

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'hamed Bougara Bumerdes
Faculté des sciences
Département de Mathématiques



Mémoire présenté

en vue de l'obtention du diplôme de Master

en Mathématiques Financières

Par : ABDERRAHMANE Nour El Houda
Et : ZEGHMAR Radia

Thème

Modélisation De La Dépendance Par Les Copules

Soutenu à l'UMBB, devant le jury composé de :

Président
Promotrice
Examineur

Mme BEN AHMED
Mme LOUNAS
Mr. RAHMOUNE

Année Universitaire 2015 - 2016



Remerciements

Au terme de ce travail, nous saurons gré à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire, d'accepter nos plus vifs remerciements.

Nous tenons à remercier, Madame LOUNAS F., notre directrice de mémoire, pour son aide précieuse et ses encouragements aux initiatives personnelles, ses conseils, ses orientations, ainsi que Monsieur RAHMOUNE et Madame BEN AHMED qui nous font l'honneur de constituer le jury devant lequel nous soutiendrons notre mémoire.

Nous n'oublions pas dans nos éloges l'ensemble du personnel du Département de mathématiques de l'Université M'hammed Bouguerra, et plus personnellement nos enseignants pour tous leurs efforts.

Sans oublier ceux qui par leurs sacrifices, nous sommes ici, nos parents, à toutes deux.

Enfin, un grand merci à nos amies pour leur soutien indéfectible.

Table des matières

1	Notions et définitions	3
1.1	Introduction	4
1.2	Variable aléatoire continue	4
1.2.1	Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue	4
1.2.2	Distribution conjointe de variables aléatoires	5
1.2.3	Indépendance de variables aléatoires	5
1.2.4	Coefficient de corrélation linéaire	5
1.2.5	Définition de la fonction de répartition bivariée	6
1.2.6	Définition des fonctions marginales	6
1.2.7	Fonctions génératrices	6
1.2.8	Fonctions caractéristiques	7
2	La notion de copule et ses propriétés	8
2.1	Introduction	9
2.2	Définition d'une copule	9
2.3	Définition d'une copule bivariée	9
2.4	Propriétés d'une copule	10
2.4.1	Théorème de Sklar	10
2.4.2	Bornes de Fréchet-Hoeffding	12
2.4.3	Densité d'une copule	16
2.4.4	Relation d'ordre sur les copules	16
2.4.5	Copules et variables aléatoires	17
2.4.6	Propriété d'invariance	18
2.4.7	Copules associées à une copule	20
2.4.8	Relation de dépendance	22
2.4.9	Dépendance de queue	28
2.5	Copule multidimensionnelle	30
2.5.1	Théorème de Sklar	30
2.5.2	Bornes de Fréchet-Hoeffding	31
2.5.3	Densité d'une copule	31
3	Les copules paramétriques	33
3.1	Introduction	34
3.2	Copule Archimédienne	34
3.2.1	Copule Archimédienne bivariée	34
3.2.2	Propriétés d'une copule Archimédienne	35
3.2.3	Les familles de copule Archimédienne	36
3.3	Copule Elliptique	39
3.3.1	La copule Gaussienne	40

3.3.2	La copule de Student	42
4	Estimation des copules	44
4.1	Introduction	45
4.2	Estimation paramétrique	45
4.2.1	Maximum de vraisemblance (MLE)	45
4.2.2	Inférence sur les marginales (IMF)	46
4.2.3	La méthode des moments	46
4.3	Estimation semi paramétrique	47
4.3.1	Maximum de vraisemblance canonique	47
4.4	Estimation non paramétrique	48
4.4.1	Copule empirique	48
4.4.2	Méthode de Genest et Rivest	49
5	Application des copules en finance	50
5.1	Introduction	51
5.2	Définition de risque	51
5.2.1	Les types de risque	51
5.2.2	Mesure de risque	52
5.2.3	Propriétés d'une Mesure de risque	52
5.2.4	La valeur en risque	53
5.2.5	La Valeur en Risk dépend en réalité de trois éléments	53
5.2.6	Définition de Portefeuille	54
5.3	La gestion de risque en utilisant la copule	54
5.3.1	Calcul la VaR par la copule	55
5.3.2	Application numérique	55

Table des figures

2.1	Représentation de La copule M	13
2.2	contour plot de M	13
2.3	Représentation de La copule W	14
2.4	contour plot de W	14
2.5	Représentation de La copule Π	15
2.6	contour plot de Π	15
3.1	Densité bivariée de la copule de Frank pour $\alpha = 2$	36
3.2	Densité bivariée de la copule de Clayton $\alpha = 0,5$	37
3.3	Densité de la copule de Gumbel bivariée pour $\alpha = 2$	39
3.4	Densité de la copule gaussienne pour une corrélation de 0.5	41
3.5	Densité de la copule de Student pour une corrélation de 0.5 et un nombre de degrés de liberté $\nu = 14$	43
5.1	Graphique de Value at Risk	54

Liste des tableaux

3.1	Copules Archimédiennes bivariées	39
5.1	La VaR avec des différentes copula et différentes paramètres	56

Introduction générale

La théorie des copules, a connu ces trois dernières décennies, un essor considérable surtoût avec les applications dans le domaine de la finance. En effet, la gestion des risques, l'évaluation des rendements d'actifs, la théorie des valeurs extrêmes, requièrent des modélisations de la dépendance et la théorie des copules est d'autant plus attrayante pour la finance qu'elle permet d'accommoder la non-normalité des variables.

Le terme copule (copula) vient du mot latin "*copŭlae*", qui signifie au sens figuré, liaison, lien, alliance ou union. Les copules représentent un outil innovant pour modéliser la structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires. Elle est introduite par Sklar (1959) dans des études sur les espaces de probabilité métriques, ce dernier a élaboré un théorème fondamental dans la théorie des copules. Ce théorème permet la liaison entre la densité conjointe d'un vecteur aléatoire et ses densités marginales.

Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson est un indicateur qui mesure la dépendance entre deux variables aléatoires X et Y qui prendre toute valeur de l'intervalle $[-1, 1]$, cette mesure de dépendance facile à calculer est un indicateur performant lorsque la relation de dépendance est linéaire et l'univers considéré gaussien. Il est très utile pour les familles de distributions elliptiques (car pour ces distributions la non corrélation implique l'indépendance). Cependant cette mesure de dépendance souvent utilisée par les praticiens possède plusieurs limites. Ainsi la non corrélation de deux variables non gaussiennes ne signifie pas une absence de dépendance, c'est à dire bien que le coefficient de corrélation soit nul, il ya une dépendance entre X et Y , donc ce dernier possède des insuffisances d'information.

En finance le cas gaussien est rarement utilisé. Pour sortir de ce cas et satisfaire les besoins de la finance, on introduit un autre moyen de mesurer la dépendance qui permet de coupler les lois marginales des variable aléatoires afin d'obtenir la loi jointe. L'avantage de cette dernière et contrairement au coefficient de corrélation est invariante par transformations strictement croissantes ; par exemple la corrélation entre les deux variables aléatoires X et Y n'est pas la même qu'entre $\log(X)$ et $\log(Y)$; en effet les transformations des données peuvent affecter les évaluations de corrélation.

D'une façon explicite, les copules sont des fonctions de répartition particulières, qui lient les fonctions de répartition multivariées de lois de probabilité dans \mathbb{R}^n , pour $n \geq 2$, aux fonctions de répartition marginales de leurs coordonnées. La caractéristique des copules permet de séparer les distributions marginales de la structure de dépendance.

Plus précisément, soit X_1, X_2, \dots, X_n des vecteurs aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n , définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; de fonction de répartition conjointe $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$ et de marginales $F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. D'après Sklar (1959), il existe une fonction de répartition multivariée $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, que l'on appellera copule, dont les marges sont uniformes et telle que, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on puisse écrire

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C\{F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)\}$$

Cette représentation montre la manière avec laquelle la fonction copule associe la loi de répartition conjointe aux lois marginales univariées.

Ce mémoire est constitué de cinq chapitres.

Le premier chapitre se veut comme une introduction à certaines notions de base du concept de dépendance et probabilité dans le but d'effectuer une entrée en matière avec celui des copules.

Le but du deuxième chapitre est de fournir une introduction à la notion de copule. D'abord nous commençons par définir la copule dans le cas bivariée et ses propriétés accompagnées de présentation graphique des copules les plus utilisées pour mieux illustrer les propos expliqués.

L'objet principal du troisième chapitre est d'étudier quelques familles des copules paramétriques les plus utilisées et leurs propriétés fondamentales.

Le quatrième chapitre porte sur les deux grandes méthodes d'estimation des copules ; l'approche paramétrique et l'approche non-paramétrique.

Au cinquième chapitre, nous donnons une petite application des copules en finance ; ou on calculera une mesure de risque très utilisée en finance qui est la Valeur en risque VaR. L'implémentation se fera à l'aide du logiciel de statistiques « R ».

Chapitre 1

Notions et définitions

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on va introduit et étudié des notions de base du concept de dépendence et probabilité

On y présentera quelques caractéristiques et propriétés fondamentales.

1.2 Variable aléatoire continue

Soient (Ω, B, P) un espace probablisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace.

Définition 1.1 *On dit que X est une variable aléatoire absolument continue si sa fonction de répartition F est continue et dérivable à gauche et à droite de tout point x de \mathbb{R} .*

La fonction dérivée f de F est dite fonction densité de probabilité de X et vérifie les relations :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dot{F}(x);$$

et

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Le résultat suivant résume les principales propriétés de la fonction densité de probabilité f d'une variable aléatoire continue X .

Propriété 1.1

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ (f est positive).
2. f est continue sur \mathbb{R} sauf peut être en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite.
3. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

1.2.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue

Dans toute la suite X désigne une variable aléatoire continue et f représente sa fonction densité de probabilité.

◇ Pour tout nombre réel on a :

$$P(X \leq \alpha) = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$$

et

$$P(X > \alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx = 1 - F(\alpha)$$

◇ Pour tous réels α et β tels que $\alpha \leq \beta$ on a :

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

1.2.2 Distribution conjointe de variables aléatoires

Définition 1.2

- ◇ Soit deux variables aléatoires X_1 et X_2
 La fonction de répartition conjointe est donnée par :

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

- ◇ La fonction de masse conjointe est donnée comme suit :

$$P(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

- ◇ La fonction de densité conjointe est donnée par :

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2)$$

Note : Ces définitions se généralisent facilement au cas de variable aléatoire avec $p > 2$.

1.2.3 Indépendance de variables aléatoires

Soit deux variables aléatoires X_1 et X_2 continues, on dit que X_1 est indépendante de X_2 ssi :

- ◇ $F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$
 ou
- ◇ $F(x_1|x_2) = F_1(x_1)$

1.2.4 Coefficient de corrélation linéaire

Définition 1.3 [30] Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires ayant des variances finies.

le coefficient de corrélation linéaire des variables X_1 et X_2 est donné par :

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$

Où $Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1, X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$ est la covariance entre X_1 et X_2 ; $Var(X_1)$, $Var(X_2)$ correspondent aux variances des variables X_1 et X_2 respectivement.

- ◇ $\rho \in [-1, 1]$
- ◇ $\rho = 0$ si la corrélation linéaire est nulle.
- ◇ $\rho = \pm 1$ si la corrélation linéaire est parfaite.
- ◇ Le coefficient est positif si la liaison est positive.
- ◇ Le coefficient est négatif si la liaison est négative.

1.2.5 Définition de la fonction de répartition bivarieé

Définition 1.4 [30] Une fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ continue à droite est dite une fonction de répartition bivariée si et seulement si :

1.

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) &= 0 \text{ pour } i \in \{1, 2\} \\ \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) &= 1 \end{aligned}$$

2. F est 2-croissante (inégalité de rectangle) : pour tout (α_1, α_2) et $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$\alpha_1 < \beta_1$ et $\alpha_2 < \beta_2$, on a :

$$F(\alpha_1, \alpha_2) + F(\beta_1, \beta_2) - F(\alpha_1, \beta_2) - F(\beta_1, \alpha_2) \geq 0.$$

1.2.6 Définition des fonctions marginales

On désignera par $C(F_1, F_2)$ la classe des fonctions de répartition bivariées de marginales F_1 et F_2 .

Les marginales s'obtiennent de la fonction de répartition conjointe telle que :

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) \tag{1.1}$$

$$F_2(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) \tag{1.2}$$

1.2.7 Fonctions génératrices

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , la fonction génératrice de X est définie comme suit :

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

Où $p_k = P(X = k)$ et on adopte la convention $0^0 = 1$.

Proposition 1.1 La fonction génératrice vérifie les propriétés suivantes

1. $\lim_{s \rightarrow 1^-} G'_X(s) = E(X)$
2. Elle caractérise la loi de X (c-à-d deux fonctions génératrices égales correspondent à des variables aléatoires de même loi).
3. Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs entières indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$

On rappelle que si $E(X) < \infty$, la dérivée de G_X est prolongeable par continuité en 1 et devient dérivable à gauche en 1.

1.2.8 Fonctions caractéristiques

Définition 1.5 Soit x une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n , la fonction définie par :

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= E(e^{itx}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx, t \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

est dite la fonction caractéristique de x .

Lemme 1.1 Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{R}^n alors,

$$\phi_{X_1+\dots+X_n}(t) = \phi_{X_1}(t) \dots \phi_{X_n}(t)$$

Soit X une variable aléatoire réelle

$$\phi^k(0) = i^k E(X^k) \quad k = 0, 1, \dots$$

Définition 1.6 la fonction caractéristique de vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est donnée par :

$$\phi_X(t) = E(\exp(itX)), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Chapitre 2

La notion des copules et ses propriétés

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de fournir une introduction à la notion de copule, d'abord nous commençons par définir la copule dans le cas bivariée et ses propriétés accompagnées de présentation graphique des copules les plus utilisées pour mieux illustrer les propos expliqués, ensuite, nous parlerons du cas multivarié qui est une généralisation de cas bivarié.

Nous avons recours à d'autres indicateurs de dépendance comme le tau de Kendall ou encore le rho de Spearman (ces deux mesures sont définies dans la suite).

2.2 Définition d'une copule

Du fait que la théorie multivariée est une extension du cas bivarié, nous étudions la théorie des copules bivariées, ensuite nous passons au cas multivarié pour généraliser les résultats ainsi obtenus.

Dans toute la suite I désigne l'intervalle $[0, 1]$

Soient U et V deux variables aléatoires uniformes sur I dont la fonction de répartition :

$$P(U \leq u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } 0 \leq u < 1 \\ 1 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

Alors $\forall (u, v) \in I^2$ on a

$$C(u, v) = P(U \leq u, V \leq v)$$

cette définition assure donc que la copule est une fonction de répartition avec des marges uniformes.

2.3 Définition d'une copule bivariée

Définition 2.1 La copule bivariée C est une fonction de $I^2 \rightarrow I$ définie par les caractéristiques suivantes :

- i $C(u, 0) = C(0, u) = 0, \forall u \in I$
- ii $C(u, 1) = C(1, u) = u, \forall u \in I$
- iii C est 2-croissante : pour tout $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ avec $0 \leq u_1 \leq v_1 \leq 1$ et $0 \leq u_2 \leq v_2 \leq 1$ on a :

$$C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, u_2) \geq 0.$$

2.4 Propriétés d'une copule

Théorème 2.1 (Différentiabilité) [5] Soit C une copule $\forall v \in I$, la dérivée partielle $\frac{\partial C}{\partial u}$ existe presque sûrement pour tout $u \in I$, et quand cette dérivée existe on a :

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1$$

De même pour tout $u \in I$, la dérivée partielle $\frac{\partial C}{\partial v}$ existe pour presque tout $v \in I$, et quand cette dérivée existe, on a :

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1$$

De plus, les fonctions $u \mapsto \frac{\partial}{\partial v} C(u, v)$ et $v \mapsto \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$ sont définies et croissantes presque partout sur I .

Théorème 2.2 (Continuité) [25] Soit C une copule bivariée, pour tout $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a :

$$|C(u_1, v_1) - C(u_2, v_2)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

2.4.1 Théorème de Sklar

Il est fait appel au théorème de Sklar, du nom de celui qui a introduit le concept copule en 1959.

Ce théorème précise comment il est possible de relier le principe de la copule à la fonction de répartition bivariée et aux lois marginales.

Définition 2.2 (inverse généralisé) Soit F une fonction de répartition, L'inverse généralisé F^{-1} de F est une fonction définie de la façon suivante :

$$F^{-1}(t) = \inf\{x/F(x) \geq t\} = \sup\{x/F(x) \leq t\}$$

Proposition 2.1

1. La fonction F^{-1} est croissante et continue à gauche. De plus $\forall x \in \mathbb{R}, p \in]0, 1]$

$$F(x) \geq p \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(p)$$

2. Soit X une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} de fonction de répartition F . Si F est continue, alors $F(X)$ est de loi uniforme sur I .

Le théorème suivant est fondamental dans la théorie des copules.

Théorème 2.3 (Sklar) [25] Soit F une fonction de répartition bivariée marginale de marges F_1 et F_2 . On pose $F_1(x_1) = u$ et $F_2(x_2) = v$
 $F(x_1, x_2)$ peut s'écrire en terme de fonction unique $C(u, v)$ telle que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (2.1)$$

Si les fonctions de répartitions marginales F_1 et F_2 sont continues alors la copule C est unique ; sinon elle est déterminée de manière unique sur $Im(F_1) \times Im(F_2)$.

Réciproquement, si C est une copule et F_1, F_2 sont des fonctions de répartitions univariées, alors la fonction F définie par (2.1) est la fonction de répartition conjointe dont les marginales sont F_1 et F_2 .

Preuve 2.1 Du faite que F_1 et F_2 sont continues en utilisant 2. de la proposition 2.1, $F_1(X_1)$ et $F_2(X_2)$ sont uniformes sur I . Soit F la fonction de répartition du couple $F_1(X_1)$ et $F_2(X_2)$ c'est à dire,

$$\begin{aligned} C(u, v) &= P\left(F_1(X_1) \leq u, F_2(X_2) \leq v\right) \\ &= P\left(X_1 \leq F_1^{-1}(u), X_2 \leq F_2^{-1}(v)\right) \\ &= F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de 2.1 En utilisant 1. de la proposition 2.1 on a :

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P\left(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\right) \\ &= P\left(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), F_2(X_2) \leq F_2(x_2)\right) \\ &= C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \end{aligned}$$

Cela termine la démonstration de la réciproque du théorème.

Corollaire 2.1 (inversion de sklar) [27] Soient C, F, F_1 et F_2 dans le théorème 2.3 et supposant que F_1 et F_2 sont continues si F_1^{-1} et F_2^{-1} les fonctions inverses de F_1 et F_2 :

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v))$$

$\forall (u, v) \in I^2$

Exemple 2.1 Soit la distribution logistique bivariée de Gumbel [13] dont la fonction de répartition conjointe est donnée par :

$$F(x_1, x_2) = (1 + e^{-x_1} + e^{-x_2})^{-1}, \text{ pour tout } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Des équations (1.1) et (1.2), nous obtenons les fonctions de répartitions marginales

$$F_1(x_1) = (1 + e^{-x_1})^{-1} \quad \text{et} \quad F_2(x_2) = (1 + e^{-x_2})^{-1}$$

Comme les fonctions inverses sont respectivement

$$F_1^{-1}(u) = -\ln\left(\frac{1}{u} - 1\right) \quad \text{et} \quad F_2^{-1}(v) = -\ln\left(\frac{1}{v} - 1\right)$$

En se basant sur le théorème 2.3, la copule associée à $F(x_1, x_2)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} C(u, v) &= F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \\ &= \left[1 + e^{\ln(\frac{1}{u}-1)} + e^{\ln(\frac{1}{v}-1)}\right]^{-1} \\ &= \frac{uv}{u + v - uv} \end{aligned}$$

2.4.2 Bornes de Fréchet-Hoeffding

Définissons tout d'abord trois copules importantes :

1. La copule minimum : qui a pour expression $W = C^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ avec $(u, v) \in I^2$

2. La copule maximum : qui est notée par $M = C^+(u, v) = \min(u, v)$ avec $(u, v) \in I^2$.

3. La copule produit : qui est notée par $\Pi = C^\perp(u, v) = uv$

Les copules minimum C^- et maximum C^+ sont essentielles puisqu'elles définissent des copules extrémales de toute copule, que l'on appelle les bornes de Fréchet.

Propriété 2.1 *Pour toute copule C , nous avons :*

$$W = C^-(u, v) \leq C(u, v) \leq C^+(u, v) = M$$

Preuve 2.2 *Soit $(u, v) \in I^2$ on a :*

$$\begin{cases} C(u, v) \leq C(u, 1) = u \\ \text{et} \\ C(u, v) \leq C(1, v) = v \end{cases}$$

alors,

$$C(u, v) \leq \min(u, v) = C^+(u, v)$$

D'où la deuxième inégalité.

Pour démontrer la première inégalité, nous utilisons le fait que $C(u, v) \geq 0$ et l'inégalité

$$C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, u_2) \geq 0$$

$$\begin{aligned} C(1, 1) - C(1, v) - C(u, 1) + C(u, v) &\geq 0 \implies 1 - v - u + C(u, v) \geq 0 \\ &\implies C(u, v) \geq u + v - 1 \\ &\implies C(u, v) \geq \max(0, u + v - 1) \\ &\implies C(u, v) \geq C^-(u, v) \end{aligned}$$

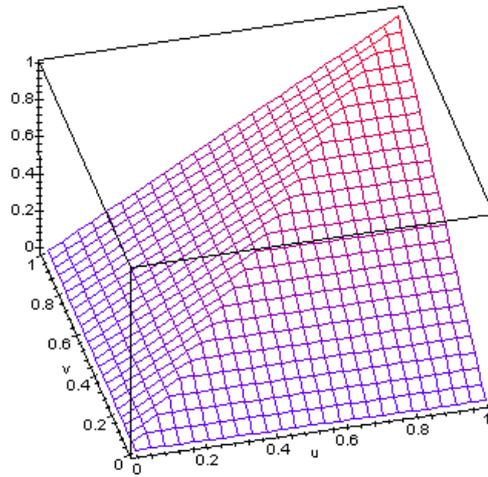


FIGURE 2.1 – Représentation de La copule M

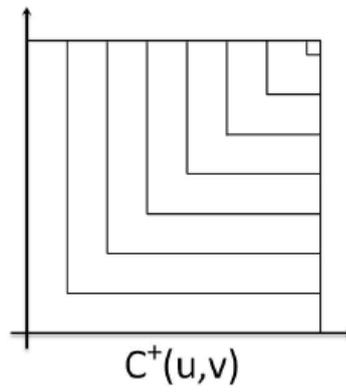


FIGURE 2.2 – contour plot de M

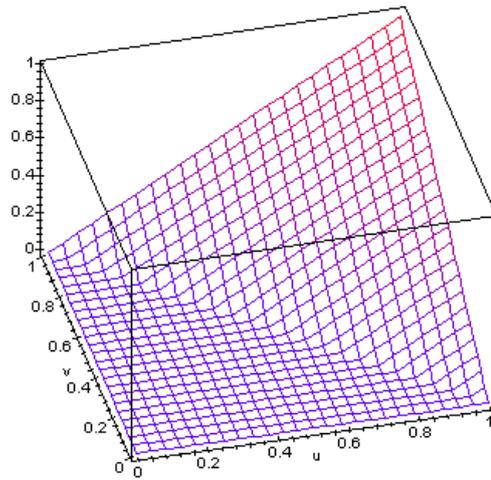


FIGURE 2.3 – Représentation de La copule W

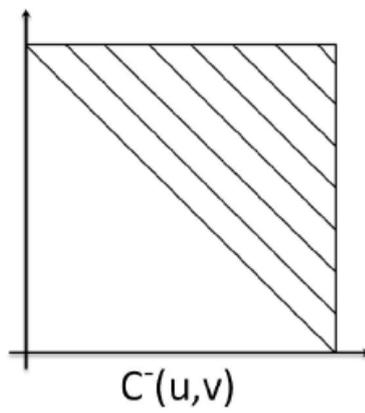


FIGURE 2.4 – contour plot de W

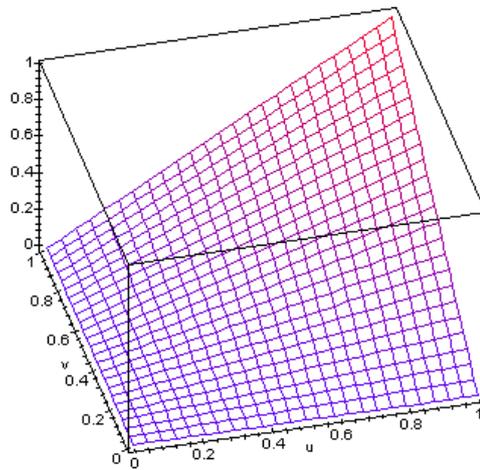


FIGURE 2.5 – Représentation de La copule Π

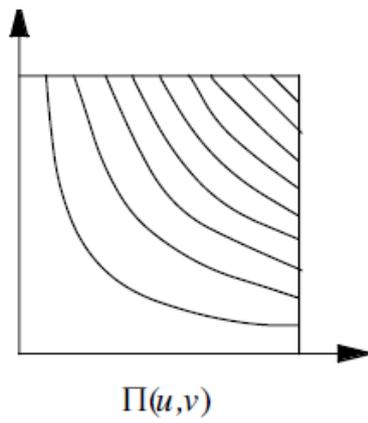


FIGURE 2.6 – contour plot de Π

2.4.3 Densité d'une copule

La densité f d'une loi bivariée peut s'écrire aussi en fonction de la densité c de la copule associée et des densités des marginales f_1 et f_2 :

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) \times f_1(x_1) \times f_2(x_2) \quad (2.2)$$

et c est la densité de la copule C définie par :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v)$$

A partir de la relation 2.2, nous pouvons calculer l'expression de la densité de la copule. Nous avons

$$c(u, v) = \frac{f(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v))}{f_1(F_1^{-1}(u)) f_2(F_2^{-1}(v))}$$

Dans le cas de la copule produit $C^\perp(u, v) = uv$ par exemple nous avons $c^\perp(u, v) = 1$. Ainsi, cette copule caractérise l'indépendance entre deux variables aléatoires puisque la densité bivariée d'un vecteur aléatoire (X_1, X_2) dont la structure de dépendance est déterminée par la copule produit s'écrit :

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \times f_2(x_2)$$

En outre, la caractéristique 2-croissante d'une copule se résume à démontrer la positivité de sa densité, lorsque celle-ci existe.

2.4.4 Relation d'ordre sur les copules

Définition 2.3 [25] Soient C_1, C_2 deux copules, On dit que C_1 est plus petite que C_2 et on note $C_1 \prec C_2$ si et seulement si

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v) \quad \forall (u, v) \in I^2$$

Cette relation d'ordre est partielle car on ne peut pas comparer toutes les copules entre elles.

Néanmoins, nous avons toujours

$$C^- \prec C \prec C^+$$

Nous en déduisons qu'une structure de dépendance positive est une fonction copule C qui vérifie l'inégalité suivante :

$$C^\perp \prec C \prec C^+$$

De même, une structure de dépendance négative est une fonction copule C qui vérifie l'inégalité suivante :

$$C^- \prec C \prec C^\perp$$

Cependant, comme cette relation d'ordre est partielle, il existe des fonctions copules C telles que $C \not\prec C^\perp$ et $C \not\prec C^\perp$. Il existe donc des fonctions copules qui ne sont ni des structures de dépendance positive, ni des structures de dépendance négative.

2.4.5 Copules et variables aléatoires

Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires de fonctions de répartition F_1 et F_2 et F la fonction de répartition du vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2)$. Nous définissons alors la copule du vecteur aléatoire (X_1, X_2) par :

$$F(x_1, x_2) = C\langle X_1, X_2 \rangle(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

Nous pouvons donner une nouvelle interprétation des copules C^-, C^\perp et C^+

- ◇ Deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont contre-monotones ou $C\langle X_1, X_2 \rangle = C^-$ s'il existe une variable aléatoire Z telle que $X_1 = f_1(Z)$ et $X_2 = f_2(Z)$ avec f_1 une fonction non-croissante et f_2 une fonction non-décroissante ;
- ◇ Deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes si la structure de dépendance est la copule produit C^\perp
- ◇ Deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont co-monotones ou $C\langle X_1, X_2 \rangle = C^+$ s'il existe une variable aléatoire Z telle que $X_1 = f_1(Z)$ et $X_2 = f_2(Z)$ avec f_1 et f_2 deux fonctions non-décroissantes.

Exemple 2.2 *Considérons par exemple un vecteur aléatoire gaussien standard $X = (X_1, X_2)$, $C\langle X_1, X_2 \rangle = C^-$ correspond au cas :*

$$X_2 = -X_1$$

alors que $C\langle X_1, X_2 \rangle = C^+$ correspond au cas :

$$X_2 = X_1$$

Si $X = (X_1, X_2)$ est un vecteur aléatoire dont les marges sont lognormales. Alors, nous avons :

$$C\langle X_1, X_2 \rangle = C^- \Leftrightarrow X_2 = \exp(-\ln X_1) = \frac{1}{X_1}$$

et

$$C\langle X_1, X_2 \rangle = C^+ \Leftrightarrow X_2 = X_1$$

Si $X = (X_1, X_2)$ est un vecteur aléatoire dont les marges sont uniformes, nous obtenons les résultats suivants :

$$C\langle X_1, X_2 \rangle = C^- \Leftrightarrow X_2 = 1 - X_1$$

et

$$C\langle X_1, X_2 \rangle = C^+ \Leftrightarrow X_2 = X_1$$

Pour ces trois exemples, nous vérifions que X_2 est une fonction décroissante de X_1 si la copule $C\langle X_1, X_2 \rangle$ est C^- et que X_2 est une fonction croissante de X_1 si la copule $C\langle X_1, X_2 \rangle$ est C^+ .

Remarque 2.1 *Les notions contre-monotonie et co-monotonie généralisent les notions de corrélation égales à -1 et +1 d'un vecteur aléatoire gaussien. C^- et C^+ sont donc les structures de dépendance respectivement la plus négative et la plus positive qui existent.*

Théorème 2.4 (Caractérisation de la copule indépendante) [26]

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires continues et $C_{X_1X_2}$ la copule associée. Alors X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $C_{X_1X_2} = \Pi$
En effet :

i. Si X_1 et X_2 sont indépendantes alors,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= F_1(x_1)F_2(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ \text{d'où} \\ C_{X_1X_2}(u, v) &= F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)), \forall u, v \in I \\ &= F_1(F_1^{-1}(u))F_2(F_2^{-1}(v)) \\ &= uv \\ &= \Pi(u, v) \end{aligned}$$

ii. Si $C_{X_1X_2} = \Pi$ alors,

$$\begin{aligned} C_{X_1X_2}(u, v) &= \Pi(u, v), \forall u, v \in I \\ &= uv \\ \text{donc} \\ F(x_1, x_2) &= C_{X_1X_2}(F_1(x_1), F_2(x_2)), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ &= \Pi[F_1(x_1)F_2(x_2)] \\ &= F_1(x_1)F_2(x_2) \end{aligned}$$

\Rightarrow les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.

2.4.6 Propriété d'invariance

L'un des théorèmes essentiels à la théorie des copules est celui de l'invariance par transformations strictement croissantes.

Proposition 2.2 Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires continues de copule $C_{X_1X_2}$, Si α et β sont deux fonctions strictement croissantes sur $Im(X_1), Im(X_2)$ respectivement alors :

$$C_{\alpha(X_1)\beta(X_2)} = C_{X_1X_2}$$

Proposition 2.3 [27] Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires continues de copule $C_{X_1X_2}$, et soient α et β deux fonctions strictement monotones, respectivement sur $Im(X_1)$ et $Im(X_2)$.

1. Si α est croissante et β décroissante alors,

$$C_{\alpha(X_1)\beta(X_2)}(u, v) = u - C_{X_1X_2}(u, 1 - v)$$

2. Si α est décroissante et β croissante alors,

$$C_{\alpha(X_1)\beta(X_2)}(u, v) = v - C_{X_1X_2}(1 - u, v)$$

3. Si α et β sont décroissantes alors,

$$C_{\alpha(X_1)\beta(X_2)}(u, v) = u + v - 1 + C_{X_1X_2}(1 - u, 1 - v)$$

Théorème 2.5 [27] Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires continues de marges F_1 et F_2 et de copule $C\langle X_1, X_2 \rangle$

Si α et β sont deux fonctions strictement croissantes sur $Im(X_1)$ et $Im(X_2)$ respectivement alors,

$$C\langle \alpha(X_1), \beta(X_2) \rangle = C\langle X_1, X_2 \rangle$$

Ainsi la copule est invariante par transformations strictement croissantes des variables aléatoires.

Nous pouvons démontrer ce théorème en utilisant les propriétés des fonctions de répartition.

Preuve 2.3 Notons respectivement F et G les fonctions de répartition conjointes des vecteurs aléatoires (X_1, X_2) et $(\alpha(X_1), \beta(X_2))$, Notons F_1, F_2 les fonctions marginales de F et G_1, G_2 les fonctions marginales de G

Nous remarquons que les marges de G sont :

$$\begin{aligned} G_1(x_1) &= P(\alpha(X_1) \leq x_1) \\ &= P(X_1 \leq \alpha^{-1}(x_1)) \\ &= F_1(\alpha^{-1}(x_1)) \quad \text{car } \alpha \text{ (est une fonction croissante)} \end{aligned}$$

et

$$G_2(x_2) = F_2(\beta^{-1}(x_2))$$

Nous avons donc $G_1^{-1}(u) = \alpha(F_1^{-1}(u))$ et $G_2^{-1}(v) = \beta(F_2^{-1}(v))$.

Nous en déduisons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} C\langle \alpha(X_1), \beta(X_2) \rangle(u, v) &= C(G_1^{-1}(u), G_2^{-1}(v)) \\ &= P(\alpha(X_1) \leq G_1^{-1}(u), \beta(X_2) \leq G_2^{-1}(v)) \\ &= P(X_1 \leq \alpha^{-1}(G_1^{-1}(u)), X_2 \leq \beta^{-1}(G_2^{-1}(v))) \\ &= P(X_1 \leq F_1^{-1}(u), X_2 \leq F_2^{-1}(v)) \\ &= C\langle X_1, X_2 \rangle(u, v) \end{aligned}$$

Exemple 2.3 Nous avons :

$$\begin{aligned} C\langle X_1, X_2 \rangle &= C\langle \ln X_1, X_2 \rangle \\ &= C\langle \ln X_1, \ln X_2 \rangle \\ &= C\langle X_1, \exp X_2 \rangle \\ &= C\langle \sqrt{X_1}, \exp X_2 \rangle \end{aligned}$$

L'application de transformations croissantes ne modifie donc pas la copule mais, seulement les lois marginales.

Ainsi, la copule de la distribution lognormale bivariée est la même que celle de la distribution normale bivariée.

2.4.7 Copules associées à une copule

1. La copule de survie

Soit X_1 une variable aléatoire de fonction de répartition F_1 , on note \bar{F}_1 la fonction de survie associée à F_1 c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}; \bar{F}_1(x_1) = P(X_1 > x_1) = 1 - F_1(x_1).$$

Par exemple si la variable aléatoire continue X_1 modélise la durée de vie d'un individu au sein d'une population alors $\bar{F}_1(x_1)$ est la probabilité que l'individu survive au delà du temps x .

De même, on peut associer à la distribution conjointe F d'un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) une fonction de répartition de survie \bar{F} par :

$$\bar{F}(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$$

dont les fonctions de répartitions marginales

$$\bar{F}_1(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2)$$

et

$$\bar{F}_2(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2)$$

Problème : Comment \bar{F} s'exprime en fonction de ses marges ?

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \bar{F}(x_1, x_2) &= P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\ &= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2) \end{aligned}$$

En effet par la probabilité élémentaire :

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \bar{F}(x_1, x_2) &= \bar{F}_1(x_1) + \bar{F}_2(x_2) - 1 + F(x_1, x_2) \\ &= \bar{F}_1(x_1) + \bar{F}_2(x_2) - 1 + C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \end{aligned}$$

donc

$$\bar{F}(x_1, x_2) = \bar{F}_1(x_1) + \bar{F}_2(x_2) - 1 + C(1 - \bar{F}_1(x_1), 1 - \bar{F}_2(x_2))$$

Soit C la copule associée à la fonction de répartition F , en considérant la fonction \hat{C} telle que :

$$\forall u, v \in I, \hat{C} = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$$

alors, on obtient

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \bar{F}(x_1, x_2) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2))$$

On vérifie que \hat{C} est une copule dite la copule de survie de C .

Remarque 2.2 Il ne faut pas confondre la copule de survie \hat{C} et la distribution de survie \bar{C} associée à C (puisque C est aussi une distribution).

On a plutot :

$$\forall u, v \in I, \bar{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v).$$

Et on peut vérifier que \hat{C} et \bar{C} sont liées par la relation :

$$\forall (u, v) \in I, \hat{C}(u, v) = \bar{C}(1 - u, 1 - v)$$

ou simplement

$$\forall u, v \in I, \hat{C}(u, v) = \bar{C}(\bar{u}, \bar{v})$$

avec

$$\bar{u} = 1 - u \text{ et } \bar{v} = 1 - v$$

2. La copule duale et la co-copule

En plus de la copule de survie \bar{C} , nous associons également à chaque copule C une copule duale \tilde{C} et une co-copule C^* qui sont définies comme suit :

Définition 2.4 La co-copule C^* associée à la copule C est donnée par :

$$C^*(u, v) = 1 - C(1 - u, 1 - v) \quad u, v \in I^2$$

et la copule duale \tilde{C} de la copule C est donnée par :

$$\tilde{C}(u, v) = u + v - C(u, v) \quad u, v \in I^2$$

Ni la co-copule ni la copule duale n'est une copule voir [10].

Cependant, la co-copule et la copule duale représentent la probabilité de $X_1 > x_1$ ou $X_2 > x_2$ et la probabilité de $X_1 \leq x_1$ ou $X_2 \leq x_2$ respectivement, en effet

$$\begin{aligned} P(X_1 > x_1 \text{ ou } X_2 > x_2) &= C^*(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2)) \\ P(X_1 \leq x_1 \text{ ou } X_2 \leq x_2) &= \tilde{C}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \end{aligned}$$

On note aussi que la co-copule de la co-copule est la copule originale, c-à-d :

$$(C^*)^* = C$$

La co-copule associée avec la copule indépendante et les bornes de Fréchet sont données pour $u, v \in I^2$ par :

$$\begin{aligned} C^{-*}(u, v) &= \min(u + v, 1) \\ C^{\perp*}(u, v) &= u + v - uv \\ C^{+*}(u, v) &= \max(u, v) \end{aligned}$$

3. La copule mixte

$$\begin{aligned} P(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2) &= F_1(x_1) - \overline{C}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \\ &= 1 - F_2(x_2) - C(1 - \overline{F}_1(x_1), 1 - \overline{F}_2(x_2)) \end{aligned}$$

d'ou $C''(u, v) = 1 - v - C(1 - u, 1 - v)$ est dite la copule mixte de C .

2.4.8 Relation de dépendance

1. Fonction de concordance

Il convient tout d'abord de rappeler la notion de concordance.

Soient (x, y) et (\tilde{x}, \tilde{y}) deux réalisations d'un vecteur aléatoire continu (X, Y) alors, (x, y) et (\tilde{x}, \tilde{y}) sont dites :

◇ concordantes si $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) > 0 \Leftrightarrow (x < \tilde{x} \text{ et } y < \tilde{y})$ ou $(x > \tilde{x} \text{ et } y > \tilde{y})$

◇ discordantes si $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) < 0 \Leftrightarrow (x < \tilde{x} \text{ et } y > \tilde{y})$ ou $(x > \tilde{x} \text{ et } y < \tilde{y})$

Définition 2.5 On appelle la fonction de concordance entre ces deux couples (X, Y) et (\tilde{X}, \tilde{Y}) la fonction Q donnée par :

$$Q = P[(X - \tilde{X}) - (Y - \tilde{Y}) > 0] - P[(X - \tilde{X}) - (Y - \tilde{Y}) < 0]$$

C'est la différence entre la probabilité de concordance et celle de discordance.

2. Les propriétés de la fonction de concordance

Théorème 2.6 [25] Soient (X, Y) et (\tilde{X}, \tilde{Y}) deux couples de variables aléatoires indépendants de fonctions de répartition conjointes F et \tilde{F} avec des marges communes F_1 et F_2 respectivement. Soient C_1 et C_2 les copules associées aux fonctions de répartition F et \tilde{F} respectivement alors,

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1$$

Preuve 2.4 On pose $u = F_1(x)$ et $v = F_2(y)$

$$\begin{aligned} Q &= P[(X - \tilde{X}) - (Y - \tilde{Y}) > 0] - P[(X - \tilde{X}) - (Y - \tilde{Y}) < 0] \\ &= P[(X - \tilde{X}) - (Y - \tilde{Y}) > 0] - (1 - P[(X - \tilde{X}) - (Y - \tilde{Y}) > 0]) \\ &= 2P[(X - \tilde{X}) - (Y - \tilde{Y}) > 0] - 1 \end{aligned}$$

avec

$$P[(X - \tilde{X}) - (Y - \tilde{Y}) > 0] = P(X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y}) + P(X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y})$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
 P(X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y}) &= P(\tilde{X} < X, \tilde{Y} < Y) \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P[\tilde{X} < x, \tilde{Y} < y] dC_1[F_1(x), F_2(y)] \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} C_2[F_1(x), F_2(y)] dC_1[F_1(x), F_2(y)] \\
 &= \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)
 \end{aligned}$$

De façon similaire

$$\begin{aligned}
 P(X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y}) &= P(\tilde{X} > X, \tilde{Y} > Y) \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P[\tilde{X} > x, \tilde{Y} > y] dC_1[F_1(x), F_2(y)] \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{F}(x, y) dC_1[F_1(x), F_2(y)] \quad \tilde{F} \text{ fonction de survie de } \tilde{F} \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \left[1 - F_1(x) - F_2(y) + C_2(F_1(x), F_2(y)) \right] dC_1[F_1(x), F_2(y)] \\
 &= \int \int_{I^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v)
 \end{aligned}$$

C_1 est la fonction de répartition du couple (U, V) d'une loi uniforme $(0, 1)$,
 $E(U) = E(V) = \frac{1}{2}$ et donc :

$$\begin{aligned}
 P(X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y}) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \\
 &= \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)
 \end{aligned}$$

Par suite :

$$Q = 4 \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1$$

Corollaire 2.2 [25] Soit C_1, C_2 et Q données par le théorème 2.6, alors,

- i. Q est symétrique c'est à dire : $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$
- ii. Q conserve l'ordre c'est à dire : Si $C_1 \prec C'_1$ et $C_2 \prec C'_2 \forall (u, v) \in I^2$ alors,

$$Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2)$$

- iii. Q est invariante par rapport à la survie c'est à dire : $Q(C_1, C_2) = Q(\widehat{C}_1, \widehat{C}_2)$

On peut aisément évaluer Q pour les trois copules usuelles W, M et Π . On trouve

$$\begin{aligned}
 Q(M, M) &= 1 \\
 Q(M, \Pi) &= -Q(W, \Pi) = 1/3 \\
 Q(M, W) &= Q(\Pi, \Pi) = 0 \\
 Q(W, W) &= -1
 \end{aligned}$$

Pour tout copule C On a :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq Q(C, M) \leq 1 \\
 -1 &\leq Q(C, W) \leq 1 \\
 \text{et} \quad \frac{-1}{3} &\leq Q(C, \Pi) \leq \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Preuve 2.5 1. Le support de la copule M est l'ensemble $D_M = \{(u, v) \in I^2 / u = v\}$ rapellons que $M(u, v) = \min(u, v)$, $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ et $\Pi(u, v) = uv$

- $Q(M, M) = 4 \int \int_{I^2} M(u, v) dM(u, v) - 1$
 $= 4 \int \int_{I^2} M(u, u) dM(u, u) - 1$ car $D_M = \{(u, v) \in I^2 / u = v\}$
 $= 4 \int_0^1 u du - 1 = 4 \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 = 1$
- $Q(M, \Pi) = 4 \int \int_{I^2} \Pi(u, v) dM(u, v) - 1$
 $= 4 \int \int_{I^2} u^2 du - 1$
 $= 1/3$
- $Q(M, W) = 4 \int \int_{I^2} W(u, v) dM(u, v) - 1$
 $= 4 \int \int_{I^2} (2u - 1) du - 1$
 $= 0$

2. De même, le support de la copule W est : $D_W = \{(u, v) \in I^2 / u = 1 - v\}$

- $Q(W, \Pi) = 4 \int \int_{I^2} \Pi(u, v) dW(u, v) - 1$
 $= 4 \int \int_{I^2} u(1 - u) du - 1$
 $= -1/3$
- $Q(W, W) = 4 \int \int_{I^2} W(u, v) dW(u, v) - 1$
 $= 4 \int \int_{I^2} 0 du - 1$
 $= -1$

3. Finalement, puisque $d\Pi(u, v) = dudv$ on a :

- $Q(\Pi, \Pi) = 4 \int \int_{I^2} \Pi(u, v) d\Pi(u, v) - 1$
 $= 4 \int \int_{I^2} uv dudv - 1$
 $= 0$

4. Pour toute copule C on a :

- $W \leq C \leq M \Rightarrow Q(W, M) \leq Q(C, M) \leq Q(M, M) \Rightarrow 0 \leq Q(C, M) \leq 1$

De la même manière, on établit que :

$$-1 \leq Q(C, W) \leq 1 \text{ et } \frac{-1}{3} \leq Q(C, M) \leq \frac{1}{3}$$

3. Mesures de concordance

Théorème 2.7 Soit κ une mesure de concordance pour des variables aléatoires continues X et Y .

1. si Y est une fonction croissante de X alors, $\kappa\langle X, Y \rangle = 1$
2. si Y est une fonction décroissante de X alors, $\kappa\langle X, Y \rangle = -1$
3. si α et β sont des fonctions strictement croissantes alors, $\kappa\langle \alpha(X), \beta(Y) \rangle = \kappa\langle X, Y \rangle$

4. Tau de Kendall et rho de Spearman

Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont deux mesures de concordance bien connues en statistique. Elles donnent une mesure de la corrélation entre les rangs des observations, à la différence du coefficient de corrélation linéaire qui mesure la corrélation entre les valeurs des observations. Elles offrent par ailleurs l'avantage de s'exprimer simplement en fonction de la copule associée au couple de variables aléatoires. Ces notions figurent dans plusieurs travaux comme Cadoux et Nelson (2006)

On commence par introduire le tau de Kendall, qui est une mesure de concordance, ainsi que ses plus importantes propriétés.

a. Tau de kendall

Définition 2.6 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et (X', Y') un vecteur indépendant mais de même loi que (X, Y) .

Le tau de Kendall de (X, Y) est défini par :

$$\tau(X, Y) = P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0]$$

Alors, tau de Kendall n'est autre que la différence entre la probabilité de concordance et la probabilité de discordance, et il vérifie les propriétés suivantes :

- ◇ Il est symétrique, c'est à dire : $\tau(X, Y) = \tau(Y, X)$
- ◇ $-1 \leq \tau \leq +1$
- ◇ Si X et Y sont co-monotones alors, $\tau = 1$ (la concordance parfaite);
- ◇ Si X et Y sont contre-monotones alors, $\tau = -1$ (la discordance parfaite);
- ◇ Si X et Y sont indépendantes alors, $\tau = 0$ (l'inverse pas forcément vraie);
- ◇ Si α et β sont des fonctions strictement croissantes, $\tau(\alpha(X), \beta(Y)) = \tau(X, Y)$

Le tau de Kendall peut être déduit à partir de la copule, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.4 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire continu de copule C .

Le tau de Kendall $\tau(X, Y)$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= Q(C, C) \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) dudv - 1 \\ &= 4E[C(U, V)] - 1 \end{aligned}$$

Preuve 2.6 *On note*

$$\begin{aligned} U &= F_X(X) \\ U' &= F_X(X') \\ V &= F_Y(Y) \\ V' &= F_Y(Y') \end{aligned}$$

dont les lois sont uniformes sur I .

On a :

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= P[(X - X')(Y - Y') \geq 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0] \\ &= 2P[(X - X')(Y - Y') \geq 0] - 1 \\ &= 2P[(X - X') \geq 0, (Y - Y') \geq 0] + 2P[(X - X') < 0, (Y - Y') < 0] - 1 \\ &= 4P[X \geq X', Y \geq Y'] - 1 \\ &= 4P[F_X(X) \geq F_X(X'), F_Y(Y) \geq F_Y(Y')] - 1 \\ &= 4P[U \geq U', V \geq V'] - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^u \int_0^1 \int_0^v c(u, v)c(u', v') du dv du' dv' - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v)c(u, v) du dv - 1 \\ &= 4E(C(U, V)) - 1 \end{aligned}$$

Si on dispose d'un échantillon d'observation de taille n de (X, Y) , $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$, on peut construire un estimateur empirique du tau de Kendall donné par :

$$\hat{\tau}_n(X, Y) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \text{sign}[(x_j - x_i)(y_j - y_i)]$$

$$\text{La fonction } \text{sign}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ -1 & \text{si } z < 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

L'autre mesure de concordance, qui est très utilisée en pratique, est le rho de Spearman. Nous donnons sa définition et quelques propriétés de cette mesure.

b. Rho de Spearman

Définition 2.7 *Le rho de Spearman de deux variables X et Y est défini par :*

$$\rho_S(X, Y) = 3\left(P[(X - \tilde{X})(Y - Y') > 0] - P[(X - \tilde{X})(Y - Y') < 0]\right)$$

où (X, Y) , (\tilde{X}, \tilde{Y}) et (X', Y') sont des couples indépendantes.

On peut exprimer le rho de Spearman en fonction du coefficient de corrélation entre deux variables uniformes. La proposition suivante montre ce résultat.

Proposition 2.5 *Le rho de Spearman de deux variables X et Y est égal au coefficient de corrélation entre les variables $F_1(X)$ et $F_2(Y)$.*

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F_1(X), F_2(Y))$$

Preuve 2.7 D'après Schweizer and Wolff (1981) on a :

$$\begin{aligned}\rho_S(X, Y) &= 12 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x, y) - F_1(x)F_2(y)] dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(F_1(X))\text{Var}(F_2(Y))}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x, y) - F_1(x)F_2(y)] dx dy\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

Le rho de Spearman peut aussi être exprimé en fonction de la copule comme le montre la proposition suivante

Proposition 2.6 Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire continue de copule C , le rho de Spearman $\rho_S(X, Y)$ a pour expressions :

$$\begin{aligned}\rho_S(X, Y) &= 3Q(C, \Pi) \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3\end{aligned}$$

Preuve 2.8 Soient $U = F_X(X)$, et $V = F_Y(Y)$ deux variables qui suivent la loi uniforme sur I . Par conséquent leurs espérances et leurs variances sont respectivement égales à :

$$\begin{aligned}E(U) &= E(V) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\text{Var}(U) &= \text{Var}(V) \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

D'une part, en utilisant la définition du coefficient de corrélation, on trouve

$$\begin{aligned}\rho_S(X, Y) &= \rho(F_1(X), F_2(Y)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(F_1(X))\text{Var}(F_2(Y))}} \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \rho(U, V) \\ &= \frac{\text{cov}(U, V)}{\sigma_U \sigma_V} \\ &= 12 \text{cov}(U, V) \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3\end{aligned}$$

2.4.9 Dépendance de queue

Le concept de dépendance de queue fournit une description de la dépendance au niveau des queues de distribution.

La dépendance de queue est une mesure locale contrairement au tau de Kendall et au rho de Spearman qui mesurent la dépendance sur l'ensemble de la distribution.

Définition 2.8 *Le coefficient de dépendance de queue inférieure "lower tail dependence coefficient" entre deux variables aléatoires X et Y , de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y , est défini par la limite λ_L si elle existe :*

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(X < F_X^{-1}(u) | Y < F_Y^{-1}(u))$$

Le coefficient de dépendance de queue supérieure "upper tail dependence coefficient" entre deux variables aléatoires X et Y , de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y , est défini par la limite λ_U si elle existe :

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(X > F_X^{-1}(u) | Y > F_Y^{-1}(u))$$

- ◇ Si $\lambda_U \in]0, 1]$ on dit que X et Y sont asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution
- ◇ Si $\lambda_U = 0$ dit que X et Y sont asymptotiquement indépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution.
- ◇ Si $\lambda_L = 0$ alors, il n'y a pas de dépendance de queue au niveau inférieure de la distribution.

On peut exprimer λ_U et λ_L à l'aide de la copule C de couple (X, Y) tel que décrit dans la proposition suivante.

Proposition 2.7 [26] *Etant donné deux variables aléatoires X et Y de copule $C(X, Y)$, on a :*

$$\begin{aligned} \lambda_L(X, Y) &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \\ \text{et} \quad \lambda_U(X, Y) &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \end{aligned}$$

Preuve 2.9 *En effet, par définition, on a :*

$$\begin{aligned} \lambda_L(X, Y) &= \lim_{u \rightarrow 0^+} P(X < F_X^{-1}(u) | Y < F_Y^{-1}(u)) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{P(X < F_X^{-1}(u), Y < F_Y^{-1}(u))}{P(Y < F_Y^{-1}(u))} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \end{aligned}$$

De même on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \lambda_U(X, Y) &= \lim_{u \rightarrow 1^-} P(X > F_X^{-1}(u) | Y > F_Y^{-1}(u)) \\
 &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{P(X > F_X^{-1}(u), Y > F_Y^{-1}(u))}{P(Y > F_Y^{-1}(u))} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - P(X \leq F_X^{-1}(u) \text{ ou } Y \leq F_Y^{-1}(u))}{1 - P(Y \leq F_Y^{-1}(u))} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - (P(X \leq F_X^{-1}(u) + P(Y \leq F_Y^{-1}(u)) - P(X \leq F_X^{-1}(u) \text{ et } Y \leq F_Y^{-1}(u)))}{1 - P(Y \leq F_Y^{-1}(u))} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - (u + u - C(u, u))}{1 - u}
 \end{aligned}$$

Exemple 2.4 Pour la copule C^+ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + \min(u, u)}{1 - u} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + u}{1 - u} \\
 &= 1 \\
 \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\min(u, u)}{u} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u}{u} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Exemple 2.5 Pour la copule C^- , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + \max(2u - 1, 0)}{1 - u} \\
 &= 0 \\
 \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\max(2u - 1, 0)}{u} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Exemple 2.6 Pour la copule produit C^\perp

$$\begin{aligned}
 \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + u^2}{1 - u} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 1^-} (1 - u) \\
 &= 0 \\
 \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^2}{u} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0^+} u \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Dans le cas des copules C^- , C^+ et C^\perp , nous avons $\lambda_L = \lambda_U$

2.5 Copule multidimensionnelle

Les résultats précédents se généralisent au cas multidimensionnel de façon assez directe. On va présenter la copule multidimensionnelle ainsi que quelques propriétés fondamentales correspondantes.

Définition 2.9 *En dimension n , une fonction de distribution F du copule C est une fonction dont le domaine de définition est $\overline{\mathbb{R}}^n$ et qui vérifie les propriétés suivantes :*

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n)$$

Définition 2.10 *Une copule n – dimensionnelle ou copule est une fonction ayant les propriétés suivantes :*

- i. *Pour tout vecteur aléatoire $u = (u_1, \dots, u_n) \in I^n$, $C(u) = 0$ si au moins une coordonnée de u est égale à 0.*
- ii. *$C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i, \forall u_i \in I, i = 1, \dots, n$*
- iii. *C est n -croissante, c'est-à-dire $\forall u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n)$ dans I^n tels que $u_i \leq v_i$, pour $i = 1, \dots, n$, on a :*

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} \times C(x_{1_{i_1}}, \dots, x_{n_{i_n}}) \leq 0$$

où $x_{1_j} = u_j$ et $x_{2_j} = v_j, \forall j \in \{1, \dots, n\}$

2.5.1 Théorème de Sklar

Le théorème de Sklar est le théorème fondamental dans la théorie des copule qui va permettre la liaison entre la densité conjointe d'un vecteur aléatoire et ses densités marginales.

Théorème 2.8 (Sklar) [11] *Soit F une fonction de répartition avec des marginales F_1, \dots, F_n alors, il existe une copule C telle que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n$*

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (2.3)$$

Si les fonctions F_1, \dots, F_n sont toutes continues alors, C est unique, sinon la copule C est déterminée de manière unique sur $Im(F_1) \times \dots \times Im(F_n)$, réciproquement, si C est un copule et F_1, \dots, F_n des fonctions de répartition univariées alors, la fonction F définie par 2.3 est la fonction de répartition conjointe de marginale F_1, \dots, F_n .

Corollaire 2.3 *Soient F, F_1, \dots, F_n , et C les fonctions définies dans le théorème 2.8 et soient $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ les inverses généralisés F_1, \dots, F_n respectivement. alors,*

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad \forall u \in I$$

Avec les inverses généralisés des lois marginales sont données par :

$$F_j^{-1}(u) = \inf\{t/F_j(t) \geq u\}$$

2.5.2 Bornes de Fréchet-Hoeffding

les bornes de Fréchet d'une copule multivariée sont données par :

$$C^-(u_1, \dots, u_n) = \max\left(\sum_{i=1}^n u_i - n + 1, 0\right)$$

et

$$C^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n)$$

On a pour toute copule C

$$W = C^-(u) \leq C(u) \leq C^+(u) = M \quad \forall u \in I^n$$

La copule produit associée à $u = (u_1, \dots, u_n)$ est exprimée comme suit :

$$C^\perp(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i$$

Il est évident que des variables aléatoires ayant cette copule sont indépendantes.

2.5.3 Densité d'une copule

Si nous supposons que les distributions marginales F_1, \dots, F_n et C sont différentiables alors, la densité jointe de la variable aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ prend la forme suivante :

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \times \dots \times f_n(x_n) c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Où pour f_k , $1 \leq k \leq n$ est la densité de probabilité dérivée de F_k , f est la densité jointe issue de F et c est la densité de la copule C définie par :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n)$$

Nous constatons ainsi que l'on peut séparer la densité jointe en deux blocs.

1. $c(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$, contient l'information sur la structure de dépendance des variables aléatoires X_1, \dots, X_n .
2. le produit des densités marginales, cela montre que les copules représentent un moyen d'extraire la structure de dépendance de la distribution jointe et de la séparer des comportements marginaux.

Il est possible donc de caractériser la densité d'une copule entièrement par la densité jointe et les densités marginales.

En effet, si on suppose que F est une fonction de répartition admettant la densité continue f alors, les lois marginales F_1, \dots, F_n sont continues et admettent des densités notées respectivement f_1, \dots, f_n et la copule de F admet la densité c définie par :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \dots f_n(F_n^{-1}(u_n))}$$

Théorème 2.9 [5] Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires continues de copule C . Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des fonctions strictement croissantes sur $Im(X_1), \dots, Im(X_n)$ respectivement, alors $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)$ ont la même copule C . Ainsi C est invariante par toute transformation strictement croissante des variables aléatoires X_1, \dots, X_n .

Preuve 2.10 Notons G_1, \dots, G_n les distributions de $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)$ respectivement et C_α la copule associée. Comme pour tout k , α_k est strictement croissante et on a :

$$G_k(x) = P[\alpha_k(X_k) \leq x] = P[X_k \leq \alpha_k^{-1}(x)] = F_k(\alpha_k^{-1}(x))$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où

$$\begin{aligned} C_\alpha(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)) &= P[\alpha_1(X_1) \leq x_1, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n] \\ &= P[X_1 \leq \alpha_1^{-1}(x_1), \dots, X_n \leq \alpha_n^{-1}(x_n)] \\ &= C(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), \dots, F_n(\alpha_n^{-1}(x_n))) \\ &= C(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)) \end{aligned}$$

Ainsi $C_\alpha = C$.

Théorème 2.10 [5] Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires continues de copule C_{X_1, \dots, X_n} . Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des fonctions strictement monotones sur $Im(X_1), \dots, Im(X_n)$ respectivement, et notons $C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}$ la copule de $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)$. Supposons par exemple que α_k est strictement décroissante pour un certain k , par exemple $k = 1$, alors, on a :

$$C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}(u_1, \dots, u_n) = C_{\alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(u_2, \dots, u_n) - C_{X_1, \alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(1 - u_1, \dots, u_n)$$

Remarque 2.3 On a pratiquement les mêmes propriétés pour la copule multidimensionnelle qui se généralisent de façon directe. Néanmoins, le cas multidimensionnel présente quelques difficultés par rapport au cas bidimensionnel.

Chapitre 3

Les copules paramétriques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va présenter quelques copules paramétriques les plus utilisées dans les cas bivariées et multivariées, ainsi que leurs propriétés accompagnées de présentation graphique.

Nous commencerons par les copules Archimédiennes qui constituent une classe très importante des copules ainsi que ses trois familles les plus connues (Frank, Clayton, Gumbel).

Puis nous présenterons la famille des copules Elliptiques, en donnant les deux exemples les plus utilisés de cette famille qui sont la copule Gaussienne et la copule de Student.

3.2 Copule Archimédienne

3.2.1 Copule Archimédienne bivariée

Les copules Archimédiennes sont indiscutablement associées au statisticien canadien Christian Genest. Ce n'est pas lui qui les a inventées, mais il est le premier à avoir adopté une analyse statistique de ces fonctions copules. Et ses nombreuses publications ont largement contribué à les faire connaître.

Définition 3.1 Soit φ une fonction continue, strictement décroissante définie de I^2 dans $[0, +\infty]$ telle que $\varphi(1) = 0$, La fonction inverse généralisée de φ , notée $\varphi^{[-1]}$ avec $\text{Dom } \varphi^{[-1]} = [0, +\infty]$ et $\text{Im } \varphi^{[-1]} = I$ est définie comme suit :

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1} & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Remarquez que $\varphi^{[-1]}$ est continue et non-croissante sur $[0, \infty]$ et strictement décroissante sur $[0, \varphi(0)]$.

En outre $\varphi(\varphi^{[-1]}(u)) = u$ sur I et

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0) & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)) \end{aligned}$$

Ainsi si $\varphi(0) = \infty$ alors, $\varphi^{-1}(t) = \varphi^{[-1]}(t)$

Théorème 3.1 Soient φ une fonction continue, strictement décroissante de I dans $[0, \infty]$ telle que $\varphi(1) = 0$ et $\varphi^{[-1]}$ la fonction inverse généralisée de φ . Soit C une fonction définie de I^2 dans I telle que :

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

Cette fonction est une Copule si et seulement si φ est convexe.

Ce type de copule est appelé Copule Archimédienne, et la fonction φ est connue sous le nom de générateur de la copule.

3.2.2 Propriétés d'une copule Archimédienne

Les copules Archimédiennes jouent un rôle important car elles présentent de nombreuses propriétés intéressantes. Par exemple, Genest et MacKay (1986) donnent une caractérisation d'une copule Archimédienne.

Théorème 3.2 [25] Soit C une copule archimédienne avec un générateur φ alors,

- ◇ C est symétrique, c'est à dire $C(u, v) = C(v, u)$
- ◇ est associative, c'est à dire $C(u, C(v, w)) = C(C(u, v), w)$ pour tout $u, v, w \in I$

Théorème 3.3 [25] Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires dont la copule C est Archimédienne avec le générateur $\varphi \in \Omega$.

Alors, le tau de kendall de X_1 et X_2 est donné par

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$$

Preuve voir [25]

Théorème 3.4 [25] Soit C une copule Archimédienne tel que $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t)$.

- ◇ Si $(\varphi^{-1})'(0)$ est finie alors,

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

n'a pas de dépendance supérieure au niveau de la queue de distribution.

- ◇ Si C présente une dépendance supérieure au niveau de la queue de distribution alors, $(\varphi^{-1})'(0) = -\infty$ et de plus on a la relation :

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\varphi^{-1})'(2s)}{(\varphi^{-1})'(s)}$$

On peut aussi citer un résultat similaire pour les indices de queue inférieurs.

Théorème 3.5 Soit C une copule Archimédienne telle que $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t)$. Le coefficient de dépendance de queue inférieure de la copule

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

est donné par :

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\varphi^{-1})'(2s)}{(\varphi^{-1})'(s)}$$

◇ La densité d'une copule Archimédienne

[25] D'après le théorème 3.2, la densité d'une copule Archimédienne, de générateur φ deux fois différentiable, est donnée par :

$$c_\alpha(u, v) = - \frac{\varphi''_X(C_\alpha(u, v)) \varphi'_X(u) \varphi'_X(v)}{(\varphi'_X C_\alpha(u, v))^3}$$

Nous allons, dans la suite de cette partie citer quelques copules parmi les plus célèbres de cette famille.

3.2.3 Les familles de copule Archimédienne

A. La famille de Frank

Soit :

$$\varphi(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}\right) \text{ avec } \alpha \neq 0$$

Nous obtenons ainsi la copule de Frank qui est définie comme suit :

$$C_\alpha(u, v) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u} - 1)(e^{-\alpha v} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)}\right)$$

◇ Le tau de kendall

Le tau de kendall correspond à cette famille donné par la formule suivante :

$$\tau(\alpha) = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^2} \int_0^\alpha \frac{t}{e^t - 1} dt$$

La figure suivante représente la densité de la copule de Frank bivariee pour $\alpha = 2$

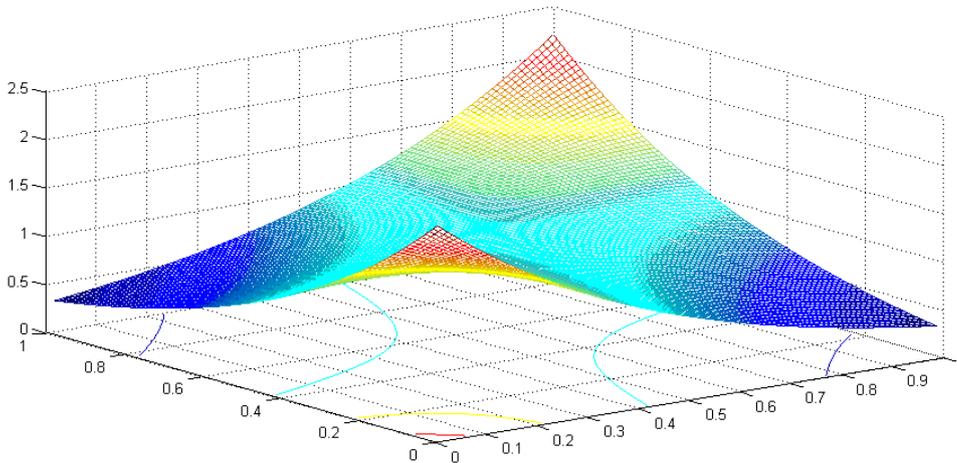


FIGURE 3.1 – Densité bivariee de la copule de Frank pour $\alpha = 2$

Remarque 3.1 *La famille de Frank n'a pas de dépendance de queue supérieure et inférieure*

B. La famille de Clayton

Soit :

$$\varphi(t) = \alpha(t^{-1/\alpha} - 1) \text{ avec } \alpha > 0$$

Nous obtenons ainsi la copule de Clayton :

$$C_\alpha(u, v) = (u^{-1/\alpha} + v^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha}$$

◇ **La densité**

La dérivée première par rapport à u s'écrit :

$$C_1(u, v) = u^{1-1/\alpha} \left[u^{-1/\alpha} + v^{-1/\alpha} - 1 \right]^{\alpha-1}$$

et ainsi la densité s'exprime comme suit :

$$c(u, v) = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) (uv)^{-1-1/\alpha} (u^{-1/\alpha} + v^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha-2}$$

◇ **Le tau de kendall**

Le tau de kendall pour la copule de clayton est donné par :

$$\tau(\alpha) = 1/(2\alpha + 1)$$

◇ **Dépendance de queue**

Considérons la famille de Clayton $C_\alpha(u, v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha})^{-1/\alpha}$ avec $\alpha \leq 0$.

On a pour cette famille $\varphi(t) = \alpha^{-1}(t^{-\alpha} - 1)$. Il vient donc $\varphi^{-1}(t) = (1 + \alpha t)^{-1/\alpha}$ d'où le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_L &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{-(1 + 2\alpha s)^{-1/\alpha-1}}{-(1 + \alpha s)^{-1/\alpha-1}} \right] \\ &= 2^{-1/\alpha} \end{aligned}$$

La figure suivante illustre la densité bivariable de la copule de Clayton pour $\alpha = 0,5$.

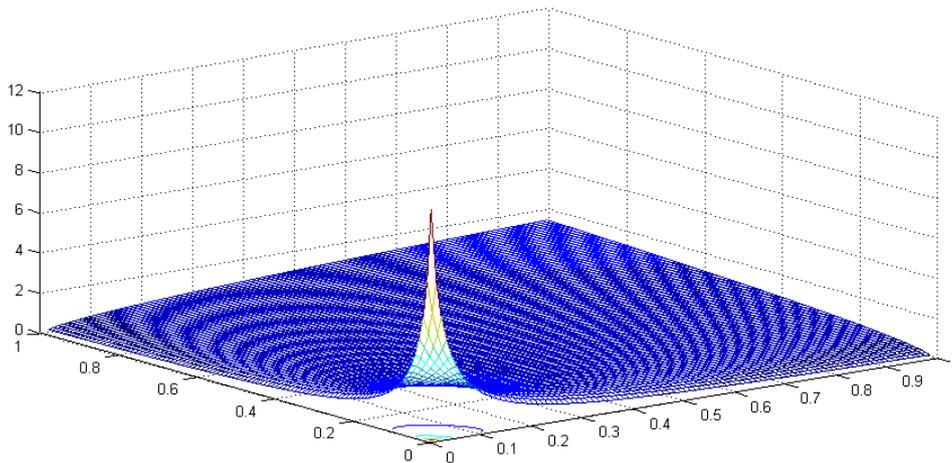


FIGURE 3.2 – Densité bivariable de la copule de Clayton $\alpha = 0,5$

C. La famille de Gumbel

Prenons comme générateur

$$\varphi(t) = (-\ln(t))^\alpha \quad \alpha \geq 1$$

La fonction copule associée est donnée par l'expression suivante :

$$C_\alpha(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln(u))^\alpha + (-\ln(v))^\alpha\right]^{1/\alpha}\right)$$

◇ La densité

La dérivée s'écrit comme suit :

$$C_1(u, v) = C(u, v)\left[(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha\right]^{-1+1/\alpha}(-\ln u)^{\alpha-1}/u$$

Et la densité :

$$\begin{aligned} c(u, v) &= C(u, v)u^{-1}v^{-1}\left[(-\ln u)^\alpha(-\ln v)^\alpha\right]^{-2+2/\alpha}\left[(\ln u)(\ln v)\right]^{\alpha-1} \\ &\times \left\{1 + (\alpha - 1)\left[(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha\right]^{-1/\alpha}\right\} \end{aligned}$$

◇ Le tau de kendall

Le tau de kendall pour la famille de Gumbel est défini par :

$$\tau(\alpha) = 1 - 1/\alpha$$

◇ Dépendance de queue

Considérons la famille de Gumbel, rappelons que $\varphi(t) = (-\ln(t))^\alpha$ avec $\alpha \geq 1$. On a bien $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t)$. On peut donc appliquer le théorème (3.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 - 2^{1/\alpha} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\exp\left(- (2s)^{1/\alpha}\right)}{\exp\left(- (s)^{1/\alpha}\right)} \right] \\ &= 2 - 2^{1/\alpha} \end{aligned}$$

De même on a $\lambda_L = 0$

La figure suivante correspond à la densité de la copule de Gumbel bivariée pour $\alpha = 2$.

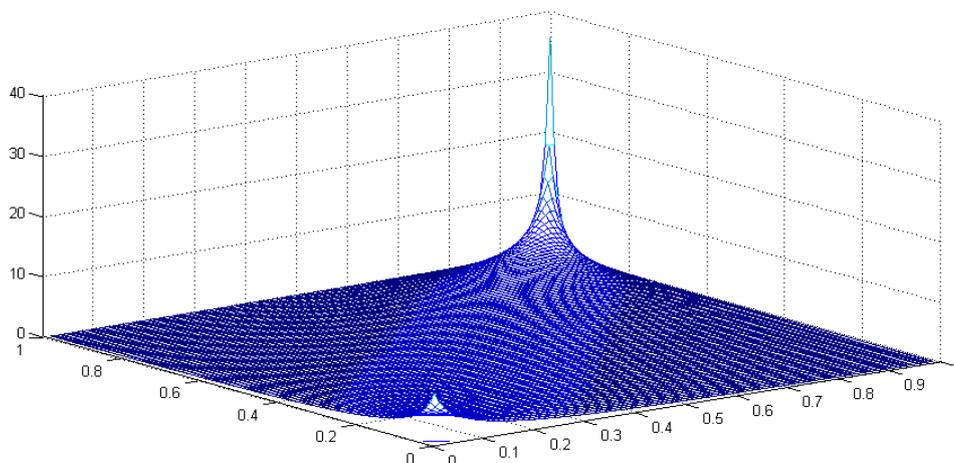


FIGURE 3.3 – Densité de la copule de Gumbel bivariée pour $\alpha = 2$

Le tableau suivant résume les différentes familles de copules Archimédiennes bivariées :

Copule	Générateur	Copule bivariée
Frank ($\alpha \neq 0$)	$-\ln\left(\frac{e^{-\alpha t}-1}{e^{-\alpha}-1}\right)$	$-\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u}-1)(e^{-\alpha v}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right)$
Gumbel ($\alpha \geq 1$)	$(-\ln(t))^\alpha$	$\exp\left(-\left[(-\ln(u))^\alpha + (-\ln(v))^\alpha\right]^{1/\alpha}\right)$
clyton $\alpha > 0$	$\alpha(t^{-1/\alpha} - 1)$	$(u^{-1/\alpha} + v^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha}$

TABLE 3.1 – Copules Archimédiennes bivariées

3.3 Copule Elliptique

Les copules elliptiques sont définies à partir des lois de distribution elliptique. Dans ce qui suit, nous donnons quelques définitions de la distribution elliptique ainsi que deux exemples classiques de cette famille de copules qui sont la copule Gaussienne et la copule de Student.

Définition 3.2 [27] *Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est de distribution elliptique s'il admet la représentation suivante :*

$$X = \mu + RAU$$

où,

- ◇ $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$.
- ◇ U est un vecteur aléatoire uniforme sur la sphère unité de \mathbb{R}^n

- ◇ R est un vecteur aléatoire indépendant de U .
- ◇ A est une matrice de dimension $n \times n$ telle que $\Sigma = AA^T$ est non singulière.

Définition 3.3 La fonction de densité d'une distribution elliptique (si elle existe) est donnée par :

$$f(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)), x \in \mathbb{R}^n$$

où g est une fonction définie de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , dite génératrice de densité.

Définition 3.4 [14] Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de distribution elliptique. La fonction caractéristique $\phi_X(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= E(\exp it^T X) \\ &= E(\exp(it^T \mu + RAU)) \\ &= \exp(it^T \mu) g(t^T \Sigma t) \end{aligned}$$

Notons par $X \sim E_n(\mu, \Sigma, g)$ la classe de la distribution elliptique de vecteur moyenne μ , de matrice de covariance $\Sigma = (\delta_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ et de générateur caractéristique g . La copule associée aux distribution elliptique s'appelle la copule elliptique et son expression es donné par :

$$C(u_1, \dots, u_n) = F\left(F^{-1}(u_1), \dots, F^{-1}(u_n)\right)$$

3.3.1 La copule Gaussienne

La copule gaussienne fait partie de la famille des copules elliptique. L'importance de cette copule réside dans le fait qu'elle est sous-jacente à la distribution normale multivariée.

A. La copule Gaussienne bivariée

Définition 3.5 La copule Gaussienne bivariée est définie de la façon suivante :

$$C(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$$

- ◇ ρ est une matrice symétrique définie positive avec $\text{diag} \rho = 1$
- ◇ Φ_ρ la distribution normale bivariée standard de matrice de corrélation ρ

la copule Gaussienne bidimensionnelle est donnée par :

$$C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left(-\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\rho\beta_1\beta_2}{2(1 - \rho^2)} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2}\right) dx_1 dx_2$$

Nous en déduisons que sa densité s'écrit :

$$c(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left(-\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\rho\beta_1\beta_2}{2(1 - \rho^2)} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2}\right)$$

$\rho \in (-1, 1)$

Avec $\beta_1 = \Phi^{-1}(x_1)$ et $\beta_2 = \Phi^{-1}(x_2)$. Si nous utilisons la décomposition canonique d'une distribution bivariée, une autre expression de C est :

$$C(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{2(1 - \rho^2)}\right) dx_1 dx_2$$

La figure suivante illustre la densité de la copule gaussienne bivariée pour une corrélation = 0,5

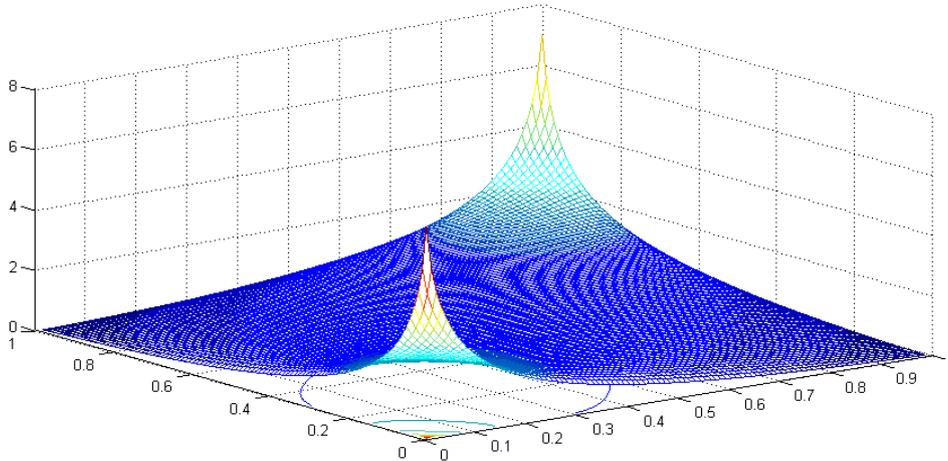


FIGURE 3.4 – Densité de la copule gaussienne pour une corrélation de 0.5

C. Les propriétés de la copule Gaussiennes

◇ Tau de kendall et Rho de spearman

Nous pouvons montrer que le tau de Kendall d'une copule Gaussienne est donné par :

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$$

et le rho de Spearman par :

$$\rho = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

Remarque 3.2 La copule gaussienne est d'une relation d'ordre positive, on a :

$$C_{\rho=-1} \prec C_{\rho<0} \prec C_{\rho=0} \prec C_{\rho>0} \prec C_{\rho=1}$$

$$C_{\rho=-1} = C^-, \quad C_{\rho=1} = C^+ \quad \text{et} \quad C_{\rho=0} = C^\perp$$

◇ Dépendance de queue

Cette copule n'a pas de dépendance de queue ($\lambda_L = \lambda_U = 0$), sauf pour une corrélation parfaite de 1 c'est à dire :

$$\lambda_L = \lambda_U = \begin{cases} 0 & \text{Si } \rho < 1 \\ 1 & \text{Si } \rho = 1 \end{cases}$$

Une autre famille de copules elliptiques très utilisée est celle de Student.

3.3.2 La copule de Student

la copule de student (ou la t -copule) est la fonction de dépendance associée à la fonction de répartition de student multidimensionnelle.

A. La copule Student bivariée

Définition 3.6 *La copule Student bivariée est définie de la façon suivante :*

$$C(u, v; \rho, \nu) = t_{\rho, \nu}(t_{\nu}^{-1}(u), t_{\nu}^{-1}(v))$$

Avec ρ la matrice de corrélation symétrique définie positive, $t_{\rho, \nu}^{-1}$ la distribution de Student bivariée standard de matrice de corrélation ρ et de ν degré de liberté .

La fonction de student bivariée est donnée par :

$$t_{\nu}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{\beta^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} d\beta$$

Nous en déduisons que sa densité s'écrit :

$$t_{\nu, \rho}(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\rho\beta_1\beta_2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} d\beta_1 d\beta_2$$

La copule de student bivariée est donnée par :

$$C_{\nu, \rho}(u, v) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\rho\beta_1\beta_2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} d\beta_1 d\beta_2$$

avec $0 < \rho < 1$

La densité de la copule stude s'écrit par :

$$\begin{aligned} c_{\nu, \rho}(u) &= \rho^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right)^2} \left(1 + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\rho\beta_1\beta_2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \\ &\times \left(1 + \frac{\beta_1}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \left(1 + \frac{\beta_2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \end{aligned}$$

D'où $\beta_1 = t_{\nu}^{-1}(u)$ et $\beta_2 = t_{\nu}^{-1}(v)$.

La figure suivante illustre la densité de la copule de Student bvariée pour une corrélation = 0,5 et un degrés de liberté $\nu = 14$

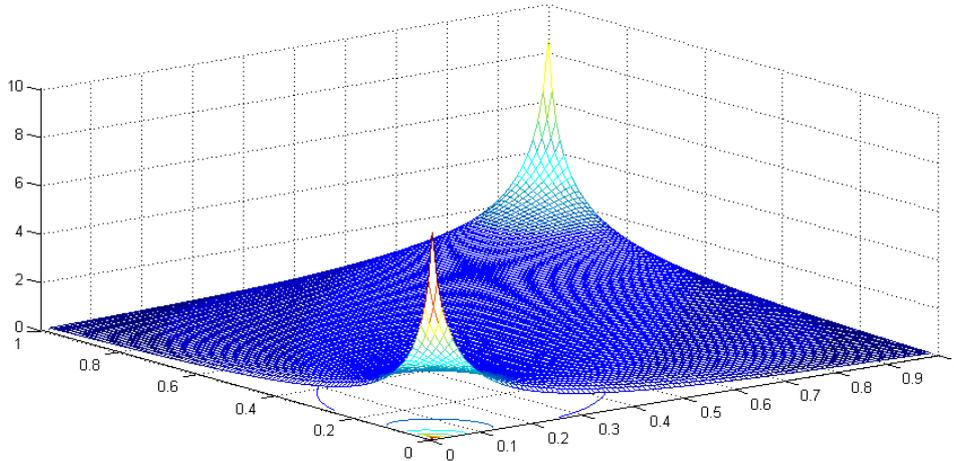


FIGURE 3.5 – Densité de la copule de Student pour une corrélation de 0.5 et un nombre de degrés de liberté $\nu = 14$

C. Les propriétés de la copule student

◇ Tau de kandell et Rho de spearman

le tau de Kendall de la copule Student est exactement le même que celui de la copule gaussienne .

Remarque 3.3 La copule de student est d'une relation d'ordre positive, on a :

$$C_{\nu,1} = C^+ \text{ et } C_{\nu,-1} = C^- \text{ néanmoins, } C_{\nu,0} \neq C^\perp$$

◇ Dépendance de queue

Comme la copule Student est symétrique, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} P\{U_2 > u | U_1 = u\} \\ &= 2 - 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} t_{\nu+1} \left(\left(\frac{\nu+1}{\nu + [t_\nu^{-1}(u)]^2} \right) \frac{t_\nu^{-1}(u) - \rho t_\nu^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \\ &= 2 - 2t_{\nu+1} \left(\left(\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{(1+\rho)} \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\lambda_U : \begin{cases} > 0 & \text{Si } \rho > -1 \\ 0 & \text{Si } \rho = -1 \end{cases}$$

Chapitre 4

Estimation des copules

4.1 Introduction

L'estimation en statistiques est une opération qui permet de calculer la valeur inconnue d'un paramètre α du modèle statistique à partir d'un échantillon observé (X_1, \dots, X_n) .

Il existe plusieurs méthodes d'estimation paramétriques telle que la méthode du maximum de vraisemblance (méthode classique), la méthode des moments...etc, et non paramétrique tel que la copule empirique et comme les copules sont des fonctions de répartition paramétrique comme on a vu dans le troisième chapitre, alors on a besoin d'estimer ces paramètres.

4.2 Estimation paramétrique

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire avec des fonctions de répartition marginale univariée $F_j(x_j, \delta_j)$, $j = 1, \dots, n$.

Soit C une copule appartenant à une famille paramétrique $C = \{C_\theta, \theta \in \Theta\}$ D'après le théorème de Sklar la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C\{F_1(x_1; \delta_1), \dots, F_n(x_n; \delta_n); \theta\}$$

et sa densité par :

$$f(x_1, \dots, x_n; \delta_1, \dots, \delta_n, \theta) = c\{F_1(x_1; \delta_1), \dots, F_n(x_n; \delta_n); \theta\} \prod_{j=1}^n f_j(x_j; \delta_j)$$

avec

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1, \dots, \partial u_n}$$

Pour un échantillon d'observation $\{x_k\}_{k=1}^K$, $x_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)^\top$ et le vecteur des paramètres $\alpha = (\delta_1, \dots, \delta_n, \theta)^\top \in \mathbb{R}^{t+1}$, la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(\alpha; x_1, \dots, x_K) = \prod_{k=1}^K f(x_1^k, \dots, x_n^k; \delta_1, \dots, \delta_n, \theta)$$

La fonction de log-vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} l(\alpha; x_1, \dots, x_K) &= \sum_{k=1}^K \log c\{F_1(x_1^k; \delta_1), \dots, F_n(x_n^k; \delta_n); \theta\} \\ &+ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^n \log f_j(x_j^k; \delta_j). \end{aligned}$$

4.2.1 Maximum de vraisemblance (MLE)

Définition 4.1 [11] Dans l'estimation par la méthode de maximum de vraisemblance, le vecteur des paramètres α est estimé par une seule étape :

$$\hat{\alpha}_{MLE} = \arg \max l(\alpha)$$

l'estimateur $\hat{\alpha}_{MLE} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_n, \hat{\theta})^\top$ résolue par :

$$\left(\partial l / \partial \delta_1, \dots, \partial l / \partial \delta_n, \partial l / \partial \theta \right) = \mathbf{0}$$

4.2.2 Inférence sur les marginales (IMF)

La méthode de l'inférence sur les marginales a été proposée par Joe (1996) . Elle repose sur le fait que la représentation en copule permet de séparer les paramètres spécifiques des distributions marginales de ceux de la structure de dépendance. Ainsi, la log-vraisemblance peut s'écrire de la manière suivante :

$$l(\delta) = \sum_{k=1}^K \log c(F_1(x_1^k, \delta_1), \dots, F_n(x_n^k, \delta_n); \theta) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^n \log f_j(x_j^k; \delta)$$

où $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n, \theta)$ le vecteur des paramètres contient les paramètres δ_j de chaque marginale et les paramètres θ de la copule.

L'estimation s'effectue en deux étapes :

1. On estime les paramètres les lois marginale

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_j &= \arg \max l_j(\delta_j) \\ &= \arg \max \sum_{k=1}^K \log f_j(x_j^k; \delta_k) \end{aligned}$$

2. On estime θ en tenant compte des estimateurs précédents par la maximisation de la fonction suivante :

$$l(\theta, \hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_n) = \sum_{k=1}^K \log c(F_1(x_1^k, \hat{\delta}_1), \dots, F_n(x_n^k, \hat{\delta}_n); \theta)$$

le paramètre de dépendance estimer $\hat{\theta}$ est donné par :

$$\hat{\alpha}_{IFM} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_n, \hat{\theta})^T$$

résolu par :

$$\left(\partial l / \partial \delta_1, \dots, \partial l / \partial \delta_n, \partial l / \partial \theta \right) = \mathbf{0}$$

4.2.3 La méthode des moments

Cette méthode consiste à estimer les paramètres $\theta_i, i = 1, \dots, d$ des lois marginales et le paramètre α de la copule par la méthode des moments c'est à dire :

1. Résoudre le système à d équations et d inconnues

$$\begin{cases} \overline{X_n} &= f(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ S_n^2 &= g(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ \mu_{3,n} &= h(\theta_1, \dots, \theta_d) \end{cases}$$

où d désigne la dimension de θ , f , g et h sont les expressions des moments (ordinaires) d'ordre 1, 2 et 3 en fonction du paramètre θ_i . Répéter cette étape pour toutes les marginales

2. Inverser le tau de Kendall ou le rho de Spearman pour obtenir le paramètre α de la copule.

Exemple 4.1

Pour la copule de Gumbel de paramètre θ , on a :

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$$

Nous en déduisons que :

$$\theta = \frac{1}{1 - \tau}$$

Si nous avons une estimation $\hat{\tau}$ du tau de kendall, nous pouvons obtenir une estimation du paramètre de la copule en posant :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1 - \hat{\tau}}$$

Dans le cas général, on a l'estimateur non paramétrique du tau de kendall est donné par :

$$\hat{\tau} = \frac{c - d}{c + d}$$

où c et d sont respectivement le nombre de paires disjointes concordantes et discordantes.

4.3 Estimation semi paramétrique

4.3.1 Maximum de vraisemblance canonique

[11] Dans la méthode de maximum de vraisemblance canonique, la distribution marginale univariée est estimée à partir de la fonction empirique \hat{F} pour $j = 1, \dots, n$

$$\hat{F}_j(x) = \frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^K \mathbb{I}(x_j^k \leq x)$$

où \mathbb{I} est la fonction indicatrice. la fonction de log-vraisemblance est :

$$l(\theta) = \sum_{k=1}^K \log c\{\hat{F}_1(x_1^k), \dots, \hat{F}_n(x_n^k); \theta\}$$

et le paramètre de la copule estimer $\hat{\theta}_{CML}$ est donnée par :

$$\hat{\theta}_{CML} = \arg \max l(\theta)$$

4.4 Estimation non paramétrique

4.4.1 Copule empirique

Définition 4.2 Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon de taille n de loi F . Si on donne $(x_1^k, \dots, x_n^k)_{1 \leq k \leq K}$ un K -échantillon du vecteur X (de dimension n), on peut généraliser l'expression de la fonction de répartition empirique :

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbb{I}_{\{X_1^k \leq x_1, \dots, X_n^k \leq x_n\}}$$

$$\mathbb{I}_{\{X_i \leq x\}} = \begin{cases} 1 & \text{Si } X_i \leq x \\ 0 & \text{Si non} \end{cases}$$

Deheuvels (1979) a introduit la copule empirique connues aussi sous l'appellation fonction empirique de dépendance, qui sont utilisées pour construire des tests non paramétriques pour l'indépendance.

Cas bivarié

Définition 4.3 Soit $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ un échantillon de taille n d'un copule de variables aléatoires. La copule empirique de la fonction de répartition est donnée par :

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{\text{Nombres des paires } (x, y) \text{ dans l'échantillon tels que } x \leq x_{(i)} \text{ et } y \leq y_{(j)}}{n}$$

où $x_{(i)}$ et $y_{(j)}$ représentent les statistiques d'ordre associées à l'échantillon.

La fonction densité empirique de la copule C notée \hat{c} est donnée par :

$$\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } (x_{(i)}, y_{(j)}) \text{ est un élément de l'échantillon} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Elle est parfois appelée «Fréquence empirique de la copule», il existe une relation entre \hat{C} et \hat{c} donnée par :

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j \hat{c}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$$

et

$$\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) - \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) + \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right)$$

Cas multivariée

Définition 4.4 [22] Soit $\{(x_1^k, \dots, x_n^k)\}_{k=1}^K$ un échantillon. la copule empirique de la fonction de répartition dans le cas multivarié est donnée par :

$$\hat{C}\left(\frac{k_1}{K}, \dots, \frac{k_n}{K}\right) = \frac{1}{K} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}_{\{x_1^k \leq x_1^{(k_1)}, \dots, x_n^k \leq x_n^{(k_n)}\}}$$

où $x_n^{(k)}$ représente la statistique d'ordre et $1 \leq k_1, \dots, k_n \leq K$. La fréquence de la copule empirique est :

$$\hat{c}\left(\frac{k_1}{K}, \dots, \frac{k_n}{K}\right) = \begin{cases} \frac{1}{K} & \text{si } (x_1^{(k_1)}, \dots, x_n^{(k_n)}) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

on a la relation suivante entre la copule empirique et sa fréquence

$$\hat{C}\left(\frac{k_1}{K}, \dots, \frac{k_n}{K}\right) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \hat{c}\left(\frac{i_1}{K}, \dots, \frac{i_n}{K}\right)$$

Les copules empiriques peuvent être utilisées pour estimer les mesures de dépendance. On peut ainsi proposer l'estimateur suivant du ρ de Spearman dans le cas bivarié :

$$\hat{\rho} = \frac{12}{n^2 - 1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \frac{ij}{n^2} \right)$$

4.4.2 Méthode de Genest et Rivest

Dans le très célèbre article de Genest et Rivest (1993), une méthode originale d'identification d'une copule Archimédienne a été proposé.

Ils considèrent la fonction \mathbf{K} définie par :

$$\mathbf{K}(u) = P\{C(U, V) \leq u\}$$

Ils montrent que dans le cas d'une copule Archimédienne de générateur φ , nous avons

$$\mathbf{K}(u) = u - \varphi(u)/\varphi'(u)$$

La connaissance de \mathbf{K} permet de spécifier complètement la copule Archimédienne, puisque \mathbf{K} "contient toute l'information" sur φ . Genest et Rivest proposent alors de sélectionner la copule Archimédienne en comparant $\mathbf{K}(u)$ avec un estimateur empirique de $\mathbf{K}(u)$ défini de la façon suivante :

$$\widehat{\mathbf{K}}(u) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{I}_{\{v_j \leq u\}}$$

avec

$$\widehat{V}_k = \frac{1}{K-1} \sum_{j=1}^K \mathbb{I}_{\{x_j^1, x_k^1, x_j^2, x_k^2\}}$$

La fonction \mathbf{K} est liée au τ de Kendall par :

$$\tau = 4 \int_0^1 (1 - \mathbf{K}(u)) du - 1$$

Pour plus de détails sur cette méthode voir [10] ou [12]

Chapitre 5

Application des copules en finance

5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de montrer l'importance et l'utilité de la théorie mathématique que les copules apportent à la finance de marché.

5.2 Définition de risque

[19] Le risque est défini comme la possibilité de survenance d'un événement ayant des conséquences négatives. Il se réfère par nature à un danger, inconvénient, auquel on est exposé. Il est considéré comme la cause d'un préjudice.

Dans le langage courant, le risque a une connotation négative car on oppose "le risque d'échec" à "l'opportunité d'un succès". Cependant, le risque est associé à une situation de faible probabilité ; si celle-ci était élevée, on utiliserait, plus justement le terme "danger". Ainsi, le risque est considéré comme une contingence négative et peu probable.

En économie, un risque exprime une probabilité statistique de survenance d'un événement non désiré.

5.2.1 Les types de risque

1. **Risques de crédit** : Les risques de crédit proviennent principalement de deux sources.
Premièrement, ils traduisent les risques qu'une contrepartie ne respecte pas ses engagements contractuels (par exemple : une faillite). Deuxièmement, les risques de crédit comprennent les réductions de valeur d'instruments financiers émis par des tiers.
2. **Risque de marché** : Même si les rendements de certains fonds de couvertures sont isolés des rendements des marchés il peut persister un risque résiduel lié aux mouvements des marchés financiers, ce risque résiduel, par exemple, peut-être causé par un déséquilibre entre les positions longues et les positions de découvert, ou même, certaines positions de marché. Il ne faut pas oublier que lors de baisses importantes de marchés les corrélations ont tendance à augmenter. (Une raison de plus d'utiliser les copules dans un budget de risques).
3. **Risque de liquidité** : Les fonds de couvertures peuvent être investis dans des titres dont la liquidité est inexistante cela présente un risque pour les participants de ce fonds. Ce risque se transmet aux investisseurs dans le sens qu'il est difficile sinon impossible de retirer ses fonds.
4. **Le risque opérationnel** : Dans cette catégorie sont regroupés, les risques de fraude, d'erreurs d'opérateur, de pannes de système, etc...

5.2.2 Mesure de risque

[7] Les mesures de risques sont des outils de quantification de risque. Elle permettent d'évaluer un niveau de dangerosité d'un risque mais également de comparer les différents risques et de les classer selon le niveau de dangerosité.

5.2.3 Propriétés d'une Mesure de risque

Une mesure de risque doit pouvoir vérifier un certain nombre de propriétés élémentaires. A ce jour, il n'existe pas de consensus dans la littérature actuarielle sur les propriétés que doit nécessairement respecter une mesure de risque. Pour deux risques quelconques X et Y , les propriétés suivantes peuvent être formulées :

1. Invariance par translation

$\rho(X + c) = \rho(X) + c$, pour toute constante c . Si on ajoute (respectivement on retranche) un montant certain c au résultat d'un centre de profit, le besoin en capital décroît (respectivement augmente) du même montant.

2. Sous-additivité

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

La fusion de deux centres de profit ne crée pas de risque supplémentaire. Au contraire, la diversification tend à réduire le risque global. Cette propriété permet ainsi une gestion décentralisée du besoin en capital dans les différents centres de profit sans courir le risque d'un besoin global supérieur à la somme des besoins individuels de chacun des centres. Si cette propriété n'était pas respectée, une société ne respectant pas un certain niveau requis de capital pourrait être incitée à se scinder artificiellement en deux entités afin de réduire son besoin en capital.

3. Homogénéité positive

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \forall \lambda \geq 0$$

De même qu'une fusion ne crée pas de risque supplémentaire ($\rho(\lambda X) \leq \lambda \rho(X)$), une fusion sans diversification ne réduit pas le besoin global en capital.

4. Monotonie

$$X \leq Y \implies \rho(X) \geq \rho(Y)$$

Si les pertes encourues avec le risque X sont toujours supérieures à celles obtenues avec Y le besoin en capital pour X doit être supérieur à celui pour Y .

5. Propriété de borne supérieure

$$\rho(X) \leq \max(-X)$$

le besoin en capital est borné par la perte maximale possible.

Il existe d'autres propriétés qui ne sont pas présentées car elles sont plus spécifiques au calcul du chargement de la cotisation.

5.2.4 La valeur en risque

Définition 5.1

[31] La Value-At-Risk représente la perte potentielle maximale d'un investisseur sur la valeur d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs financiers qui ne devrait être atteinte qu'avec une probabilité donnée sur un horizon donné.

[14] Elle est, en d'autres termes, la pire perte attendue sur un horizon de temps donné pour un certain niveau de confiance.

La VaR peut être considérée comme un quantile de la distribution de pertes et profits associée à la détention d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs sur une période donnée pour un certain niveau de probabilité $1 - \alpha$. On a donc :

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(K) &= \inf\{k : P(K > k) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{k : 1 - F_K(k) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{k : F_K(k) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

tel que K une variable aléatoire de fonction de répartition F_K .

De manière pratique, la mise en œuvre de la VaR consiste à faire varier la probabilité α et à déterminer le capital minimal associé en début de période qui permette de faire face à la perte maximale en fin de période. On obtient donc rétrospectivement le niveau de capital en deçà duquel l'organisation est en ruine avec une probabilité supérieure à α .

La VaR utilisée dans ce contexte n'est autre que la probabilité de ruine évoquée plus haut. L'avantage de la VaR est d'être un concept simple et facile à calculer. Elle vérifie les propriétés d'invariance par transformation, d'homogénéité positive, de monotonie, de borne supérieure.

En revanche, elle n'est pas sous-additive et ne tient pas compte de la sévérité de la ruine, ce qui constitue la critique la plus souvent formulée à son égard. Cependant cette mesure de risque peut faire sens dans un objectif de solvabilité.

5.2.5 La Valeur en Risk dépend en réalité de trois éléments

1. **La distribution des pertes et profits du portefeuille :** valable pour une certaine période de détention et dont les différentes méthodes de calcul seront expliquées un peu plus loin dans cette fiche.
2. **Le niveau de confiance :** Compris entre 0 et 1, il permet de contrôler la probabilité que l'on obtienne un rendement supérieur ou égal à la VaR. Supposons par exemple que la distribution des pertes et profits associée à la détention d'un actif sur une période corresponde à une distribution normale standard.

La VaR au seuil de confiance de 95% à 1 jour notée $VaR(95\%, 1\text{Jour})$, égale à 1 million d'euros signifie qu'il y a 95% de chances pour que la perte associée à la détention de l'actif n'excède pas 1 million d'euros.

Graphiquement, la VaR un jour avec un indice de confiance de 95% peut être représentée par le graphique ci-dessous :

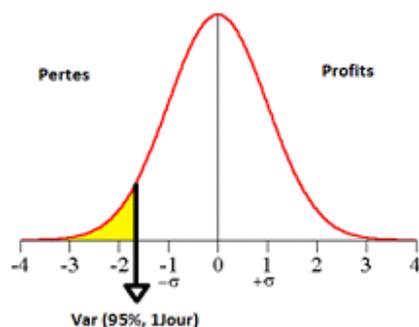


FIGURE 5.1 – Graphique de Value at Risk

D'après ce graphique, la $VaR(95\%, 1\text{Jour})$ correspond à une perte approximative de 1,65 million d'euros.

3. **La période de détention de l'actif :** Le calcul de la VaR doit être ajusté de façon à tenir compte de la composition des rendements. Même si la période de détention est propre à chacun, les autorités de régulation exigent des horizons communs dans le cadre des procédures de validation de la Value at Risk.

Pour finir ce chapitre, nous allons étudier comment nous pouvons appliquer les copules dans la VaR.

Soient deux variables aléatoires X et Y de fonctions de répartition F_1 et F_2 respectivement. On suppose qu'on ne connaît pas la structure de dépendance du modèle (la copule). On va énoncer un théorème dû à Makarov (voir [25][11]) et qui va nous permettre d'avoir une borne supérieure pour $VaR(X + Y)$

Théorème 5.1 Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a

$$P[X + Y \leq k] \geq \sup_{x+y=k} C^-(F_1(x), F_2(y)) = F(k)$$

Soit $F^{-1}(\alpha) = \inf\{k | F(k) \leq \alpha\}$, $\alpha \in I$, l'inverse généralisé de F . Alors,

$$F^{-1}(\alpha) = \inf_{M(u,v)=\alpha} \{F_1^{-1}(u) + F_2^{-1}(v)\}$$

On en déduit immédiatement que :

$$VaR_\alpha(X + Y) \leq F^{-1}(\alpha)$$

Cette borne est la meilleure possible.

5.2.6 Définition de Portefeuille

Un Portefeuille est un ensemble d'actifs financiers détenus par un investisseur. Ces actifs peuvent provenir de différentes classes : actions, obligations, produits dérivés, matières premières, fonds, cash, etc.

5.3 La gestion de risque en utilisant la copule

Dans cette section on va présenter les principales étapes pour estimer la VaR pour un portefeuille en utilisant la copule.

5.3.1 Calcul la VaR par la copule

[21] Soit $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ un portefeuille de position qui se compose de n capitaux (l'attribution des capitaux) et $S_t = (S_{1,t}, \dots, S_{n,t})^\top$ le vecteur aléatoire non négatif représentant les prix des capitaux à l'instant t . La valeur V_t du portefeuille est donné par :

$$V_t = \sum_{i=1}^n \omega_i S_{i,t}$$

Les prix des actifs dans l'économétrie financière sont considérés comme des variables aléatoires. La valeur d'un portefeuille V_t au temps t est également une variable aléatoire.

Soit une période du temps τ , le profit dans l'intervalle $[t, t + \tau]$ est donnée par $(V_{t+\tau} - V_t)$. La distribution de $(V_{t+\tau} - V_t)$ est dite la distribution de profit perte qui exprime le changement dans la valeur du portefeuille dans la période τ . Soit $X_{t+\tau}$ la fonction log rendement (log retour) dans la période τ .

$$X_{t+\tau} = \log S_{t+\tau} - \log S_t$$

Si on pose $\tau = 1$, la fonction de profit perte peut s'écrire comme suit :

$$K_{t+1} = \sum_{i=1}^n \omega_i S_{i,t} (\exp\{X_{i,t+1}\} - 1)$$

De plus, si la fonction de distribution de K est donnée par $F_K(x) = P[K \leq x]$, la VaR du portefeuille \mathbf{w} au niveau de probabilité α est définie comme le quantile d'ordre α de la fonction F_K et sa fonction est donnée par :

$$VaR(\alpha) = F_K^{-1}$$

5.3.2 Application numérique

Présentation de logiciel R

R est un système (progiciel) d'analyse statistique et graphique, disponible gratuitement pour toutes les plateformes (Windows, Mac OS X, Linux).

R est à la fois un langage de programmation et un progiciel de fonctions statistiques. La version de base de R contient déjà un grand nombre de fonctions statistiques et graphiques permettant, par exemple, de calculer une moyenne ou une variance ou de tracer un histogramme.

Exemple 5.1

Soient X et Y les log retours journaliers de deux capitaux. Considérons un portefeuille linéaire avec $\omega_1 = 0.7$ et $\omega_2 = 0.3$. Supposons $X \sim \mathcal{N}(0.00034, 0.0147^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0.00021, 0.011402^2)$, de plus, supposons que la copule associée à la fonction de répartition conjointe est de Clayton, Gumbel, Frank de paramètres $\theta_{\{i=2,3,4\}}$.

Le programme suivant permet d'estimer la VaR avec un niveau de confiance $\alpha = 0.95$ basé sur un échantillon de taille $n = 100$ simulé d'un portefeuille des log retours. Dans ce cas la fonction de profit et de perte s'écrit comme suit :

$$F_K = \ln(\omega_1 e^X + \omega_2 e^Y)$$

d'où

$$VaR_\alpha = F_{-K}^{-1}$$

```
>x<-mvdc(archmCopula(family="gumbel",param=3),c("norm","norm"))
+list(list(mean=0.00034,sd=0.0147),list(mean=0.00021,sd=0.0114)))
>set.seed(123)
>xy.sim <- rmvdc(x,100)
>R.sim = log(0.7*exp(xy.sim[,1])+ 0.3*exp(xy.sim[,2]))
>VaR.95.est = quantile(-R.sim,probs=0.95)
>VaR.95.est
```

Le traitement de ce programme nous donne les résultats suivants :

```
>VaR.95.est
95%
0.01924522
```

Copule	$\theta = 2$	$\theta = 3$	$\theta = 4$
Frank	0.01640779	0.01691621	0.01729826
Gumbel	0.01967925	0.01924522	0.02026328
clayton	0.01779999	0.01796214	0.01800406

TABLE 5.1 – La VaR avec des différentes copula et différentes paramètres

On prend le même exemple précédent avec $\omega_1 = 0.9$ et $\omega_2 = 0.1$ on supposons que la copule associée à la fonction de répartition conjointe est de gaussienne.

```
>x<-mvdc(ellipCopula(family="normal",param=0.5),c("norm","norm"))
+list(list(mean=0.00034,sd=0.0147),list(mean=0.00021,sd=0.0114)))
>set.seed(123)
>xy.sim <- rmvdc(x,100)
>R.sim = log(0.9*exp(xy.sim[,1])+ 0.1*exp(xy.sim[,2]))
>VaR.95.est = quantile(-R.sim,probs=0.95)
>VaR.95.est
```

Le traitement de ce programme nous donne les résultats suivants :

```
>VaR.95.est
95%
0.01726665
```

Conclusion

La croissance de l'intérêt pour les copules dans la gestion des risques découle en grande partie des limites imposées par l'utilisation du coefficient de corrélation de Pearson dans l'analyse de la dépendance entre différents instruments financiers en contexte non-normal. La modélisation du rendement des actifs financiers est un axe de recherche qui regroupe l'analyse des études empiriques, ainsi que les applications des copules en gestion de portefeuilles.

Les copules ont été employées pour l'évaluation d'options et de dérivés de crédits en raison de la grande importance que prend l'estimation de la dépendance au sein des produits dérivés complexes. Puisque les séries de prix en finance sont rarement distribuées normalement, les copules permettent de tenir compte de l'asymétrie, de l'aplatissement et de la dépendance extrême. En ce qui concerne les dérivés de crédit, les copules ont rapidement gagné en importance et les développements s'articulent autour des extensions du modèle élaboré par David Li en gestion du risque du crédit.

Le dernier grand secteur d'application des copules en finance, la modélisation des valeurs extrêmes, intègre l'effet de contagion ainsi que le calcul de la valeur en risque. L'intérêt des copules dans cet axe de recherche consiste en l'analyse de la dépendance dans les queues de distribution et ceci est possible puisque certaines copules sont cohérentes avec la théorie des valeurs extrêmes. Cette analyse est particulièrement utile lorsqu'il est nécessaire d'estimer les pertes extrêmes occasionnées par les crises financières. Il va sans dire que la réalisation de certains problèmes entourant les copules permettra d'accentuer le développement de nouvelles applications.

Les limites actuelles concernent, entre autres, les calculs pour la modélisation en dimensions supérieures et l'absence de consensus entourant les méthodes d'adéquation à utiliser pour sélectionner une famille de copules. Ces éléments constituent autant de défis pour les futurs chercheurs qui opéreront pour les copules dans le but de modéliser la dépendance.

Bibliographie

- [1] Anne-lisse, C., Christophe, D., Véronique, L.M. et Triet, N. : *Copule de Gumbel*. Groupe de travail ISFA 3, 2008.
- [2] Balakrishnan, N., Chin-Diew Lai : *Continuous Bivariate Distributions*. Springer Dordrecht Heidelberg London New York, second edition, 2009.
- [3] Bedoui, R., Ben Dbabis, M. : *Copules et mesures du risque bidimensionnelles*, Septembre 2008
- [4] Belguise Olivier : *Etude des dépendances entre les branches Auto et Incendie avec la théorie des copulas*, Université louis pasteur, Stransburg, 2001.
- [5] Bezat, A. et Nikeghbali, A. : *La théorie des extrêmes et la gestion des risques de marché*, Mai 2000.
- [6] Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. et Roncalli, T. : *Copula for finance-A Reading Guide and Some Applications* , Groupe de recherche opérationnelle, Crédit Lyonnais, Working paper, 2000.
- [7] Cadoux, D. et Marc Loizeau, J. : *Copules et dépendances*, France.
- [8] Cherubini, U., Luciano, E. et Vecchiato, W. : *Copula methods in finance*, John wiley and sons , Ltd, ISBN 0-470-86344-7, 2004.
- [9] Clauss, P. : *Théorie des copules*, Novembre 2008.
- [10] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. et Kaas, R. : *Actuarial Theory for Dependent Risks Measures, Orders and Models* John Wiley Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO198SQ, England, 2005.
- [11] Franke, J., Hardle, W. K. et Hafner, C. M. : *Statistics of Financial Markets An Introduction*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Second Edition, 2008.
- [12] Genest, C. and Rivest, L. : *Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas*, Journal of the American Statistical Association 88, 1034-1043, 1993

-
- [13] Gumbel, E. J. : *Bivariate logistic distributions*, 56 :335–349, 1961.
- [14] Hult, H. and Lindskog, F. : *Mathematical Modeling and Statistical Methods for Risk Management*, France, 2002.
- [15] Jaworski, P., Durante, F., Hardle, W., Rychlik, T. : *Copula theory and its applications*, Proceedings of the Workshop Held in Warsaw, Springer, London, 25–26 September 2009.
- [16] Joe, H., Xu, J.J : *Multivariate models and dependence concepts*, Chapman and Hall, London, 1997.
- [17] Joe, H., Xu, J.J : *The estimation méthode of inference functions for margins for multivariate models*, Departement of statistics, University of British Columbia, Technical Report, 1996.
- [18] Kadi, N. : *Estimation Non-Parametrique de la distribution et densité de copules*, Faculte des sciences Université de Sherbooke, Québec, Canada, avril 2014.
- [19] Kharoubi, C., Thomas, P. : *Analyse du risque de crédit*. RBédition, 2ème édition, Paris, 2016.
- [20] Kurtz, D. et Pignard, T.B. : *Modélisation du risque de crédit*. DEA de Statistique et Modèles aléatoires en économie et finance, Université Paris 7 — Université Paris 1,
- [21] Lounas, F. : *Modélisation de la dépendance par les copules et applications*. Mémoire de Magister, Ecole doctorale statistique, Tizi-Ouzou, 2011.
- [22] Malevergne, Y. et Sornette, D. : *Extreme Financial Risks* , From Dependence to Risk Management, Springer Berlin Heidelberg, New York, 2006.
- [23] Margnus, J.R. et Neudcker, H., *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, John Wiley and Sons, New York, 1988.
- [24] Mari, D. D. and Kotz, S. : *Correlation and Dependence*, George Washington University, USA, Imperial College Press, London, First edition 2001.
- [25] Nelson, R. B. : *An Introduction to Copulas*. Springer Series in Statistics, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2nd édition, 2006.
- [26] Roncalli, T. : *Gestion des Risques Multiples*, cours ENSAI de 3ème année, France, 2002.

- [27] Salvadori, G., Michele, C., Kottegoda, N. T. and Rosso, R. : *Extremes In Nature : An Approach Using Copulas*, Springer, The Netherlands, 2007.
- [28] Schweizer, B. and Wolff, E. F. : *On nonparametric measures of dependence for random variables : The Annals of Statistics*, 9 :879–885, 1981.
- [29] Sklar, A. : *Fonction de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris 8, 1959.
- [30] Trivedi, P. K. and Zimmer, D. M. : *Copula Modeling : An Introduction for Practitioners*. now the essence of knowledge, Boston – Delf, 2005.
- [31] www.abcbourse.com : *Gestion de portefeuille et analyse du risque*.