

Algorithmique pour la conversion par approximation de courbes de Bézier degré élevé : Le modèle de rationnelle

Farid ASMA*, Idir BELAIDI*, Kamal MOHAMMEDI*, Guy ISCHIOMIN**, Mohand Oulhadj CHALLALI

*Laboratoire LMMC, Equipe Productique, Université de Boumerdès,, 35 000 (Algérie) idirbelaidi@yahoo.fr

** Laboratoire LMSP-ENSAM CER-Paris 151 Boulevard de l'Hôpital - 75013 Paris (France)

Abstract:

Potential CAD/CAM applications of approximate conversion of degree elevated curves and surfaces may be numerous, but this requires the improved algorithms. To this effect, we introduce in this paper developments of efficient algorithms to convert degree elevated Bézier rational curves, which are characterised by a minimal approximation error, reduced time of calculations and restricted number of spline curves. Besides, they offer a suitable flexibility by model transformations, without sophisticated calculations. The inverse algorithm for degree elevation of Bézier curves and the minimisation of the square norm in the Bernstein polynomials basis are used for the degree reduction process, which is resolved by variable separation strategy in order to avoid the use of nonlinear methods.

Keywords: rational Bezier curves, approximate conversion, degree raising, subdivision, geometric continuity

1 Introduction

Le développement de méthodes de conversion par approximation de courbes et surfaces de Bézier de degré élevé a suscité durant ces deux dernières décennies un tel engouement qui se justifie aisément par les multiples applications potentielles envisageables en CFAO. L'échange de données entre deux entreprises utilisant des systèmes de CFAO hétérogènes et/ou au sein même d'une entreprise disposant de deux ou plusieurs systèmes de CFAO de degrés et de modèles différents [8], [9], [14],[15], [19], s'impose pour des raisons technico-économiques évidentes et requiert nécessairement une réduction ou une élévation de degré des entités géométriques échangées. La possibilité de modification locale et l'augmentation de la flexibilité dans le « design » lors de la phase de construction de courbes et surfaces de Bézier de formes complexes, la simplification de la complexité géométrique des entités intervenant lors des phases de conception et de génération des trajectoires d'outils (stabilité des calculs numériques, simplification des calculs d'intersections surfaces/surfaces et des manipulations infographiques, compatibilité outil-pièce), et enfin la reconstruction de surfaces à partir d'un réseau de

points issus d'une digitalisation, sont autant d'autres applications potentielles en CFAO [2],[3].

La première méthode de conversion des courbes de Bézier a été déjà introduite par Forrest en 1972 [12], [13] avant que Farin [11], Watkins et Worsey [19], Hoschek [14], [15], [16], Bensalah [5], Peterson [17], puis Eck [8], [9], [10], Brunnett [7] et Piegl [25] ne proposent des algorithmes de conversion par approximation plus ou moins performantes, mais accusant toutefois certaines lacunes tels que : nécessité d'utilisation de méthodes non linéaires produisant des temps de calcul relativement importants, coefficient de réduction fixé a priori [14], [15], [16], difficulté de respecter des ordres de continuités géométriques aux raccordements sans grand effort de calcul [5], [19], [8], [9], [10], trop grand nombre de subdivisions des entités réduites et passage d'un modèle à un autre nécessitant des calculs souvent sophistiqués [5], [19].

Dans cet article, nous introduisons les développements d'un algorithme de conversion de courbes de Bézières rationnelles de degré élevé, qui est en fait une extension de l'algorithme de conversion par approximation des courbes de Bézières non rationnelles, présenté dans [1], [2]. Le processus de réduction de degré est basé sur le principe inverse de l'algorithme d'élévation de degré [5], [8], [9], [10],

[11], [12], [13], [19] et la minimisation de la norme carrée dans la base des polynômes de Bernstein [14], [15], [16]. L'originalité de notre démarche réside dans la stratégie de séparation des variables qui permet d'éviter l'utilisation de méthodes non linéaires pour la résolutions des systèmes d'équations tels que rencontrés dans Hoschek [14], [15], [16], synonyme de réduction des temps de calcul, ainsi que la stratégie de subdivision adoptée, minimisant le nombre de segments des entités équivalentes.

2. Principe de la conversion par approximation

A l'instar des développement introduit dans [1], [2], le processus de conversion par approximation s'effectue en deux étapes, à savoir la réduction de degré d'une courbe mère de degré élevé en une courbe équivalente de degré inférieur, moyennant une erreur d'approximation que le constructeur peut maîtriser en imposant a priori une tolérance (au point, aux tangentes, aux courbures). Le respect de cette tolérance prescrite induit un processus de subdivisions successives de la courbe mère en deux ou plusieurs courbes équivalentes de degré plus faible.

2.1 Subdivision

Une courbe de Bézier rationnelle C(t), de degré n, définie par ses (n+1) pôles {P_{i=0}ⁿ, chargées par les poids {w_i}_{i=0}ⁿ, peut être subdivisée au point de valeur paramétrique t0 en deux courbes de Bézier rationnelles R(t) et Q(t), de même degré n et ayant le point commun R(t=0)=Q(t=0)=C(t0) (figure 1). L'expression de l'équation des charges est donnée d'après [11] [5] par l'expression:

$$w_i^r(t) = \sum_{j=0}^r w_{i+j} \cdot B_{j,r}(t)$$

c'est-à-dire :

$$w_i^r(t) = (1-t) \cdot w_{i-1}^{r-1}(t) + t \cdot w_{i+1}^{r-1}(t) \tag{1}$$

L'algorithme de récurrence pour les courbes de Bézier rationnelles s'écrit alors :

$$C_i^r(t) = (1-t) \cdot \frac{w_{i-1}^{r-1}(t)}{w_i^r(t)} \cdot C_{i-1}^{r-1}(t) + t \cdot \frac{w_{i+1}^{r-1}(t)}{w_i^r(t)} \cdot C_{i+1}^{r-1}(t) \tag{2}$$

avec : C_i⁰(t)=P_i ; w_i⁰(t)=w_i

Le polygone {R_{i=0}ⁿ et ses charges {α_{i=0}ⁿ définissant la courbe R(t) et le polygone {Q_{i=0}ⁿ et ses charges {β_{i=0}ⁿ recherchés sont alors calculés de façon récursive par les relations :

$$R_i = C_0^i(t_0) ; \alpha_i = w_0^i(t_0); i=0, \dots, n$$

$$Q_i = C_i^{n-i}(t_0) ; \beta_i = w_i^{n-i}(t_0); i=0, \dots, n$$

où les C_p^q(t₀) et w_p^q(t₀) sont obtenus respectivement à partir des équations (1) et (2).

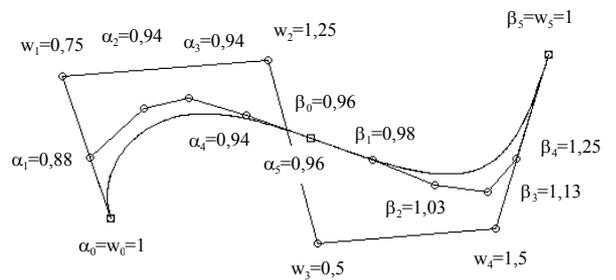


Figure 1 : Courbe de Bézier rationnelle de degré 5 (de poids w_i) subdivisée en deux courbes rationnelles de degré 5 (de poids α_j et β_k).b

2.2 Réduction de degré

A partir des relations exprimant l'élévation de degré d'une courbe de Bézier rationnelle de degré n [11], [12], [18] et par analogie au raisonnement adopté pour la réduction de degré des courbes de Bézier non rationnelles [1], [2], nous pouvons déterminer les pôles inconnues R_i et les S_i et leurs charges respectives de poids α_i et β_i, ainsi:

Pour : i=0, ..., n

$$R_i = \frac{n+1-i}{n+1-i} \cdot \frac{w_i}{\alpha_i} \cdot P_i - \frac{i}{\alpha_i} \cdot \frac{1}{n+1-i} \cdot R_{i-1} \tag{3a}$$

$$\alpha_i = \frac{n+1-i}{n+1-i} \cdot w_i - \frac{i}{n+1-i} \cdot \alpha_{i-1} \tag{4a}$$

Pour : i = n, ..., 0

$$S_{i-1} = \frac{n+1-i}{i} \cdot \frac{w_i}{\beta_{i-1}} \cdot P_i - \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}} \cdot \frac{n+1-i}{i} \cdot S_i \tag{3b}$$

$$\beta_{i-1} = \frac{n+1-i}{i} \cdot w_i - \frac{n+1-i}{i} \cdot \beta_i \tag{4b}$$

L'expression du polygone moyen (Figure 2) donnant l'approximation de Farin [11], pour le cas rationnel devient alors :

$$Q_i = \frac{n-i}{n} \cdot \frac{\alpha_i}{\mu_i} \cdot R_i - \frac{\beta_i}{\mu_i} \cdot \frac{i}{n} \cdot S_i \quad (5a)$$

$$\mu_i = \frac{n-i}{n} \cdot \alpha_i - \frac{i}{n} \cdot \beta_i \quad (5b)$$

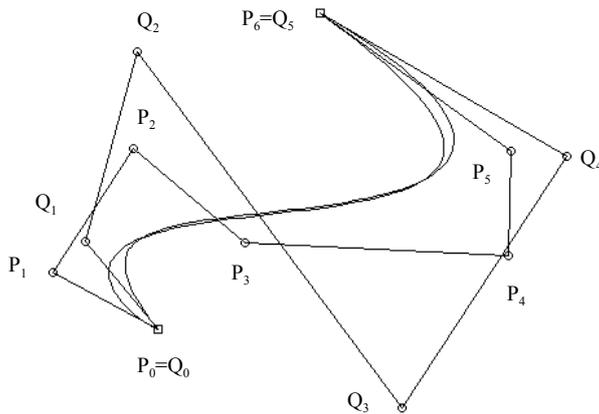


Figure 2 : Courbe de Bézier rationnelle de degré 6 réduite au degré 5 par la méthode du polygone moyen
 $W = \{1, 1.2, 0.8, 0.5, 0.8, 1.2, 1\}$;
 $W' = \{1, 1.304, 0.516, 0.516, 1.304, 1\}$.

3. Algorithme de réduction de degré

La méthode de réduction proposée se base sur l'approximation au sens des moindres carrés qui pose pour les courbes rationnelles un problème non linéaire à résoudre, indépendamment de l'ordre de continuité géométrique à respecter. Nous adoptons de ce fait la même stratégie de séparation des variables que pour la conversion par approximation des courbes de Bézier non rationnelles, ce qui nous permet d'aboutir à un système d'équations linéaire à résoudre. La démarche se déroule alors en trois étapes:

- Détermination séparée des pôles et de leurs poids pour éviter l'approximation non linéaire due au modèle non rationnel,

- Détermination séparée des pôles influant sur la continuité géométrique pour éviter la résolution d'équations non linéaires imposées par l'ordre de continuité à respecter,

- Détermination des poids influant sur la continuité géométrique.

Considérons pour cela une courbe de Bézier rationnelle de degré n , de charges w_i , exprimée par :

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot G_{i,n}(t)$$

que l'on se propose de réduire en une courbe de Bézier rationnelle de degré $(n-1)$, de charges Ψ_i en respectant la continuité $C^{\alpha-1}$

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n-1} Q_i \cdot G_{i,n-1}(t)$$

$$\text{où : } G_{i,n}(t) = \frac{B_{i,n}(t) \cdot w_i}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) \cdot w_j},$$

sont les fonctions de Bernstein rationnelles.

3.1 Détermination des pôles et des charges influant sur la continuité géométrique :

Par analogie au cas non rationnel, pour respecter une continuité géométrique $C^{\alpha-1}$, il suffit de prendre les α premiers pôles R_i (3a) et les α premières charges α_i (4a) ainsi que les α derniers pôles S_i (4b) et les α dernières charges β_i (4b) de l'algorithme de Forrest [12]. Nous obtenons alors :

$$Q_0 = P_0 \text{ et } \Psi_0 = w_0$$

$$\text{Pour : } i = 1, 2, \dots, \alpha - 1$$

$$\Psi_i = \frac{n}{n-i} \cdot w_i - \frac{i}{n-i} \cdot \Psi_{i-1} \quad (6a)$$

$$Q_i = \frac{n}{n-i} \cdot \frac{w_i}{\Psi_i} \cdot P_i - \frac{\Psi_{i-1}}{\Psi_i} \cdot \frac{i}{n-i} \cdot Q_{i-1} \quad (7a)$$

$$Q_{n-1} = P_n \text{ et } \Psi_{n-1} = w_n$$

$$\text{Pour : } i = n, n-2n, \dots, n-\alpha+1$$

$$\Psi_{i-1} = \frac{n}{i} \cdot w_i - \frac{n-i}{i} \cdot \Psi_i \quad (6b)$$

$$Q_{i-1} = \frac{n}{i} \cdot \frac{w_i}{\psi_{i-1}} \cdot P_i - \frac{\psi_i}{\psi_{i-1}} \cdot \frac{n-i}{i} \cdot Q_i \quad (7b)$$

3.2 Détermination des charges restantes

Les courbes rationnelles étant une généralisation des courbes non rationnelles obtenue par transformation projective, on peut considérer les deux fonctions suivantes:

$$w(t) = \sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(t) \quad (8a)$$

$$\psi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i \cdot B_{i,n-1}(t) \quad (8b)$$

$\Psi(t)$ étant une approximation de degré $(n-1)$ de la fonction scalaire $w(t)$ de degré n .

L'approximation au sens des moindres carrés revient à minimiser la fonction δ exprimée par:

$$\delta = \sum_{j=1}^{np} [w(t_j) - \psi(t_j)]^2 = \sum_{j=1}^{np} e_j^2 \quad (9)$$

avec :

$$e_j = w(t_j) - \psi(t_j) \quad (10)$$

L'insertion de (8a) et de (8b) dans (9) donne alors :

$$e_j = \sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(t_j) - \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i \cdot B_{i,n-1}(t_j)$$

Un développement analogue au cas non rationnel, des conditions : $\frac{\partial e_j}{\partial \psi_h}$, permet d'obtenir:

$$\frac{\partial e_j}{\partial \psi_h} = -B_{h,n-1}(t_j) \quad (11)$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{\partial \delta}{\partial \psi_h} = \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial (e_j)^2}{\partial \psi_h} = 2 \cdot \sum_{j=1}^{np} e_j \cdot \frac{\partial e_j}{\partial \psi_h}$$

Ce qui permet d'aboutir à un système d'équations d'ordre $(n-2, \alpha)$, de la forme :

$$A_{ih} \cdot \psi_h = b_i \quad (12)$$

En posant :

$$\gamma_{ih} = \sum_{j=1}^{np} B_{i,n}(t_j) B_{h,n-1}(t_j) \quad (13)$$

$$\beta_{ih} = \sum_{j=1}^{np} B_{i,n-1}(t_j) B_{h,n-1}(t_j) \quad (14)$$

$$b_h = \sum_{i=0}^n w_i \cdot \gamma_{ih} - \sum_{i=0}^{\alpha-1} \psi_i \cdot \beta_{ih} - \sum_{i=n-\alpha}^{n-1} \psi_i \cdot \beta_{ih} \quad (15)$$

le système (12) se ramène alors à :

$$\sum_{i=\alpha}^{n-\alpha} \psi_i \cdot \beta_{ih} = b_h \quad (16)$$

3.3 Détermination des pôles intermédiaires :

La minimisation de la fonction δ définie par la relation suivante :

$$\delta = \sum_{j=1}^{np} [P(t_j) - Q(t_j)]^2 = \sum_{j=1}^{np} e_j^2 \quad (17)$$

$$\text{avec : } e_j = \sum_{i=0}^n P_i \cdot G_{i,n}(t_j) - \sum_{i=0}^{n-1} Q_i \cdot G_{i,n-1}(t_j)$$

et un développement des conditions :

$$\frac{\partial e_j}{\partial Q_h} \quad \text{pour } h=\alpha, \alpha-1, \dots, n-\alpha-1$$

permet d'aboutir à l'expression :

$$\frac{\partial e_j}{\partial Q_h} = -G_{h,n-1}(t_j) \quad (18)$$

L'insertion de (18) dans :

$$\frac{\partial \delta}{\partial Q_h} = \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial (e_j)^2}{\partial Q_h} = 2 \cdot \sum_{j=1}^{np} e_j \cdot \frac{\partial e_j}{\partial Q_h}$$

permet d'écrire :

$$\frac{\partial \delta}{\partial Q_h} = -2 \cdot \sum_{j=1}^{np} e_j \cdot G_{h,n-1}(t_j) \quad (19)$$

Ce qui donne le système final suivant à résoudre:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n P_i \cdot \sum_{j=1}^{np} G_{i,n}(t_j) G_{h,n-1}(t_j) - \sum_{i=0}^{\alpha-1} Q_i \cdot \sum_{j=1}^{np} G_{i,n-1}(t_j) G_{h,n-1}(t_j) - \\ & \sum_{i=n-\alpha}^n Q_i \cdot \sum_{j=1}^{np} G_{i,n-1}(t_j) G_{h,n-1}(t_j) = \\ & = \sum_{i=\alpha}^{n-\alpha} Q_i \cdot \sum_{j=1}^{np} G_{i,n-1}(t_j) G_{h,n-1}(t_j) \quad (20) \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un système d'équations d'ordre $(n-2 \cdot \alpha)$ de la forme :

$$U_{ij} \cdot Q_h = v_i \quad (21)$$

En posant :

$$\rho_{ih} = \sum_{j=1}^{np} G_{i,n}(t_j) G_{h,n-1}(t_j) \quad (22)$$

$$\sigma_{ih} = \sum_{j=1}^{np} G_{i,n-1}(t_j) G_{h,n-1}(t_j) \quad (23)$$

$$v_h = \sum_{i=0}^n P_i \cdot \rho_{ih} - \sum_{i=0}^{\alpha-1} Q_i \cdot \sigma_{ih} - \sum_{i=n-\alpha}^{n-1} Q_i \cdot \sigma_{ih} \quad (24)$$

le système (20) s'écrit finalement:

$$\sum_{i=\alpha}^{n-\alpha} Q_i \cdot \sigma_{ih} = v_h \quad (25)$$

La procédure algorithmique se ramène alors aux étapes de traitement suivantes:

$$Q_0 = P_0 \text{ et } \psi_0 = w_0$$

$$i = 1, 2, \dots, \alpha - 1$$

$$\psi_i = \frac{n}{n-1} \cdot w_i - \frac{i}{n-1} \cdot \psi_{i-1}$$

$$Q_i = \frac{n}{n-i} \cdot \frac{w_i}{\psi_i} \cdot P_i - \frac{\psi_{i-1}}{\psi_i} \cdot \frac{i}{n-i} \cdot Q_{i-1}$$

$$Q_{n-1} = P_n \text{ et } \psi_{n-1} = w_n$$

$$i = n-1, n-2, \dots, n-\alpha+1$$

$$\psi_{i-1} = \frac{n}{i} \cdot w_i - \frac{n-i}{i} \cdot \psi_i$$

$$Q_{i-1} = \frac{n}{i} \cdot \frac{w_i}{\psi_{i-1}} \cdot P_i - \frac{\psi_i}{\psi_{i-1}} \cdot \frac{n-i}{i} \cdot Q_i$$

Pour $i = \alpha, \alpha+1, \dots, n-\alpha-1$

$$\text{Résoudre le système : } \sum_{i=\alpha}^{n-\alpha} \psi_i \cdot \beta_{ih} = b_h$$

Pour $i = \alpha, \alpha+1, \dots, n-\alpha-1$

$$\text{Résoudre le système : } \sum_{i=\alpha}^{n-\alpha} Q_i \cdot \sigma_{ih} = v_h$$

L'application successive de cette procédure produit ainsi une réduction d'un degré n à un autre degré $m < n$ (Fig.3).

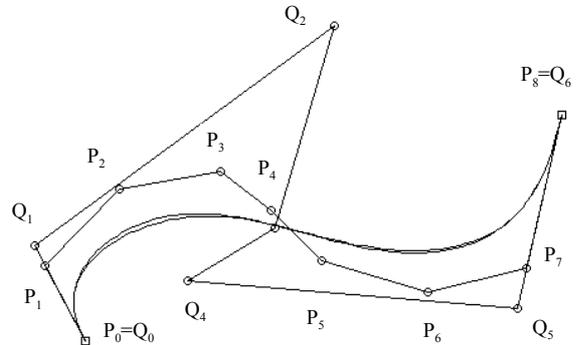


Figure 3 : Courbe de Bézier rationnelle de degré 8 réduite au degré 6, avec respect de C^2
 $w = \{1, 1.2, 0.8, 1, 0.5, 1, 0.8, 1.2, 1\}$,
 $w' = \{1, 1.27, 0.41, 1.22, 0.41, 1.27, 1\}$.

4. Algorithme de conversion

Les résultats de l'application de l'algorithme de sub-réduction sont illustrés par les 4,5 et 6.

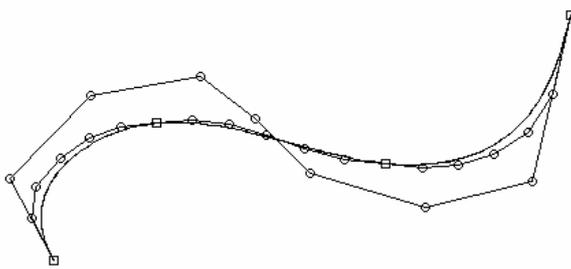


Figure 5 : Courbe de Bézier rationnelle de degré 8 convertie en 3 courbes de degré 6 pour une continuité d'ordre 3 et une tolérance de position imposée de 0.01 mm.

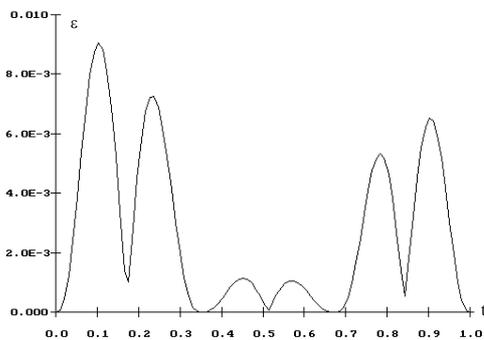


Figure 5 : Variation de l'erreur de position de la courbe de Bézier rationnelle convertie de la Figure 4.

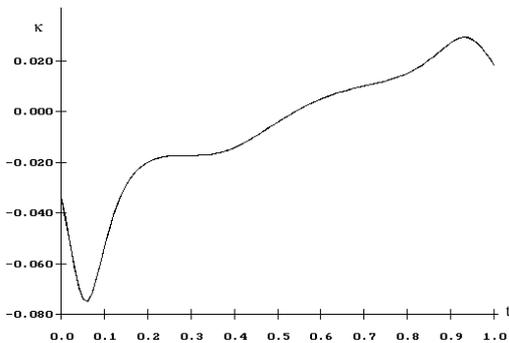


Figure 6 : Variation des courbures de la courbe de Bézier rationnelle convertie de la Figure 4

5 Conclusion

A l'instar des performances de l'algorithme pour le cas des courbes non rationnelles exposé dans [2], l'algorithme proposé dans cet article se caractérise par une mise en œuvre informatique relativement facile et nécessitant peu d'espace mémoire; l'erreur

d'approximation minimale produite est proche de celle obtenue avec d'autres méthodes (Forrest [12], [13], Watkins et Worsley [19], Bensalah [5], et Hoschek [14], [15], [16] pour des temps de calcul relativement plus réduits, car évitant le recours à l'utilisation des méthodes non linéaires pour la résolution du problème d'approximation. En outre, le respect des tolérances géométriques prescrites (au point, à la tangente et à la courbure) pour un nombre minimal de courbes composites équivalentes de degré plus faible, la flexibilité offerte lors du passage d'un degré élevé n vers un degré quelconque plus faible m , l'aisance et la facilité de passage aux courbes B-spline et aux surfaces de Bézier sans calculs sophistiqués, représentent autant de propriétés appréciables que présente l'algorithme par rapport à la proposition de Eck (Eck [8], [10]) qui reste une référence appréciable du point de vue temps et précision.

6 Références

- [1] Asma F. « Méthodes de réduction de degré des courbes de Bézier. Etude comparative et Application à l'échange de données entre systèmes de CFAO », Mémoire de Magister ; Université de Boumerdès (Algérie), Juil.1999
- [2] Belaidi I., Asma F., Ishiomin G., « Réduction de degré des courbes de Bézières non rationnelles . Application potentielles en CFAO », in 15^{ème} Congrès Français de Mécanique - CFM'2001 - , Nancy (France), 2001.
- [3] Belaidi I., « Réduction de degré des courbes de Bézier. Qualité d'équivalence en relation avec des paramètres d'usinage », Thèse de Doctorat, LMS-ENSAM, CER de Paris, 1998.
- [4] Belaidi I., Ishiomin G., « critères d'équivalences géométriques en relation avec des paramètres d'usinage », 1er Colloque International sur la Productique, UMMTO (Algérie) et INI de Belfort (France), mai 1998.
- [5] Bensalah S., « Equivalence et algorithmique des transformations dans les modèles mathématiques pour la conception et la fabrication assistées par ordinateur des courbes et des surfaces », Thèse de doctorat, ENSAM, 1990.
- [7] Brunnett G., Schreiber T., Braun J., "The geometry of optimal degree reduction of Bézier curves", *Computer Aided Geometric Design*, Vol.13, pp. 773-788, 1996.
- [8] Eck M., "Degree reduction of Bézier curves *Computer Aided Geometric Design*, Vol.10, pp.237-251, 1993.
- [9] Eck M., Hadenfeld J., "A stepwise algorithm for converting B-Splines", *Curves and surfaces in*

J.P.Laurent Edition, Le Méhauté and L.L.Schumacher, pp.131-138, 1994.bb

[10] Eck M., "Least squares degree reduction of Bézier curves", *Computer Aided Design*, Vol.27, pp.845-851, 1995.

[11] FARIN G., "Algorithms for rational Bezier curves", *Computer Aided Design*, Vol.15, N°11, pp.73-77, 1995.

[13] Forrest A., "Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials", *Computer Aided Design*, Vol.22, N°9, pp.527-537, 1990.

[14] Hoschek J., « Approximate conversion of spline curves », *Computer Aided Geometric Design*, Vol.4, pp.59-66, 1987.

[15] Hoschek J., "Intrinsic parametrisation for approximation", *Computer Aided Geometric Design*, Vol.5, pp.27-31, 1988.

[16] Hoschek J., "Exact approximate conversion of spline curves and spline surfaces", *Computation of Curves and Surfaces*, W.Dahmen et al. Editions, Kluwer, Netherlands, pp.73-116, 1990.

[17] Peterson J., « Degree reduction of Bezier curves », *Computer Aided Design*, Vol.23, N°6, pp.460-461, 1991.

[18] Piegl L., Tiller W., "Software engineering approach to degree elevation of B-spline curves", *Computer Aided Design*, Vol.26, N°1, pp.17-28, 1994.

[19] Watkins, M.A., Worsey A.J., "Degree reduction of Bézier curves", *Computer Aided Design*, Vol.20, N°7, pp.398-405, 1988.

**Pseudo-codes des algorithmes de conversion
par approximation des courbes rationnelles de
Bézier de degré élevé**