

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE M'HAMED BOUGERRA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Master Mathématiques Financières

Par

KAIDI Oussama , BELARBI Racim

THÈME

***Distributions des valeurs extrêmes
et
Estimation de la Value at Risk***

Soutenu publiquement, le 02/ 07 /2017 devant le jury composé de:

Mme. GATT	Fella	Présidente
Mme. TEMAME	Naima	Encadreuse
Mme. LOUNES	Fadhila	Examinatrice

Remerciements

Tout d'abord, Nous remercions le Allah, tout puissant, qui nous a donné la santé, la volonté et le courage afin de pouvoir réaliser ce modeste travail.

Je remercie profondément Mme N. Temmame pour tous les conseils qu'elle a pu nous fournir qui nous ont permis d'étoffer considérablement notre recherche.

Je remercie sincèrement les enseignants de département des mathématiques et d'informatique qui nous ont encadré depuis notre première année universitaire.

Nous aimerions également remercier les membres de jury pour avoir accepté de juger ce travail.

Ils savent combien ils comptent pour nous, nos familles et cousins, nous les remercions pour leur soutien permanent.

Nous adressons un remerciement particulier à notre aimable enseignant Mr Rahmoune pour sa bonne humeur constante.

Nous remercions en vrac : Amine ; Raouf ; Ali ; Pikso ; Ayih ; Abdou ; Ayoub ; Merouane ; Kanti ; ... ; pour ses histoires drôles ; Khomayni ; pour ces blagues et scènes comiques toujours présentes

Enfin, nous remercions tous nos Ami(e)s que nous aimons

Nous avons sans aucun doute oublié d'autres personnes.

Mais nous sommes persuadés qu'elles nous pardonneront et nous sommes sûrs qu'elles partageront avec nous ce moment d'euphorie tant attendu.

Dédicaces

À nos chères familles

Nous dédions ons ce travail à nos chers parents
et familles respectives, Merci à eux.

À nos chère(e)s ami(e)s À nos chers collègues

Nous ne pouvons trouver les mots justes et sincères
pour vous exprimer nos affection et nos pensées,
Vous êtes pour nous des frères, sœurs
et des amis sur qui nous pouvons compter.
En témoignage de l'amitié qui nous uni et des souvenirs
de tous les moments que nous avons passé ensemble,
Nous vous dédie ce travail et nous vous souhaitons
une vie pleine de santé et de bonheur.

À notre chère encadreuse Mme N. Temmane

Un remerciement particulier et sincère
pour tous vos efforts fournis.
Vous avez toujours été présente.
Que ce travail soit un témoignage
de nos gratitude et nos profond respect.

Table des matières

Introduction	2
1 Généralités	3
1.1 Statistique d'ordre	3
1.2 Densité conjointe de n statistiques d'ordre	3
1.3 Densité de la k -ième statistique d'ordre	4
1.4 Densité conjointe de deux statistiques d'ordre	4
1.5 Définitions	5
1.5.1 Inverse généralisé	5
1.5.2 La fonction de répartition empirique	5
1.5.3 Point terminal	6
1.5.4 Convergence de la fonction de répartition empirique	6
1.5.5 Quantile d'ordre p	6
1.5.6 Fonction quantile de queue	7
1.5.7 Quantile extrême	7
1.5.8 Quantile empirique	7
1.6 Comportement asymptotique du maximum	8
1.6.1 Distribution du maximum	8
1.6.2 Théorème de <i>Fisher-Tippet</i>	9
1.7 Représentation de <i>Jenkison-Von mises</i>	10
1.8 Le domaine maximal d'attraction et les constantes de normalisation	11
1.8.1 Le domaine maximal d'attraction (MDA)	11
1.8.2 Caractérisation des Domaines d'attraction	12
1.8.3 Condition nécessaire et suffisante de convergence	12
1.8.4 Constantes de normalisation	13
1.9 Distribution des excès	14

1.10	Distribution de <i>Pareto</i> Généralisée (GPD)	14
1.11	Théorème de <i>Balkema-De Haan-Pickands</i>	15
1.12	Propriétés de la GPD	15
1.13	Sélection du seuil	16
2	Estimation de l'indice des valeurs extrêmes	18
2.1	Estimation par des méthodes paramétrique	18
2.2	Estimation par des méthodes semi-paramétrique	20
2.2.1	Estimateur de <i>Hill</i>	21
2.2.2	Estimateur de <i>Pickands</i>	23
2.2.3	Le choix du nombre k	25
2.2.4	Estimateur basé sur les graphes de mean exces plots (MEP)	26
3	Estimation des quantiles extrêmes et de la Value at Risk	28
3.1	Estimation des quantiles extrêmes	28
3.2	Méthodes d'estimation d'un quantile extrême	28
3.2.1	Méthode des Blocs	28
3.2.2	Méthode POT (<i>Peak Over Threshold</i>)	30
3.3	Estimation de la VaR	32
3.4	Définition de la VaR	32
3.5	Estimation de la VaR par la théorie des valeurs extrêmes	33
3.5.1	VaR par la méthodes des blocs	33
3.5.2	VaR par la méthode POT	34
4	Application	35
4.1	Introduction	35
4.2	Indice S&P500	35
4.2.1	Analyse descriptive de l'indice financier	36
4.2.2	Analyse descriptive des log des rendements de S&P500	37
4.3	La VaR normale	40
4.4	La VaR historique	41
4.5	La VaR TVE	43
4.5.1	Estimation de la VaR par la méthode POT	43
4.5.2	Estimation de la VaR par la méthode des blocs	47
4.6	Comparaison entre les méthodes	49

Conclusion	50
Bibliographie	51

Liste des Figures

1.1	Fonction de répartition des valeurs extrêmes généralisées GEV $H_{\mu,\sigma,\xi}$ Fréchet ($\xi = 0.5$), Weibull ($\xi = 0.5$) and Gumbell ($\xi = 0$).	11
2.1	Le graphe de $(k, \hat{\xi}_{k(n),n})$ pour les différents estimateur de ξ	25
4.1	Graphique de l'indice S&P500 entre Mars 2007 et Avril 2016.	36
4.2	Histogramme du S&P500.	37
4.3	Logarithmes des rendements de S&P500	38
4.4	Histogramme des logarithmes des rendements.	39
4.5	La fonction de répartition empirique.	42
4.6	La distribution de Pareto généralisée $G_{\xi,1}(x)$, pour Pareto ($\xi = 0.5$), exponentiel ($\xi = 0$) et Pareto de type II ($\xi = -0.5$).	43
4.7	La distribution moyenne des excès.	44
4.8	Hillplot(k, ξ_k^H).	46
4.9	Lois des valeurs extrême généralisée h_ξ pour, Fréchet($\xi = 0.5$) Weibull($\xi = -0.5$) and Gumbell ($\xi = 0$).	47

Introduction générale

L'objet de ce document est de présenter les principaux résultats de la théorie des valeurs extrêmes pouvant être utilisés dans les problématiques assurantielles,

Par définition, les événements rares sont des événements ayant une faible probabilité d'apparition lorsque le comportement de ces événements est dû au hasard, on peut étudier leurs lois. Ils sont dits extrêmes quand il s'agit de valeurs beaucoup plus grandes ou plus petites que celle de servées habituellement.

Nous commençons donc par rappeler dans le premier chapitre la définition des statistiques d'ordre d'un échantillon de taille n , le comportement asymptotique du maximum. Pour cela on a introduit deux théorèmes essentiels, le premier de *Fisher et Tippett* qui sert à modéliser les maximums prouvés en 1928, la preuve complète a été proposée par *Gnedenko (1943)*, et le second de *Belkema-De Han et Pickands* qui sert à modéliser les excès déterminé en 1975.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'estimation de l'indice des valeurs extrêmes par des méthodes paramétriques, semi-paramétriques.

Dans le troisième chapitre, on a présenté des méthodes pour estimer le quantile extrême : estimateur naturel basé sur le quantile empirique, méthode des blocs (*Bloc Maxima*), méthode *POT (Peak Over Threshold)*, estimateur de Hill, estimateur de Pickands, estimateur des moments et ce à partir d'un modèle de régression exponentielle.

Au quatrième chapitre on introduit une mesure de risque VaR (*Value at Risk*) à 99%; c'est le quantile extrême. Pour cela, on a commencé par définir la VaR puis, on a donné des méthodes pour la calculer qui sont basées sur la méthode semi-paramétrique, la première repose sur les k plus grandes observations d'un échantillon et détermine les trois lois possibles des extrema (*synthétisées sous le nom de loi GEV*) et la seconde utilise les observations au delà d'un seuil déterministe, nous parlons alors de méthode *Peaks Over Thresholds (P.O.T.)*.

Le dernier chapitre consiste à choisir un modèle de log rendement pour estimer la VaR et donner une application des méthodes *POT*, *BM*, à partir des données réelles. et calculer la VaR à partir des méthodes utilisées précédemment comparant les résultats avec celles d'autres méthodes connues.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Statistique d'ordre

Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de densité f et de fonction de répartition F .

Notons $\bar{F} = 1 - F(x)$ la fonction de survie (ou de queue). On appelle statistique d'ordre notées $X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)}$ les variables aléatoires ordonnées.

Définition 1.1. On appelle statistiques d'ordre notées $X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)}$, les variables aléatoires ordonnées :

$$\min(X_1, \dots, X_n) = X_{(1,n)} \leq X_{(2,n)} \leq \dots \leq X_{(n,n)} = \max(X_1, \dots, X_n).$$

On note $M_n = X_{(n,n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$

1.2 Densité conjointe de n statistiques d'ordre

Lemme 1.1. ([1]) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon, les X_i supposés indépendantes identiquement distribuées, de densité f absolument continue, alors la densité de $(X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)})$ est donnée par :

$$f_{(X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)})}(x_1, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i) \text{ avec } x_1 \leq \dots \leq x_n.$$

1.3 Densité de la k-ième statistique d'ordre

Lemme 1.2. ([1]) La loi de la variable $X_{(k,n)}$, pour $1 \leq k \leq n$ est donnée par :

$$\begin{aligned} F_{X_{(k,n)}}(x) &= P[X_{(k,n)} \leq x] \\ &= \sum_{j=k}^n c_n^j [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j}. \end{aligned}$$

sa densité est :

$$f_{X_{k,n}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k} f(x).$$

1.4 Densité conjointe de deux statistiques d'ordre

Définition 1.2. La densité conjointe de $(X_{(r,n)}, X_{(s,n)})$ pour $r < s$ est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{(X_{(r,n)}, X_{(s,n)})}(x, y) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \\ &\times [F(x)]^{r-1} f(x) \times [F(y) - F(x)]^{s-r-1} f(y) \\ &\times [1 - F(y)]^{n-s}. \end{aligned}$$

avec $-\infty < x < y < +\infty$.

La fonction de répartition $F(X_{(r,n)}, X_{(s,n)})$ est définie par :

1) pour $x \geq y$ on a

$$F_{(X_{(r,n)}, X_{(s,n)})}(x, y) = F_{X_{(s,n)}}(y).$$

2) pour $x < y$ on a

$$\begin{aligned}
F_{(X_{(r,n)}, X_{(s,n)})}(x, y) &= P[X_{i,n} \leq x, X_{j,n} \leq y]. \\
&= \sum_{s=j}^n \sum_{r=i}^s P[\text{exactement } r \text{ variables} \\
&\quad \text{parmi } (X_1, \dots, X_n) \text{ sont inférieure à } x, \\
&\quad \text{et exactement } s \text{ variables parmi} \\
&\quad (X_1, \dots, X_n) \text{ sont inférieure à } y]. \\
&= \sum_{s=j}^n \sum_{r=i}^s \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \\
&\quad \times [F(x)]^{r-1} f(x) \times [F(y) - F(x)]^{s-r-1} f(y) \\
&\quad \times [1 - F(y)]^{n-s}.
\end{aligned}$$

1.5 Définitions

1.5.1 Inverse généralisé

On appelle inverse généralisé de F , l'application notée $F^{\leftarrow}$ définie par :

$$F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\}, \quad p \in [0, 1].$$

l'inverse généralisé $F^{\leftarrow}$ coïncide avec l'inverse F^{-1} lorsque F est strictement croissante et continue.

1.5.2 La fonction de répartition empirique

On appelle fonction de répartition empirique associée à un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, la fonction F_n définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{\{X_k \leq x\}} = \frac{1}{n} \text{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} : X_k \leq x\}.$$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{(1,n)} \\ 1/n & \text{si } X_{(1,n)} \leq x < X_{(2,n)} \\ 2/n & \text{si } X_{(2,n)} \leq x < X_{(3,n)} \\ \vdots & \\ k/n & \text{si } X_{(k,n)} \leq x < X_{(k+1,n)} \\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x \geq X_{(n,n)} \end{cases}$$

où I désigne la fonction indicatrice.

1.5.3 Point terminal

Le point terminal d'une distribution F est défini par :

$$x_F = \sup \{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}.$$

1.5.4 Convergence de la fonction de répartition empirique

Théorème 1.3. (Glivenko-Cantelli) [6] Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi F , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0 \text{ p.s.}$$

1.5.5 Quantile d'ordre p

On appelle quantile ou fractile d'ordre p , le nombre défini par :

$$x_p = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}.$$

Si F est strictement croissante et continue, alors x_p est l'unique nombre réel tel que :

$$F(x_p) = p.$$

1.5.6 Fonction quantile de queue

La fonction quantile de queue est définie par :

$$U(t) = F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{t} \right) \text{ avec } 1 < t < \infty.$$

$F^{\leftarrow}$ étant l'inverse généralisé de F .

1.5.7 Quantile extrême

On appelle quantile extrême, le quantile d'ordre $(1 - p)$, défini par :

$$\begin{aligned} x_p &= \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\} \\ &= F^{\leftarrow}(1 - p). \end{aligned}$$

où p proche de zéro.

1.5.8 Quantile empirique

La fonction quantile empirique de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ est donnée par :

$$Q_n(p) = F_n^{-1}(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq p\} \text{ avec } 0 < p < 1.$$

La fonction quantile empirique de la queue correspondante est définie par :

$$U(t) = F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{t} \right) \text{ avec } 1 < t < \infty$$

Définition 1.3. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon issu d'une loi F et $(X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)})$ l'échantillon ordonné.

Soit $p \in]0, 1[$, On appelle quantile empirique d'ordre p , la variable aléatoire notée $\hat{X}_{(np,n)}$ définie par :

$$\hat{X}_{(np,n)} = \begin{cases} \frac{X_{(np,n)} + X_{(np+1,n)}}{2} & \text{si } np \in \mathbb{N} \\ X_{([np]+1,n)} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $[np]$ désigne la partie entière de np .

En particulier $X_{([n/2]+1, n)}$ est la médiane empirique.

1.6 Comportement asymptotique du maximum

Dans cette section, on va s'intéresser au comportement asymptotique du maximum d'un échantillon. On introduit, dans la partie (1.6.2) un critère décrivant les limites possibles d'un maximum. On rappelle au préalable la définition de telles fonctions et on donne quelques propriétés.

1.6.1 Distribution du maximum

La fonction de répartition de M_n est donnée par :

$$F_{M_n} = P(M_n \leq x) = (F(x))^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_F \\ 1 & \text{si } x > x_F \end{cases}$$

La loi asymptotique de M_n est dégénérée. Pour cette raison, on essaie de trouver des constantes a_n et b_n de telle sorte que la loi du maximum normalisée, c'est à dire la loi de $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ ne le soit plus.

Notons $Y_n = \frac{M_n - b_n}{a_n}$ avec $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n > 0$.

$$F_{Y_n}(x) = \left(P \left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right] \right) = (F(a_n x + b_n))^n$$

On étudie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(a_n x + b_n))^n$$

Définition 1.4. On appelle loi asymptotique des extrême, loi de la v.a Y telle que :

$$Y_n = \frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{L} Y$$

On pose deux suites $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n > 0$ et $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_n \in \mathbb{R}$ telle que :

$$F_{M_n}(a_n x + b_n) \longrightarrow H(x) \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (1.6.1)$$

en tout point de x de continuité de H , où H est la fonction de répartition de Y .

1.6.2 Théorème de Fisher-Tippett

Théorème 1.4. [6] S'il existe deux suites $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n > 0$ et b_n , $b_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{M_n}(a_n x + b_n) = H(x).$$

Alors H est non dégénérée et elle est soit de type :

Type I : Fréchet

$$\Phi_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x^{-a}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Type II : Weibull

$$\Psi_a(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^a} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Type III : Gumbel

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

avec Φ_a , Ψ_a , Λ sont des lois limites possibles pour le maximum.

Exemple 1. Supposons données, n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes identiquement distribuées de fonction de répartition commune F .

Supposons F suit une loi exponentielle de paramètre 1, c'est à dire :

$$F(x) = 1 - \exp(-x).$$

Soit F_Y la fonction de répartition de la variable Y avec $Y = M_n - \log(n)$, alors

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= P[M_n - \log(n) \leq x] \\
 &= P[M_n \leq x + \log(n)] \\
 &= (P[X \leq x + \log(n)])^n \\
 &= (1 - \exp(-x - \log(n)))^n \\
 &= \left(1 - \frac{1}{n} \exp(-x)\right)^n \\
 &= \exp\left(n \log\left(1 - \frac{1}{n} \exp(-x)\right)\right) \\
 &\approx \exp(-\exp(-x)) \text{ quand } n \rightarrow \infty \\
 &= \Lambda(x).
 \end{aligned}$$

Prenons $a_n = 1$, $b_n = \log(n)$, alors $\frac{(M_n - b_n)}{a_n}$ tend asymptotiquement vers la loi de Gumbel.

1.7 Représentation de Jenkison-Von mises

Il est possible de rassembler les trois familles de lois en une seule famille paramétrique $H_{\mu, \sigma, \xi}(x)$, $\xi \in \mathbb{R}$ telle que $\xi = \frac{1}{\alpha}$. Cette famille est dite loi de valeurs extrêmes généralisées (*GEV : Generalized extreme value distribution*).

$$H_{\mu, \sigma, \xi}(x) = \begin{cases} \exp\left[-\left(1 + \xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp\left[-\exp\left(-\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right)\right] & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Où μ est un paramètre de localisation, σ est celui de dispersion, ξ le paramètre de queue et H_ξ est définie sur l'ensemble D .

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \left[1 + \xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\xi}}\right]\right\}.$$

On peut écrire cette fonction de répartition sous la forme suivante :

$$H_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \begin{cases} \exp[-(1 + \xi x)]^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \text{ avec } 1 + \xi x > 0 \\ \exp[-\exp(-x)] & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

- Remarque 1.1.** 1. Si $\xi = \alpha^{-1} > 0$, on obtient la distribution de Fréchet.
 2. Si $\xi = -\alpha^{-1} < 0$, on obtient la distribution de Weibull.
 3. Si $\xi = 0$, on obtient la distribution de Gumbel.

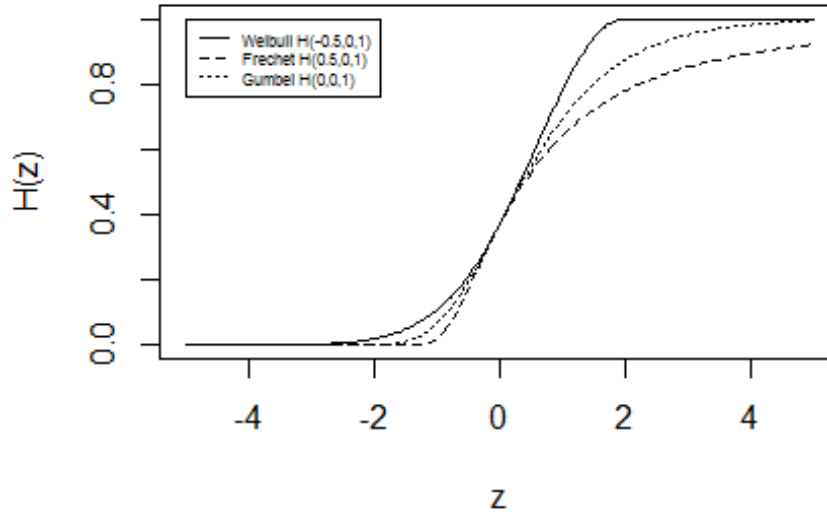


Figure 1.1: Fonction de répartition des valeurs extrêmes généralisées GEV $H_{\mu,\sigma,\xi}$ Fréchet ($\xi = 0.5$), Weibull ($\xi = -0.5$) and Gumbell ($\xi = 0$).

1.8 Le domaine maximal d'attraction et les constantes de normalisation

1.8.1 Le domaine maximal d'attraction (MDA)

Une variable aléatoire X appartient au maximal d'attraction d'une fonction $H_{\mu,\sigma,\xi}$, et on note $F \in MDA(H_{\mu,\sigma,\xi})$ s'il existe deux suites $a_n)_{n>1}$, $a_n > 0$ et $(b_n)_{n>1}$, $b_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{M_n}(a_n x + b_n) = H_{\mu, \sigma, \xi}(x).$$

en tout point x de continuité de $H_{\mu, \sigma, \xi}(x)$.

1.8.2 Caractérisation des Domaines d'attraction

Nous voyons que les trois distributions de valeurs extrêmes sont très différentes en terme de maximum domaine d'attraction :

- Dans le max-domaine d'attraction de la distribution *Gumbel*, nous trouvons des distributions dont la fonction de survie décroît vers zéro à une vitesse exponentielle (*exponentielle, Normale, Gamma, Weibull, etc*).
- Dans le max-domaine d'attraction de la distribution *Fréchet*, nous trouvons des distributions à queue lourde (*Cauchy, Pareto, Student, etc*).
- Dans le max-domaine d'attraction de la distribution *Weibull*, nous trouvons des distributions dont le point terminal est fini (*Uniforme, Beta, etc*).

Définition 1.5. (Fonction à variation lente) L est dite à variation lente si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Exemple 2. $f(x) = \log(x)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(tx)}{\log(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\log(x)}{\log(t)} \right) = 1.$$

donc, la fonction $\log$ est à variation lente.

1.8.3 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Domaine maximal d'attraction de Fréchet

F appartient au domaine maximal d'attraction de *Fréchet* ssi $F^{-1}(1) = +\infty$ et $\exists \alpha > 0$ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}, \quad \forall x > 0.$$

On peut écrire,

$$x^{-\alpha} = -\log \Phi_{\alpha}(x)$$

Domaine maximal d'attraction de Weibull

F appartient au domaine maximal d'attraction de *Weibull* ssi

$$F^{-1}(1) < +\infty \text{ et } \exists \alpha > 0 \text{ et}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1 - F(F^{-1}(1) - \xi x)}{1 - F(F^{-1}(1) - \xi)} = x^{-\alpha}, \quad \forall x > 0.$$

On peut écrire,

$$x^{-\alpha} = -\log \Psi_{\alpha}(x)$$

Domaine maximal d'attraction de Gumbel

F appartient au domaine maximal d'attraction de Gumbel ssi

$$E[X - X > c] < +\infty \text{ et } \forall c < F^{-1}(1) \text{ et}$$

$$\lim_{t \rightarrow F^{-1}(1)} \frac{1 - F(t + xE[X - t/X > t])}{1 - F(t)} = e^{-x}, \quad \forall x > 0.$$

De même,

$$e^{-x} = \log \Lambda_{\alpha}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Le domaine maximal d'attraction et les constantes de normalisation

1.8.4 Constantes de normalisation

On choisit les constantes de normalisation a_n et b_n afin que : $a_n^{-1}(M_n - b_n) \xrightarrow{Loi} Y$

Théorème 1.5. ([1]) On peut choisir des constantes $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telle que (1.6.1) soit vérifiée de la manière suivante :

1. $b_n = 0, \quad a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{si } H = \Phi.$
 2. $b_n = F^{-1}(1), \quad a_n = F^{-1}(1) - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{si } H = \Psi.$
 3. $b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad a_n = E(X - a_n/X > a_n) \quad \text{si } H = \Lambda.$
- ou bien $a_n = F^{-1}\left(\frac{1}{ne}\right) - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$

De plus, si :

$$\lim_{x \rightarrow F^{-1}(1)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h(x)} \right) = 0, \text{ on prend } b_n = \frac{1}{nf(a_n)}.$$

1.9 Distribution des excès

Nous supposons une suite d'observations $X_1, \dots, X_n$ indépendantes identiquement distribuées, de fonction de répartition F et x_F un point terminal. Alors, pour un seuil $u < x_F$ fixe, on définit la variable $w_i = X_i - u, i = 1, \dots, n$, l'excès au dessus du seuil u .

La fonction de distribution des excès de X au-dessus du seuil u est :

$$F_u(x) = P(X - u \leq x / X > u) = F\left(\frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}\right) \text{ pour } 0 \leq x \leq x_F - u.$$

1.10 Distribution de *Pareto* Généralisée (GPD)

La distribution de *Pareto* généralisée, joue un rôle essentiel dans la modélisation des excès.

Définition 1.6. Une distribution $G_{\xi, \beta}$ est dite de *Pareto* généralisée de paramètre $\xi \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$ si elle s'écrit :

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta}x\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Cette distribution est définie pour :

$$\begin{cases} x \geq 0 & \text{si } \xi \geq 0. \\ 0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi} & \text{si } \xi < 0. \end{cases}$$

Le paramètre ξ est le même d'une GEV, le β est lié à σ par $\beta = \sigma(x - u)$.

ξ : paramètre de forme (queue).

β : paramètre d'échelle.

Cas particulier, lorsque $\begin{cases} \xi = 0 & \text{c'est la loi est } \exp\left(\lambda = \frac{1}{\beta}\right). \\ \xi = -1 & \text{c'est la loi } U_{[0, \beta]}. \end{cases}$

1.11 Théorème de Balkema-De Haan-Pickands

Le théorème suivant fait le lien entre le comportement asymptotique de la distribution des excès et la loi de *Pareto* généralisée.

Théorème 1.6. Soit F_u la distribution des excès, lorsque le seuil u tend vers le point terminal x_F , on a :

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x \leq x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0.$$

où $\beta(u)$ une fonction positive mesurable.

Exemple 3. "La loi exponentielle"

Soit $F(x) = (1 - e^{-x})1_{\{x > 0\}}(x)$

et $P[X > u + y / X > u] = \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)} = \frac{e^{-(u+y)}}{e^{-u}} = e^{-y}, y > 0$

On retrouve La loi exponentielle qui est également la loi GPD de paramètre $\xi = 0$ et $\beta_u = u$.

Exemple 4. "La loi Pareto"

Considérons la loi de Pareto, de fonction de queue $1 - F(x) = cx^{-a}$ où $c > 0, a > 0$.

Posons $\beta(u) = u$ ou $b > 0$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned} F_u[\beta(u)z] &= \frac{F(u + ubz) - F(u)}{1 - F(u)} \\ &\sim \frac{cu^{-a} - c(u + ubz)^{-a}}{cu^{-a}} \\ &= 1 - (1 + bz)^{-a}. \end{aligned}$$

En posant $\xi = \frac{1}{a} > 0$ et $b = \xi$, la limite est alors la GPD de paramètre ξ .

1.12 Propriétés de la GPD

1) Si $\xi > 0$ la distribution $G_{\xi, \beta}(x)$ est la *Pareto* usuelle avec $\alpha = \frac{1}{\xi}$ et $k = \frac{\beta}{\xi}$

$$\begin{aligned} G_{\xi, \beta}(x) &= 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{1 + (\xi x)/\beta}\right)^{\frac{1}{\xi}} = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + \xi x}\right)^{\frac{1}{\xi}} = 1 - \left(\frac{\beta/\xi}{\beta/\xi + x}\right)^{\frac{1}{\xi}}. \end{aligned}$$

2) Si $\xi = 0$, la distribution $G_{0,\beta}(x)$ est une distribution exponentielle.

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} G_{\xi,\beta}(x) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta}x\right)^{-\frac{1}{\xi}} \\
&= 1 - \exp\left(-\lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{x/\beta}{1 + (\xi x)/\beta}\right)\right) \\
&= 1 - \lim_{\xi \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{\xi}\right) \log\left(1 + \frac{\xi}{\beta}x\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{\log\left(1 + \frac{\xi}{\beta}x\right)}{\xi}\right)\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) = G_{0,\beta}(x)
\end{aligned}$$

3) Si $\xi < 0$ c'est la loi de *Pareto* de type II.

4) $G_{\xi,\beta} \in MDA(H_\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Soit $\xi > 0$, On sait que si $F \in MDA(H_\xi)$ alors $\bar{F} = x^{-\frac{1}{\xi}}L(x)$.

1.13 Sélection du seuil

L'estimation des paramètres de la distribution *GPD* pose le problème de la détermination du seuil u , le seuil ne doit pas être trop grand car il faut suffisamment de données pour avoir une bonne précision des estimateurs. La technique graphique est la plus utilisée pour estimer u .

Définition 1.7. On appelle fonction d'excès moyenne (mean excess function) la fonction $e(u)$ définie par :

$$e(u) = E[X - u | X > u] \quad 0 < u < \infty$$

Un estimateur empirique de cette fonction est donné par :

$$\hat{e}(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n 1_{(X_i > u)}}$$

où $(X_i - u)^+ = \sup(X_i - u, 0)$

Supposons données les observations $X_1, \dots, X_n$, on trace graphiquement $\hat{e}(u)$ en fonction de u et on choisit le plus petit u de manière à ce que $\hat{e}(u)$ soit approximativement linéaire pour tout $x \geq u$.

La fonction moyenne des excès empiriques sous la transformation affine s'écrit pour $x \leq x_F$, comme suit :

$$\hat{e}(u) = \frac{\hat{\sigma} + \hat{\xi}_u}{1 - \hat{\xi}}, \quad \hat{\sigma} + \hat{\xi}_u > 0$$

Trois cas peuvent alors se présenter :

1) Si à certain seuil, la fonction moyenne des excès empirique est marquée par une pente positive, alors les données suivent une distribution de *Pareto* généralisée avec un paramètre ξ positif.

2) Si la fonction moyenne des excès empirique présente une pente horizontale, les données suivent une distribution exponentielle.

3) Si la fonction moyenne des excès empirique est décroissante, on a une distribution bornée à droite.

Chapitre 2

Estimation de l'indice des valeurs extrêmes

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à l'estimation de l'indice des valeurs extrêmes.

Cet estimateur noté $\hat{\xi}$, joue un rôle essentiel dans le comportement de la loi des extrêmes. Il existe plusieurs méthodes d'estimation : paramétrique, semi-paramétrique, graphique, etc ...

2.1 Estimation par des méthodes paramétrique

Estimateur de maximum de vraisemblance

Cette méthode notée *E.M.V* est fréquemment utilisée en statistique. L'estimation par le maximum de vraisemblance donne des résultats asymptotiques efficaces, et les estimateurs obtenus convergent sous certaines conditions vers les vraies valeurs des paramètres.

Soit $(Y_1, \dots, Y_n)$ un n-échantillon, les Y_i supposé indépendantes identiquement distribuées, de densité h_θ où $\theta = (\mu, \sigma, \xi)$.

L'expression de la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$\ell(\theta = (\mu, \sigma, \xi); (Y_1, \dots, Y_n)) = \prod_{i=1}^n h_\theta(y_i)$$

L'estimateur $\hat{\theta}$ est donné par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \log \ell}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial^2 \log \ell(\hat{\theta})}{\partial^2(\theta)} < 0 \end{cases}$$

Dans le cas où $\xi = 0$ (loi de *Gumbel*), la fonction log de la vraisemblance égale à :

$$\log \ell(\theta = (\mu, \sigma, \xi), (Y_1, \dots, Y_n)) = -n \log \sigma - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \mu}{\sigma}$$

En dérivant cette fonction relativement aux deux paramètres, nous obtenons le système d'équations à résoudre suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \log \ell}{\partial \sigma} = 0 \iff n + \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \mu}{\sigma} \left[\exp\left(-\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right) - 1 \right] = 0 \\ \frac{\partial \log \ell}{\partial \mu} = 0 \iff n - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système est relativement difficile et n'admet pas en général de solutions explicites. Dans ce cas, on fait appel à des méthodes d'optimisation numériques (c'est ce qui est fait par exemple la fonction `fgev` du package R `evd`)

Exemple 5. (Estimation de ξ de la GPD) Une fois le seuil optimal choisi, on construit une nouvelle série d'observations au dessus de ce seuil, et la distribution de ces données suit approximativement une distribution généralisée de Pareto.

La densité de la distribution GPD s'écrit :

$$g_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} \beta^{\frac{1}{\xi}} (\beta + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}-1} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \beta^{-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Le logarithme de la fonction de vraisemblance que nous maximisons est de la forme :

$$\log \ell(\xi, \beta, X_1, \dots, X_n) = -n \log \beta - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{\xi}{\beta} X_i\right)$$

En pose que $\tau = \frac{\xi}{\beta}$, l'annulation des drivées partielles des logarithmes de la fonction de vraisemblance conduit au système :

$$\begin{cases} \hat{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 + \tau X_i) = \hat{\xi}(\tau) \\ \frac{1}{\tau} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\hat{\xi}}\right) \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{1 + \tau X_i} \end{cases}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de (ξ, τ) est $(\hat{\xi} = \hat{\xi}(\hat{\tau}), \hat{\tau})$, où $\hat{\tau}$ est solution de :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{1 + \tau X_i}$$

Cette dernière équation se résous numériquement de manière itérative pour autant que l'on dispose d'une valeur initiale τ_0 pas trop éloignée de τ . En pratique cette valeur initiale pourra être obtenue par la méthode des moments (pour autant que ceux-ci existent jusqu'à l'ordre deux) ou par la méthode des quantiles. Hosking et Wallis ont montré la normalité asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance :

$$\sqrt{n} \left(\hat{\xi} - \xi, \frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1 \right) \rightsquigarrow N(0, M^{-1}), n \rightarrow \infty$$

$$\text{où } M^{-1} = (1 + \xi) \begin{pmatrix} 1 + \xi & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.1. Ce résultat permet, en particulier, de calculer les erreurs approximatives d'estimation commises par les estimateurs du maximum de vraisemblance.

2.2 Estimation par des méthodes semi-paramétrique

Le méthode que l'on a vue exige que les variables soient distribuées exactement selon H_θ . La famille de lois H_θ est de nature totalement paramétrique.

En revanche, les estimateurs que l'on propose par la suite s'appliquent à des échantillons dont la distribution n'est plus H_θ , mais qui appartient au domaine maximal d'attraction de H . La nature est par conséquent semi-paramétrique.

Si on se restreint au domaine d'attraction de *Fréchet* où l'on a la caractérisation

$$\bar{F} = x^{-\frac{1}{\xi}} L(x)$$

- avec L une fonction à variation lente et $\xi > 0$. Cette fonction comporte :
- une partie paramétrique $x^{-\frac{1}{\xi}}$ ne dépendant que d'un paramètre réel.
 - une partie non-paramétrique L sur laquelle on sait seulement que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1, \text{ pour } x > 1.$$

2.2.1 Estimateur de Hill

Définition 2.1. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition F avec $F \in MDA(H_\theta)$ et $\xi > 0$.

L'estimateur de Hill est défini par :

$$H_{k,n} = \xi_{k,n}^{Hill} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log X_{(n-i+1,n)} - \log X_{(n-k,n)}, \text{ pour } k \in \{1, \dots, n-1\}$$

2.2.1.1 Construction de l'estimateur de Hill

Il ya plusieurs approches pour construire l'estimateur de Hill

Approche par EMV ([12])

On considère une suite de variables aléatoires i.i.d de loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$, de fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = 1 - x^{-\alpha} \text{ pour } x \geq 1$$

alors

$$f(x) = \alpha x^{-\alpha-1} \text{ si } x \geq 1$$

On veut trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance (E.M.V) de α pour cela, on donne $L(\cdot)$ la fonction de vraisemblance et les dérivées du logarithme de la fonction vraisemblance par rapport à α .

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha) &= \prod_{i=1}^n f(x_i) \\ &= a_n \left(\prod_{i=1}^n x_i^{-\alpha-1} \right) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \log L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log x_i \\ \frac{\partial^2 \log L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha)}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} < 0 \end{array} \right.$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de $\frac{1}{\alpha}$ et donc la statistique :

$$\hat{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_{(i,n)}$$

Une généralisation concerne

$$F(x) = Cx^{-\alpha}, \quad x > 0$$

Si on pose $C = u^\alpha$ avec $x \geq u > 0$ on obtient de l'E.M.V de α :

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{X_{i,n}}{u} \right) \right)^{-1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_{i,n} - \log u \right)^{-1}$$

2.2.1.2 Propriétés de l'estimation de Hill

1. Convergence en probabilité

Théorème 2.1. [4][6] Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoire i.i.d de fonction de répartition F avec $F \in MDA(H_\xi)$ et $\xi > 0$.

Soit $(k(n))_{n \geq 1}$ une suite d'entiers telles que $1 < k(n) \leq n$

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} k(n) \rightarrow \infty \\ \text{et} \\ \frac{k(n)}{n} \rightarrow 0 \end{array} \right. \text{ alors } \hat{\xi}_{(k(n),n)}^H \xrightarrow{p} \xi \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

2. Convergence forte (presque sûr)

Théorème 2.2. [4][6] Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires identiquement distribuées de fonction de répartition F avec $F \in MDA(H_\xi)$ et $\xi \in \mathbb{R}$.

Soit $(k(n))_{n \geq 1}$ une suite d'entiers telles que $1 < k(n) \leq n$

$$\text{Si } \begin{cases} \frac{k(n)}{n} \rightarrow \infty. \\ \frac{k(n)}{\log(\log(n))} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad \text{alors } \hat{\xi}_{(k(n),n)}^H \xrightarrow{p.s.} \xi \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

3. Normalité asymptotique

Théorème 2.3. [4][6] Soit $(k(n))_{n \geq 1}$ une suite d'entiers telles que $1 < k(n) \leq n$ et $\begin{cases} k(n) \rightarrow \infty \\ \frac{k(n)}{n} \rightarrow 0 \end{cases}$

Si la condition du second ordre est satisfaite avec $\sqrt{k(n)}A\left(\frac{n}{k(n)}\right) \rightarrow 0$

quand $n \rightarrow \infty$, alors $\sqrt{k(n)}(\hat{\xi}_{(k(n),n)}^H - \xi) \xrightarrow{L} N(0, \xi^2)$

Ce dernier nous permet de calculer l'intervalle de confiance pour $\hat{\xi}_{(k(n),n)}^H = (\hat{\xi} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{k}})$.

2.2.2 Estimateur de Pickands

Définition 2.2. L'estimateur de Pickands est défini par :

$$\xi_{(k,n)}^P = \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{X_{(n-k+1,n)} - X_{(n-2k+1,n)}}{X_{(n-2k+1,n)} - X_{(n-4k+1,n)}} \right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

L'estimateur de Pickands utilise les $4k$ statistiques d'ordre supérieur et donc la suite $k(n)$ doit rester inférieure à $\frac{n}{4}$.

2.2.2.1 Construction de l'estimateur de Pickands

Soit $U(x) = \left(\frac{1}{1 - F(x)} \right)^{\leftarrow}$ et posons $\varphi_t((x) = \int_1^x u^{t-1} du$ $x > 0$, $t \in \mathbb{R}$. De Haan (1984) montre que la relation est vérifiée ssi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U(tx) - U(t)}{U(ty) - U(t)} = \frac{\varphi_\xi(x)}{\varphi_\xi(y)} \text{ pour tout } x, y > 0, Y \neq 1. \quad (2.2.1)$$

En remplaçant dans (2.2.1) U par $\hat{U}_n = [1/1 - F_n]^{\leftarrow}$ (F_n étant la fonction de répartition empirique), t par $\frac{n}{2k}$, x par $\frac{1}{2}$ et y par 2, on a pour n suffisamment grand

$$2^{-\xi} \left(\frac{X_{(n-k+1,n)} - X_{(n-2k+1,n)}}{X_{(n-2k+1,n)} - X_{(n-4k+1,n)}} \right) = 1. \quad (2.2.2)$$

L'estimateur de *Pickands* $\xi_{(k,n)}^P$ est alors la solution de l'équation (2.2.2). Une explication possible à cela est que $\xi_{(k,n)}^P$, qui utilise l'information apportée par des distances entre deux statistiques ordonnées n'utilise pas le maximum de l'échantillon $X_{(n,n)}$, ce qui implique une perte d'information sur la queue de distribution.

2.2.2.2 Propriétés de l'estimation de *Pickands*

1. Convergence en probabilité

Théorème 2.4. [4][6] Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoire i.i.d de fonction de répartition F avec $F \in MDA(H_{\mu,\sigma,\xi})$ et $\xi > 0$.

Soit $(k(n))_{n \geq 1}$ une suite d'entiers telles que $1 < k(n) \leq n$

$$\text{Si } \begin{cases} k(n) \rightarrow \infty \\ \text{et} \\ \frac{k(n)}{n} \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{alors } \hat{\xi}_{(k(n),n)}^P \xrightarrow{p} \xi \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

2. Convergence forte (presque sûr)

Théorème 2.5. [4][6] Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires identiquement distribuées de fonction de répartition F avec $F \in MDA(H_{\mu,\sigma,\xi})$ et $\xi \in \mathbb{R}$.

Soit $(k(n))_{n \geq 1}$ une suite d'entiers telles que $1 < k(n) \leq n$

$$\text{Si } \begin{cases} \frac{k(n)}{n} \rightarrow \infty. \\ \\ \frac{k(n)}{\log(\log(n))} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad \text{alors } \hat{\xi}_{(k(n),n)}^P \xrightarrow{p.s.} \xi \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

3. Normalité asymptotique

Théorème 2.6. [4][6] Sous des conditions additionnelles sur la suite $k(n)$ et la fonction de répartition F , on a :

$$\sqrt{k}(\hat{\xi}_{(k,n)}^P - \xi) \xrightarrow{L} N(0, u(\xi)) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

où

$$v(\xi) = \frac{\xi^2(2^{2\xi+1} + 1)}{(2(2^\xi - 1) \log 2)^2}.$$

2.2.3 Le choix du nombre k

La difficulté consiste à choisir le nombre k de statistiques d'ordre à utiliser. Les résultats concernant les estimateurs de l'indice des valeurs extrêmes sont asymptotiques : ils sont obtenus lorsque $k \rightarrow \infty$ et $k/n \rightarrow 0$. Comme en pratique, on ne dispose que d'un nombre d'observations n fini, il s'agit de choisir k de manière à ce que l'on dispose de suffisamment de matériel statistique tout en restant dans la queue de distribution ($k \ll n$).

2.2.3.1 Méthode graphique

c'est une méthode la plus simple pour la détermination de k . Elle consiste à tracer le graphe $(k, \hat{\xi}_{k(n),n}^H)$

et de prendre la valeur où $(k, \hat{\xi}_{k(n),n}^H)$ devient horizontal. Cet estimateur est valable seulement dans le domaine d'attraction de Fréchet c'est à dire si $\xi > 0$. Pour généraliser aux autres domaines d'attractions, différents estimateurs ont été proposés, entre autres l'estimateur de Dekkers-Einmahl-de Hann et l'estimateur de Pickands.

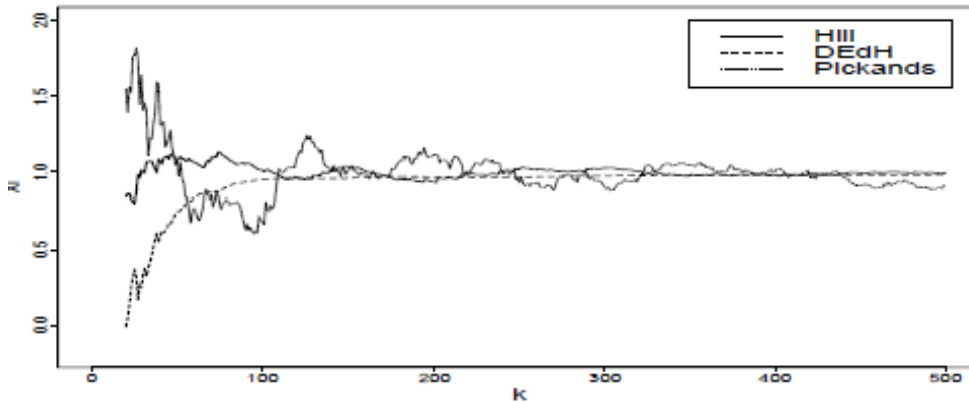


Figure 2.1: Le graphe de $(k, \hat{\xi}_{k(n),n}^H)$ pour les différents estimateurs de ξ .

2.2.3.2 Méthode analytique

Il est nécessaire pour donner une précision à l'estimateur $(\hat{\xi}_{k(n),n}^H)$, de calculer l'erreur moyenne quadratique (MSE), elle est en fonction de k :

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\xi}_{k(n),n}) &= MSE(\hat{\xi}_{k(n),n} - \xi)^2 \\ &= biais^2(\hat{\xi}_{k(n),n}) + var(\hat{\xi}_{k(n),n}). \end{aligned}$$

Le choix optimal de k , correspond à minimiser MSE. Concernant l'estimateur de Hill pour des fonctions appartenant au domaine d'attraction maximale de Fréchet, de Haan et Peng en 1998 ont proposé de retenir le nombre observation k_{opt} qui minimise l'erreur moyenne quadratique de l'estimateur de Hill. i.e.

$$k_{opt} = \begin{cases} 1 + 2^{2\xi/\left(\frac{2\xi+1}{2\xi}\right)} \left(\frac{(\xi+1)^2}{2\xi}\right)^{1/(2\xi+1)} & \text{si } 0 < \xi < 1. \\ 2n^{2/3} & \text{si } \xi > 1. \end{cases}$$

2.2.3.3 Procédure numérique

Il existe plusieurs algorithmes de procédures adaptives pour trouver un estimateur $\hat{k}_{opt}$ de k_{opt} :

$$\frac{\hat{k}_{opt}}{k_{opt}} \xrightarrow{p} 1 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

alors $\hat{\xi}_{(\hat{k}_{opt},n)}$ converge asymptotiquement vers $\hat{\xi}_{(k_{opt},n)}$.

Remarque 2.2. – Si k est petit, $\hat{\xi}_{(k,n)}$ utilise peu d'observations et on a une grande variance.
– Si k est grand, le biais est grand, la variance est petite.

Pour une meilleure exactitude, le nombre de statistiques d'ordre utilisées dans les procédés d'estimation doit être intermédiaire, C'est à dire, ni trop petit ni trop grand.

2.2.4 Estimateur basé sur les graphes de mean excès plots (MEP)

Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F et d'espérance finie ; la fonction moyenne des excès (mean excès function) de X est définie par :

$$\begin{aligned} e(u) &= E[X - u/X > u] \\ &= \frac{1}{F(u)} \int_u^{x_F} \bar{F}(y) dy \quad \text{pour } u > 0. \end{aligned}$$

Le MEP correspond au graphe associé aux points $(u, e_X(u))$.

Si $F \in MDA(H_\xi)$ avec $\xi > 0$, alors on peut écrire

$$e_{\log X}(\log u) = E[\log X - \log u/X > u] \rightarrow \xi, \quad n \rightarrow \infty$$

En remplaçant u par $X_{(k+1,n)}$ dans l'expression précédente, on montre que $e_{\log X}(X_{(k+1,n)})$ est un estimateur consistant de ξ . On en déduit que :

$$\hat{\xi} = e_{\log X}(X_{(k+1,n)}).$$

Chapitre 3

Estimation des quantiles extrêmes et de la Value at Risk

3.1 Estimation des quantiles extrêmes

On désire estimer x_p le quantile d'ordre $(1 - p)$ quand p est petit. Si la fonction de répartition F est continue strictement croissante, cela revient à résoudre l'équation $F(x_p) = 1 - p$.

Définition 3.1. Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées i.i.d de fonction de répartition commune F . On définit le quantile extrême par :

$$x_p = F^{-1}(1 - p).$$

avec $p \rightarrow 0$, $np \rightarrow c$ pour $n \rightarrow \infty$ et $c > 0$

3.2 Méthodes d'estimation d'un quantile extrême

Plusieurs méthodes d'estimation d'un quantile extrême ont été proposées dans la littérature, principalement la méthode des blocks (*Block maxima* noté *BM*), qui modélise la distribution des extrêmes par la loi des extrêmes généralisées (*GEV*) et la méthode *POT* qui modélise la distribution des excès au-dessus d'un seuil élevé par la distribution de Pareto généralisée (*GPD*), méthode de régression et méthode du *Q.Q-plot*, ect ...

3.2.1 Méthode des Blocs

C'est une méthode qui est basée sur le théorème de *Fisher-Tippett*, en supposant que l'échantillon de maximum suit exactement une loi *GEV*.

3.1.1.1 Construction des blocs

On divise l'échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ en k blocs de même taille n (soit $N = nk$).

Le j^{eme} bloc est défini par $(X_{(j-1)n+1}, \dots, X_{(j-1)n+n})$, il faut que la taille n et le nombre de bloc soient suffisamment grands.

On calcule le maximum $M_{n,j}$ de bloc j défini par :

$$M_{n,j} = \max \{X_{(j-1)n+1}, \dots, X_{(j-1)n+n}\}, \quad j = \{1, \dots, k\}.$$

3.1.1.2 Estimation des paramètres de la GEV

L'estimation des paramètres ξ, μ, σ est effectuée par les méthodes suivantes:

- Méthode de maximum de vraisemblance *E.M.V*
- Méthode des moments
- Méthode des moment pondérés (*PWM*)

3.1.1.3 Estimation du quantile de la GEV

Il suffit d'inverser la fonction $H_{\mu,\sigma,\xi}$ pour obtenir le quantile $x_p = H_{\mu,\sigma,\xi}^{-1}(1-p)$.

$$x_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} \{1 - (-\log(1-p))^{-\xi}\} & \text{si } \xi \neq 0. \\ \mu - \sigma \log \{-\log(1-p)\} & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

le paramètre ξ étant inconnu, on le remplace par leur estimateur

1. En utilisant l'estimateur de Hill

Considérons les fonctions de répartition appartenants au domaine d'attraction maximal de Fréchet ($\xi > 0$), alors la fonction de survie peut se mettre sous la forme :

$$\bar{F} = x^{-\frac{1}{\xi}} L(x).$$

Où L est une fonction à variation lente.

On peut donc écrire :

$$\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(X_{n-k})} = \frac{L(x)}{L(X_{n-k})} \left(\frac{x}{X_{n-k}} \right)^{-\frac{1}{\xi}}.$$

et en considérant que le rapport des fonctions à variation lente et proche de 1, on trouve :

$$\overline{F} \sim \overline{F}(X_{n-k}) \left(\frac{x}{X_{n-k}} \right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

On déduit de cette expression un estimateur de $F(x)$ pour $x > X_{(n-k)}$:

$$\overline{F} = 1 - \frac{k}{n} \overline{F}(X_{n-k}) \left(\frac{x}{X_{n-k}} \right)^{-1/\xi_{n,k}^H}$$

$$\hat{x}_p^H = X_{n-k} \left(\frac{n}{k} (1-p) \right)^{-\xi_{n,k}^H}$$

3.2.2 Méthode POT (*Peak Over Threshold*)

C'est une méthode qui est basée sur l'approximation de la distribution des excès par la loi de *Pareto* généralisée.

La méthode consiste à suivre les étape suivantes :

1) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon, on choisit un certain seuil élevé u . Notons N_u le nombre d'observation qui dépassent le seuil u .

On définit les v.a des excès $Y_i = X_i - u \geq 0$.

2) Soit $(Y_1, \dots, Y_{N_u})$ un échantillon des excès au dessus du seuil u , de distribution conditionnelle :

$$F_u(x) = P[X - u \leq x / X > u] = \frac{F(x+u) - (u)}{1 - F(u)}$$

Le théorème de *Belkema-De Haan-Pickands* nous donne l'approximation de cette distribution :

$$F_u(x) \approx G_{\xi,\beta}(x), \quad x > 0, \quad u \rightarrow \infty$$

Ou encore

$$\overline{F}_n(x) \approx \overline{G}_{\xi,\beta}(x), \quad x > 0, \quad u \rightarrow \infty$$

3) La loi F peut se décomposer de la manière suivante :

$$F(x) = P[X > u] \times F_n(x + u) + P[X \leq u], \text{ pour } x > u$$

Cette distribution peut être estimée par :

$$\hat{F}(x) = (1 - F_n(u)) \times G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(x) + F_n(u), \text{ pour } x > u$$

Où $F_n(u)$ est la fonction de répartition empirique au point u , tel que :

$$F_n(u) = 1 - \frac{N_u}{n}$$

Donc $\hat{F}$ est la loi *GPD* de paramètres :

$$\begin{aligned} \xi &= \hat{\xi} \\ \beta &= \hat{\beta}(1 - F_n(u))^{\hat{\xi}} \\ \text{et} \\ \mu &= u - \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left((1 - F(u))^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \end{aligned}$$

on peut écrire aussi :

L'estimateur résultant pour la queue $\bar{F}(x + u)$ prend la forme :

$$\hat{\bar{F}}(x + u) = \frac{N_u}{n} \left(1 + \frac{\hat{\xi}}{\hat{\beta}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}$$

et

$$\hat{F}(x + u) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{x}{\hat{\beta}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}$$

D'où

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{x - u}{\hat{\beta}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}$$

4. Finalement, on inverse la fonction définie avant et l'estimateur du quantile extrême est donnée par :

$$\hat{x}_p = G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}^{-1} \left(\frac{1-p - F_n(u)}{1 - F_n(u)} \right) = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{n}{N_u} (1-p)^{-\hat{\xi}} \right) - 1 \right].$$

On obtient

$$\hat{x}_p^{Pot} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{n}{N_u} (1-p)^{-\hat{\xi}} \right) - 1 \right].$$

Remarque 3.1. Cette méthode présente un avantage par rapport à la méthode des blocs, en ce sens qu'il est plus facile d'avoir un échantillon d'excès que des maximum. Dans la pratique, on remplace u par $X_{n-k+1,n}$ qui représente la k plus grande observation de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.

3.3 Estimation de la VaR

Le risque de marché correspond à un risque de perte des portefeuilles des investisseurs dû aux variations des marchés financiers : marchés des instruments de base (actions, obligations, devises, matières premières), mais aussi marchés des produits dérivés (contrats à terme, options). Pour gérer le risque de marché, il faut donc mesurer de manière précise ce risque extrême. La mesure qui répond à cela est la VaR (*Value at Risk*).

3.4 Définition de la VaR

Définition 3.2. Soit $0 < p < 1$, F est la distribution de la perte X d'un investissement dans une période de temps donnée. Les valeurs typiques pour $1-p$ sont $1-p = 0.95$ et $1-p = 0.99$.

La VaR est le quantile d'ordre $1-p$ défini par :

$$VaR_p = F^{-1}(1-p)$$

où F^{-1} est la fonction inverse de F (dans le cas où F n'est pas inversible, on utilise l'inverse généralisé). Notons :

$$\begin{aligned} x_p &= F^{-1}(1-p) \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1-p\} \end{aligned}$$

3.5 Estimation de la VaR par la théorie des valeurs extrêmes

Il existe plusieurs méthodes pour estimer la VaR, On s'intéresse aux méthodes semi paramétriques.

La VaR est un quantile extrême. Dans le chapitre précédent, on a cité différentes méthodes pour estimer ce quantile extrême.

3.5.1 VaR par la méthodes des blocs

Supposons que l'échantillon des maxima suit exactement une loi *GEV*; Le quantile extrême x_p (voir 3.1.1) est la *VaR*.

En remplaçant le paramètre par son estimateur :

1. Approche par l'estimateur de Hill

Le quantile extrême est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{x}_p^H &= X_{n-k} \left(\frac{n}{k} (1-p) \right)^{-\xi_{n,k}^H} \\ &= X_{n-k} + X_{n-k} \left[\left(\frac{n}{k} (1-p) \right)^{-\xi_{n,k}^H} - 1 \right]\end{aligned}$$

Résultat obtenu dans (chapitre 3, section (3.3)).

L'estimation de la *Value at Risk* est donnée par la formule suivante :

$$\widehat{VaR} = X_{n-k} + X_{n-k} \left[\left(\frac{n}{k} (1-p) \right)^{-\xi_{n,k}^H} - 1 \right]$$

où $\xi_{n,k}^H$ est l'estimateur de Hill.

2. Approche par l'estimateur de Pickands

$$VaR_p = x_{k,p}^P = \frac{\left(\frac{k}{n(1-p)} \right)^{\xi^P} - 1}{1 - 2^{-\xi^P}} (X_{(n-k+1,n)} - X_{(n-2k+1,n)}) + X_{(n-k+1,n)}$$

où ξ^P est l'estimateur de Pickands .

3.5.2 VaR par la méthode POT

La VaR n'est rien d'autre qu'un quantile extrême calculé à partir de la loi asymptotique des extrêmes (Distribution de Pareto Généralisée *GPD*), obtenue en modélisant les pertes (ou profits) extrêmes par la méthode des excès. Ainsi, la VaR_p correspondant au modèle *GPD* inconditionnel, pour un horizon donné T et une certaine probabilité p , ou de façon équivalente à un niveau de confiance typiquement $1 - p = 0.95$ et $1 - p = 0.99$ est :

$$\widehat{VaR}_p = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{k}{N_u} (1 - p) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right]$$

où $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$ représentent les estimateurs des paramètres de la loi *GPD*.

Chapitre 4

Application

4.1 Introduction

La VaR (Value at Risk) est très utilisée dans les milieux financiers. Elle permet de mesurer la perte maximale liée à une position de marché, sur une fenêtre de temps particulière (par exemple une période de temps de t à $t + h$) et pour un niveau de probabilité donné en supposant que l'on connaisse la loi du rendement du portefeuille ; Dans le cadre d'une probabilité égale à 95%. Cela signifie simplement que dans 95% des cas, la perte ne devrait pas dépasser cette mesure de risque.

De plus la VaR repose sur l'idée de coupler le montant des pertes (quantification brute) et la fréquence des pertes (prise en compte du risque).

4.2 Indice S&P500

Le S&P500 est un indice boursier basé sur 500 grandes sociétés cotées sur les bourses américaines.

L'indice S&P500 a été créé en 1920, il est possédé et géré par Standard&Poor's, l'une des trois principales sociétés de notation financière.

Les rendements quotidiens sont observés sur la période du 03/03/2007 au 21/04/2016.

L'objectif principal de cette étude est d'appliquer les différentes méthodes de calcul d'un quantile extrême.

Le logiciel R met à notre disposition des outils utiles pour réaliser l'analyse descriptive de l'indice S&P500 et calculer la VaR par les différentes méthodes.

4.2.1 Analyse descriptive de l'indice financier

La figure (5.1) représente la série brute de l'indice S&P500 sur les 9 dernières années. La crise financière de 2008 est clairement visible au 500 jour de la serie.

```
> plot(SP500,xlabel = 'Time')
```

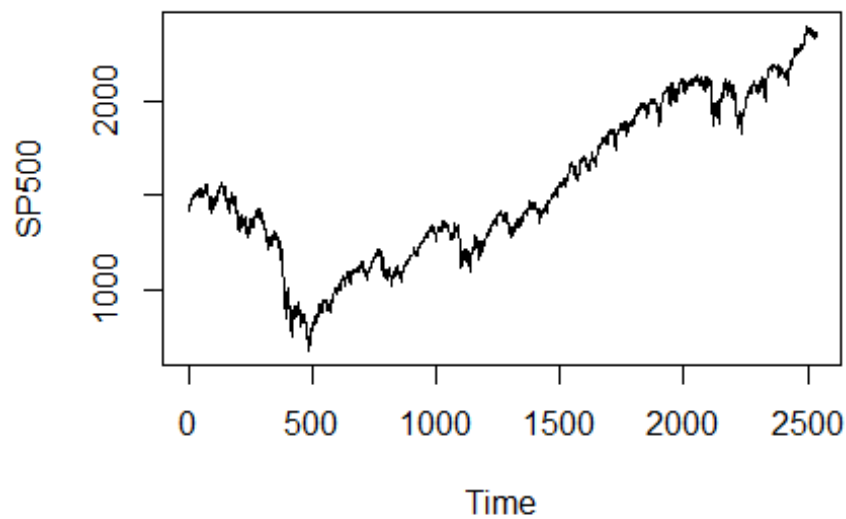


Figure 4.1: Graphique de l'indice S&P500 entre Mars 2007 et Avril 2016.

```
> summary(SP500)
```

Min	1st Qu	Median	Mean	3rd.Qu	Max.
676.5	1228.0	1447.0	1543.0	1957.0	2396.0

```
> hist(SP500)
```

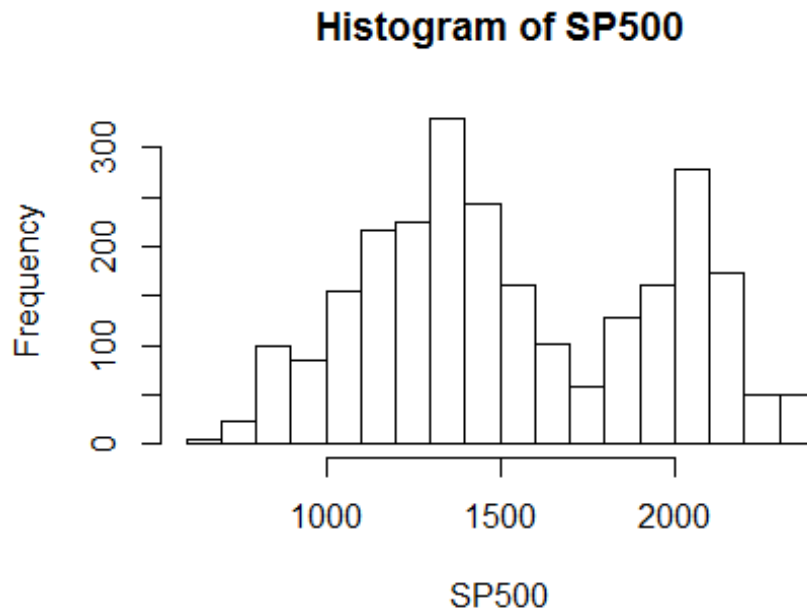


Figure 4.2: Histogramme du S&P500.

4.2.2 Analyse descriptive des log des rendements de S&P500

L'objectif de la procédure suivante est d'obtenir une série des logarithmes des rendements puis calculer la VaR par des différentes méthodes.

Soit p_t le prix d'un actif à la date t et r_t le logarithme du rendement correspondant :

$$\begin{aligned} r_t &= \log(p_t) - \log(p_{t-1}) \\ &= \log(1 + R_t) \end{aligned}$$

où $R_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$ désigne la variation relative des prix.

On considère la series des logarithmes des rendements suivante :

% Insertion des données

```
> log.rend.sp500 <- diff(log(SP500))
> log.rend.sp500

[1] 2.593652e-03 9.237328e-03 1.112216e-03 3.045304e-03
[5] 5.885673e-04 2.613206e-03 -6.594511e-03 6.187080e-03
.
.
.
[993] -1.362687e-03 -1.905125e-02 7.055531e-03 -6.067686e-03
[997] -1.126353e-02 -1.968749e-02 1.330929e-02 4.293130e-03
```

Le graphe des logarithmes des rendements est donné par :

% Graphe des logs rendements

```
> plot(log.rend.sp500,type='l')
```

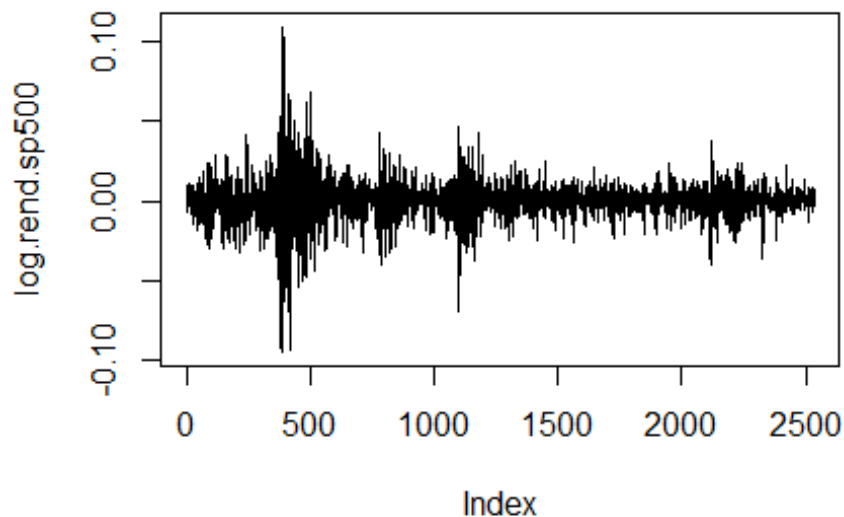


Figure 4.3: Logarithmes des rendements de S&P500

Ainsi que l'histogramme des logarithmes des rendements de l'indice S&P500 et la courbe de loi normale $N(\mu, 2)$.

où $\mu = \text{mean}(\text{log.rend.sp500})$ et $\sigma^2 = \text{sd}(\text{log.rend.sp500})$ sont la moyenne et la variance calculées à partir de la série des logarithmes des rendements.

% Histogramme de logs rendements

```
> hist(log.rend.sp500,prob=T,breaks=500,col="gray")
> curve(dnorm(x,mean(log.rend.sp500),sd(log.rend.sp500)),add=T, lwd=2)
```

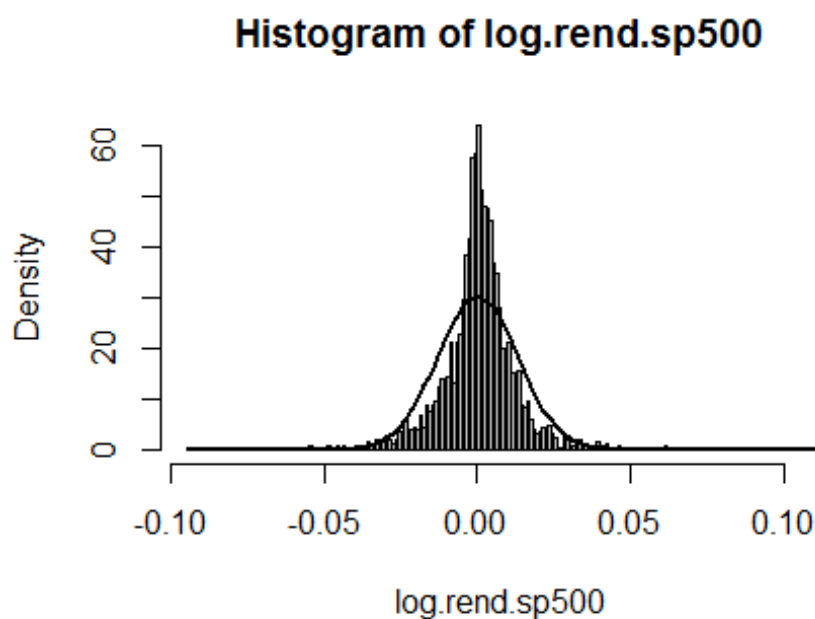


Figure 4.4: Histogramme des logarithmes des rendements.

% Analyse descriptive de la serie des logs rendements

```
> summary(log.rend.sp500)
```

min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
-9.470e-02	-6.131e-03	5.454e-04	-3.748e-05	6.187e-03	1.096e-01

L'analyse descriptive des logarithmes des rendements ne permet pas de tirer des conclusions sur la queue de la distribution.

4.3 La VaR normale

Supposons que les logarithmes des rendements suivent une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

Pour calculer la VaR de ces rendements, il faut calculer le quantile $x_{0.95}$ de $N(0, 1)$, et estimer μ et σ^2 par la moyenne et la variance empirique de la series des logarithmes des rendements.

```
> N=length(log.rend.sp500)
> N

[1] 2533

% Simulation d'un échantillon de n variables suivent la loi normale
> x = rnorm(N,mean=0,sd=1)
> x_0.95 = quantile(x, 0.95)
> x_0.95

95%
1.64005 % Quantile au niveau 95%

> sum=numeric(N);
> sum=0;
> sum2=0;

% Calcul de  $\sigma^2 = \text{sum}$  et du  $\mu = \text{mean}$ 
> for(i in 1:N){
+ sum=sum+x[i]
+ sum2=sum2+x[i]^2}

> mean=sum/N;
> S=sum2/N-mean^2;
> S=sum2/N-mean^2;
> S

[1] 1.046925

> mean

[1] -0.03604148
```

On rappelle que la VaR normale est donnée par : $VaR_{normale} = \mu + .\sigma x_{0.95}$.

```
> VaR=mean+x_0.95*sqrt(S)
> VaR

[1] 95%
1.642047 % VaR normale au niveau 95%
```

4.4 La VaR historique

Cette technique utilise la fonction de répartition empirique.

```
> Fn_sp500<- ecdf(SP500)
```

Puisque la loi de distribution des rendements est inconnue, on va estimer la VaR des logarithmes des rendements par un quantile empirique, avec un seuil $1 - \alpha = 0.95$.

```
> quantile(log.rend.sp500, 0.95)

[1] 95%
0.0177168 % Quantile empirique au niveau 95%
```

Pour calculer la VaR sur tout l'historique du S&P500, on utilise :

```
> varh=c()

> for (i in 31:N)
+ {
+   varh[i-30]=quantile(log.rend.sp500[(i-30):i],prob=0.95,na.rm = TRUE)
+ }

> Var_hist <- mean(varh)
> Var_hist

[1] 0.01708672 %VaR historique au niveau 95%
```

```
> plot(Fn_sp500,main="Fonction de répartition empirique de l'indice S&P500")
```

Fonction de répartition empirique de l'indice S&P

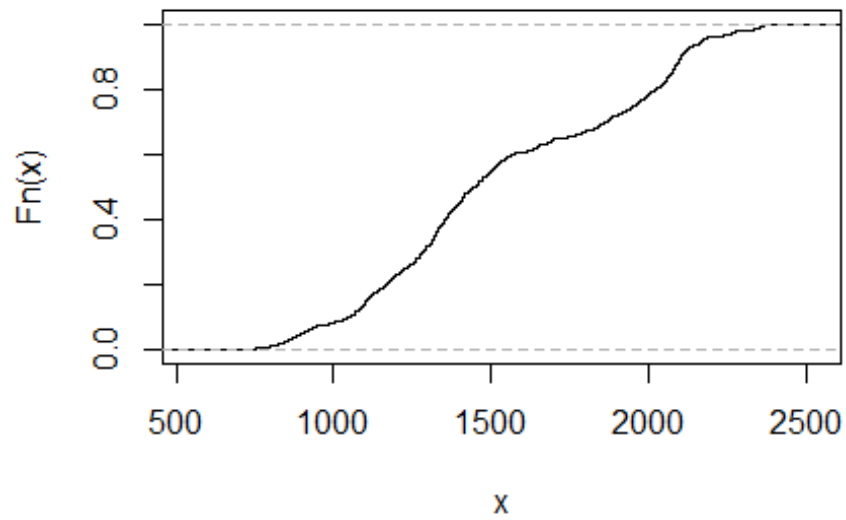


Figure 4.5: La fonction de répartition empirique.

4.5 La VaR TVE

La théorie des valeurs extrêmes donne deux méthodes principales ; la première est la méthode Blocs Maximas (BM) et la deuxième est la méthode de Peaks Over Threshold (POT).

4.5.1 Estimation de la VaR par la méthode POT

Cette méthode consiste à utiliser un échantillon des excès indépendants.

On suppose que la loi des excès est la distribution de Pareto Généralisée (voir Figure (5.6)).

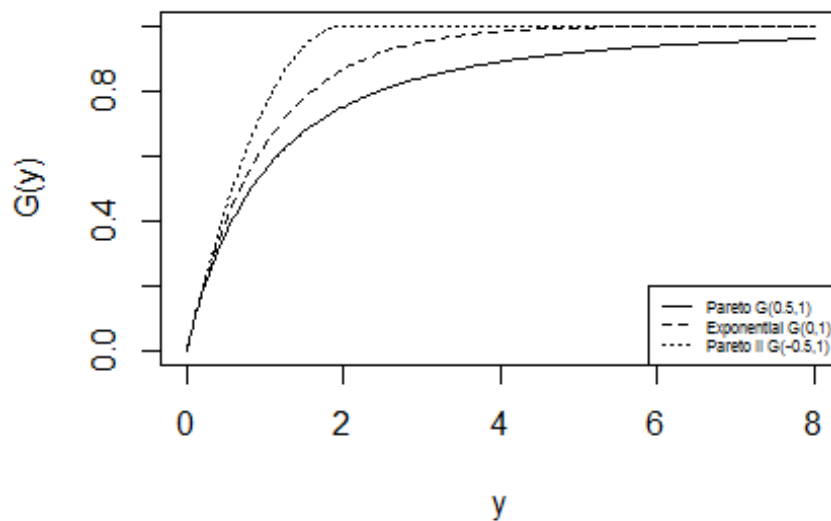


Figure 4.6: La distribution de Pareto généralisée $G_{\xi,1}(x)$, pour Pareto ($\xi = 0.5$), exponentiel ($\xi = 0$) et Pareto de type II ($\xi = -0.5$).

5.5.1.1 Le choix du seuil

Le choix du seuil u pour des estimateurs précis doit être grand ; On va calculer u par des différentes méthodes :

1. Le graphe de la fonction moyenne des excès

En utilisant le logiciel R, on va tracer **le graphe de la fonction moyenne des excès** notée $e(u)$, on obtient le graphe suivant:

```
> meplot(log.rend.sp500)
```

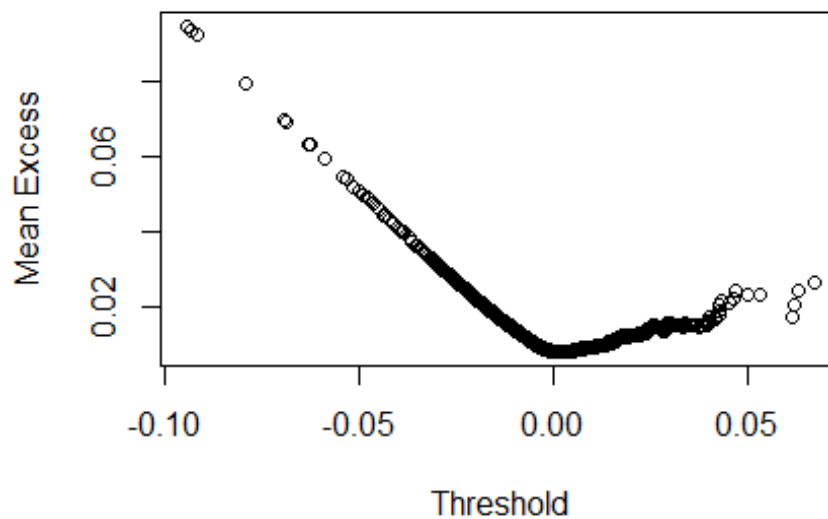


Figure 4.7: La distribution moyenne des excès.

D'après le graphe, le seuil $u_0 = 0.025$ tel que le nuage de points $(u, e(u))$ soit approximativement linéaire pour $u > u_0$; Nous estimons la *GPD* par la méthode de maximum de vraisemblance et nous obtenons le résultat suivant :

```
% Estimation de la VaR par la méthode max de vraisemblance au seuil  $u_0 = 0.025$ .
> t <- gpd(log.rend.sp500, 0.025, method = "ml")
> riskmeasures(t, 0.95)

      p      quantile
[1,] 0.95      0.01837529
```

quantile désigne la VaR

2. Calculer u sous R

En utilisant directement la commande «findthresh», et préciser la taille de l'échantillon des excès par $N_u = 100$.

```
% Sélection de seuil (threshold)
> findthresh(log.rend.sp500,100)

[1] 0.02030268

> findthresh(log.rend.sp500,50)

[1] 0.02824382
```

Pour une taille de l'échantillon des excès $N_u = 100$, on trouve la valeur de u est approximativement égale à u_0 (valeur calculer à partir du graphe de la fonction moyenne des excès).

Nous estimons la GPD par la méthode de maximum de vraisemblance, et nous obtenons le résultat suivant :

```
% Injection de seuil choisi dans la GPD estimé et estimation de la VaR
> t <- gpd(log.rend.sp500, 0.02030268, method = "ml")
> riskmeasures(t, 0.95)

      p      quantile
[1,] 0.95      0.01834948
```

5.5.1.2 L'estimateur de Hill

En estimant ξ_k^H à partir d'un échantillon de variables aléatoires de fonction de répartition est la loi des valeurs extrêmes généralisées (*GEV*).

```
> hill(log.rend.sp500)
```

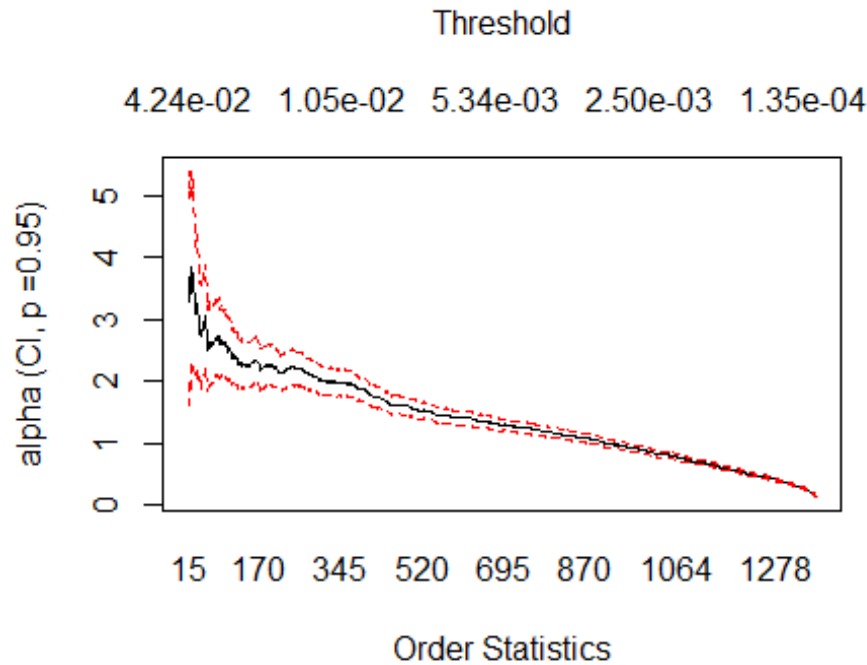


Figure 4.8: Hillplot(k, ξ_k^H).

le graphe Hillplot, nous permet d'avoir l'estimateur du paramètre ξ_k^H en fonction de k qui est le nombre le plus élevé de statistiques d'ordre (nombre des excès) ;

La stabilité est atteinte pour $k = 0.02$ dans ce graphique.

Une fois le paramètre de la GEV estimé, nous le remplaçons dans la fonction du quantile GEV et nous obtenons le résultat suivant :

```
% Estimation de quantile de la GEV au seuil  $u = 0.02$ .
```

```
> qgev(0.95, 0.02)
```

```
[1] 3.060189
```

Donc la valeur ci-dessus représente la VaR.

4.5.2 Estimation de la VaR par la méthode des blocs

En commençant par donner une représentation graphique de la densité h_ξ *GEV*.

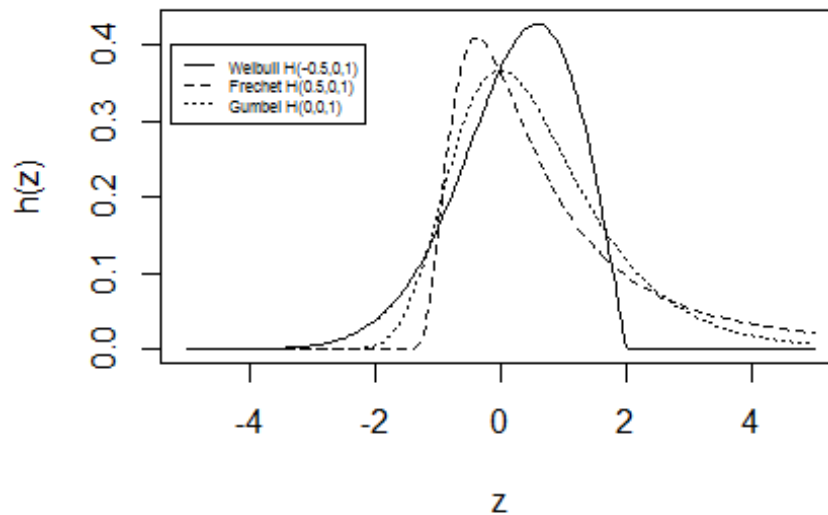


Figure 4.9: Lois des valeurs extrême généralisée h_ξ pour, Fréchet($\xi = 0.5$) Weibull($\xi = -0.5$) and Gumbell ($\xi = 0$).

La méthode Blocs Maximas consiste à sélectionner la valeur maximale enregistrée chaque mois, puis ajuster l'échantillon des maximums mensuels à une loi des valeurs extrêmes généralisée (*GEV*).

Sélection de la taille des blocs

On a pris la taille d'un bloc $n = 30$ (C'est à dire mensuelle)

```
> fit=gev(log.rend.sp500,block=30)
> fit$n.all
```

```
[1] 2533
```

```

% Calcul de nombre de blocs
> fit$n

[1] 85

> fit$data

[1] 0.010693898 0.015070067 0.023864091 0.028789579
[5] 0.013693454 0.028677789 0.021215548 0.036457110
.
.
.
[77] 0.013588628 0.017614158 0.008566644 0.014570397
[81] 0.021980158 0.013077306 0.007994032 0.013581182
[85] 0.008576441

> fit$block

[1] 30

% Estimation des paramètres de la GEV  $\xi$ ,  $\sigma$  et  $\mu$ 
> fit$par.ests

      xi      sigma      mu
0.370266726 0.006601796 0.015547235
> fit$converged

[1] 0
> class(fit)

[1] "gev"

% Injection des paramètres  $\xi$ ,  $\sigma$  et  $\mu$  dans la qgev
> qgev(.95,0.370266726,0.006601796,0.015547235)

[1] 0.09072559

```

On constate qu'à l'aide de R, la théorie des valeurs extrêmes nous offre plusieurs méthodes pour l'estimation d'un quantile extrême.

4.6 Comparaison entre les méthodes

Ce tableau regroupe les différentes valeurs de VaR calculées précédemment :

Méthode	VaR
Méthode <i>P.O.T</i>	0.01834948
VaR Historique	0.01708672
Méthode des blocs	0.09072559
VaR Normale	1.642047

Table 4.1: La VaR pour les différentes méthodes de niveau 0.95.

La VaR calculer par la méthode *POT* et la VaR historique donne approximativement le même résultat mais La méthode des blocs nous donnons un quantile extrême très grand, cela signifie qu'il a une perte d'information lors de la construction des blocs.

La VaR Normale donne un résultat éloigné par rapport aux autres cela dû à la loi supposée qui ne suit pas une loi Normale.

Une bonne appréciation de l'estimateur des quantiles extrêmes nous conduit à calculer se dernier par des différentes méthodes.

Il n'est pas possible d'identifier une méthode universellement applicable pour le calcul de la VaR , chaque méthode présente ses propres limites.

Conclusion

D'après ce travail, nous avons constaté une variété de méthodes d'estimation des paramètres que ce soit des lois ou des estimateurs.

Les points abordés dans ce mémoire nous ouvrent la voie à d'autres pistes de recherche intéressantes qui méritent d'être considérées. Nous avons traité la théorie des valeurs extrêmes et quelques applications sous indépendance, appliquant deux grands critères (ou théorèmes), la représentation de *Jenkison-Von mises GEV* (utilisé dans la méthode des blocs) qui regroupe les trois formes de la distribution de maximum et le théorème de *Balkema-De Haan-Pickands* qui se base sur la *GPD* (utilisé dans la méthode *Peak over Threshold POT*).

Le premier point qui mérite d'être considéré est de chercher d'autres méthodes dans le but d'améliorer l'approximation des valeurs des estimateurs aux valeurs réelles, en prenant en considération le cas où il y a de dépendance entre les événements.

Le second point à envisagé est l'estimation d'un quantile extrême sous données manquantes pour certains modèles de séries chronologiques.

Bibliographie

- [1] Barry C. Arnold, N. Balakrishnan, H.N. Nagaraja (1992). *A First Course in Order Statistics*. Siam Society for Industrial and Applied Mathematic .
- [2] Ch. Hurlin (2007) *Master Econometrie Et Statistique Appliquée (ESA)*,. Université d'Orléans .
- [3] De Haan L., Ferreira A. (2006).) *Extreme Value Theory : An Introduction* Springer-Verlag..
- [4] Embrechts P, Kluppelberg C, Mikosch T. (1997). *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.
- [5] J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Teugels (2005), *.Statistics of Extremes Theory and Applications, Copyright 2004 John Wiley and Sons*.
- [6] Jean François Delmas. Benjamin Jourdain (2005). *Modèles aléatoires. Applications aux sciences de l'ingénieur et du vivant*. Champs sur marne.
- [7] I. Mathlouthi, A. Zenaidi (2006), *Theorie Des Valeurs Extremes, Vs, Methodes Classiques De Calcul De La VaR : Application au Tunindex, ECOFI*, Institut des Hautes Etudes Commerciales, Carthage, Tunisie.
- [8] Kotz S et Nadarajah S 2000. *Extreme Value Distributions*. Imperial College Press,
- [9] L. Gardes. (2003) . *Estimation d'une fonction quantile extrême*. Thèse de l'Université Montpellier 2.
- [10] Laurent GARDES (2010). *Estimation de quantiles extremes pour des lois queue lourde en présence de covariables*. en collaboration avec Stéphane Girard (INRIA Rhône-Alpes).

- [11] P. Clauss (2008). *Statistique des risques extrêmes application à la mesure du risque de marché*. Ensai filière gestion des risques et ingénierie financière.
- [12] Pickands, J (1975). *Statistical Inference Using Extreme Order Statistics*. The Annals of Statistics, 3, 119-131.
- [13] T. Duong (2011), textitks : Kernel density estimation for bivariate data.
- [14] T. Roncalli (2001), *Cours ENSAI de 3ème année : Introduction à la Gestion des Risques*, Groupe de Recherche Opérationnelle, France.
- [15] Youcef. Berkoun (2007) . *Statistiques inférentielle*. Cours de 1er année école doctorale de statistique. U.M.M.T.O, Tizi Ouzou.