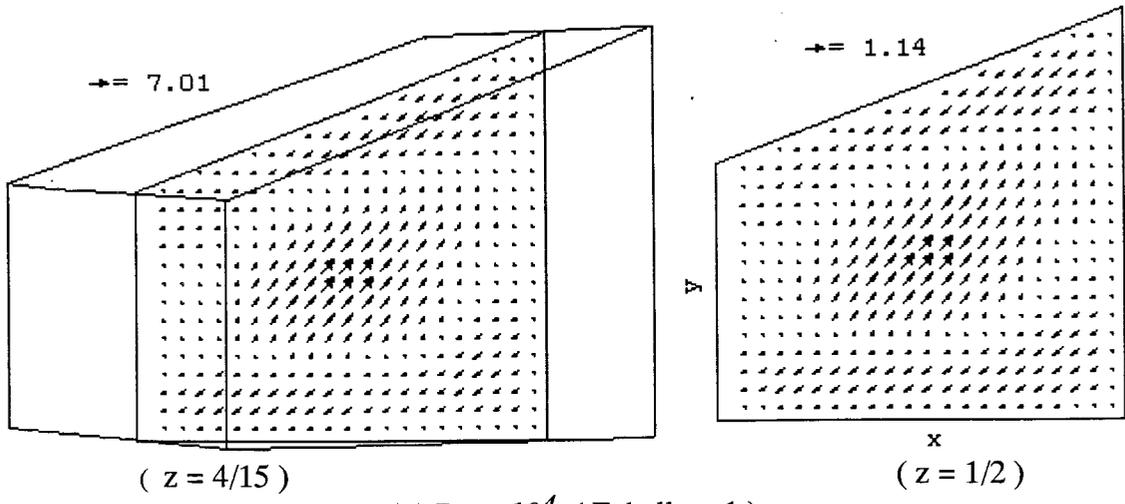
Fig 5.11 : Champs de vitesses pour $Ra = 9.10^4$ (téta = 25° , $Rf = 1$, $Fz = 1$)

3. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT TRANSVERSAL :

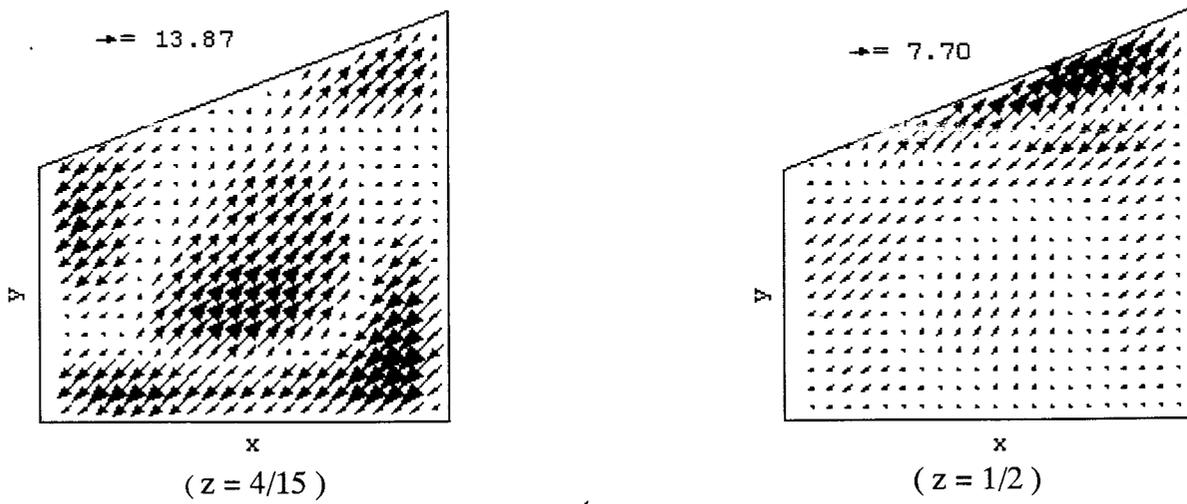
On remarque (voir fig 12 - fig 15) que la composante transversale (w) de l'écoulement est en général orientée vers le centre de la cavité ($z = 0.5$) pour le fluide se trouvant à la partie centrale, et vers les parois ($z = 0$ et $z = 0.5$) pour celui avoisinant les parois basse et inclinée. L'écoulement transversal est d'ordre de grandeur inférieur à celui de l'écoulement principal (u et v) dans la totalité de la cavité. Il est en particulier, pratiquement négligeable en $z = 0.5$. Ceci est évidemment justifié par la symétrie de la cavité. Par conséquent, l'écoulement en $z = 0.5$ est très proche de celui exhibé par la solution bidimensionnelle. Cette remarque est particulièrement vérifiée pour des allongements suivant z (Fz), élevés.

4. INFLUENCE DES DIFFERENTS PARAMETRES SUR LE CARACTERE TRIDIMENSIONNEL DE L'ÉCOULEMENT :

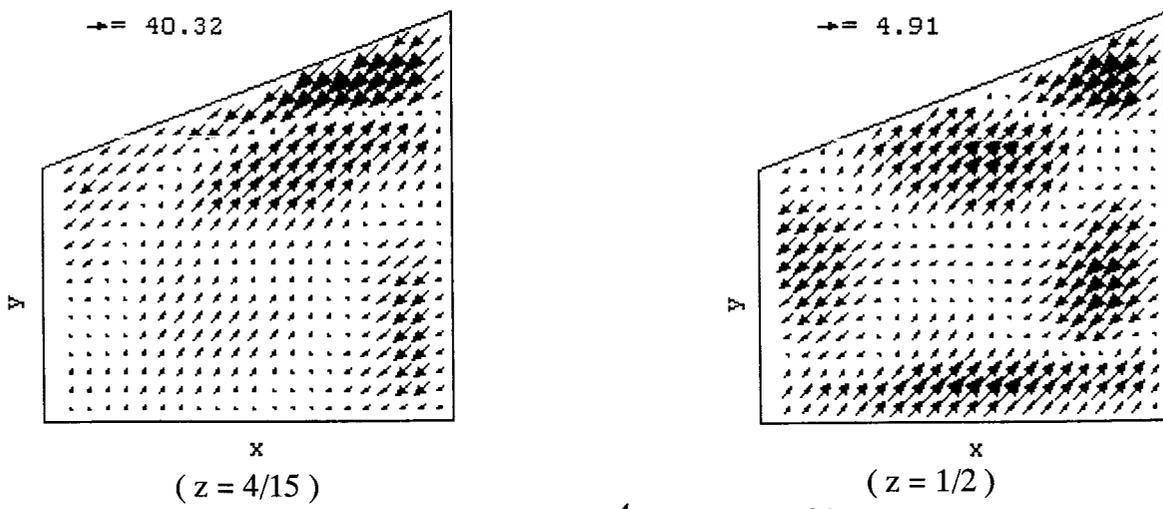
En vue de mettre en évidence l'aspect tridimensionnel de l'écoulement, plusieurs façons ont été retenues. Les deux premières, qualitatives, reviennent à estimer cet aspect à travers l'allure tridimensionnelle du champ thermique. Ceci peut être obtenu soit par le tracé des surfaces isothermes ou par le tracé des isothermes de deux plans parallèles suivant z (fig 5.5,5.6,5.7); la différence de l'allure de celles ci entre les deux plans nous renseigne sur l'ampleur de la composante tridimensionnelle de l'écoulement. Les deux autres, quantitatives, consistent à évaluer le champ d'écoulement suivant z . Pour ce faire, on trace la composante tridimensionnelle (W) dans deux plans suivant z . Le calcul de W_{max} peut aussi nous renseigner sur l'ampleur de la composante tridimensionnelle de l'écoulement. Ainsi, nous procédons à l'étude de l'influence du nombre de Rayleigh (fig5.16, 5.12), de l'inclinaison de la paroi supérieure (fig5.17,5.13), du rapport de forme suivant x (fig 5.18, 5.14) et enfin de ce rapport suivant z (fig 5.15), sur le caractère tridimensionnel de l'écoulement. On relève une conformité des observations entre les différentes façons adoptées. En effet, Il ressort une nette dépendance en fonction des deux rapports de forme et du nombre de Rayleigh. L'influence de θ est faible.



(a) $Ra = 10^4$ (Echelle = 1)



(b) $Ra = 5 \cdot 10^4$ (Echelle = 3)



(c) $Ra = 9 \cdot 10^4$ (Echelle = 3)

Fig 5.12 : Composante tridimensionnelle de l'écoulement(W) pour différentes valeurs de Ra (téta = 25°, Rf = 1, Fz = 1)

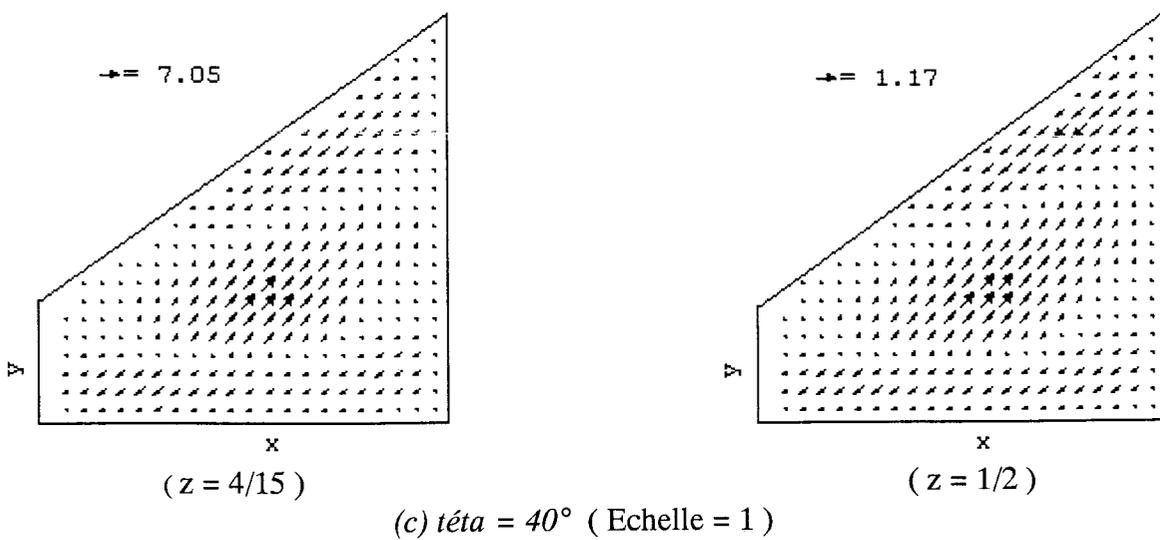
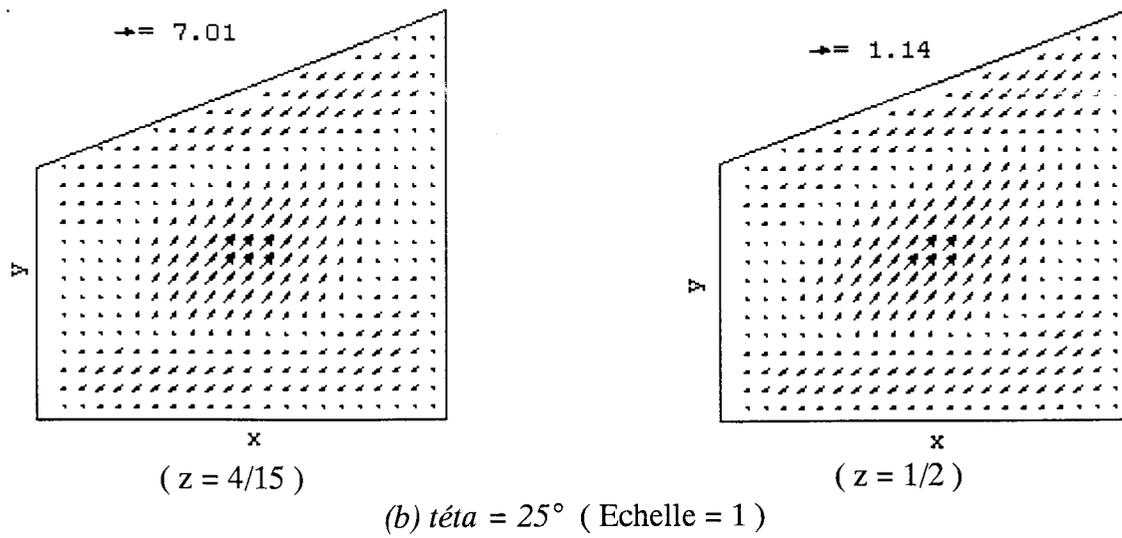
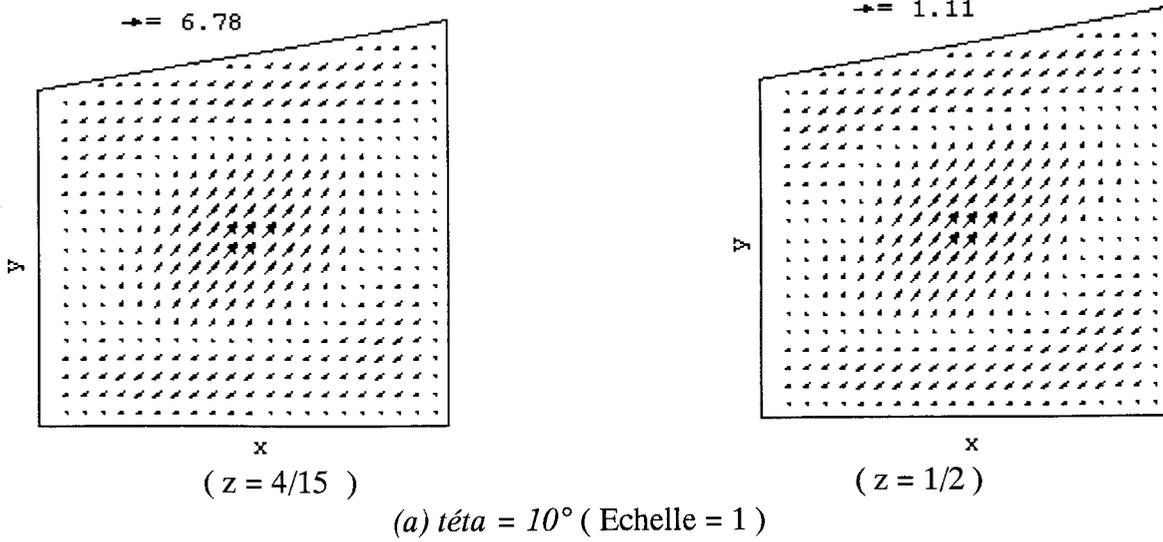


Fig 5.13 : Composante tridimensionnelle de l'écoulement (W), pour différentes valeurs de θ ($Ra = 10^4$, $Rf = 1$, $Fz = 1$)

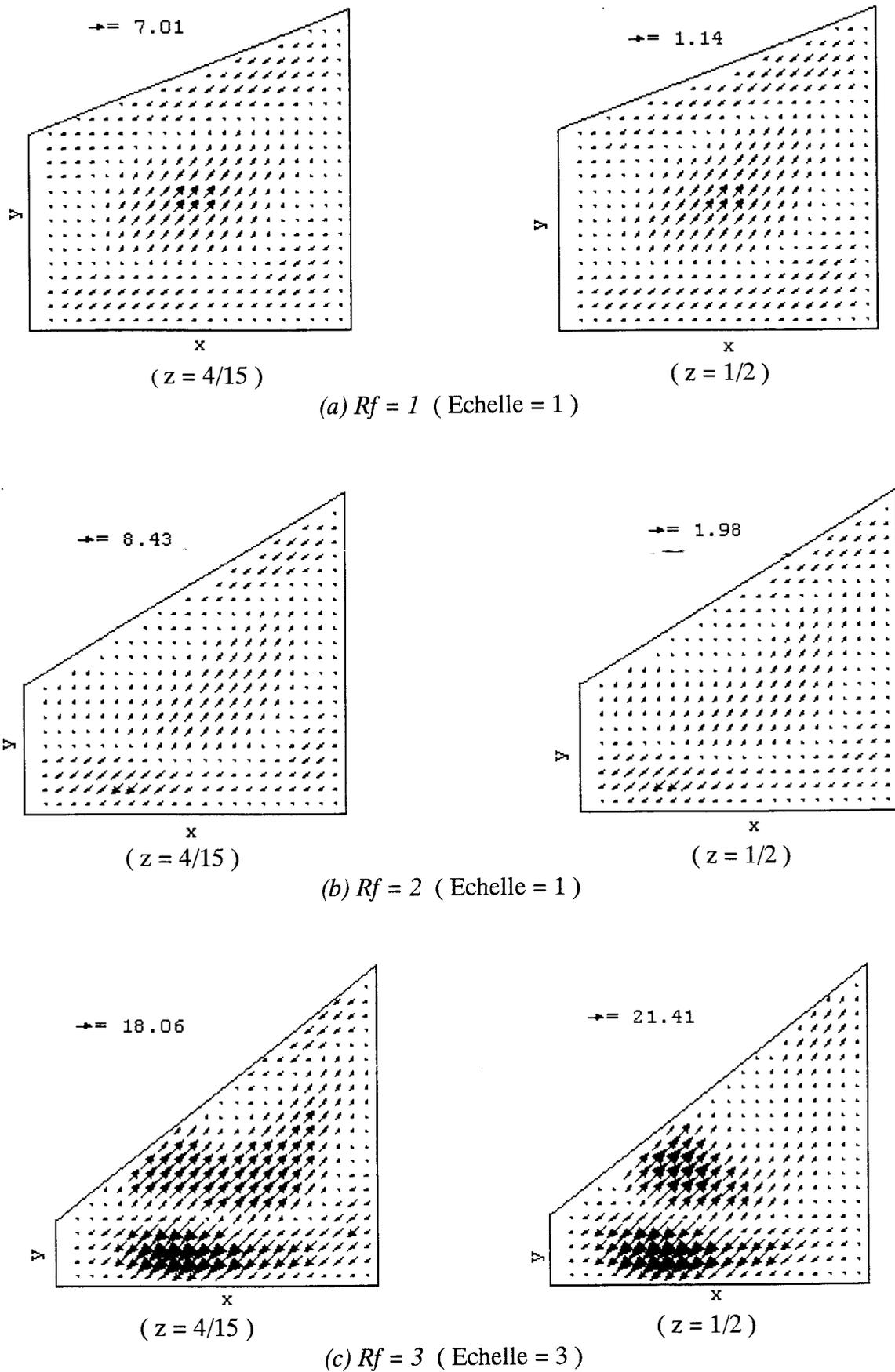


Fig 5.14 : Composante tridimensionnelle de l'écoulement (W), pour différentes valeurs de Rf ($Ra = 10^4$, $teta = 1$, $Fz = 1$)

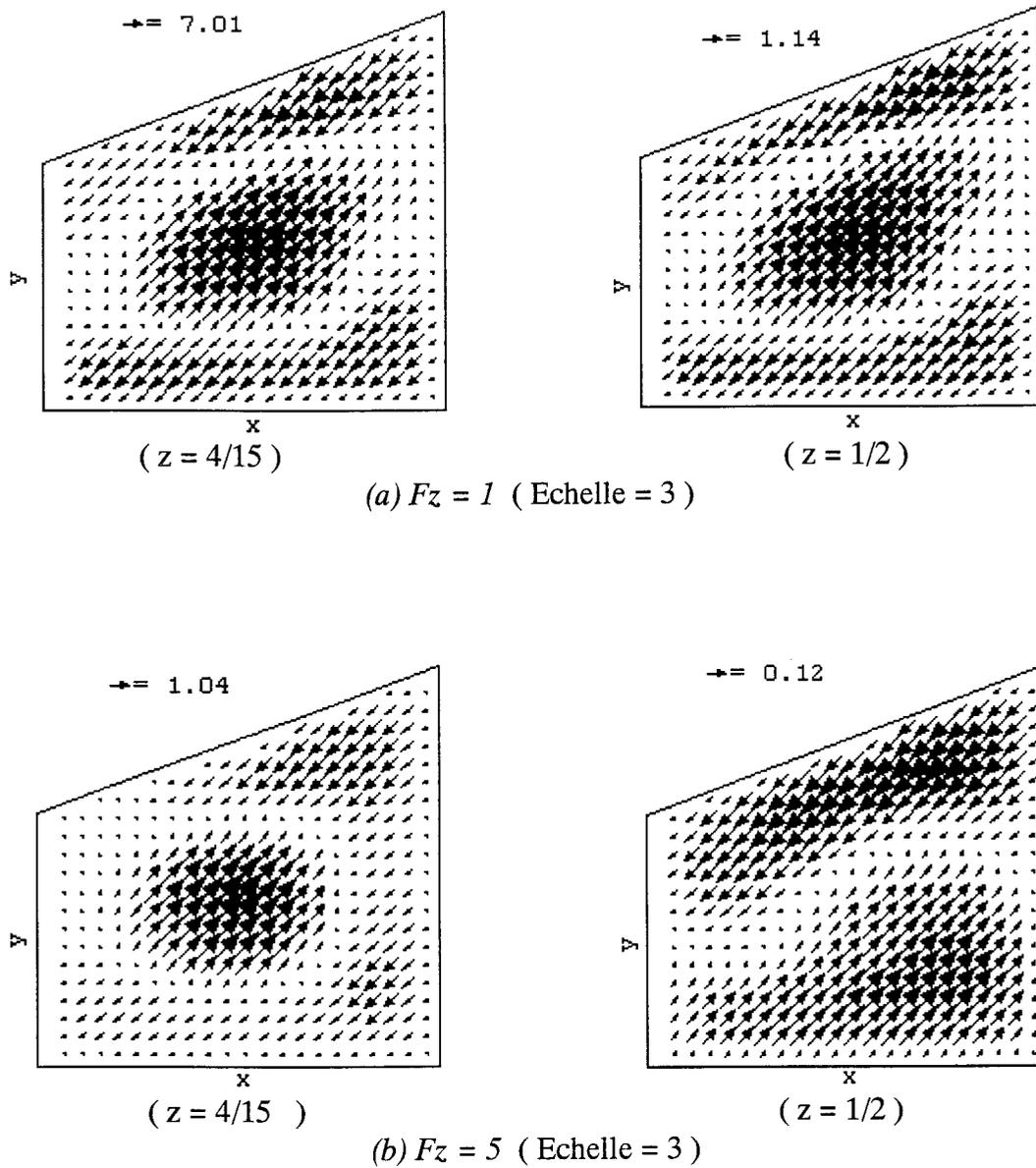


Fig 5.15 : Composante tridimensionnelle de l'écoulement (W), pour différentes valeurs de Fz ($Ra = 10^4$, $teta = 1$, $Rf = 1$)

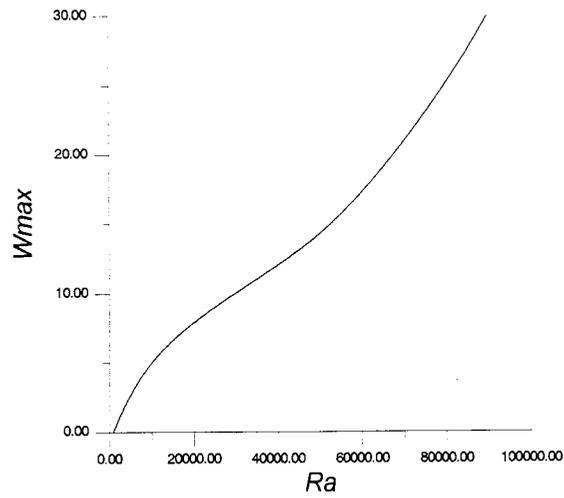


fig 5.16: Influence de Ra sur Wmax ($\theta = 25^\circ$, $R_f = 1$, $f_z = 1$)

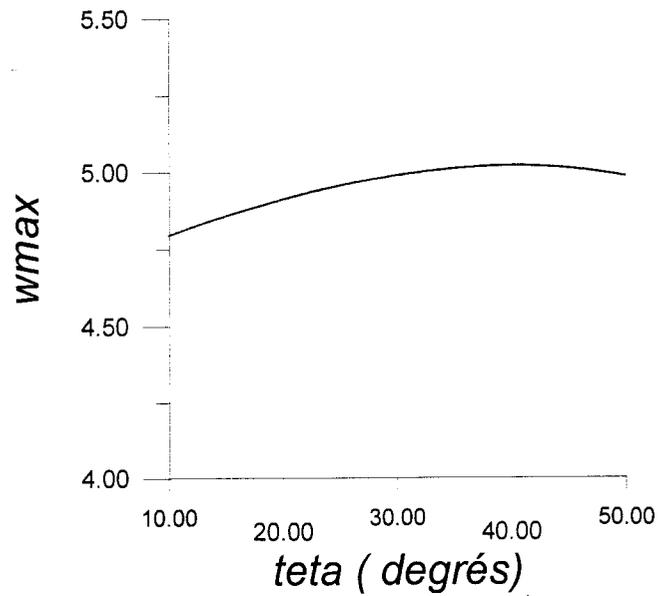


fig 5.17: Influence de θ sur Wmax ($R_a = 10^4$, $R_f = 1$, $f_z = 1$)

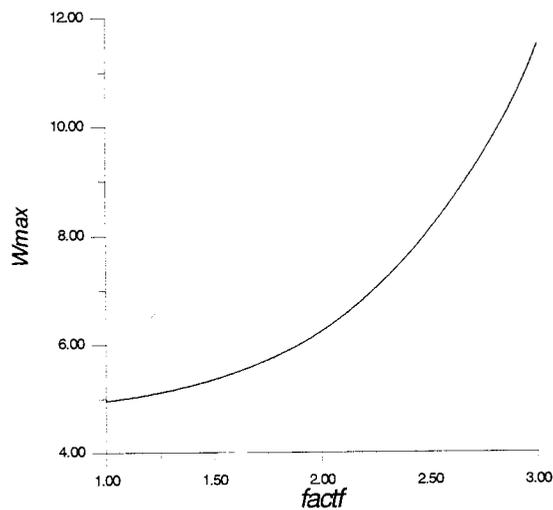


fig 5.18: Influence de R_f sur Wmax ($R_a = 10^4$, $\theta = 25^\circ$, $f_z = 1$)

5. CONCLUSION :

En vue d'étudier l'aspect tridimensionnel de l'écoulement et par conséquent d'analyser entre autres, le bien fondé de l'hypothèse de bidimensionnalité, une étude tridimensionnelle est réalisée.

Le tracé des surfaces isothermes montre une répartition tridimensionnelle du champ thermique, surtout à proximité des parois verticales, à partir d'un nombre de Rayleigh d'ordre de grandeur de 10^4 . La sollicitation est d'autant plus élevée que cet aspect est plus prononcé.

L'influence des paramètres géométriques est aussi considérable.

Pour le champ dynamique, on distingue deux régions (suivant z), à savoir la région centrale d'épaisseur plus ou moins importante en fonction des valeurs des différents paramètres, et la région voisine des parois. L'écoulement dans la première région est pratiquement bidimensionnel. Pour la deuxième région, la composante tridimensionnelle de l'écoulement, bien qu'appréciable est d'ordre de grandeur inférieur à celui de l'écoulement principal. Ces constatations sont justifiées par l'effet des parois. Ainsi, la génération de la composante tridimensionnelle de l'écoulement est due à l'effet des bords, qui engendre un écoulement principal en couches. La distribution du champ thermique est par conséquent affecté. Cet écoulement en couche suscite une composante tridimensionnelle qui elle aussi, affecte la distribution des isothermes.

La variation de la composante tridimensionnelle en fonction des deux rapports de forme, du nombre de Rayleigh et de l'inclinaison de la paroi supérieure, est explorée. Il apparaît une nette dépendance en fonction des trois premiers paramètres. L'influence de θ quant à elle est faible.

Partie -2-

ETUDE DES CHAMPS THERMIQUE ET DYNAMIQUE
- APPROCHE BIDIMENSIONNELLE -

1. INTRODUCTION

Le caractère tridimensionnel de l'écoulement étant étudié, les conditions de validité d'une éventuelle hypothèse de bidimensionnalité peuvent être définies. A ce stade, en vue d'une meilleure compréhension et caractérisation du phénomène de convection naturelle dans la configuration considérée, il convient de compléter l'étude par les résultats d'une approche bidimensionnelle dans la mesure où celle-ci peut être justifiée. Pour cela, en s'inspirant de l'étude tridimensionnelle, on impose pour ce qui suit un compromis entre les conditions suivantes:

- Cavité suffisamment longue suivant z ($Fz \gg 1$).
- Sollicitation pas très importante.
- Rapport de forme (Rf) modéré.

2. ETUDE DES CHAMPS THERMIQUE ET DYNAMIQUE :

Afin de caractériser ces deux champs, nous procédons au tracé des isothermes et des lignes de courant engendrées par un gradient thermique appliqué entre les parois actives de la cavité considérée. Nous étudions par la même, l'influence des différents paramètres sur ces deux champs.

2.1. Influence du nombre de Rayleigh :

a) Cas $\theta = 0, Rf = 2$

Une dépendance de l'écoulement et du transfert thermique en fonction des conditions initiales a été remarquée. En vue de mettre en relief cette dépendance, nous avons exploré deux cas.

-Premier cas: $T=0, u=2, v=2$ (fig 6.1)

Pour un angle d'inclinaison de la paroi supérieure $\theta = 0$, à un nombre de Rayleigh égal à 10^3 , le régime est pratiquement conductif. Lorsque le nombre de Rayleigh passe à 10^4 , un mouvement convectif multicellulaire, à deux cellules contrarotatives s'instaure. Le sens de rotation des cellules peut être déduit de la distorsion des isothermes. Ce sens est confirmé par le tracé des vitesses (fig 6.4). Ainsi, le fluide chauffé à la paroi basse remonte sur les parois

verticales de part et d'autre. Ce fluide au contact de la paroi haute froide, devient plus dense, pour chuter à mi-distance de celle-ci.

Lorsque la sollicitation s'accroît, une cellule de faible dimension s'intercale entre les deux cellules existantes.

-Deuxième cas: $T = 0.5, u = 0, v = 0$ (fig 6.2):

On relève essentiellement une différence dans le nombre de cellules. En effet, pour le présent cas, la structure bi-cellulaire observée pour un Rayleigh de 10^4 , reste maintenue pour des sollicitations élevées.

b) Cas $\theta = 10, Rf = 3$ (fig 6.3):

Pour un angle d'inclinaison de la paroi supérieure $\theta = 10^\circ$ et un rapport de forme $Rf = 3$, le régime d'écoulement pour une sollicitation $Ra=10^3$, est monocellulaire, avec une cellule qui occupe presque la totalité de la cavité. Pour $Ra=1.3 \cdot 10^3$, on assiste à la phase de naissance d'une deuxième cellule. La cellule déjà existante, étant la cellule mère. Déjà en un nombre de Rayleigh de 2000, une structure multicellulaire à trois cellules contrarotatives deux à deux (toujours les voisines), a pris place. Pour des sollicitations plus élevées, le même nombre de cellules est conservé, tout en changeant d'intensité.

La plus grande cellule qui séjourne à la partie haute de la cavité, occupe presque la moitié de celle-ci. Par ailleurs, notons l'influence des conditions initiales sur le sens de rotation des cellules (fig 6.4).

Remarque:

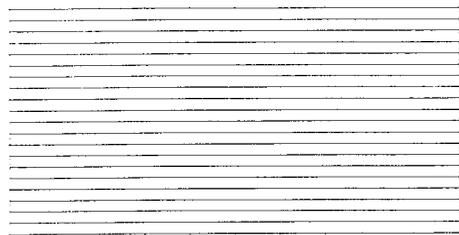
Dans ce qui va suivre les deuxièmes conditions initiales ($T = 0.5, u = 0, v = 0$) sont adoptées.

c) Cas $\theta = 25, Rf = 1$ (fig 6.5):

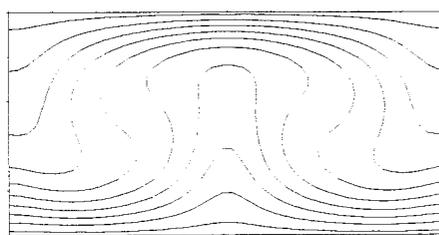
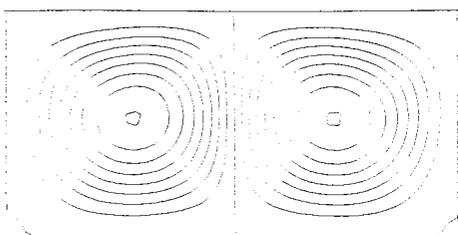
Pour un angle $\theta = 25$ et un rapport de forme $Rf = 1$, une structure monocellulaire prend place et subsiste jusqu'à un nombre de Rayleigh de $5 \cdot 10^4$ où une deuxième cellule commence à apparaître à la partie haute de la cavité. Cette cellule, n'intéressant qu'une faible partie du fluide, et n'étant pas au contact avec la paroi chaude ne participe que dans une faible portion au transfert de chaleur dans la cavité.

N.B: -Les courbes à gauche représentent les lignes de courant, et celles à droite les isothermes.

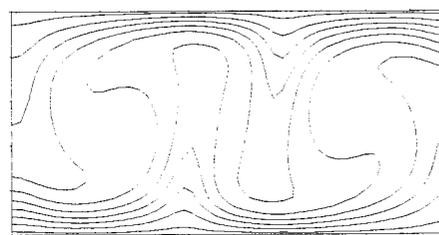
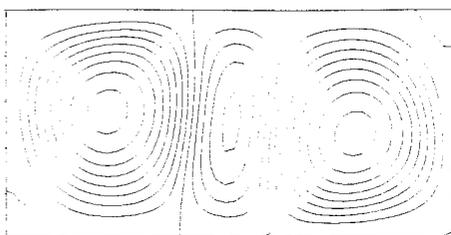
Cas1: $t\acute{e}ta = 0, Rf = 2$



(a) $Ra = 10^3$



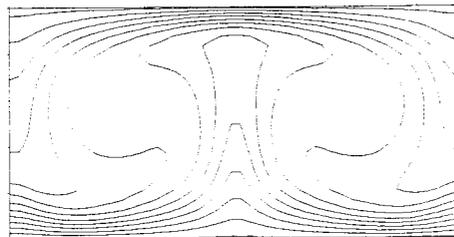
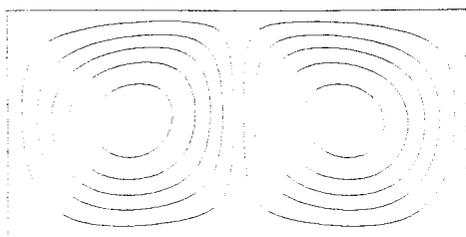
(b) $Ra = 10^4$



(c) $Ra = 5 \cdot 10^4$

Conditions initiales: 1) $T=0, u=2, v=2$

fig 6.1

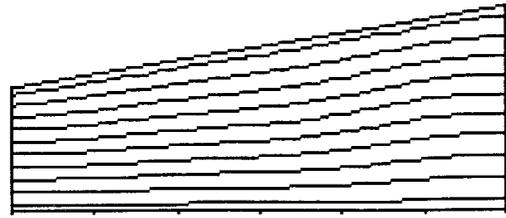
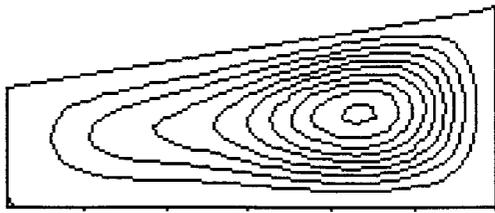


(c') $Ra = 5 \cdot 10^4$

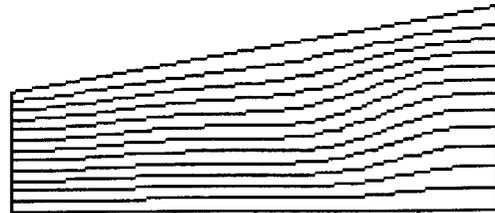
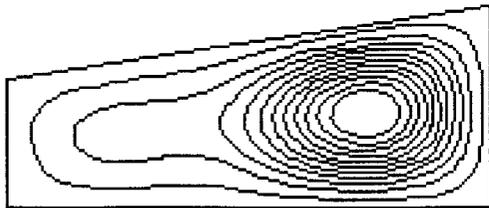
Conditions initiales: 2) $T=0.5, u=0, v=0$

fig 6.2

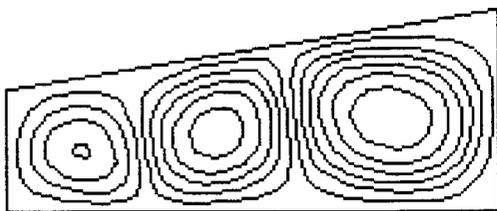
Cas2: $\theta = 10^\circ$, $Rf = 3$



(a) $Ra = 10^3$

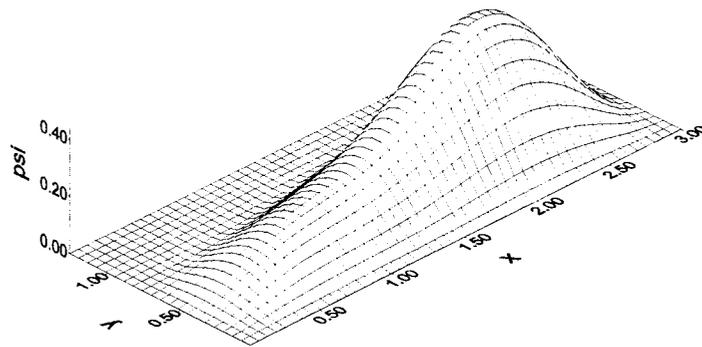


(b) $Ra = 1.3 \cdot 10^3$

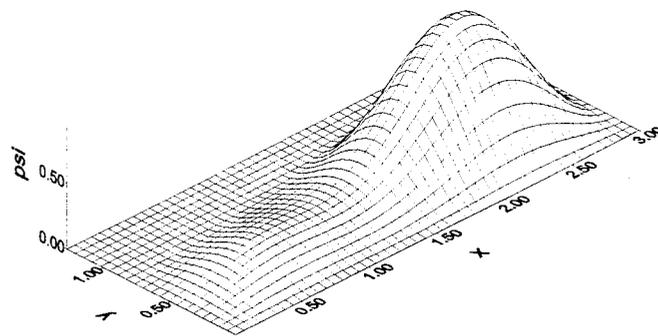


(c) $Ra = 5 \cdot 10^4$

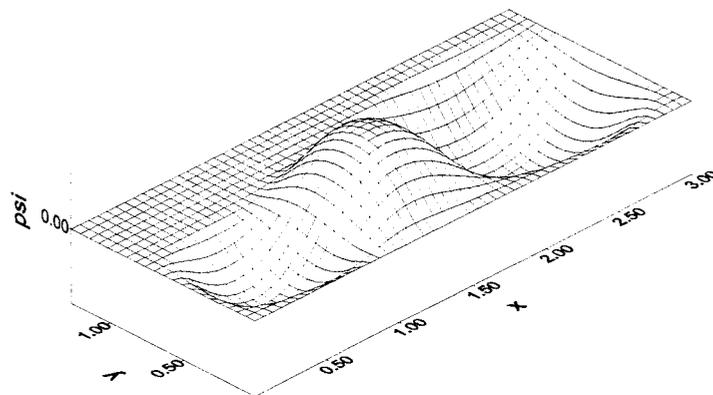
fig 6.3 -a



(a) $Ra = 10^3$

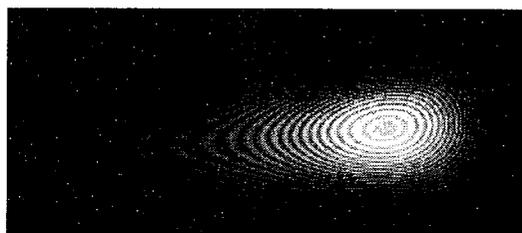
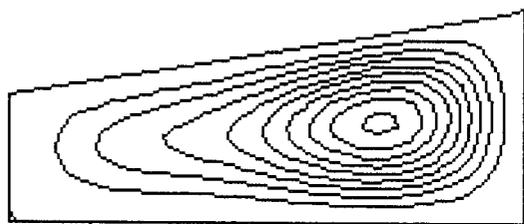


(b) $Ra = 1.3 \cdot 10^3$

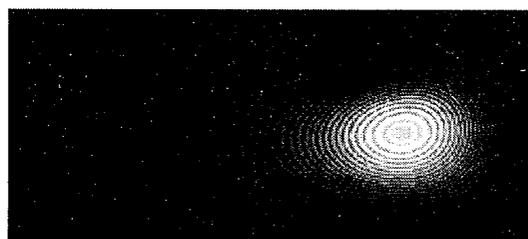
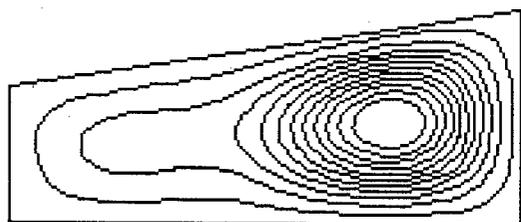


(c) $Ra = 5 \cdot 10^4$

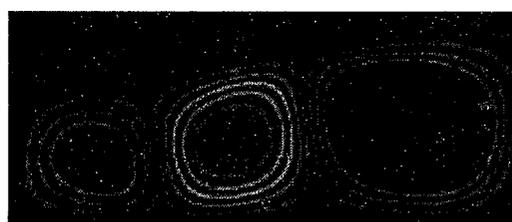
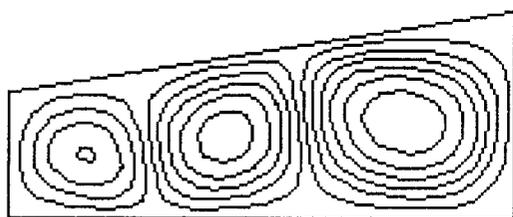
fig 6.3 -b: Le tracé de $\Psi(x,y)$



(a) $Ra = 10^3$



(b) $Ra = 1.3 \cdot 10^3$



(c) $Ra = 5 \cdot 10^4$

fig 6.3 -c: Visualisation par interpolation d'image de l'écoulement

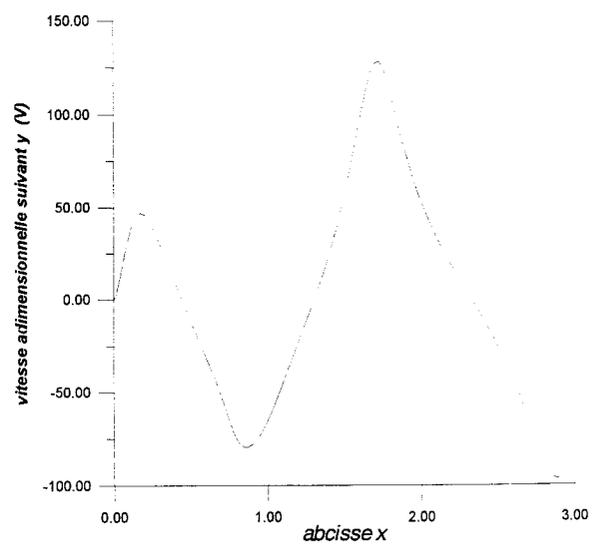
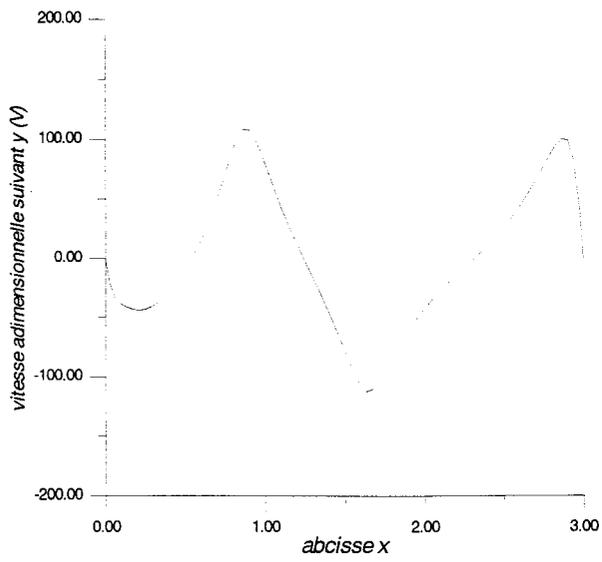
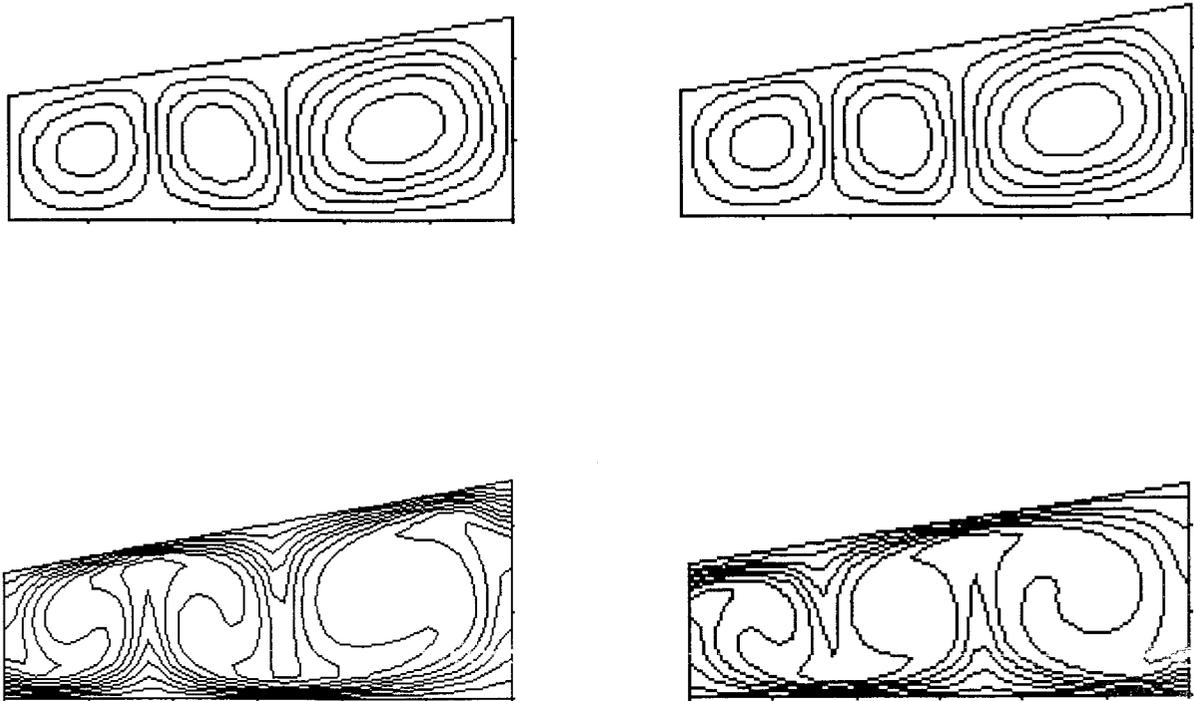
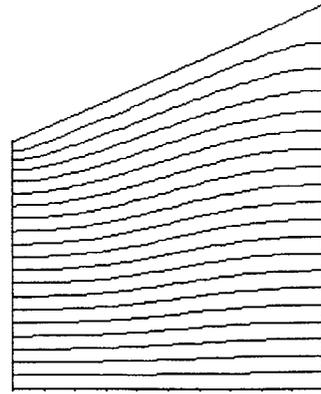
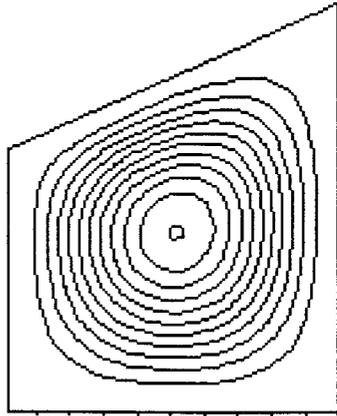
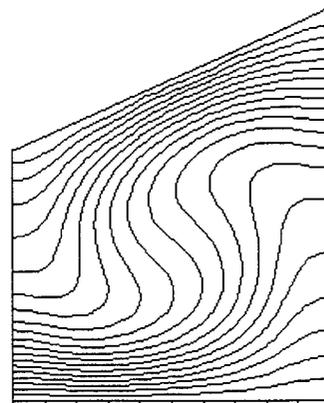
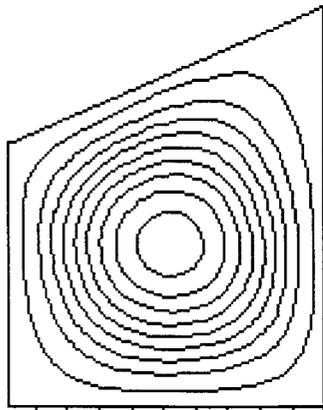


fig 6.4

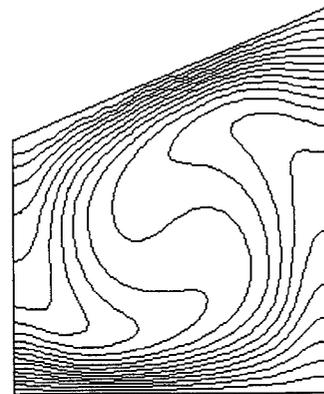
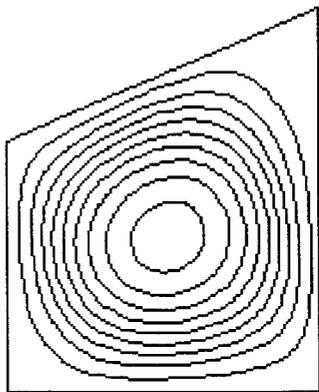
Cas3: $\theta = 25^\circ$, $R_f = 1$



(a) $Ra = 10^3$



(b) $Ra = 10^4$



(c) $Ra = 5 \cdot 10^4$

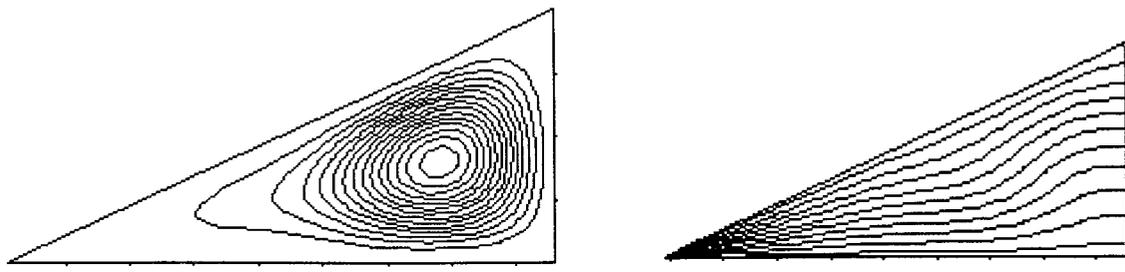
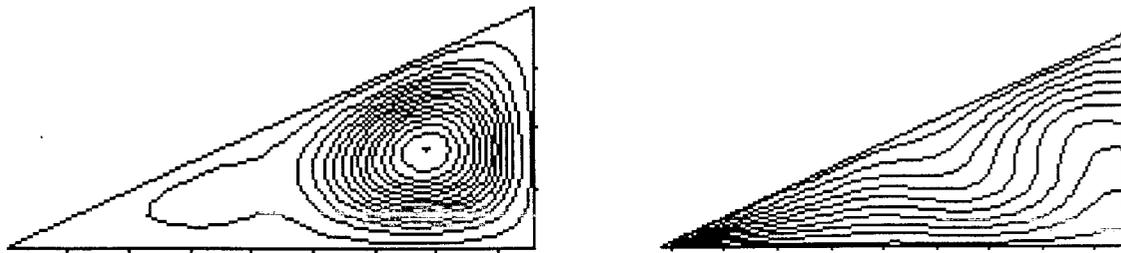
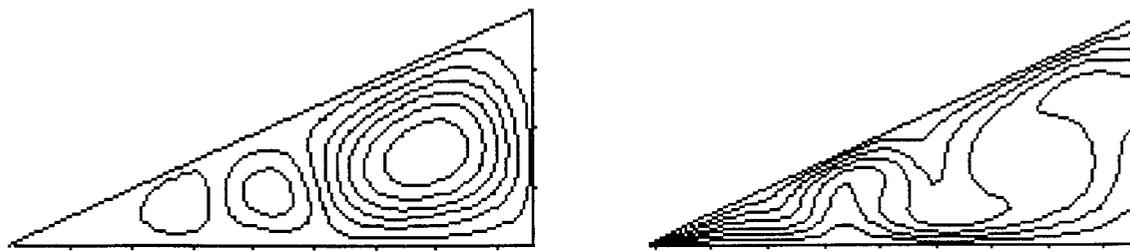
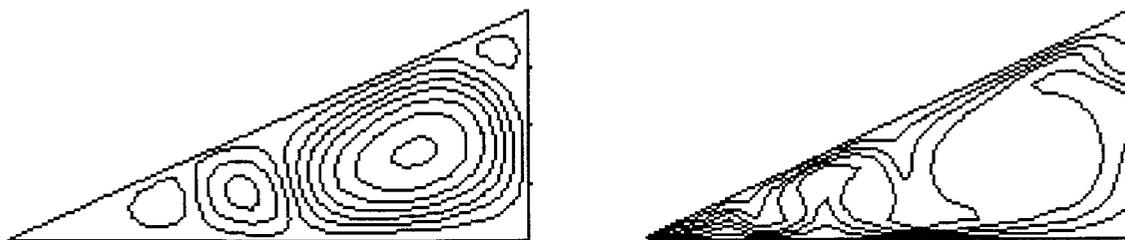
fig 6.5

d) Cas d'une géométrie triangulaire:

Pour une configuration triangulaire ($\theta = 25^\circ$, $R_f = 4.289$) (fig 6.6), avec un Rayleigh de 500, un mouvement convectif s'instaure. L'écoulement est monocellulaire avec une cellule qui occupe principalement la partie haute de la cavité. Le fluide contenu dans la partie basse a stagné. Le transfert de chaleur dans cette partie a lieu essentiellement par conduction, la forme des isothermes le montre clairement.

Pour un Rayleigh de 10^3 , une deuxième cellule prend naissance de celle déjà existante, tout en avançant vers la partie basse de la cavité. Lorsque le nombre de Rayleigh passe à 10^4 , trois cellules sont observées. La première de dimensions nettement plus élevées que les deux autres, occupe presque la moitié de la cavité. Pour une bonne partie de la cavité, le régime de transfert de chaleur demeure toujours conductif.

Pour un nombre de Rayleigh de $5 \cdot 10^4$, un écoulement convectif s'installe dans la totalité de la cavité. Des cellules convectives bien que de faibles dimensions, apparaissent à l'extrémité de la partie basse, ainsi qu'à celle de la partie haute.

(a) $Ra = 500$ (b) $Ra = 1000$ (c) $Ra = 10^4$ (d) $Ra = 5 \cdot 10^4$ ***Fig 6.6: Configuration triangulaire***

2.2. Influence de l'angle d'inclinaison de la paroi supérieure:

En vue de mettre en évidence l'influence de l'angle d'inclinaison θ sur l'écoulement, cinq angles sont choisis (fig 6.7). Les autres paramètres, en l'occurrence le rapport de forme et le nombre de Rayleigh sont fixés ($Rf = 1$, $Ra = 5 \cdot 10^4$).

Une structure monocellulaire apparaît pour tous les angles considérés. De plus, le sens de rotation de ces cellules est identique.

2.3. Influence du rapport de forme:

L'influence du rapport de forme sur l'écoulement est prospectée à travers quatre valeurs de ce paramètre (fig 6.8). L'inclinaison de la paroi supérieure et le nombre de Rayleigh sont fixés respectivement à 10° et $5 \cdot 10^4$.

La comparaison a montré une nette dépendance du nombre de cellules convectives en fonction du rapport de forme. On a même tendance à penser, en s'inspirant des cas traités, que le nombre de cellules est égal au facteur de forme.

3. CONCLUSION :

L'étude bidimensionnelle a révélé l'existence dans la plupart des situations, d'un écoulement multicellulaire, typique de la convection de Rayleigh-Bénard. Le nombre de cellules dépend en particulier du rapport de forme et de la sollicitation. Constatons toutefois, que pour des angles d'inclinaison de la paroi supérieure élevés, la composante horizontale du gradient de température étant prédominante, la cavité est le siège d'un écoulement monocellulaire. La même structure de l'écoulement a été trouvée pour des rapports de forme petits. Le mouvement convectif dans ce cas est similaire à celui qui a lieu dans une couche verticale différentiellement chauffée.

Par ailleurs, l'influence des conditions initiales sur la structure de l'écoulement à savoir le nombre de cellules et le sens de rotation de celles-ci est mis en évidence.

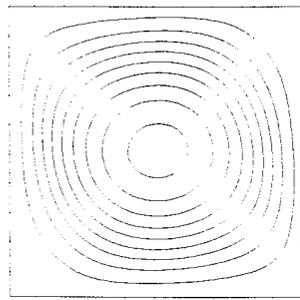
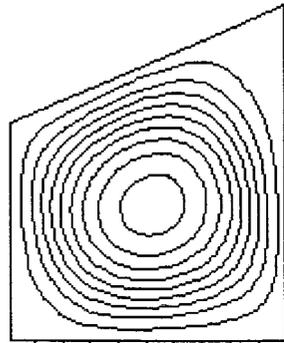
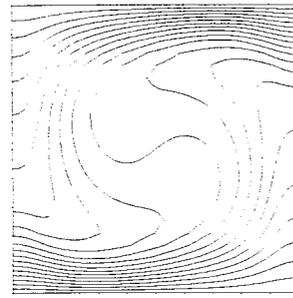
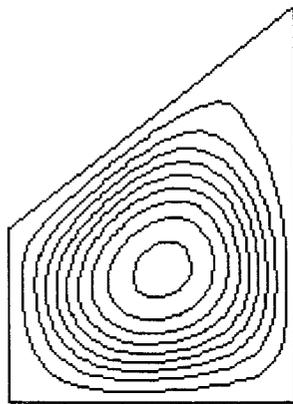
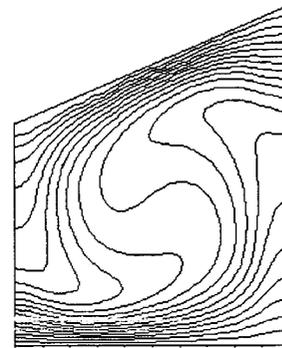
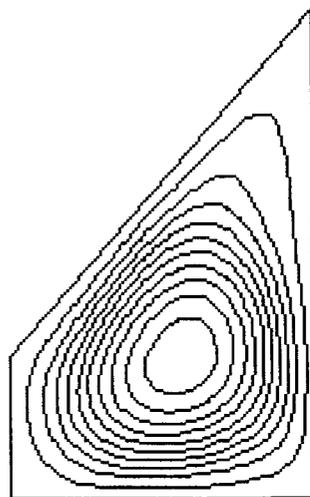
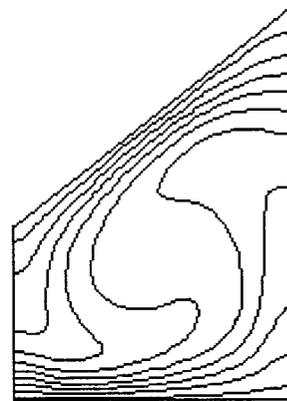
(a) $\theta = 0^\circ$ (b) $\theta = 25^\circ$ (c) $\theta = 40^\circ$ (d) $\theta = 50^\circ$ 

fig 6.7: Influence de l'angle d'inclinaison de la paroi supérieure; ($Ra = 5 \cdot 10^4$, $Rf = 1$)

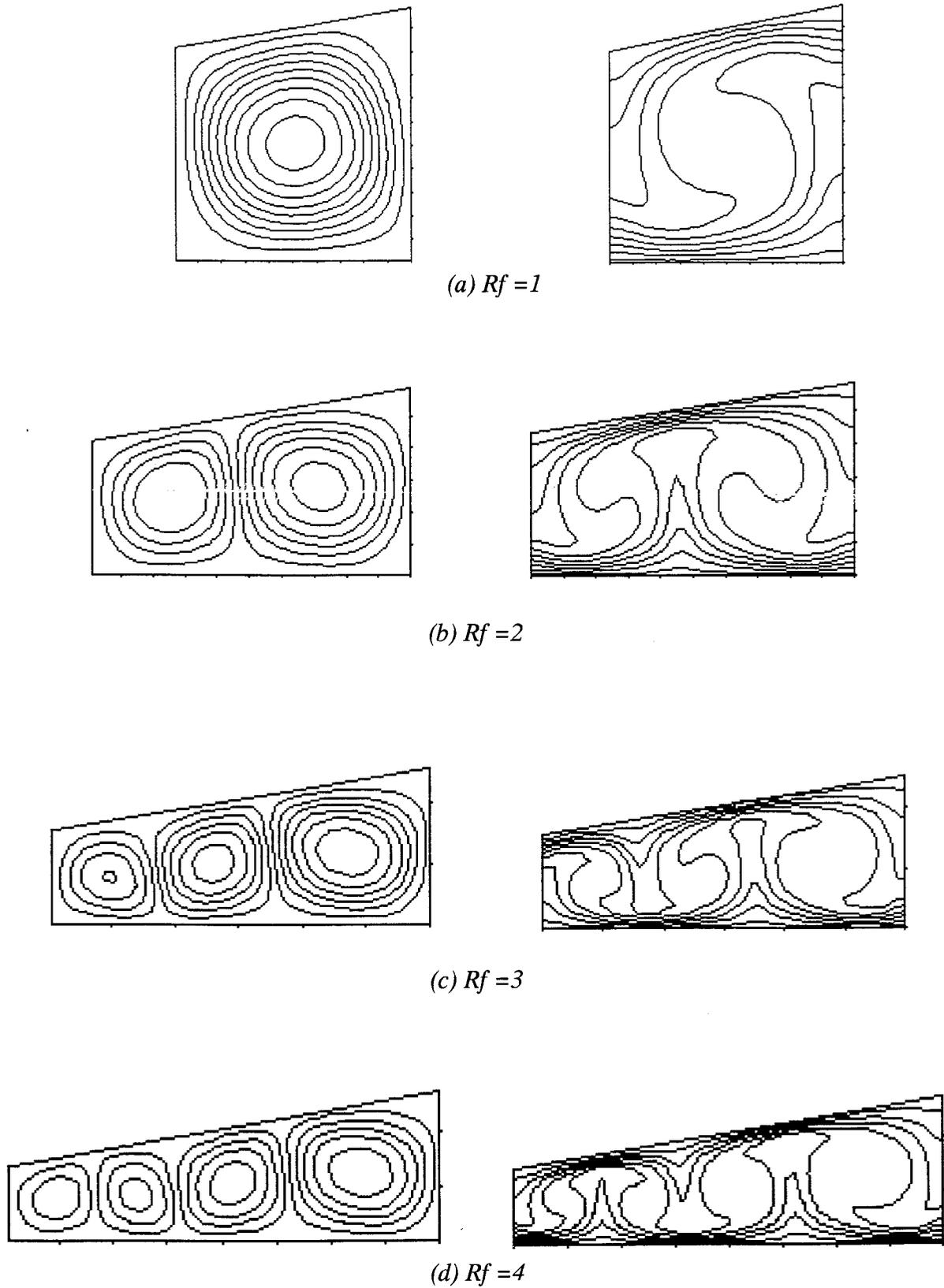


Fig 6.8. Influence du rapport de forme: ($\theta = 10^\circ$, $Ra = 5 \cdot 10^4$)

Partie -3-

ETUDE DU TRANSFERT THERMIQUE

1. COMPARAISON DES RESULTATS BI ET TRIDIMENSIONNELS :

Une comparaison des résultats tridimensionnels avec ceux obtenus par le modèle bidimensionnel est réalisée (fig7.1). En effet, on confronte le nombre de Nusselt global ainsi que le nombre de Nusselt moyen en chaque plan z , obtenus par le calcul tridimensionnel, au nombre de Nusselt moyen du calcul bidimensionnel. On remarque une légère différence entre le calcul bi et tri-dimensionnel même pour les cas où la composante tridimensionnelle de l'écoulement est relativement importante. Pour la plupart des cas, la différence n'excède les 3%. Cette constatation se trouve être confirmée par l'étude numérique et expérimentale de Lam [48]. Ainsi le flux de chaleur calculé par l'approche bidimensionnelle constitue en général, un bon estimé du transfert thermique dans la cavité.

Par conséquent, pour des raisons de coût de calcul, On utilise l'approche bidimensionnelle pour étudier le transfert thermique dans la configuration considérée.

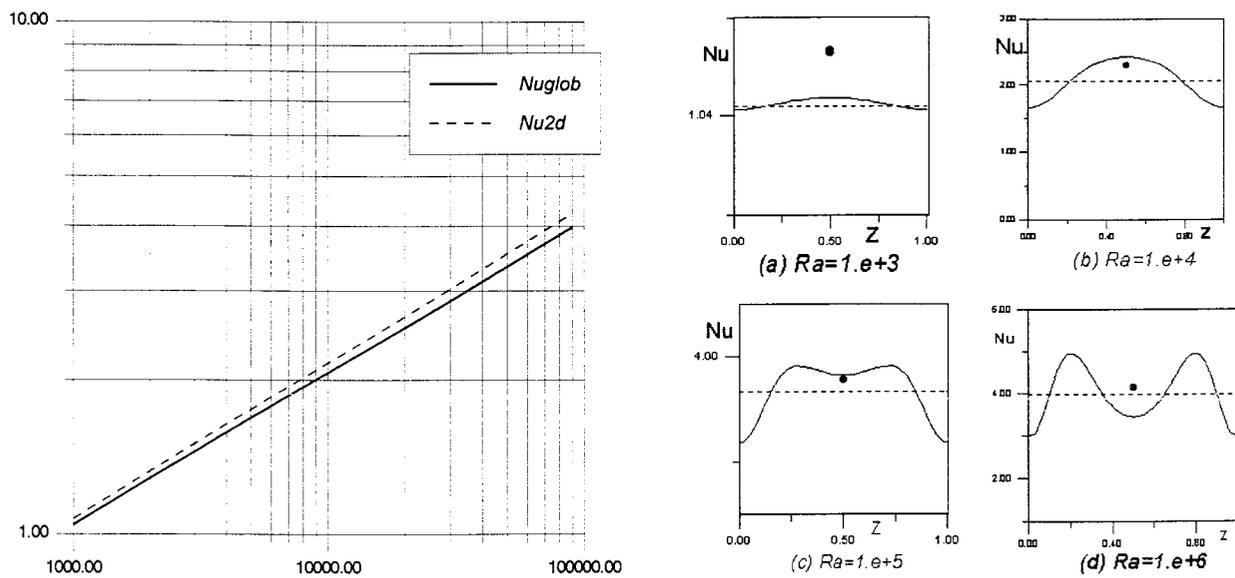


Fig 7.1. Comparaison des résultats bi et tri dimensionnels du transfert thermique Numoy (z): — Nuglob : ---- Nu2d : ●

2. ETUDE DU TRANSFERT THERMIQUE MOYEN :

2.1. Influence des différents paramètres sur le transfert thermique moyen:

Toute amélioration des systèmes industriels, sur le plan du transfert de chaleur, doit inéluctablement passer par le meilleur choix des paramètres caractérisant la cavité. Il est donc indispensable, pour faire ce choix, de connaître l'influence de chacun de ces paramètres sur le transfert thermique, objet de cette partie.

a) Influence de l'inclinaison de la paroi supérieure sur le transfert de chaleur:

Cette caractéristique a été explorée à travers cinq angles d'inclinaison pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. La valeur du facteur de forme est fixée à l'unité. Il ressort, en général, une augmentation du transfert thermique avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison de la paroi supérieure pour la plupart des sollicitations considérées (fig 7.2).

b) Influence du rapport de forme sur le transfert de chaleur:

Dans le chapitre qui a porté sur la revue bibliographique, nous avons rapporté entre autres, les résultats d'un certain nombre d'auteurs qui ont trait à ce point. En effet, Kalache [68] trouve que le transfert de chaleur dépend explicitement du nombre de Rayleigh, tandis que Flack [55] affirme que le fait de diminuer H/L pour le cas d'une configuration triangulaire, induit une augmentation du nombre de Nusselt pour un Rayleigh fixé. Poulikakous et Béjan [50] quant à eux relèvent une légère dépendance du nombre de Nusselt en fonction du rapport de forme. Pour notre part, on confirme ce qui a été trouvé par ces deux dernières références et en particulier par Flack. En effet, on retrouve une augmentation du nombre de Nusselt en fonction du rapport de forme (fig 7.3).

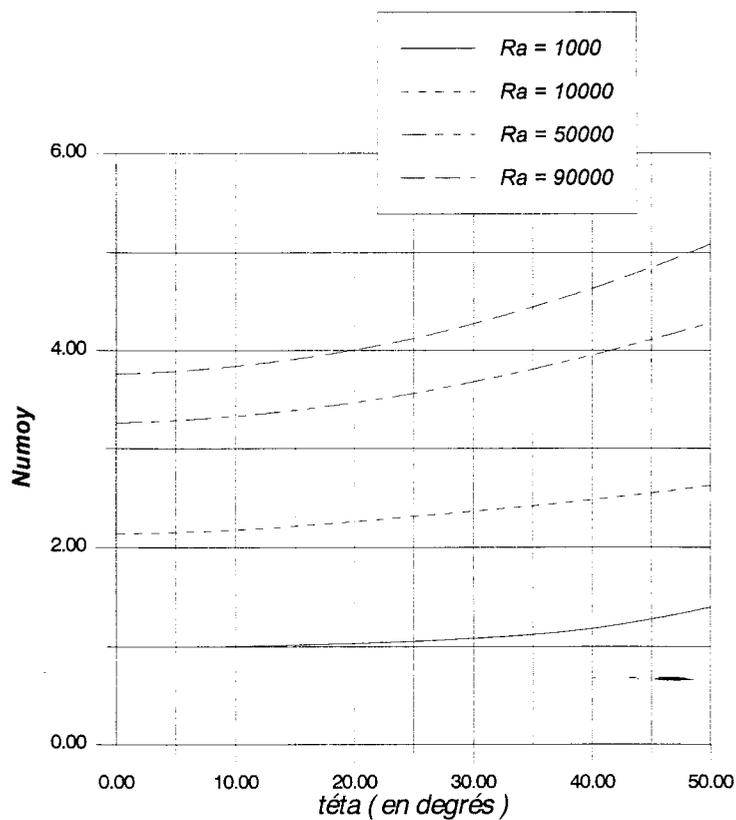


Fig 7.2. Influence de l'angle d'inclinaison θ sur Nusselt moyen pour différents Ra ($R_f = 1$)

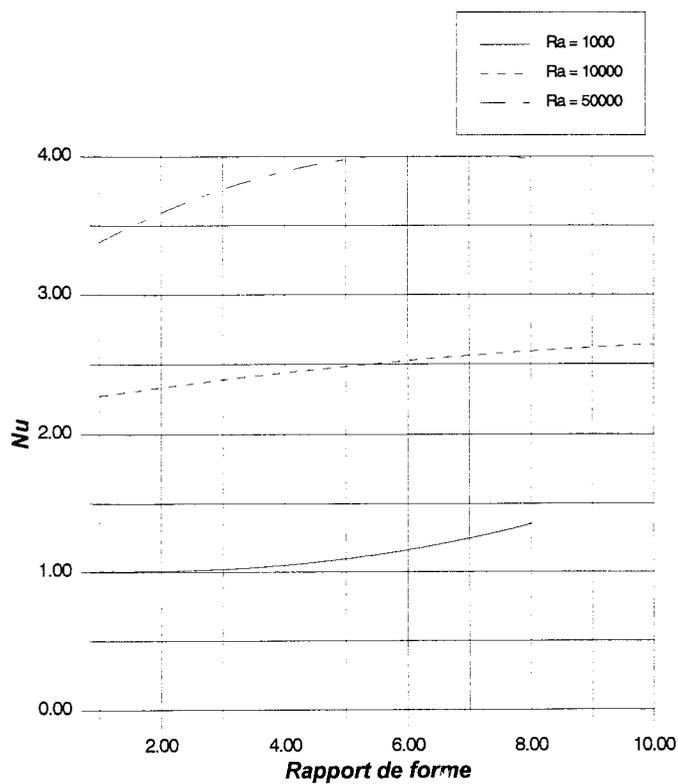


Fig 7.3. Influence du rapport de forme R_f sur Nusselt moyen pour différents Ra ($\theta = 10^\circ$)

2.2. Etablissement d'une corrélation :

Vu l'utilité pratique de mettre à la disposition de l'ingénieur des outils lui permettant d'évaluer le transfert de chaleur, nous avons cherché à mettre au point une corrélation à partir des résultats obtenus. Celle-ci est d'autant plus générale qu'elle constitue un outil appréciable. La tâche d'établir une corrélation unique, d'une généralité considérable, qui lie les différents paramètres au nombre de Nu ($Nu = f(Ra, \theta, Rf)$), n'est à priori pas évidente.

Pour ce faire, nous proposons la démarche suivante:

Nous traçons d'abord, l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différents angles d'inclinaison et divers rapports de forme dans une échelle Log-Log (fig 7.4, 7.5). Cela nous permet de constater après interpolation, une dépendance linéaire dans cette échelle (Nusselt est donc de la forme $Nu = a Ra^b$). Ce qui n'est pas nouveau pour le transfert de chaleur par convection. Mais ce qui nous a motivé dans le sens de la recherche d'une corrélation assez générale, est le fait que la pente de ces droites est approximativement constante. Ce qui revient à dire que b reste pratiquement constant pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison et du rapport de forme.

On peut déjà affirmer que la corrélation est de la forme $Nu = a Ra^b$ avec b , obtenu par la moyenne des pentes des différentes droites $Nu = f(Ra)$ tracées dans une échelle Log-Log. L'expression de a est à déterminer.

Ensuite, nous traçons l'évolution de Nusselt en fonction du rapport de forme pour différentes valeurs de Rayleigh, puis fonction de Rf paramétrée par θ , toujours dans une échelle Log-Log (fig 7.6, 7.7). Les mêmes constatations que précédentes ont été relevées. Ainsi notre corrélation se précise d'avantage. Elle peut donc se mettre sous la forme $Nu = a Ra^b Rf^c$ (a et b bien sûr différents de ceux précédents).

La même démarche a été entamée pour le troisième paramètre considéré, en l'occurrence l'angle d'inclinaison de la paroi supérieure, mais cette fois, on considère $\cos \theta$ et non pas θ (fig 7.8, 7.9). Ainsi, une corrélation de la forme $Nu = a Ra^b Rf^c \cos^d \theta$ est établie. Le coefficient a est déterminé en fixant par exemple $Rf = 1$ et $\theta = 0$.

La corrélation est alors la suivante:

$$Nu = 0.134 Ra^{0.299} Rf^{0.094} (\cos \theta)^{-0.564}$$

$$Pour \quad 10^3 \leq Ra \leq 2 \cdot 10^5, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ, \quad 1 \leq Rf \leq 10$$

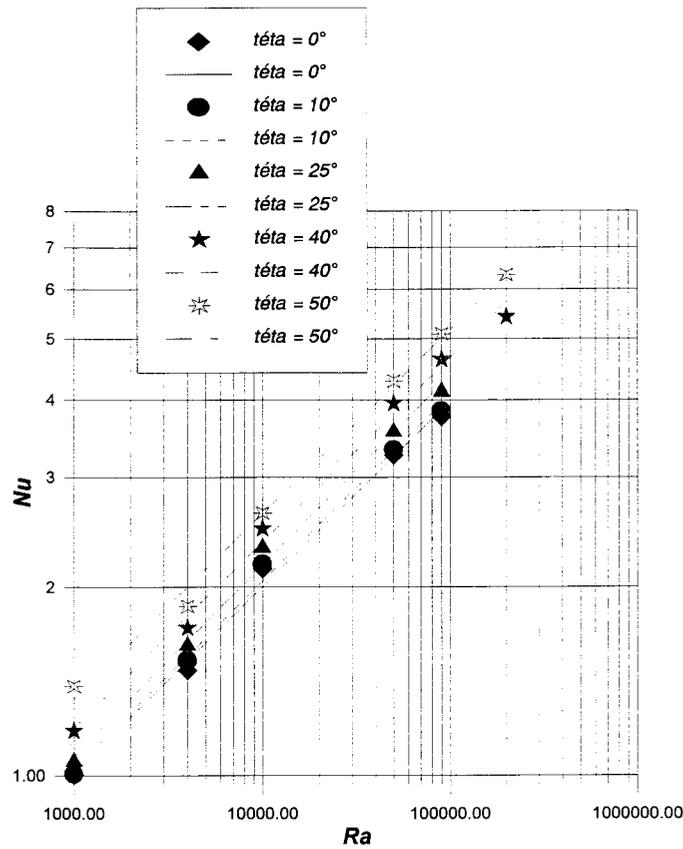


Fig 7.4. Variation de Nusselt moyen en fonction de Ra pour différents θ (échelle Log-Log) ($R_f = 1$)

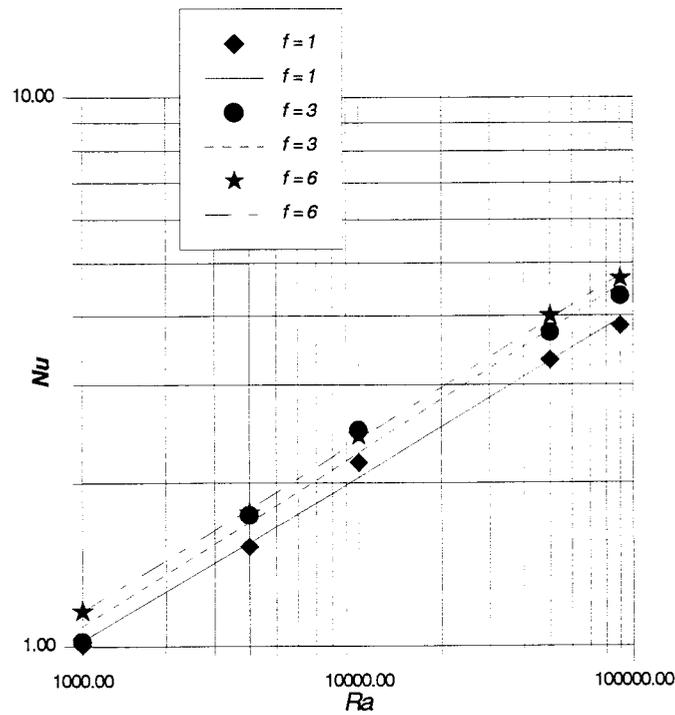


Fig 7.5. Variation de Nusselt moyen en fonction de Ra pour différents R_f (échelle Log-Log) ($\theta = 10^\circ$)

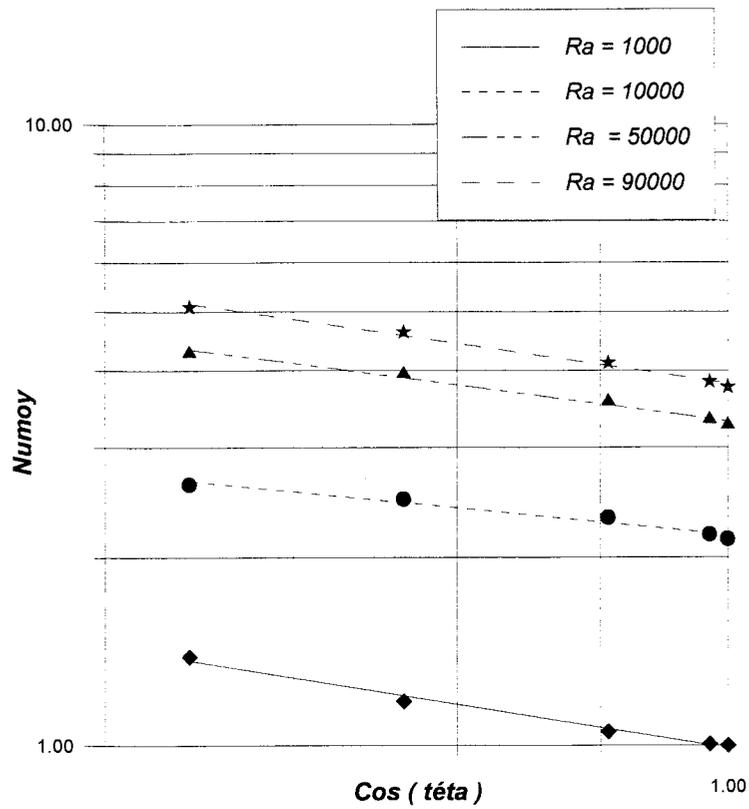


Fig 7.6. Variation de Nusselt moyen en fonction de $\cos(\theta)$ pour différents Ra ($Rf = 1$)

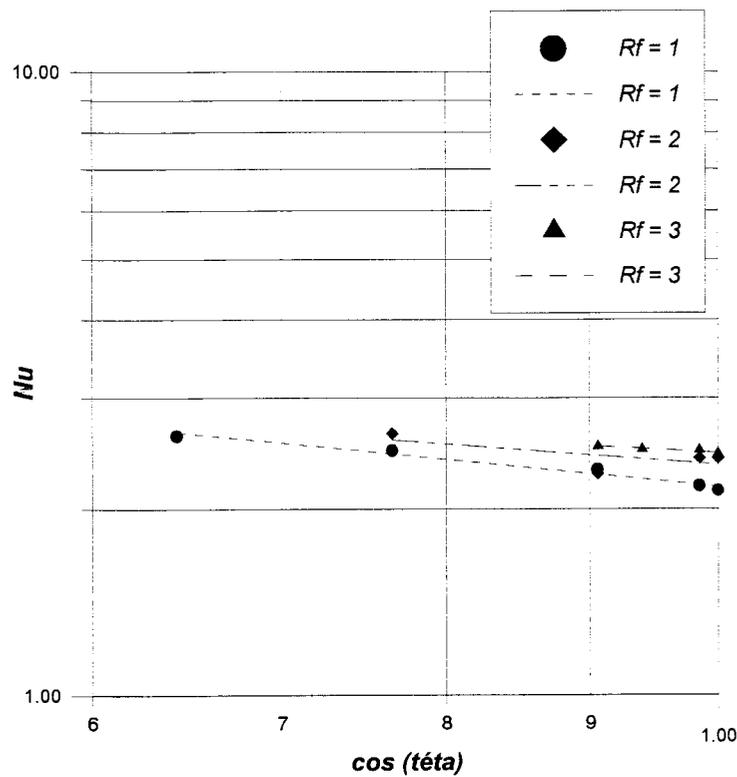


Fig 7.7. Variation de Nusselt moyen en fonction de $\cos(\theta)$ pour différents Rf ($Ra = 10^4$)

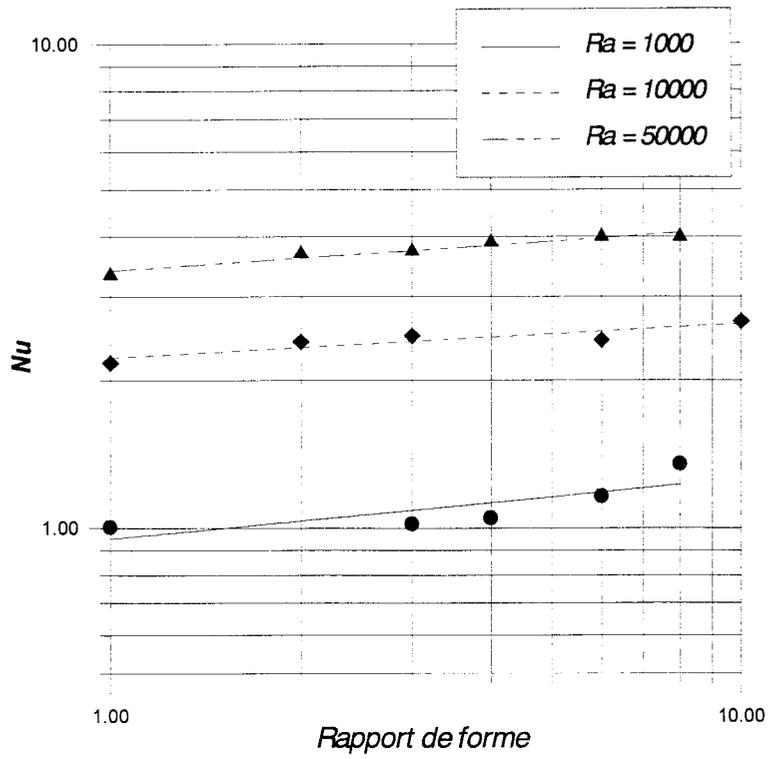


Fig 7.8. Variation de Nusselt moyen en fonction de Rf pour différents Ra ($\theta = 10^\circ$)

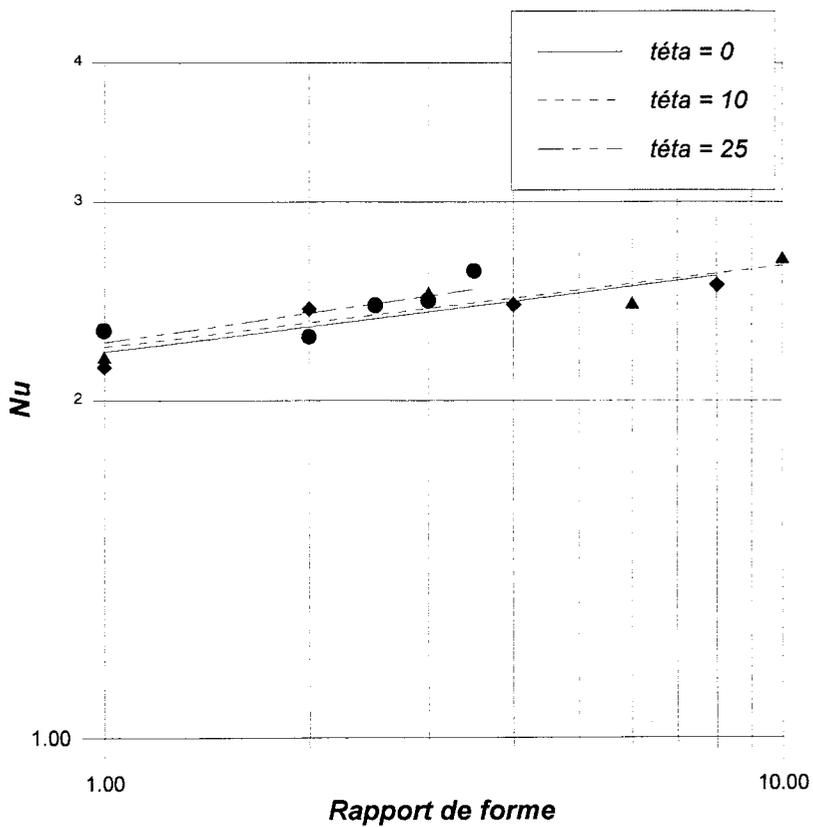


Fig 7.9. Variation de Nusselt moyen en fonction de Rf pour différents teta ($Ra = 10^4$)

3. ETUDE DU TRANSFERT THERMIQUE LOCAL:

Pour un nombre de Rayleigh de 10^3 , on relève une répartition uniforme du transfert de chaleur le long de la paroi inférieure (fig 7.10), celui ci est matérialisé par le tracé du nombre de Nusselt local le long de cette paroi. Lorsque le nombre de Rayleigh passe à $1.3 \cdot 10^3$, un extrémum commence à apparaître. Celui ci devient de plus en plus prononcé au fur et à mesure que la sollicitation s'accroît, d'autres, en parallèle prennent naissance et augmentent en amplitude proportionnellement avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

En cherchant à lier ces constatations sur le transfert thermique local avec l'évolution de d'écoulement dans la cavité, précédemment décrit, une intime relation est à signaler. Pour mettre en évidence cette relation, on a tracé la variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi inférieure, pour différents facteurs de forme (fig 7.11). Ainsi, on constate que le nombre de cellules convectives peut être déduit uniquement du tracé de cette caractéristique et vice versa pour le nombre d'extrémums de la courbe de Nusselt local. En effet, on remarque que *le nombre de cellules convectives, égal au nombre d'extrémums diminué de 1.*

La présence de ces extrémums peut être aisément justifié par le fait qu'à l'interface entre deux cellules, le fluide qui se trouvait à une paroi active, rejoint subitement la paroi active opposée. Ainsi si le fluide se trouvait à la paroi froide, il rejoint subitement la paroi chaude, ce qui engendre un gradient de température important et par conséquent, un nombre de Nusselt local important.

4. CONCLUSION

La confrontation du flux thermique obtenu par le calcul tridimensionnel avec celui donné par l'approche bidimensionnelle permet d'affirmer que ces deux calculs sont en général relativement superposables. Par conséquent, le flux thermique calculé par le modèle bidimensionnel constitue un bon estimé du transfert thermique dans la cavité.

L'influence des paramètres géométriques et de la sollicitation sur le flux de chaleur dans la cavité est étudiée. Pour le nombre de Rayleigh, son influence est évidente. Les paramètres géométrique quant à eux, bien qu'ils n'influent pas d'une façon importante, on relève une augmentation du nombre de Nusselt moyen avec l'inclinaison de la paroi supérieure et le rapport de forme. Une corrélation unique reliant ces différents paramètres est proposée.

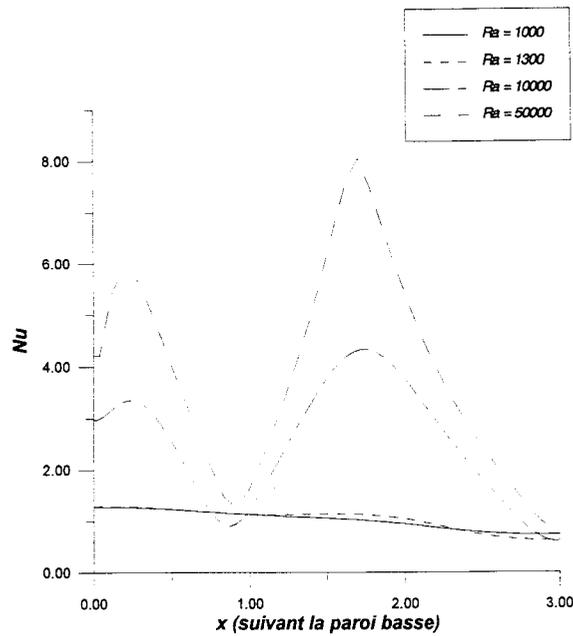


Fig 7.10. Répartition de Nulocal le long de la paroi inférieure pour différents Ra ($\theta = 10^\circ, Rf = 1$)

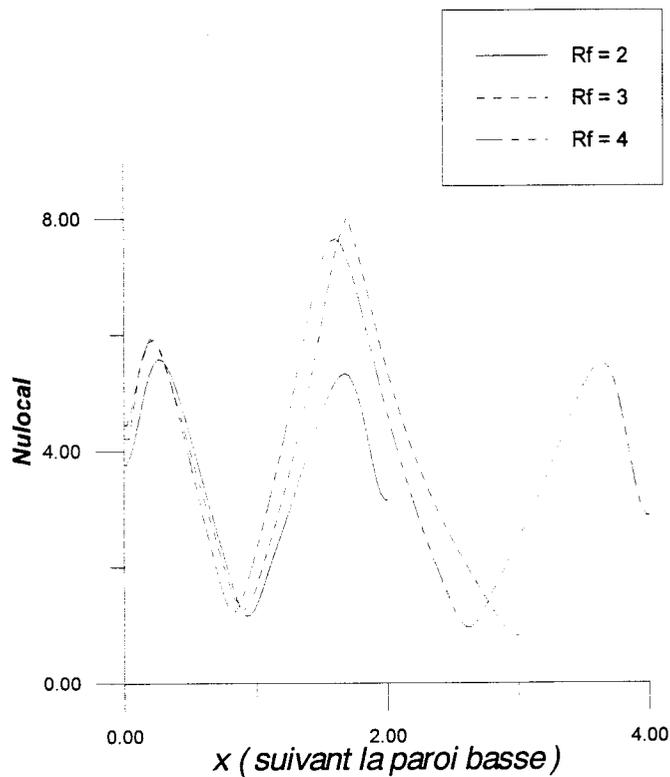


Fig 7.11. Répartition de Nulocal le long de la paroi inférieure pour différents Rf ($\theta = 10^\circ, Ra = 5 \cdot 10^4$)



CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION :

L'étude tridimensionnelle a permis en premier lieu, de décrire la morphologie générale de l'écoulement. Son aspect tridimensionnel est ainsi exploré. A cet effet, plusieurs techniques sont adoptées pour mettre en évidence le caractère dimensionnel de l'écoulement. Ainsi, on distingue deux régions suivant z , à savoir la région centrale, d'écoulement pratiquement bidimensionnel; et celles avoisinants les parois. Dans cette partie, la composante tridimensionnelle de l'écoulement est relativement importante. Toutefois, elle est d'ordre de grandeur inférieur à celui de l'écoulement principal. La variation de celle ci et par conséquent du caractère tridimensionnel de l'écoulement en fonction des deux rapports de forme, du nombre de Rayleigh et de l'inclinaison de la paroi supérieure, est explorée. Il en ressort une nette dépendance en fonction des trois premiers paramètres. L'influence de θ quant à elle est faible. Le bien fondé de l'hypothèse de bidimensionnalité pour un cas donné, peut ainsi être analysé. On peut par conséquent, définir les situations pour lesquelles cette hypothèse est justifiée. Cet élément étant accessible et en vue d'une meilleure compréhension et caractérisation du phénomène de convection naturelle dans la configuration considérée, on fournit les résultats d'une approche bidimensionnelle. Celle ci a mis en évidence l'existence dans la plupart des situations, d'un écoulement multicellulaire, typique de la convection de Rayleigh-Bénard. Le nombre de cellules dépend en particulier du rapport de forme et de la sollicitation. Constatons toutefois que pour des angles d'inclinaison élevés ou des rapports de forme petits, l'écoulement est monocellulaire, analogue à celui qui a lieu dans une cavité verticale différentiellement chauffée.

En outre, une comparaison du flux thermique obtenu par le calcul tridimensionnel et celui calculé par une approche bidimensionnelle est réalisée. Celle ci nous a permis d'affirmer que le flux thermique calculé par le modèle bidimensionnel peut en général, être considéré comme un bon estimé du transfert de chaleur dans la cavité. Cette constatation étant retenue, et du fait que toute amélioration des systèmes industriels passe fatalement par la recherche du meilleur compromis entre les différents paramètres caractérisant la cavité, l'influence de ces

paramètres sur le transfert de chaleur est étudiée. L'approche bidimensionnelle est à cet effet utilisée.

Par ailleurs, dans un souci de mettre à la disposition de l'ingénieur un outil lui permettant d'évaluer le transfert thermique dans une configuration de type considéré, une corrélation est proposée. Celle ci constitue un outil précieux, du fait qu'elle demeure valable pour un nombre important de cavités.

Ainsi, en plus des résultats fournis, l'utilisateur intéressé est orienté vis à vis de l'approche à adopter selon l'objectif recherché pour un cas donné, seulement en se référant à la présente étude dans la limite des cas envisagés. En effet, le problème peut se poser en termes d'analyse thermique, de façon à obtenir des coefficients d'échange par convection dans des configuration du type considéré. Dans ce cas, le calcul bidimensionnel s'avère suffisant. Il peut aussi se poser en terme de mécanique des fluides, à savoir la détermination des types d'écoulements susceptibles d'apparaître dans de telles géométries. Le calcul tridimensionnel peut alors être indispensable.

ORIGINALITES

Ce travail étant achevé, certains points qui constituent essentiellement notre modeste contribution dans le domaine ayant fait l'objet de notre intérêt, méritent d'être mentionnés:

- Du point de vue numérique et programmation:
 - Extension du code de calcul par volumes finis au cas tridimensionnel, ce qui est d'une disponibilité rare.
 - ↳ Visualisation tridimensionnelle du champ thermique.

- Du point de vue physique:
 - Etude tridimensionnelle de la convection naturelle dans une cavité non rectangulaire.
 - Etablissement d'une corrélation unique qui lie le nombre de Nusselt aux différents paramètres géométriques et au nombre de Rayleigh.

ANNEXES

LINEARISATION DU TERME SOURCE :

Il est fréquent que le terme source S soit une fonction non linéaire de la variable dépendante ϕ . Il convient dans ce cas d'exprimer cette dépendance sous une forme linéarisée (3.6). Ceci est justifié d'une part, par le fait que le système à résoudre se ramène à un système algébrique linéaire, d'autre part le choix d'une forme linéaire est meilleur que le traitement de S comme une constante.

Il existe plusieurs façons de linéariser S . Cependant, le choix du profil de S_p et S_c est d'une importance capitale. En effet, le terme source est en général à l'origine des divergences numériques, et le choix d'un profil convenable du terme source permet en général d'atteindre la convergence.

Constatons en particulier que S_p ne doit pas être positive (règle 3).

La méthode de linéarisation recommandée [76] est la suivante:

$$S = S^* + \left(\frac{dS}{dT} \right) (T_p - T_p^*) \quad (\text{A1.1})$$

Exemple:

Soit le terme source suivant: $S = 4 - 5T^3$

Parmi les formes linéarisées possibles On a:

$$1- \quad S_c = 4 - 5 T_p^{*3} \quad S_p = 0$$

$$2- \quad S_c = 4 \quad S_p = - 5 T_p^{*3}$$

$$3- \quad S_c = 4 + 10 T_p^{*3} \quad S_p = - 15 T_p^{*2} \quad (\text{obtenu par (A1.1)})$$

TRAITEMENT DU TERME INSTATIONNAIRE :

On s'intéresse dans ce qui suit, au traitement des instationnarités. Pour cela, on considère l'équation suivante (la même démarche est à suivre en 3D) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (\text{A.2.1})$$

En intégrant sur le volume de contrôle considéré (fig A.2.1) et sur l'intervalle de temps de t à $t + \Delta t$

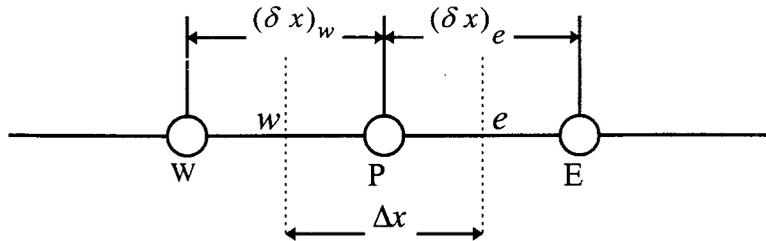


Fig A.2.1

on a :

$$\int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \quad (\text{A.2.2})$$

Pour le terme $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, on supposera que ϕ reste égale à ϕ_p dans tout le volume de contrôle.

ainsi on a :

$$\int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dx = \Delta x (\phi_p^1 - \phi_p^0) \quad (\text{A.2.3})$$

avec l'indice 1 pour le temps $t + \Delta t$ et l'indice 0 pour le temps t .

Pour le terme $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ on suivra la même démarche que pour le régime permanent. Ainsi donc on aura:

$$\Delta x (\phi_p^1 - \phi_p^0) = \int_i^{i+\Delta t} \left[\frac{\Gamma_e (\phi_e - \phi_p)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w (\phi_p - \phi_w)}{(\delta x)_w} \right] dt \quad (\text{A.2.4})$$

A ce stade, on doit choisir le profil d'évolution de ϕ_p , ϕ_E , ϕ_W entre t et $t + \Delta t$. Plusieurs profils sont possibles, certains peuvent se mettre sous la forme:

$$\int_i^{i+\Delta t} \phi_p dt = [f \phi_p^1 + (1-f) \phi_p^0] \Delta t \quad (\text{A.2.5})$$

f : facteur de poids, compris entre 0 et 1.

En utilisant la même formule d'intégration pour ϕ_E et ϕ_W , et après réarrangement, on obtient, en omettant l'indice 1:

$$a_p \phi_p = a_E [f \phi_E + (1-f) \phi_E^0] + a_W [f \phi_W + (1-f) \phi_W^0] + [a_p^0 - (1-f) a_E - (1-f) a_W] \phi_p^0 \quad (\text{A.2.6})$$

Avec:

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w}, \quad a_p^0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad a_P = f a_E + f a_W + a_p^0$$

Schémas d'approximation temporelle :

Pour certaines valeurs spécifiques du facteur de pondération f , l'équation discrétisée se réduit à l'un des schémas connus pour les équations différentielles paraboliques. On distingue suivant la valeur de f , qui peut être interprétée comme un choix de la variation de ϕ_p en fonction de t , trois schémas (fig A.2.2):

1° - Schéma explicite ($f=0$):

ϕ_p reste constante et égale à ϕ_p^0 durant le pas de temps,

2° - Schéma totalement implicite ($f=1$):

Au temps t , ϕ_p passe subitement de ϕ_p^0 à ϕ_p^1 et reste constante durant le pas de temps Δt .

3° - Schéma de Crank Nicolson ($f=0.5$):

Pour ce schéma, on admet une évolution linéaire avec le temps en ϕ_p^0 et ϕ_p^1 .

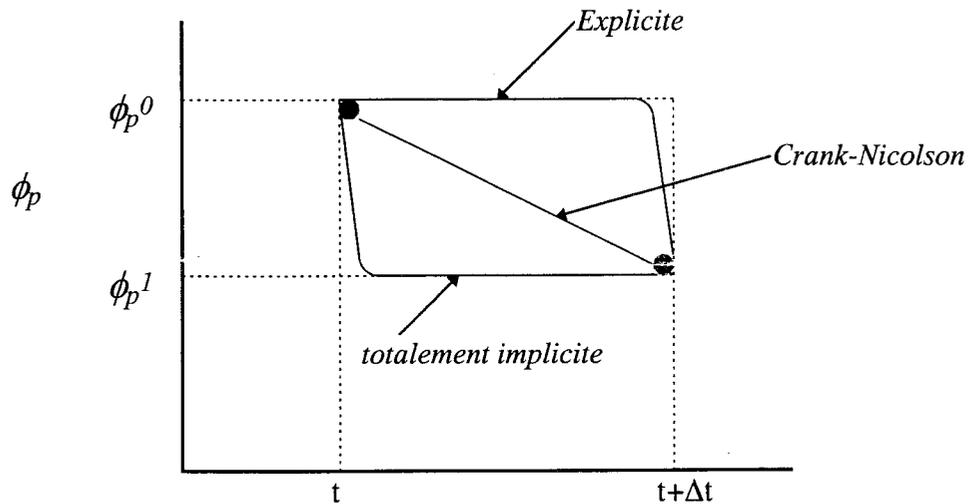


Fig A.2.2: variation de ϕ en fonction du temps pour les trois schémas

Remarques:

- Tout schéma avec $f \neq 0$ est implicite.
- En général, on préfère le schéma complètement implicite car il est stable et permet d'avoir des solutions physiquement réalistes [76].

SCHEMAS DE DISCRETISATION DU TERME DE CONVECTION-DIFFUSION :

On s'intéresse dans ce qui suit, aux différents schémas de discrétisation du terme de convection-diffusion. Pour cela on considère l'équation suivante:

$$\frac{d}{dx} (\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (\text{A.3.1})$$

Avec u : la vitesse suivant la direction des x

1) Schéma centré (ou aux différences centrées):

En intégrant l'équation (A.3.1) le long du volume de contrôle défini dans la figure (A.3.1), on obtient:

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (\text{A.3.2})$$

Pour le terme diffusion $\Gamma \frac{d\phi}{dx}$ on a vu comment le représenter avec un profil linéaire de ϕ .

En choisissant le même profil pour le terme convectif on obtient:

$$\phi_e = \frac{1}{2} (\phi_E + \phi_P) \quad \text{et} \quad \phi_w = \frac{1}{2} (\phi_P + \phi_W)$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ est relatif au choix de la localisation des interfaces et ainsi l'équation (A.3.2) se ramènera à:

$$\frac{1}{2} (\rho u)_e (\phi_E + \phi_P) + \frac{1}{2} (\rho u)_w (\phi_P + \phi_W) = \frac{\Gamma_e (\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w (\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w} \quad (\text{A.3.3})$$

Avec: Γ_e et Γ_w valeurs de Γ aux interfaces (fig A.3.1).

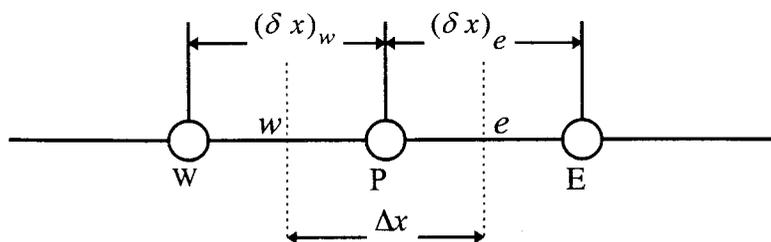


Fig A.3.1 :

En vue de compacter l'écriture, on introduit les deux symboles suivants:

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

Avec F : indiquant l'ampleur de la convection et D : conductance diffusive, F pouvant prendre soit le signe négatif ou positif suivant la direction de l'écoulement. Ainsi l'équation discrétisée devient:

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{A.3.4})$$

avec:

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2}$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}$$

$$\begin{aligned} a_p &= D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} \\ &= a_E + a_w + (F_e - F_w) \end{aligned}$$

Comme par continuité, on a $F_e = F_w$ alors $a_p = a_E + a_w$

On démontre [76] que ce schéma peut conduire à des solutions non réalistes, c'est pourquoi toutes les tentatives de résolutions de problèmes de convection se sont limitées à de petits nombres de Reynolds (petites valeurs de F/D). En outre, lorsque le coefficient de diffusion est nul, le coefficient a_p s'annule et la résolution de l'équation (A.3.4) devient délicate. D'où la nécessité de chercher de meilleures formulations, dont voici quelques unes:

2) Schéma ``upwind``:

Ce schéma a été introduit pour la première fois, par Issacson et Rees (1952) [76]. Par rapport au schéma précédent, les termes de diffusion sont les mêmes, seuls les termes de convection changent, ils sont calculés en considérant l'hypothèse suivante:

- La valeur de ϕ à l'interface égale à la valeur de ϕ au coté amont ``upwind side``, seule

le noeud amont de l'interface contribue au calcul du flux convectif. Ainsi on a pour ϕ_e :

$$\begin{aligned} \phi_e &= \phi_p & \text{si} & F_e \geq 0 \\ \text{et } \phi_e &= \phi_E & \text{si} & F_e < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

En utilisant l'opérateur $\|A, B\|$, qui désigne le maximum de A et B, cette formulation conditionnée peut s'écrire d'une façon compacte comme:

$$F_e \phi_e = \phi_p \|F_e, 0\| - \phi_E \|-F_e, 0\| \quad (\text{A.3.6})$$

En suivant la même procédure qu'aux paragraphes précédents, nous aboutissons à l'équation (A.3.4) avec:

$$\begin{aligned} a_E &= D_e + \|-F_e, 0\| \\ a_W &= D_w + \|F_w, 0\| \\ a_p &= D_e + \|F_e, 0\| + D_w + \|-F_w, 0\| \\ &= a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{aligned}$$

Remarque:

Il apparaît nettement que les coefficients ne peuvent en aucun cas être négatifs, et ainsi la solution est toujours physiquement réaliste.

3) Schéma exponentiel (exact):

Ce schéma est basé sur la solution exacte de l'équation différentielle (A.3.1) régissant le phénomène de convection-diffusion monodimensionnelle stationnaire (avec Γ et ρu constants) sur le domaine $0 \leq x \leq L$, avec comme conditions aux limites:

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0 & \quad \phi = \phi_0 \\ \text{en } x = L & \quad \phi = \phi_L \end{aligned}$$

La solution de l'équation (A.3.1) est:

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp\left(\frac{Px}{L}\right) - 1}{\exp P - 1}$$

Où P est un nombre de Peclet, défini comme suit:

$$P = \frac{\rho u L}{\Gamma} = F/D$$

Considérons un flux total J tel que

$$J = \rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{A.3.7})$$

L'équation (A.3.1) s'écrit $\frac{dJ}{dx} = 0$

Après intégration le long du volume de contrôle considéré sur la (figure A.3.1), on se ramène à :

$$J_e - J_w = 0$$

Utilisons maintenant, la solution exacte précédente comme profil exprimant l'évolution de ϕ entre deux nœuds voisins, soient P et E, avec ϕ_p et ϕ_E à la place de ϕ_0 et ϕ_L respectivement. En remplaçant ce profil dans l'équation (A.3.7) on obtient pour J_e :

$$J_e = F_e \left(\phi_p + \frac{\phi_p - \phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right) \quad \text{avec } P_e = \frac{(\rho u)_e (\delta x)_e}{\Gamma_e} = \frac{F_e}{D_e} \quad (\text{A.3.8})$$

En procédant de la même façon pour J_w et après réarrangement on obtient la forme:

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_w \phi_w \quad (\text{A.3.9})$$

avec

$$a_E = \frac{F_e}{\exp(F_e/D_e) - 1}$$

$$a_w = \frac{F_w \exp(F_w/D_w)}{\exp(F_w/D_w) - 1}$$

$$a_p = a_E + a_w + (F_e - F_w)$$

Les expressions de ces coefficients définissent le schéma exponentiel. Son utilisation pour le cas de problèmes monodimensionnels permanent assure la solution exacte. Cependant, il n'est pas largement utilisé du fait que:

- 1) L'évaluation de l'exponentiel par ordinateur est coûteuse.
- 2) Il n'est pas exacte pour d'autres cas tels que en bi et tridimensionnel, avec présence du terme source,...etc.

D'où la nécessité d'utiliser des schémas qui présentent à la fois une facilité d'évaluation et qui ont un comportement qualitatif similaire à celui du schéma exponentiel. C'est dans cette optique, que les deux schémas suivants ont été proposés.

4) Schéma hybride

Ce schéma est défini comme suit en approchant la solution exacte (profil des coefficients) par des tangentes:

$$\text{pour } P_e \leq -2 \quad \frac{a_E}{D_e} = -P_e$$

$$\text{pour } -2 \leq P_e \leq 2 \quad \frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{P_e}{2}$$

$$\text{pour } P_e \geq 2 \quad \frac{a_E}{D_e} = 0$$

ce qui peut être traduit par l'écriture compacte suivante:

$$a_E = \left\| -P_e, 1 - \frac{P_e}{2}, 0 \right\| D_e$$

$$a_E = \left\| -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right\|$$

De même on obtient:

$$a_W = \left\| F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right\|$$

et

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

Remarque:

Ce schéma est identique au schéma aux différences centrées pour $-2 \leq P_e \leq 2$ et se réduit au schéma "upwind" en dehors de ce domaine.

5) Le schéma de la loi de la puissance:

Une meilleure approximation de la courbe exacte, est donnée par le schéma de la loi de la puissance. Ce schéma s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte avec un coût acceptable, il est par conséquent le plus recommandé.

Il se définit comme suit:

$$\text{pour } P_e \leq -10 \quad \frac{a_E}{D_e} = -P_e$$

$$\text{pour } -10 \leq P_e \leq 0 \quad \frac{a_E}{D_e} = (1 + 0.1P_e)^5 - P_e$$

$$\text{pour } 0 \leq P_e \leq +10 \quad \frac{a_E}{D_e} = (1 + 0.1P_e)^5$$

$$\text{pour } P_e \geq +10 \quad \frac{a_E}{D_e} = 0$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme compacte suivante:

$$a_E = D_e \left\| 0, \left(1 - \frac{0.1|F_e|}{D_e} \right)^5 \right\| + \left\| 0, -F_e \right\|$$

- 1- G DE VAHL DAVIS
Laminar natural convection in an enclosed rectangular cavity.
Int J Heat Mass Transfer Vol 11, PP 1675 -1693 Pergamon press (1968)
- 2- G DE VAHL DAVIS
Natural convection of air in a square cavity : a bench mark solution .
Int. J. for numerical methods in fluids vol 3, (1983)
- 3- K. AZZIZ & J. D.HELLUMS
Numerical Solution of the three-Dimensionnel Equations of Motion for Laminar Natural Convection
The physics of fluids vol 10 number 2 feb (1967)
- 4- N.C. MARKATOS & K.A. PERICLEOUS
Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity .
I. J Heat Mass Transfert vol . 27 N° 5 (1984)
- 5- TORU FUSEGI , JAE MIN HYUM & KUNIO KUWOHARA
A numerical study of 3D natural convection in a cube : effects of the horizontal thermal boundary condition
Fuid Dynamics Research 8 (1991)
- 6- TORU FUSEGI , JAE MIN HYUM & KUNIO KUWOHARA
Three Dimensional natural convection in a cubical enclosure with walls of finite conductance
Int.J.Heat Mass Transfer. Vol 36 N° 7 , PP 1993-1997 (1993)
- 7- TORU FUSEGI , JAE MIN HYUM & KUNIO KUWOHARA
Three dimensional numerical simulation of periodic natural convection in a differentially heated cubical enclosure.
Applied Scientific Research 49: 271-282, (1992)
- 8- TORU FUSEGI , JAE MIN HYUM, KUNIO KUWOHARA & B. FAROUK
A numerical study of three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure.
Int.J.Heat Mass Transfer. Vol 34 N° 6 PP 1543-1557 (1991)
- 9- TORU FUSEGI , JAE MIN HYUM & KUNIO KUWOHARA
Transient three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure.
Int.J.Heat Mass Transfer. Vol 34 N° 6 PP 1559-1564 (1991)
- 10- D.W. Pepper
Modeling of three-dimensional natural convection with a time-split finite element technique.
Numerical Heat Transfer, Vol 11, PP.31-55, (1987)
- 11- A.YU.GELFGAT and I.TANASAWA
Numerical analysis of oscillatory instability of buoyancy convection with the Galerkin spectral method.
Numerical Heat Transfer, Part A, 25:627-648, (1994)
- 12- M.R.RAVI , R.A.W.M.HENKES and C.J.HOOGENDOORN
On the high-Rayleigh-number structure of steady laminar natural convection flow in a square enclosure.
J. Fluid Mech , Vol 262, PP 325-331 (1994)
- 13- F.CHABCHOUB
Structure d'un écoulement d'air à la pression atmosphérique à l'intérieur d'une cavité cubique à grand nombre de Rayleigh.
JITH (1993)
- 14- SEOK KI CHOI, HO YUN NAM, and MANN CHO
Systematic comparison of finite-volume calculation method with staggered and no staggered grid arrangements.
Numerical Heat Transfer , Part B, 25:205-221, (1994)
- 15- JAE MIN HYUN and JIN WOOK LEE
Numerical solutions for transient natural convection in a square cavity with different sidewall temperatures.
Int J. Heat Fluid Flow, Vol 10, No 2, June (1989)
- 16- MAGDY M. ELSHAMY
A literature survey on numerical laminar natural convection in irregular enclosures. JITH (1993)
- 17- R.HERNANDEZ and R.L.FREDERICK
Spatial and thermal of three dimensional Rayleigh-Benard convection.
int J. Heat Mass Transfer Vol 37, NO.3. PP 411-424 (1994)

- 18- H.OZOE, K.YAMAMOTO, S.W.CHURCHILL, H.SAYAMA
Three dimensional, numerical analysis of laminar natural convection in a confined fluid heated from below.
Journal of heat transfer May (1976)
- 19- R.A KUYPER, TH.H.VAN DER MEER, C.J.HOOGENDOORN & R. A. W. M HENKES
Numerical study of laminar and turbulent natural convection in an inclined square cavity.
Int.J.Heat Mass Transfer. Vol 36. N°11. PP 2899-2911, (1993)
- 20- A. CHIKHAOUI , M.R MASLANIK &R.L. SANI
Study three-dimensional thermal convection in a vertical rectangular enclosure.
Communications in Applied Numerical Methods Vol 4, 825-834 (1988)
- 21- MILOVAN PERIC
Natural convection in trapezoidal cavities. Numerical Heat Transfer, Part A, Vol 24, PP 213-219, (1993)
- 22- V.BABU and SEPPOA. KORPELA
Numerical solution of the incompressible, three dimensional Navier-Stokes equations.
Computer fluids Vol 23, N° 5, PP 675-691, (1994)
- 23- M.AFRID and A.ZEBIB
Oscillatory three-dimensional convection in rectangular cavities and enclosures.
Phys. Fluids A 2 (8) August (1990)
- 24- H.Q. YANG and K.T.YANG and J.R. LLOYD
Three-dimensional bimodal buoyant flow transitions in tilted enclosures.
Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol 9, NO.2 - June (1988)
- 25- TORU FUSEGI , JAE MIN HYUM & KUNIO KUWAHARA
Three-dimensional simulations of natural convection in a sidewall-heated cube.
I.J.For Numerical Methods in Fluids, Vol 13, 857-867, (1991)
- 26- D.MUKUTMONI and K.T.YANG
Wavenumber selection for Rayleigh-Benard convection in a small aspect ratio box.
Vol 35, NO.9 PP 2145-2159 (1992)
- 27- HIROYUKI OZOE, HAYATOSHI SAYAMA and STUART W. CHURCHILL
Natural convection patterns in a long inclined rectangular box heated from below.
Int J. Heat Mass Transfer Vol 20, PP 123-129 pergamon press (1977)
- 28- B.W.WEBB & T.L.BERGMAN
Three-dimensional natural convection from vertical heated plates with adjoining cool surfaces.
Journal of Heat Transfer vol. 114/115 (feb 1992)
- 29- F.MASSAIOLI; R.BENZI; S.SUCCI and R.TRIPICCIONE
Probability density function of temperature fluctuations in Rayleigh-Benard convection.
European Journal of Mechanics. B/Fluids Vol 14, N°1, (1995)
- 30- A.RAJI - M.HASNAOUI - Z.ZRIKEM
Etude numérique de la stabilité de l'écoulement dans des cavités en interaction,chauffées par le bas.
JITH(1993)
- 31- F.L.BELLO-OCHEDE
A heat function formulation for thermal convection in a square cavity.
int. Comm. Heat Mass Transfer Vol 15, PP 193-202, (1988)
- 32- C.F.KETTLEBOROUGH
Transient laminar free convection between heated vertical plates including entrance effects.
Int J.Heat Mass Transfer. Vol 15, PP 883-896 (1972)
- 33- Y.ZHANG and G.A. RUFF
Three-dimensional temperature measurements in enclosures by using multiview interferometric tomography.
Meas. Sci. Technol 5. 495-502 (1994)
- 34- R.J GOLDSTEIN, H.D.CHIANG and D.L.SEE
High Rayleigh number convection in a horizontal enclosure.
J. Fluid. Mech Vol 213 (1990)

- 35- JAE MIN HYUN
Un steady buoyant convection in an enclosure. Advanced in Heat Transfer Volume 24 (1994)
- 36- A.KHABBAZI, M.EL ALAMI, R.JAVELAS, BENJELLOUN & E.H CHERKAOU
Ecoulements type couches limites dans des cavités à grand nombre de Rayleigh.
Rev. Gen, Therm.Fr N° 370, Octobre (1992)
- 37- HIROSHI NAKAMURA, TAKASHI NAITOU et YUTAKA ASAKO
Heat transfer by free convection between two parallel flat plates.
Numerical Heat Transfer, Vol 5, PP 95-106 (1982)
- 38- C.INARD, N.MOLLE et J.P SIMONEAU
Modélisation anisotherme du chauffage des locaux par planchers chauffant. Application à l'étude de l'efficacité de l'émission.
Rev, Gen, Ther, Fr N° 358, Octobre (1991)
- 39- PAUL R.McHUGH and DANA A. KNOLL
Fully coupled finite volume solutions of the incompressible Navier-Stokes and energy equations using an inexact Newton method. Int. Journal for Numerical Methods in Fluids. Vol 19, 439-455 (1994)
- 40- E.K. LAKHAL M.HASNAOUI, P.VASSEUR & E.BILGEN
Convection naturelle dans une cellule carrée chauffée périodiquement par le bas (étude numérique).
Revue générale de thermique Fr. N° 392-393, Août-Sept. (1994)
- 41- GEORGE N.FACAS
Laminar free convection in a nonrectangular inclined cavity
Journal of Thermophysics and Heat Transfer. Vol 7, NO 3, July-Sept (1993)
- 42- J.L.LAGE and A.BEJAN
The Ra-Pr domain of laminar natural convection in an enclosure heated from the side.
Numerical heat Transfer, Part A, Vol 19, PP 21-41; (1991)
- 43- RUBY KRISHNAMURTI
On the transition to from two to three dimensional flow. Fluid Mech vol. 42, part 2, pp. 295-307 (1970)
- 44- J.L.DUDA, MICHAEL F.MALONE, R.H.NOTTER & J.S VRENTAS
Analysis of two-dimensional diffusion-controlled moving boundary problems.
Int J.Heat Mass Transfer Vol 18 PP 901-910 Pergamon Press (1975)
- 45- C.BONACINA and G.COMINI
On the solution of the non linear heat conduction equations by numerical methods.
Int. J. Heat Mass Transfer Vol 16 PP 581-589 Pergamon Press (1973)
- 46- HAYDEE SALMUN
Convection patterns in a triangular domain Int. J. Heat Mass Transfer Vol 38 N° 2 pp351-362 (1995)
- 47- T. S. LEE
Computational and experimental studies of convective fluid motion and heat transfer in inclined non rectangular enclosures.
Int.J.Heat & Fluid Flow (1984)
- 48- S.W.LAM, R.GANI & J.G.SYMONS
Experimental and numerical studies of natural convection in trapézoïdal cavities.
Journal of heat transfer Vol 111, May (1989)
- 49- MOHAMED JOMAA SAFI
Predictions numeriques des écoulements isothermes et convectifs en milieux confinés
- 50- D.POULIKAKOUS & A. BEJAN
Natural Convection Experiments in a Triangular Enclosure. Journal of Heat Transfer vol. 105 Aug (1983)
- 51- R. J. A. JANSSEN, R. A. W. M. HENKES & C. J. HOOGENDOORN
Transition to time- periodicity of a natural-convection flow in a 3D differentially heated cavity
Int. J. Heat Mass Transfer Vol 36 N°11 pp2927-2940 (1993)
- 52- M.BETROUNI & D. KALLACHE
Simulation des écoulements convectifs dans une cavité thermique. CMM96 Mars (1996)

- 53- JAE MIN HYUN & BUM SEOG CHOI
Transient natural convection in a parallelogram shaped enclosures.
Int J.Heat and Fluid Flow, Vol 11, NO 2 June (1990)
- 54- L. LYICAN, Y. BAYAZITOGU & L. C. WITTE
An analytical study of natural convective heat transfer within trapezoidal enclosure.
Journal of Heat Transfer vol. 102 Nov(1980)
- 55- R. D. FLACK
The experimental measurement of natural convection heat transfer in triangular enclosures heated or cooled from below
Journal of Heat Transfer vol. 102, Nov (1980)
- 56- R. D. FLACK, C. L. WITT
Velocity measurements in two natural convection air flows using a laser velocimeter
Journal of Heat Transfer vol. 101 May (1979)
- 57- R. D. FLACK, T.T.KONOPNICKI & J.H. ROOKE
The measurement of natural convective heat transfer in triangular enclosures
Journal of Heat Transfer vol. 101, Nov (1979)
- 58- R.CHANDRASSEKARAN
A special case of the complementary pivot problem.
(1969)
- 59- M.S. LOUNICI, M. BOUSSAID & M. BOUHADEF
Mise en oeuvre de la méthode des volumes finis 3D sur un problème de convection naturelle dans une cavité trapézoïdale. 5^{ème} Seminaire national de mécanique . (décemb 1996)
- 60- A. MEZENNER, M. BOUSSAID & M. BOUHADEF
Modélisation du transfert de chaleur et de masse dans une cavité trapézoïdale.
5^{ème} Seminaire national de mécanique . (décemb 1996)
- 61- E. M. SPARROW, S.V.PATANKAR & S.RAMADHYANI
Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region.
Journal of Heat Transfer vol. 99, Nov (1977)
- 62- J.P.VAN DOORMAAL & G. D. RAITBY
Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows.
Numerical Heat transfer, Vol . 7, pp.; 147- 163, (1984)
- 63- A. BENKHELIFA, A. BOUHDJAR & A. HARHAD
Effet de la direction de l'écoulement sur les performances de stockage thermique dans une cuve cylindrique.
Deuxième Rencontre Maghrebine sur la Mécanique (Décemb 1995)
- 64- A. AROUSSI
Computational fluid dynamics between accuracy and uncertainty. CMM96 (Mars 1996)
- 65- R. BESSAIIH & M.KADJA
Three-dimensionnal heat transfer with phase-change in an enclosure : A computational study
Deuxième Rencontre Maghrebine sur la Mécanique (Décemb 1995)
- 66- B. ABOURIDA & M. HASNAOUI
Convection naturelle dans un canal infini discrettement chauffé par le bas CMM96 (Mars 1996)
- 67- D.SEMMAR
Etude numérique des échanges convectifs dans les enceintes fermées inclinées.
Second Maghrebine Meeting of Méchanics (Décemb 1995)
- 68- DJAMAL KALLACHE
Contribution à l'étude de la convection naturelle en cavités trapézoïdales chauffées par dessous.
Thèse (1987)

- 69- BENKHELIFA ABDELMADJID
Etude numérique de la stratification thermique dans une cuve de stockage cylindrique.
Thèse décembre (1994)
- 70- BOUSSAID MOHAMMED
Modélisation de la convection naturelle dans une couche rectangulaire-Resolution par la methode A.D.I alliée
aux methodes hermetiennes compactes. Thèse (1993)
- 71- SALAH BEN MABROUK
Etude Numérique de la convection naturelle en cavité tridimensionnelle. Thèse (1984)
- 72- CHAKIB BANALLOU
Modélisation bidimensionnelle des transfères couplés rayonnement-convection naturelle dan les milieux semi-
transparents, application à des milieux poreux, fluides et stratifiés avec interface perméable et non
opaque. Thèse (1994)
- 73- JORGE MARCOS DE MORAES
Etude de la convection naturelle permanente entre deux plans parallèles avec des conditions pariétales imposées
sur la densité du flux de chaleur. Thèse Janvier (1992)
- 74- HAMDA BENHADID
Etude numérique des mouvements convectifs au sein des fluides à faible nombre de Prandtl. Application à
l'élaboration des cristaux: métalliques et semi conducteurs. Thèse Juin(1989)
- 75- MOHAMMED AMINE FIKRI
Simulation numérique 3D en collocation Chebyshev, de phénomènes thermoconvectifs en centrifugation.
Thèse Mai (1993)
- 76- SUHAS V. PATANKAR
Numerical heat transfer and fluid flow.
- 77- LE POURHIET
Résolution numérique des équations aux dérivées partielles (1988)
- 78- M.SIBONY & J.CI MADON
Approximation et équation differentielles (1984)
- 79- A.GOURDIN & M. BOUMAHRAT
Méthodes numériques appliquées . (1991)
- 80- R.PEYRET & THOMAS .D.TAYLOR
Computational methods for fluid flow. (1986)
- 81- DANIEL EUVRARD
Analyse numérique en mécanique des fluides. (1980)
- 82- PATRICK LE QUERE
Etude de la transition à l'instationnarité des écoulements de convection naturelle en cavité verticale
différentiellement chauffée par méthodes spectrales Chebyshev.
Thèse (Janv1987)
- 83- P. CERISIER, D. VEYRET, S.RAHAL
Transferts de chaleur convectifs dans une enceinte rectangulaire inclinée avec trois parois imposées à des
températures différentes JITH 97 (juillet1997)