

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE M'HAMED BOUGUERRA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Master Mathématiques Financières

Par

BELHOUT Ali , BOUHADJAR Ali

THÈME

**Équation différentielle stochastique
et Application**

Soutenu publiquement, le 01/ 07 /2017 devant le jury composé de:

Mr. KHALDI	Khaled	Président
Mr. TAZEROUTI	Moussa	Encadreur
Mr. HENNECHE	Mohamed	Examineur

Remerciements

Nos remerciements s'adressent tout naturellement à notre promoteur, TAZEROUTI Moussa. Nous souhaitons lui exprimer nos profondes gratitudee pour son accompagnement constant ses conseils, son soutien, sa disponibilité, son écoute et sa patience. Nous avons eu le privilège de bénéficier d'un excellent encadrement scientifique, ce qui a très largement contribué à la réussite de ce travail.

Ensuite, je tiens à exprimer mes remerciements aux membres de jury, professeur KHALDI Khaled président ainsi que Mr HENNECHE Med qui ont accepté d'évaluer notre travail certaines personnes ne peuvent être oubliées mes enseignants : GRAZEM Med, RAHMOUNE Ahmed, AKLIOUAT Kamel).

J'ai également une pensée pour tous mes proches, famille et amis, qui ont fait preuve de beaucoup de patience et m'ont toujours encouragé. J'espère maintenant être plus disponible et leur rendre ce que je leur dois.

. Enfin, je souhaite remercier en particulier Mon oncle vava Rachid et mes parents pour leurs efforts, encouragements, pour le temps qu'ils ont consacré pour moi et pour tout.

Table des matières

Introduction générale	v
1 Introduction au calcul stochastique	1
1.1 Processus stochastique	1
1.1.1 Les processus gaussiens	2
1.1.2 Processus stationnaire	2
1.2 Espérance conditionnelle	3
1.2.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle	3
1.3 Mouvement Brownien	4
1.3.1 Propriétés trajectorielles du mouvement Brownien	4
1.4 Filtrations, Martingales et temps d'arrêt	6
1.4.1 Filtrations	6
1.4.2 Martingales	7
1.4.3 Temps d'arrêt	7
1.4.4 Martingale locale	7
1.5 Intégrale stochastique	8
1.6 Calcul d'Itô	9
1.6.1 Processus d'Itô	9
2 Équation différentielle stochastique	11
2.1 Introduction	11
2.2 Existence et unicité de solution	13
2.2.1 Propriétés de la solution d'une EDS:	13

2.3	Solution forte d'une EDS	16
2.3.1	Processus d'Ornstein Uhlenbeck :	17
2.3.2	Brownien géométrique	20
2.4	Théorème de Girsanov	22
2.4.1	Changement de Probabilité	22
2.5	Solution faible d'EDS	23
3	Le calcul stochastique appliqué à la finance et modèles financiers	28
3.1	Introduction	28
3.2	Notations, terminologies et quelques définitions	29
3.2.1	Les options en finance	29
3.2.2	Le prix d'exercice	30
3.2.3	Payoff d'une option	30
3.2.4	La durée de vie d'une option	35
3.3	Marché financier	35
3.3.1	Equilibre d'un marché financier	35
3.3.2	Absence d'opportunité d'arbitrage	36
3.3.3	Effcience d'un marché	36
3.3.4	Mesures de sensibilités des options	36
3.4	Modèle binomial	36
3.4.1	Modèle binomial à une période	36
3.4.2	Modèle binomial à n périodes	37
3.4.3	Calcul de la prime d'une option européenne avec le modèle binomial .	39
4	Estimation et Simulation d'équations différentielles stochastiques	40
4.1	Estimation paramétrique des EDS	40
4.1.1	Maximum de vraisemblance	40
4.1.2	Vraisemblance approchée	41
4.2	Estimation non paramétrique des EDS	42
4.3	Estimation non-paramétrique de b et de σ	43
4.3.1	Estimateurs a noyau	43

4.4	Simulation des EDS	44
4.5	Schéma d'Euler- Maruyama :	45
4.6	Schéma de Milstein	47
4.7	Simulation d'un mouvement Brownien standard:	50
4.7.1	Discrétisation du temps :	50
4.7.2	Simulation de la trajectoire :	50
4.8	Simulation d'un mouvement Brownien géométrique	53
4.8.1	Simulation du modèle Binomial	59
4.9	Simulation du modèle de Black-Scholes	61
4.9.1	Simulation de la fonction d'un call	61
4.9.2	Simulation de la fonction d'un put	61
5	Étude et Application modèle de Black - Scholes:	63
5.1	Historique	63
5.2	Description du modèle de Black-Scholes	63
5.3	Applications	65
5.4	Etude de la serie caterpillar	70
5.4.1	Simulation des trajectoires de la série caterpillar par le modèle de Black-Scholes	70
5.4.2	Algorithme modèle de Black-Scholes	70
5.4.3	Les Prévisions:	73
5.5	Calcule du call européen par la méthode MC:	74
	Conclusion générale	80
	Bibliographie	80

Introduction générale

Les mathématiques financières sont devenues de nos jours un outil incontournable dans un monde où l'argent prend une place prépondérante dans les affaires.

Tout commence en 1827 avec le botaniste Robert Brown qui décrit le mouvement continu inhabituel et chaotique de très petites particules immergées dans un liquide. Plus tard en 1900, dans sa thèse intitulée *Théorie de la spéculation*, Louis Bachelier introduit l'utilisation en finance du mouvement brownien. Plusieurs progrès suivront dont les plus notables sont ceux de Norbert Wiener qui donne un formalisme mathématique au mouvement brownien et ceux de Kiyosi Itô dans la théorie des processus stochastiques.

Tous ces résultats seront utilisés par Black et Scholes qui publieront en 1973 une analyse sur les options européennes *The Pricing of Options and Corporate liabilities*.

C'est la naissance du modèle de Black & Scholes qui favorisera l'essor de l'ingénierie financière.

Les équations différentielles stochastiques sont de plus en plus utilisées dans différents domaines tels que les finances, afin par exemple de modéliser l'évolution de cours de bourses (exemple du mouvement brownien géométrique dans le modèle de Black-Scholes), la dynamique des populations, afin de modéliser la localisation ou la taille de la population d'une espèce donnée, la physique (mécanique des fluides, géophysique, . . .)

Notre intérêt se portera plus précisément sur la simulation numérique de processus aléatoires et celle du mouvement Brownien géométrique dans le modèle de Black-Scholes à temps continu, devenu la référence en termes de modèle d'évaluation des produits dérivés. Il a eu un impact majeur sur les méthodes utilisées.

Ce mémoire sera organisé comme suit :

Dans Le premier chapitre sera consacré aux rappels de base concernant les processus stochastiques. On donnera les principales propriétés du mouvement Brownien ainsi que celles des martingales qui seront utiles pour cela. Après avoir présenté quelques résultats importants relatifs à l'intégrale stochastique, on verra comment il peut être mis en oeuvre pour la résolution des équations différentielles stochastiques.

Le deuxième chapitre sera consacré pour définir c'est quoi une EDS et approfondir de ce sens et expliquer brièvement l'unicité de la solution d'une EDS solution forte et faible, et ensuite les différents domaines d'application des EDS

Le troisième chapitre présente le champ d'application du calcul stochastique en finances, plusieurs notions financières sont définies telle que les options, le prix d'exercice... etc. Ensuite, quelques notions sur les marchés financiers et enfin nous parlerons des modèles financiers tel que le modèle binomial, et de Black Scholes

Le quatrième chapitre présente des estimations et simulations des notions introduites dans les chapitres précédents : mouvement Brownien, équation différentielle stochastique, schémas numériques.

Enfin le cinquième chapitre traitera le modèle de Black Scholes qui sera des exemples illustratifs (Comparaison schéma Euler et Milstein de ce processus, cours boursiers caterpillar) .

Chapitre 1

Introduction au calcul stochastique

1.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est un modèle mathématique qui permet de décrire le comportement, à tout moment après l'instant initial (par exemple $t_0 = 0$), d'un phénomène aléatoire. Nous précisons cette notion dans la définition suivante.

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in I}$ est une famille de variables aléatoires, indexée par I et définie sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans un espace mesurable (S, \mathbf{S}) , qu'on appelle espace d'états.*

Remarque 1.1.1 *1) Il est parfois commode de rassembler toutes ces v.a. en une seule v.a. X définie sur (Ω, \mathcal{F}, P) est à valeurs dans un espace fonctionnel E^T , c-à-d pour un ω fixé et t variable dans T , $X(\omega, t)$ est appelée trajectoire du processus, c'est une simple fonction du temps (sans caractère aléatoire) qui représente la réalisation du processus sous l'occurrence. Pour un t fixé, $X(\omega, t)$ est une simple v.a.*

2) On prend sur l'espace E^T la tribu de Kolmogorov, définie comme étant la plus petite tribu rendant mesurables les v.a. X_t , pour tout $t \in T$.

3) Si T est continu (exemple : $T = [0, \infty[$, $T = [0, t]$ tq $t \in \mathbb{R}_+, \dots$), (resp. discret) on dit que le processus est en temps continu (resp. discret).

1.1.1 Les processus gaussiens

Dans cette partie nous allons rappeler quelques notions et résultats pour une classe importante de processus stochastiques, les processus gaussiens.

Définition 1.1.2 *Un processus $(X_t)_{t \in I}$ est un processus gaussien si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in I^n$, le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

Nous savons que la loi d'un vecteur aléatoire gaussien est caractérisée par sa moyenne et sa matrice de covariance. La proposition suivante énonce le résultat analogue pour un processus gaussien.

Proposition 1.1.1 . *La loi d'un processus gaussien $(X_t)_{t \in I}$ est caractérisée par sa fonction moyenne*

$$\begin{aligned} m_x : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow E(X_t) \end{aligned}$$

et par sa fonction de covariance

$$\begin{aligned} \Gamma_x : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, t) &\longrightarrow \text{Cov}(X_s, X_t) \end{aligned}$$

1.1.2 Processus stationnaire

Un processus stochastique $(X_t)_{t \leq 0}$ est stationnaire si pour tout entier n et pour tous réels $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$, et pour tout h ; les variables aléatoires $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ ont même loi.

1.2 Espérance conditionnelle

Soit F_1 une sous-tribu de F . F_1 représente une information partielle sur le hasard.

L'espérance conditionnelle d'une v.a. X par rapport à F_1 représente la meilleure estimation que l'on puisse faire de la valeur de X à l'aide de l'information contenue dans F_1 .

Soit X une v.a. telle que $E|X| < +\infty$, on appelle espérance conditionnelle de X sachant F_1 , et on note $E(X/F_1)$, toute v.a. satisfaisant les deux conditions suivantes :

- 1) $E(X/F_1)$ et F_1 -mesurable.
- 2) Pour tout $A \in F_1$ on a :

$$\int_A X dP = \int_A E(X/F_1) dP$$

1.2.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soient X et Y deux v.a. intégrables et soit $F_1 \subset F$ on a :

- 1) $E(aX + Y/F_1) = aE(X/F_1) + E(Y/F_1)$.
- 2) Si $X \leq Y$ alors $E(X/F_1) \leq E(Y/F_1)$.
- 3) $E(E(X/F_1)) = E(X)$ (on prend $A = \Omega$ dans la définition).
- 4) Si X est indépendante de F_1 on a $E(X/F_1) = E(X)$, c-à-d qu'en l'absence de toute information sur X , la meilleure estimation que l'on puisse faire sur X est son espérance.
- 5) Si X est F_1 -mesurable alors $E(X/F_1) = X$. Cela traduit le fait que F_1 contient déjà toute information sur X .
- 6) Si X est-mesurable et $E(|XY|) < +\infty$, alors $E(XY/F_1) = XE(Y/F_1)$.
- 7) Si $F_1 \subset F_2 \subset F$, alors $E(E(X/F_2)/F_1) = E(X/F_1)$.
- 8) Contraction dans L^p , pour $p_1 \geq 1$, si $X \in L^p$: $E[|E(X/F_1)|^p] \leq E|X|^p$
- 9) Inégalité de Jensen : si φ est convexe et $E|\varphi(x)| < +\infty$, alors $\varphi(E(X/F_1)) \leq E(\varphi(X)/F_1)$.

1.3 Mouvement Brownien

Introduction

Le mouvement Brownien est un processus stochastique (fonction aléatoire du temps). Initialement introduit par le botaniste R. Brown au XIX^{ème} siècle pour modéliser les mouvements de grains de pollen en suspension, il représente de nos jours un processus gaussien incontournable notamment en calcul stochastique.

Définition 1.3.1 : Fixons un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . Un mouvement Brownien, également appelé processus de Wiener, est un processus W qui présente les trois propriétés suivantes :

- **Indépendance des accroissements** : Pour tout $n \geq 2$ et tout $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}$ sont indépendantes. ou de manière équivalente : pour tout $t > s \geq 0$, la variable $W_t - W_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u, u \leq s)$:

- **Stationnarité** : Pour tout $\delta > 0$, la loi de la variable $W_{t+\delta} - W_t$ ne dépend pas de t .
- **Continuité** : Le processus W est continu.

De plus, nous supposons que $W_0 = 0$. Ce qui n'est pas restrictif puisque $\tilde{W} = W_t - W_0$ vérifie également les trois propriétés précédentes.

1.3.1 Propriétés trajectorielles du mouvement Brownien

soit (W_t) un M.B alors on a :

$$1) \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{w_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{w_t}{\sqrt{t}} = +\infty$$

$$2) \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{w_t}{\sqrt{t}} = \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{w_t}{\sqrt{t}} = -\infty$$

3) La trajectoire d'un M.B (W_t) passe une infinité de fois par tout point et (W_t) n'est pas dérivable ni à gauche ni à droite

4) Les trajectoire du M.B sont localement holdériennes-continues d'ordre α , avec $\alpha < 1/2$.

Rappelons qu'une fonction f à valeur réelles et définie sur \mathbb{R}^+ est localement holderienne d'ordre α ; s'il existe une constante a telle que :

$$\text{pour tout } a > 0, \forall (x, y) \in [0, a]^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^a$$

pour n fixé et $t_j = \frac{j}{2^n}t$, j variant de 0 à 2^n , $\sum_{j=1}^{2^n} [w_{t_j} - w_{t_{j-1}}]^2 \rightarrow t$ quand $n \rightarrow +\infty$, la convergence ayant lieu en moyenne quadratique et p.s

les Figure 1.1 et 1.2 représentent des trajectoires typiques de mouvement Brownien.

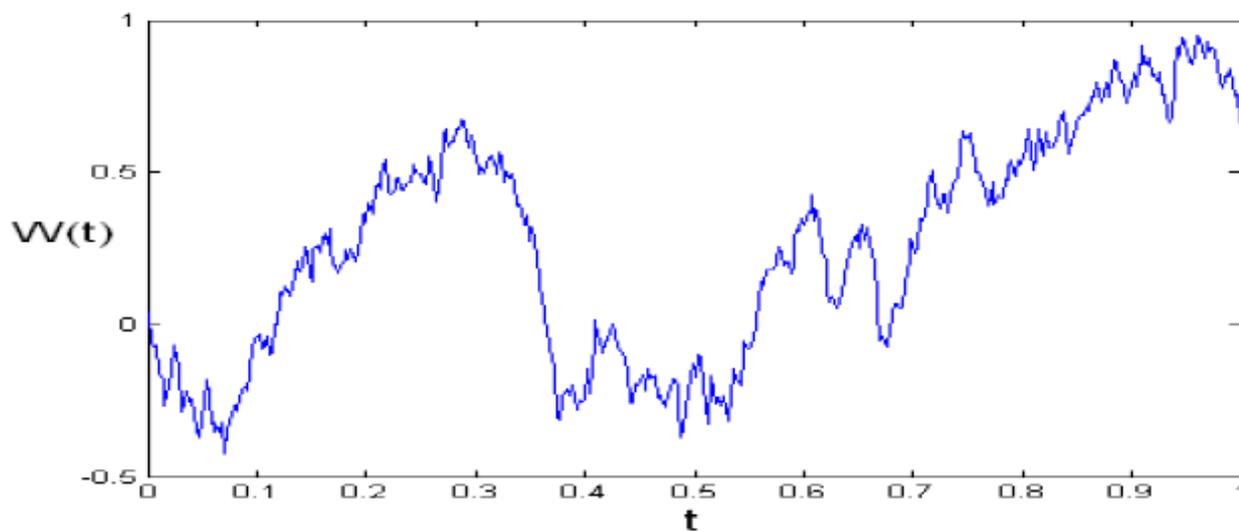


Figure 1.1 Allure d'une trajectoire Brownienne dans \mathbb{R}

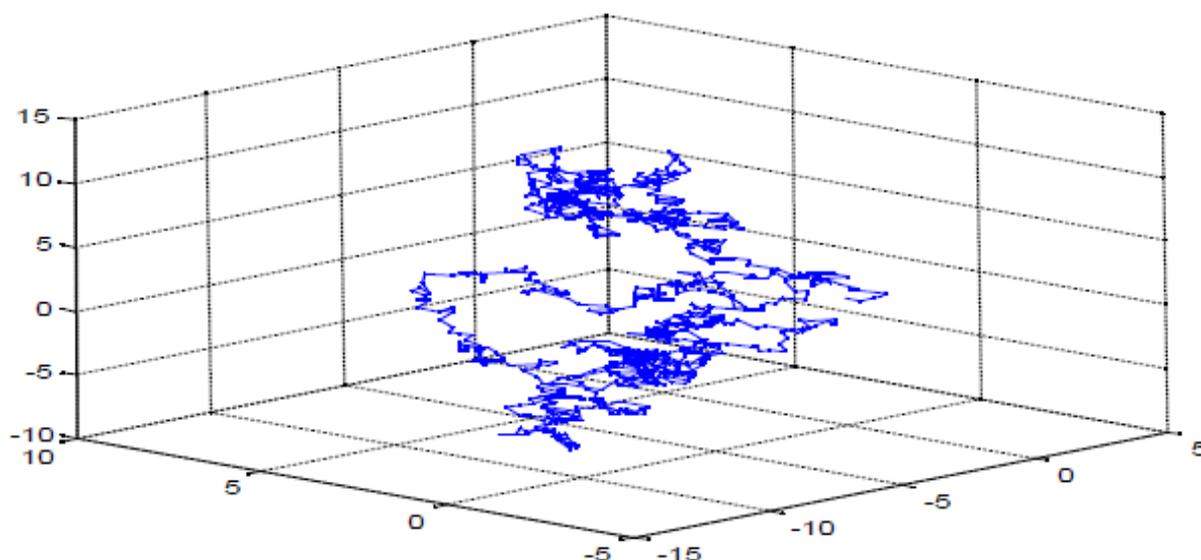


Figure 1.2 Allure d'une trajectoire Brownienne en trois dimensions

1.4 Filtrations, Martingales et temps d'arrêt

Les notions de filtration, martingale et temps d'arrêt sont importantes pour la théorie des EDS. En fait, dans ces notes introductives, nous omettrons la plupart des justifications de résultats qui mettent en jeu les martingales et temps d'arrêt.

1.4.1 Filtrations

Dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , on dit qu'une famille de sous-tribus $F = (F_t)_{t \geq 0}$ de \mathcal{A} est une filtration si $F_s \subset F_t$ pour $0 \leq s < t$.

Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est dit adapté à $F = (F_t)_{t \geq 0}$ (ou F -adapté) si, pour tout $t \geq 0$, X_t est F_t -mesurable. Souvent, on considère pour F la filtration naturelle, ou canonique du processus X , définie par $F_t = \sigma \{x_u\}_{u \leq t}$. On a alors $E[X_t/F_t] = X_t$, c'est à dire que F_t contient toute l'information de X jusqu'à l'instant t . Dans la suite, étant donné un mouvement Brownien $B = (B_t)_{t \geq 0}$, sauf indication contraire F_t représentera sa filtration canonique.

1.4.2 Martingales

Une martingale désigne un type de processus stochastique tel que sa valeur espérée connaissant l'information disponible à une certaine date n, les martingales ont plusieurs propriétés qui les rendent très utiles dans l'étude de processus stochastiques plus généraux comme l'intégrale stochastique.

$M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une F -martingale si, pour tout $t \geq 0$,

1) M_t est F_t -mesurable (M est F -adapté)

2) $E[M_t] < \infty$

3) $E[M_t/M_s] = M_s$ pour $s \leq t$.

Sur et sous-martingales

M martingale et ϕ convexe $s \leq t \Rightarrow \phi(M_s) = \phi(E[M_t : M_s]) \leq E[\phi(M_t)/M_s]$.

M est une sous-martingale (resp sur-martingale) si $E[|M_t|/F_t] < \infty$ et $E[M_t/M_s] \geq M_s$ (resp $E[M_t/M_s] \leq M_s$) pour $s \leq t$.

1.4.3 Temps d'arrêt

Lorsqu'on considère un processus aléatoire, on s'intéresse souvent à des instants particuliers tels que celui pour lequel un certain seuil est atteint. Bien sur, un tel instant dépend de chaque trajectoire du processus est aléatoire. On définit ainsi la notion de temps d'arrêt.

Définition 1.4.1 Une variable aléatoire a valeurs dans $R_+ = R_+ \cup \{\infty\}$ est un temps d'arrêt pour la filtration F si, pour tout $t \geq 0$, $\{\tau \leq t\} \in F_t$.

1.4.4 Martingale locale

Définition 1.4.2 Un processus réel $\{X_t\}_{t \leq 0}$ est une F_t -martingale locale réelle s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n \geq 1}$ de F_t -temps d'arrêt telle que:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty$ est -p.s.

2) Pour tout $\tau \geq 0$, le processus $\{x_{t \wedge \tau_n}\}_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale .

1.5 Intégrale stochastique

Le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens à des équations de la forme

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t) + g(X, t) \frac{dW_t}{dt}$$

Par exemple, si $f = 0$ et $g = 1$, on devrait retrouver $X_t = X_0 + W_t$, décrivant le mouvement suramorti d'une particule Brownienne. Le problème est que, comme nous l'avons mentionné, les trajectoires du processus de Wiener ne sont pas différentiables, ni même à variations bornées. Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on interprète une solution de l'équation différentielle comme une solution de l'équation intégrale :

$$X_t = X_0 + \int f(x) ds + \int g(x) dW_s$$

C'est à la deuxième intégrale qu'il s'agit de donner un sens mathématique. Si $s \rightarrow g(X_s)$ était différentiable, on pourrait le faire à l'aide d'une intégration par parties, mais ce n'est en général pas le cas. Itô a donné une autre définition de l'intégrale stochastique, qui s'applique à une classe beaucoup plus vaste d'intégrands (et donne le même résultat que l'intégration par parties dans le cas différentiable).

1.6 Calcul d'Itô

On considère un F -mouvement Brownien standard W défini sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$, un horizon de temps $[0, T]$ où $T > 0$.

1.6.1 Processus d'Itô

Définition 1.6.1 *Un processus stochastique $(X_t), t > 0$ est appelé processus d'Itô s'il s'écrit sous la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t k_u du + \int_0^t H_u dW_u$$

où X_0 est F_0 -mesurable, $\{K_t, t \in R_+\}$ et $\{H_t, t \in R_+\}$ sont deux processus F -adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité

$$\int_0^T |K_u| du < \infty \text{ P.p.s et } \int_0^T H_u^2 dW_u < \infty \text{ P.p.s}$$

On note également $dX_t = K_t dt + H_t dW_t$

Formule d'Itô

X processus d'Itô, avec $dX_t = b_t dt + s_t dW_t$, et $g \in C^2(R_+ \times R)$. Alors, $Y_t = g(t, X_t)$ est un processus d'Itô et

$$dY_t = \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial X_t^2} (dX_t)^2$$

avec $(dX_t)^2 = dX_t \cdot dX_t$, $dt \cdot dt = 0$, $dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0$, et $dW_t \cdot dW_t = dt$.

On peut encore écrire

$$dY_t = \left(\frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} W_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} \sigma_t dW_t$$

Formule d'intégration par parties

Soit X_1 et X_2 deux processus d'Itô.

$$\begin{cases} dX_1 = F_1 dt + G_1 dW_t \\ dX_2 = F_2 dt + G_2 dW_t \end{cases}$$

Alors le produit X_1, X_2 est un processus d'Itô, et

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + dX_1 dX_2$$

L'expression $dX_1 dX_2$ est le terme correctif d'Itô. L'intégration de la règle du produit d'Itô donne la formule d'intégration par parties.

Chapitre 2

Équation différentielle stochastique

2.1 Introduction

Les équations différentielles gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des "**différentielles stochastiques**", ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (**EDS**). Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type :

$$x' = f(t, x(t))$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée $x'(t)$ et elle-même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (seule la dérivée 1 ère est impliquée) avec $f(t, x) = a + bx$ indépendant de t par rapport à x . Symboliquement, l'équation se réécrit :

$$dx_t = f(t, x(t))dt. \tag{2.1.1}$$

Cette équation modélise typiquement un système physique $x(t), t \geq 0$ qui évolue avec le temps de façon que x s'accroît, à la date t , selon le taux $f(t, x_t)$

Par exemple, avec $f(t, x_t) = a(t)x_t$, l'équation $dx_t = a(t)x_t dt$ modélise le cours d'un actif financier x_t soumis au taux d'intérêt variable $a(t)$ ou d'une population avec un taux de natalité $a(t)$. Il est bien connu que la solution est:

$$x_t = x_0 \exp\left(\int_0^t f(s) ds\right).$$

Les EDS sont des généralisations des équations (2.1.1) où la dynamique déterministe d'évolution est perturbée par un terme aléatoire. On peut considérer que ce bruit est un processus gaussien généralement modélisé par un mouvement Brownien W et une intensité de bruit (x, t) :

$$dx_t = f(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t$$

Définition 2.1.1 On appelle *équation différentielle stochastique (EDS)* une équation en le processus X (à valeurs dans \mathbb{R}^d) de la forme :

$$dX_t = f(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t \tag{2.1.2}$$

ce qui, en terme intégrale, s'écrit

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t f_i(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s) dW_s, 1 \leq i \leq d$$

où, pour m, d des entiers positifs.

· $f(t, x) = (f_i(t, x))_{1 \leq i \leq d}$ est un vecteur mesurable de \mathbb{R}^d défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **dérive ou drift de l'EDS**.

· $\sigma(t, x) = (\sigma_{i,j}(t, x))_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq m}}$ est une matrice $d \times m$ mesurable défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ appelé **coefficient de diffusion de l'EDS**.

Remarque 2.1.1 En fait, l'écriture(2.1.2) est symbolique car "dW_t" n'a pas vraiment de sens (le mouvement Brownien n'est pas dérivable). Il faudrait écrire (sous la forme intégrale.

$$X_t = X_0 \int_0^t f(x, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s. \quad (2.1.3)$$

Nous énonçons le théorème fondamentale d'existence et d'unicité de la solutions d'une EDS .

2.2 Existence et unicité de solution

Théorème 2.2.1 (*Existence et unicité de solution*) On suppose que a et σ deux fonctions continues et bornées dans $[0, T]$ et qu'il existe une constante $k > 0$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$:

i) $|a(t, x) - a(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k |x - y|$

ii) $|a(t, x)| + |\sigma(t, x)|^2 \leq k^2(1 + |x|^2)$.

iii) $E(X_0) \leq +\infty$

alors pour $t > 0$ (2.1.3) admet une solution unique dans l'intervalle $[0, T]$

L'unicité signifie que si $(X_t)_{t \geq 0}, (Y_t)_{t \geq 0}$ sont deux solutions de(2.1.3), alors $X_t = Y_t$ p ps $\forall t \in [0, T]$

2.2.1 Propriétés de la solution d'une EDS:

Une équation différentielle stochastique possède de nombreuses bonnes propriétés, En effet:

Proposition 2.2.1 : Soit f^n et σ deux suites de coefficient qui vérifient les Hypothèses uniformément en n (i.e. avec une constante K ne dépendant pas de n). Supposons de plus que:

$$f^n \rightarrow f(t, x), \partial^n \rightarrow \partial(t, x)$$

quand $n \rightarrow \infty, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. Alors: $X_t^n \rightarrow X_t$ quand $n \rightarrow \infty$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$. $t \in \mathbb{R}_+$ où X^n [resp: X] désigne le processus solution de l'EDS avec coefficient f^n et ∂^n [resp. f et ∂].

Preuve. On a

$$X_t - X_t^n = \int_0^t [f(s, x_s^n) - f^n(s, X_s)] ds + \int_0^t [\partial(s, X_s) - \partial^n(s, X_s^n)] dW_s \quad (2.2.1)$$

En rajoutant et en retranchant les deux termes $\int_0^t f^n(s, X_s) ds$ et $\int_0^t \partial^n(s, X_s) ds$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} X_t - X_t^n &= \int_0^t [f(s, X_s) - f^n(s, X_s)] ds + \int_0^t [f^n(s, X_s) - f^n(s, X_s^n)] ds \\ &\quad + \int_0^t [\partial(s, X_s) - \partial^n(s, X_s)] dW_s + \int_0^t [\partial^n(s, X_s) - \partial^n(s, X_s^n)] dW_s \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $(a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, nous aurons:

$$\begin{aligned} |X_t - X_t^n|^2 &\leq 4 \left| \int_0^t [f(s, X_s) - f^n(s, X_s)] ds \right|^2 + 4 \left| \int_0^t [f^n(s, X_s) - f^n(s, X_s^n)] ds \right|^2 + \\ &\quad + 4 \left| \int_0^t [\partial(s, X_s) - \partial^n(s, X_s)] dW_s \right|^2 + 4 \left| \int_0^t [\partial^n(s, X_s) - \partial^n(s, X_s^n)] dW_s \right|^2 \end{aligned}$$

En passant à l'espérance et en utilisant la propriété de l'intégrale stochastique ainsi que l'inégalité de Hölder nous obtenons:

$$E(|X_t - X_t^n|^2) \leq \rho_n(t) + 4tE \int_0^t |f^n(s, X_s) - f^n(s, X_s^n)|^2 ds + 4E \int_0^t |\partial^n(s, X_s) - \partial^n(s, X_s^n)|^2 ds$$

Maintenant en utilisant la condition de Lipschitz :

$$E(|X_t - X_t^n|^2) \leq 4\rho_n(t) + 4(1+t)K^2 \int_0^t E(|X_s - X_s^n|^2) ds$$

où

$$\rho_n(t) = tE \int_0^t |f(s, X_s) - f^n(s, X_s)|^2 ds + E \int_0^t |\partial(s, X_s) - \partial^n(s, X_s)|^2 ds$$

$\rho_n(t)$ est une fonction croissante de t , donc

$$E(|X_t - X_t^n|^2) \leq 4\rho_n(t) + 4(1+t)K^2 \int_0^t E(|X_u - X_u^n|^2) du, 0 \leq s \leq t.$$

■

Lemme de Gronwall

Soient φ , ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

alors

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_a^s \psi(u)du\right)ds$$

Posons $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$ En multipliant les deux membres de l'inégalité donnée en hypothèse par $\psi(t)$, on obtient

$$F'(t) - \psi(t) \leq \varphi(t)\psi(t)$$

En appliquant le Lemme de Gronwall, nous aurons:

$$E(|X_t - X_t^n|^2) \leq 4\rho_n(t) \exp(4(1+t)K_t^2).t \geq 0.$$

Pour conclure, il suffit de démontrer que: $\rho_n(t) \rightarrow 0$. $\zeta_s^n = \partial(s, X_s) - \partial^n(s, X_s) \rightarrow 0$ p.s.(par hypothèse) $|\zeta_s^n|^2 \leq C(1 + |\xi|^2)$ qui est: $dP \times ds - \text{intégrable}$.

Avec le même raisonnement pour $f(s, X_s) - f^n(s, X_s)$. nous montrons que: $\rho_n(t) \rightarrow 0$ (par convergence dominée). donc T .

$$E(|X_t - X_t^n|^2) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

d'ou:

$$X_t^n \rightarrow X_t \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

2.3 Solution forte d'une EDS

Lorsque l'on étudie l'EDS (2.1.1), nous pouvons demander que l'égalité satisfaite soit une égalité en loi (version faible) ou une égalité presque sûre (version forte).

Définition 2.3.1 Fixons $T \in \mathbb{R}_+$ Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = Z \end{cases}$$

Notons F la filtration naturelle du mouvement Brownien standard MB. Une solution forte de cette EDS est un processus:

- Adapté à la filtration naturelle du mouvement Brownien (i.e. tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, X_t est F_t -mesurable)
- $p, s \int_0^t (f(S, X_s) + \sigma(S, X_s))ds < +\infty$
- $p, s X_t = X_0 + \int_0^t (f(S, X_s)ds + \sigma(s, X_s))dW_s, \forall t \in \mathbb{R}_+$

La propriété de processus adapté et les conditions d'intégrabilité *p.s.* de $s \rightarrow (f(S, X_s))$ et $s \rightarrow \sigma(S, X_s)$ assurent que les intégrales intervenant dans l'EDS avant d'écrire des schémas pour approcher la solution d'une équation différentielle stochastique, précisons des conditions suffisantes (mais non nécessaires) sous les quelles cette equation est bien définie et admet une unique solution.

Théorème 2.3.1 Fixons $T \in \mathbb{R}_+$ Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = Z \end{cases}$$

Supposons que b et σ sont des fonctions boréliennes et qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}_+$ telle que

- i) pour toute (x, y) et tout $t \in [0, T], |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k |x - y|$
- ii) pour tout x et tout $t \in [0, T] : |b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq k(1 + |x|)$.

Alors il existe une solution forte X de l'EDS dans l'intervalle $[0, T]$. Alors X et Y sont des processus indistinguables, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble p -négligeable N tel que:

$$\forall \omega \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], X_t = Y_t$$

$$\text{Par ailleurs, si } Z \in L^2(\Omega), E\left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2\right) < +\infty$$

2.3.1 Processus d'Ornstein Uhlenbeck :

$$dX(t) = a(b - X(t))dt + \sigma dW(t)$$

Equation déterministe correspondante:

$$\begin{cases} dY(t) = a(b - Y(t))dt \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

Solution:

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{at} + b(1 - e^{at})$$

Soit:

$$X(t) = Y(t) + Z(t)e^{-at}$$

On a :

$$(i) dX(t) = dY(t) + e^{-at}dZ(t) - \alpha e^{-at}Z(t)dt$$

$$(ii) dX(t) = a(b - X(t))dt + \sigma dW(t)$$

$$(iii) dY(t) = a(b - Y(t))dt$$

donc :

$$\begin{cases} dZ(t) = e^{\alpha t} \sigma dW(t) \\ Z(t) = \int_0^t e^{\alpha s} \sigma dW(s) \end{cases}$$

Finalement le processus d'Ornstein-Uhlenbeck devient:

$$X(t) = [X_0 e^{-\alpha t} + b(1 - e^{-\alpha t})] + [\sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW(s)]$$

Propriété du processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$E(X) = X_0.e^{-\alpha t} + b(1 - e^{-\alpha t})$$

Moyenne pondérée de la position initiale et de la position asymptotique b . Les poids sont des exponentielles négatives gouvernées par le facteur de rappel α

Exemple (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck)

Considérons le processus X à valeurs dans \mathbb{R} solution de l'EDS linéaire à coefficient constants : (??)

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dW_t, X_0 = \xi \tag{2.3.1}$$

où α et β sont des constantes strictement positives, W est un \mathcal{F}_t -mouvement Brownien et ξ est une variable aléatoire \mathcal{F}_0 - mesurable.

Supposons que $\alpha > 0$. Nous allons montrer les points suivants :

i) La solution de (??) est donné par:

$$X_t = e^{-\alpha t} \xi + \int_0^t e^{-(t-s)\alpha} \beta dW_s$$

ii) Si ξ est une variable gaussienne, alors X est un processus gaussien dont l'espérance et la fonction de covariance sont données par:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= E(X_t) = e^{-\alpha t} E(\xi) \\ R(t + \delta, t) &= cov(X_{t+\delta}, X_t) = e^{-(t+\delta)\alpha} Var(\xi) e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-(t+\delta-u)\alpha} \beta^2 e^{-(t-u)\alpha} du \end{aligned}$$

pour $t > 0$ et $\delta > 0$.

iii) si $E(\xi) = 0$ et $Var(\xi) = \frac{\beta^2}{2\alpha}$, alors le processus X est centré (i.e $\mu(t) = 0$) et de covariance stationnaire, cela se traduit par le fait que $R(t + \delta, t)$, ne dépend plus de δ .

$$R(t + \delta, t) = \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\delta\alpha} \forall t \geq 0, \delta \geq 0.$$

iv) Si ξ est une variable gaussienne, alors quand $t \rightarrow \infty$, l'espérance et la fonction de covariance du processus $\{X_{t+\delta}; \delta \geq 0\}$ tendent vers celles du cas stationnaire :

$$E(X_{t+\delta}, t) \rightarrow 0, \quad Cov(X_{t+\delta}, X_t) \rightarrow \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\delta\alpha}.$$

• Si X est solution de(2.3.1) alors nous avons:

$$X_t = \xi + \alpha \int_0^t X_s ds + \int_0^t \beta dW_s$$

En posant

$$y_t = X_t e^{-\alpha t}$$

et en appliquant la formule d'Itô à la fonction $h(t, x) = e^{\alpha t} x$, nous avons :

$$dY_t = \alpha e^{\alpha t} X_t dt + e^{\alpha t} (-\alpha X_t) dt + \beta e^{\alpha t} dW_t$$

donc
$$dY_t = \beta e^{\alpha t} dW_t$$

sous forme intégrale

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \beta e^{\alpha s} dW_s$$

en remplaçant Y_t par X_t et on obtient :

$$X_t e^{\alpha t} = X_0 e^{0 \cdot \alpha} + \int_0^t \beta e^{\alpha s} dW_s$$

on en déduit la solution pour $t \geq 0$

$$X_t = e^{-\alpha t} \xi + \int_0^t \beta e^{(t-s)\alpha} dW_s$$

•• Si ξ est gaussienne et W est un mouvement Brownien alors $\int_0^t \beta e^{(t-s)\alpha} dW_s$ est gaussienne, de plus ne dépend pas de W donc X est un processus gaussien car la somme de deux gaussiennes.

De plus nous avons:

$$E(X) = e^{-\alpha t} E(\xi)$$

et

$$\begin{aligned} Cov(X_{t+\delta}, X_t) &= E(X_{t+\delta}, X_t) - E(X_t)E(X_{t+\delta}) \\ &= E\left(\int_0^{t+\delta} \beta e^{-(t+\delta-u)\alpha} dW_u \int_0^t \beta e^{-(t-u)\alpha} dW_u\right) + e^{-(t+\delta+t)\alpha} Var(\xi) \\ &= e^{-(t+\delta)\alpha} Var(\xi) e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-(t+\delta-u)\alpha} \beta^2 e^{-(t-u)\alpha} du \end{aligned}$$

- si $E(\xi) = 0$ et $Var(\xi) = \frac{\beta^2}{2\alpha}$, alors le processus X est centré

$$\begin{aligned} Cov(X_{t+\delta}, X_t) &= e^{-(t+\delta)\alpha} \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-(t+\delta-u)\alpha} \beta^2 X_{t+\delta} du \\ &= \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-(t+\delta-t)\alpha} \\ &= \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-(t+\delta-t)\alpha} \\ &= \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\delta\alpha} \end{aligned}$$

- si ξ est une gaussienne, nous avons

$$E(X_{t+\delta}) = e^{-(t+\delta)\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty$$

$$R(t+\delta, t) \rightarrow \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\delta\alpha} \quad \text{quand } t \rightarrow \infty$$

2.3.2 Brownien géométrique

Un mouvement Brownien géométrique est un processus stochastique continu dont le logarithme suit un mouvement Brownien. Il est appliqué dans la modélisation mathématique

de certains cours dans les marchés financiers. Il est principalement employé pour le pricing des options parce qu'une quantité qui suit un mouvement Brownien géométrique prend toute valeur strictement positive et seuls les changements élémentaires de la variable aléatoire sont significatifs. Le mouvement Brownien géométrique représente une approximation raisonnable de l'évolution des cours en bourse.

Un processus stochastique $(S_t)_{t \geq 0}$ est appelé mouvement Brownien géométrique si il est solution de l'EDS suivante :

$$dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien et b (le « **drift** ») et σ (la « **volatilité** ») sont constants.

Cette équation a une solution analytique obtenue facilement grâce à la formule d'Itô :

$$\xi(t) = W(t), \quad f(t, x) = \exp(\mu t + \sigma x) \quad i) \frac{\partial f}{\partial t} = \mu f, \quad ii) \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f, \quad iii) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma^2 f$$

On a par Ito :

$$df = b f dt + \sigma f dW_t + \frac{1}{2} \sigma^2 f dt$$

en notant : $b = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ Le processus stochastique (Brownien géométrique)

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w(t)\right)$$

est solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dS(t) = bS(t)dt + \sigma S(t)dW_t$$

Propriété du mouvement Brownien géométrique :

$$i) E(S(t)) = S(0)e^{\delta t}$$

$$ii) var(S(t)) = S^2(0)e^{2\delta t}(e^{\sigma^2} - 1)$$

2.4 Théorème de Girsanov

2.4.1 Changement de Probabilité

Proposition 2.4.1 *soit P et Q deux probabilités sur (Ω, F_t) . on suppose P et Q équivalentes. alors il existe $(L_t, t \leq T)$ $P - F_t$ martingale strictement positive telle que $Q = L_T P$ sur F_t et $Q/F_t = L_t P/F_t$ c'est-à-dire telle que $E_Q(X) = E_P(X L_T)$ pour toute variable X_Q intégrale $F_t -$ mesurables pour $t \leq T$ de plus $L_0 = 1$ et $E_p(L_t) = 1, \forall t \leq T$*

Démonstration Si la restriction de P et Q à F_T sont équivalentes. il existe une variable aléatoire L_T $F_t -$ mesurables telle que $Q = L_T P$ sur F_t . on dit que L_T est densité de Q par rapport à P et $E_Q(X) = E_P(L_T X)$ pour tout variable $X - F_T$ mesurable et Q -intégrable.

En particulier, L_T est strictement positive et $E_P(L_T) = 1$. soit $L_t = E_P(L_T/F_t)$. par construction $(L_t, t \leq T)$ est une martingale et est la densité $F_t -$ mesurable de Q par rapport à P sur F_t

En effet, si X est F_t mesurable et Q intégrable.

$$E_Q(X) = E_P(L_T X) = E_P[E_P(X L_T/F_t)] = E_P[X E_P(L_T/F_t)] = E_P(X L_t)$$

Théorème 2.4.1 soit $W(t), t \geq 0$ un mouvement Brownien sur un espace (Ω, \mathcal{F}, P) et F_t sa filtration soit L_t un processus défini comme suit :

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \theta(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(s) ds\right), t \leq T$$

où θ est un processus F_t -adapté

- si $E^P(L_T) = 1$, le processus L_T est une martingale
 - si $Q = L_T.P.i.e$ si $E^Q(X) = E^P(X L_T)$ pour toutes variables X F_T -mesurables.
- alors $\tilde{W}(t) = [W(t) - \int_0^t \theta(s) ds]$ est un Q -mouvement Brownien.

2.5 Solution faible d'EDS

Nous pouvons affaiblir les hypothèses d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS introduite précédemment (notamment les conditions de Lipschitz) et donc introduire une nouvelle notion de solution dite faible, En opposition aux solutions fortes. Ceci a des implications importantes aussi bien pour la théorie que pour les applications.

La solution faible de l'équation (2.5.1) est un triplet : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, un espace de probabilité filtré W , un \mathcal{F}_t -mouvement Brownien (standard) X , un processus \mathcal{F}_t -adapté, les processus X et W sont définis sur le même espace donné et vérifient

$$\left(\int_0^t [|b(s, X_s)|^2 + |\sigma(s, X_s)|^2] ds\right) \leq 1, \quad t \geq 0.$$

et

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad X_0 = \epsilon \tag{2.5.1}$$

Définition 2.5.1 (*Unicité en loi*) :

L'EDS admet une solution faible unique en loi si, étant données deux solution faibles

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W, X) \quad \text{et} \quad (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P}, \tilde{W}, \tilde{X})$$

avec condition initiale de même loi, alors les processus X et \tilde{X} ont même loi.

Dans ce cadre, il existe également un autre concept d'unicité :

L'EDS (2.5.1) admet une solution faible unique au sens trajectoriel, étant données deux solution faibles

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W, X) \quad \text{et} \quad (\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}_t, P, W, \tilde{X})$$

(donc seuls les processus et les filtrations sont différentes W est un mouvement Brownien pour les deux filtrations) avec même condition initiale, alors les processus X et \tilde{X} sont indistinguables.

Soit $sign(x) = 1_{\{x \geq 0\}} - 1_{\{x < 0\}}$ nous considérons l'EDS réelle :

$$dX_t = sign(X_t)dW_t, \quad X_0 = 0,$$

Nous remarquons d'abord que, si X_t est une solution, X_t est un mouvement Brownien puisque X est une martingale issue de 0, d'après la caractérisation de Lévy et il y a unicité en loi. Soit ϵ_t un mouvement Brownien réel issu de 0, posons :

$$\beta_t = \int_0^t sign(\epsilon_s)d\epsilon_s$$

de la même manière, on voit que β est un mouvement Brownien, nous en déduisons:

$$\beta_t = \int_0^t sign(\xi_s)d\beta_s = \int_0^t sign(\xi_s)sign(\xi_s)d\epsilon_s = \int_0^t d\epsilon_s = \xi_t$$

ϵ est une solution, en prenant β comme mouvement Brownien. Il y a existence faible mais puisque :

$$E\left(\int_0^t 1_{\{\xi_s=0\}}d\beta_s\right)^2 = E\left(\int_0^t 1_{\{\xi_s=0\}}ds\right) = \int_0^t P(\xi_s = 0)ds = 0$$

comme

$$\text{sign}(-\xi_s) = 1_{\{-\xi_s \geq 0\}} - 1_{\{\xi_s < 0\}} = 1_{\{-\xi_s > 0\}} - 1_{\{-\xi_s \leq 0\}} = 1_{\{\xi_s < 0\}} - 1_{\{-\xi_s \geq 0\}} = -\text{sign}(\xi_s).$$

Nous avons p.s:

$$-\xi_t = - \int_0^t \text{sign}(\xi_s) d\beta_s = \int_0^t -\text{sign}(\xi_s) 1_{\{\xi_s \neq 0\}} d\beta_s = \int_0^t \text{sign}(-\xi_s) d\beta_s$$

il s'en suit que $-\xi$ est également solution avec le mouvement Brownien β , et donc il n'y a pas unicité trajectorielle. La transformation de Girsanov est un outil fondamental pour démontrer l'existence et l'unicité de solution faible d'EDS. C'est l'objectif des **propositions** qui suivent:

Proposition 2.5.1 (*Existence*)

Considérons l'EDS suivante:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + dW_t, \quad X_0 \tag{2.5.2}$$

où f est borélienne et vérifie:

$$\exists K < \infty / |f(t, x)| \leq K(1 + |x|), \quad t \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Alors pour toute mesure de probabilité μ définie sur \mathbb{R}^d , admet une solution faible de loi initial $(X_0) = \mu$

Preuve. Considérons l'espace canonique (Ω, \mathcal{F}, P) . X le processus canonique, \mathcal{F}_t la filtration naturelle associée et P_x la loi du mouvement Brownien issu de x .

Par la caractérisation de Lévy, nous savons que:

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \langle f(s, X_s), dX_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t |X_s|^2 ds\right) \text{ est une } \mathcal{F}_t - P_x \text{ martingale } \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Le théorème de Girsanov entraîne que sous Q_x défini par :

$$\frac{dQ_x}{dP_x} = Z_t \quad t \geq 0$$

Le processus : $W_t = X_t - x - \int_0^t f(s, X_s) ds$ est un $\mathcal{F}_t - Q_x$ mouvement Brownien avec $Q(W_0 = 0) = 1$

D'où $X_t = W + x + \int_0^t f(s, X_s) ds$ $t \geq 0$ qui est précisément l'équation (2.5.2). Nous avons donc construit une probabilité Q_x souscette dernière telle que X est une solution faible de (2.5.2) avec loi initiale . ■

Proposition 2.5.2 (*Unicité*)

Considérons $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathcal{F}_t^i, P^i)$ W^i, X^i ($i = 1, 2$) deux solutions faibles de (2.5.2) avec même loi initiale. Si pour tout $T > 0$.

$$P(\int_0^T |f(t, X_t^i)|^2 dt < \infty) = 1 \quad i = 1, 2$$

Alors (X^1, B^1) (X^2, B^2) admettent la même loi de probabilité.

Preuve. Nous nous fixons $T > 0$ pour tout k on définit le temps d'arrêt

$$\tau_t^i = \inf\{t \geq 0, \int_0^t |f(s, X_s)|^2 ds = k \wedge T\}$$

$$\tau_t^i \nearrow T \text{ P}^i - p.s \text{ quand } k \mapsto \infty.$$

Posons :

$$\xi_t(X^i) = \exp\left(-\int_0^t \langle f(s, X_s^i), dX_s^i \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t |f(s, X_s^i)|^2 ds\right)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit de \mathbb{R}^d à l'aide du critère de **Norikov** nous avons :

$$E \frac{1}{2} \int_0^T |f(s, X_s)|^2 ds < \infty$$

ce qui montre que $\{\xi_{t \wedge \tau_k^i}(X^i); t \geq 0\}$ est une martingale sous P^i et $E(\xi_t) = 1$.

Nous pouvons donc définir une loi $Q_{T,k}^i$ sur $(\int_0^{T \wedge \tau_k^i}, \mathcal{F})$ telle que $X_{t \wedge \tau_k^i} = X_0^i + \int_0^{t \wedge \tau_k^i} |f(s, X_s^i)| ds + W_{t \wedge \tau_k^i}$ est un $Q_{T,k}^i$ mouvement Brownien.

$Q_{T,k}^i$ est la restriction d'une mesure de probabilité Q_T^i à l'ensemble des processus continus, constants après l'instant τ_k^i et arrêtés en T pour tout k .

Enfin , pour tout $n, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < T$ et tout borélien Γ de $\mathbb{R}^{2d(n+1)}$.

$$\begin{aligned} P^1[X_{t_0}^1, X_{t_0}^1, \dots, X_{t_n}^1, X_{t_n}^1 \in \Gamma, \tau_k^1 = T] &= \\ &= \int_{\Omega^1} \frac{1}{\xi_{T \wedge \tau_k^1}(X^1)} 1\{(X_{t_0}^1, X_{t_0}^1, \dots, X_{t_n}^1, X_{t_n}^1) \in \Gamma, \tau_k^1 = T\} dQ^1 \\ &= \int_{\Omega^2} \frac{1}{\xi_{T \wedge \tau_k^2}(X^2)} 1\{(X_{t_0}^2, X_{t_0}^2, \dots, X_{t_n}^2, X_{t_n}^2) \in \Gamma, \tau_k^2 = T\} dQ_{T,k}^2 \\ &= P^2[X_{t_0}^2, X_{t_0}^2, \dots, X_{t_n}^2, X_{t_n}^2 \in \Gamma, \tau_k^2 = T]. \end{aligned}$$

La 2^{me} ligne vient de l'observation précédente et du fait que sous $Q_{T,k}, X^i_{\tau_k^i}$ est un mouvement Brownien

Pour **conclure**, il suffit de faire tendre k vers ∞ ■

Chapitre 3

Le calcul stochastique appliqué à la finance et modèles financiers

3.1 Introduction

Les options sont des outils d'origine très ancienne. Mais qui n'ont pas connu un développement spectaculaire qu'à partir des années soixante-dix avec le développement des modèles d'évaluation, notamment celui de Black Scholes, permettant leur évaluation. Ce développement correspond surtout au besoin pratique de se couvrir contre des risques futurs, tout en bénéficiant de l'évolution favorable de la conjoncture. Ainsi, toutes les fois qu'un contrat à terme prend naissance, il y'a possibilité de créer une option sur ce contrat.

Dans ce chapitre il est question d'un champ d'application du calcul stochastique en finances, plusieurs notions financières sont définies telle que les options, le prix d'exercice... etc. En suite nous introduirons des notions sur des paramètres non observables comme la volatilité, quelque notions sur les marchés financiers et enfin nous parlerons des modèles financiers tel que le modèle binomial, et de Black Scholes .

3.2 Notations, terminologies et quelques définitions

Le monde de la finance fait appel à une terminologie spécifique et à de nombreux anglicismes, nous donnerons dans ce qui suit quelques définitions concernant les options financières.

3.2.1 Les options en finance

L'option est donc un titre qui donne le droit et non l'obligation à son détenteur d'acheter ou de vendre un sous-jacent à un prix fixé au préalable appelé prix d'exercice (strike en anglais) et durant une période déterminée appelé échéance. Le vendeur de l'option est tenu de se soumettre à la décision du détenteur de l'option. Selon la terminologie anglo-saxonne, un « **call** » est une option d'achat et un « **put** » est une option de vente, ces droits sont octroyés moyennant un prix appelé prime ou premium, si les options peuvent être exerçable à tout moment avant l'échéance elles sont américaines, mais dans le cas où elles sont exerçables juste à l'échéance on parle alors d'options européennes.

Cependant les besoins spécifiques de certains marchés financiers ont engendrés la création de différents types d'options autres que les américaines et les européennes, par exemple l'option binaire qui stipule que le gain de l'acheteur est fixe lorsque l'actif sous-jacent est à un niveau supérieur au prix d'exercice de l'option pour un call et inférieur pour un put ou bien l'option lookback, elle donne le droit à son acheteur de choisir a posteriori quel prix utiliser, parmi ceux traités durant la vie de l'option, pour exercer ou pas l'option. Le détenteur étant rationnel, il va opter pour le niveau qui maximise son gain.

Les options se distinguent, également, par l'actif sur lequel elles portent, autrement dit l'actif sous-jacent. Celui-ci peut être une action, un tracker, un indice,

Une option est dite dans la monnaie « in the money » lorsque son prix d'exercice est inférieur au prix de son actif sous-jacent pour un call (ou supérieur au prix de son actif sous-jacent pour un put), hors de la monnaie « out of the money » dans le cas contraire ; et à la monnaie « at the money » si le prix d'exercice est égal au cours actuel de l'actif sous-jacent de l'option.

3.2.2 Le prix d'exercice

Par définition le prix d'exercice d'une option est le prix fixé au préalable avec lequel le détenteur peut exercer son droit d'acheter ou de vendre l'option. Le vendeur est dans l'obligation d'honorer son contrat en se pliant à la décision du détenteur. Une option d'achat a plus de chance d'être exercée lorsque son prix d'exercice est faible, sa valeur est ainsi une fonction décroissante de son prix d'exercice. A l'inverse, une option de vente a plus de chance d'être exercée si son prix d'exercice est élevé par conséquent, sa valeur est ainsi une fonction croissante de son prix d'exercice.

3.2.3 Payoff d'une option

Le résultat de l'option à l'échéance est appelé gain ou payoff, il est équivalent à la valeur intrinsèque, ce qui signifie pour un call que son payoff est égal à la différence entre le prix du sous-jacent et le prix d'exercice et pour un put, au prix d'exercice diminué du prix du sous-jacent. Le payoff d'une option implique aussi de déduire la prime payée pour acquérir l'option. Nous constatons quatre situations possibles, deux pour un call et deux pour un put.

Les schémas suivants mettent en évidence la progression des gains dans différents cas :

Option d'achat (call) :

Un call écrit sur une action est un titre qui donne le droit d'acheter une option à un prix d'exercice déterminé, disons X , jusqu'à sa date d'échéance. Le call est dit européen s'il ne peut être exercé qu'à son échéance. Exercer un call signifie prendre possession de l'action en payant le prix d'exercice X .

Par ailleurs, un call est dit américain s'il peut être exercé en tout temps jusqu'à son échéance. Le payoff d'un call européen écrit sur une action ne versant pas de dividende est égal au montant suivant à son échéance:

$$\text{payoff} = (S_t - X)^+$$

où S_t est le prix de l'action sous-jacente à l'échéance de l'option et où $(S_t - X)^+ = \max(S_t - X, 0)$.

Un call combine un risque de perte limité, égal au prix de l'option, et un fort potentiel de gains dans un marché haussier. Donc le profit maximum est potentiellement illimité, la perte est limitée au prix de l'option et le seuil de rentabilité (break-even ou BE) est atteint lorsque le prix du sous-jacent est égal au le prix d'exercice plus la prime d'option.

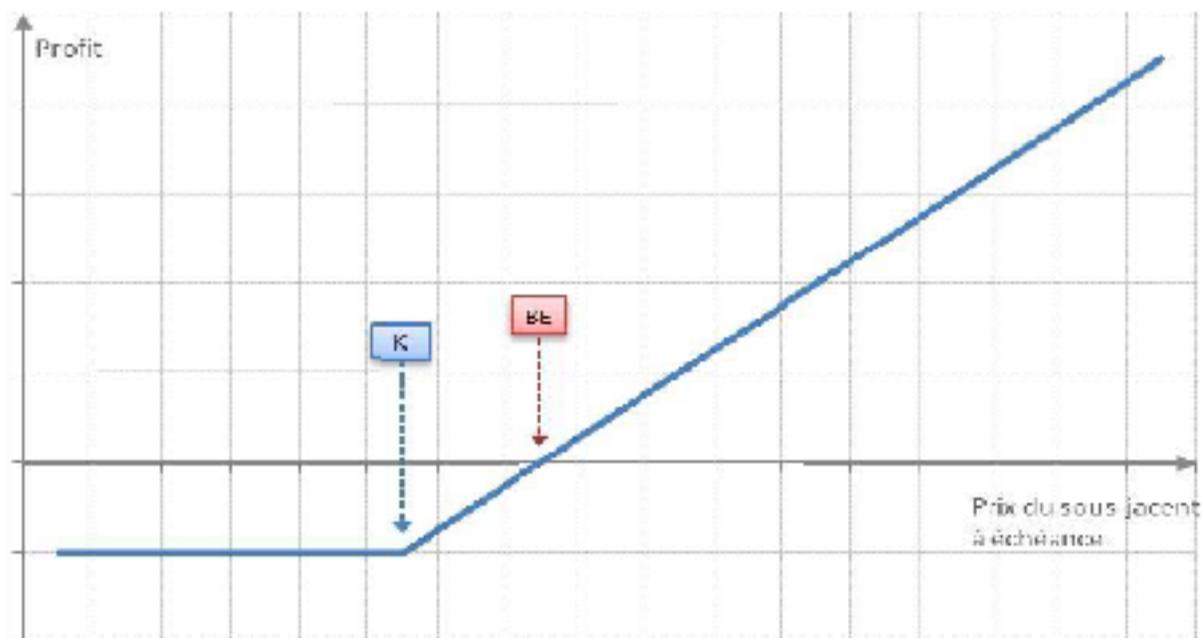


Figure 3.1 : le payoff pour l'acheteur d'un call européen.

Comme l'indique la figure 3.2, le payoff du vendeur du call est à l'inverse de celui de l'acheteur et s'avère négatif lorsque le prix de l'action dépasse le prix d'exercice plus la prime d'option. Le vendeur est cependant compensé par l'acheteur qui lui verse une prime, soit le prix proprement dit de l'option. Dans ce cas les gains sont limités à la prime d'option, la vente d'un call peut s'avérer plus intéressant lorsque les perspectives du marché sont plus que modérément baissières. Donc le profit maximum est limité au prix de l'option, la perte est potentiellement illimitée.

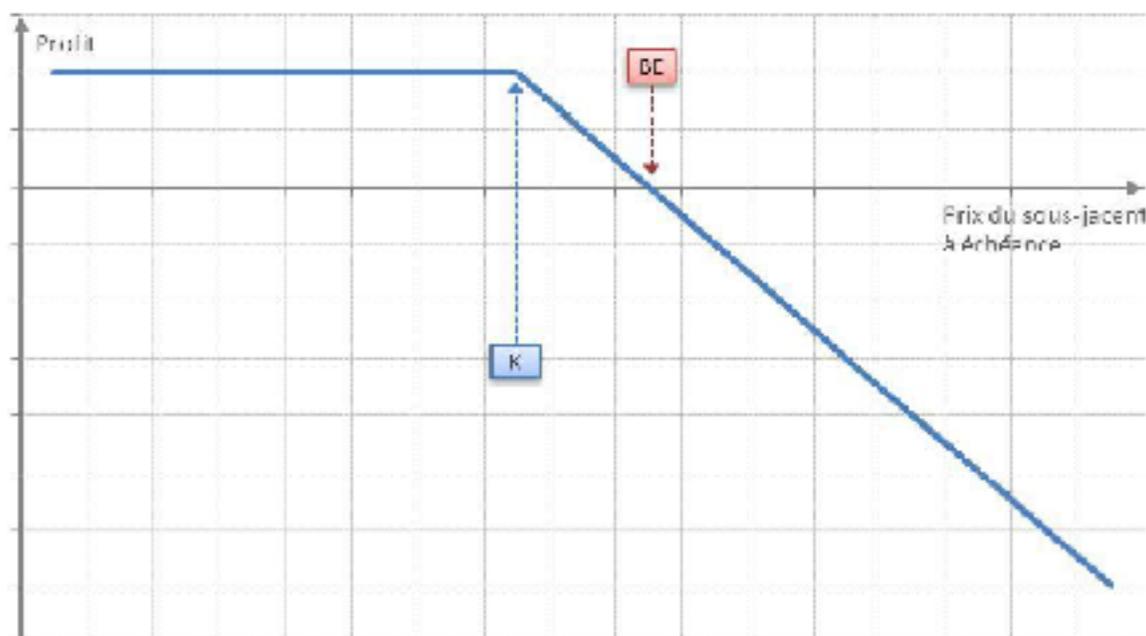


Figure 3.2 : le payoff pour le vendeur d'un call européen.

Option de vente (put) :

Le put donne le droit à son détenteur de vendre une action au prix d'exercice, disons X , jusqu'à son échéance. Comme le call, le put peut être européen ou américain.

Pour le détenteur, le payoff d'un put à son échéance est le suivant :

$$payoff = (X - S_t)^+$$

Un put combine un risque de perte limité, égal au prix de l'option, et un fort potentiel de gains dans un marché baissier, comme l'indique la figure 3.2. Donc le profit maximum est potentiellement illimité, la perte est limitée au prix de l'option et le seuil de bénéfice (break-even ou BE) est atteint lorsque le prix du sous-jacent est atteint le prix d'exercice moins la prime d'option.

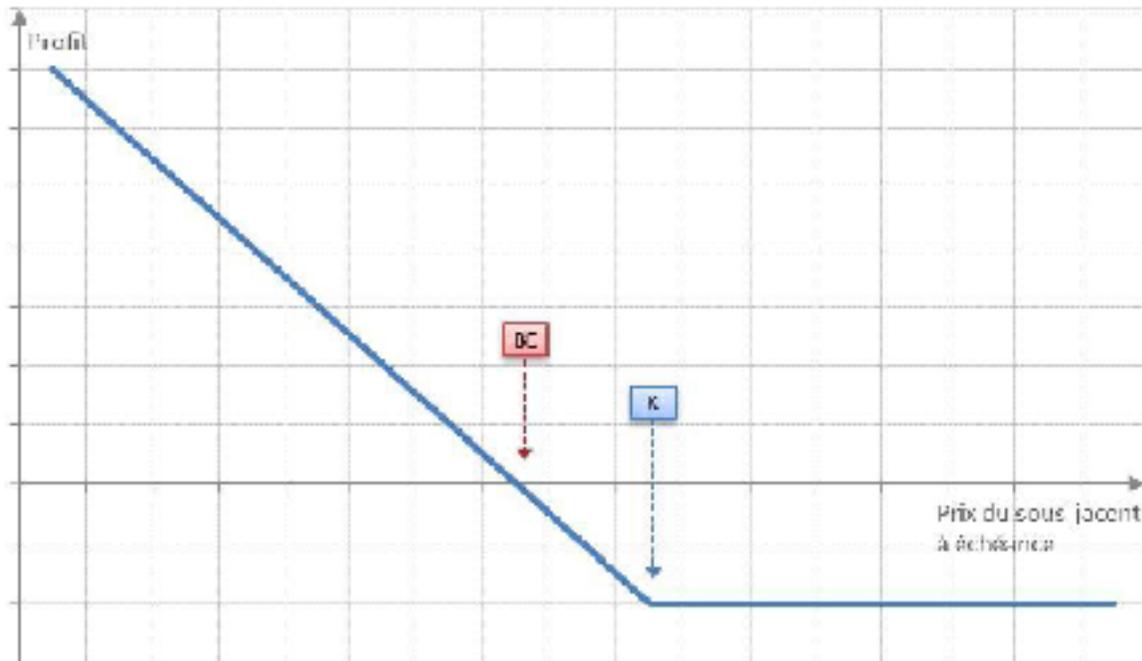


Figure 3.3 : le payoff pour l'acheteur d'un put européen.

Par ailleurs le vendeur d'un put a un payoff inverse de celui de l'acheteur, c'est-à-dire : $payoff = -(X - S_t)^+$. Les gains sont limités à la prime d'option ainsi la vente d'un put peut s'avérer plus intéressant lorsque les perspectives de marché sont plus que modérément baissières. Comme l'indique la figure 3.4, le payoff du vendeur du put est négatif dès que le prix de l'action, à l'échéance de l'option, se situe en deçà du prix d'exercice.

Donc le profit maximum est limité au prix de l'option, la perte est potentiellement illimitée.

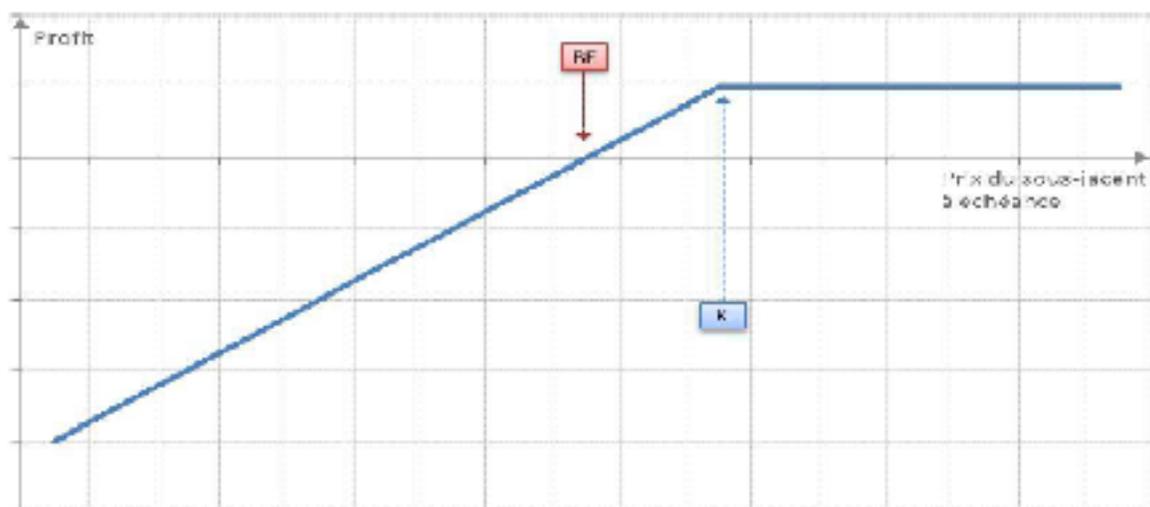


Figure 3.4 :le payoff pour le vendeur d'un put européen.

Il est d'ores et déjà possible de formuler les stratégies les plus simples que les acheteurs et les vendeurs de calls et de puts peuvent imaginer. Attardons-nous d'abord aux calls. Comme on peut le constater à la figure 3.1, le gain d'un détenteur de call est d'autant plus important que le prix du sous-jacent, en l'occurrence l'action, l'est également. En fait, on dit qu'une option d'achat est à la monnaie si le prix de l'action est égal au prix d'exercice et dans la monnaie si le prix de l'action est supérieur au prix d'exercice. Par contre, si le prix de l'action est inférieur au prix d'exercice, le call est en dehors de la monnaie. Par conséquent, le détenteur d'un call est d'autant plus favorisé que son option est davantage dans la monnaie. Lorsqu'il anticipe une hausse du prix d'une action, l'investisseur aura donc tendance à acheter des calls sur cette action de façon à engranger des profits.

L'achat de calls est donc une stratégie bullish. Il ne faut pas croire cependant que l'achat de calls comporte un risque minimal. en effet, si le prix de l'action demeure en deçà du prix d'exercice, le détenteur du call subit une perte égale à la prime qu'il a payée pour se porter acquéreur du call.

Pour sa part, le vendeur du call fait face à un payoff négatif quand le prix de l'action excède le prix d'exercice de l'option vendue. Certe, il encaisse une prime lorsqu'il vend un call. Sa stratégie sera donc de vendre des calls en dehors où très en dehors de la monnaie de manière à éviter que le prix de l'action ne vienne se situer au-dessus du prix d'exercice du call à l'échéance.

Déplaçons-nous maintenant vers des stratégies élémentaires impliquant les puts classiques. Un put est à la monnaie si le prix de l'action sous-jacente est égal au prix d'exercice du put. Il est dans la monnaie si le prix de l'action est inférieur au prix d'exercice et en dehors de la monnaie, si le prix de l'action est supérieur au prix d'exercice.

Par conséquent, un investisseur détiendra un put écrit sur une action lorsqu'il anticipera une baisse de prix de la date d'action. L'achat de puts correspond donc à une stratégie bearish

3.2.4 La durée de vie d'une option

Nous pouvons classer les options selon leurs échéances en trois catégories, en premier celles ayant des durées de vie ne dépassant pas les 6 mois, la seconde catégorie peut atteindre 18 mois, 2 ans voir 5ans et la dernière catégorie comporte les options ayant une maturité plus de 5ans.

Une lointaine échéance a pour effet d'augmenter les possibilités de variation du cours de l'action est donc la probabilité d'exercice de l'option.

3.3 Marché financier

3.3.1 Equilibre d'un marché financier

Par définition, un marché est dit équilibré si l'offre est égale à la demande, cet équilibre est réalisé en ajustant les prix des actifs. Dès que le marché est en situation d'équilibre et suffisamment liquide, tout opérateur trouvera une contrepartie acceptant de traiter au prix du marché. Nous disons de l'équilibre qu'il est compétitif si les agents n'ont pas un poids relatif suffisant, pour peser sur les prix .

3.3.2 Absence d'opportunité d'arbitrage

L'arbitrage est une opération qui n'implique aucune mise de fonds et qui n'engendre que des flux de trésorerie positifs ou nuls. L'existence d'opportunité d'arbitrage sur un marché est incompatible avec l'équilibre de celui-ci. En effet, l'opportunité d'arbitrage déclenche une offre sur les produits « sur cotés » et une demande sur les produits sous-cotés .

3.3.3 Efficience d'un marché

L'équilibre du marché peut être le résultat d'opérateurs mal informés ou bien irrationnels.

Un marché est efficient quand à chaque instant les prix incorporent toute l'information pertinente disponible.

3.3.4 Mesures de sensibilités des options

Les Grecs (ou bien les ratios de gestion) sont des indicateurs qui mesurent la sensibilité de la prime d'une option par rapport à un déterminant donné (le cours du sous-jacent, le temps, la volatilité). Pour gérer leurs positions, les opérateurs se basent principalement sur les ratios primaires (**delta**, **gamma**, **thêta**, **véga**, et **oméga**). Tandis que les ratios secondaires (ratio égaliseur et la volatilité) servent plutôt à détecter des opportunités d'arbitrage.

3.4 Modèle binomial

Le modèle binomial a été élaboré par Cox, Ross et Rubinstein en 1979. Ce modèle est discret pour la dynamique du sous-jacent. L'évaluation de l'option est calculée par l'application de la probabilité du risque.

3.4.1 Modèle binomial à une période

Dans ce modèle nous considérons que le marché est à deux temps $t = 0$ et $t = 1$, et a deux actifs l'un risqué et l'autre sans risque.

L'actif sans risque passe de $R = 1$ en $t = 0$ à $R = (1 + r)$ en $t = 1$, à titre d'exemple de l'argent placé dans une banque avec un taux, est considéré comme un actif sans risque.

L'actif risqué que l'on note S , vaut S_0 en mais $t = 1$ en peut prendre deux valeurs différentes, soit il subit une augmentation $S_1^u = u.S_0$ ou une baisse $S_1^d = d.S_0$ avec $d < 1$ et $u > 1$.

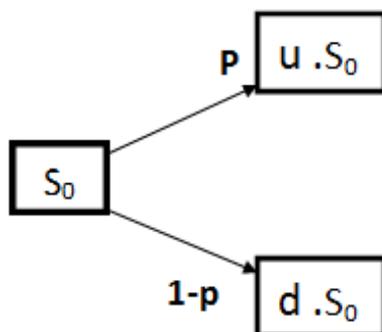


Figure 3.5 : Arbre binomial à une période.

Le prix augmente avec une probabilité p , et baisse avec une probabilité de $1 - p$ ($p \in [0, 1]$).

3.4.2 Modèle binomial à n périodes

Le modèle binomial à n périodes est une généralisation du modèle précédant. Considérons un marché à deux actifs financiers l'un risqué et l'autre sans risque sur un intervalle de temps $[0, T]$ divisé en n périodes. L'actif sans risqué qui vaut 1 en $t=0$ progresse au fil des n périodes comme suit (r est le taux du placement sans risque) :

$$1 \longrightarrow (1 + r) \longrightarrow (1 + r)^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow (1 + r)^n$$

Par ailleurs, l'actif risqué prend la valeur S_0 en $t = 0$, et il peut prendre deux valeurs à chaque période c'est-à-dire qu'à chaque période, il peut augmenter comme il peut baisser cette évolution peut être schématisée par un arbre comme suit :

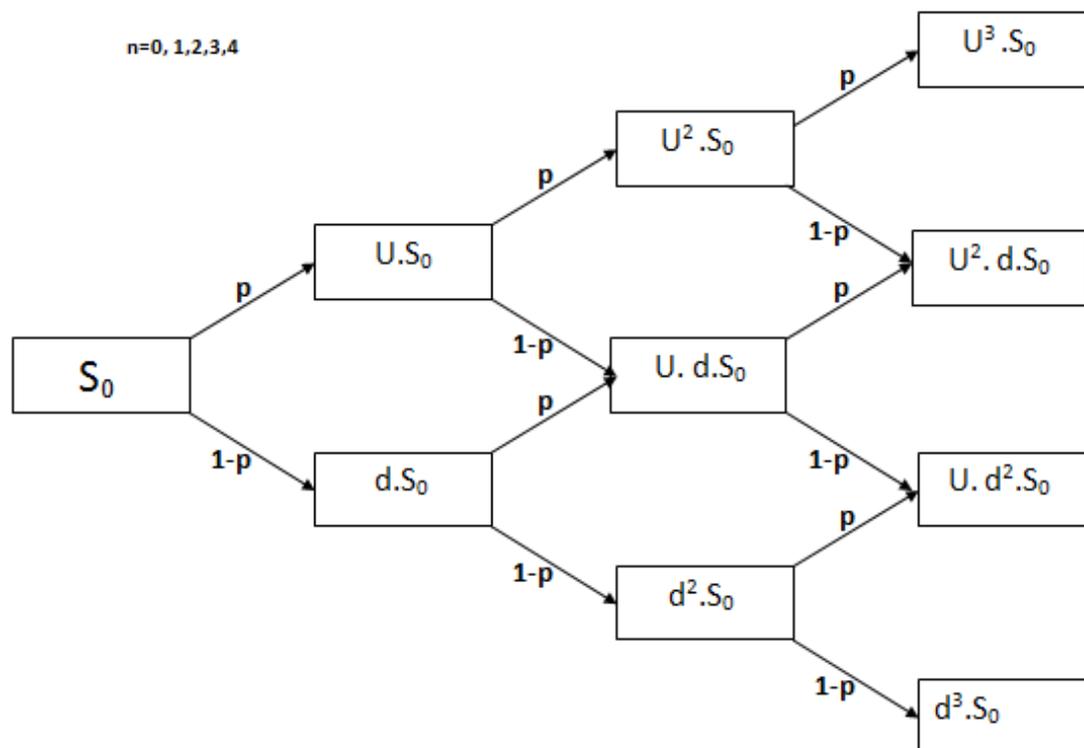


Figure 3.6 : Arbre binomial à trois périodes.

l'arbre binomial représente l'ensemble des trajectoires possibles pour un actif risqué, cet ensemble est noté Ω , c'est l'ensemble des n -uplés (w_1, \dots, w_n) tel que chaque w_i prend deux valeurs possible W_i^u si l'actif augmente ou W_i^d si l'actif baisse avec des probabilités p et $1-p$ respectivement.

On pose $Y_i = \frac{S_i}{S_{i-1}}$, ces quantités représentent le rendement.

3.4.3 Calcul de la prime d'une option européenne avec le modèle binomial

Avant de calculer la prime d'une option avec le modèle binomial, on a besoin des données suivantes :

- Le prix actuel du sous-jacent S .
- La maturité de l'option en année T (la durée de vie).
- Le prix d'exercice ou strike K
- La volatilité annualisée de l'actif sous jacent en % (il faut l'estimer)
- Le taux d'intérêt sans risque r en % par an.
- Le taux de dividende annuel q en % (dans notre étude il y a pas de dividendes).
- Le nombre de périodes n (plus le nombre est important, plus grande est la précision).

Ayant toutes ces informations nous pouvons calculer la prime en appliquant les formules suivantes (C pour la prime du call et P pour la prime du put) :

$$c = \exp(-rt) \sum_{i=0}^n \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} \right) p^i (1-p)^{n-i} \max(Su^i d^{n-i} - K; 0)$$

$$p = \exp(-rt) \sum_{i=0}^n \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} \right) p^i (1-p)^{n-i} \max(K - Su^i d^{n-i}; 0)$$

avec:

$$\Delta t = T/n$$

$$u = \exp(\delta \cdot \sqrt{\Delta t}) \quad \text{et} \quad d = \exp(-\delta \cdot \sqrt{\Delta t})$$

On a aussi p nommée la probabilité « risque-neutre » de hausse du sous-jacent.

$$p = \frac{(\exp(b \cdot \Delta t) - d)}{u - d}$$

Chapitre 4

Estimation et Simulation d'équations différentielles stochastiques

4.1 Estimation paramétrique des EDS

On considère une EDS paramétrée par un vecteur de paramètres à estimer, de la forme:

$$dX_t = b_t(X_t, \theta)dt + \sigma_t(X_t, \theta)dW_t$$

On se placera dans le cas où le processus est homogène $b_t(x, \theta) = b(x, \theta)$ et $\sigma_t(x, \theta) = \sigma(x, \theta)$, ou du moins peut être considéré comme tel sur les horizons de temps étudiés.

On notera x_0, \dots, x_n une séquence d'observations où x_i représente en fait x_{t_i} , avec, $t_i = i\Delta$ et Δ le pas d'échantillonnage supposé constant par commodité.

Notons cependant qu'un des intérêts de la modélisation continue lorsqu'on travaille avec une version échantillonnée du processus réside

dans la possibilité de traiter les problèmes d'estimation à partir d'échantillonnages irréguliers en décrivant ces échantillons au moyen de l'EDS sous-jacente.

4.1.1 Maximum de vraisemblance

Il existe de nombreuses méthodes pour estimer les paramètres des EDS. Considérons ici l'approche classique du maximum de vraisemblance qui consiste à maximiser la loi des X_i aux valeurs observées x_i vis à vis des paramètres :

$$\hat{\theta}_{MV} = \arg \max_{\theta} p_{\theta} = (x_0, \dots, x_n).$$

La vraisemblance $p_{\theta}(x_0, \dots, x_n)$ se réécrit encore sous la forme:

$$L(\theta) = \prod_{i=0}^{n-1} p_{\theta}(x_{i+1}/x_i) p_{\theta}(x_0)$$

ou encore en prenant le logarithme,

$$l(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \log p_{\theta}(x_{i+1}/x_i) + \log p_{\theta}(x_0)$$

Souvent, $p_{\theta}(x_0)$ est inconnu et son influence sur $l(\theta)$ tend à devenir faible lorsque n croît. on se limite alors à la recherche du maximum de $\sum_{i=0}^{n-1} \log p_{\theta}(x_{i+1}/x_i)$

Même lorsque la loi de transition $p_{\theta}(y/x)$ est connue on ne peut pas en général trouver directement le maximum de la vraisemblance par annulation du gradient $\nabla_{\theta} p_{\theta}(x_0, \dots, x_n)$.

Il faut alors employer des méthodes numériques d'optimisation. de nombreuses techniques existent pour une telle optimisation.

4.1.2 Vraisemblance approchée

Afin d'accéder simplement à une approximation de la loi de transition $p_{\theta}(y/x)$ on peut se baser sur un schéma de discrétisation de l'EDS.

Ainsi, le schéma d'Euler conduit à l'approximation $X_{i+1} = X_i + b(x_i, \theta)\Delta + \sigma(x_i, \theta)(W_{i+1} - W_i)$

dont on tire $p_{\theta}(x_{i+1}, x_i) \sim \mathbb{N}(x_i + b_t(x_i, \theta)\Delta, \sigma^2(x_i, \theta)\Delta)$ et une log-vraisemblance de la forme:

$$l(\theta) = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i - b(x_i, \theta)\Delta)^2}{\sigma^2(x_i, \theta)\Delta} + \log(2\pi\Delta\sigma^2(x_i, \theta)) \right\}$$

En particulier, on peut vérifier que σ est constante, la maximisation de la vraisemblance conduit à la minimisation de $\sum_{i=0}^{n-1} (b^2(x_i, \theta)\Delta - 2(x_{i+1} - x_i)b(x_i, \theta))$

Notons également que dans ce cas un estimateur convergent de σ^2 est donné par

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$$

Ce résultat provient du fait que $(dX_t)^2 = \sigma^2(X_t, \theta)dt$, ce qui conduit à l'approximation:

$$\int_0^{n\Delta} \sigma^2(X_t, \theta)dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$$

4.2 Estimation non paramétrique des EDS

Pour construire des estimateurs non paramétriques de $b_t(x)$ et de $\sigma_t^2(x)$, on va commencer par décrire ces grandeurs comme des espérances mathématiques que l'on cherchera ensuite à calculer

au moyen d'estimateurs à noyau. Partant de la relation

$$X_{t+h} - X_t = \int_t^{t+h} b_u(X_u) du + \int_t^{t+h} \sigma_u(X_u) dW_u$$

on voit donc aisément que

$$b_t(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[(X_{t+h} - X_t) | X_t = x]$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} E[(X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x] &= E \left[\left(\int_t^{t+h} b_u(X_u) du + \int_t^{t+h} \sigma_u(X_u) dW_u \right)^2 \middle| X_t = x \right] \\ &= \sigma_t^2(x)h + o(h) \end{aligned}$$

donc,

$$\sigma_t^2(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[(X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x]$$

On va voir comment exploiter les relations précédentes pour estimer $b(x)$ et $\sigma^2(x)$ dans le cas d'un processus de diffusion homogène. Pour cela, on va fournir dans le paragraphe

suivant quelques informations sur la notion d'estimateur à noyau d'une densité de probabilité.

4.3 Estimation non-paramétrique de b et de σ

Pour construire des estimateurs non paramétriques de $b_t(x)$ et de $\sigma_t^2(x)$, on va commencer par décrire ces grandeurs comme des espérances mathématiques que l'on cherchera ensuite à calculer au moyen d'estimateurs à noyau.

4.3.1 Estimateurs à noyau

On considère une fonction $K(x)$ positive de $C^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\int K(x)dx = 1$$

On supposera de plus que K est paire, de sorte que $\int xK(x)dx = 0$. On définit également les fonctions $K_h(x) = h^{-1}K(x/h)$. Lorsque la "bande passante" h tend vers 0, K_h tend vers la distribution de Dirac δ , et vers une densité constante lorsque h tend vers l'infini. Étant donné une variable aléatoire X dont on observe des réalisations indépendantes x_1, \dots, x_n on définit un estimateur à noyau de la densité $p(x)$ de X sous la forme:

$$\hat{p}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - x_i)$$

A partir de l'estimation $\hat{\pi}_{h_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_{h_n}(x - x_i)$ de la distribution stationnaire, la connaissance du coefficient de dérive ou de diffusion permet d'évaluer l'autre grandeur au moyen des relations

$$\hat{b}(x) = \frac{1}{2\hat{\pi}(x)} \frac{d}{dx} [\sigma^2(x)\hat{\pi}(x)] \quad \text{et} \quad \sigma^2(x) = \frac{2}{\hat{\pi}(x)} \int_t^{t+h} b(u)\hat{\pi}(u)du$$

Si aucun des deux coefficients n'est connu, on peut s'inspirer des relations $b_t(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[(X_{t+h} - X_t) | X_t = x]$ et $\sigma_t^2(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[(X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x]$, pour construire les estimateurs en estimant ces espérances comme suit :

$$\hat{b}(x) = \frac{\sum_{i=0}^{x-1} k_{h_n}(x - x_i)(x_{i+1} - x_i)}{\Delta_n \sum_{i=0}^{x-1} k_{h_n}(x - x_i)}$$

$$\hat{\sigma}_t(x) = \frac{\sum_{i=0}^{x-1} k_{h_n}(x - x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{x - 1 - \Delta_n \sum_{i=0}^{x-1} k_{h_n}(x - x_i)}$$

où Δ_n représente le pas d'échantillonnage temporel des n observations. en effet, on a par exemple pour $b(x_i)$ les approximations locales

$$b(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E [(X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x] \approx \frac{1}{\Delta_n} (x_{i+1} - x_i)$$

et la pondération par les noyaux $k_{h_n}(x - x_i)$ permet de lisser l'estimateur pour les diverses valeurs de x . on adopte la même démarche pour l'estimation de $\sigma^2(x)$.

4.4 Simulation des EDS

L'intérêt pratique de la simulation d'équations différentielles stochastiques sera illustré dans le chapitre suivant. Nous en donnons néanmoins un aperçu rapide ici. Nous verrons qu'il est possible de représenter la solution u d'une *EDP* classique à l'aide de la solution d'une équation différentielle stochastique, au moyen d'une formule du type

$$u(x, t) = E(h(X_T))$$

Pour simuler numériquement u , dont on ne peut connaître l'expression analytique, il existe donc deux possibilités : soit utiliser des méthodes classiques sans passer par la représentation ci-dessus, soit simuler numériquement X_T jusqu'au temps T , puis approcher

l'espérance à l'aide de la loi des grands nombres (moyenne de M trajectoires indépendantes de (X_T)). Cette dernière technique présente un certain intérêt, surtout lorsque la dimension de X est grande. En effet, les méthodes classiques (éléments finis, éléments frontière,...) deviennent dans ce cas vite lourdes à mettre en oeuvre, et l'ordre de convergence des méthodes déterministes diminue fortement lorsque la dimension augmente, alors qu'il est possible de montrer que celui obtenu avec des méthodes stochastiques est indépendant de cette dimension. Il s'agit donc dans la suite d'approcher numériquement

$$dX_t = b(X, t)dt + \sigma(X, t)dW_t$$

A propos de convergence

Deux mesures de vitesse de convergence sont habituellement utilisées sur les schémas décrits dans la suite. Si $Y_n \approx X_{nh}$ est une approximation d'une trajectoire du processus solution de l'équation différentielle stochastique précédente:

- la vitesse de convergence forte est donnée par le plus grand tel que $E(|X_T - Y_N|) = o(h^\gamma)$
- la vitesse de convergence faible concerne la convergence des moments et est donnée par le plus grand β tel que $|E(f(X_t) - E(f(Y_N)))| = o(h^\beta)$, pour f polynôme ou fonction régulière à support compact.

Pour chaque schéma, des conditions de régularité spécifiques devront être imposées à b et σ pour que la vitesse propre à la méthode soit effectivement atteinte.

4.5 Schéma d'Euler- Maruyama :

Cette méthode consiste à calculer une approximation de $X(t)$ sur une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$.

Soit $\{X(t), t \in [0, T]\}$ le processus de diffusion solution de (2.1.2). Fixons un pas de temps $\Delta t > 0$ et notons τ_i la suite des instants de discrétisation.

$$\tau_i = i\Delta t, \quad i \geq 0$$

Soit (W_i) la suite des incréments de la discrétisation correspondante du mouvement Brownien $\{W_t, t \geq 0\}$.

$$\Delta W_i = W_{\tau_{i+1}} - W_{\tau_i} \quad i \geq 0$$

Le schéma d'Euler-Maruyama est donné par :

$$X_{i+1} = X_i + b(X_i, t_i)\Delta t + b(X_i, t_i)(\Delta W_i).$$

Par définition du mouvement Brownien, la suite (ΔW_i) est une suite de vecteur aléatoire, indépendants et de même loi.

Chacune des coordonnées de ΔW_i suit la loi normale $\mathbb{N}(0, \Delta t)$ de moyenne 0 et de variance Δt (d'écart-type $\sqrt{\Delta t}$).

Donc le schéma d'Euler-Maruyama devient :

$$X_{i+1} = X_i + b(X_i, t_i)\Delta t + S(X_i, t_i)\sqrt{\Delta t}Z_i \quad (4.5.1)$$

Où Z sont des variables *i.i.d* de loi $\mathbb{N}(0, 1)$.

Ce schéma à un ordre forte convergence égale à 1/2.

Exemple on a l'EDS suivant:

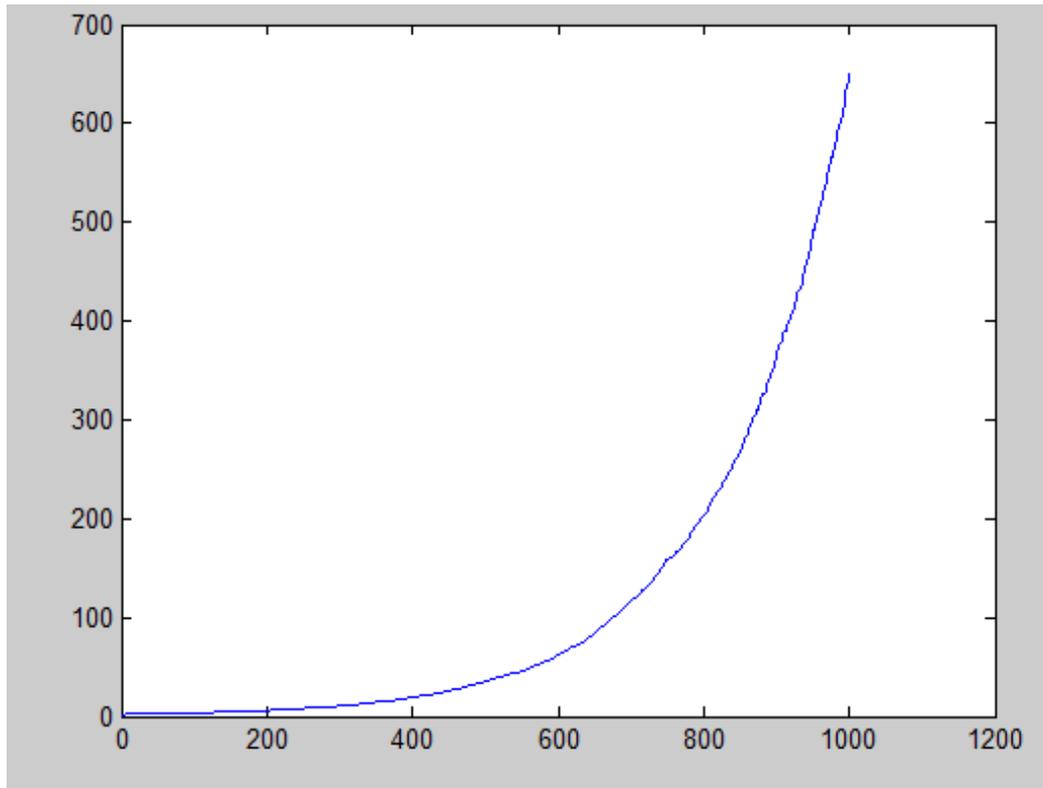
$$dS_t = 0.02dt + 0.111dW_t$$

Le programme en MATLAB nous donne la simulation de schéma d'Euler :

```

1 - n=1000;
2 - T=10;
3 - dt=T/n;
4 - a=0.02;b=0.111;
5 - y(1)=2
6 - for i=1:n
7 -     w=sqrt(dt)*rand;
8 -
9 -     y(i+1)=y(i)+a*y(i)*dt+b*y(i)*w;
10 - end
11 - plot(y)

```



4.6 Schéma de Milstein

Milstein a proposé une approximation du second ordre, utilise à nouveau le calcul stochastique différentiel. le schéma itératif est le suivant :

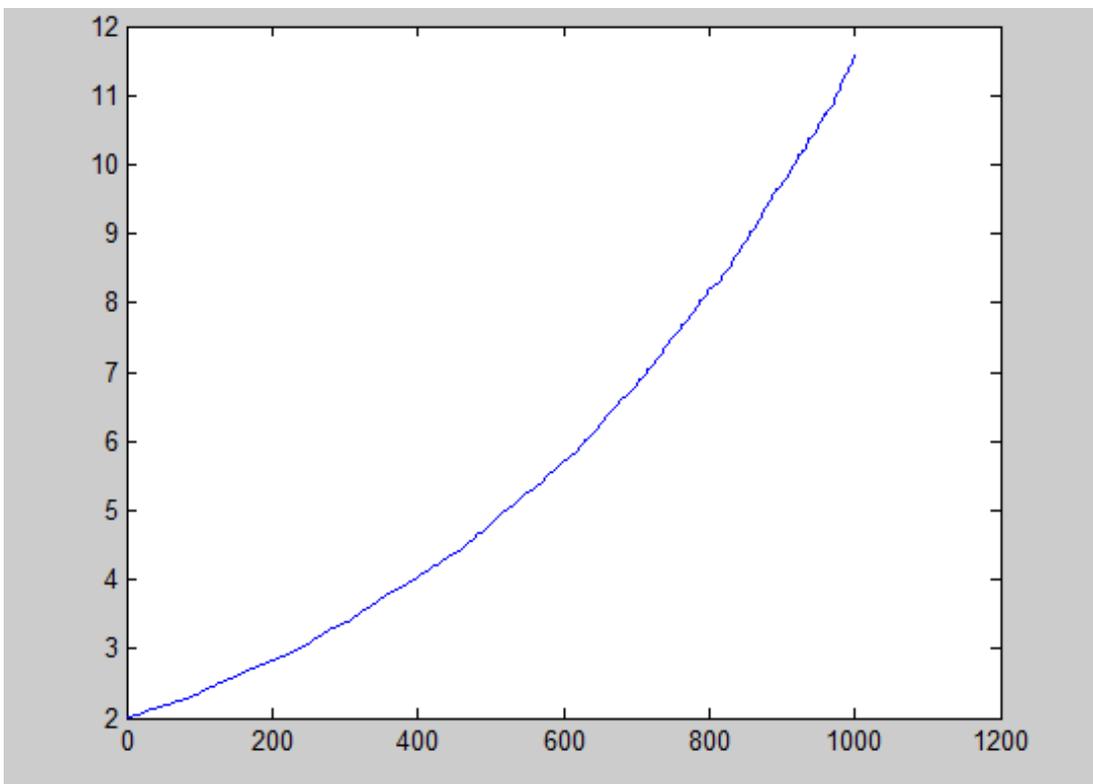
$$X_{i+1} = X_i + b(X_i, t_i)\Delta t + S(X_i, t_i)(\Delta W_i) + \frac{1}{2}S(X_i, t_i)\frac{\partial S}{\partial x}(X_i, t_i) [(W_{\tau_{i+1}} - W_{\tau_i})^2 - \Delta t] \quad \text{Où } i = 1, 2, 3, \dots$$

en prend le même exemple

$$dS_t = 0.02dt + 0.111dW_t$$

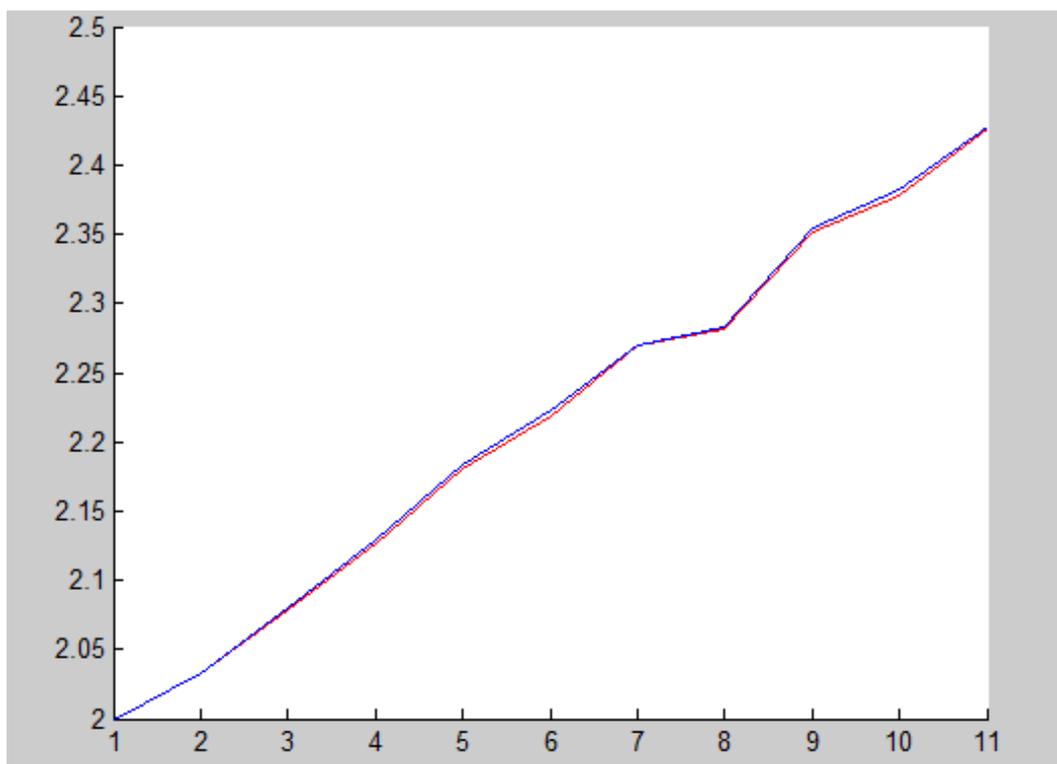
Le programme en MATLAB nous donne la simulation de schéma de Milstein

```
1 clear all
2 n=1000;T=1;dt=T/n;
3 a=0.02;b=0.111;y(1)=2;
4 for i=1:n
5     w=sqrt(dt)*rand;
6
7     y(i+1)=y(i)+a*y(i)*dt+b*y(i)*w+0.5*b^2*y(i)*dt*(randn^2-1);
8 end
9 plot(y)
```



Le programme en MATLAB nous donne la simulation de schéma de Milstein et Euler

```
10 %uler et milstein
11 clear all
12 n=10;T=1;dt=T/n;
13 a=0.02;b=0.111;y(1)=2;y1(1)=2;
14 for i=1:n
15     w=sqrt(dt)*rand;
16     y1(i+1)=y1(i)+a*y1(i)*dt+b*y1(i)*w;
17     y(i+1)=y(i)+a*y(i)*dt+b*y(i)*w+0.5*b^2*y(i)*dt*(randn^2-1);
18 end
19 hold on
20 plot(y,'r')
21 plot(y1)
22 hold off
```



4.7 Simulation d'un mouvement Brownien standard:

4.7.1 Discrétisation du temps :

Pour simuler le mouvement Brownien qui est un processus à temps continu, il faut d'abord discrétiser le temps.

Soit Δt la longueur d'une période de temps. Nous simulerons le mouvement Brownien au temps $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$

La propriété d'indépendance de la définition du mouvement Brownien implique que

$$W_{\tau_{i+1}} - W_{\tau_i}$$

où $\tau_i = i\Delta t$ avec $\Delta t = T/N$, $i \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{N}$

est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi $N(0, \Delta t)$

4.7.2 Simulation de la trajectoire :

Pour simuler une trajectoire d'un mouvement Brownien jusqu'à l'instant $N\Delta t$, il suffit de générer m variables aléatoires indépendantes,

$$Z_i, i \in 1, 2, \dots, N$$

de loi normale centrée et réduite. Nous simulerons

$$W_0 = 0 \quad \text{et} \quad W_{i+1} = W_i + \sqrt{\Delta t} Z_i$$

```
1 %programme de simulation du mouvement Brownien satndard
2 - T=1; N=500 ;dt=T/N;
3 - dw=zeros(1,N);
4 - w=zeros(1,N);
5 - dw(1)=sqrt(dt)*randn;
6 - w(1)=dw(1);
7 - for j= 2:N
8 -     dw(j)=sqrt(dt)*randn;
9 -     w(j)=w(j-1)+dw(j);
10 - end
11 - plot(0:dt:T,[0,w], 'r')
12 - xlabel('t', 'FontSize',16)
13 - ylabel('w(t)', 'FontSize',16, 'Rotation',0)
```

La Figure suivante représente la simulation du mouvement Brownien donnée par le code Matlab:

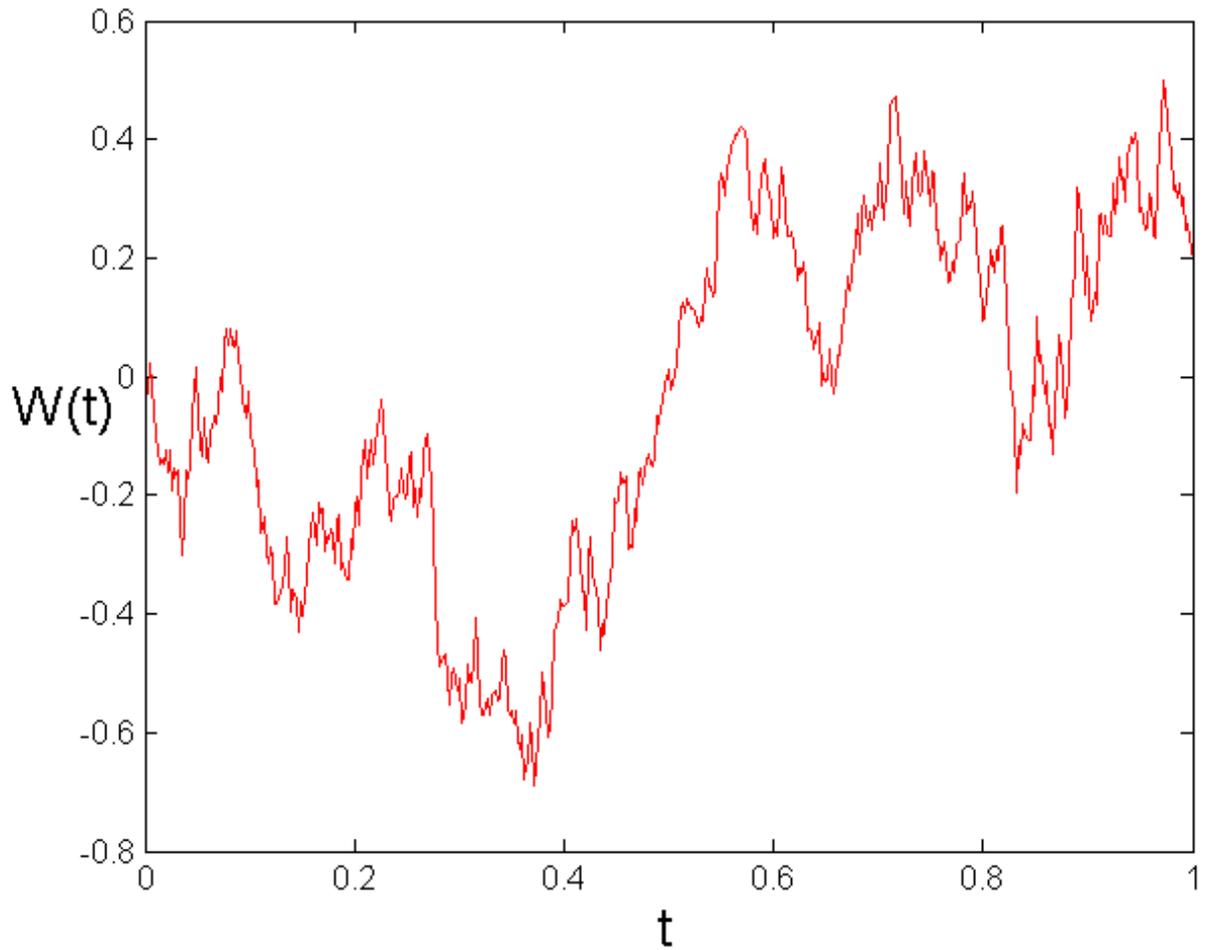


Figure 4.1 : Trajectoire de mouvement Brownien standard

Avec les mêmes démarches suivies dans la simulation d'une trajectoire d'un mouvement Brownien on peut simuler M trajectoires, le programme (PROG2) sur MATLAB, nous a donné la simulation de $N=100$ trajectoires, le résultat est illustré dans la figure :

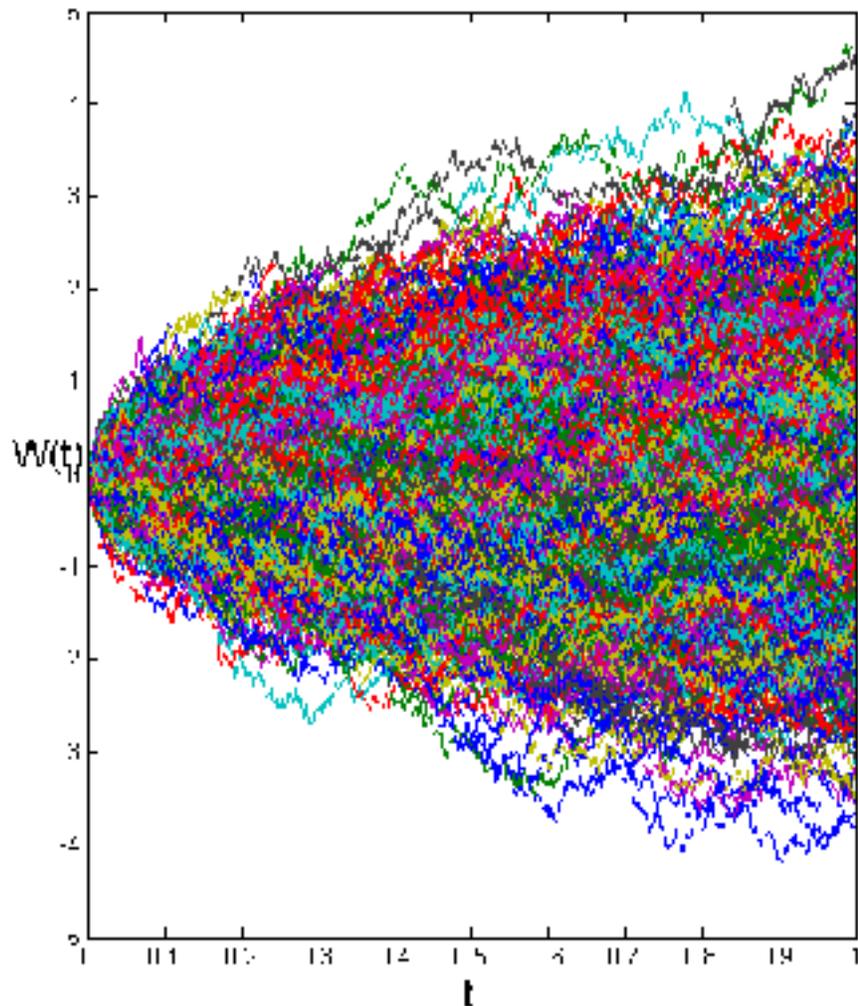


Figure 4.2 : simulation de 1000 trajectoire d'un mouvement Brownien

4.8 Simulation d'un mouvement Brownien géométrique

Nous voulons simuler le mouvement Brownien géométrique :

$$dS_t = S_t dt + S_t dW_t$$

avec la solution explicite :

$$dS(t) = S(0) \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right]$$

La simulation d'un mouvement Brownien géométrique est donnée par le programme suivant :

```
1      %simulation de MBG
2 -    mu=2;sigma=1;Szero=1;
3 -    T=1;N=2^8;dt=1/N;
4 -    dW=sqrt(dt)*randn(1,N);
5 -    W=cumsum(dW);
6      %resultat
7 -    Strue=Szero*exp((mu-0.5*sigma^2)*(dt:dt:T)+sigma*W);
8 -    plot(0:dt:T,[Szero,Strue],'k')
9 -    title('mu=2,sigma=1')
10 -   xlabel('t','FontSize',18)
11 -   ylabel('S(t)','FontSize',18,'Rotation',0)
```

La Figure suivante représente la simulation du mouvement Brownien géométrique donnée par le code Matlab.

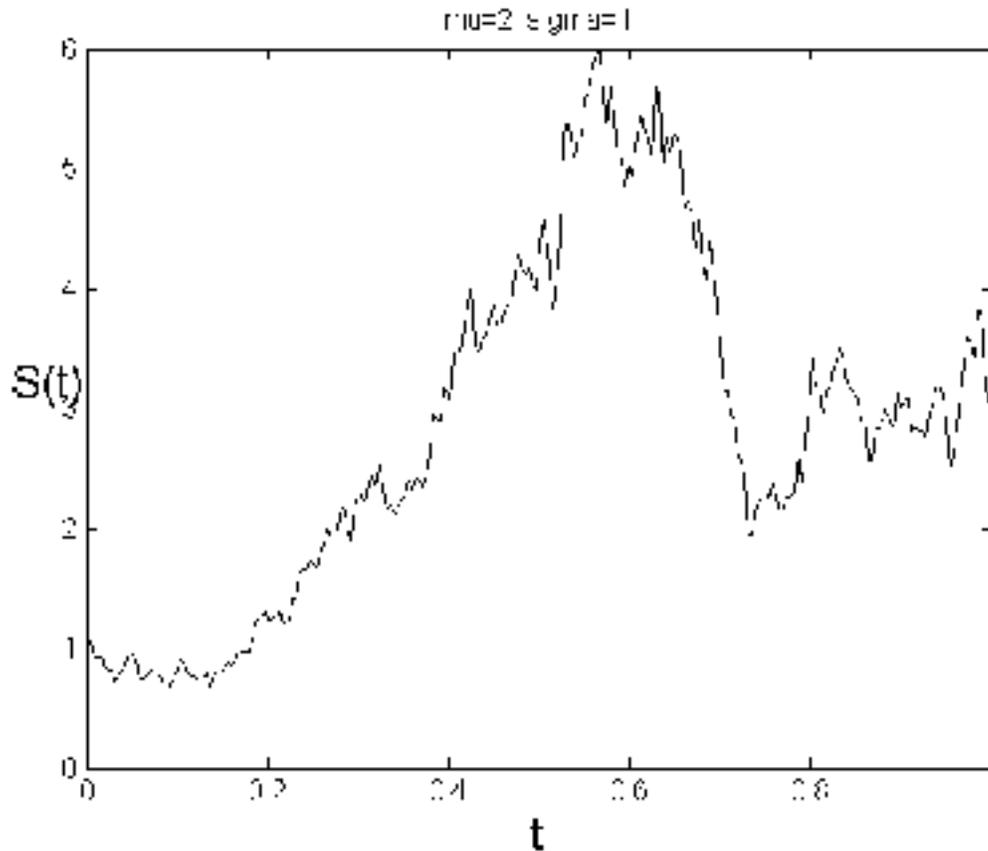


Figure 4.3 : Trajectoire de mouvement Brownien géométrique

À titre d'exemple on applique le schéma d'Euler-Maruyama sur le mouvement Brownien géométrique :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

Où μ et σ sont des réels constantes, par identification avec l'équation (4.5.1).

$$b(X_i, t_i) = \mu S_t \quad \text{et} \quad \sigma(X_i, t_i) = \sigma S_t$$

La solution analytique ou explicite de ce problème est connue :

$$S(t) = S(0) \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right]$$

On prend $\mu = 2, \sigma = 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$ avec $\Delta t = 1/1000$. Le logiciel Matlab donne le programme suivant :

```

1      %shema d'Euler sur MG
2 -    mu=2;sigma=1;Szero=1;
3 -    T=1;N=1000;dt=1/N;
4 -    dW=sqrt(dt)*randn(1,N);
5 -    W=cumsum(dW);
6 -    Strue=Szero*exp((mu-0.5*sigma^2)*(dt:dt:T)+sigma*W);
7 -    plot(0:dt:T,[Szero,Strue],'m-'),hold on
8 -    R=4;Dt=R*dt;L=N/R;
9 -    sem=zeros(1,L);
10 -   stemp=szeros;
11 -   for j=1:L
12 -       Winc=sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
13 -       Stemp=Stemp+Dt*mu*stemp+sigma*stemp*Winc;
14 -       sem(j)=stemp;
15 -   end
16 -   plot(0:Dt:T,[Szero,Sem],'r--*'),hold off
17 -   legend('solution exact','shéma dEuler','location','best')
18 -   xlabel('t','FontSize',14)
19 -   ylabel('S','FontSize',18,'Rotation',0,'HORIZONTALALIGNEMENT','right')
20 -   Erreur_EM=abs(Sem(end)-Strue(end));

```

La figure suivante montre le tracé d'une trajectoire de la solution exacte, et l'approximation correspondante donnée par le schéma.

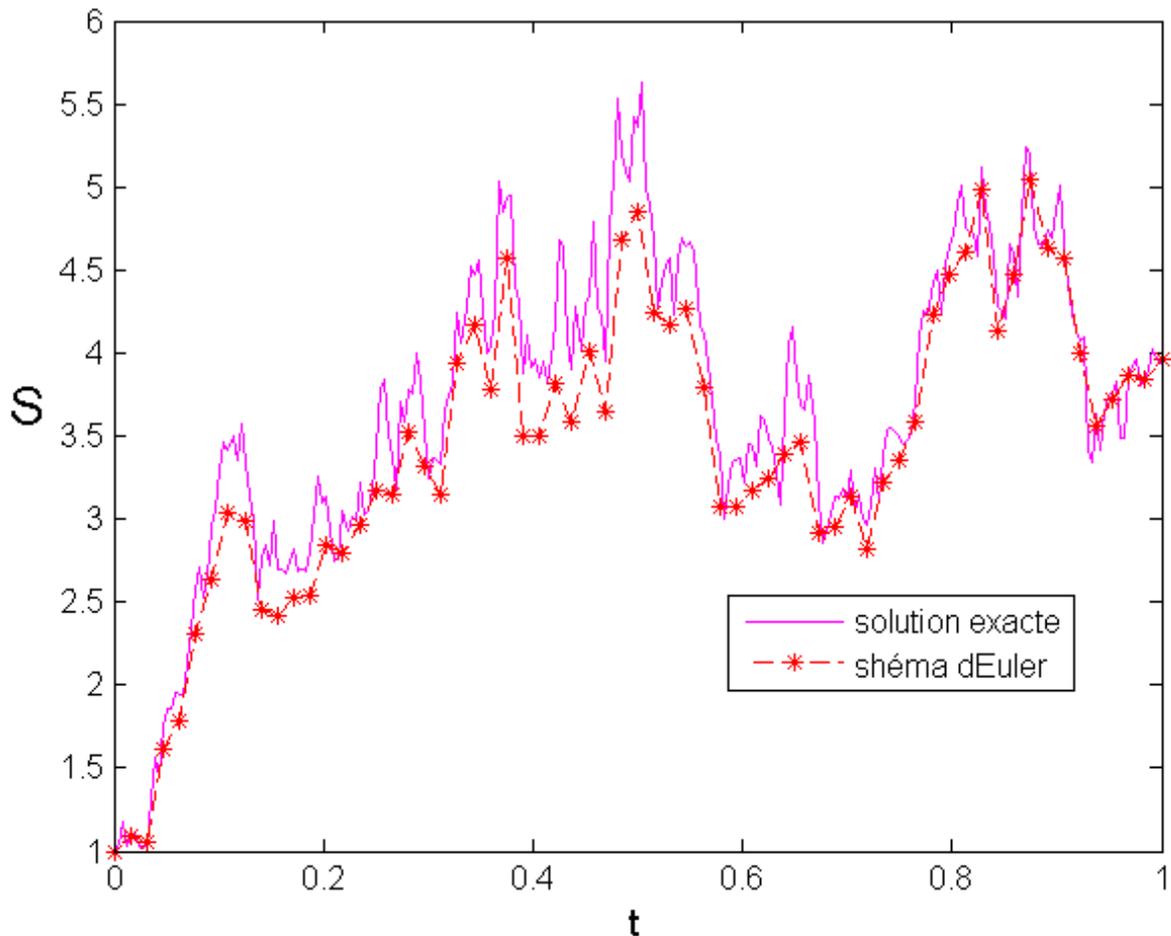


Figure 4.4 : Comparaison de l'approximation d'Euler-Maruyama et d'une trajectoire de l'EDS précédente.

L'erreur commise par le schéma, donné par le code Matlab est de valeur :
 $\text{ErreurEM}=0.0451$.

L'approximation(??)a un ordre fort de convergence égale à 1. Cette méthode améliore donc les instabilité numérique par rapport à la méthode d'Euler-Maruyama.

En utilisant l'exemple précédent celle du mouvement Brownien géométrique, pour montrer la meilleure convergence vers la solution explicite, la programme est le suivant :

```

1      % application shema milstien sur MBG
2 -    mu=2;sigma=1;Szero=1;
3 -    T=1;N=1000;dt=1/N;
4 -    dW=sqrt(dt)*randn(1,N);
5 -    W=cumsum(dW);
6 -    Strue=Szero*exp((mu-0.5*sigma^2)*(dt:dt:T)+sigma*W);
7 -    plot(0:dt:T,[Szero,Strue],'m-'),hold on
8 -    R=4;Dt=R*dt;L=N/R;
9 -    sem=zeros(1,L);
10 -   Sml=zeros(1,L);
11 -   Xtemp=Szero;
12 -   Stemp2=szeros;
13 -   for j=1:L
14 -       Winc=sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
15 -       Stemp2=Stemp2+(Dt*mu*Stemp2)+(sigma*Stemp2*Winc)+0.5*sigma^2*Stemp2*
16 -           (winc^2-Dt);
17 -       Sml(j)=Stemp1;
18 -   end
19 -   plot(0:Dt:T,[Szero,Sem],'r--*'),hold off
20 -   legend('solution exact','shéma milstien','location','best')
21 -   xlabel('t','FontSize',12)
22 -   ylabel('S','FontSize',18,'Rotation',0,'HORIZONTALALIGNEMENT','right')
23 -   Erreur_EM=abs(Sem(end)-Strue(end));

```

les trajectoires sont données dans la figure suivante :

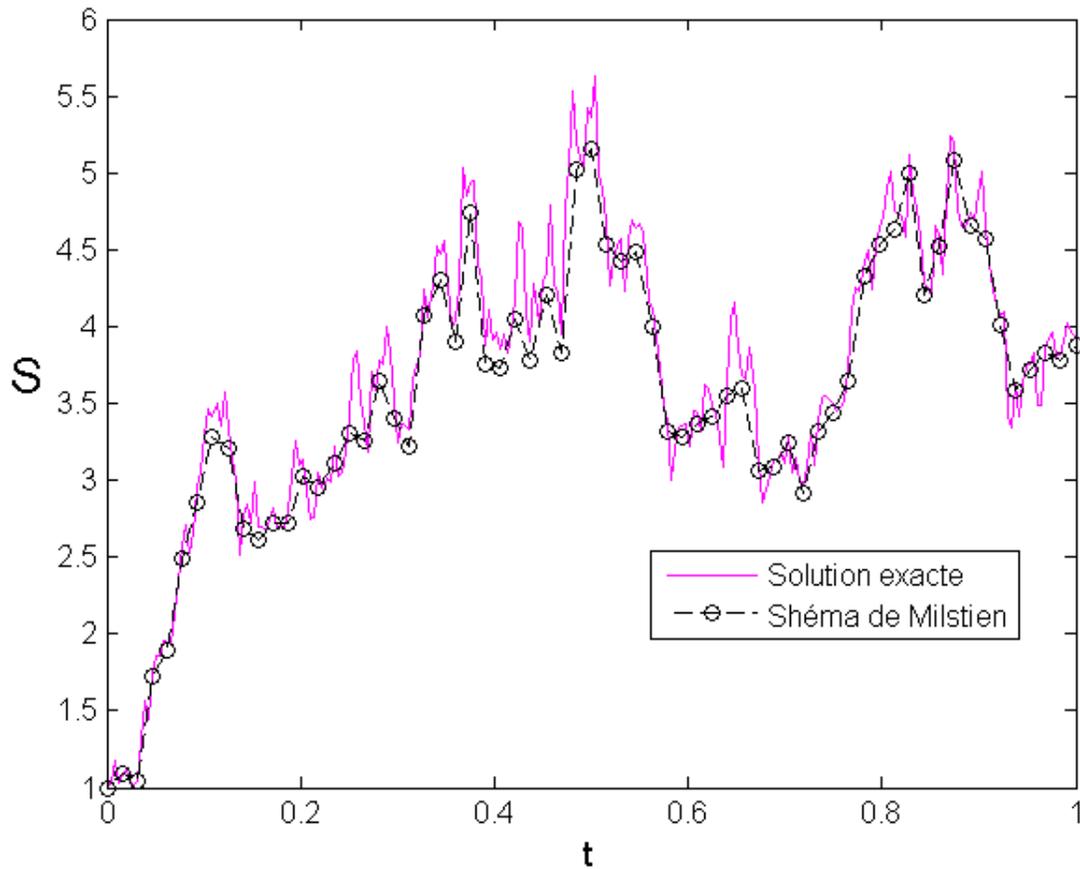


Figure 4.5 : Comparaison de l'approximation de Milstien et d'une trajectoire de l'EDS précédente.

4.8.1 Simulation du modèle Binomial

On reprend l'exemple précédent correspondant au Call européen où :

Le prix d'exercice $K = 85\$$.

La date d'échéance est dans 3 mois.

Le prix du sous-jacent $S = 90\$$.

Le placement sans risque $r = 6\%$.

Le facteur multiplicatif de la valeur de l'action à la hausse $u = 1.1$

Le facteur multiplicatif de la valeur de l'action à la baisse $d = 0.9$

La valeur de la prime pour $n = 4$ périodes est donnée par la formule suivante :

$$f = \sum_{j=a}^N C_N^j q^j (1-q)^{N-j} [u^j d^{N-j} S - K] e^{-Nr(T-t)}$$

$$\text{où : } a \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{SD^N}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}$$

Afin de coder cette formule en Matlab, on utilise les fonctions de Matlab `ceil()` et `nchoosek()`.

Voici le programme :

```

1  function Rep=Binomial(N,u,d,r,S0,Strike,T)
2  %Fonction utilise le modèle binomial pour
3  %le calcul d'une option d'achat.
4  %N: Nombre de période
5  %u: Facteur multiplicatif de la hausse
6  %d: Facteur multiplicatif de la baisse
7  %r: taux d'intérêt sans risque
8  %S0: valeur initiale du sous-jacent
9  %Strike: prix de l'exercice de l'option
10 %T: Maturité
11 %Calcul du taux d'intérêt par période
12 InterestRate=exp(r*(T/N));
13 %Probabilité risque neutre
14 q=(InterestRate-d)/(u-d);
15 a=ceil(log(Strike/(S0*(d)^N))/(log(u/d)));
16 %Calcul de la valeur de la prime
17 ExpectedPayoffs=0;
18 for j=a:N
19 inc=nchoosek(N,j)*q^(j)*(1-q)^(N-j)*((u)^(j)*(d)^(N-j)*S0-Strike);
20 ExpectedPayoffs=ExpectedPayoffs+inc;
21 end
22 Rep=ExpectedPayoffs/(InterestRate)^N;
23 end

```

La valeur de la prime d'un Call est de valeur **10,5588\$**.

4.9 Simulation du modèle de Black-Scholes

4.9.1 Simulation de la fonction d'un call

Nous avons montré dans le chapitre précédent, que la solution de l'équation d'un call de prix S , de strike K et de maturité T est :

$$C(t, S_t) = S_t N(d1) - K e^{-r(T-t)} N(d2)$$

avec : $d1$ et $d2$ donnés précédemment.

$N(\cdot)$ est la distribution cumulative de la loi normale.

A des fins pédagogiques, voici le programme d'évaluation d'un call :

```

1  function rep=CallBS(S0,K,T)
2  %la fonction calcule le valeur d'une option d'achat par
3  %la formule de Black&scholes
4  %S0: valeur initiale su sous-jacent
5  %K: pix de l'exercice
6  %T: temps avant l'échéance, en années
7
8  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9  sigma=0.2; %sigma:la volatilité
10 r=0.05; %r: taux d'intéret sans risque annuel
11
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13 d1=(log(S0/K)+(r)*T)/(sigma*sqrt(T))+sigma*sqrt(T)/2;
14 d2=d1-sigma*sqrt(T);
15 rep=S0*normcdf(d1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2);
16 end

```

Application numérique :

En prenant $S_0 = 100$, $K = 120$, $T = 1$. On obtient :

$$C = 6.9040$$

4.9.2 Simulation de la fonction d'un put

La formule utilisée pour le calcul d'un put européen est :

$$P(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1)$$

Le programme Matlab permettant ce calcul est :

```

1  function rep=PutBS(S0,K,T)
2  %la fonction calcule le valeur d'une option de vente par
3  %la formule de Black& Scholes
4  %S0: valeur initiale su sous-jacent
5  %K: pix de l'exercice
6  %T: temps avant l'échéance, en années
7
8  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9  sigma=0.2; %sigma:la volatilité
10 r=0.05; %r: taux d'intérêt sans risque annuel
11
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13 d1=(log(S0/K)+(r)*T)/(sigma*sqrt(T))+sigma*sqrt(T)/2;
14 d2=d1-sigma*sqrt(T);
15 rep=K*exp(-r*T)*normcdf(-d2)-S0*normcdf(-d1);
16 end

```

Application numérique :

en posant $S_0 = 90$, $K = 100$, $T = 1$. On obtient le résultat suivant :

$$P = 10.2142$$

Chapitre 5

Étude et Application modèle de Black - Scholes:

5.1 Historique

Le premier modèle d'évolution des actifs financiers a été proposé par Bachelier (1900). Les actifs risqués étaient supposés Gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives . Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle est connu sous le nom de Black-Scholes.

Dans ce chapitre nous allons nous concentrer sur une application des schémas de discrétisation vu dans le chapitre précédent

5.2 Description du modèle de Black-Scholes

Considérons le modèle classique de Black-Scholes

$$\beta_t = e^{rt}$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

avec S_t, B_t deux actifs, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ et $W = (W_t)$ un mouvement Brownien sur un espace (Ω, \mathcal{A}, P) . Afin de respecter la tradition financière nous appellons b l'actif non risqué (B pour Banque) , à ne pas confondre avec un mouvement Brownien, et S l'actif risqué qui seront définis sur une période $[0, T]$ Intuitivement le rendement ou taux de variation de l'actif dS_t/S_t n'est rien d'autre que la quantité μdt à laquelle on ajoute une perturbation aléatoire σdW_t . L'amplitude de cette perturbation est mesurée par σ , paramètre difficile à calculer et très important qu'on appelle la volatilité de l'actif S_t . Le coefficient μ est appelé la dérive.

Définition 5.2.1 S_t est un processus continu adapté défini par l'équation stochastique:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad \text{avec } S_0 = s_0 > 0 \quad (5.2.1)$$

Maintenant nous tenterons de résoudre l'équation(5.2.1). Pour ce faire définissons le processus $Z_t = \ln(S_t)$, et appliquons la formule d'Itô au processus Z_t . Nous avons

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) dS_t \times dS_t \\ &= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \times (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ &= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) (\sigma^2 S_t^2 dt) \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

Après intégration nous déduisons que

$$Z_t - Z_0 = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t$$

Puisque $S_t = \exp(Z_t)$, nous obtenons:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}$$

Soit un pas de discrétisation Δ , le schéma d'Euler de l'équation (5.2.1) est donné par :

$$S_{n+1} = S_n + \mu S_n \Delta + \sigma S_n \Delta W_n$$

et celui de Milstein par :

$$S_{n+1} = S_n + \mu S_n \Delta + \sigma S_n \Delta W_n + \frac{1}{2} \sigma^2 \{(\Delta W_n)^2 - \Delta\}$$

où $\Delta W_n \sim N(0, \Delta)$

5.3 Applications

Pour illustrer une application des schémas présentés, nous essayons de voir la variation de la qualité des simulations suite à la variation du nombre de simulations, de l'intervalle de confiance, ou du pas de discrétisation au lieu nous travaillons avec un pas de discrétisation fixe et nous regardons l'effet de la variation de certains paramètres en utilisant les schémas présentés, d'où le choix de faire des tests avec différentes valeurs.

Pour chacun des schémas nous effectuons alors 10, 100, 1000, 10000, 100000 séries (Nb-Series) de NbTraj= 1000 simulations avec un pas de discrétisation fixe $\Delta = \frac{1}{50}$, $u = 0.05$, $\sigma = 0.2$ et $S_0 = 100$. En d'autres termes, pour un nombre de trajectoires fixé nous effectuons 10, ..., 100000 simulations pour obtenir plus de précision, ou vu sous un autre angle, le nombre de jours sur lesquels dure la simulation. Ensuite nous calculons l'erreur absolue d'approximation epsilon avec un intervalle de confiance de ex = 95% pour chaque schéma.

Pour ce faire, et pour optimiser les programmes, nous allons plutôt utiliser les fonctions logarithmes, donc nous simulons plutôt la variable logarithme de S_{n+1} . L'approximation du schéma d'Euler devient;

$$\ln(S_{n+1}) = \log\{S_n(1 + u\Delta + \sigma\Delta W_n)\}$$

$$= \ln(S_n) + \log(1 + u\Delta + \sigma\Delta W_n)$$

$$= (S_0) + \sum_{i=0}^n (1 + u\Delta + \sigma\Delta W_i)$$

et pour le schéma de Milstein, il suffit de rajouter le terme $\frac{1}{2}\sigma^2\{(\Delta W_i)^2 - \Delta\}$

Enfin, en appliquant la même méthode aux solutions exactes, nous avons,

$$\begin{aligned}\ln\{S_t\} &= \ln \\ & [S_0 \exp\{(u - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}] \\ &= \ln(S_0) + (u - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\end{aligned}$$

Maintenant, pour obtenir les solutions exactes au point $t = (n + 1)\Delta$, nous avons,

$$\begin{aligned}\ln(S_{n+1}) &= \ln(S_0) + (u - \frac{1}{2}\sigma^2)(n + 1)\Delta + \sigma W_{(n+1)\Delta} \\ &= \ln(S_0) + \sum_{i=0}^n [(u - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta + \sigma(W_{(i+1)\Delta} - W_{i\Delta})].\end{aligned}$$

Dans un premier temps nous testons la sensibilité de l'équation par rapport au nombre de séries simulées dans le schéma d'Euler et Milstein. Avant de présenter les résultats (voir tableau ci-dessous), nous traçons le graphe de la solution exact.

La figure 5.1 représente une illustration des solutions exactes et approchées et permettent de voir la fluctuation de la variable étudiée,

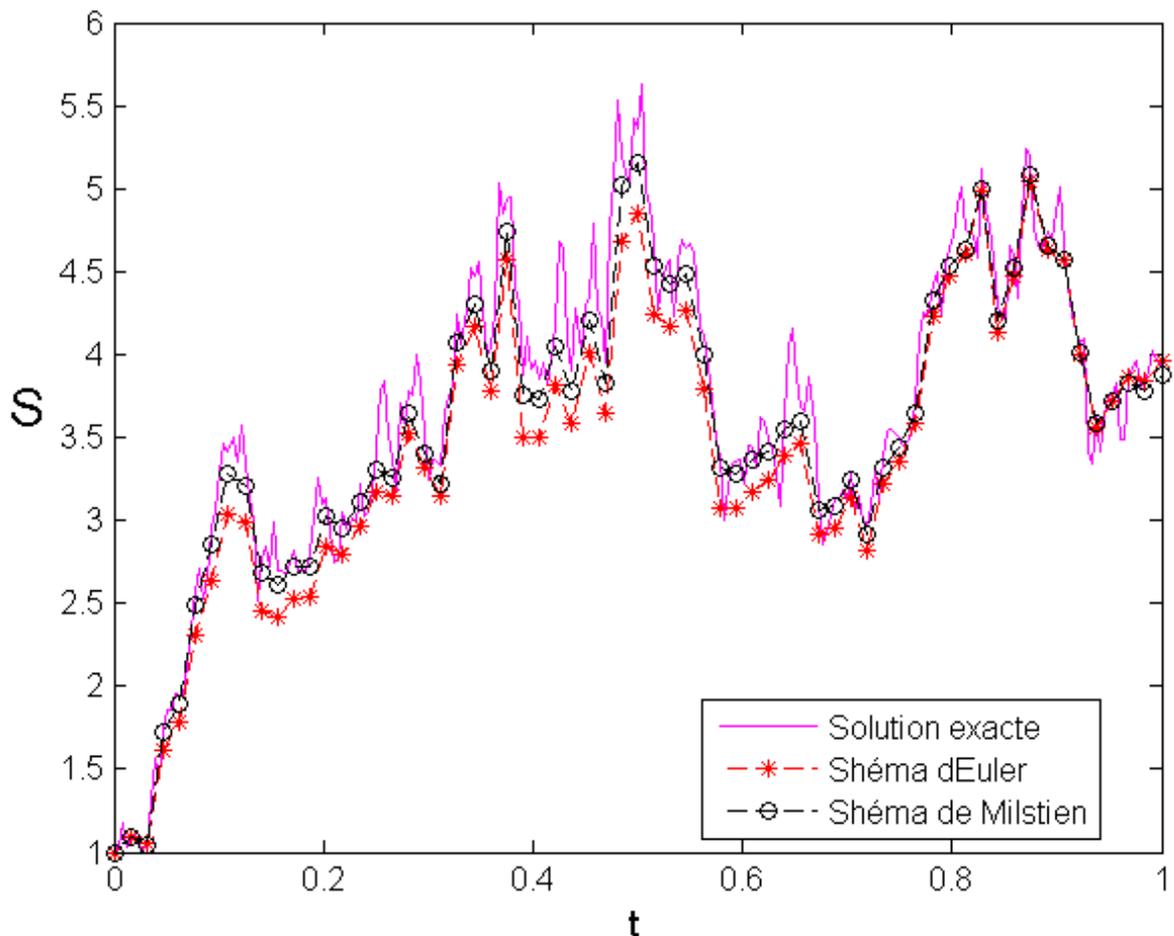


Figure 5.1 : simulation avec méthode d'Euler et milstien

mais par contre elles ne nous donnent pas de renseignements suffisants sur la précision des schémas. Nous remarquons que la solution approchée suit bien celle qui est exacte, mais pour être plus rigoureux nous devons regarder la moyenne des erreurs; c'est que nous faisons par la suite. Les études de sensibilité présentées ci-dessous permet tent de voir la variation de la qualité des simulations suite à la variation du nombres de simulations, de l'intervalle de confiance ou du pas de discrétisation.

Au vu des résultats présentés dans le tableau 5.3 nous pouvons remarquer que l'augmentation du nombre de simulations donne un résultat plus précis puisque l'intervalle de confiance

rétrécit. De plus, la méthode de Milstein confirme la théorie en donnant des résultats plus précis puisque l'erreur est plus petite dans ce dernier cas.

Si nous reprenons l'exemple précédent, au lieu de tester la sensibilité par rapport aux nombres de séries, nous testons celle-ci par rapport à l'intervalle de confiance et au pas de discrétisation.

Les résultats présentés à la figur 5.4e montrent que, selon le niveau de confiance désiré, nous obtenons des intervalles de confiance légèrement différents.

Maintenant pour tester la sensibilité par rapport au pas de discrétisation, nous utilisons les paramètres suivants: NbSeries= 1000, NbTraj= 1000, $\alpha = 95\%$ et calculons l'erreur d'approximation en fonction de $\Delta = 1/365, 1/52$ et $1/12$.

Nb Series	epsilon	Intervalle	Nb Series	epsilon	Intervalle
10	0.5265	[0.5225, 0.5305]	10	0.0229	[0.0224, 0.0234]
100	0.5202	[0.5225, 0.5305]	100	0.0233	[0.0231, 0.33]
1000	0.5221	[0.5213, 0.5228]	1000	0.0233	[0.0232, 0.0233]
10000	0.5224	[0.5221, 0.5226]	10000	0.0233	[0.0233, 0.0233]
100000	0.5224	[0.5224, 0.5225]	100000	0.0233	[0.0233, 0.0233]

Figure 5.2: Sensibilité par rapport au nombre de séries

alpha	epsilon	Intervalle	alpha	epsilon	Intervalle
0,9	0.5153	[0.5116, 0.5190]	0,9	0.0231	[0.0228, 0.0233]
0,95	0.5264	[0.5196, 0.5331]	0,95	0.0232	[0.0228, 0.0237]
0,99	0.5197	[0.5096, 0.5297]	0,99	0.0234	[0.0229, 0.0239]

Figure 5.3: Sensibilité par rapport au nombre des éries

5.4 Etude de la serie caterpillar

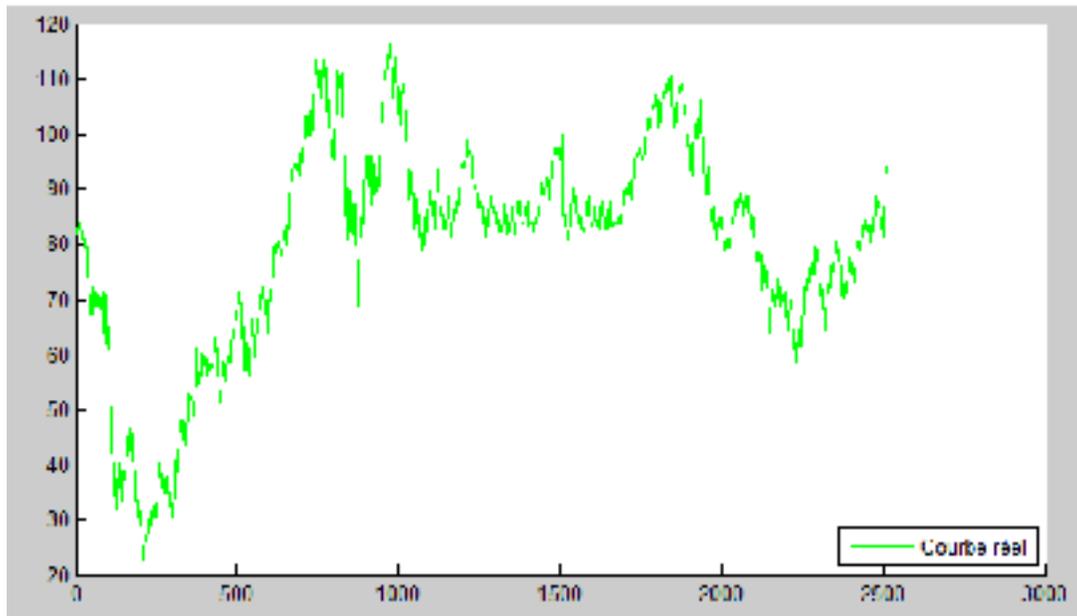


Figure 5.5 : La courbe réel de la série de caterpillar

5.4.1 Simulation des trajectoires de la série caterpillar par le modèle de Black-Scholes

Après discrétisation du temps : $\hat{r}_{t+h} = \hat{r}_t + \mu \hat{r}_t h + \sigma \hat{r}_t \sqrt{h} Z$ avec $Z \sim (0, 1)$

5.4.2 Algorithme modèle de Black-Scholes

- Simuler n réalisations (Z_1, \dots, Z_n) de la variable aléatoire avec $Z \sim (0, 1)$
 - Initialiser r_0
 - pour $j = 1, \dots, n$, calculer: $r_j = r_{j-1} + \mu r_{j-1} \Delta t + \sigma r_{j-1} \sqrt{\Delta t} Z_j$
- **Code Matlab**

La fonction Matlab « Black-Scholes » permet d'estimer les paramètres du modèle Black & Scholes à partir des données réels

```

1
2  function [R,segma]=black_est(y)
3  -   n=length(y)-1;
4  -   for i=1:n
5  -       r(i)=log(y(i+1)/y(i));
6  -   end
7  -   R=mean(r);s=std(r);
8  -   segma=S;mu=R+0.5*s^2;

```

Le programme Matlab suivant permet de simuler les trajectoires à partir des paramètres estimés :

```

1 -   clc,clear all
2 -   nasdeq;n=1000;N=length(y);h=1;Xt=zeros(n,N);
3 -   Xt(:,1)=y(1)*ones(n,1);
4 -   (mu,segma)=black_est(y)
5 -   for j=1:n
6 -       for j=1:N
7 -           w(i,j)=sqrt(h)*randn;
8 -           Xt(i,j+1)=Xt(i,j)+mu*Xt(i,j)*h+segma*Xt(i,j)*w(i,j);
9 -       end
10 -   end
11 -   hold on
12 -   plot(Xt,'r')
13 -   plot(y)
14 -   toc

```

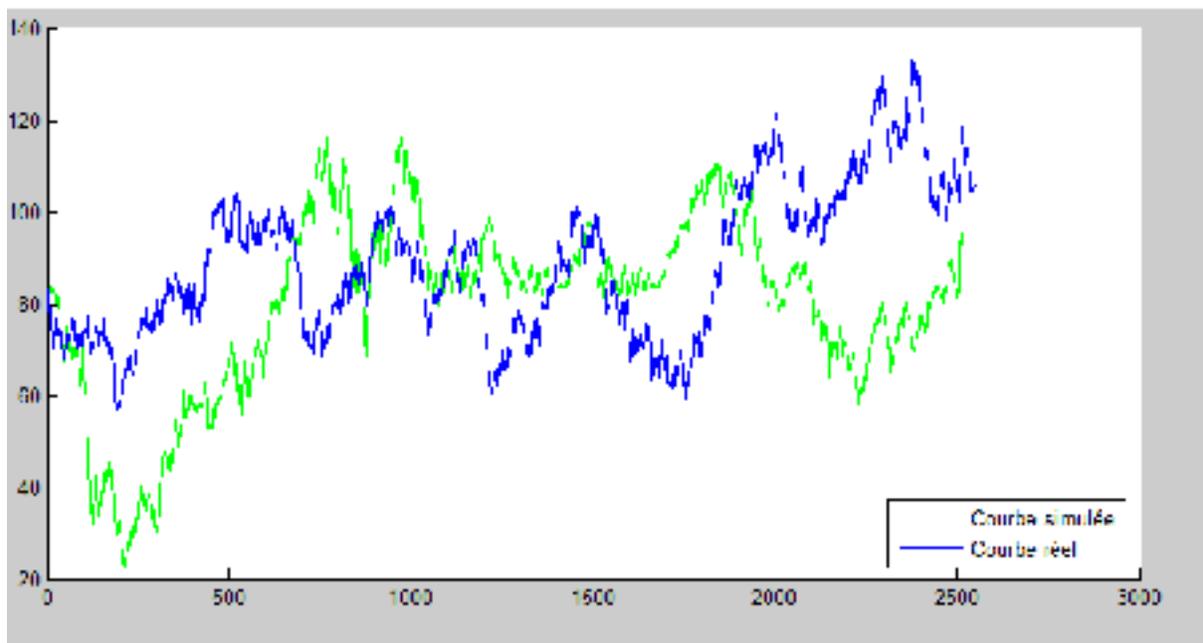
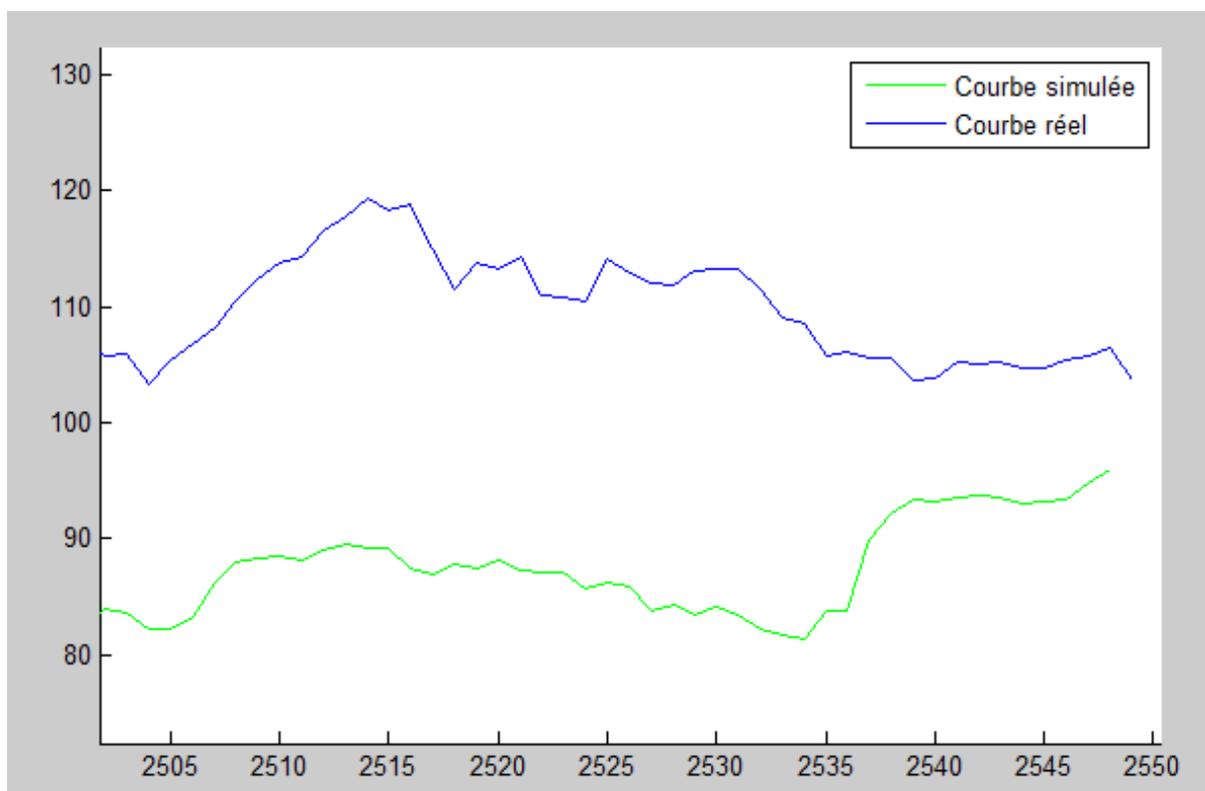


Figure 5.6: Simulation d'une trajectoire de Black-Scholes (caterpillar)

5.4.3 Les Prévisions:

Le tableau suivant représente les prévisions obtenues par le modèle de Black-Scholes et l'intervalle de confiance

Date	Réel	Min	Simulé	Max
Nov 25, 2016	83.29	33.3255	105.4265	117.1054
Nov 23, 2016	81.92	33.9863	106.7716	116.1443
Nov 22, 2016	82.35	34.1266	108.1322	117.3111
Nov 21, 2016	82.76	36.5233	110.4452	118.4510
Nov 18, 2016	82.60	31.2846	113.4391	116.5120
Nov 17, 2016	82.53	32.1135	114.2428	117.5478
Nov 16, 2016	81.68	31.8574	111.0519	119.2458
Nov 15, 2016	82.50	31.0216	110.8130	121.5423
Nov 14, 2016	83.14	33.1589	114.0881	122.9852
Nov 11, 2016	83.89	34.1689	112.8160	119.1002
Nov 10, 2016	81.03	33.1589	112.0715	116.4550
Nov 9, 2016	77.85	33.1694	111.8347	118.1455
Nov 8, 2016	77.91	35.0306	112.9811	119.2100
Nov 7, 2016	76.75	34.1569	113.2913	120.4522
Nov 4, 2016	76.09	33.1569	113.2145	121.3666
Nov 3, 2016	74.79	32.1846	111.5170	120.6554
Nov 2, 2016	75.12	31.1916	109.0586	118.1120
Nov 1, 2016	76.02	33.1900	108.4752	119.1390
Oct 31, 2016	77.74	33.1866	105.8112	120.1485
Oct 28, 2016	76.85	36.1339	106.1373	118.0007
Oct 27, 2016	78.25	33.4478	105.6355	117.3699
Oct 26, 2016	76.86	30.1502	103.6864	117.0650
Oct 25 2016	78.19	31.0103	103.7602	118.1566
Oct 24, 2016	79.85	33.1655	105.1839	119.4755
Oct 21, 2016	78.89	33.0658	105.0781	121.3011



On remarque que toutes les valeurs réelles sont dans l'intervalle de confiance

5.5 Calcule du call européen par la méthode MC:

Nous voulons valoriser un call asiatique européen dont les spécifications se retrouvent au tableau suivant .On fournit un programme écrit en Matlab de nature à évaluer le prix d'une option asiatique (call).

S_0	80
X	85
T	1an
r	0,05
σ	0,2

Ces fonctions apparaissent au programme Matlab, La fonction "AsiaMC" calcule le prix d'une option asiatique. Elle fait appel à la fonction "traj"(trajectoire) qui génère les scénarios du prix du sous-jacent. La fonction "asiaMC" est la suivante

```

1  function [Call]=asiaMC(S0,X,T,sigma,r,np,nt)
2  %S0 la valeur actuelle de l'action sous-jacente
3  % T le temps qui reste à l'option avant son échéance
4  % X le prix d'exercice fixé par l'option
5  % r le taux d'intérêt sans risque
6  % sigma est la volatilité du prix de l'action
7  % np le nombre de pas
8  % nt le nombre de trajectoire
9  - S=traj(S0,T,sigma,r,np,nt);
10 - p=max(0,mean(S)-X);
11 - Call = mean(exp(-r*T)*p);
12 - end

```

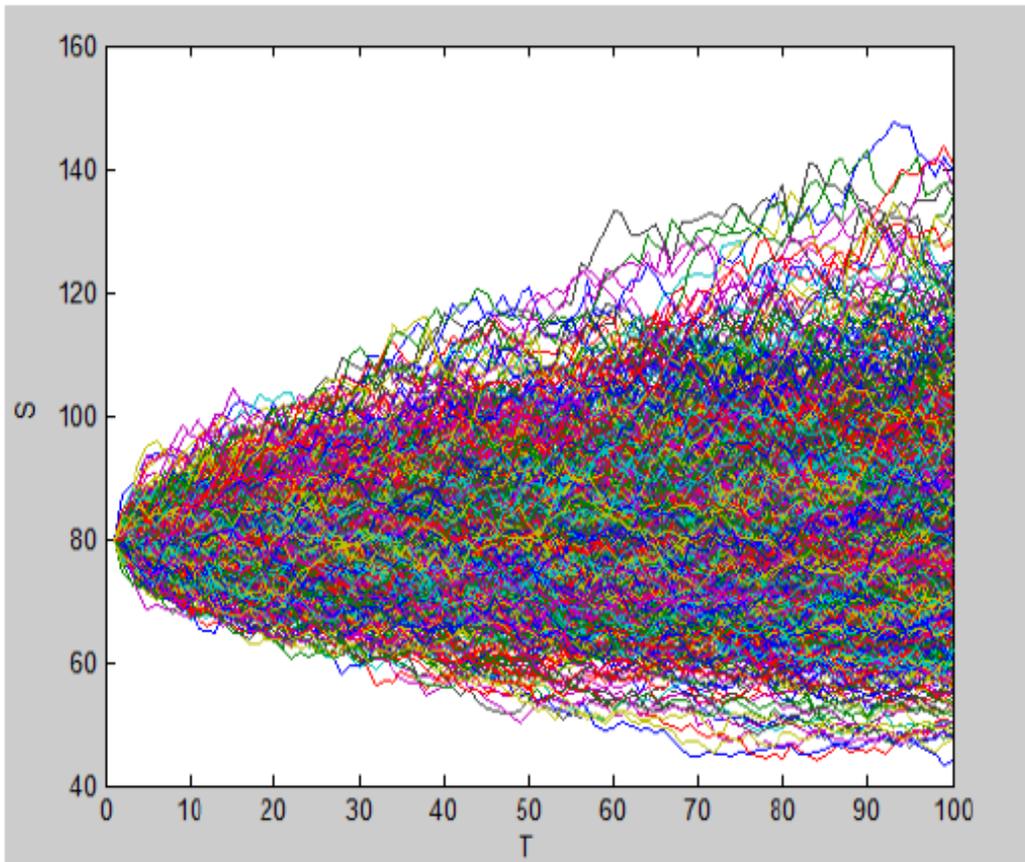
La fonction Matlab "traj" permet de simuler les valeurs du S_i durant la période donnée

```

1  function S=traj(S0,T,sigma,r,np,nt)
2  - dt=T/np;
3  - S=zeros(np,nt);
4  - S(1,:)=S0;
5  - dW=sqrt(dt)*randn(np,nt);
6  - for i=2:np
7  -   for j=1:nt
8  -     S(i,j)=S(i-1,j)*exp((r-0.5*sigma^2)*dt+sigma*dW(i-1,j));
9  -   end
10 - end
11

```

Le graphe suivant illustre N trajectoire de S



On revient dans notre exemple et on appliquant les données du tableau précédent, Nous fixons dans un premier temps le nombre de pas à 100 et le nombre d'itérations également à 100. Nous obtenons un prix de 1,61\$ pour le call européen asiatique

```
>> for i=1:100
C(i)=asiaMC(80,85,1,0.2,0.05,100,100);
end
mean(C)

ans =

    2.4072

>> std (C)

ans =

    0.2224
```

La moyenne des simulations est de 2,40\$, ce qui est très rapproché du prix effectif du call asiatique, c'est-à-dire 2,48 \$. La simulation que nous avons effectuée antérieurement qui lui assignait un écart-type 0,22 , l'intervalle pour un niveau de confiance de 95% du prix de l'option est de :

$$2,40 \pm (1,96)(0,22) = 2,40 \pm 0,43$$

L'intervalle de confiance du prix de l'option est déraisonnablement élevé puisqu'il s'étire de 1,97\$ à 2,83\$. Le résultat obtenu d'une simulation n'est donc pas fiable pour un nombre d'itérations de 100. On recalcule la valeur du call asiatique précédent en nous servant des commandes Matlab avec 1000 itérations

```
>> asiaMC(80,85,1,0.2,0.05,100,1000)

ans =

    2.5328

>> for i=1:1000
C(i)=asiaMC(80,85,1,0.2,0.05,100,1000);
end
>> mean (C)

ans =

    2.4140

>> std(C)

ans =

    0.1529
```

On remarque que l'écart-type des simulations s'est beaucoup réduit en augmentant le nombre de simulations de 100 à 1000 puisqu'il est passé de 0,22 à 0,15. Cette réduction était anticipée car lorsque le nombre d'itérations est de 100, la racine carrée de la somme des erreurs au carré est divisée par $\sqrt{100}$ lors du calcul de l'écart-type, tandis que lorsque le nombre d'itérations est de 1000, le diviseur est de $\sqrt{1000}$. Mais, encore là, l'intervalle de confiance du prix de l'option se révèle trop important. Pour le réduire davantage, on peut encore une fois augmenter le nombre d'itérations mais ces opérations finissent par consommer beaucoup de temps. La valeur calculée pour le prix du call asiatique est donc de 2,53\$. Nous savons que sa vraie valeur est de 2,48\$. Nous pouvons nous conforter en échantillant 10 million d'itérations. Le résultat correspond à nos attentes

5.5. Calcule du call européen par la méthode MC:

```
>> tic, P=Asia(80,85,0.05,1,0.2,100,10000000), toc,  
P =  
    2.4812  
Elapsed time is 176.053321 seconds.
```

Avec 10 million d'itérations on tombe dans une valeur très proche du prix du call asiatique donner

Conclusion générale

L'étude détaillée d'une équation différentielle stochastique nécessite certaines notions de base concernant les processus stochastiques . Dans ce mémoire,nous avons mis en place tous les outils qui permettent d'aborder, tant au plan théorique que pratique, le cas d'une équation différentielle stochastique lorsqu'une solution forte explicite est connue. De plus, pour les situations où la solution forte n'est pas connue, ou encore inexistante,nous avons présenté le Théorème de Girsanov qui permet de définir une nouvelle mesure de probabilité pour laquelle ce processus solution serait une martingale.

nous avons eu recours à la simulation en appliquant les modèles énoncés précédemment, en utilisant deux méthodes de discrétisation (méthode d'Euler et méthode de Milstein) sous Matlab.et les différents résultat montrent que le pas de discretisation peut avoir une grande influence sur la précision des résultats,nous remarquons que plus le pas discrétisation diminue,plus l'erreur est petite et donc l'intervalle de confiance rétrécit.

On termine ce travail avec une Simulation de cours boursiers d'une société caterpillar avec le modèle de Black - scholes on conclu que les valeurs réelles dans l'intervalle de confiance.

Bibliographie

- [1] B. Guillet, Méthodes numérique Résolution de l'équation de Black-Scholes en utilisant le schéma d'Eluer implicite, 2012.
- [2] D.Lambreton.B.Lapeyre. Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance.Ellipses Marketing, 2012.
- [3] Desmond J. Higham, Black–Scholes Option Valuation for Scienti...c Computing Students, January, 2004.
- [4] F.E.Racicot.R.Théoret. Finance computationnelle et gestion des risques ingénierie financières avec applications Excel (visual Basic) et Matlab. Presse de l'Université du Québec,2006.
- [5] F. Black, M. Scholes : The pricing of options and corporate liabilities,Journal of Political Economy, 1973..
- [6] J.F.Le Gall, Mouvement Brownien, martingales et calcul stochastique, Springer, 2013.
- [7] J.Berton, Calcul stochastique, M2 mathématiques, Université de Rennes 1, 2014.
- [8] J.C.Hull. Options, Futures, and ather Derivatives. Pearson, 2014.
- [9] J.C.Hull. Options, Futures, and ather Derivatives. Pearson, 2014.
- [10] S.Bossu.P.Henrotte. Finance des marchés, Techniques quantitatives et applications pratiques.Dunond, 2008.
- [11] R.Partait.P.Poncet. Finance de marché Instruments de base, produits dérivés, portefeuilleset risque. Dalloz, 2014.

- [12] M.Haneche, Processus stochastique et equations aux dérivées partielles, mémoire de magister, Université de Boumerdes, 2009.
- [13] Nils Berglund, Martingales et calcul stochastique, Université d'Orléans, 2014.
- [14] S.Lessard. Processus stochastiques cours et exercices corrigés. Ellipses marketing, 2014.