

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE M'HAMED BOUGERRA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique

Par

MEBARKI Hanane

THÈME

Etude qualitative d'une classe de systèmes différentiels planaires de Kolmogorov

Soutenu, le 07/ 06 /2017 devant le jury composé de:

Mme. TRAD	Fatma Zohra	Président
Mr. GRAZEM	Mohamed	Encadreur
Mme. METREF	Nadia	Co-encadreur
Mme. TAHAR	Souhila	Examineur

Année universitaire 2016/2017

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Dieu, notre créateur de m'avoir donné la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

J'adresse un grand remerciement à mon encadreur, Monsieur Grazem Mohamed, qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses orientations.

Je remercie Madame Metref Nadia pour son suivi et l'intérêt porté à ce travail et pour les précieux conseils et remarques.

Je tiens à remercier Madame Trad Fatma Zohra, pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury de ma soutenance, je l'en remercie énormément.

Je remercie Madame Tahar Souhila, d'avoir accepté de faire partie du jury, d'examiner et juger mon travail.

Enfin, un grand merci à ma famille qui m'a toujours encouragé et soutenu sous toutes formes et a toujours cru en ma volonté de réussir. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation.

Merci à tous...

Table des matières

Introduction générale	1
1 Rappels et notions de base	4
1.1 Systèmes différentiels polynomiaux	4
1.2 Champ de vecteurs	4
1.3 Flot	5
1.4 Solutions d'un système différentiel	6
1.4.1 Portrait de phases	6
1.4.2 Existence et unicité des solutions	6
1.5 Points singuliers	7
1.5.1 Linéarisation et matrice jacobienne	7
1.5.2 Equivalence topologique	8
1.5.3 Le théorème de Hartman-Grobman	9
1.5.4 Stabilité de l'équilibre	9
1.5.5 Classification des points singuliers d'un système linéaire dans le plan (tr, \det)	9
1.6 Courbes invariantes	12
1.7 Problème d'intégrabilité	14
1.7.1 Intégrales premières	14
1.7.2 Facteurs intégrants	15
1.7.3 Facteurs intégrants inverses	16
1.7.4 Facteurs exponentiels	16

1.8	Solutions périodiques	18
1.8.1	Cycles limites	19
2	Existence de cycles limites	20
2.1	Critères de non existence	20
2.2	Critères d'existence de cycles limites	23
2.2.1	Stabilité des cycles limites	25
3	Systèmes différentiels de Kolmogorov	32
3.1	Sur la non-existence de cycle limite pour une classe de systèmes cubiques . .	34
3.2	L'existence cycle limite algébrique pour une classe de systèmes quartiques . .	36
3.3	L'existence de deux cycles limites algébriques pour une classe de systèmes d'ordre six	42
	Conclusion générale	47
	Bibliographie	47

Introduction générale

Les équations différentielles sont apparues, pour la première fois, vers la fin du dix-septième siècle dans les travaux d'Isaac Newton, Leibniz, et Bernoulli. Elles se sont produites comme conséquence normale des efforts de ces grands savants d'appliquer les nouvelles idées du calcul à certains problèmes en mécanique. Plus tard la théorie d'intégration des équations différentielles a été développée par des analystes et des mécaniciens comme Lagrange, Poisson, Hamilton, Liouville aux dix-huitième siècle et dix-neuvième siècles. Pendant plus de 300 ans, les équations différentielles ont été l'outil essentiel de description et d'analyse de nombreux problèmes de plusieurs disciplines scientifiques.

L'importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques afin de développer des méthodes d'étude des propriétés de leurs solutions. Grace à son mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle publié en 1886, Henri Poincaré a ouvert la voie pour une approche des équations différentielles où la priorité n'est plus donnée à la résolution, mais à une étude plus géométrique des solutions en particulier de leurs propriétés. Cette recherche a pour but de trouver les propriétés des solutions sans vraiment trouver les solutions d'une façon explicite, ce sont des méthodes qualitatives.

Un des problèmes principaux dans la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité et les cycles limites des systèmes différentiels planaires polynomiaux. L'intérêt des cycles limites des systèmes différentiels planaires est dû à leurs significations importantes dans les modèles mathématiques issus de la pratique dans plusieurs branches des sciences (Physique, Biologie, Economie, ...).

En 1900 D. Hilbert posait les fameux vingt-trois problèmes. En particulier le 16ème problème, il pose la question du nombre et de la disposition des trajectoires périodiques

isolées pour des systèmes différentiels polynomiaux

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (\text{I})$$

avec P et Q sont des polynômes.

Ce problème est non résolu à ce jour. Beaucoup de travaux récents sont consacrés à l'étude des cycles limites, voir par exemple les papiers ??.

La théorie qualitative des équations différentielles, plus connue aujourd'hui par la théorie des systèmes dynamiques, est la branche des mathématiques qui se développe le plus activement et qui possède les plus importantes applications scientifiques. L'étude qualitative, surtout pour les systèmes non-linéaires, reste donc un préalable nécessaire à l'étude complète de leurs solutions.

Dans notre travail, nous allons utiliser la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires pour traiter une classe des systèmes différentiels planaires polynomiaux de Kolmogorov de la forme

$$\begin{cases} x' = xf(x, y) \\ y' = yg(x, y) \end{cases}$$

avec f et g sont des polynômes.

Ce mémoire est structuré comme suit:

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires. On définit la notion de points singuliers, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage de ces points, le portrait de phases, les courbes invariantes, ainsi que les solutions périodiques.

Dans le deuxième chapitre, on énoncera des critères pour l'existence et la non existence des cycles limites du système (I). De plus, on rappellera un théorème qui caractérise la stabilité d'un cycle limite.

Dans le troisième et dernier chapitre, seront traitées trois classes de systèmes différentiels de type Kolmogorov de la forme

$$\begin{cases} x' = x(FU + \lambda yU_y) \\ y' = y(GU - \lambda xU_x) \end{cases}$$

où U , F et G sont trois polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Plus précisément dans la première section, sera étudiée une classe de système cubique avec une intégrale première rationnelle qui confirme la non existence de cycles limites algébriques. Dans la deuxième et la troisième sections, nous donnerons les conditions d'existence de cycles limites hyperboliques ainsi que leurs expressions explicites.

Une conclusion cloturera notre travail.

Chapitre 1

Rappels et notions de base

Dans ce chapitre, on donne quelques notions et résultats sur les systèmes différentiels polynomiaux planaires.

1.1 Systèmes différentiels polynomiaux

Définition 1.1.1 *On appelle système différentiel du plan un système de la forme*

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)) \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où P et Q sont des polynômes à coefficients réels, on dit aussi que (1.1.1) est un système différentiel polynomial.

Le système (1.1) est de degré d , où $d = \max(\deg P, \deg Q)$

Si P et Q ne dépendent pas de t explicitement, alors le système (1.1.1) est autonome.

Dans la suite, on supposera que les fonctions P et Q sont de classe C^1 .

1.2 Champ de vecteurs

Avant de passer à l'étude d'un système différentiel, il est pratique de dessiner le champ de vecteurs qui nous donne des renseignements précieux sur les différentes formes des solutions possibles ainsi que leur comportement asymptotique.

Définition 1.2.1 On appelle champ de vecteurs, une région du plan simplement connexe dans laquelle il existe en tout point M un vecteur $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}$. C'est -à-dire une application

$$M(x, y) \longmapsto \overrightarrow{\frac{dM}{dt}} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

où P, Q sont de classe C^1 sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Remarque 1.2.1 Le champ de vecteur associé au système (1.1.1) est noté $\chi = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$. On peut l'écrire aussi sous la forme suivante:

$$\chi = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$$

1.3 Flot

Soit $M(x, y)$ un point de \mathbb{R}^2 , on note $\varphi_t(x, y)$ la position de $M(x, y)$ après un déplacement d'une durée t ($t \in \mathbb{R}$).

Définition 1.3.1 On appelle flot (associé au champ de vecteur (P, Q)) l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) &\longmapsto \varphi_t((x, y)) \end{aligned}$$

vérifiant les trois propriétés suivantes:

- i) $\frac{d}{dt} \varphi_t((x, y)) = (P(\varphi_t(x, y)), Q(\varphi_t(x, y)))$
- ii) $\varphi_0((x, y)) = (x, y)$
- iii) $\varphi_{t+s}((x, y)) = \varphi_t(\varphi_s((x, y)))$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t, s \in \mathbb{R}$.

i) et ii) signifient que $\varphi_t((x, y))$ est la solution maximale qui passe par (x, y) à $t = 0$. iii) est une nouvelle formulation du caractère autonome de (1.1.1): au lieu de se déplacer pendant $t + s$ on peut le faire pendant t , prendre une pause, ensuite poursuivre, puis finir son bout de chemin pendant une durée s : entre-temps le champ de vecteurs n'a pas été modifié.

1.4 Solutions d'un système différentiel

Une solution du système (1.1.1) consiste en un couple de fonctions $(x(t), y(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$ qui satisfait ce système.

Si $(x_1(t), y_1(t))$ et $(x_2(t), y_2(t))$ sont deux solutions. On dit que $(x_2(t), y_2(t))$ est un prolongement de $(x_1(t), y_1(t))$ si $I_1 \subset I_2$ et $\forall t \in I_1, (x_1(t), y_1(t)) = (x_2(t), y_2(t))$

On dit que $(x(t), y(t))$ est une solution maximale si elle n'admet pas de prolongement. Autrement dit, pour toute autre solution $(u(t), v(t))$, on a si $I_1 \subset I_2$ et $\forall t \in I_1, (x(t), y(t)) = (u(t), v(t))$ alors $I_1 = I_2$.

Le plan (x, y) est appelé plan de phase.

Une trajectoire du point $(x(t), y(t))$ est l'ensemble des positions de ce point quand t parcourt tout l'intervalle des temps.

Les solutions $(x(t), y(t))$ représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées des orbites.

Définition 1.4.1 Une solution de (1.1.1) passant par (x^*, y^*) est définie par:

$$(x(t), y(t)) = \{\varphi_t(x^*, y^*), t \in \mathbb{R}\}.$$

1.4.1 Portrait de phases

Définition 1.4.2 Le plan \mathbb{R}^2 est appelé plan de phases et les solutions d'un champ de vecteurs χ représentent dans le plan de phases des orbites. Le portrait de phases d'un champ de vecteurs χ est l'ensemble des orbites dans le plan de phases.

1.4.2 Existence et unicité des solutions

Un résultat important de l'existence et de l'unicité d'une solution est donné par le théorème suivant:

Théorème 1.4.1 Considérons l'équation $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Alors,

i) Si F est une fonction continue dans un voisinage de (x_0, y_0) , il existe une solution $y(x)$ de (1.1.1) qui passe par ce point et qui est définie dans $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pour tout δ strictement positif.

ii) Si F est aussi lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors la solution est unique.

1.5 Points singuliers

Les points singuliers jouent un rôle important dans l'étude des systèmes différentiels en particulier ceux qui sont non-linéaires au voisinage de ces points. Henri Poincaré (1854-1912) montra qu'au lieu de calculer les solutions détaillées, il suffit de connaître les points singuliers ainsi que leur stabilité.

Définition 1.5.1 Un point (x^*, y^*) est dit point singulier du système (1.1.1) s'il vérifie

$$P(x^*, y^*) = Q(x^*, y^*) = 0.$$

Remarque 1.5.1 La notion de point d'équilibre est la même que celle de point singulier pour le champ de vecteurs. On parle plutôt de point singulier lorsque l'on regarde le champ de vecteurs pour lui-même et de point d'équilibre lorsque on s'intéresse aux trajectoires.

1.5.1 Linéarisation et matrice jacobienne

La plupart des systèmes existants dans la nature sont non linéaires. La démarche la plus naturelle pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire, au voisinage d'un point singulier, consiste à se ramener à l'étude du système linéaire associé.

Notons $J_\chi((x^*, y^*))$ la matrice jacobienne associée au champ de vecteurs χ au voisinage d'un point singulier (x_0, y_0) définie par:

$$J_\chi((x^*, y^*)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial P(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial Q(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Considérons le système non linéaire (1.1.1), son linéarisé est donné par:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial P(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial Q(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.5.1)$$

Définition 1.5.2 *Un point singulier du système (1.1.1) est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice $J((x^*, y^*))$ ont toutes une partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, le point singulier est dit non hyperbolique.*

1.5.2 Equivalence topologique

Comme le comportement asymptotique du système non linéaire au voisinage d'un équilibre hyperbolique peut être déduit du système linéarisé, la question qui se pose: comment peut-on établir une équivalence au voisinage de l'équilibre entre le système linéarisé et le système non linéaire? D'une manière générale, afin de comparer les flots pour des champs de vecteurs linéaires ou non linéaires, il est judicieux de définir pour toute classification, une relation d'équivalence pour laquelle il existe une application qui transforme pour tout t , les orbites de l'un en orbites de l'autre. Nous commençons, tout d'abord, par définir ce qu'est un homéomorphisme.

Définition 1.5.3 *Un homéomorphisme de \mathbb{R}^n est une application bijective continue $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dont la bijection réciproque est continue.*

Définition 1.5.4 *Deux systèmes autonomes dans le plan*

$$\begin{cases} x' = P_1(x(t), y(t)), \\ y' = Q_1(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.5.2)$$

et

$$\begin{cases} x' = P_2(x(t), y(t)), \\ y' = Q_2(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.5.3a)$$

définis sur deux ouverts U et V de \mathbb{R}^n respectivement sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme

$$h : U \longrightarrow V$$

tel que h transforme les orbites de (1.5.2) en des orbites de (1.5.3a) et préserve l'orientation des orbites.

1.5.3 Le théorème de Hartman-Grobman

Ce théorème nous permet de réduire l'étude d'un système différentiel au voisinage d'un point singulier hyperbolique, à l'étude d'un système linéaire topologiquement équivalent à (1.1.1) au voisinage de l'origine.

Théorème 1.5.1 *Supposons que la matrice jacobienne au point singulier (x^*, y^*) a deux valeurs propres telles que $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors les solutions du système (1.1.1) sont données approximativement par les solutions du système linéarisé (1.5.1) au voisinage du point singulier.*

Autrement dit le portrait de phase du système linéarisé constitue, au voisinage de ce point d'équilibre, une bonne approximation de celui de système (1.1.1).

Remarque 1.5.2 *Dans le cas où $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, le point singulier (x^*, y^*) est un centre pour le système linéarisé. La détermination de sa nature dans le cas du système (1.1.1) nécessite d'autres investigations: c'est le problème du centre.*

1.5.4 Stabilité de l'équilibre

Un système non linéaire quelconque peut avoir plusieurs positions d'équilibre qui peuvent être stables ou instables.

Soit (x^*, y^*) un point d'équilibre du système (1.1.1). Notons par $X^* = (P(x^*, y^*), Q(x^*, y^*))$ et $X(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$.

Définition 1.5.5 *On dit que:*

i) (x^*, y^*) est stable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|(x, y) - (x^*, y^*)\| < \eta \implies (\forall t > 0, \|X(t) - X_0\| < \varepsilon)$$

ii) (x^*, y^*) est asymptotiquement stable si et seulement si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - X^*\| = 0$.

1.5.5 Classification des points singuliers d'un système linéaire dans le plan (tr , \det)

Le flot de (1.1.1) au voisinage d'un point singulier (x^*, y^*) est classé selon les valeurs propres de la matrice $J_\chi((x^*, y^*))$ son déterminant, ainsi que sa trace. Les valeurs propres de J_χ sont des solutions de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - tr(J_\chi)\lambda + \det(J_\chi) = 0$$

avec

$$tr(J_\chi) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad \det(J_\chi) = \lambda_1\lambda_2$$

La nature des valeurs propres dépend du signe du discriminant $\Delta = (tr(J_\chi))^2 - 4\det(J_\chi)$.

Trois cas se présentent:

1^{er} Cas: $\Delta = 0$

On a alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, c'est -à-dire $\det(J_\chi) = \lambda^2 > 0$ et $tr(J_\chi) = 2\lambda$. Par conséquent, si la trace est positive ($\lambda > 0$), on a un noeud dégénéré instable, si la trace est négative ($\lambda < 0$), on a un dégénéré stable.

2^{ème} Cas: $\Delta > 0$

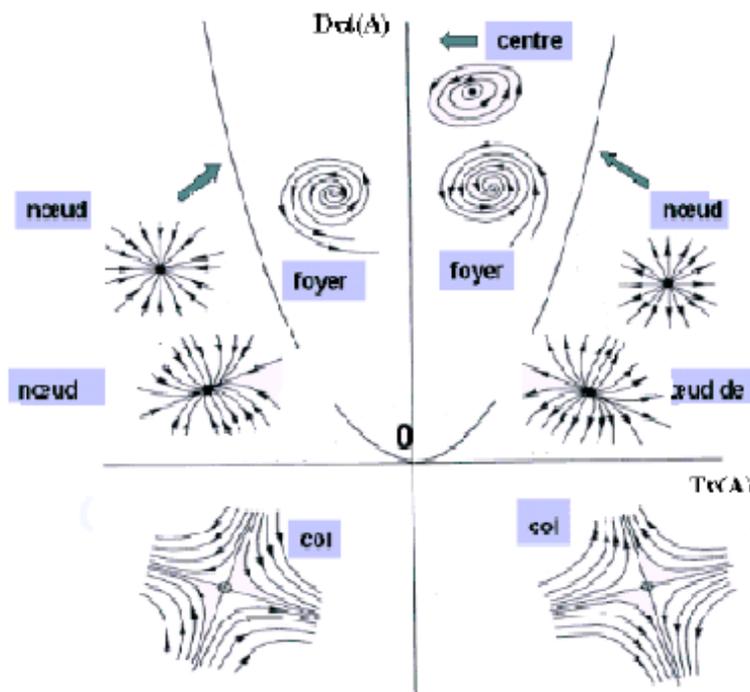
On a alors deux valeurs propres réelles distinctes. Donc

- i*) $\det(J_\chi) < 0$: λ_1 et λ_2 sont de signe opposé, l'origine est un col.
- ii*) $\det(J_\chi) > 0$ et $tr(J) > 0$: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, l'origine est un noeud instable.
- iii*) $\det(J_\chi) > 0$ et $tr(J) < 0$: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, l'origine est un noeud stable.

3^{ème} Cas: $\Delta < 0$

On a alors deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, c'est -à-dire $\det(J_\chi) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ et $tr(J_\chi) = 2\alpha$.

- i*) $tr(J_\chi) < 0$, l'origine est un foyer stable.
- ii*) $tr(J_\chi) > 0$, l'origine est un foyer instable.
- iii*) $tr(J_\chi) = 0$, l'origine est un centre.



Portrait de phase récapitulatif du système (1.5.1)

Exemple 1.5.1 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = \cos x \end{cases} \quad (1.5.4)$$

C'est un système non linéaire qui admet une infinité de points singuliers $(x_k, y_k) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$

On distingue deux cas:

Si k est pair, alors

$$J((x_k, y_k)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Au voisinage de (x_k, y_k) , le linéarisé du système (1.5.4) est donné par:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

On a $\det(J) = -1 < 0$, alors $(0, 0)$ est un col pour le système linéaire.

Si k est impair, alors

$$J((x_k, y_k)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Au voisinage de (x_k, y_k) , le linéarisé du système est donné par:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de J sont solutions de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0 \iff \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

Dans ce cas $\Delta = -3 < 0$, donc deux valeurs propres complexes conjuguées, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Comme

$$\det(J) = 1 = \alpha^2 + \beta^2 > 0$$

$$\operatorname{tr}(J) = 2\alpha = 1 > 0$$

l'origine est alors un foyer instable

1.6 Courbes invariantes

Pour les systèmes différentiels, les parties invariantes jouent le même rôle que les connexes en topologie élémentaire: on restreint un flot à une partie invariante comme une application continue à une composante connexe, l'étude sur chaque composante est disjointe des autres. Elles jouent un rôle important dans l'intégrabilité des systèmes différentiels planaires polynomiaux.

Définition 1.6.1 (*Ensembles invariants*) Une partie $T \subseteq \mathbb{R}^2$ est dite invariante si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_t(T) \subseteq T$.

Les point singuliers et les solutions d'une équation différentielle sont invariants pour le flot mais la réciproque n'est pas vraie. Une courbe invariante ne peut être une solution d'une équation différentielle mais elle est constituée de solutions.

Définition 1.6.2 Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dans l'ouvert U . L'ensemble

$$C_f = \{(x, y) \in U / f(x, y) = 0\}$$

est dit courbe invariante, s'il existe une fonction $k(x, y)$ de classe C^1 dans U , appelée cofacteur, qui satisfait la relation suivante:

$$P(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k(x, y) f(x, y) \quad (1.6.1)$$

pour tout $(x, y) \in U$.

Remarque 1.6.1 L'identité (1.6.1) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\nabla f \cdot F = kf \quad (1.6.2)$$

où $F((x, y)) = (P(x, y), Q(x, y))$, ∇f est le vecteur gradient de $f(x, y)$, c-à-d, $\nabla f((x, y)) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$ et "." désigne le produit scalaire. Nous désignons par $\frac{\partial f}{\partial t}$ ou f' la fonction $\nabla f \cdot F$ sur l'ensemble des solutions du système (1.1).

Dans toute la suite, le cofacteur joue un rôle important c'est pourquoi nous supposons toujours son existence.

Remarque 1.6.2 lorsque le cofacteur $k(x, y)$ est un polynôme, C_f est une courbe invariante de cofacteur polynomial, on ne s'intéressera qu'aux courbes invariantes de cofacteur polynomial de degré inférieur ou égal à $d - 1$, c-à-d, $\deg k(x, y) \leq d - 1$.

Définition 1.6.3 Une courbe invariante C_f est dite algébrique si $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ et elle est invariante pour le flot du système (1.1.1) dont le cofacteur $k(x, y)$ est toujours un polynôme de degré $\deg k(x, y) \leq d - 1$.

Proposition 1.6.1 Soient $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$ deux courbes algébriques invariantes du système (1.1.1) de cofacteurs respectifs $k_f(x, y)$ et $k_g(x, y)$, alors le produit $(fg)(x, y) = 0$ est aussi une courbe algébrique invariante dont le cofacteur est $k_f(x, y) + k_g(x, y)$.

Preuve. On a:

$$\begin{aligned} P\frac{\partial fg}{\partial x} + Q\frac{\partial fg}{\partial y} &= P\left(\frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial g}{\partial x}f\right) + Q\left(\frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial g}{\partial y}f\right) \\ &= g\left(P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y}\right) + f\left(P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

ce qui implique

$$P\frac{\partial fg}{\partial x} + Q\frac{\partial fg}{\partial y} = gk_f f + fk_g g$$

car $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$ sont deux courbes algébriques invariantes du système (1.1.1).

Par conséquent,

$$P\frac{\partial fg}{\partial x} + Q\frac{\partial fg}{\partial y} = fg(k_f + k_g)$$

D'où, le produit $(fg)(x, y) = 0$ est une courbe algébrique invariante du cofacteur $k_f(x, y) + k_g(x, y)$. ■

Remarque 1.6.3 Une courbe algébrique $f(x, y) = 0$ est irréductible, si $f(x, y)$ est un polynôme irréductible dans l'anneau $\mathbb{R}[x, y]$.

1.7 Problème d'intégrabilité

1.7.1 Intégrales premières

La notion d'intégrabilité pour un système différentiel est basée sur l'existence d'intégrales premières, donc la question qui se pose: Si on a un système différentiel, comment connaître s'il a une intégrale première? ou si on a une classe des systèmes différentiels dépendent de paramètres, comment déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles le système a une intégrale première? Malheureusement ces questions n'ont pas de bonnes réponses.

L'étude du problème d'intégrabilité consiste à déduire l'appartenance du facteur intégrant ou de facteur intégrant inverse à une classe de fonctions donnée, la recherche de ces derniers est liée à la recherche d'une intégrale première.

Définition 1.7.1 Une fonction $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^j et qui est constante sur chaque trajectoire de (1.1.1) et non localement constante s'appelle intégrale première du système (1.1.1) de classe j sur $U \subset \mathbb{R}^2$.

L'équation $H(x, y) = c$ pour un $c \in \mathbb{R}$ fixé, donne un ensemble de trajectoires du système d'une manière implicite.

Quand $j = 1$, ces conditions sont équivalentes à

$$P(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0$$

et H non localement (sur chaque composante connexe) constante.

La recherche d'une expression explicite d'une intégrale première et la détermination de sa classe fonctionnelle s'appelle problème d'intégrabilité.

1.7.2 Facteurs intégrants

Définition 1.7.2 La fonction $R(x, y)$ est un facteur intégrant du système (1.1.1) sur le sous ensemble ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ si $R \in C^1(U)$, $R \neq 0$ sur U et

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y} \quad , \quad \operatorname{div}(RP, RQ) = 0 \quad \text{ou} \quad P \frac{\partial R}{\partial x} + Q \frac{\partial R}{\partial y} = -R \operatorname{div}(P, Q) \quad (1.7.1)$$

où $\operatorname{div}(P, Q) = \operatorname{div}(\chi) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ est la divergence du champ de vecteurs $\chi = (P, Q)$.

C'est clair que la fonction H telle que:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = RQ \\ \frac{\partial H}{\partial y} = -RP \end{cases}$$

est une intégrale première, c'est à dire, H est donnée donc par

$$H(x, y) = -\int R(x, y)P(x, y)dy + h(x)$$

ou

$$H(x, y) = \int R(x, y)Q(x, y)dx + h(y)$$

1.7.3 Facteurs intégrants inverses

Définition 1.7.3 : La fonction $V(x, y)$ est un facteur intégrant inverse du système (1.1.1) sur le sous ensemble ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ si $V \in C^1(U)$, $V \neq 0$ sur U et

$$P \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + Q \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V.$$

Le facteur intégrant inverse est une courbe algébrique invariante de cofacteur $k(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \text{div}(P, Q)$.

Il est facile de vérifier que si V est définie sur U , la fonction $R = \frac{1}{V}$ définie sur $U \setminus \{V = 0\}$ est un facteur intégrant du système (1.1.1), ce qui permet de calculer l'intégrale première de ce dernier sur $U \setminus \{V = 0\}$.

L'intégrale première H associée au facteur intégrant inverse V peut être calculée par l'intégrale

$$H(x, y) = \int (Q(x, y)dx - P(x, y)dy)/V(x, y) \quad (1.7.2)$$

Lorsque un système différentiel possède une intégrale première rationnelle $H = \frac{h}{g}$, alors toutes les courbes invariantes peuvent être définies par $f_c = 0$ où $f_c = h - cg$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$ et sont ainsi algébriques.

1.7.4 Facteurs exponentiels

Il y a un autre objet, qui s'appelle facteur exponentiel, qui joue le même rôle que les courbes algébriques invariantes pour obtenir une intégrale première d'un champ de vecteurs polynomial χ .

Définition 1.7.4 Soient h et g deux polynômes premiers entre eux. La fonction $F = \exp(h/g)$ s'appelle facteur exponentiel du système (1.1.1), s'il existe un polynôme $k(x, y)$ de degré inférieur ou égal à $d - 1$ tel que

$$P \frac{\partial \exp(h/g)}{\partial x} + Q \frac{\partial \exp(h/g)}{\partial y} = k \exp(h/g)$$

Comme précédemment, on dit que $k(x, y)$ est le cofacteur de $\exp(h/g)$.

La proposition suivante, donne la relation entre la notion de la courbe invariante et le facteur exponentiel.

Proposition 1.7.1 *Si $F(x, y) = \exp(h/g)$ est un facteur exponentiel et g est une fonction constante, alors $g = 0$ est une courbe algébrique invariante telle que h satisfait l'équation*

$$P \frac{\partial h}{\partial x} + Q \frac{\partial h}{\partial y} = h k_g + g k_F$$

où k_g et k_F sont respectivement les cofacteurs de g et F .

Remarque 1.7.1 *Si $F(x, y) = \exp(h/g)$ est un facteur exponentiel de partie imaginaire non nulle, alors son conjugué $F^- = \exp(h^-/g^-)$ est aussi un facteur exponentiel réel de cofacteur réel.*

Définition 1.7.5 *Soit la fonction*

$$f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \dots f_r^{\lambda_r} (\exp(\frac{h_1}{g_1^{n_1}}))^{\mu_1} (\exp(\frac{h_2}{g_2^{n_2}}))^{\mu_2} \dots (\exp(\frac{h_l}{g_l^{n_l}}))^{\mu_l} \quad (1.7.3)$$

où $r, l \in \mathbb{N}$, $f_i(x, y) = 0$ ($1 \leq i \leq r$) et $g_j(x, y) = 0$ ($1 \leq j \leq l$) des courbes algébriques invariantes du système (1.1.1), $h_j(x, y)$ ($1 \leq i \leq l$) des polynomes de $\mathbb{R}[x, y]$, λ_i ($1 \leq i \leq r$) et μ_j ($1 \leq j \leq l$) des nombres entiers non négatifs. Les fonctions précédentes sont dites fonctions de Darboux (généralisées).

Le problème d'intégrabilité consiste à trouver une classe de fonctions d'une intégrale première (polynomial, rationnelle, Darboux, élémentaire, Liouville, etc...) du système (1.1.1).

Pour cela, on introduit les deux définitions suivantes

Définition 1.7.6 *Une fonction élémentaire est une fonction construite par des fonctions rationnelles à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, de compositions et d'exponentielles.*

Définition 1.7.7 *Une fonction de Liouville est une fonction construite par des fonctions rationnelles et leur quadratures à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, de compositions, d'exponentielles et d'intégrations.*

1.8 Solutions périodiques

Le comportement des solutions à l'infini (t tend vers $\pm\infty$) est l'une des questions essentielles, et souvent difficiles, que l'on se pose à propos des équations différentielles.

Un comportement générique consiste à faire tendre les solutions vers un mouvement périodique. Dans le cas du plan, cela signifie que les trajectoires se rapprochent d'un cycle (courbe fermée image d'une solution périodique).

Dans le cas des systèmes non linéaires, les cycles se présentent en général de façon assez différente, alors que dans le cas linéaire, s'il y a un cycle il y en a une infinité. Les cycles des systèmes non linéaires sont plus souvent isolés et contrôlent le comportement des trajectoires proches, comme les points critiques contrôlent celui des autres trajectoires proches.

Définition 1.8.1 : La solution $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ du système (1.1.1) est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que:

$$\gamma(t) = \gamma(t + T) \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

T est alors sa période.

Remarque 1.8.1 : Les points singuliers du système (1.1.1) sont des solutions périodiques constantes.

Exemple 1.8.1 : L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle $x'' + \omega^2 x = 0$ est équivalent au système

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 x \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement puisque $\frac{dy}{dx} = -\omega^2 x$, ce qui donne pour ensemble de solutions $y^2 + \omega^2 x^2 = c$. Autrement dit, ce système possède une famille continue à un paramètre de solutions périodiques représentées dans le plan des phases par des ellipses.

Un résultat important est énoncé dans le théorème suivant qui peut seulement être appliqué lorsque l'orbite périodique γ est donnée d'une manière implicite, c'est à dire, lorsqu'il existe une courbe invariante $f(x, y) = 0$ telle que $\gamma \subseteq \{(x, y) / f(x, y) = 0\}$.

Théorème 1.8.1 [8] *Considérons le système (1.1.1), $\gamma(t)$ une orbite périodique de période T et supposons que $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une courbe invariante telle que $\gamma \subseteq \{(x, y) / f(x, y) = 0\}$ et $k(x, y)$ est le cofacteur de la courbe invariante. Supposons que $\nabla f(p) \neq 0 \forall p \in \gamma$. Alors,*

$$\int_0^T k(\gamma(t)) dt = \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$$

Remarque 1.8.2 *La supposition $\nabla f(p) \neq 0$ signifie que f ne contient pas des points singuliers.*

Définition 1.8.2 *(courbe fermée) Une courbe plane est un ensemble γ de couples $(f(t), g(t))$ où f et g sont des fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$ fermé, le point $M_a = (f(a), g(a))$ est l'origine et $M_b = (f(b), g(b))$ est l'extrémité de la courbe γ .*

On dit que la courbe est fermée si ses extrémités sont confondues c'est-à-dire:

$$(f(a), g(a)) = (f(b), g(b))$$

Définition 1.8.3 *(domaine connexe) D est connexe si toute paire de points dans D peut être reliée par une courbe entièrement contenue dans D . Autrement dit, il est constitué d'un seul morceau. Dans le cas contraire, chacun des morceaux est une composante connexe de D . Il est simplement connexe si toute courbe fermée dans D n'entoure que des points de D , c'est-à-dire il n'a pas de trous.*

1.8.1 Cycles limites

Nous avons vu que les solutions tendent vers un point singulier. Un autre comportement possible pour une trajectoire est de tendre vers un mouvement périodique. Dans le cas d'un système planaire cela signifie que les trajectoires tendent vers ce que l'on appelle un cycle limite.

Définition 1.8.4 *Un cycle limite est une trajectoire fermée isolée.*

Une trajectoire fermée est une orbite non réduite à un point qui revient à la solution initiale après un certain temps.

Isolée signifie que les trajectoires voisines ne sont pas fermées, elles spiralent autour du cycle du cycle limite en s'en éloignant ou en s'en approchant.

Chapitre 2

Existence de cycles limites

L'un des problèmes importants et difficiles à étudier dans la théorie qualitative des équations différentielles est la détermination des cycles limites d'un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

où P, Q sont des polynômes réels dont les variables sont x et y . On sait que les systèmes différentiels polynomiaux de degré 1 n'admettent pas de cycles limites.

2.1 Critères de non existence

Dans la littérature des cycles limites, on trouve des théorèmes de non existence du cycle limite :

Théorème 2.1.1 (critère de Bendixon) *Soit D un domaine simplement connexe de \mathbb{R}^2 . Si la quantité $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ est non identiquement nulle et de signe constant sur D , alors le champ de vecteurs χ n'admet pas de cycle limite entièrement contenu dans D .*

Démonstration.

Supposons que $\gamma : X = X(t), 0 \leq t \leq T$, est une orbite fermée du système (1.1.1) entièrement contenue dans D . Si S désigne l'intérieur du γ , il s'en suit de la formule de Green que

$$\begin{aligned}
 \int \int_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\gamma} (P dy - Q dx) \\
 &= \int_0^T (P dy - Q dx) \\
 &= \int_0^T (P y' - Q x') dt \\
 &= \int_0^T (P Q - Q P) dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

et si $\text{div}(P, Q)$ est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans S , alors il s'en suit de la continuité de champ de vecteurs (P, Q) dans S que l'intégrale double précédente est soit positive ou négative. Dans tous les cas, cela conduit à une contradiction. Donc, il n'y a pas de cycles limite de (1.1.1) entièrement contenu dans D . ■

Exemple 2.1.1 *Démontrons que le système différentiel*

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + \beta y^2 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + \lambda x^2 \end{cases}$$

avec $a_{ij} > 0$ pour tout i et j .

On a $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = a_{11} + a_{22} > 0$ en tout point de \mathbb{R}^2 , alors il ne peut donc exister de cycle limite dans \mathbb{R}^2 .

Le critère de Bendixon est un cas particulier du critère de Bendixon-Dulac comme le montre le théorème suivant:

Théorème 2.1.2 (critère de Bendixon-Dulac) *Soit le système différentiel (1.1.1) et soit $B(x, y)$ une fonction de classe C^1 sur un domaine simplement connexe D de \mathbb{R}^2 . Si la quantité $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ est non identiquement nulle et de signe constant sur D , alors le système (1.1.1) n'admet pas de cycle limite dans D .*

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons qu'il existe une fonction $B(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial BP}{\partial x} + \frac{\partial BQ}{\partial y} > 0$$

dans une région simplement connexe D . Soit γ une trajectoire fermée du système autonome planaire dans D . Soit S l'intérieur de γ . Puis, de la formule de Green, il s'en suit

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial BP}{\partial x} + \frac{\partial BQ}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\gamma} (BP dy - BQ dx) \\ &= \int_0^T (BP y' - BQ x') dt \\ &= \int_0^T (BPQ - BQP) dt \end{aligned}$$

Donc l'intégrale vaut 0. C'est une contradiction, alors, il ne peut y avoir une telle trajectoire fermée γ . ■

Exemple 2.1.2 *Considérons le modèle de compétition dont les équations sont:*

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - ay) \\ y' = y(1 - y - bx) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

avec $a, b > 0$, les points d'équilibre sont $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ et (x^*, y^*) qui vérifie les deux équations $1 - x^* - ay^* = 0$ et $1 - y^* - bx^* = 0$.

Les droites $x = 0$ et $y = 0$ sont respectivement isoclines nulles verticale et horizontale. On s'intéresse seulement au quadrant positif $D = \{(x, y) / x > 0, y > 0\}$. S'il doit exister un cycle limite, il est nécessairement autour de (x^*, y^*)

D est aussi simplement connexe, on le choisit pour appliquer le critère de Bendixon-Dulac.

$$\begin{cases} P(x, y) = x(1 - x - ay) \implies \frac{\partial P}{\partial x} = 1 - 2x - ay \\ Q(x, y) = y(1 - y - bx) \implies \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 - 2y - bx \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} &= 1 - 2x - ay + (1 - 2y - bx) \\ &= 2 - x(2 + b) - y(a + 2) \end{aligned}$$

Le signe de la quantité $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ n'est pas contrôlable, le critère de Bendixon ne permet pas de conclure et d'exclure la présence de cycle limite.

Soit $B(x, y) = \frac{1}{xy}$, alors

$$BP(x, y) = \frac{x}{xy}(1 - x - ay) \implies \frac{\partial}{\partial x}(BP) = -\frac{1}{y}$$

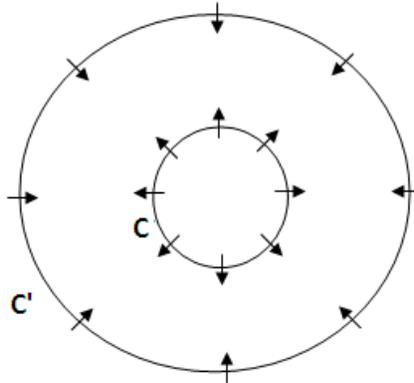
$$BQ(x, y) = \frac{y}{xy}(1 - y - bx) \implies \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = -\frac{1}{x}$$

Ainsi la quantité $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = -\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ est toujours strictement négative sur D .

On ne peut donc avoir la présence d'un cycle limite dans D .

2.2 Critères d'existence de cycles limites

Théorème 2.2.1 Soient deux courbes fermées C et C' , la seconde entourant la première. Si en chaque point de C , le vecteur vitesse (P, Q) de la trajectoire qui y passe est dirigé vers l'extérieur, et si en chaque point de C' il est dirigé vers l'intérieur, on peut affirmer qu'il existe au moins un cycle limite compris entre C et C' .



*Existence d'un cycle limite
compris entre C et C'*

Dans l'article de Giacomini, Llibre et Viano [7], une méthode a été présentée pour étudier l'existence et la non-existence de cycles limites d'un champs de vecteur planaire. Cette méthode est basée sur les deux critères suivants:

Critère 2.2.1 (Chavarrigua) [7]

Considérons le système:

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

P et Q définis sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , soit $(x(t), y(t))$ une solution périodique de (2.2.1) de période T . Supposons que: $U = U(x, y)$ (de classe C^1) solution de l'équation linéaire aux dérivées partielles:

$$P(x, y) \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = k(x, y)U(x, y) \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.2.2)$$

où le cofacteur $k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 vérifiant:

$$\int_0^T k(x(t), y(t)) dt \neq 0$$

Alors la trajectoire fermée:

$$\gamma(t) = \{(x(t), y(t)) \in \Omega : t \in [0, T]\}$$

est contenu dans $\Sigma = \{(x, y) \in \Omega : U(x, y) = 0\}$ et γ n'est pas contenu dans un anneau circulaire, de plus si P et Q sont analytiques, alors γ est un cycle limite .

Remarque 2.2.1 Nous remarquons que ce critère montre que quand nous savons explicitement la solution $U(x, y)$ de l'équation, $U(x, y) = 0$, qui sont des trajectoires du système à travers l'équation pour un k donné, nous avons en plus l'information sur les solutions périodiques de système parce que si γ est une trajectoire fermée, il doit satisfaire:

$$\gamma \text{ est contenu dans } \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : U(x, y) = 0\} \text{ ou } \int_{\gamma} k(t) dt = 0$$

Critère 2.2.2 [7] Considérons le système (2.2.1) et supposons que:

1) P, Q de classe C^1

2) $U = U(x, y)$ de classe C^1 solution de l'équation linéaire aux dérivées partielles

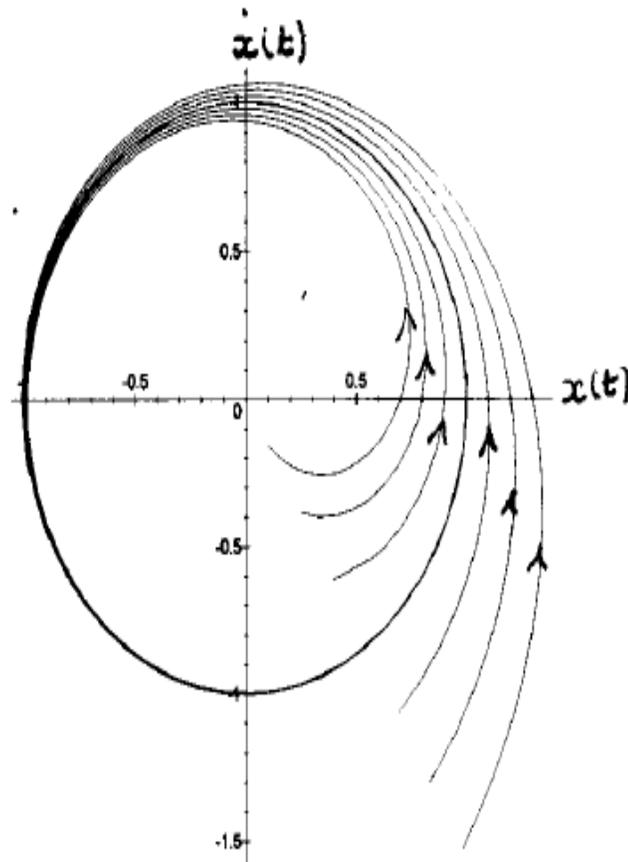
$$P \frac{\partial U}{\partial x} + Q \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) U \quad (2.2.3)$$

Si γ est un cycle limite, alors γ est contenu dans

$$\Sigma = \{(x, y) \in \Omega : U(x, y) = 0\}$$

2.2.1 Stabilité des cycles limites

Dans [9], D.W.Jordan et P.Smith ont expliqué que les trajectoires avoisinantes ne sont pas fermées et se comportent comme des spirales qui s'approchent ou s'éloignent du cycle limite lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ceci concerne aussi bien les trajectoires $\gamma(t)$ qui démarrent à l'intérieur que celles qui démarrent à l'extérieur en fonction des conditions initiales. Ces solutions sont relativement de moindre importance en comparaison avec la solution périodique.

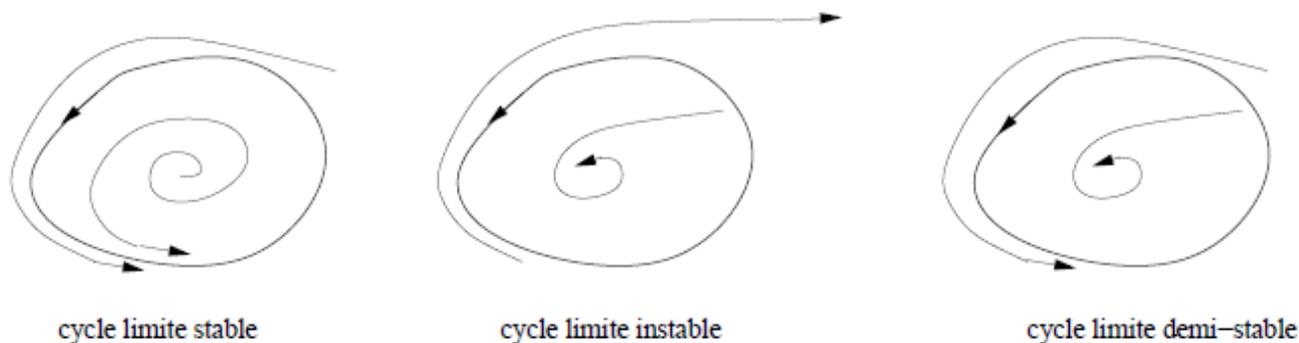


Les types de cycles limites

(a) Le cycle limite γ est stable (ou attractif), si les trajectoires intérieures et extérieures spirales tendent vers l'orbite fermée γ quand $t \rightarrow +\infty$.

(b) Le cycle limite γ est instable (ou répulsif), si les trajectoires intérieures et extérieures spirales tendent vers l'orbite fermée γ quand $t \rightarrow -\infty$.

(c) Le cycle limite γ est semi-stable, si les trajectoires spirales intérieures tendent vers l'orbite fermée γ quand $t \rightarrow +\infty$, les autres (extérieures) tendent vers γ quand $t \rightarrow -\infty$, et vice-versa.



Classification des cycles limites

Le théorème suivant permet de caractériser la stabilité d'un cycle limite ([12] page 216)

Théorème 2.2.2 [12] Soit $\gamma(t)$ une orbite périodique du système (1.1.1) de période T . Alors,

γ est un cycle limite stable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0,$$

et est un cycle limite instable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt > 0.$$

Il peut être un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou peut appartenir à une bande continue des cycles si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt = 0.$$

Remarque 2.2.2 Lorsque la quantité $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$ est différente de zéro, on dit que le cycle limite γ est hyperbolique.

Remarque 2.2.3 *Les cycles limites stables sont très intéressants d'un point de vue scientifique puisque ils sont caractéristiques des systèmes qui montrent des oscillations stables et entretenues de manière autonome, c-à-d, le système oscille même en absence de forces périodiques externes.*

Exemple 2.2.1 *On a comme exemples de cycles limites: le battement du coeur, les rythmes biologiques du corps humain (température, sécrétion d'hormones), les oscillations dans les réactions chimiques, etc.*

Remarque 2.2.4 *Les cycles limites n'apparaissent seulement que dans les systèmes non linéaires, un système linéaire peut avoir des orbites fermées mais qui ne sont pas isolées: en d'autres termes, si $x(t)$ est une solution périodique, aussi $cx(t)$ sera une solution pour chaque constant $c \neq 0$.*

La recherche d'un cycle limite est une tâche difficile dans le cas général, on donne un exemple où on peut écrire l'expression explicite du cycle limite.

Exemple 2.2.2 *Soit le système d'équations suivant:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Pour résoudre ce système, on pose

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

la formulation du système permet de passer des coordonnées cartésiennes (x, y) aux coordonnées polaires (r, θ) qui sont définies par les relations suivantes:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

et comme

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Cela veut dire que

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dt} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dy}{dt} \\
 &= \frac{r \cos \theta}{r} (-r \sin \theta + r \cos \theta (1 - r^2)) + \frac{r \sin \theta}{r} (r \cos \theta + r \sin \theta (1 - r^2)) \\
 &= \frac{-r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \cos^2 \theta (1 - r^2) + r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta (1 - r^2)}{r} \\
 &= \frac{r^2 (1 - r^2) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{r} \\
 &= r(1 - r^2)
 \end{aligned}$$

et on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta}{dt} &= \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{dx}{dt} + \frac{\frac{1}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{dy}{dt} \\
 &= -\frac{\sin \theta}{r} (-r \sin \theta + r \cos \theta (1 - r^2)) + \frac{\cos \theta}{r} (r \cos \theta + r \sin \theta (1 - r^2)) \\
 &= \frac{r \sin^2 \theta + r \sin \theta \cos \theta (1 - r^2) + r \cos^2 \theta + r \cos \theta \sin \theta (1 - r^2)}{r} = \frac{r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{r} = 1
 \end{aligned}$$

On obtient le système:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r - r^3, \\ \frac{d\theta}{dt} = 1, \end{cases} \quad (2.2.5)$$

On élimine t , en divisant la première équation de (2.2.5) sur la deuxième équation terme à terme, on obtient:

$$\frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{r - r^3}{1}$$

ce qui implique

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3$$

donc

$$r' - r = -r^3 \quad (2.2.6)$$

c'est une équation de Bernoulli on divise l'équation (2.2.6) par r^3 on obtient:

$$r' r^{-3} - r^{-2} = -1. \quad (2.2.7)$$

On pose

$$z = r^{-2}$$

On dérive, on obtient

$$\frac{dz}{d\theta} = -2r^{-3}r'$$

Ce qui implique

$$r' r^{-3} = -\frac{1}{2} \frac{dz}{d\theta}$$

En remplaçant dans (2.2.7), on aura

$$-\frac{1}{2} \frac{dz}{d\theta} - z(\theta) = -1$$

alors

$$-z' - 2z = -2 \tag{2.2.8}$$

C'est une équation différentielle linéaire en z et z' non homogène pour résoudre cette équation, on cherche la solution homogène pour résoudre cette équation.

On considère l'équation homogène associée

$$-\frac{dz}{d\theta} - 2z = 0$$

On se ramène à une équation à variables séparées

$$\frac{dz}{z} = -2d\theta$$

En intégrant, on trouve

$$\ln z = -2\theta + c_1$$

$$z(\theta) = c_2 \exp(-2\theta)$$

tel que

$$c_2 = \exp(c_1)$$

On utilise la méthode de la variation de la constante arbitraire, on obtient

$$z(\theta) = c_2(\theta) \exp(-2\theta)$$

En dérivant, on trouve

$$\frac{dz}{d\theta} = -2c_2(\theta) \exp(-2\theta) + c_2'(\theta) \exp(-2\theta)$$

On substitue z et z' dans (2.2.8), on aura

$$\begin{aligned} -2 &= 2 \exp(-2\theta)c_2(\theta) - c_2'(\theta) \exp(-2\theta) - 2c_2(\theta) \exp(-2\theta) \\ &= -\exp(-2\theta)c_2'(\theta) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$c_2'(\theta) = 2 \exp(2\theta)$$

donc

$$c_2(\theta) = \exp(2\theta) + c$$

On revient à la solution, on trouve

$$z(\theta) = \exp(-2\theta)(\exp(2\theta) + c) = 1 + c \exp(-2\theta)$$

On a, d'après ce qui précède

$$z = \frac{1}{r^2}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{1 + c \exp(-2\theta)} \end{aligned}$$

On revient aux coordonnées cartésiennes

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{1 + c \exp(-2 \arctan(\frac{y}{x}))}$$

D'où la solution est

$$\begin{aligned} U(x, y) &= 0 \\ \iff x^2 + y^2 - \frac{1}{1 + c \exp(-2 \arctan(\frac{y}{x}))} &= 0 \end{aligned}$$

pour $c = 0$, dans le plan de phases, c'est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et c'est un cycle limite. les autres solutions s'obtiennent par intégration du système. Lorsque $t \rightarrow \infty$ toutes ces solutions s'approchent du cycle limite.

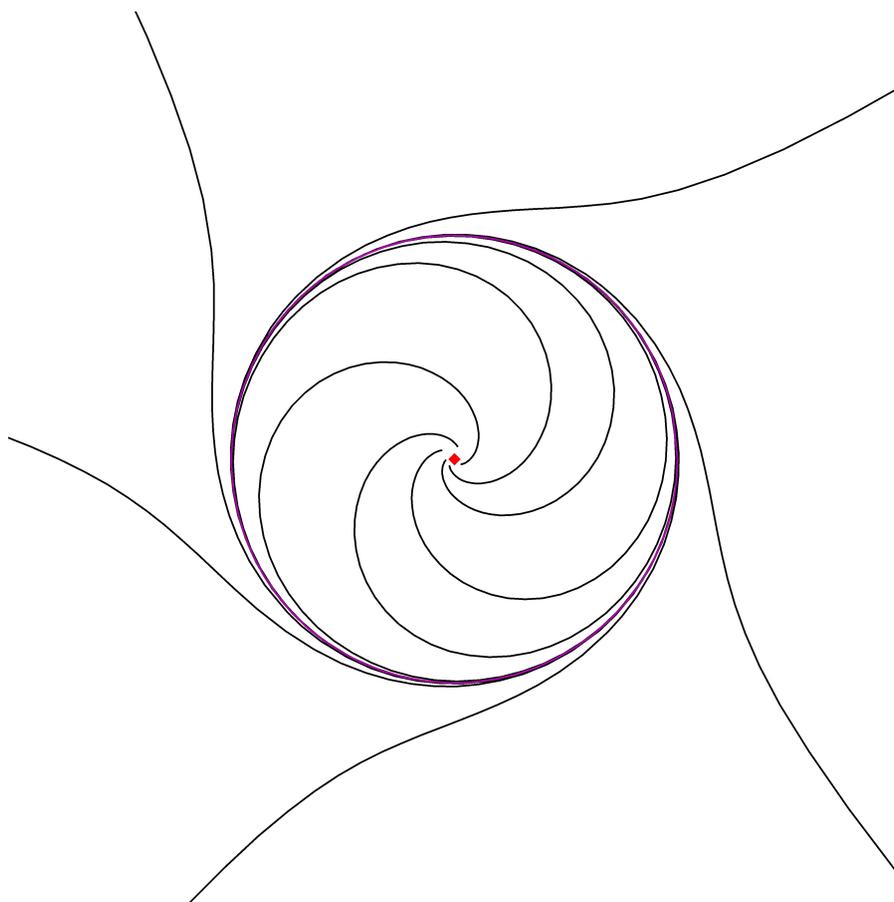
Dans cet exemple, on a

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T, \quad \text{div}(P, Q) = 2 - 4x^2 - 4y^2$$

et

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\gamma(t)) dt = \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t) dt = -4\pi$$

Puisque $\int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0$, le cycle limite $\gamma(t)$ est stable.



Le cycle limite $x^2 + y^2 - 1 = 0$ du système (2.2.8)

Définition 2.2.1 Un cycle limite algébrique est un cycle limite qui est contenu dans les zéros d'une courbe algébrique invariante.

Chapitre 3

Systemes différentiels de Kolmogorov

Les équations de Lotka-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de "modèle proie-prédateur", sont un couple d'équations différentielles non linéaires du premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent.

Elles ont été proposées indépendamment par le biologiste américain Alfred J Lotka en 1925 et par le mathématicien italien Vito Volterra en 1926.

Volterra proposa ces équations afin de modéliser l'évolution de la quantité de poisson pêché dans la mer Adriatique dans la période suivant la première guerre mondiale.

Ce modèle n'a pas seulement une valeur historique mais il est aussi le point de départ d'une série d'effort de modélisation d'entités interagissantes dans la biologie, l'écologie et l'économie.

Ces équations modélisent les taux de croissance x' et y' de deux populations qui interagissent dans un écosystème, où x est l'effectif d'une population de proies et y est l'effectif d'une population de prédateurs.

L'espèce 1 (proie) possède une quantité illimitée de nourriture et de ressources et que ses individus ne soient pas en compétition entre eux.

L'espèce 2 (prédateur) se nourrit exclusivement des individus de l'espèce 1.

L'espèce 1 croit exponentiellement en absence des prédateurs et l'espèce 2 décroît exponentiellement en absence des proies.

La dynamique des populations est une partie de la biologie mathématique qui a pour but la description, en termes de modèles mathématiques, de l'interaction entre différents types des populations dans un milieu donné. Ces modèles sont régis par des équations d'évolutions qui sont des équations aux dérivées partielles. Il existe en dynamique des populations plusieurs types d'interactions entre ces populations (proie-prédateur, compétition, etc). Un problème central est l'étude du comportement asymptotique des solutions des systèmes modélisant ces phénomènes.

Le premier modèle de prédation fut proposé par les deux auteurs indépendamment: le statisticien Alfred Lotka (1923) et le mathématicien Vito Volterra (1926), ce modèle dit de Lotka-Volterra qui est le système ordinaire à deux équations différentielles donné par:

$$\begin{cases} x' = x(a - by), \\ y' = (-c + dx), \end{cases} \quad (3.0.1)$$

où a, b, c et d des réels stictement positifs, x et y représentent la densité de population de ces espèces à l'instant t . Le modèle de Lotka-Volterra a subit par la suite des modifications et il est, encore à ce jour, à la base de nombreux travaux théoriques et appliqués. En général, la solution du système (3.0.1) ne peut pas s'écrire de façon analytique, mais ella a été étudiée de manière qualitative.

En 1936, le mathématicien russe Kolmogorov a décrit un système proie-prédateur planaire, défini par deux équations différentielles. L'une d'elles mesure la variation de la densité des proies et l'autre celle de la densité des prédateurs présents, au cours du temps.

Ce système dit de Kolmogorov à la forme générale suivante

$$\begin{cases} x' = xf(x, y) \\ y' = yg(x, y) \end{cases} \quad (3.0.2)$$

avec f et g sont des fonctions continues et dérivables.

Dans notre travail, on s'intéressera au système de la forme:

$$\begin{cases} x' = x(FU + \lambda yU_y) \\ y' = y(GU - \lambda xU_x) \end{cases} \quad (3.0.3)$$

où U, F et G sont trois polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Proposition 3.0.1 *Le système (3.0.3) admet $U(x, y) = 0$ comme courbe algébrique invariante de cofacteur $k(x, y) = xFU_x(x, y) + yGU_y(x, y)$*

Preuve. Comme

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= x'U_x + y'U_y \\ &= (xFU_x + yGU_y)U\end{aligned}$$

alors, $U(x, y) = 0$ est une courbe algébrique invariante pour le système(3.0.3) avec le cofacteur $k(x, y) = xFU_x(x, y) + yGU_y(x, y)$ ■

Dans ce que suit, on va étudier trois différentes classes du système (3.0.3), cubique, quartique et une dernière d'ordre six.

3.1 Sur la non-existence de cycle limite pour une classe de systèmes cubiques

Considérons le système cubique

$$\begin{cases} x' = x(a((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \gamma^2) + 2\lambda y(y - \beta)) \\ y' = y(b((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \gamma^2) - 2\lambda x(x - \alpha)) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

qu'est une classe de système (3.0.3) pour $F = a$, $G = b$ et $U(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \gamma^2$.

où a , b , α , β et γ sont des constantes réelles

Théorème 3.1.1 *Le système (3.1.1) a une intégrale première rationnelle de la forme*

$$H(x, y) = \frac{x^b}{y^a ((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \gamma^2)^\lambda}$$

De plus, il n'admet pas de cycles limites algébriques.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}H'_x &= \frac{bx^{b-1}((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \gamma^2) - 2\lambda x^b(x - \alpha)}{y^a((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \gamma^2)^{\lambda+1}} \\ &= x^{b-1} \frac{bU - 2\lambda x(x - \alpha)}{y^a U^{\lambda+1}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H'_y &= -x^b \frac{a((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \gamma^2) + 2\lambda y(y-\beta)}{y^{a+1}((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \gamma^2)^{\lambda+1}} \\ &= -x^b \frac{aU + 2\lambda y(y-\beta)}{y^{a+1}U^{\lambda+1}} \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= H'_x x' + H'_y y' \\ &= x(aU + 2\lambda y(y-\beta))H'_x + y(bU - 2\lambda x(x-\alpha))H'_y \\ &= x^b \frac{(aU + 2\lambda y(y-\beta))(bU - 2\lambda x(x-\alpha))}{y^a U^{\lambda+1}} - x^b \frac{(bU - 2\lambda x(x-\alpha))(aU + 2\lambda y(y-\beta))}{y^a U^{\lambda+1}} \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

Comme le système est polynomial planaire et admet une intégrale première rationnelle, alors les courbes solutions sont algébriques et donc elles ne peuvent pas être des spirales. Sinon elles coupent l'axe des abscisses en une infinité de fois ce qu'est n'est pas possible. Ainsi, le système (3.1.1) n'a pas de cycles limites algébriques. ■

Exemple 3.1.1 Pour $a = \lambda = 1$, $b = -1$, $\alpha = \beta = 2$ le système (3.1.1) devient:

$$\begin{cases} x' = x(7 - 4x - 8y + x^2 + 3y^2) \\ y' = y(-7 + 8x + 4y - 3x^2 - y^2) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

il possède

$$H(x, y) = \frac{1}{xy(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7)}$$

comme intégrale première du système car

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= H'_x x' + H'_y y' \\ &= x(7 - 4x - 8y + x^2 + 3y^2)H'_x + y(-7 + 8x + 4y - 3x^2 - y^2)H'_y \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, le système (3.1.2) n'a pas de cycles limites algébriques.

3.2 L'existence cycle limite algébrique pour une classe de systèmes quartiques

Considérons dans le quadrant positif $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$, le système quartique

$$\begin{cases} x' = x ((a_1x + b_1y + c_1) ((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \gamma^2) + 2\lambda y(y - \beta)) \\ y' = y ((a_2x + b_2y + c_2) ((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \gamma^2) - 2\lambda x(x - \alpha)) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

classe de système (3.0.3) pour $F = (a_1x + b_1y + c_1)$, $G = (a_2x + b_2y + c_2)$ et $U(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \gamma^2$

où $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \alpha, \beta$ et γ sont des constantes réelles avec $\alpha > 0, \beta > 0$ et $\gamma^2 < \min\{\alpha^2, \beta^2\}$.

Remarque 3.2.1 *Les conditions $\alpha > 0, \beta > 0$ et $\gamma^2 < \min\{\alpha^2, \beta^2\}$ assurent que le cercle $\Gamma = \{(x, y) \in \Omega / U(x, y) = 0\}$ est contenu dans le premier quadrant du plan $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$*

Pour ce système, nous allons prouver l'existence d'un cycle limite algébrique dont on donnera l'expression explicite. Pour ce faire, soit le lemme suivant:

Lemme 3.2.1 *Le cercle Γ définit une solution périodique du système (3.2.1).*

Preuve. D'après la proposition (3.0.1), le cercle Γ est une courbe algébrique invariante de cofacteur

$$k(x, y) = 2 [x(x - \alpha)(a_1x + b_1y + a) + y(y - \beta)(a_2x + b_2y + b)].$$

Reste à montrer qu'il est non singulier. Par l'absurde, supposons que Γ contient le point singulier (x_0, y_0) du système (3.2.1), donc (x_0, y_0) est une solution du système

$$\begin{cases} (a_1x + b_1y + c_1) ((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \gamma^2) + 2\lambda y(y - \beta) = 0, \\ (a_2x + b_2y + c_2) ((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \gamma^2) - 2\lambda x(x - \alpha) = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} y(y - \beta) = 0, \\ x(x - \alpha) = 0. \end{cases}$$

Dans le premier quadrant positif du plan, l'unique point singulier est (α, β) , centre du cercle, ce qui est absurde, donc Γ est une orbite périodique. ■

Dans la suite, nous donnerons une condition pour que le système (3.2.1) admette Γ comme cycle limite hyperbolique.

Théorème 3.2.1 *Le système (3.2.1) admet le cercle Γ comme cycle limite hyperbolique si*

$$a_1(\beta - \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}) + b_2(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}) \neq 0.$$

Preuve. On pose T la période de Γ .

Pour montrer que Γ est un cycle limite, il suffit de vérifier que $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt \neq 0$. Selon le théorème 1.8.1, on a pour n'importe quelle valeur de $\mu \in \mathbb{R}^*$

$$\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt = \int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt + \mu \left(\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt - \int_0^T k(\Gamma(t))dt \right)$$

où

$$\begin{aligned} \text{div}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x(FU + \lambda yU_y)) + \frac{\partial}{\partial y}(y(GU - \lambda xU_x)) \\ &= (F + G + xF_x + yG_y)U + x(F - \lambda)U_x + y(G + \lambda)U_y \end{aligned}$$

avec F_x est la dérivée partielle par rapport à la variable x de la fonction $F = F(x, y)$, et de même pour G_y , donc

$$\int_0^T \text{div}(x(t), y(t))dt = \int_0^T [x(F - \lambda - \mu\lambda)U_x + y(G + \lambda + \mu\lambda)U_y] dt$$

En revanche, à partir du système (??), nous obtenons

$$dt = \frac{dx}{x(FU + \lambda yU_y)}$$

par suite

$$\begin{aligned} \int_0^T \text{div}(x(t), y(t))dt &= \oint_{\Gamma} \frac{x(F - \lambda - \mu\lambda)U_x + y(G + \lambda + \mu\lambda)U_y}{\lambda xyU_y} dx \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{(F - \lambda - \mu\lambda)U_x}{\lambda yU_y} dx + \oint_{\Gamma} \frac{(G + \lambda + \mu\lambda)}{\lambda x} dx. \end{aligned}$$

Comme $U(x, y) = 0$ est une courbe algébrique, alors

$$U_x(x, y)dx + U_y(x, y)dy = 0$$

C'est-à-dire

$$U_x(x, y)dx = -U_y(x, y)dy$$

donc

$$\int_0^T \operatorname{div}(x(t), y(t))dt = \oint_{\Gamma} \frac{(G + \lambda + \mu\lambda)}{\lambda x} dx - \oint_{\Gamma} \frac{(F - \lambda - \mu\lambda)}{\lambda y} dy$$

On applique la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(x(t), y(t))dt &= \iint_{\operatorname{int}(\Gamma)} \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{G + \lambda + \mu\lambda}{\lambda x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F - \lambda - \mu\lambda}{\lambda y} \right) \right] dx dy \\ &= -\iint_{\operatorname{int}(\Gamma)} \frac{(b_2 y + a_1 x)}{\lambda xy} dx dy \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^T \operatorname{div}(x(t), y(t))dt = -\frac{b_2}{\lambda} \iint_{\operatorname{int}(\Gamma)} \frac{1}{x} dx dy - \frac{a_1}{\lambda} \iint_{\operatorname{int}(\Gamma)} \frac{1}{y} dx dy \quad (3.2.2)$$

où $\operatorname{int}(\Gamma)$ désigne l'intérieur de Γ avec Γ est le cercle défini précédemment. Comme la courbe est réunion des deux arcs

$$y_1 = \beta - \sqrt{\gamma^2 - (x - \alpha)^2}, \quad y_2 = \beta + \sqrt{\gamma^2 - (x - \alpha)^2}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\operatorname{int}(\Gamma)} \frac{1}{x} dx dy \\ &= \int_{\alpha-\gamma}^{\alpha+\gamma} \left(\int_{\beta-\sqrt{\gamma^2-(x-\alpha)^2}}^{\beta+\sqrt{\gamma^2-(x-\alpha)^2}} \frac{1}{x} dy \right) dx \end{aligned}$$

En intégrant I_1 Par rapport à y , on obtient

$$I_1 = 2 \int_{\alpha-\gamma}^{\alpha+\gamma} \frac{\sqrt{\gamma^2 - (x - \alpha)^2}}{x} dx$$

On faisant le changement de variable $x = \alpha + \gamma \sin \theta$, alors

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\gamma^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta}{\alpha + \gamma \sin \theta} d\theta \\ &= 2\gamma^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{\alpha + \gamma \sin \theta} d\theta \\ &= 4\gamma^2 J \end{aligned}$$

où

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{\alpha + \gamma \sin \theta} d\theta$$

En posant

$$t = \tan \frac{\theta}{2}$$

On obtient

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$$

par suite

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} \frac{1}{\alpha + \gamma \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2 (\alpha t^2 + 2\gamma t + \alpha)} dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{\alpha}{\gamma^2} \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{2t}{(1+t^2)^2} + \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\gamma^2} \frac{1}{\alpha t^2 + 2\gamma t + \alpha} \right) dt \\ &= \frac{\alpha}{\gamma^2} \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\gamma^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\alpha t^2 + 2\gamma t + \alpha} dt \end{aligned}$$

Calculons la valeur de $K = \int_{-1}^1 \frac{1}{\alpha t^2 + 2\gamma t + \alpha} dt$.

On a

$$K = \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}}$$

On pose $z = t + \frac{\gamma}{\alpha}$.

Alors

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\left(t + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{\gamma-\alpha}{\alpha}}^{\frac{\gamma+\alpha}{\alpha}} \frac{dz}{z^2 + \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}} \left(\arctan \frac{\alpha z}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}} \right) \Big|_{\frac{\gamma-\alpha}{\alpha}}^{\frac{\gamma+\alpha}{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}} \left(\arctan \frac{\gamma + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}} - \arctan \frac{\gamma - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}} \right) \end{aligned}$$

D'où

$$K = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\alpha\pi + 4(\gamma^2 - \alpha^2)K \\ &= 2\alpha\pi - 2\pi\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} \end{aligned}$$

D'où

$$I_1 = 2\pi(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}) \quad (3.2.3)$$

Soit la seconde intégrale

$$I_2 = \iint_{\text{int}(\Gamma)} \frac{1}{y} dx dy$$

Par symétrie

$$I_2 = \iint_{\text{int}(\Gamma)} \frac{1}{x} dx dy$$

Donc, en remplaçant α par β dans l'expression de I_2 , on obtient

$$I_2 = 2\pi(\beta - \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}) \quad (3.2.4)$$

En tenant compte de (3.2.3) et (3.2.4), la formule (3.2.2) devient

$$\int_0^T \text{div}(\Gamma(t)) dt = -\frac{2\pi}{\lambda} [b_2(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}) + a_1(\beta - \sqrt{\beta^2 - \gamma^2})].$$

Par conséquent, l'orbite périodique Γ est un cycle limite hyperbolique si et seulement si

$$a_1(\beta - \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}) + b_2(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}) \neq 0.$$

Ceci achève la preuve du théorème. ■

Exemple 3.2.1 Pour $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $a_2 = 0$, $c_2 = 0$, $b_2 = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ ($\gamma^2 < \min\{\alpha^2, \beta^2\}$) et $\lambda = -1$, le système (3.2.1) devient:

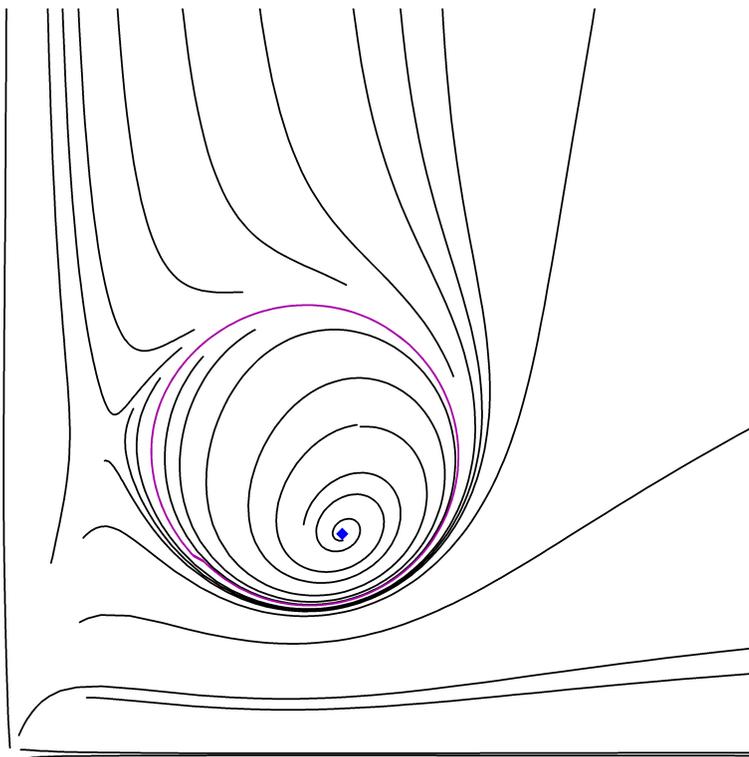
$$\begin{cases} x' = x(x((x-2)^2 + (y-2)^2 - 1) - 2y(y-2)) \\ y' = y(y((x-2)^2 + (y-2)^2 - 1) + 2x(x-2)) \end{cases} \quad (3.2.5)$$

il admet le cercle

$$\Gamma : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0$$

comme cycle limite hyperbolique instable car

$$\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt = -\frac{2\pi}{\lambda} [b_2(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}) + a_1(\beta - \sqrt{\beta^2 - \gamma^2})] = 3.3672 > 0$$



Portrait de phase du système (3.2.5).

3.3 L'existence de deux cycles limites algébriques pour une classe de systèmes d'ordre six

Considérons dans le quadrant positif $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 0, y > 0\}$, le système d'ordre six suivant:

$$\begin{cases} x' = x \left(\begin{array}{l} (a_1x + b_1y + c_1) ((y - b)^2 + ((x - a)^2 - \alpha^2) ((x - a)^2 - \beta^2)) + \\ \lambda y (2y + \alpha^2 - \beta^2 - 2\epsilon_1) \end{array} \right) \\ y' = y \left(\begin{array}{l} (a_2x + b_2y + c_2) ((y - b)^2 + ((x - a)^2 - \alpha^2) ((x - a)^2 - \beta^2)) - \\ 2\lambda x ((x - \beta - \epsilon_2) (2x^2 - 4(\beta + \epsilon_2)x + \beta^2 - \alpha^2 + 4\beta\epsilon_2 + 2\epsilon_2^2)) \end{array} \right) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

une classe de système (3.0.3) pour $F = (a_1x + b_1y + c_1)$, $G = (a_2x + b_2y + c_2)$ et $U(x, y) = (y - b)^2 + ((x - a)^2 - \alpha^2) ((x - a)^2 - \beta^2)$

où $a, b, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \alpha, \beta, \epsilon_1$ et ϵ_2 sont des constantes réelles telles que $\beta > \alpha > 0$, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, $a = \beta + \epsilon_1$ et $b = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} + \epsilon_2$

Pour ce système, nous allons prouver l'existence de deux cycles limites algébriques d'une manière explicite. Pour ce faire, on a besoin d'établir quelques lemmes auxiliaires.

Lemme 3.3.1 [2] *La courbe algébrique*

$$\Gamma_1 : y^2 + (x^2 - \alpha^2) (x^2 - \beta^2) = 0$$

est non singulière et est composée de deux ovals.

Preuve. Pour la démonstration voir [2]. ■

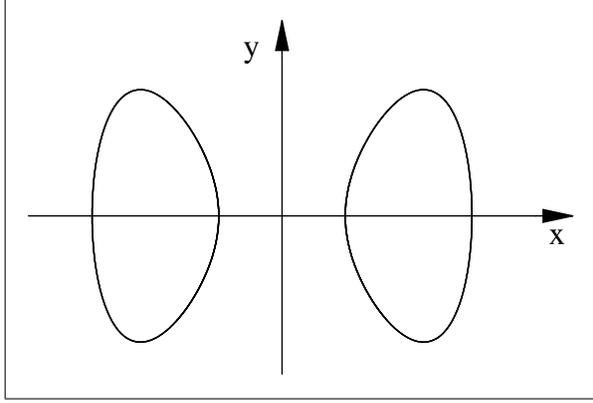
Lemme 3.3.2 *La courbe algébrique*

$$\Gamma_2 : (y - b)^2 + ((x - a)^2 - \alpha^2) ((x - a)^2 - \beta^2) = 0$$

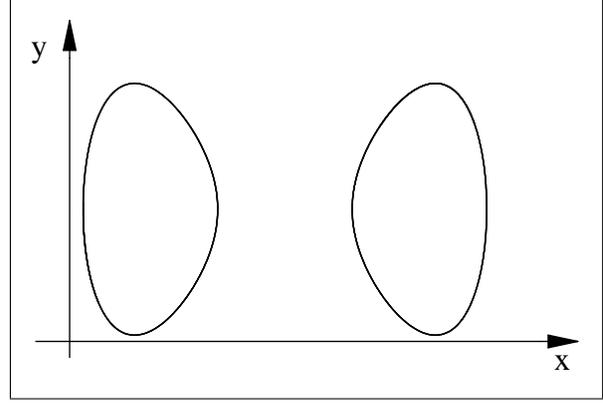
est non singulière et est composée de deux ovals situées dans le premier quadrant positif du plan $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 0, y > 0\}$.

3.3. L'existence de deux cycles limites algébriques pour une classe de systèmes d'ordre six

Preuve. Il suffit d'appliquer une translation du vecteur $\begin{pmatrix} \beta + \epsilon_1 \\ \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + \epsilon_2 \end{pmatrix}$ à la courbe Γ_1 pour obtenir la courbe Γ_2 .



La courbe Γ_1



La courbe Γ_2

■

Remarquons que la courbe Γ_2 existe seulement pour $x \in [\epsilon_1, a - \alpha] \cup [a + \alpha, a + \beta]$.

Notons que γ_1 et γ_2 les deux ovals de la courbe Γ_2 . Elles sont définis par

$$\gamma_1 = \{(x, y) : x \in [\epsilon_1, a - \alpha] \text{ et } (y - b)^2 + ((x - a)^2 - \alpha^2) ((x - a)^2 - \beta^2) = 0\}$$

$$\gamma_2 = \{(x, y) : x \in [a + \alpha, a + \beta] \text{ et } (y - b)^2 + ((x - a)^2 - \alpha^2) ((x - a)^2 - \beta^2) = 0\}$$

Lemme 3.3.3 *La courbe Γ_2 définit deux solutions périodiques du système (3.3.1).*

Preuve. D'après la proposition (3.0.1), la courbe Γ_2 est une courbe algébrique invariante de cofacteur

$$k(x, y) = 2x(a_1x + b_1y + c_1)((x - \beta - \epsilon_2)(2x^2 - 4(\beta + \epsilon_2)x + \beta^2 - \alpha^2 + 4\beta\epsilon_2 + 2\epsilon_2^2)) + y(a_2x + b_2y + c_2)$$

Reste à montrer que Γ_2 est non singulière. Par l'absurde, supposons que Γ_2 contient le point singulier (x_0, y_0) du système (3.2.1), donc (x_0, y_0) est une solution du système

$$\begin{cases} x((a_1x + b_1y + c_1)((y - b)^2 + ((x - a)^2 - \alpha^2)((x - a)^2 - \beta^2)) + \lambda y(2y + \alpha^2 - \beta^2 - 2\epsilon_1) = 0, \\ y \left(\begin{array}{l} (a_2x + b_2y + c_2)((y - b)^2 + ((x - a)^2 - \alpha^2)((x - a)^2 - \beta^2)) - \\ 2\lambda x((x - \beta - \epsilon_2)(2x^2 - 4(\beta + \epsilon_2)x + \beta^2 - \alpha^2 + 4\beta\epsilon_2 + 2\epsilon_2^2)) \end{array} \right) = 0. \end{cases}$$

3.3. L'existence de deux cycles limites algébriques pour une classe de systèmes d'ordre six

D'où

$$\begin{cases} y(2y + \alpha^2 - \beta^2 - 2\epsilon_1) = 0, \\ x((x - \beta - \epsilon_2)(2x^2 - 4(\beta + \epsilon_2)x + \beta^2 - \alpha^2 + 4\beta\epsilon_2 + 2\epsilon_2^2)) = 0. \end{cases}$$

Dans le premier quadrant positif du plan, les seuls points singuliers sont $\left(\beta + \epsilon_2, -\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2 + \epsilon_1\right)$, $\left(\beta + \epsilon_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, -\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2 + \epsilon_1\right)$ et $\left(\beta + \epsilon_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, -\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2 + \epsilon_1\right)$, ce qui est absurde, donc Γ_2 est une orbite périodique. Ce qui termine la preuve. ■

Dans la suite, on donnera une condition pour que le système (3.3.1) admette les deux ovales de Γ_2 comme cycles limites hyperboliques.

Théorème 3.3.1 *Le système (3.3.1) admet les deux ovales de la courbe Γ_2 comme cycles limites hyperboliques si*

$$\begin{aligned} & a_1 b_2 < 0, \\ & \left(\begin{aligned} & -7b_2^2 a^4 + 16\alpha b_2^2 a^3 + b_2^2 (-11\alpha^2 + \beta^2 + 6\epsilon_1^2) a^2 + 2b_2 (ba_1 + \alpha^3 b_2 - \alpha\beta^2 b_2) a + \\ & ((b^2 + \alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \epsilon_1^2 - \beta^2 \epsilon_1^2 + \epsilon_1^4) b_2^2 - 2b\alpha a_1 b_2 + \epsilon_1^2 a_1^2) \end{aligned} \right) > 0 \\ & \text{et} \\ & \left(\begin{aligned} & 16b_2^2 (\alpha - \beta) a^3 + (a_1^2 + 12b_2^2 (\alpha^2 - \beta^2)) a^2 + \\ & 2((\alpha^3 + \alpha^2 \beta - \alpha\beta^2 - \beta^3) b_2^2 + ba_1 b_2 + \alpha a_1^2) a + (b^2 b_2^2 + 2\beta ba_1 b_2 + \alpha^2 a_1^2) \end{aligned} \right) > 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Remarque 3.3.1 *Les conditions du théorème affirment que la droite d'équation $a_1 x + b_2 y = 0$ n'a pas de point d'intersection avec la courbe Γ_2 .*

Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe une solution du système

$$\begin{cases} a_1 x + b_2 y = 0 \\ (y - b)^2 + ((x - a)^2 - \alpha^2) ((x - a)^2 - \beta^2) = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $y = -\frac{a_1}{b_2}x$, en substituant la dans la deuxième, on obtient

$$F(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

où $A = b_2^2$, $B = -4ab_2^2$, $C = (b_2^2 (6a^2 - (\alpha^2 + \beta^2)) + a_1^2)$, $D = -2b_2 (-ba_1 + ab_2 (2a^2 - (\alpha^2 + \beta^2)))$ et $E = b_2^2 ((a^2 - \alpha^2) (a^2 - \beta^2) + b^2)$

3.3. L'existence de deux cycles limites algébriques pour une classe de systèmes d'ordre six

Remarquons que $A, C, E > 0$ et $B, D < 0$ car $a_1 b_2 < 0$. Comme $\Gamma_2 = \gamma_1 \cup \gamma_2$, alors sur γ_1 , i.e. $x \in [\epsilon_1, a - \alpha]$, on aura

$$x \leq a - \alpha, \quad x^2 \geq \epsilon_1^2, \quad x^3 \leq (a - \alpha)^3 \quad \text{et} \quad x^4 \geq \epsilon_1^4$$

Par conséquent

$$F(x) \geq A\epsilon_1^4 + B(a - \alpha)^3 + C\epsilon_1^2 + D(a - \alpha) + E > 0$$

ce qui est absurde. Sur γ_1 , i.e. sur l'intervalle $[a + \alpha, a + \beta]$, on a

$$x \leq a + \beta, \quad x^2 \geq (a + \alpha)^2, \quad x^3 \leq (a + \beta)^3 \quad \text{et} \quad x^4 \geq (a + \alpha)^4$$

Par conséquent

$$F(x) \geq A(a + \alpha)^4 + B(a + \beta)^3 + C(a + \alpha)^2 + D(a + \beta) + E > 0$$

ce qui est absurde. ■

Preuve du théorème 3.3.1. On pose T_i la période de γ_i , $i = 1, 2$.

Pour montrer que γ_i est un cycle limite, il suffit de vérifier que $\int_0^{T_i} \text{div}(\gamma_i(t)) dt \neq 0$. Selon le théorème 1.8.1, on a pour n'importe quelle valeur de $\mu \in \mathbb{R}^*$

$$\int_0^{T_i} \text{div}(\gamma_i(t)) dt = \int_0^{T_i} \text{div}(\gamma_i(t)) dt + \mu \left(\int_0^{T_i} \text{div}(\gamma_i(t)) dt - \int_0^{T_i} k(\gamma_i(t)) dt \right)$$

D'après la démonstration du théorème précédent, on obtient

$$\int_0^{T_i} \text{div}(\gamma_i(t)) dt = \frac{-1}{\lambda} \iint_{\text{int}(\gamma_i)} \frac{b_2 y + a_1 x}{xy} dx dy$$

où $\text{int}(\gamma_i)$ désigne l'intérieur de γ_i . D'après la remarque précédente

$$\int_0^{T_i} \text{div}(\gamma_i(t)) dt \neq 0$$

Ce qui termine la preuve. ■

Exemple 3.3.1 Pour $a_1 = -50$, $b_2 = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.5$ et $b_1 = c_1 = a_2 = c_2 = 0$, le système (3.3.1) devient:

$$\begin{cases} x' = x (-50x ((y - 2)^2 + ((x - 2.5)^2 - 1) ((x - 2.5)^2 - 4)) + y (2y - 4) \\ y' = y (2y ((y - 2)^2 + ((x - 2.5)^2 - 1) ((x - 2.5)^2 - 4)) - 2x (x - 2.5) (2x^2 - 10x + 7.5) \end{cases}$$

3.3. L'existence de deux cycles limites algébriques pour une classe de systèmes d'ordre six

Les deux conditions (*) sont vérifiées, alors le système admet les ovals de la courbe

$$((y - 2)^2 + ((x - 2.5)^2 - 1) ((x - 2.5)^2 - 4)) = 0$$

comme deux cycles limites hyperboliques instables, car

$$\begin{aligned} \int_0^{T_i} \operatorname{div}(\gamma_1(t)) dt &= - \int_{0.5}^{1.5} \int_{2 - \sqrt{-((x-2.5)^2-1)((x-2.5)^2-4)}}^{\sqrt{-((x-2.5)^2-1)((x-2.5)^2-4)}+2} \frac{1}{xy} (2y - 50x) dy dx \\ &= 64.624 > 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{T_i} \operatorname{div}(\gamma_1(t)) dt &= \int_{a+\alpha}^{a+\beta} \int_{b - \sqrt{(\alpha^2 - (x-a)^2)((x-a)^2 - \beta^2)}}^{b + \sqrt{(\alpha^2 - (x-a)^2)((x-a)^2 - \beta^2)}} \left(\frac{b_2 y + a_1 x}{xy} \right) dy dx \\ &= 68.558 > 0 \end{aligned}$$

Conclusion générale

Le contenu de ce mémoire porte sur l'étude des cycles limites de certaines classes des systèmes différentiels planaires non linéaires de Kolmogorov. Plus précisément, on a étudié trois classes différentes où on a montré que celle d'ordre trois n'admet pas de cycles limites algébriques, la quartique en admet un seul et enfin celle d'ordre six en admet deux en donnant l'expression explicite des cycles limites existants. Dans les travaux futurs, on pensera nchallah aux cycles limites non algébriques.

Bibliographie

- [1] A. Bendjeddou, A. Berbache and R. Cheurfa, A class of Kolmogorov system with exact algebraic limit cycle, *Int. J. Diff. Equa. Appli*, Volume 14 No.3 2015, 159-165
- [2] A. Bendjeddou and R. Cheurfa, Cubic and quartic planar differential systems with exact algebraic limit cycles, *Elect. J. of Diff. Equ.*, no15 (2011), 1-12.
- [3] C.J. Christopher, J. Llibre, Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems, *Ann. Differential Equations* 16 (2000) 5–19.
- [4] F. Dumortier, J. Llibre and J.C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*, Universitext, Springer–Verlag, 2006.
- [5] P. Gao, Hamiltonian structure and first integrals for the Lotka–Volterra systems, *Phys. Lett. A* 273 (2000) 85–96.
- [6] A. Gasull, H. Giacomini and J. Torregrosa, Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems. Preprint, 2005.
- [7] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, On the nonexistence, existence, and uniqueness of limit cycles, *Nonlinearity* 9 (1996), 501–516.
- [8] Jaume Giné, Maite Grau, A note on: “Relaxation oscillators with exact limit cycles”, *J. Math. Anal. Appl.* 324 (2006) 739–745
- [9] D.W. Jordon et P. Smith, *nonlinear ordinary differential equations*, Oxford applied mathematics and computing science series, second edition 1987.

- [10] J. Llibre T. Salhi, On the dynamics of a class of Kolmogorov systems, *Applied Mathematics and Computation* 225 (2013) 242-245.
- [11] J. Llibre and Y. Zhao, *Algebraic Limit Cycles in Polynomial Systems of Differential Equations*, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007), 14207-14222.
- [12] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Third edition. *Texts in Applied Mathematics*, 7. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [13] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems, Qualitative theory of planar differential systems*, Universitext, Springer-Verlag, 2006
- [14] Yanqian Ye. *Theory of Limit Cycles*, *Transl. Math. Monogr.*, vol. 66, Amer. Math. Soc., Providence, 1984.