Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de M'hamed Bougerra
Faculté Des Siences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présénteé pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques financières

Par

DAIBECHE Amina et MEKLA Naima

THÈME

Valorisation d'options Théorie-Simulation

Soutenu, le ../ 07 /2017 devant le jury composé de:

Mme.	F.Gatt	*U.M.B.B*	Présidente
Mr.	K.Khaldi	*U.M.B.B*	Promoteur
Mme.	S.Meddahi	*U.M.B.B*	Examinatrice

Remerciements

Nous adressons en premier lieu ma reconnaissance à *ALLAH* le tout puissant, de m'avoir donné la force, le moral et la santé de bien terminer ce modeste travail.

Nous tenons tout d'abord à remercier particulièrement notre prometeur Monsieur *K.Khaldi,* pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre bienveillance

Nous désirons aussi remercier, Madame *Chemerik*, enseignante à l'université de M'Hamed Bougara Boumerdes, pour l'honneur qu'elle nous a fait en acceptant de présider ce jury.

Nous remercions également Madame *Meddahi*, enseignante à l'université de M'Hamed Bougara Boumerdes, pour avoir accepter d'évaluer ce travail et participer à ce jury.

Sans oublier, nous remercions tous les enseignants du département des mathématiques pour leur soutient inestimable et leur instruction,.

Un grand remerciement à Madame *Imene Baraitame* qui m'a aidé et soutenue jusqu'à la fin.

Notre remerciement s'adresse notamment à nos deux familles, pour leur amour inconditionnel et leur précieux soutient. Sans elles nous ne serions pas la aujourd'hui.

Nous remercions aussi tous nos amis pour l'amitié dont ils font preuve.

Dédicaces

A **Dieu** ,source de toute vie et tout amour,

A celui qui m'a appris la vie, symbole de courage, source de mes inspirations « mon chére **pére** »

A celle qui m'a donnée la vie, symbole de fierté, et de patience « ma trés chére **mére**».

A mes fréres **Walid, Zino,Yzid** , et toute ma famille, **Malika, Rachida, Djouhar, Nourdine, Rachid,**

Mouhamed, Said, Imene, Aicha, Yousra, Dodo, Amine.

Une pensée à ma **grande mére** et **ma tante** paix à leurs âmes.

A tous mes amis et ceux que j'ai partagé avec eux des beaux moments.

Je dédie ce travail.

Amina *Daibeche*

A ma chère **mère**,A mon cher **père**,qui n′ont jamais cessé,de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m′épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

A mes frères **Abderamane**, **Walid**, **Ilyes** et **Athmane**,

A ma soeur **Assia ,** je te souhaite une vie plein de joie,réussite et sérénité.

A mes grands-parents **Rachid** et **Zahra**,vous avez toujours été présents pour les bons conseils,votre affection et votre soutien m'ont été d'un grand secours au long de ma vie personnelle.

A mon trés chere **Rédha**,qui m'a aidé et supporté dans les moments difficiles je te souhaite un avenir remplisde bonheur et de succés.

A ma chère binôme **Amina**, pour sa entente et sa sympathie,

A mes chères ami(e)s **Kenza, Lila, Ahlem,**

Said et Samir

.A toute ma famille,A tous mes autres ami(e)s,A toute

la promotion **Mathématique financière 2017**.

A tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment.

Je dédie ce travail.

Naima *Mekla*

Table des matières

Introduction générale

Dans le monde d'aujourd'huit, la finance joue un rôle des plus importants et est parfois à l'origine des crises mondailes. Avec le developpement des marchés financiers, l'étude des options devient un véritable enjeu et n'a pas cessé de prendre de l'importance au cours des dernières années. Il apparait alors important que la finance soit basée sur des modèles solides permettant d'évaluer les risques et les prix

Les spécialistes de le finance ont en effet recours, depuis des années, à des outils mathématiques de plus en plus sophistiqués (martingales, intégrale stochastique,...) pour la description de phénomènes et la mise au point de méthodes de calcul.

Les nombreuses opérations d'achat ou de vente ne sont pas prévisibles, font souvent intervenir des éléments n'appartenant pas à l'historique et modifient le cours de l'actif. Celui - ci est souvent représenté par un processus stochastique que l'on modélise à l'aide d'un mouvement brownien.

Notre objectif portera sur la méthode de calcul de la prime par le modèle binomial (1979) à temps discret pour l'option européenne et américaine. Puis sur le modèle de Black-Scoles-Merton que s'est imposé comme référence depuis (1973), modéle à temps continu, devenu la référence en termes de modéle d'évaluation des options européennes, mais plusieures types de produits dérivés on vu le jour Cependant, dans la plupart des cas , il est difficile de trouver des formules exactes de valorisation de ces options comme les options américaines. Les techniques de simulations Monte Carlo fournissent une approche assez accessible d'évaluation de cette option .

Ce mémoire est présenté comme suit:

Le premier chapitre, est consacré à l'étude de quelques notions de calcul stochastique, la définition d'un mouvement brownien où nous énumérerons ses différents propriétés, le calcul d'Itô, l'integrale stochastique qui nous serons utiles tout au long de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, on présentera des différentes définitions en finance, nous commencerons par donner l'explication des produits dérivés, contrats (les forward, les futures, les swaps), puis nous allons plus loin sur les contrats optionnels (les contrats les plus courants).

Le troixiéme chapitre sera consacré à la valorisation de l'option européenne qui se fait le biais du modéle binomial et du modéle de Black-Scholes, et les liens entre l'évaluation des options américaines et le probléme d'arrêt optimal dans le cadre des modèles discrets.

Finalement, le quatrième chapitre, nous présonterons les méthodes et graphes de simulation. Ainsi l'approximation des solutions des équations différentielles stochastiques.

Ensuite, nous allons procéder de la façon suivante:

Dans un premier temps, nous débuterons la simulation de la valeur de prime avec les deux modèles étudiés pour les options de type européen.

Dans un deuxiéme temps,nous allons simuluer les options américaines en utilisant la techenique des régression linéaires des moindres carrés de *Long staff et Schwartz*(2001)

Toute cette simulation se fera par le programme **MATLAB**.

Chapitre 1

Notions de calcul stochastiques

Dans ce chapitre,nous allons étudier les principales notions de calcul stochastique qui est une extension du calcul différentielle et intégrale classique, dans laquelle les processus à temps continu remplaçent les fonction,et les martingales, le mouvement brownien qui nous seront utiles tout au long de ce travail.

1.1 Processus stochastique

1.1.1 Espace de probabilité filtré

Définition 1.1.1 *une tribu ($\sigma-$algebre en Anglais) sur Ω est une famille de parties de Ω, contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable..Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu.*

Exemple 1.1.1 *La tribu borélienne de $\mathbb{R}$.C'est la petite tribu contenant tous les intervalles ouverts (ou fermées, ou ouverts à droite, fermés à gauche...). On la note $B_{\mathbb{R}}$ aux d'autre maniére $B(\mathbb{R})$est la tribu engendrée par la famille des intervalles:*

$$\mathbf{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\ ([a,b],\quad [a,b[,\ \ ]a,b],\ \ ]a,b[\ ,a \in, \mathbb{R}\ b \in \mathbb{R}).$$

Définition 1.1.2 *Une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, F, \mathbb{P})$ est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous tribus de F.*

La tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t. On dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour chaque t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

On dit que $(\Omega\ , F, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré.

Espérance conditionnelle

Nous fixons un espace de probabilisé $(\Omega, F, \mathbb{P})$ et une sous-tribu $F_1 \subset \mathcal{F}_t$

Définition 1.1.3 *Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une variable aléatoire réelle telle que $E(|X|) < \infty$. Si F_1 une sous-tribu de $\mathcal{F}$, alors l' espérance conditionnelle de X sachant F_1, notée $E(X/F_1)$, est tout variable aléatoir .Y satisfaisant les deux conditions:*

1-$Y \subseteq F_1$c'est-à-dire Y et F_1 mesurable.

2-$\int\limits_A XdP = \int\limits_A YdP$,Pour tout, $A \in F_1$

1.1.2 Processus stochastique à temps continu

Définition 1.1.4 *Un processus stochastique (ou aléatoire) à temps continu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est une famille de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, F, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable $\mathbb{R}$ et indicée par un paramétre $t \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} X : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R} \\ (t, w) \to X(t, w) = X_t(w) \end{cases}$$

Remarque 1.1.1 •*Dans la pratique l'indice t représente le temps*

• *Pour t fixé, $X(t) = X(t, .)$ est une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, F, \mathbb{P})$.*

•*Pour w fixé, $X(w) = X(., w)$ est une réalisation ou une trajectoire du processus stochastique*

1.1.3 Processus adapté

On dit que le processus $(X_t)_{t\succeq 0}$ est adapté (à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\,\geq\,0}$) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.

1.1.4 Martingale à temps continu

Définition 1.1.5 *Soit* $(\Omega, F, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathcal{F}_t)_{t\,\geq\,0}$ *une filtration de cet espace. Le processus stochastique* $(M_t)_{t\succeq 0}$ *est une martingale à temps continu si:*

$\bullet \forall t \geq 0 \;\; E(|M_t|) < +\infty;$

$\bullet \forall s, t \geq 0$ *tel que* $s < t$, M_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable;*

$\bullet \forall s, t \geq 0$ *tel que* $s < t$, $E(M_t/F_s) = M_s$ *pour* $0 \leq s \leq t$;

$\bullet\, (M_t)_{t\,\geq\,0}$ *est une sur- martingale si pour tout* $s \leq t$, $E(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s$;

$\bullet\, (M_t)_{t\,\geq\,0}$ *est une sous- martingale si pour tout* $s \leq t$, $E(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s$.

Proposition 1.1.1 *On déduit de cette définition que, si* $(M_t)_{t\succeq 0}$ *est une martingale ,alors* $E(M_t) = E(M_0)$, *pour tout* t.

1.1.5 Temps d'arrêt

Définition 1.1.6 *On appelle temps d'arrêt une variable aléatoire* $\tau : \Omega \to R^+ \cup \{\infty\}$ *telle que* $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$,$\forall\; t \in R^+$

1.1.6 Processus gaussien

Variables gaussiennes

Définition 1.1.7 *Une variable aléatoire* X *suit la loi normale standard* $N(0,1)$ *si elle admet pour densité:*

$$t : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

De façon générale, une variable aléatoire X *suit la loi normale* $N(m, \sigma^2)$ *si elle admet pour densité:*

$$t : \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}$$

Vecteurs gaussiens

Définition 1.1.8 *Un vecteur aléatoire* $X = (X_1, ..., X_n)$ *est gaussien si toutes les combinaisons linéaires de ses coordonnés* $\langle a, X\rangle = a_1X_1 + ... + a_nX_n$ *suivant une loi gaussienne dans* $\mathbb{R}$ *(pour tout* $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Processus gaussiens

Définition 1.1.9 *Un processus X est dit gaussien, si toute combinaison linéaire finie de $(X_t)_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire gaussienne, cest-à-dire:*
$\forall n, t_i, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ *est une variable aléatoire réelle gaussienne.*
Un processus gaussien est caractérisé par son éspérance et sa covariance:

$$\begin{cases} E\left(X_t\right) = m_t \\ cov\left(t,s\right) = E\left[\left(X_t - m_t\right)\left(X_s - m_s\right)\right] \end{cases}$$

1.2 Mouvement brownien

Le mouvement brownien est un processus stochastique (ou fonction aléatoire du temps) qui a été introduit par l*e botaniste R.Brown au XIXème siècle* pour modéliser les mouvements de grains de pollen en suspenssion.Par la suite ce processus a été notamment étudié par *A. Enstein, M. Smoluchowski, M. Winner et P. Lévy*.

Un exemple particulièrement important de processus stochatique est le mouvement brownien.Il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et de taux d'intérèt, la plupart des modèles financiers reposent sur des équations différentielles stochastiques ‹‹*dirigées*›› par un mouvement brownien.Ces équations differentielles stochastiqes sont aussi utilisées pour modéliser l'évolution de phynomène en physique,biologie ou encore en économie.

Définition 1.2.1 *On appelle mouvement brownien un proccessus stochastique à valeurs réelles,$(W_t)_{t\geq 0}$ qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que:*
· *continuité: $\mathbb{P}$ p.s. la fonction $s \rightarrow W_s$ est une fonction continue.*
· *indépendance des accroissements: Si $s \leq t, W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u, u \leq s)$.*
·*stationnarité des accroissements: si $s \leq t$,la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $W_{t-s} - W_0$.*

Théorème 1.2.1 *Si $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien ,alors $W_t - W_0$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne rt et de variance $\sigma^2 t$, r et σ étant des constantes réelles.*

1.2.1 Mouvement brownien standard

Un mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ est dit standard si seulement si:

• $W_0 = 0$ $\mathbb{P}$ $p.s$

• Les trajectoires de W sont continues.

• la variable aléatoire W_t est normal $N(0,t)$, $[E(W_t^2)]$.

• W est à accroissements indépendants et stationnaires (pour . $0 \leq s < t \leq u < v$ les accroissements $W_{(t)}- W_{(s)}$ et $W_{(v)}- W_{(u)}$ sont indépendants)

•$\forall s, t \geq 0$ tel que $0 \leq s < t$, l'acroissements $W_{(t)}- W_{(s)}$ suit une loi normale $N(0, t-s)$.

Théorème 1.2.2 *Si $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, si $0 \leq t_1 < .... < t_n$,alors $(W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

Démonstration. Soit $0 \leq t_1 < .... < t_n$,alors le vecteur alééatoire

$$(W_t, W_{t_2} - W_{t_1,} ....., W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$$

est composé de variables alatoires gaussiennes(d'aprés théorème 1.2.1) et indépendantes (par définition de mouvement brownien), ce vecteur est donc un vecteur gaussien. Il en est meme pour $(W_{t_1}, ..., W_{t_n})$. ■

Proposition 1.2.1 *On donne des exemples de martingales que l'on peut construire à partir du mouvement brownien.Si $(W_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$ movement brownien standard ,alors :*

• *(W_t) est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*

•*$(W_t^2 - t)$ est une $\mathcal{F}_t-$ martingale.*

•*$(exp(\sigma W_t - (\frac{\sigma^2}{2})t)$ est une $\mathcal{F}_t-$ martingale.*

1.2.2 Mouvement brownien avec dérive

on appelle mouvement brownien avec dérive un processus stochastique de la forme:

$$\mu t + \sigma W_{t,} t \geq 0$$

Où:

μ, σ sont deux constantes qui représentent respectivement le coefficient de diffusion et $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard, vérifiant:

$\cdot W_0 = 0$

$\cdot W_t$ suit une loi normale de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$: $N(\mu t, \sigma\sqrt{t})$

$\cdot(W_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements stationnaires. Ainsi $W_t - W_s$ suit une loi normale de moyenne $\mu(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s)$: $N(\ \mu(t-s), \sigma\sqrt{t-s})$.

$\cdot(W_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements independants.

1.2.3 Mouvement brownien géométrique

un processus stochastique$(X_t)_{t\geq 0}$ est dit mouvement brownien géométrique de paramètres $\mu\ et\ \sigma$ s'il s'écrit :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{1.2.1}$$

la solution de (1.2.1) s'écrit:

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$$

Ce modéle est appelé modéle brownien géométrique.

1.2.4 Processus de winner et bruit blanc

On dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est un bruit blanc d'éspérance nulle et de variance σ^2 si et seulement si:

$$\begin{cases} E(X_t) = 0, \forall t \geq 0. \\ \gamma_x\,(h) = cov(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 & si \quad h = 0 \\ 0 & si \quad h \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Si les variables aléatoires X_t sont indépendantes et identiquement distribuées, on ne peut jamais calculer la valeur $X_t(w)$ d'un bruit blanc X_t mais il est possible de le rencontrer comme intgrale sous la forme:

$$\int_0^t A(\alpha)\ X_\alpha\ d\alpha$$

$X_\alpha d\alpha$ est remplacé par la différentielle stochastique d'un processus à accroissements indpendants et stationnaires dW_α dont la mesure est positive associée et la mesure de **Lesbesgue** et l'integrale devient une intégrale stochastique de Winner :

$$\int_0^t A(\alpha)\ X_\alpha\ d\alpha = \int_0^t A(\alpha)\ dW_\alpha$$

1.3 Intégrale stochastique et calcul d'Ito

1.3.1 Construction de l'intégrale stochastique

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien standard sur un espace probalisé filtré $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$.Nous allons donner un sens précis à l'intégrale $\int_0^t H(s)dW_s$ pour un processus $H = (H_t)_{t\geq 0}$ adapté à la filtartion $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Définition 1.3.1 *On appelle processus élémentaire tout processus adapté $(H_t)_{t\geq 0}$ de la forme :*

$$H_t(w) = \sum_{i=1}^n \phi_i 1_{[t_{i-1},t_i[}(t).$$

Où:

$0 = t_0 < t_1 < .... < t_n = t$ *sont des instants fixés et les* ϕ_i *sont des variables aléatoires réelles mesurables et bornées.*

Les trajectoires d'un processus élémentaire sont des fonctions en éscalier,constantes sur les intervalles $[t_{i-1},t_i[$ *nulles aprés* $t_{n.}$

On appelle intégrale stochastique d'un processus élémentaire $(\phi_t)_{t\geq 0}$ *l'éxpression suivante:*

$$\int_0^t H(s)dW_s = \sum_{i=1}^n \phi(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}).$$

Proposition 1.3.1 *Si $(H_t)_{t\geq 0}$ est un processus élémentaire :*

$\cdot\ E(\int_0^t H_S dW_s) = 0$ *,est une $\mathcal{F}_t$ martingale continue.*

$\cdot\ E\left(\left(\int_0^t H_S dW_s\right)^2\right) = E(\int_0^t H_s^2 d_s)$*, appellé formule d'isométrie.*

$\cdot\ E\left(\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t H_s dW_s\right|^2\right) \leq 4E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right).$

1.3.2 Processus d'Ito

soient $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré et $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien.Un processus d'itô est un processus à temps continu $(X_{t,}t \in \mathbb{R}_+)$ à valeur dans $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire pour la forme:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

Où encore:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

avec:

· X_0 est $\mathcal{F}_0$ mesurable.

· $(\mu_t)_{t\geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ des processus adaptés à $\mathcal{F}_t$.

· $P(\int_0^t |\mu_s| \, d_s < \infty) = 1.$

· $P(\int_0^T \sigma_s^2 d_s < \infty) = 1.$

1.3.3 Lemme d'itô

soit $(X_0)_{\ 0\leq t\leq T}$ un processus d'Ito de la forme:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \qquad t \in [0.T]$$

$\mu_s et\ \sigma_s$ sont des fonctions qui satisfont:

$$P\left\{\int_0^T |\mu_s| \, ds < \infty\right\} \text{ et } P\left\{\int_0^T |\sigma_s| \, ds < \infty\right\} = 1$$

Théorème 1.3.1 *.formule d'Ito:*

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to f(x)$ .est une fonction deux fois continûement différentiable. On a:

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f_x'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(X_s) \ d\left\langle XX \right\rangle_s$$

Où par définition:

$$\begin{aligned} d\langle X,X\rangle_t &= \int_0^t \sigma_s^2 d_s. \qquad (1.3.1)\\ \int_0^t f_x^{'}(X_s)dX_s &= \int_0^t f_x^{'}(X_s)\mu_s ds + \int_0^t f_x^{'}(X_s)\sigma_s dW_s \end{aligned}$$

Exemple 1.3.1 *Si* $f(x) = x^2$ *et* $X_t = W_t$,

On a $W_t = \int_0^t dW_s$, *par identification avec l'equation* (1.2.1) $\mu_s = 0$,$\sigma_s = 1$, *d'ou:*

$$\langle X,X\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 d_s = t.$$

Par ailleurs:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\\ f^{'}(x) &= 2x\\ f^{"}(x) &= 2. \end{aligned}$$

On utilise la formule (1.3.1) *on obtient:*

$$\begin{aligned} \int_0^t f^{'}(X_s)dX_s &= \int_0^t f^{'}(X_s)\mu_s ds + \int_0^t f^{'}(X_s)\sigma_s dW_s.\\ &= \int_0^t 2W_s dW_s. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s)d\langle XX\rangle_s = \frac{1}{2}\int_0^t 2d_s = t$$

Et donc:

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + t \iff W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s dW_s.$$

comme $E(\int_0^t W_s^2 dW_s) < +\infty$,*on retrouve le fait que* $W_t^2 - t$ *est une martingale.*

Proposition 1.3.2 ***(Formule d'intégration par partie)*** *soient X_t et Y_t deux processus d'Ito:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

Et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \mu_s^{'} ds + \int_0^t \sigma_s^{'} dW_s.$$

Alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \; dY_S + \int_0^t Y_s \; dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

Proposition 1.3.3 *avec la notation*

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s \sigma_s^{'} ds.$$

Démonstration. On a d'après la formule d'Ito :

$$\begin{aligned} (X_t + Y_t)^2 &= (X_0 + Y_0)^2 + 2 \int_0^t (X_s + Y_S) d(X_s + Y_s) + \int_0^t (\sigma_s + \sigma_s^{'})^2 ds \\ X_t^2 &= X_0 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \int_0^t \sigma_s^2 ds \\ Y_t^2 &= Y_0 + 2 \int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t \sigma_s^{'2} ds. \end{aligned}$$

D'ou, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes,

$$X_t + Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t \sigma_s \sigma_s^{'} ds$$

■

1.4 Équation différentielles stochastiques

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stchastique.c'est une équation de la forme:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)\ ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)\ dW_s \tag{1.4.1}$$

Où sous forme condensée:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t)\ dt + \sigma(X_t, t)\ dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Où: $x \in \mathbb{R}$, μ, σ sont deux fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et W un mouvement brownien.

La fonction μ est appelée coefficient de dérive,alors que σ est appelée coefficient de diffusion

Ces équations permettent de construire la plupart des modéles d'actifs utiles en finance,aussi bien lorsque l'on cherche à modéliser des actifs que des taux d'intérêt.

1.4.1 Existence et unicité des solutions des EDS

si μ et σ sont des fonctions continues,telles qu'il existe $K < \infty$,avec:

- Condition de Lipchitz globale:

$$|\mu(x,t) - \mu(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq K|x-y|$$

pour tous les$x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$

- Condition de croissance:

$$|\mu(x,t)| + |\sigma(x,t)| \leq K(1 + |x|)$$

pour tous les$x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$

Alors l'EDS (1.4.1) admet ,pour toute condition initiale X_0 de carré intégrable,une solution $(X_t)_{t\in[0.T]}$ presque sûrement continue.cette solution est unique dans le sens que si $(X_t)_{t\in[0.T]}$ et $(Y_t)_{t\in[0.T]}$ sont deux solutions presque sûrement continues,alors:

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t| > 0\right\} = 0$$

Solution forte Une solution forte consiste à trouver un processus stochastique X existant sur le même espace de probabilité filtré$(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ que le mouvement brownien satisfaisant l'équation (1.4.1).

On dit que la solution forte est unique si lorsque $(X_t, t \geq 0)$ et $\left(\tilde{X}_t, t \geq 0\right)$ sont deux solutions fortes de la même équation $P\left(X_t = \tilde{X}_t, t \geq 0\right) = 1$.

Solution faible Nous sommes en présence d'une solution faible si nous pouvons construire:

•Un espace probabilisé filtré $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P}\right)$.

•Un $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P}\right)-$ mouvement brownien standard $\left(\tilde{W}, t \geq 0\right)$.

•Un $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P}\right)-$processus stochastique $\left(\tilde{X}_t, t \geq 0\right)$ tel que:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu\left(\tilde{X}_s\right) \, ds + \int_0^t \sigma\left(\tilde{X}_s\right) \, d\tilde{W}_s \ .$$

1.5 Changement de probabilté

1.5.1 Théoréme de Girsanov

Soit $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré,dont la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard $(W_t)_{0\leq t\preceq T}$ et soit $(\Theta_t)_{0\leq t\preceq T}$ un processus adapté vérifiant $\left[\int_0^T \Theta_s^2 ds < \infty\right]$ $p.s$ et tel que le processus $(L_t)_{0\leq t\preceq T}$ défini par:

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \Theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_s^2 ds\right).$$

Soit une $\mathcal{F}_t-$martingale,alors il existe une probabilté $P^{(L)}$ de densité L_t équivalente à P sous laquelle le processus $(B_t)_{0\leq t\preceq T}$ défini par:

$$B_t = W_t - \int_0^t \Theta_s ds.$$

est un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien standard.

Chapitre 2

Le probléme des options

Les produits dérivés sont des instruments financiers qui portent sur des actifs (actions, indices,matières premières, devises...). Ils n'évoluent donc pas par eux-mêmes, mais en fonction de ces actifs, appelés ***sous jacents ou supports****, dont ils dérivent.Un produit dérivé financier peut se définir de façon très générale comme un contrat financier négociable portant droit sur un autre actif. En d'autre termes, c'est « un contrat dont la valeur dépend (ou dérive) de celle d'un actif ou d'un indice sous-jacent ».*
Un produit dérivé est un instrument financier :
· dont la valeur fluctue en fonction de l'évolution du taux ou du prix d'un produit appelé sous jacent;
· qui ne requiert aucun placement net initial ou peu significatif(ils sont des contrats,donc ils n'ont pas d'existence propre).
Il convient de distinguer trois types de produits dérivés : les contrats à terme (de type Forward et de type Futures), les Swaps et les contrats optionnels (les Options). Ils sont soit échangés sur des marchés de gré à gré,soit négociés sur des marchés organisés.

2.1 Les contrats à terme

2.1.1 Les forward

Historiquement, les premiers produits dérivés ont été des transactions à terme de gré à gré ou des échanges sur un marché non organisé (appelées en anglais : *Forward*), c'est-à-dire l'engagement ferme de réaliser dans l'avenir une transaction, achat ou vente à une échéance future prédéterminée pour un prix prédéfini,et pour une quantité données. Tous les trois fixés au départ, sur l'actif sous-jacent.

Définition 2.1.1 *Un forward est un contrat entre deux contreparties dans lequel l'une des contreparties s'engage à vendre et l'autre à acheter un actif sous-jacent. Le prix et les autres caracteristiques du contrat sont donc déterminés à la signature mais la livraison et le paiement ont lieu à l'echeance.*

.On dit que la partie qui s'engage à acheter l'actif sous-jacent a une position longue, et la partie qui s'engage a vendre a une position courte. Si à la date d'échéance,le prix de l'actif support au contrat est supérieur au prix forward, l'acheteur du contrat réalise un profit ; dans le cas contraire il réalise une perte.Ce qui veut dire que l'acheteur du contrat sera gagnant si le prix du contrat Forward monte par rapport au prix initial du contrat.Les produits forward permettent de se couvrir contre le risque de taux, le risque de change...... etc. Ils reposent sur des sous-jacents comme les taux de change, les taux d'intérêt, les actions , les obligations, les matières premières, etc....

2.1.2 Les futures

Le développement des transactions de gré à gré a amené, dans le souci d'assurer la sécurité des règlements/livraisons, la création des marchés à terme organisés. On y négocie des engagements de livraison standardisés à des échéances également standardisées. Bien que les contrats à terme de type *Futures* ayant pour actif support des matières premières existent depuis 1860, les contrats à terme d'instruments financiers ne sont apparus que beaucoup plus récemment, en1979 pour les premiers d'entre eux, les contrats à terme de devises.

Définition 2.1.2 *Comme le contrat forward, un contrat futures est un contrat à terme entre deux parties s'engageant à acheter ou à vendre une quantité de l'actif sous-jacent à une date future pour un prix prédéterminé. Un future est un contrat qui permet de réaliser les mêmes objectifs de couverture présenté dans les forward, mais:*

- *Qui est coté dans* ***un marché organisé:*** *Le role du marché est d'assurer la liquidité et d'éliminer le risque de contrepartie. La liquidité est assurée puisque les contrats sont* *standardisés :* ***le nombre de différentes dates de livraison est limité*** *et les sous-jacents sont d'écrits de maniére précise.*

- *Nécessitent un échange d'une somme appelée* ***marge à la signature du contrat***

2.2 Les swaps

Ces contrats de gré à gré permettent d'échanger un sous-jacent à un prix fixe, tout le long d'un échéancier donné. Typiquement, par un swap de taux d'intérêt, on échangera le paiement de taux variable contre un taux fixe, sur un nominal donné.

2.3 Les contrats optionnels (Les options)

Définition 2.3.1 *Un contrat d'option donne à son détenteur (ou acheteur) le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre, à (ou jusqu'à) une échéance future (date d'exercice), une quantité de l'actif sous-jacent à cette option, à un prix prédéfini (appelé prix d'exercice ou strike price). L'option elle-même a un prix, appelé prime (permium). L'acheteur de l'option acquiert un droit et paie en contre partie une prime à un vendeur d'option qui ura une obligation.*

2.3.1 Les élement du contrat d'option

L'actif sous jacent

L'actif sous-jacent peut être,par exemple **:**

- *Des actions (une action cotée en bourse) ;*
- *Des indices ;*
- *Une unité négociable d'une matière première (blé, pétrole, cuivre, ...) ;*
- *Un taux de change .*

Date de maturité (Échéance)

La date d'exercice est le dernier jour auquel l'option peut être exercée; ainsi, passé cette date, l'option perd toute sa valeur c'est-à-dire **une date de fin de validité du contrats**

Par ailleurs, il faut distinguer des différents types d'options selon le mode (date) d'exercice:

- Européenne: l'exercice (le droit d'achat ou de vente de l'actif sous-jacent) se fait à l'échéance uniquement.(à une date d'échéance future) à un prix déterminé ≪Strike ≫.

- Américaine: l'exercice (le droit d'achat ou de vente de l'actif sous-jacent) se fait jusqu'à l'échéance, l'option peut être exercée pendant toute la durée du contrat. (à la date T ou à toute date future antérieure à T). Le prix d'une option américaine est donc en général supérieur au prix de l'option européenne correspondante. La différence entre les deux prix s'appelle *la prime d'exercice anticipée (early exercice permium).*

Les options plus complexes, qu'on appelle les options exotiques, dont quelques exemples sont donnés ci-dessous:

- **Asiatique**: ce sont des options dont le sous-jacent est la moyenne des cours sur une période donné. Elles ont été introduites pour lutter contre la manipulation des cours au voisinage de la maturité.

- **Bermudienne**: le droit d'achat ou de vente peut s'exercer à des dates prédéfinies dans le contrat avant l'échéance ainsi qu'à l'échéance

Prix d'exercice (Prix de levée)

Le prix d'exercice est le prix auquel l'acheteur d'une option d'achat peut acheter l'actif sous-jacent ou le prix auquel le vendeur d'une option d'achat peut céder son actif durant la période de vie de l'option.

L'exercice/L'assignation

L'acheteur d'une option acquiert un droit d'acheter pour le call et de vendre pour le put et c'est lui qui va décider de faire valoir ou non ce droit (d'exercer) en fonction de la réalisation de ses anticipations.

Situation en cas d'exercice ou d'assignation (Acheteur et vendeur):

	Acheteur d'une option	Vendeur d'une option
Call	L'acheteur de call **décide** d'acheter le sous-jacent au prix d'exercice et paie la prime.	Le vendeur de call **doit** vendre le sous-jacent au prix d'exercice et reçoit la prime
Put	l'acheteur de put **décide** de vendre le sous-jacent au prix d'exercice et reçoit la prime	Le vendeur de put **doit** acheter le sous-jacent au prix d'exercice (s'il acheteur exerce son droit), et reçoit la prime

A quel moment est-il intéressant d'exercer son option ?

Call	Prix d'exercice <cours de l'action
Put	prix d'exercice > cours de l'action

La prime

la prime **(premium)** est le prix de l'option, une somme d'argent que l'acheteur verse définitivement au vendeur de l'option

Dans la suite du chapitre,on exposera uniquement les options européennes

2.4 Les types des options

En théorie, on distingue deux types d'options : les options d'achat (call) et les options de vente (put).

2.4.1 L'option d'achat

Le détenteur d'un call européen a donc le droit et non l'obligation d'acheter en T (la date d'échéance, ou de maturité), pour un prix d'exercice K, le sous-jacent qui vaut S_T. Il exercera donc ce droit si et seulement si $S_T > K$, auquel cas sa position vaudra En dehors du cours,si $S_T \leq K$ l'option sera abandonnée et la position aura une valeur nulle .

En T, La valeur du call est donnée par l'équation suivante:

$$C\left(S_T\right) = \max\left(0, S_T - K\right)$$

2.4.2 L'option de vente

Le détenteur d'un put européen a donc le droit et non l'obligation de vendre en T , pour un prix d'exercice K, le sous-jacent qui vaut S_T.Il exercera son option de vente si et seulement si $S_T < K$,auquel cas sa position vaudra $K-\ S_T$.

En T, La valeur du put est donnée par l'équation suivante:

$$P\left(S_T\right) = \max\left(0, K - S_T\right)$$

L'exercice de l'option en T peut également prendre la forme du paiement par le vendeur (appelé aussi l'émetteur) au profit du détenteur de l'option, d'un flux monétaire égal la valeur terminale de l'option, sans que cet exercice ne donne lieu à la livraison effective du support. Dans tous les cas, la valeur du flux terminal est appelée le *"pay-off"* de l'option.

Les deux graphiques ci-dessous montrent *les pay-offs* d'un call et d'un put, respectivement $C_T = \Psi_T^c$ et $P_T = \Psi_T^p$, en fonction de S_T. Notons que ces graphiques ne valent qu'en date de maturité T.

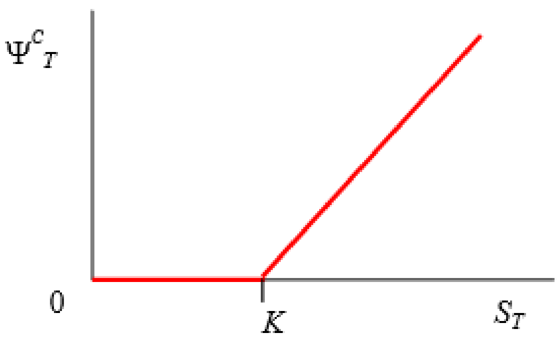


Figure 1- Payoff call

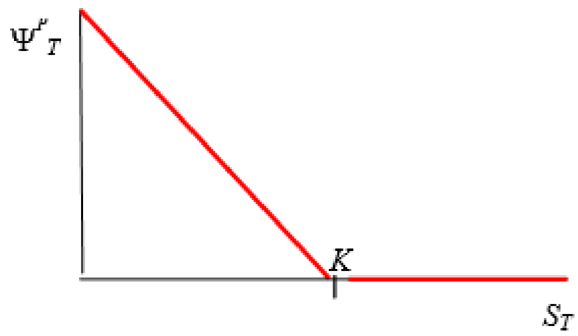


Figure 2 - Payoff put

2.5 Les stratégies de base

On adopte la notion suivante:

C_T : pay-off du call (le résultat du call à l'échéance T)

C_0 : la prime (ou $t = 0$)

2.5.1 L'achat de call

La stratégie: l'achat d'une telle option est une spéculation à la hausse des cours.

Exemple 2.5.1 *Le cours actuel de l'action de la société X est de* $69,16$ € ($S_t = 69.16$€)
Vous décidez d'acheter un call avec les caractéristiques suivantes:

• Prix d'exercice K : 80€

• Maturité T : $19 - sept - 2008$

• Prix du call C_0 : $0,55$€

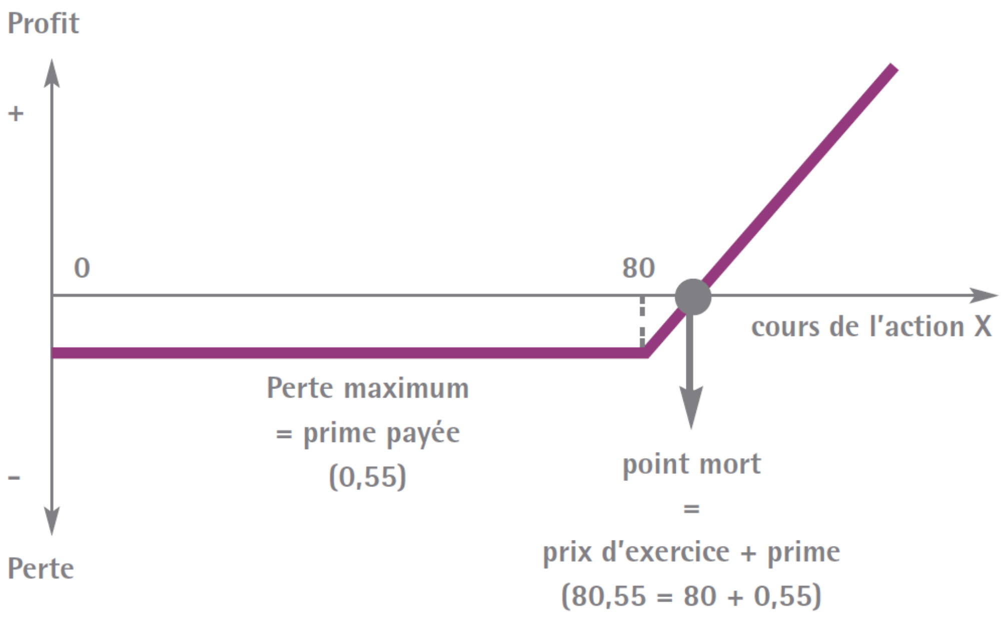
Avant l'échéance du 19 sept 2008:

• *Vous pouvez à tout moment revendre vos calls , avec une plus-value ou une moins-value en fonction de l'évolution du marché et du niveau de la prime des calls que vous avez achetés.*

A maturité le 19 sept 2008:

• ***1er cas*** *:le cours de l'action X a monté et se situe au-delà du prix d'exercice $(S_T > K)$, vous allez exercer vos calls donc l'acheteur acquérit la prime C_T au prix de 80€.*

• ***2ème cas :*** *le cours de l'action X a baissé et se situe au-dessous du prix d'exercice $(S_T > K)$, vous n'exercerez pas vos calls. Votre perte sera limitée au montant de la prime* *que vous avez versée soit* C_0.



2.5.2 Vente de call

La stratégie: spéculation à la baisse des cours.

Exemple 2.5.2 *Les actions de la société* X *côtent* $57,70$€.

Vous vendez un call de caractéristiques suivantes :

- *Prix d'exercice* K*: 55€*
- *Maturité* T *:* $19 - sept - 2008$
- *Prix de l'option* C_0 *: 5 €*

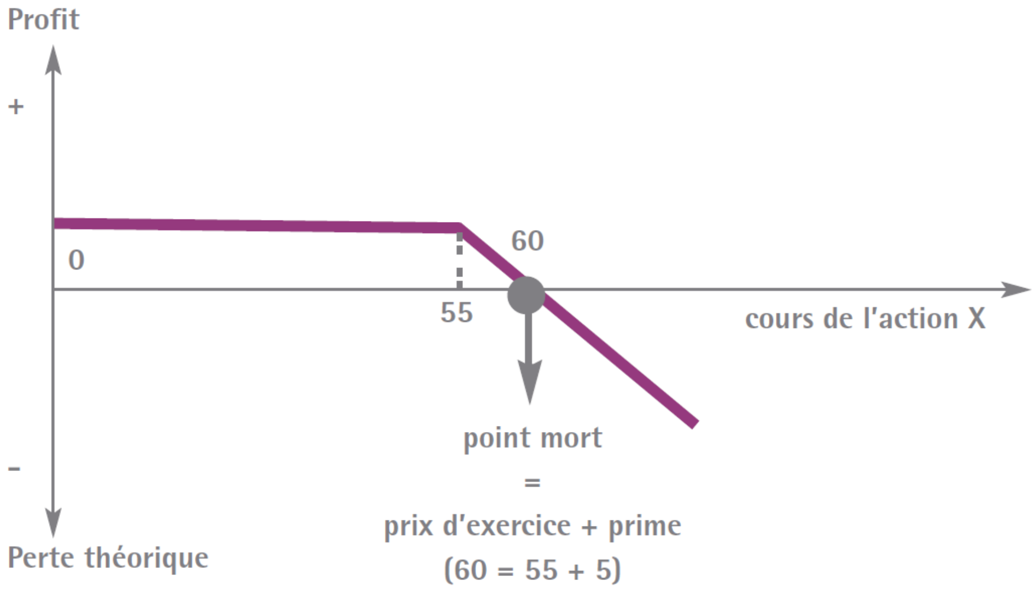
Avant l'échéance du 19 sept 2008:

Le vendeur peut vendre l'option et l'achéte aprés pour la deuxiéme fois

A maturité le 19 sept 2008:

- ***1er cas*** *: le cours de l'action* X *est passé au dessus de 55 euros. En tant que vendeur de call vous allez être assigné car l'acheteur de call a intérêt à exercer son droit d'achat.Comme vous aviez les titres en portefeuille et que le prix de* $55euros$ *représente un objectif de vente acceptable pour vous, vous aurez non seulement atteint votre but mais en plus vous avez encaissé le montant de la prime*
- ***2ème cas*** *: le cours de l'action* X *a baissé et passe en dessous du prix d'exercice de* 55

euros. En face de vous l'acheteur du call n'aura pas intérêt à exercer son droit et donc vous ne serez pas assigné. Dans ce cas vous conservez vos actions en portefeuille ainsi que la prime encaissée (l'émetteur de l'option d'achat (vendeur) enregistrera ainsi son gain maximum qui est représenté par l'inégalité du prix de cette option ≪prime C_0 ≫)



On adopte la notion suivante:

P_T : pay-off du put (le résultat du put à l'échéance T)

P_0 : la prime (ou $t = 0$)

2.5.3 Achat de put

La stratégie: *protection d'actions détenues en portefeuille contre une baisse limitée des cours.*

Exemple 2.5.3 *.L'action de la société Y vaut 16, 36€.*

Vous décidez d'acheter un put avec les caractéristiques suivantes:

- *Prix d'exercice K : 16 €*
- *Maturité T : 19 − sept − 2008*
- *Prix de l'option P_0 : 1, 13 €*

A maturité le 19 sept 2008

- *1er cas : l'action a baissé jusqu'à 10 €* $(S_T < K)$

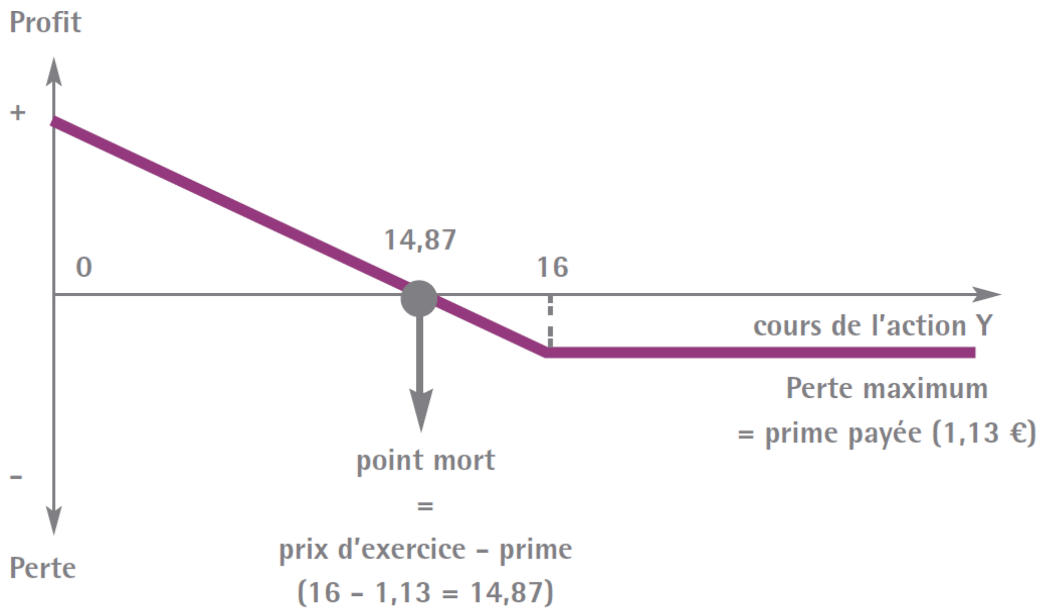
L'option s'est valorisée, et son prix à maturité est égal à la différence entre le prix d'exercice et le cours de l'action de la société Y

$$16€ - 10€ = 6€ \ldots\ldots (K - S_T)$$

• *Si vous souhaitez conserver vos actions de la société Y, vous revendez votre put sur lequel vous réalisez un bénéfice de:*

$$6€ - 1.13€ = 4.87€ \qquad (K - S_T) - P_0$$

• ***2ème cas :*** *le cours de l'action Y est monté au-delà de 16€ .*
La valeur de votre portefeuille s'est appréciée. Vous n'exercez pas votre option. Vous avez ***perdu*** *le montant de l**a prime** qui correspond au coût d'assurance de votre portefeuille contre une baisse du marché,(soit* 1.13€)



2.5.4 Vente de put

La stratégie: l'opérateur anticipe une hausse de l'actif sous-jacent.

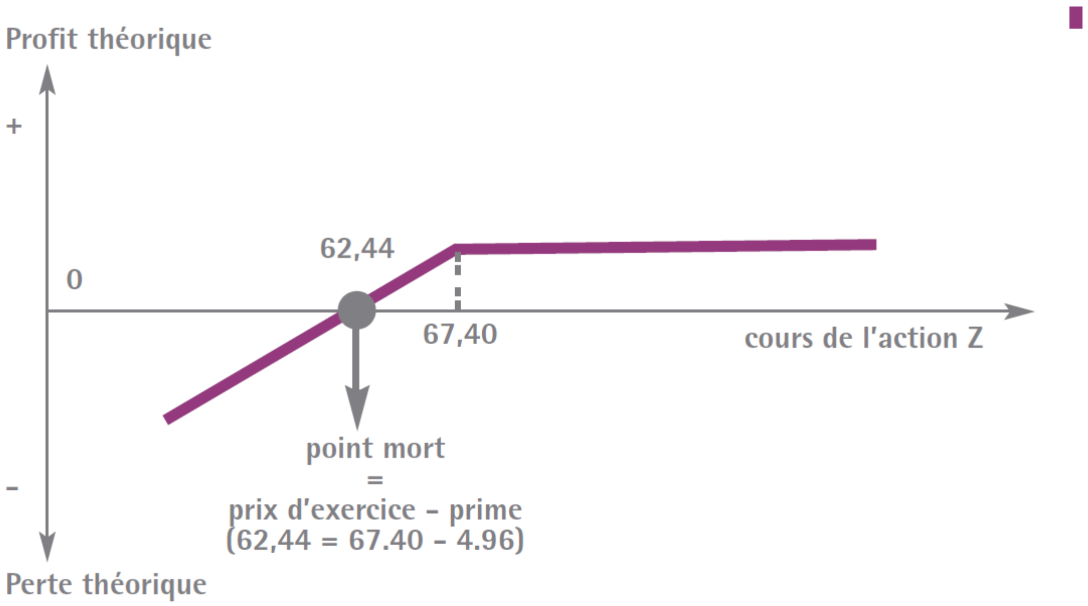
Exemple 2.5.4 *Les actions de la société Z cotent actuellement 66,09 €.*
Vous vendez un put de caractéristiques suivantes:

- *Prix d'exercice K : 67,40 €*
- *Maturité T : 19 − sept − 2008*
- *Prix de l'option P_0 : 4,96 €*

A maturité le 19 sept 2008:

● ***1er cas :*** *le cours de l'action Z est passé au dessus de 67,40 euros. En tant que vendeur de put vous n'allez pas être assigné car en face de vous l'acheteur de put n'a pas intérêt à exercer son droit de vente.Vous ne pourrez pas acheter les titres à 67,40 euros mais vous avez encaissé une prime. Donc si $S_T > K$ le gain du vendeur du put est P_0 .*

● ***2ème cas :*** *le cours de l'action Z a baissé et passe en dessous de 67,40 euros. En face de vous l'acheteur du put aura intérêt à exercer son droit de vente et donc vous pourrez acheter les titres de la société Z à l'objectif de prix que vous vous étiez fixé (67,40 euros).De plus vous avez encaissé une prime.Donc si $S_T < K$ le gain du vendeur du put est le gain* $(K - S_T + P_0)$



2.6 Les caractéristiques de prix

Le prix d'exercice fixé dans le contrat qualifie l'option suivant que ce prix d'exercice est supérieur, égale ou inférieur au cours du moment :

-Si à l'échéance le cours du sous-jacent est tel que l'exercice de l'option présente un intérêt pour son détenteur (par exemple, si ce cours est supérieur au prix d'exerice dans le cas d'un call, inférieur dans le cas d'un put), l'option est dite dans le cours ou ≪ *in -the-money*≫ (ITM).

-Si au contraire le prix du sous-jacent est tel que l'exercice de l'option ne présente aucun intérêt, l'option est dite en de hors de la monnaie ≪*out -of-the- money* ≫ ou hors du cours (OTM).

-Lorsque le sous-jacent a la valeur du prix d'exercice, l'option est dite à parité ou à la monnaie ≪at-the-money≫ (ATM).

Ces caractéristiques s'appliquent d'une manière inverse suivant que le contrat porte sur une option d'achat ou de vente, comme on l'explique dans le tableau suivant:

	Dans le cours	À parité	En dehors du cours
Achat d'un call	$S_T > K$	$S_T = K$	$S_T < K$
Achat d'un put	$S_T < K$	$S_T = K$	$S_T > K$

2.7 La valeur de l'option

La valeur de l'option se décompose en deux parties:

- Valeur intrinséque notée **VI.**
- Valeur temps notée **VT.**

tel que:

$$\text{Prix de l'option} = \text{valeur intrinséque} + \text{valeur temps}.$$

2.7.1 La valeur intrinséque

-La valeur intrinsèque d'une option est la richesse que son détenteur en retirerait s'il l'exerçait immédiatement.

- L'acheteur d'une **option d'achat (call)** ne décide d'exercer (acheter les titres) que si le cours du sous-jacent est supérieur à son prix d'exercice: la valeur intrinsèque représente dans ce cas la différence entre le cours du sous-jacent et le prix d'exercice. Elle est égale à $max(0, S - K)$.

-De même, l'acheteur **d'une option** de vente (put) ne décide d'exercer (vendre les titres) que si le cours du sous-jacent est inférieur à son prix d'exercice : la valeur intrinsèque représente dans ce cas la différence entre le prix d'exercice et le cours du sous-jacent. Elle est égale à $max(0, K - S)$.

-Dans tous les cas, la valeur intrinsèque d'une option est **positive ou nulle, mais elle n'est jamais négative** puisque l'exercice de l'option est un droit et non une obligation. Elle ne dépend que de la différence entre le cours du support et du prix d'exercice.

Les différents cas sont résumés dans ce tableau:

	$S_T > K$	$S_T < K$
Call	$VI = max(0, S - K)$	$VI = 0$
Put	$VI = 0$	$VI = max(0, K - S)$

2.7.2 La valeur temps

Un autre facteur important à prendre en compte est la durée dont dispose une option avant son expiration. Ce facteur est important car, plus l'option dispose de temps avant son expiration,plus elle a le temps de se retrouver dans une position profitable. On appelle cela **la valeur temps de l'option.**

-La valeur temps se mesure par la différence entre le prix de marché de l'option et sa valeur intrinsèque. Elle est égale à $C - max(0, S - K)$ pour une option d'achat, et a $P - max(0; K - S)$ pour une option de vente.

-Plus l'échéance de l'option est éloignée et plus la valeur temps est importante.

-Cette valeur diminue au fur et à mesure qu'on s'approche de la date d'exercice

Exemple 2.7.1

Série d'option	*Cours de l'action (A)*	*Prime*	*Valeur intrinsèque**	*Valeur temps***
Call prix d'exercice 24	*30*	*7*	*6*	*1*
Call prix d'exercice 36	*30*	*0.80*	*0*	*0.80*
Put prix d'exercice 28	*30*	*2.10*	*0*	*2.10*
Put prix d'exercice 40	*30*	*10.70*	*10*	*0.70*

** valeur intrinsèque d'un call = cours de l'action - prix d'exercice ; si cette différence est négative, la valeur intrinsèque est égale à zéro.*

**valeur intrinsèque d'un put = prix d'exercice - cours de l'action ; si cette différence est négative, la valeur intrinsèque est égale à zéro.*

*** valeur temps = prime - valeur intrinsèque*

Chapitre 3

Calcul et évaluation des options

La question de la détermination de la prime est le problème de valorisation de l'option (pricing). Il faut donc pouvoir déterminer la prime. Se pose aussi le problème de couvertur de l'option (hedging) qui consiste à construire un portefeuille de couverture V_t en utilisant la prime pour se protéger contre les risques

3.1 Calcul et évaluation des options européennes

Deux approches principales ont été développées pour les options. La première et la plus utilisée est le modèle analytique de Black et Scholes (1973). La seconde est le modèle binomial

développée par Cox, Ross et Rubinstein (1979), qui est essentiellement un processus séquentiel d'évaluation.

Définition 3.1.1 *Un portefeuille est un ensemble d'investissement possédé par un intervenant sur le marché. Ce sont des positions sur le marché, c-à-d le nombre d'actifs et de produit dérivé qu'il possède. Il peut contenir des actions, des options, des devises. On peut appeler cela un portefeuille initial sans l'action de gestion des risques.*

3.1.1 Stratégie financiére

Une stratégie financiére est un processus d'investissement dans les actifs sans risques et risqués. On la modélise comme un processus définie $\phi = \left(\phi_t^0, \phi_t\right)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$,adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\succeq 0}$, les composantes ϕ_t^0 et ϕ_t donnent ,à l'instant t,les quantites d'actif sans risque S_t^0 et d'actif risqué S_t respectivement détenues en portefeuille. La valeur du portefeuille à l'instant t,associée à la stratégie ϕ est donnée par:

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t \tag{3.1.1}$$

Pour la couverture d'option on s'interésse aux portefeuilles autofinancés

Définition 3.1.2 *Un portefeuille autofinancant est une stratégie d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent,dans le portefeuille entre deux instants successifs; elle consiste à:*
**Débuter avec une somme initiale d'argent V_0 (réparti entre actif risqué et actif sans risque comme est-t-il expliqué présédament).*
**Modifier cette répartition une fois à chaque pas de temps après avoir eu connaissance des cotations des actifs le contenant, et sans importer ni exporter d'argent.*
La condition d'autofinancement:

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t$$

3.1.2 Stratégie autofinancée

Donc on dit une stratégie auto-financée est une stratégie pour la quelle les variations de valeur du portefeuille viennent uniquement des gains dus à l'agitation des cours.

Pour répondre aux problèmes d'évaluation et de couverture des options, on a besoin aussi d'une hypothèse fondamentale appelée Absence d'Opportunité d'Arbitrage (A.O.A)

3.1.3 Stratégie d'arbitrage

On dira qu'une stratégie (ϕ) autofinancéé est une Stratégie d'arbitrage ou plus briévement *un arbitrage* si elle vérifie les conditions suivantes:

$$V_0(\phi) = 0 \ \ ; V_T(\phi) \geq 0 \ \ et \ \ P(V_T(\phi) > 0) > 0$$

Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle $\ll$*.La notion d'arbitrage réalisation d'un profit sans prendre de risques* $\gg$.

On dit donc qu'il existe une opportunité d'arbitrage, s'il existe existe un portefeuille auto-finançant V de valeur nulle en $t = 0$ dont la valeur V_t en T est positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive.

3.1.4 Absence d'opportunité d'arbitrage

.On dit que le marché financiér vérifie la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage (**A.O.A**) s'il n'existe acune opportunité d'arbitrage sur ce marché financier.

Définition 3.1.3 *Il existe une absence d'opportunité d'arbitrage (AOA, no free lunch) entre tout instant* 0 *et* T*.*

$$V_0 = 0 \text{ et } V_T \geq 0 \Longrightarrow P(V_T > 0) = 0$$

L'hypothèse signifie simplement : "Si ma richesse aujourd'hui est nulle, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle", soit "On ne peut gagner d'argent sans capital initial".

3.1.5 Relation de parité call-put

L'arbitrage donc une opération financiére assurant un gain positif ou nul de maniére certaine. Cette étude est motivée par notre "Stratégie d'arbitrage"

L'hypothèse de base, retenue dans tous les modèles, est l'absence d'opportunité d'arbitrage **(A,O,A),** c'est-à-dire qu'il est impossible de faire des profits sans prendre de risques.A partir de cette hypothése,on peut établir des relations entre les prix des call et des put européen,de même échéance T et de même prix d'exercice K, sur une action de cours S_t à l'instant t. Nous supposerons qu'il est possible d'emprunter ou de placer de l'argent à un taux constant r.Désignons par C_t et P_t les prix respectifs du call et du put à l'instant t.

En l'absence d'opportunité d'arbitrage **(A,O,A)**, on a la relation suivante, valable à tout instant $t < T$ et appelée *"relation de parité call-put" :*

$$C_t - P_t = S_t - K\ e^{-r(T-t)}$$

3.1.6 Le modèle binomial

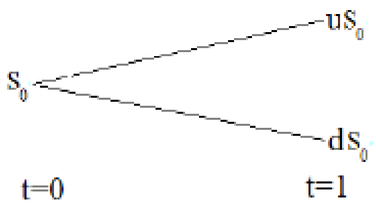
Le modèle binomial (ou modèle CRR du nom de ses auteurs **Cox, Rubinstein**) fournit une méthode numérique pour l'évaluation des options. Il a été proposé pour la première en 1979. Le modèle est un modèle discret pour la dynamique du sous-jacent. L'évaluation de l'option est calculée par application de la probabilité risque-neutre pour laquelle les prix actualisés sont des martingales.

On présente dans un premier temps le principe de la méthode (le modèle à une période), méthode qu'on généralisera dans un second temps (le modèle à n périodes).

Le modèle à une période

Considérons tout d'abord un horizon d'une seule période de longueur $T-t$ et un actif (une action) valant S_0 à la période initiale et qui, a chaque période, peut être haussier (et avoir un rendement u) avec une probabilié p. Le prix de cette action (actif) sera égale à $S_0 \times u$, ce que l'on notera par la suite uS_0,ou baissier (rendement d) avec une probabilité $(1-p)$ de sorte que le prix de l'action sera égale à $S_0 \times d$,que l'on notera par la suite dS_0

Par ailleurs on note r le taux sans risque continu associé à l'horizon de l'investissement (afin d'éviter toute opportunité d'arbitrage). L'évolution du cours se présente selon le processus binomial schématisé suivant:



Les paramètres u et d doivent respecter certaines conditions:

$\cdot d$ doit être inférieur à 1 pour qu'existe bien la possibilité d'une décroissance éventuelle du prix de l'action mais il doit rester supérieur à zéro pour éviter la survenance de prix négatifs.

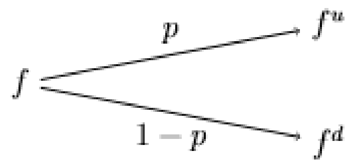
· u devra être supérieur à r.

Les conditions sur les paramètres u et d impliquent :

$$u > r > d$$

L'étude suivant sur Su et Sd

Cette structure simple suffit à définir le payoff d'une option. Considérons tout d'abord le cas du call. Au terme de l'unique période considérée, un call de prix d'exercice K vaudra ainsi $max[0; Su - K]$ avec une probabilité égale à p et $max[0; Sd - K]$ avec une probabilité égale à $(1 - p)$. On note f^u et f^d ces valeurs.L'évolution de la valeur de l'option entre le début et la fin de la période peut étre représentée par le schéma suivant :



L'objectif du modèle est de trouver la valeur de l'option a la date $t = 0$. Telle qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage dans l' economie, on constitue un portefeuille dupliquant composé d'un actif risqué noté $\Delta * S$ (Δ représente la quantité achetée ou la part du sous-jacent) et d'un actif sans risqué noté b (b positif indique un prêt et b négatif un emprunt).

La valeur du portefeuille(Δ; b) en date t est donnée par:

$$V_t = \Delta \times S + b$$

En date T, la valeur de ce portefeuille dépend de l'évolution de l'action et de l'actif sans risque. Dans le cas où l'action (le sous-jacent) a connu une hausse, on obtient:

$$V^u = \Delta \times Su + be^{r(T-t)}$$

et dans le cas contraire :

$$V^d = \Delta \times Sd + be^{r(T-t)}$$

On peut maintenant choisir $(\Delta; b)$ de telle façon que la valeur en date T soit égale à celle de l'option dans les deux états du monde. Il suffit de résoudre le système de deux équations aux deux inconnues Δ et b:

$$\begin{cases} V^u = \Delta \times Su + be^{r(T-t)} = f^u & (1) \\ V^d = \Delta \times Sd + be^{r(T-t)} = f^d & (2) \end{cases}$$

On multiplie l'équation (2) par (-1):

$$\begin{cases} \Delta \times Su + be^{r(T-t)} = f^u & (1) \\ (-1) \times (\Delta \times Sd + be^{r(T-t)}) = f^d \ \times (-1) & (2) \end{cases}$$

$$(3) + (4) \Rightarrow \Delta S(u-d) = f^u - f^d$$
$$\Rightarrow \Delta^* = \frac{f^u - f^d}{S(u-d)}$$

En remplaçant Δ^* dans l'équation (1) on obtient:

$$b^* = e^{-r(T-t)} \frac{uf^d - df^u}{u-d}$$

Alors le point bilatéral (b^*, Δ^*) est le portefeuille de couverture En effet, un tel portefeuille ayant, en date T et dans les deux états du monde u et d, la même valeur que l'option, il suffit au vendeur de celle ci de se le procurer en date t pour être certain d'honorer (couvrir) son contrat : en effet , il pourra vendre le portefeuille de couverture en date T et régler le payoff de l'option avec la recette de cette vente.

La valeur de construction du portefeuille de couverture (b^*, Δ^*)est donc:

$$\begin{aligned} V_t &= S \times \Delta^* + b^* \\ &= \frac{f^u - f^d}{S(u-d)} \times S + e^{-r(T-t)} \frac{uf^d - df^u}{u-d} \\ &= e^{-r(T-t)} \left[\frac{f^u(e^{r(T-t)} - d) + f^d(u - e^{r(T-t)})}{u-d} \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \left[\frac{f^u(e^{r(T-t)} - d) + f^d(u - d + d - e^{r(T-t)})}{u-d} \right] \end{aligned}$$

On obtient:

$$V_t = \left[e^{-r(T-t)} \frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d} \times f_u + (1 - \frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d}) \times f_d \right].$$

Le portefeuille de couverture ayant, en date T, une valeur égale à celle de l'option dans tous les états du monde (hausse ou baisse), en Absence d'arbitrage($A\ O\ A$) il doit avoir la même valeur que l'option en date t :$V_t = f$ .Dès lors, on peut affirmer que, en AOA, la prime d'une option à la date t est égale à la valeur V_t de constitution du portefeuille de couverture et écrire:

$$f = \left[\frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d} \times f^u + (1 - \frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d}) \times f^d\right] e^{-r(T-t)} \tag{3.1.2}$$

pour le put à la date initiale:

$$f = \left[\frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d} \times f^u + (1 - \frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d}) \times f^d\right] e^{-r(T-t)} \tag{3.1.3}$$

Où:

$$\begin{aligned} f^u &= max\,[0; k - Su] \\ f^d &= max\,[0; k - Sd] \end{aligned}$$

La probabilité $\langle\langle risque - neutre \rangle\rangle$

Reprenons les équations (3.1.2) et (3.1.3) spécifiant la valeur d'une option dans le cas d'un **call** ou d'un **put** . Dans ces équations, le payoff de l'option en cas de hausse, noté f^u, est pondéré par un facteur multiplicatif que nous notons q :

$$q = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d}$$

par ailleurs,le facteur multiplicatif portant sur f^d est égale à $1-q$:

$$1 - q = \frac{u - e^{r(T-t)}}{u-d}$$

Considérerons le couple $(q, 1-q)$ comme une probabilité portant sur les événements u et d. Sous cette probabilité, l'espérance du payoff de l'option s'écrit (le cas du **call** ou **put**):

$$E_Q(f_T) = q \times f^u + (1-q) \times f^d \tag{3.1.4}$$

Où:

f_T : représente la valeur du payoff enfin de période

D'aprés les trois relations précédentes on peut dire que la valeur d'une option s'exprime comme éspérance actualisée de son payoff; cette actualisation est opérée aux taux sans risque r; on écrit:

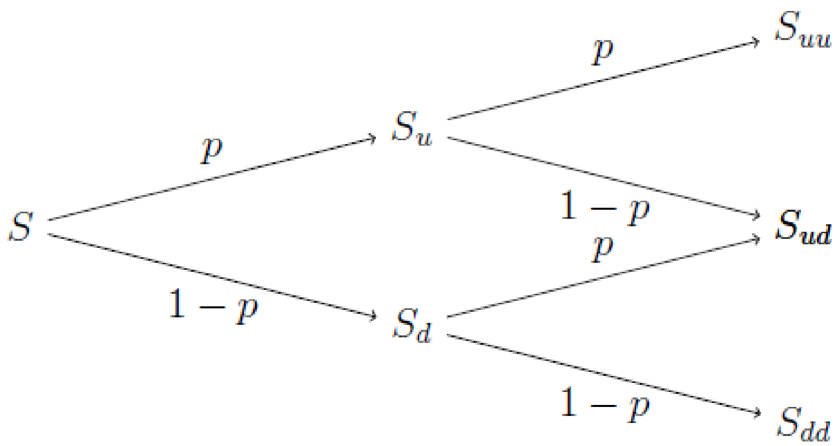
$$f = e^{-r\times(T-t)} E_Q(f_T).$$

Remarque 3.1.1 *p et $1-p$ n'interviennent pas dans l'évaluation de l'option. De fait, ces probabilités sont déjà intégrées dans le prix courant de l'action, et n'ont pas à intervenir de nouveau dans l'évaluation de l'option.*

Le modèle à plusieurs périodes

Dans le modèle à une période,le sous-jacent subissait à l'échéance une hausse ou une baisse,ce qui revenait à multiplier son prix initiale S_0 par un facteur u ou d. On suppose que le prix a subi,entre les dates $t = 0$ et $t = T$, un nombre déterminé n de variations (hausse et baisse) qui ont à chaque fois multiplié sa valeur antérieure par le cofffficient u ou d .Donc pourra connaître soit deux hausses successives et avoir une valeur notée S_{uu} (avec une probabilité égale à p^2) soit deux baisses successives et avoir une valeur notée S_{dd} (avec une probabilité$(1-p)^2$, soit une hausse suivie d'une baisse notée S_{ud} (avec une probabilité égale à $p(1-p)$), soit une baisse suive d'une hausse notée S_{du}(avec une probabilité égale à $(1-p)p$).

Supposons que l'arbre généré par ces mouvements soit recombinant , de sorte que $S_{ud} = S_{du}$.L'arbre suivant décrit le dynamique des prix pour $n = 2$:

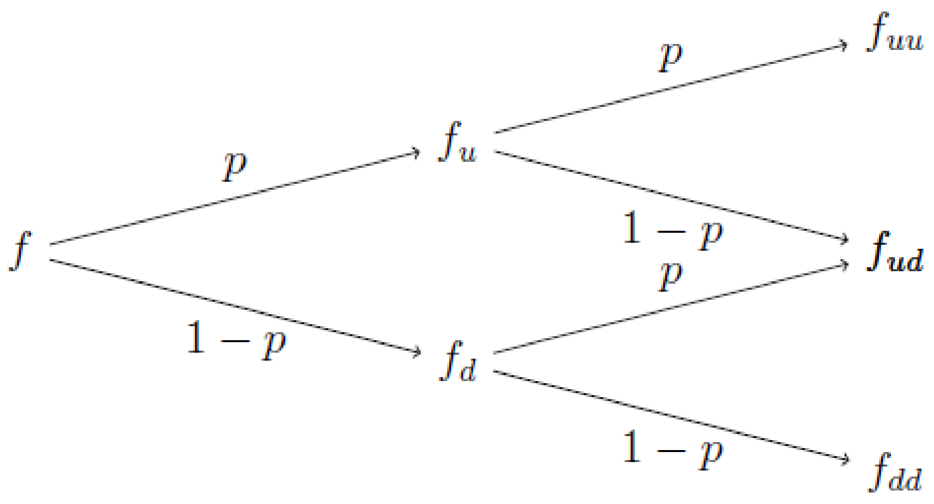


L'évaluationd'une option dans cette économiese réalise de façon récursive, c'est-à-dire,en partant du prix à la date finale (le payoff terminal)et en remontant de période en période

jusqu'à la date initiale par l'application de la règle binomial.Prenons l'exemple du call,on calcule tout d'abor d'une valeur pour le call au terme de l'étape 2 pour chaque prix possible de l'actif risqué, soit $max[0; S_{uu} - K]$ si le prix de actif risqué est égale à S_{uu},$max[0; S_{ud} - K]$

$(= max[S_{du} - K])$ si le prix de actif risqué est égale à $((S_{ud} = S_{du}))$ et $max[S_{dd} - K]$,si le prix de actif risqué est égale à Sdd, On note f^{uu}, et f^{ud} et f^{dd} ces différentes valeurs.

Les résultats auxquels conduit option d'achat considérée dont l'échéance survient maintenant à la fin de la deuxième périodes ont représentés ci-après:



On peut utiliser le modèle à une période pour évaluer f^d et f^u. Ces derniers peuvent tous deux être considérés comme le prix d'options à une période,on obtient les résultats suivants:

$$f^u = (q \times f^{\mathrm{uu}} + (1-q) \times f^{ud})e^{-r(T-t)}.$$

$$f^d = (q \times f^{ud} + (1-q) \times f^{dd})e^{-r(T-t)}.$$

où:

$$q = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d}$$

On poursuivera le calcul du call f en renouvelant la démarche jusqu'à la date initiale, soit:

$$f = (q \times f^u + (1-q) \times f^d)e^{-r(T-t)}.$$

On peut remplacer f^u et f^d par les valeurs précédemment obtenues, ce qui permet d'obtenir une valeur du call f en fonction des payoff terminaux du call, soit:

$$f = (q^2 \times f^{\mathrm{uu}} + 2q(1-q) \times f^{ud}(1-q)^2 \times f^{dd})e^{-2r(T-t)}.$$

pour le put l'expression est:

$$f = (q^2 \times f^{\,uu} + 2q(1-q) \times f^{ud}(1-q)^2 \times f^{dd})e^{-2r(T-t)}.$$

où:

$$f^{uu} = \max[0; K - Suu], f^{ud} = \max[0; K - Sud], f^{dd} = \max[0; K - Sdd],$$

la valeur de q étant définie comme prcédemment.

Formulation générale Pour l'horizon à N périodes, on reprend l'équation de la valeur d'un call,et en remplaçant $f^{\ uu}$, $f^{\ ud}$, $f^{\ dd}$ par leurs valeurs:

$$f = (q^2 \max[0; Suu - K] + 2q(1-q)\max[0; Sud - K] + (1-q)^2 \max[0; Sdd - K])e^{-2r(T-t)}$$

où d'une autre façon:

$$f = \sum_{j=0}^{2} C_2^j q^j (1-q)^{2-j} \max[0; u^j d^{2-j} S - K] e^{-2r(T-t)}$$

par déduction,on peut gnéralisés à N périodes .La valeur du call sera donc finalement donnée par l'équation:

$$f = \sum_{j=0}^{N} C_N^j q^j (1-q)^{N-j} \max[0; u^j d^{N-j} S - K] e^{-Nr(T-t)}$$

où:

•j : le nombre de mouvements ascendants du cours.

•N :le nombre total de périodes.

•$N - j$: le nombre de mouvements descendants

•$C_N^j = \frac{N!}{j!(N-j)!}$étant donné que les fluctuations du cours suivent un processus binomial .

Dans le cas d'un put, on peut calculer une expression de même nature:

$$f = \sum_{j=0}^{N} C_N^j q^j (1-q)^{N-j} \max[0; K - u^j d^{N-j} S] e^{-Nr(T-t)}.$$

On peut éliminer l'expression max, on trouve un entier a de sorte que:

$$u^a d^{N-a} S \geq K$$

D'ou:

$$\ln(u^a d^{N-a} S) \geq \ln K.$$

En utilisant les propriétés de la fonction logarithmique on trouve:

$$a \geq \frac{\ln(\frac{K}{Sd^N})}{\ln(\frac{u}{d})}$$

Dans ce cas les termes binomiaux peuvent commencer à a plutôt qu'a 0:

$$f = \sum_{j=a}^{N} C_N^j q^j (1-q)^{N-j} \max[0; K - u^j d^{N-j} S] e^{-Nr(T-t)}$$

Où:

$$a \leq \frac{\ln(\frac{K}{Sd^N})}{\ln(\frac{u}{d})}$$

Remarque 3.1.2 *On a jusqu'ici considéré comme exogènes les valeurs prises par les facteurs u et d, qui rendent compte de évolution du cours. Ces valeurs jouent toutefois un rôle extrêmement important.Eneffet,ce ne sont pas les probabilités historiques des mouvements de cours qui permettent de valoriser une option, mais les mouvements du cours eux-mêmes. L'ajustement desfacteursu et d consiste à adopter les valeurs suivantes:*

$$u = e^{\sigma\sqrt{z}} \quad , d = e^{-\sigma\sqrt{z}}$$

Avec:

z : représente la durée de période exprimée en pourcentage d'année

$z = \frac{(T-t)}{n}$ ou n :nombre de priodes.

σ : représente la volatilité (l'instabilité du cours).

Exemple 3.1.1 *On utilise le modèle binomiale de cox-Ross- Rubinstein pour calculer le prix d'un call européen.Le prix initial de sous-jacent est 90 € , le prix d'éxercice est de 85€ et d'échéance dans3 mois et doté d'une volatilité égale à 0.40.*

les placements sans risque se font à taux égale à 6%.

$z = \frac{T-t}{n} = \frac{0.25}{4} = 0.0625$

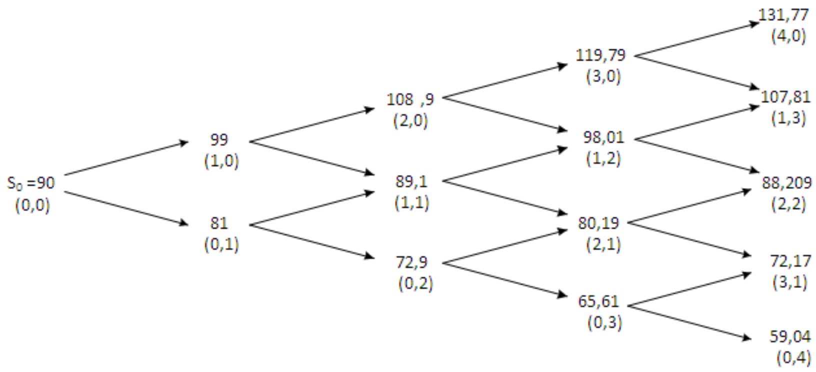
$u = e^{\sqrt[\sigma]{z}} = 1.1$

$.d = e^{-\sqrt[\sigma]{z}} = 0.9$

$e^{rz} = 1.0037$

$q = \frac{e^{rz}-d}{u-d} = \frac{1.0037-09}{1.1-0.9} = 0.5185.$

Donc le dynamique du prix du sous-jacent est décrit par l'arbre suivant:



· noeud (4; 0) : 46.77.

· noeud (1; 3) : 22.81.

· noeud (2; 2) : 3.209.

· noeud (3; 1) : 0.

· noeud (0; 4) :0.

Ces valeurs permettent de déterminer le cours de l'option aux noeuds se situant une période avant

·noeud (3; 0) :

$$f(3,0) = [q \times 46.77 + (1-q) \times 22.81]e^{-rz} = 35.09$$

· noeud (1; 2):

$$f(1,2) = [q \times 22.81 + (1-q) \times 3.209]e^{-rz} = 13.22$$

·noeud (2; 1) :

$$f(2,1) = [q \times 3.209 + (1-q) \times 0]e^{-rz} = 1.65.$$

· noeud (0; 3) :

$$f(0,3) = [q \times 0 + (1-q) \times 0]e^{-rz} = 0.$$

En suite en passe à la période précédente, on obtient les cours aux différents noeuds :
·noeud (2; 0) :

$$f(2,0) = [q \times 35.09 + (1-q) \times 13.22]e^{-rz} = 24.46.$$

·noeud (1; 1) :

$$f(1,1) = [q \times 13.22 + (1-q) \times 1.65]e^{-rz} = 7.67.$$

·noeud (0; 2) :

$$f(0,2) = [q \times 1.65 + (1-q) \times 0]e^{-rz} = 0.85.$$

L'étape suivante consiste à déterminer les valeurs de l'option à la date z :
·noeud (1; 0) :

$$f(1,0) = [q \times 24.46 + (1-q) \times 7.67]e^{-rz} = 16.31.$$

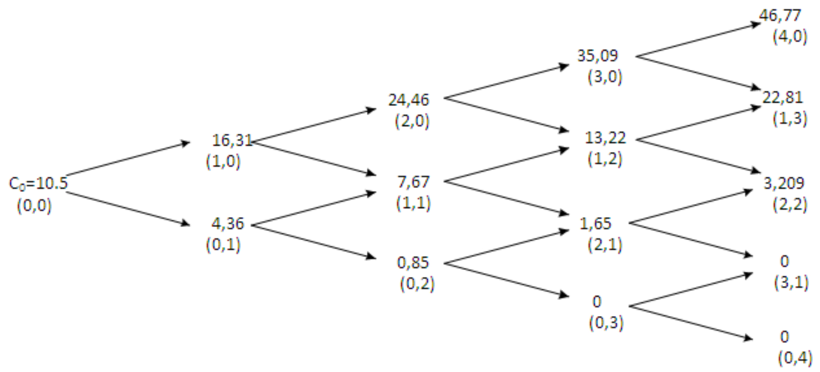
·noeud (0; 1) :

$$f(0,1) = [q \times 7.67 + (1-q) \times 0.85]e^{-rz} = 4.36.$$

Finalement, on en déduit la valeur de l'option aujourd'hui :

$$\begin{aligned} f &= [q \times f^u + (1-q) \times f^d]e^{-rz} \\ &= [0.5185 \times 16.31 + 0.4815 \times 4.36] \times 0.9962 \\ &= 10.51 \end{aligned}$$

Le call doit s'échanger à 10.51**€**.les flux relatifs à l'option d'achat sont les suivants:



3.1.7 Modèle à temps continu (Modèle Black-Scholes)

Comme exemple d'application du calcul stochastique aux mathématiques financiéres nous allons présenter la méthode de **Black**, **Scholes**,**Merton**

Présentation du modéle

L'incertitude sur les marchés financiers est modélisée par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $F = (\mathcal{F}_t)_{t \succeq 0}$ où

•Ω représente tous les états du monde.

• la tribu $\mathcal{F}$ représente la structure d'information globale disponible sur le marché.

•$(\mathcal{F}_t)$ est une filtration croissante décrivant l'information disponible aux agents du marché à la date t, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Dans le cas où l'horizon T des investisseurs sur le marché est fini, on suppose usuellement $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. La propriété de croissance $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, si $s < t$, traduit le fait que le marché n'oublie rien et donc qu'on dispose de plus en plus d'informations au fur et à mesure du temps.

• une probabilité P qui donne les probabilités à priori des événements considérés. C'est la probabilité historique ou objective. Comme nous le verrons par la suite, pour les problémes de pricing en finance qui nous intéressent, l'identification exacte de P n'est pas un objectif majeur et c'est une caractéristique principale des modéles en finance.

Pour obtenir donc l'équation de Black-Scholes, certaines hypothèses doivent être faites :

1)-Les options de style européen.

2)-Le marché est ouvert en continu et exempte de coûts de transaction et est constitué de deux actifs de base : un actif risqué (action) et un actif non risqué (prêt, emprunt).

3)-On peut acheter ou vendre à tout instant

4)-Il n'y a ni taxes,impôt,ni côut de transaction.

5)- Le taux d'intérêt sans risque est constant et identique sur toutes les maturités.

6)- La vente à découvert est autorisée et il est possible d'utiliser immédiatement la totalité du produit de cette vente.

7)-Il n'ya pas d'opportunité d'arbitrage.

8)-L'évolution du prix de l'action suit un processus de marché aléatoire.

9)-Les prix de l'action sous-jacente sont distribués de façon lognormal.

10)-Il n'y a pas de versement de dividendes durant la vie de l'option.

11)- La constence de volatilité

Le modéle proposé pour décrire l'évolution des cours est un modéle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t)

L'évolution de S_t^0 est régie par l'équation différentielle:

$$\begin{cases} dS_t^0 = rS_t^0 dt \\ \mathrm{S}_0^0 = 1 \end{cases} \tag{3.1.5}$$

de sort que ($S_t^0 = S_0^0 \exp^{rt} = \exp^{rt}$) pour $t \geq 0$,où r le temps d'intérêt par unité de temps, supposé constant.

On suppose que le prix de l'action$\{\mathrm{S}_t\}_{t \succeq 0}$,est régie par l'équation différentielle stochastique (l'EDS):

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 > 0 \end{cases} \tag{3.1.6}$$

avec:

μ : représente le paramètre de la tendance de l'action.

σ: représente la volatilité de l'action.

$\{W_t\}_{t\succeq 0}$: *est* un mouvement Brownien standard par rapport à F sa filtration.

L'équation (3.1.6) se résout explicitement grâce à la formule d'Ito:

$$df_t = \left(\frac{df}{dS}uS_t + \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dS^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{df}{dS}\sigma S_t dW_t$$

On considére la variable:

$$Y_t = \log(S_t) \quad \text{d'où} \quad S_t = \exp(Y_t)$$

On pose:

$$f(x) = \log(x) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
dY_t &= \left(\frac{1}{S_t}\mu S_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{1}{S_t}\sigma S_t dW_t \\
dY_t &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t \\
Y_t &= Y_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds + \int_0^t \sigma dW_s \\
Y_t &= \log(S_0) + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds + \int_0^t \sigma dW_s \\
Y_T &= \log(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t
\end{aligned}$$

On déduit que:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$$

Donc la solution est donnée par l'expression suivante:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$$

Valorisation par une équation aux dérivées partielles et formules de Black-Scholes

L'équation aux dérivées partielles

La valeur de l'option est égale à la somme d'argent nécessaire pour construire un portefeuille de réplication. C'est un portefeuille autofinancé composé d'une quantité d'actif sous-jacent (risqué) et d'une autre d'actif sans risque. On cherche à ce que sa valeur soit constamment égale à celle de l'option. La valeur de portefeuille de réplication s'écrit donc, comme(3.1.1):

$$V_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

En différentiant l'équation (3.1.1) du portefeuille, on obtient :

$$dV_t = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t$$

En identifiant les termes en dS_t^0 et dS_t de (3.1.6) , (3.1.5) ceci permet d'éxprimer la différentielle de V_t sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} dV_t &= \phi_t^0 \left(rS_t^0 dt\right) + \phi_t \left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right) \\ dV_t &= \left(\phi_t^0 r S_t^0 + \phi_t \mu S_t\right) dt + \phi_t \sigma S_t dW_t \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

D'autre part,comme S_t est un processus d'Itô, et la valeur d'une option d'achat à maturité T et de prix K est une fonction $C(t, S_t)$. En appliquant donc le lemme d'Itô, on obtient:

$$dC(t, S_t) = \left(uS_t \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) + \frac{\partial C}{\partial t} C(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S_t)\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) dW_t \tag{3.1.8}$$

On veut construire un portefeuille de réplication de l'option. A chaque instant, la variation de valeur de portefeuille de réplication doit être égale à celle de l'option:

$$\begin{cases} \text{Pour alléger, on note } C_t \text{ pour } C(t, , S_t) \ : C_t = V_t \\ \text{et en supposant la condition d'autofinancement } \ dC_t = dV_t \end{cases}$$

Par identification des termes dt et dW_t dans l'équation (3.1.7) et (3.1.8), On obtient:

$$\phi_t = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t)$$

Par définition du portefeuille,on a:

$$\phi_t^0 S_t^0 = V_t - \phi_t S_t \quad \text{donc:} \quad \phi_t^0 S_t^0 = C\left(t, S_t\right) - \ \phi_t S_t \tag{3.1.9}$$

En remplaçant ϕ_t pour ça valeur dans (3.1.9),on trouve:

$$\phi_t^0 S_t^0 = C\left(t, S_t\right) - \frac{\partial C}{\partial S}\left(t, S_t\right)\ S_t$$

On peut alors réécrire l'équation (3.1.7) sous la forme suivante:

$$dV_t = \left(r\left(C\left(t, S_t\right) - \frac{\partial C}{\partial S}\left(t, S_t\right)\ S_t\right) \ + \frac{\partial C}{\partial S}\left(t, S_t\right)\mu S_t\right)dt + \frac{\partial C}{\partial S}\left(t, S_t\right)\sigma S_t dW_t \tag{3.1.10}$$

D'après l'égalité des termes en dt des équations (3.1.8) et(3.1.10) :

$$uS_t\frac{\partial C}{\partial S}\left(t, S_t\right) + \frac{\partial C}{\partial t}C\left(t, S_t\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\left(t, S_t\right) = r\left(C\left(t, S_t\right) - \frac{\partial C}{\partial S}\left(t, S_t\right)\ S_t\right) \ + \frac{\partial C}{\partial S}\left(t, S_t\right)\mu S_t$$

Soit en simplifiant:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}C\left(t, S_t\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\left(t, S_t\right) + rS_t\frac{\partial C}{\partial S}\left(t, S_t\right) \ = rC\left(t, S_t\right) \\ C\left(t, S_t\right) = \max(S_T - K, 0) \end{cases} \tag{3.1.11}$$

C'ést l'équation de Black-Sholes

Remarque 3.1.3 *On trouve bien l'équation aux dérivées partielles* (3.1.11) *régissant l'évolution du prix d'une option européenne de Black-Scholes. c'est la même pour toute option européenne sous*
Black-Scholes c'ést-à-dire si:

$$\begin{cases} V(t; S_t) = C(t; S_t) & \text{pour tout } t \text{ et } S \text{ , si } \Psi_T \text{ est le pay-off d'un call} \\ V(t; S_t) = P(t; S_t) & \text{pour tout } t \text{ et } S, si\ \Psi_T \text{ est le pay-off d'un Put} \end{cases}$$

Dans le cas d'un put le pay-off est $\Psi_T(t; S_t)$= $\max(K - S_T, 0)$. La prime en date t d'une telle option est solution de l'EDP d'évaluation:

$$\frac{\partial C}{\partial t}P\left(t, S_t\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\left(t, S_t\right) + rS_t\frac{\partial P}{\partial S}\left(t, S_t\right) \ = rP\left(t, S_t\right)$$

respectant la condition finale:

$$\Psi_T(t; S_t) = P(t; S_t)$$

Formule de Feynman-Kač

On suppose que la fonction $F(t,S)$ est la solution de l'EDP de Black-Scholes:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,S)+\mu(t,S)\frac{\partial F}{\partial S}(t,S)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,S)\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(t,S)=rF(t,S)$$
$$F(t,S)=\phi(S)$$

Alors,,s'il existe une solution S_t de L'EDS:

$$S_t=\mu(t,S)\,dt+\sigma(t,S)\,dW_t$$
$$S_{t_0}=S_0$$

On a , sous l'hypothése $\int_0^T E\left[\mu(t,S)\frac{\partial F}{\partial S}(t,S)\right]^2 dt<\infty$:

$$F(t_0,S_0)=e^{-r(T-t_0)}E\left[\phi(S_T)/S_{t_0}=S_0\right]$$

On applique la formule de Feynman-Kač à l'équation (3.1.11) on trouve, avec $(S_t-K)_+=\max(S_T-K,0)$:

$$C(t,S_t)=E\left[e^{-r(T-t)}(S_t-K)_+\right]$$

Formules de Black-Scholes

Soit un actif risqué suivant le modèle du brownien géométrique

$$S_t=S_0\exp\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t\right)$$

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes,la résolution de l'EDP dans le cas d'un call européen $(C(t,S_t)=\max(S_t-K,0)$ de maturité T et de strike K donne comme valeur de l'option:

$$C(t,S_t)=S_0\mathcal{N}(d_1)-Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

Avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite:

$$\mathcal{N}(\mu)=\int_{-\infty}^{u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx.$$

d_1 et d_2 donnés par:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Le prix d'une option de vente européen $P(t, S_t)$,portant sur le méme titre de base et ayant la méme date d'échéance et le méme prix d'exercice,donné par:

$$P(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - S_t\mathcal{N}(-d_1) \tag{3.1.12a}$$

En raison de la relation de parité Call-Put:

$$C(t, S_t) - P(t, S_t) = S_t - Ke^{-r(T-t)},$$

D'ou:

$$P(t, S_t) = C(t, S_t) - S_t + Ke^{-r(T-t)}$$

En remplaçant $C(t, S_t)$ par sa valeur:

$$\begin{aligned} P(t, S_t) &= S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) - S_t + Ke^{-r(T-t)} \ , \\ &= Ke^{-r(T-t)}\left(1 - \mathcal{N}(d_2)\right) - S_t\left(1 - \mathcal{N}(d_1)\right). \end{aligned}$$

On obtient $(3.1.12a).d_1$ et d_2 étant définies comme précédemment.

Et de l'égalité $[\mathcal{N}(-u) = 1 - \mathcal{N}(u)]$

Sensibilité et grecques

- Nous analysons l'impact des différents paramétres sur le prix d'une option dans le modéle de Black-Scholes. Rappelons que ce prix noté $C(t, x, K, T, r,)$ *où* $P(t, x, K, T, r,)$ depend :

•de la date courante t et de la valeur x de l'action ($x = S$ (la valeur de sous-jacent) ,ce sont les variables d'état.

• de la maturité et du strike K : ce sont les paramétres de l'option.

•du taux sans risque r et de la volatilité σ : ce sont les paramétres du modéle.

Le modèle de Black-Scholes définit la valeur théorique d'une option de type européen. Mais la gestion précise d'une telle option a besoin de plus d'outils ,les grecques.

Définition 3.1.4 *Les sensibilités du prix d'une option par rapport à ses différents paramètres sont des facteurs trés importantes dans la gestion de la couverture de l'option. Ces sensibilités sont usuellement appelées grecques en relation avec l'alphabet correspondant.*
(les ≪ grecques ≫, Les ≪ lettres grecques ≫) −appelées aussi indicateurs de sensibilité-mesurent comment les changements dans chacune de ces variables influent sur les prix de l'option (prime) par rapport à ses des différents paramétres, voir figure(3.1.1) .

Dans le cas d'un Call, les valeur en t = 0 des Grecques sont :

$$\begin{gathered} Delta = \Delta := \frac{\partial C}{\partial x} = N\left(d_1\right) > 0 \\ Gamma = \Gamma := \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\acute{N}\left(d_1\right) > 0 \\ Vega = \upsilon := \frac{\partial C}{\partial \sigma} = x\sqrt{T}\acute{N}\left(d_1\right) > 0 \\ Theta = \Theta := \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{x\sigma}{2\sqrt{T}}\acute{N}\left(d_1\right) - r\ K\exp\left(-rT\right)N\left(d_2\right) > 0 \\ Rho = \rho := \frac{\partial C}{\partial r} = K\ T\exp\left(-rT\right)N\left(d_2\right) > 0 \end{gathered}$$

Dans le put d'un Put, les valeur en t = 0 des Grecques sont:

$$\begin{gathered} Delta = \Delta := -N\left(d_1\right) < 0 \\ Gamma = \Gamma := \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\acute{N}\left(d_1\right) > 0 \\ Vega = \upsilon := x\sqrt{T}\acute{N}\left(d_1\right) > 0 \\ Theta = \Theta := \frac{x\sigma}{2\sqrt{T}}\acute{N}\left(d_1\right) + rK\exp\left(-rT\right)\ N\left(\left(d_2\right) - 1\right) \\ Rho = \rho := KT\exp\left(-rT\right)N(\left(d_2\right) - 1) < 0 \end{gathered}$$

(on rappelle que $\acute{N}$ est la densité de la normale centrée réduite).

Utilisation des grecques

- Mesure de risque de portefeuilles d/options
- . • Couverture en delta neutre

La volatilité du cours d'un sous-jacent

La volatilité est une mesure de l'instabilité du cours d'un actif financier. Elle mesure l'amplitude des variations d'une action, d'un produit dérivé ou d'un marché. En effet,

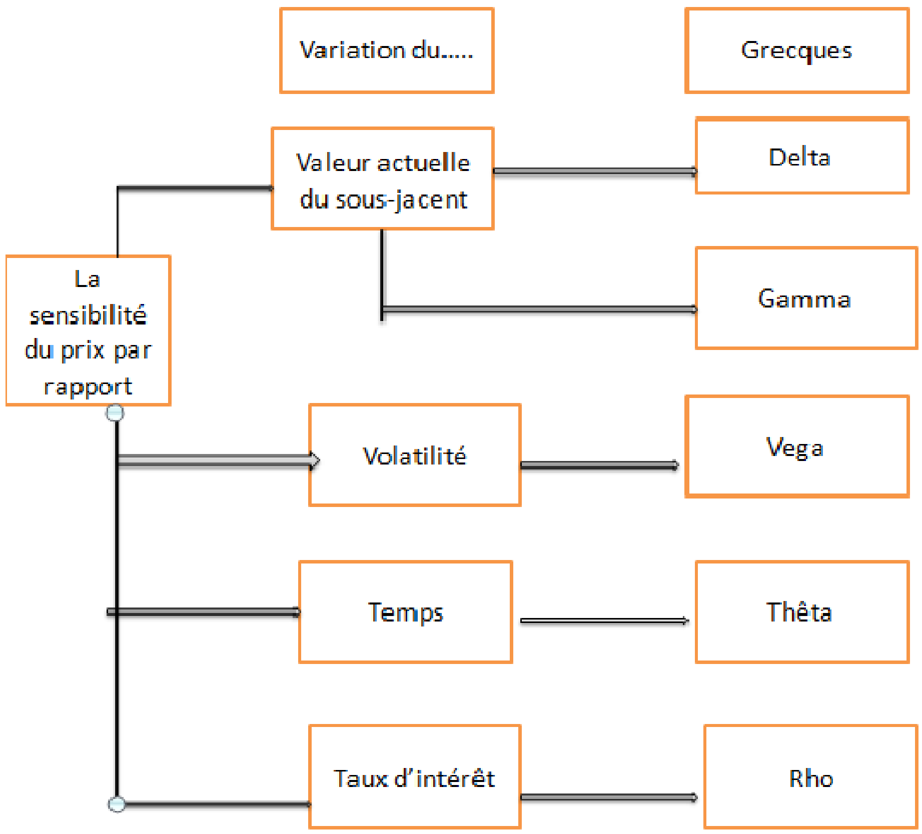


Figure 3.1.1 : La sensibilité du prix par rapport à différents paramétres

la volatilité est un facteur qui influe sur la valeur de l'option. Plus le cours d'un sous-jacent est volatile, plus il a de chance d'évoluer favorablement (par rapport à une situation de stabilité). Il s'agit d'un paramétre de quantification du risque de rendement et de prix.

Parmi les cinq variables et paramètres S, K, T, r et σ entrant dans les formules de Black-Scholes, la volatilité σ est le seul paramétre qui n'est pas directement observable. Dans la pratique,deux approches sont utilisées pour l'identifier :

– *La méthode "historique"* : ce sont des méthodes empiriques utilisant les données historiques sur les cours de l'action

– *La méthode" implicite"* : ce sont des méthodes basées sur l'observation des prix des options.

La volatilité historique On l'utilise la volatilité historique pour essayer de prévoir les cours futurs à partir des cours passé, c'est-à-dire que l'on prend en général les anciens cours pour essayer de retrouver une similitudes avec les nouveaux et prévoir ainsi l'évolution de l'action.

Estimation de la volatilté à partir des données historiques Pour estimer empiriquement la volatilité du prix d'une action on doit observer le prix de l'action en question dans les intervalles de temps fixe: (ex:chaque jour, chaque semaine ou chaque mois). On définit alors:

n : Nombre d'observations.

S_i : Le prix de l'action à la fin du $i^{iéme}$ intervalle.

et soit:

$$r_i = \log\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \qquad \text{pour} \qquad i = (1.......n) \qquad (r_i: \text{ les rendements})$$

L'estimateur usuel , s , de la déviation standard des r_i est donné par:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}r_i^2-\frac{1}{n\left(n-1\right)}\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\right)^2}\qquad,$$

Où $\bar{r}$ est la moyenne des r_i.

Or d'aprés ce qui précéde, la déviation standard des r_i est $\sigma\sqrt{\tau}$. Donc la variable s estime $\sigma\sqrt{\tau}$.D'où on peut estime σ par $\hat{\sigma}$ tel que :

$$\hat{\sigma}=\frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

On peut facilement montrer que l'erreur standard de cette estimation est approximativement $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}$.

Le choix de la valeur n n' est cependant pas facile, mais plus le nombre de données est grand, meilleure sera l'approximation. Cependant, on sait maintenant que σ change au cours du temps et de veilles données peuvent ne pas être caractéristique de la tendance future de la volatilité. Dans Hull (1999), il est conseillé de prendre les données entre 90 et 180 jours. Cependant si on cherche à estimer la volatilité afin de calculer le prix d'exercice d'une option sur deux ans, il faut prendre en considérations les données des deux dernières années. Des recherches empiriques ont montré qu'il faut utiliser le nombre de jours ouvrables comme mesure de temps dans l'estimation.

Toute fois, la volatilité historique pose quelques problèmes :

• Elle se réfère au passé, et n'a aucune portée prévisionnelle.

• Elle est instable dans la mesure où la distribution de probabilité qui est associée aux mouvements du prix du sous-jacent est non stationnaire.

• Elle dépend également de l'horizon $\langle n \rangle$ que l'on s'est fixé.

Pour cela, c'est la volatilité implicite qui est la plus utilisée dans les calculs de prime d'options.

La Volatilité implicite La volatilité implicite est le résultat d'une équation liant le prix au marché d'une option à ses déterminants dans le cadre d'un modèle d'évaluation donné. Elle peut s'interpréter comme étant une estimation contemporaine de la variabilité moyenne future de l'actif sous-jacent par le marché au cours de la vie de l'option. La volatilité implicite serait donc une estimation actuelle ayant un contenu prospectif.

En utilisant les prix observés des options C_t et en inversant de la formule de Black-Scholes, on peut retrouver le paramètre σ .

Ici,en

général, on n'a pas une seule valeur de σ , mais une courbe qui dépend du strike K , c'est le phénomène du "smile de volatilité".

Estimation de la volatilité implicite Il existe plusieurs façons d'estimer la volatilité implicite. Cela pose un problème car il devrait exister une seule mesure de la variabilité par actif financier sous-jacent à l'option.

Pour résoudre le problème de la structure de la volatilité implicite, plusieurs auteurs ont suggéré différentes méthodes de calcul afin de trouver un seul chiffre pouvant caractériser

un actif financier en particulier Mayhew(1995) expose trois façons d'estimer cette mesure de la variabilité unique.

La première est de calculé la volatilité implicite σ_{impl} pour toutes les options d'une même classe et de calculer une simple moyenne arithmétique de comme σ_{impl} ceci :

$$\hat{\sigma}_{impl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{impl}$$

La deuxième formule en utilisant la formule de Black-Scholes, est :

$$\hat{\sigma}_{impl} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \vartheta_i} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \vartheta_i^2 \sigma_{impl}^2}$$

Où ϑ est le Véga de l'option calculé avec la formule de Black-Scholes. Le coefficient Véga mesure la sensibilité du prix d'une option à la variation de la volatilité du titre sous-jacent et se calcule comme suit :

$$\vartheta = p_s \sqrt{T} \frac{e^{-\frac{d^2{}_1}{2}}}{\sqrt{2T}}$$

Où:

p_s : le prix de l'actif sous- jacent.

T : la maturité.

Cette technique possède l'avantage de pondérer les options selon leur degré de sensibilité à la volatilité.

D'autre auteurs ont utilisé une troisième formule qui est une autre forme pondéré afin de réduire le décalage causé par l'écart entre le prix prévu par le modèle et le prix réel de l'option :

$$\hat{\sigma}_{impl} = \sum_{i=1}^{N} \vartheta_i \left[C_i - BS_i \left(\hat{\sigma} \right) \right]^2$$

Où:

C_i : est la prime au marché de l'option

BS : est la prime évaluée par le modèle de Black-Sckoles

Les études récentes sur le sujet de l'estimation de la volatilité implicite donne ces trois méthodes présentées. Il existe donc un grand choix possible de méthodes de mesure de la volatilité implicite.

3.2 Calcul et évaluation des options américaines

Le but de cette section est de traiter l'évaluation et la couverture des options américaines. Pour cela, nous aurons besoin de la notion de temps d'arrêt, qui permet de modéliser les stratégies d'exercice d'une option américaine, et de la notion d'envloppe Snell, qui est la clé de la résolution du probléme d'arrêt optimal.

Marchés finnanciers viables

Définition 3.2.1 *On dit que le marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage*

Le théoréme suivant est appelé en englais ≪Fundamental Theorem of Asset Pricing ≫

Théorème 3.2.1 *Le marché est viable si, et seulement si, il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente*[1] [(1)] *à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingale.*

[(1)1] : On à deux probabilité $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont équivalentes si et seulement si, pour tout événement A, $\mathbb{P}_1(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}_2(A) = 0$. Ici, $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ signifie que, pour tout $w \in \Omega$, $\mathbb{P}^*(w) > 0$.

Marchés complets

Définition 3.2.2 *On dit que le marché est complet si toute option (par exemple ,option européenne d'echéance T) est simulable. L'intérêt des marchés complets est qu'ils se prêtent à une théorie trés simple de l'évaluation et de la couverture des options. Le modéle de Cox-Ross- Rubinstein, est un exemple de modéle de marché complet d'un grande simplicité. (cette étude est motivée sur la premiére section).*

Théorème 3.2.2 *Un marché viable est complet si, et seulement si, il existe une seule probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs soient des martingales.*

La probabilité $\mathbb{P}^*$ apparaîtra comme l'outil de calcul des formules de prix et de couverture.

3.2.1 Premiére approche des options américaines

Une option américaine pouvant être exercée à n'import quel instant entre 0 et T , nous la définirons comme une suite positive (Z_t) et adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, Z_t représentant le profit que permet l'exercice de l'option à l'instant t. Dans le cas d'un call américain sur l'actif 1, au prix d'exercice K, on a $Z_t = (S_t^1 - K)_+$. Dans le cas d'un put américain , $Z_t = (K - S_t^1)_+$.

Pour définir la valeur de l'option américaine associée au processus $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$,nous allons raisonner par "*récurrence descendante*", à partir de la date T. Il est clair que la valeur de l'option à l'instant T est:

$$U_T = Z_T$$

A quel prix vendre l'option à la date $T-1$? Si le detenteur de l'option exerce immédiatement, il fera le profit Z_{T-1}, sinon il exercera à la date T et le vendeur doit être en mesure de payer la richesse Z_T à la date T. Le vendeur doit donc encaisser, à la date $T-1$, une somme au moins égale à Z_{T-1} et lui permettant fournir la richesse Z_T à l'instant T. La richesse qui,disponible à la date $T-1$, permet de produire la richesse Z_T à l'instant T,c'ést la valeur de l'instatant $T-1$ d'une stratégie admissible de la valeur finale Z_T, c'ést-à-dire:

$$S_{T-1}^0 E^* \left(\tilde{Z}_T | \mathcal{F}_{T-1} \right) \quad \text{avec} \quad \tilde{Z}_T = Z_T / S_T^0$$

Donc pour la valeur de l'option américain à l'instant $T-1$:

$$U_{T-1} = \max\left(Z_{T-1}, S_{T-1}^{0} E^{*}\left(\tilde{Z}_{T}|\mathcal{F}_{T-1}\right)\right)$$

On définit la valeur U_t de l'option américaine à la date t par la relation de récurrence, valable pour $t = 1, ..., T$

$$U_{t-1} = \max\left(Z_{t-1,}S_{t-1}^{0} E^{*}\left(\frac{U_t}{S_t^0}|\mathcal{F}_{t-1}\right)\right)$$

Dans le cas d'un taux d'intêrt constant égal à r,sur chaque période:

$$\begin{aligned} S_t^0 &= (1+r)^t \\ U_{t-1} &= \max\left(Z_{t-1,}\frac{1}{1+r}E^{*}\left(U_t|\mathcal{F}_{t-1}\right)\right) \end{aligned}$$

Soit $\tilde{U}_t = \frac{U_t}{S_t^0}$ le prix actualisé de l'option américaine, et E^{*} : L'éspérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}^{*}$

Proposition 3.2.1 *La suit $\left(\tilde{U}_t\right)_{0\leq t\leq T}$ est une P^{*}sur-martingale.C'ést la plus petit P^{*}sur-martingale majorant la suite $\left(\tilde{Z}_t\right)_{0\leq t\leq T}$*

3.2.2 Notion de temps d'arrêt

Sur le plan de la modélisation, se pose la question de savoir comment modéliser un instant d'éxercice de l'option. La décision d'éxercer ou de ne pas éxercer à l'instant t se fera au vu des informations disponibles à l'instant t.. Si on se place dans le cas d'un modèle discret , construit sur un espace probabilisé filtré fini $(\Omega, \mathcal{F} : (\mathcal{F}_t)\ _{0\leq t\leq T\leq}, \mathbb{P})$,on est conduit à décrire la date d'éxercice par une variable aléatoire appelée "temps d'arrêt".

Définition 3.2.3 *Une variable aléatoire τ, à valeurs dans $\{0, 1, 2, .., T\ \}$ est un temps d'arrêt si, pout tout $t \in \{0, 1.., T\}$,*

$$\begin{cases} \tau : \Omega \to \{0; 1, .., T\} \\ \quad \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t \end{cases}$$

3.2.3 Enveloppe de Snell

Enveloppe de Snell d'une suite adapté

Définition 3.2.4 *Si $(Z_n)_{(0\leq n\leq T)}$ est une suite de variables aléatoires positives adaptée définissant une option américainne, alors la valeur de l'option est définie par:*

$$\begin{cases} U_T = Z_T \\ U_t = \max(Z_t, E(U_{t+1}/\mathcal{F}_t) \qquad t = \{0, ..., T-1\} \end{cases}$$

Cette étude est motivée par notre première approche des options américaines. Nous avons déjà, par la proposition (3.2.1) que $(U_t)_{0\leq t\leq T}$ est la plus petite sur- martingale majorant la suite $(Z_n)_{0\leq n\leq T}$. On l'appelle enveloppe de Snell de la suite $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$, c'est-à-dire, $(\left(\tilde{U}_t\right)$ est sous P^*, l'enveloppe de Snell de la suite $\left(\tilde{Z}_t\right))$

Proposition 3.2.2 *Soit (U_t) une suite adaptée et soit τ un temps d'arrêt. La suite arrêtée $(U_t^\tau)_{0\leq t\leq T}$ est adaptée. De plus, si (U_t) est une martingale (resp. une sur-martingale), alors (U_t^τ) est une martingale (resp. une sur-martingale).*

Proposition 3.2.3 *La variable aléatoire définie par:*

$$\tau_0 = \inf\{t \geq 0 \ |U_t = Z_t\}$$

est un temps d'arrêt et la suite arrêté $(U_{t\wedge\tau_0})_{0\leq t\leq T}$ une martingale .

Avec

$$(U_{t\wedge\tau_0})_{0\leq t\leq T} = (U_t^{\tau_0})_{0\leq t\leq T}$$

Démonstration. [1] *Puisque $U_T = Z_T$, la variable τ_0 définit bien un élément de $\{0, 1, , ..., T\}$ et on a: $\{\tau_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0$ et, pour $k \geq 1$;*

$$\{\tau_0 = k\} = \{U_0 > Z_0\} \cap ... \cap \ \{U_{k-1} > Z_{k-1}\} \cap \{U_k = Z_k\} \in \mathcal{F}_k$$

. On remarque, pour $t \geq 1$, on a:

$$U_t^{\tau_0} = U_{t\wedge\tau_0} = U_0 + \Sigma_{j=1}^t \phi_j \Delta U_j$$

Où: $\phi_j = 1_{\{j\leq\tau_0\}} \Leftrightarrow \{j \leq \tau\}$ est le complémentaire de l'ensemble $\{\tau \leq j\} = \{\tau \leq j-1\}$ et le processus $(\phi_t)_{0\leq t\leq T}$ est prévisible.

pour $t \in \{0, 1, ..., T-1\}$

$$U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} = \phi_{t+1}(U_{t+1} - U_t) = \mathbf{1}_{\{t+1 \leq \tau_0\}}(U_{t+1} - U_t)$$

On a par définition:

$$U_t = \max(Z_t, E(U_{t+1}/\mathcal{F}_t)$$

et sur l'ensemble $\{t+1 \leq \tau_0\}; U_t > Z_t$. *D'où:*

$$U_t = E(U_{t+1}/\mathcal{F}_t)$$

Par conséquent :

$$U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} = 1_{\{t+1 \leq \tau_0\}}(U_{t+1} - E(U_{t+1}/\mathcal{F}_t))$$

.En prenant l'éspérance conditionnelle des deux membres, on obtient :

$$E((U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0})/\mathcal{F}_t) = 1_{\{t+1 \leq \tau_0\}}\ E\ ((U_{t+1} - E(U_{t+1}/\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_t)$$

car $\{t+1 \leq \tau_0\} \in \mathcal{F}_t$ puisque le complémentaire de $(\{t+1 \leq \tau_0\}$ et $\{\tau_0 \leq t\})$

D'où:

$$E((U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0})/\mathcal{F}_t) = 0$$

.Ce qui preuve que U^{τ_0} est une martingale. ■

3.2.4 Décomposition des sur-martingales

On commence par donner une décomposition générale des sur-martingales, appellée décomposition de **Doob-Meyer** permet dans les marchés viables et complets; d'associer à toute sur-martingale une stratégie de gestion dans laquelle la consommation est autorisée.

Théorème 3.2.3 ***(Décomposition de Doob-Meyer)*** *toute sur-martingale* $(U_t)_{0 \leq t \leq T}$ *peut s'écrire de façon unique sous la forme:*

$$U_t = M_t - A_t$$

Où: (M_t) *est une martingale et* (A_t) *un processus croissant, prévisible, nul en* 0.

Démonstration. [1] Il est clair que le seul choix possible pour $t = 0$, est:

$$\begin{cases} M_0 = U_0 \\ A_0 = 0 \end{cases}$$

On doit ensuite avoir

$$U_{t+1} - U_t = M_{t+1} - M_t - (A_{t+1} - A_t)$$

D'où, en conditionnement par rapport à $\mathcal{F}_t$ et en utilisant les propriétés de M et A,

$$\begin{cases} -(A_{t+1} - A_t) = E(U_{t+1}/\mathcal{F}_t) - U_t \\ M_{t+1} - M_t = U_{t+1} - E(U_{t+1}/\mathcal{F}_t) \end{cases}$$

On obtient par récurrence, pour $1 \leq t \leq T$

$$\begin{cases} A_{t+1} = U_t - E(U_{t+1}/\digamma_t) + A_t \\ M_{t+1} = U_{t+1} - E(U_{t+1}/\digamma_t) + M_t \end{cases}$$

Les suites (M_t) et (A_t) sont ainsi déterminées de manière unique, et on voit que (M_t) est une martingale et que le processus (A_t) est bien prévisible et croissant (parceque (U_t) est une sur-martingale)

Supposons maintenant que (U_t) soit l'enveloppe de Snell d'une suite adaptée (Z_t) ,on peut alors caractériser le plus grand temps d'arrêt optimal pour (Z_t) à l'aide du processus croissant (A_t) intervenant dans la décomposition de Doob de (U_t). ■

Proposition 3.2.4 *Le plus grand temps d'arrêt optimal pour (Z_t) est donné par:*

$$\tau_{\max} = \begin{cases} T \ ,si\ A_T = 0 \\ \inf\ \{t, A_{t+1} \neq 0\}\ ,si\ A_T \neq 0 \end{cases}$$

Ce proposition affirme donc que le temps d'arrêt optimal, c'est-à-dire l'instant d'exercice optimal pour le détenteur, est le premier instant où le processus croissant A_t cesse d'être nul.

Démonstration. [1] On voit facilement que $\tau_{\max}$ est un d'arrêt en utilisant le fait que $(A_t)_{0 \leq t \leq T}$ est prévisible. De l'égalité $U_t = M_t - A_t$ et du fait que $A_j = 0$ pour que $j \leq \tau_{\max}$, on déduit que $U^{\tau_{\max}} = M^{\tau_{\max}}$, ce qui entraîne que $U^{\tau_{\max}}$ est une martingale. Pour montrer l'optimalité , de $\tau_{\max}$, il suffit par conséquent de montrer l'égalité

$$U_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$$

Il reste à montrer que c'est le plus grand d'arrêt optimal. Cela résulte du fait que si τ est un temps d'arrêt, alors

$$E(U_\tau) = E(M_\tau) - E(A_\tau) = E(U_0) - E(A_\tau) < E(U_0)$$

et par conséquent U^τ ne pas être une martingale ■

3.2.5 Le just prix et le théorême d'arrét optimal

Le just prix ‹calcul du prix par récurrence rétrograde›

On note:

•S_t :Le cours de l'actif sous -jacent en t.

•$Z_{t:}$:Le pay-off de l'option en t.

•U_t :La valeur de l'option en t.

Le Pay-off en T d'un put est $(K - S_T)_+$,à quel prix faut-il vendre l'option en $T-1$?

-L'acheteur ahéte l'option en $T-1$ et exerce immédiatement. Il gagne Z_{T-1} , il faut donc au moins vendre l'option Z_{T-1}

-L'acheteur ahéte l'option mais ne l'exerce qu'en T. En T le vendeur devra payer $Z_{T.}$ Il doit donc faire payer à l'acheteur la somme qui permettra en T de fournir Z_T, c'est-à-dire $\frac{1}{1+r}E^*(Z_T/\mathcal{F}_{T-1})$.

Donc par récurrence on obtient:

$$\forall t \in \{1,.,T\} \qquad U_{t-1} = \max\left(Z_{t-1}, \ \frac{1}{1+r}E^*(U_t/\mathcal{F}_{t-1})\right)$$

Théorême d'arrét optimal

A quel moment un exercice anticipé est intéressant pour le détenteur de l'option américaine?

En réalité , il eixste une courbe dans l'espace (t, S_t) appelée *la frontiére d'exercice qui a la propriété suivante:*

·Quand le cours de l'actif sous jacent S_t ne franchit pas cette courbe, l'exercice anticipé n'est pas intéressant (il est préférable de garder l'option). Mais dés que le cours la franchit, il est intéressant d'exercer et il même préférable de le faire sans attendre. On ne sait pas calculer l'équation explicite de cette courbe mais on peut en calculer des approximations, on peut montrer que cette frontiére d'exercice est lieu d'un temps d'arrét appelé *temps d'arrêt optimal. On a le théoréme suivant:*

Théorème 3.2.4 *Si $\tau_{t,T}$ désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeur dans $[t,\ T]$,le prix à l'instant t de l'option américaine de payoff (Z_t) est donée par*

$$U_t = \sup_{\tau \in \tau[t,T]} \frac{1}{(1+r)^{T-1}} E^*(Z_\tau/\mathcal{F}_t)$$

le maximum étant atteint pour le temps d'arret τ_t défini par:

$$\tau_t = Min\ \{s \in [t, .T]\,, \quad U_s = Z_s\}$$

Remarque 3.2.1 *Si on a applique ce théoreme au cas où $t = 0$, la prime d'une option américaine $U_0 = \frac{1}{(1+r)^T}\ E^*(Z_{\tau_0}\ /\mathcal{F}_t)$, où τ_0 est le premier instant où le prix de l'option égale au payoff.*

3.2.6 Options américanes et européennes

Proposition 3.2.5 *Soit C_t la valeur à l'instant t d'une option américaine décrite par une suite adaptée $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ et soit c_t la valeur à l'instant t de l'option européenne*

Alors, on a $C_t \geq c_t$

De plus, $c_t \geq Z_t$ pour tout t, on a

$$c_t = C_t \qquad \forall t \in \{0, 1, ., T\}$$

Démonstration. Puisque la valeur actualisée $\left(\tilde{C}_t\right)$ est une sur martingale P^*,on a:

$$\tilde{C}_t \geq E^*\left(\tilde{C}_T/\mathcal{F}_t\right) = E^*\left(\tilde{c}_t/\mathcal{F}_t\right) = \tilde{c}_t.$$

D'où $C_t \geq c_t$

Si on a $c_t \geq Z_t$, pour tout , alors la suite $(\tilde{c}_t)$, qui est une martingale sous P^* , apparaît comme une sur-martingale (sous P^*) majorant la suite $\left(\tilde{Z}_t\right)$ et par conséquent :

$$\tilde{C}_t \leq \tilde{c}_t \qquad \forall t \in \{0, 1, ., T\}$$

D'où l'égalité. ■

Remarque 3.2.2 *L'inégalité $C_t \geq c_t$ est bien naturelle, puisque l'option américaine offre à son acheteur plus de droits de l'option européenne.*

Call américaine et call européenne

La proposition précédente a pour conséquence le résultat surprenant suivant:

Proposition 3.2.6 *En supposant que l'actif sous-jacent S_t ne distribue pas de dividende, le prix d'un call américain sur S_t est égal au prix du call européen de même date et même prix d'exercice . Autrement dit, la prime d'exercice anticipée est nulle.*

Preuve. [1] , [23] Posant ,$Z_t = (S_t - K)_+$, et appelant c_t le prix à l'instant t d'un call européen d'échéance T, et d'un prix d'exercice K sur d'actif risqué, C_t est le prix du call américain correspondant.On a:

$$\begin{cases} \tilde{c}_t = (1+r)^{-T} E^* \left((S_T - K)_+ / \mathcal{F}_t \right) \\ \quad \geq E^* \left(\tilde{S}_t - K \ \ (1+r)^{-T} / \mathcal{F}_t \right) \\ \quad = \tilde{S}_t - K (1+r)^{-T} \end{cases}$$

En utilisant la propriété de martingale de $\left(\tilde{S}_t\right)$. D'ou $c_t \geq (S_t - K)_+ \ (1+r)^{-(T-t)} \geq (S_t - K)_+$ *puisque* $r \geq 0$. Comme $c_t \geq 0$, on a aussi $c_t \geq (S_t - K)_+$, et par la proposition (3.2.5), $C_t = c_t$.(Il y a donc égalité entre le prix du call européen et le prix du call américain de même échéance et même prix d'exercice). ∎

Remarque 3.2.3 *Cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas du put, ni dans le cas de calls sur devises ou sur actions distribuant des dividendes.*

3.2.7 Prix d'un put américain dans le modéle de C.R.R

Pour les même étapes (structure) avec l'options eroupéenne on calcul le prix d'un put d'un modéle binomial.

Exemple 3.2.1 *Nous supposons que, au cours des prochaines* 3 *années de remorquage,le cours des actions augmente* 10%, *ou diminnue* 5%,*par le aux d'interet gratuit sans risque*

$r = 3\%$, trouver la valeur d'un put américain sur un modéle binomial éstimé de tois période pour un strik $K = 62$€,écrit sur un prix sous-jacent actuel valant $S_0 = 60$€

On sait que:

$$\begin{cases} U_T = Z_T \\ U_t = \max(Z_t, S_t^0 E(\left(U_{t+1}/S_{t+1}^0\right) |\mathcal{F}_t) \qquad \forall t = 0, ..., T-1 \end{cases}$$

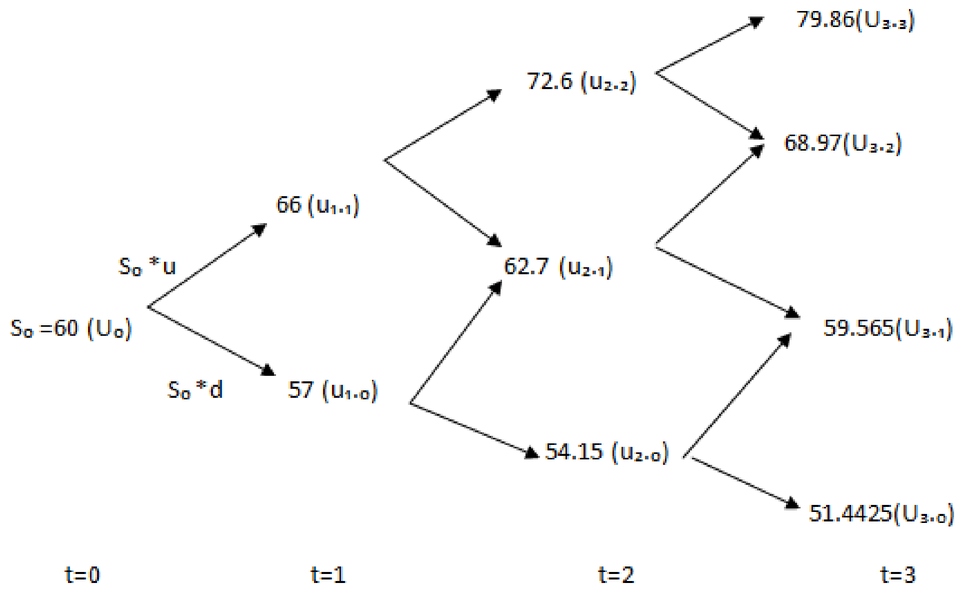
On obient la formule suivante:

$$\begin{gathered} U_{T,k} = Z_{T,k} \qquad 0 \leq k \leq T \\ U_{t-1,k} = \max(Z_{n-1}, \tfrac{1}{1+r}\left[qU_{t,k+1} + (1-q)\, U_{t,k}\right] \qquad 0 \leq k \leq t-1 \end{gathered} \tag{3.2.1}$$

Pour $t = 1, ...,T$ une probabilité risque neutre, $q{=}\frac{1+r-d}{u-d}{=}0.53, 1-q = 0.47$

$$\text{Pour} \begin{cases} t = 0: \quad S_0 = 60 \\ t = 1 \begin{cases} S_0 * u = 60\,(1+0.1) = 60\,(1.1) = 66 \\ S_0 * d = 60\,(1-0.05) = 60\,(0.95) = 57 \end{cases} \\ t = 2 \begin{cases} 66\,(1.1) = 72,6 \\ 66\,(0.95) = 62.7 \\ 57\,(0.95) = 54.15 \end{cases} \\ t = 3 \begin{cases} 72.6\,(1.1) = 79.86 \\ 72.6(0.95) = 68.97 \\ 62.7\,(0.95) = 59.565 \\ 54.15\,(0.95) = 51.4425 \end{cases} \end{cases}$$

Les treilles correspondant au sous-jacent est alors:



Pour trouvé la prime d'un put américain, en utilisant la formule(3.2.1)et

$$P^A = \max\left(max\left(K - S_t, 0\right), \frac{1}{1+r}\left[qU_{t,k+1} + (1-q)\,U_{t,k}\right] \;\; Pour \;\; 0 \leq k \leq T, \; \forall t = 0, ..., T-1\right) \tag{3.2.2}$$

1-On calcul les probabilités suivantes à l'aide de la formule: Pay-off= $\max\left(K - S_t, 0\right)$,

$$Pourt = 3 \begin{cases} U_{3.3} = \max\left(62 - S_3, 0\right) = 0 \\ U_{3.2} = \max\left(62 - S_3, 0\right) = 0 \\ U_{3.1} = \max\left(62 - 59.565, 0\right) = 2.435 \\ U_{3.0} = \max\left(62 - 51.4425, 0\right) = 10.5575 \simeq 10.557 \end{cases}$$

$$Pour \; t = 2 \begin{cases} U_{2.2} = \max\left(62 - S_2, 0\right) = 0 \\ U_{2.1} = \max\left(62 - S_2, 0\right) = 0 \\ U_{2.0} = \max\left(62 - 54.15, 0\right) = 7.85 \end{cases}$$

$$Pour \; t = 1 \begin{cases} U_{1.1} = \max\left(62 - S_1, 0\right) = 0 \\ U_{1.0} = \max\left(62 - 57, 0\right) = 5 \end{cases}$$

$$U_0 = \max(62 - S_0, 0) = 2$$

2-A l'aide de l'equation (3.2.2) , on choisir la valeur de la prime (l'exercice optimal) :

$$t = 2 \begin{cases} U_{2.2} = 0 \\ U_{2.1} = \frac{1}{1+r}\left[qU_{3.2} + (1-q)U_{3.1}\right] = \frac{1}{1.03}\left[0.53 * 0 + 0.47 * 2.435\right] = 1.1 \\ U_{2.0} = \frac{1}{1+r}\left[qU_{3.1} + (1-q)U_{3.0}\right] = \frac{1}{1.03}\left[0.53 * 2.435 + 0.47 * 10.557\right] = 6.07 \end{cases}$$

$$t = 1 \begin{cases} U_{1.1} = \frac{1}{1+r}\left[qU_{2.2} + (1-q)U_{2.1}\right] = \frac{1}{1.03}\left[0.53 * 0 + 0.47 * 0\right] = 0 \\ U_{1.0} = \frac{1}{1+r}\left[qU_{2.1} + (1-q)U_{2.0}\right] = \frac{1}{1.03}\left[0.53 * 0 + 0.47 * 7.85\right] = 3.58 \simeq 3.6 \qquad \text{car } 7.85>6.04 \end{cases}$$

$$t = 0 \ ,U_0 = \frac{1}{1+r}\left[qU_{1.1} + (1-q)U_{1.0}\right] = \frac{1}{1.03}\left[0.53 * 0 + 0.47 * 5\right] = 2.28 \simeq 2.3 = P^A \text{ car } 5>3.6$$

Les calculs de la probabilité de la prime pour n période sont les suivantes:

n	0	1	2	3
P(n)	2 2.3	0 0 5 3.6	0 0 0 1.1 7.85 6.07	0 0 2.435 10.557

La valeur d'un put américain $P^A = 2.3$

3.2.8 Stratégie de couverture avec consommation

Nous avons justifié la définition par récurrence retrograde du prix de l'option américaine en indiquant qu'avec cette valeur le vendeur de l'option pouvait se couvrir dans tous les cas.

Mais comme nous allons le voir maintenant il ne s'agit plus ici, comme dans le cas européen, d'une couverture exacte car autofinancée mais plutot d'une *surcouverture* encore appelée *couverture avec consommation.*

En effet, tant que la frontiére d'exercice n'a pas été franchie, la prime U_0, investie dans un portefeuille de couverture, gérée de façon dynamique comme pour la couverture d'une option européenne, fournit une couverture exacte en ce sens que la valeur du portefeuille à chaque instant est exactement égale à la valeur de l'option améicaine.

Si la frontiére d'exercice franchie, il y a deux possibilités:

• Soit le détenteur de l'option l'exerce, il recupére le pay-off et l'option cesse d'exister.

• Soit il n'exerce pas, et dans ce cas le vendeur peut constituer son portefeuille de couverture à un prix strictement inférieur au pay-off et réalise un gain aux dépens du détenteur négligeant.

Ce "revenu" durera aussi longtemps que le prix de l'action restera inférieur à la "frontiére d'exercice" et que le détenteur de l'option n'exerce pas son droit, rapportant une richesse strictement positive que l'on désigne sous le nom de *consommation* et qui restera acquise au vendeur de l'option.

La couverture d'une option américaine est donc une surcouverture qui peut soit être une simple couverture (exacte) soit générer une consommation, selon les cas. De façon simple et élégante de formaliser cette situation au moyen d'un résultat connu sous le nom de D´ecomposition de Doob-Meyer($Voir$ 3.2.3).

Chapitre 4

Évaluation des calcul d'options par simulations

La simulation est un outil de finance. Elle est utilisée comme méthode de calcul de prix d'options et comme instrument de gestion du risque.

Dans ce chapitre, nous allons procéder de la façon suivant . Dans un premier temps, nous débuterons par l'étude d'évaluation des options européennes par différentes méthodes qui nous permettront d'arriver à la simulation des modèles traités précédemment: Binomial et Black-Scholes.

Dans un deuxième temps , nous allons évaluer les options américaines en utilisant la technique des régressions linéaires des moindres carrés de Longstaff et Schwartz (2001).

4.1 Simulation de processus stochastiques

4.1.1 Simulation d'un mouvement brownien standard

Discrétisation du temps

Pour simuler le mouvement brownien qui est un processus à temps continu, il faut d'abord discrétiser le temps. Il s'agit de repartir l'intervalle $[0; T]$ en N périodes égales.

Soit Δt la longueur d'une période de temps tel que $\Delta t = \frac{T}{N}$. Nous simulerons le mouvement brownien au temps 0, Δt , $2\Delta t$, $3\Delta t, ..$

La propriété d'indépendance de la définition du mouvement brownien implique que:

$$\left\{W_{n\Delta t} - W_{(n-1)\Delta t}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi $\mathcal{N}(0; \Delta t)$.

Simulation de la trajectoire

Pour simuler une trajectoire du mouvement brownien jusqu'à l'instant $[T = (\Delta t \ N)]$, il suffit de:

• Générer N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrée réduite Z_n,

$$Z_n; n \in \{1, 2, ..., N\}$$

•Nous simulerons donc

$$W_0 = 0$$
$$W_{n\Delta t} = W_{(n-1)\Delta t} + \sqrt{\Delta t} Z_n, n \in \{1, 2, ..., N\}$$

• Approcher la trajectoire par interpolation linéaire ou par une fonction en escalier.

Voici le programme de simulation donné par le logiciel Matlab:

```
%Programme de simulation du mouvement brownien standard
rng(1)
T=1;n=1000;dt=T/n;
dW=zeros(1,n);
W=zeros(1,n);
dW(1)=sqrt(dt)*randn;
W(1)=dW(1);
for j=2:n
    dW(j)=sqrt(dt)*randn;
    W(j)=W(j-1)+dW(j);
end
plot(0:dt:T,[0,W],'r-')
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('W(t)','FontSize',16,'Rotation',0)
```

La figure suivante représente la simulation du mouvement brownien donné par le code Matlab:

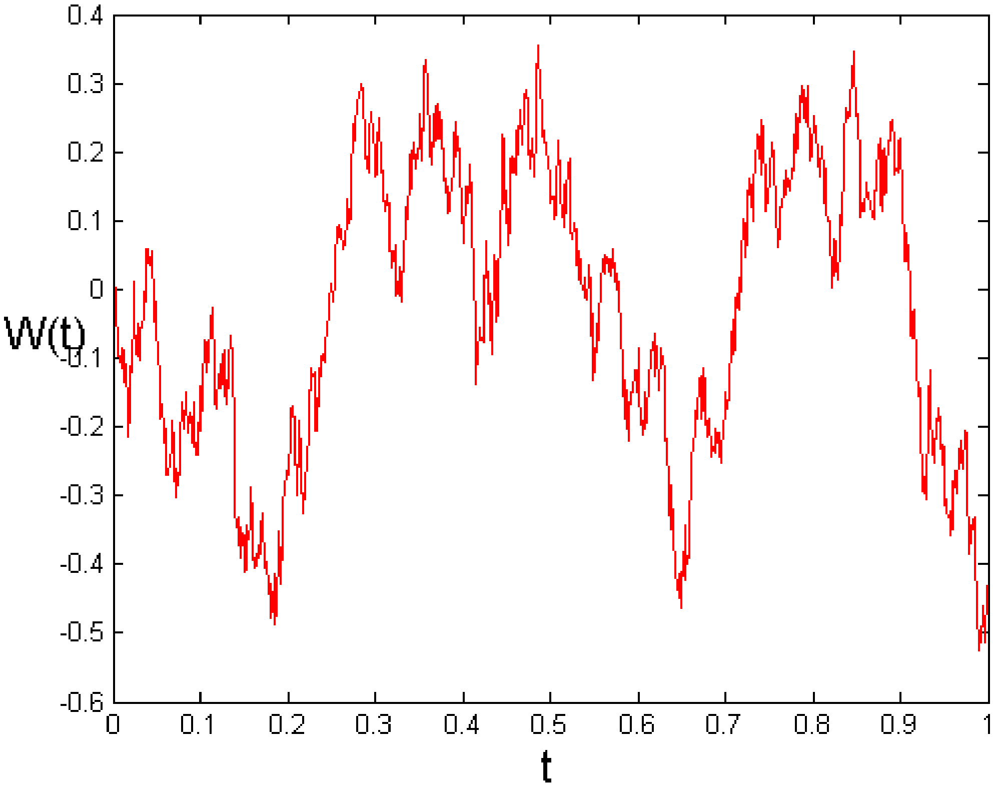


Figure 4.1-Trajectoire de mouvement Brownien

Maintenant on va simuler plusieurs trajectoires avec $m = 10000$, le résultat est illustrés dans la figure (4.2):

```
%Simulation de plusieurs trajectoires du mouvement brownien
clear all;
n=50;
m=10000;
dt=0.0001;
z=normrnd(0,1,m,n);
W=zeros(m+1,n);
temps=zeros(m+1,1);
for i=1:m
    W(i+1,:)=W(i,:)+sqrt(dt)*z(i,:);
    temps(i+1,1)=temps(i,1)+dt;
end
plot(temps,W);
```

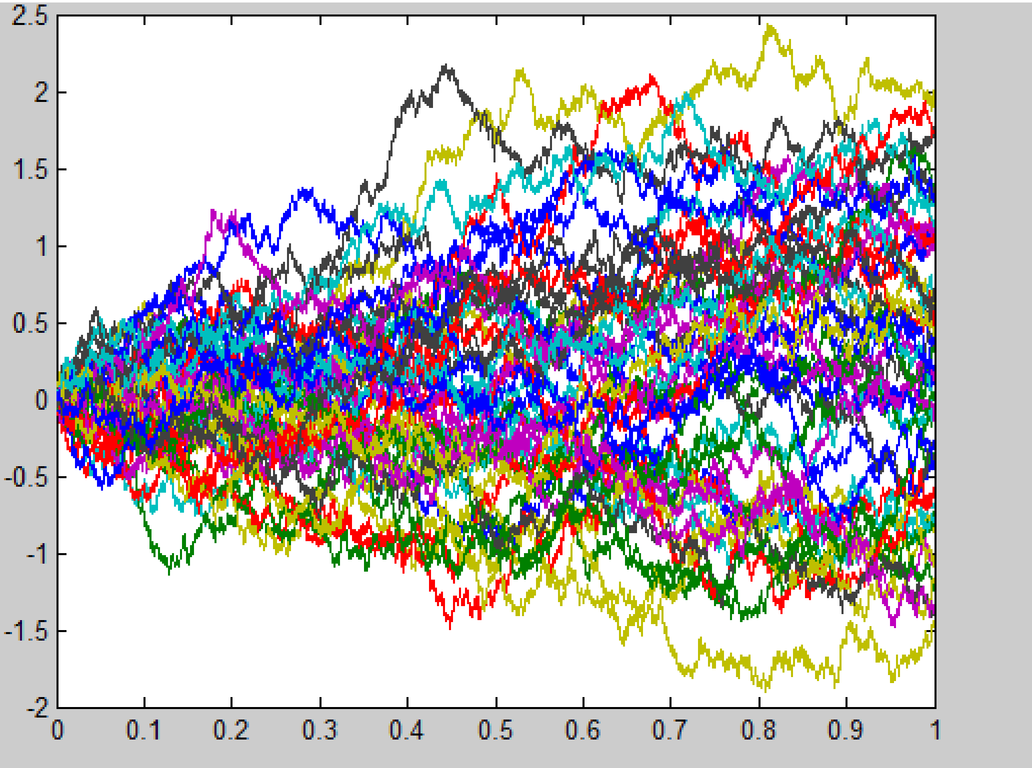


Figure 4.2- Simulation de 10000 trajectoires du mouvement Brownien

Remarque 4.1.1 *Plus la longueur de l'intervalle de temps Δt est petite, meilleure sera notre approximation.*

4.2 Simulation des équations différentielles stochastiques

Il s'agit d'approcher numériquement la solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{4.2.1}$$

partant d'un point X_0 donné.

Par définition , la solution du probléme (4.2.1) sur l'intervalle $[0.T]$ est un processus stochastique $\{X(t); t \in [0.T]\ \}$, à trajectoires continues, vérifiant pour tout $t \in [0.T]$,

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW_s.$$

Pour approcher cette solution, il existe plusieurs méthodes de simulations parmi que nous allons étudiées sont: **Schéma d'Euler-Maruyama et Shéma de Milstein.**

4.2.1 Schéma d'Euler -Maruyama

cette méthode consiste à calculer une approximation de $X(t)$ sur une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$.

Soit $\{X(t); t \in [0.T]\ \}$ le processus de diffusion solution de (4.2.1) Fixons un pas de temps $\Delta t > 0$,et notons $\tau_j$la suite des instants de discrétisation.

$$\tau_j = j\Delta t; \quad j \geq 0$$

Soit (ΔWj) la suite des incréments de la discrétisation correspendante du mouvement brownien $\{W_t; t \geq 0\}$.

$$\Delta W_j = W_{\tau_{j+1}} - W_{\tau_j} \;..\; j \geq 0$$

Le shéma d'Euler -Maruyama est donnée par :

$$X_{j+1} = X_j + b(X_j, t_j)\Delta t + S(X_{i,}t_j)(\Delta Wj)$$

Par défnition du mouvement brownien, la suite (ΔW_j) est une suite de vecteur aléatoire indépendants et de même loi. Chacune des coordonnées de ΔW_j suit la loi normale

$\mathcal{N}(0;\Delta t)$, de moyenne 0 et de variance Δ (d'écart-type $\sqrt{\Delta t}$).

Donc le schéma d'Euler-Maruyama devient :

$$X_{j+1} = X_j + b(X_j, t_j)\ \Delta t + S(X_j, t_j)\sqrt{\Delta t}\ Z_j \tag{4.2.2}$$

Où Z sont des variables i.i.d de loi $\mathcal{N}(0;1)$.

Ce schéma à un ordre forte convergence égale à 1/2.

À titre d'exemple on applique le schéma d'Euler-Maruyama sur le mouvement brownien géométrique.

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt = \sigma S_t dW_t \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

Où σ et μ sont des réels constantes, par identification avec l'équation (4.2.2) ,

$$b(X_j, t_j) = \mu St \quad \text{et} \quad S(X_j, t_j) = \sigma S_t$$

La solution analytique ou explicite de ce problème est connue :

$$S(t) = S(0)\exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)\right)$$

On prend $\mu = 1$, $\sigma = 1$, sur l'intervalle $[0; 1]$ avec $\Delta t = 1/n$, $n = 2^8$. Le logiciel Matlab donne le programme suivant :

```
%Application du schéma d'Euler-maruyama sur le mouvement brownien
%géométrique
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Initialisation des paramétres%%%%%%%%%%%%%
rng('default')
mu=1;sigma=1;Szero=1;
T=1;n=2^8;dt=1/n;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%Simulation du mouvement brownien géométrique%%%%%%%%%%%%%
dW=sqrt(dt)*randn(1,n);%icrémentation du mouvement brownien
W=cumsum(dW);%discritisation du trajectoire du mouvement brownien
Strue=Szero*exp((mu-0.5*sigma^2)*(dt:dt:T)+sigma*W);
plot(0:dt:T,[Szero,Strue],'m-'),hold on
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Simulation du schéma d'Euleur-Maruyama%%%%%%%%%%%%
R=4;Dt=R*dt;L=n/R;
Sem=zeros(1,L);
Stemp=Szero;
for j=1:L
    Winc=sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
    Stemp=Stemp+ Dt*mu*Stemp+ sigma*Stemp*Winc;
    Sem(j)=Stemp;
end
plot(0:Dt:T,[Szero,Sem],'r--*'),hold off
legend('solution exacte','shéma dEuler','location','best')
xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('s','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
Erreur_EM= abs(Sem(end)-Strue(end));
```

La figure suivante montre le tracé d'une trajectoire de la solution exact (trait plein), et l'approximation correspondante donnée par le schéma (trait pointillé) :

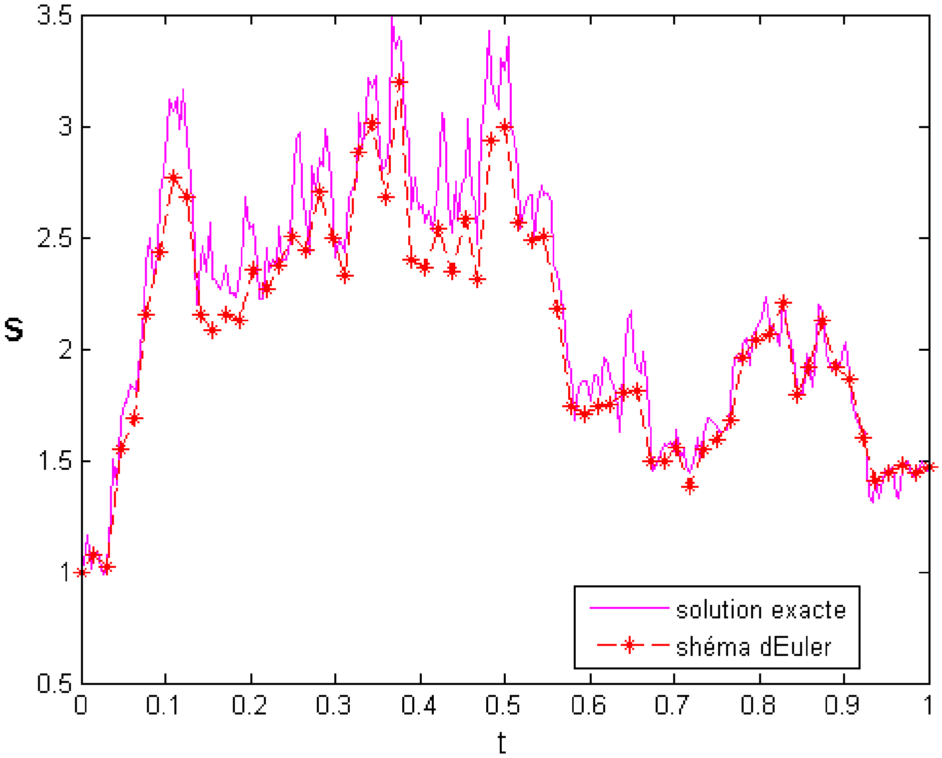


Figure 4.3- Comparaison de l'approximation d'Eluer-Maruyama et d'une trajectoire de l'EDS

4.2.2 Schéma de Milstien

Milstien à proposé une approximation du second ordre, utilise à nouveau le calcul stochastique différentiel. le schéma itératif est le suivant :

$$X_{j+1} = X_j + b(X_j,t_j)\Delta t + S(X_j,t_j)\ (W\tau_{j+1} - W\tau_j) + \tfrac{1}{2}\ S(X_j,t_j)\ \tfrac{\partial S}{\partial x}(X_j,t_j)\ [(W\tau_{j+1} - W\tau_j)^2 - \Delta t],$$
$$O\grave{u}\ i = 1; 2; 3; ...; N\ .\quad N \in \mathbb{N}$$

Cette approximation a un ordre fort de convergence égale à 1. Cette méthode améliore donc les instabilité numérique par rapport à la méthode d'Euler-Maruyama.

En utilisant l'exemple précédent celle du mouvement brownien géométrique, pour montrer la meilleure convergence vers la solution explicite, le programme est le suivant :

```
%Application du schéma de Milstien sur le mouvement Brownien
%géométrique
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%initialisation des paramètres%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;
rng('default')
mu=1;sigma=1;Szero=1;
T=1;N=2^8;dt=1/N;
%simulation du mouvement brownien géométrique
dW=sqrt(dt)*randn(1,N);%incrémentation du mouvement brownien
W=cumsum(dW);%discrétisation du trajectoire du mouvement brownien
Strue=Szero*exp((mu-0.5*sigma^2)*(dt:dt:T)+sigma*W);
plot(0:dt:T,[Szero,Strue],'m'), hold on
%%%%%%%%%%%%%%%%%le shéma de Milsien%%%%%%%%%%%
R=4;Dt=R*dt;L=N/R;
Sem=zeros(1,L);
Sml=zeros(1,L);
Xtemp=Szero;
Stemp2=Szero;
for j=1:L
    winc=sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
    Stemp2=Stemp2+(Dt*mu*Stemp2)+(sigma*Stemp2*winc)+0.5
    *sigma^2*Stemp2*(winc^2 -Dt);
    Sml(j)=Stemp2
end
plot(0:Dt:T,[Szero,Sml],'k--o')
legend('solution exacte','shéma de Mélstien','location','Best')
xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('s','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
Erreur_ML= abs(Sml(end)-Strue(end));
```

les trajectoires sont données dans la figure suivante:

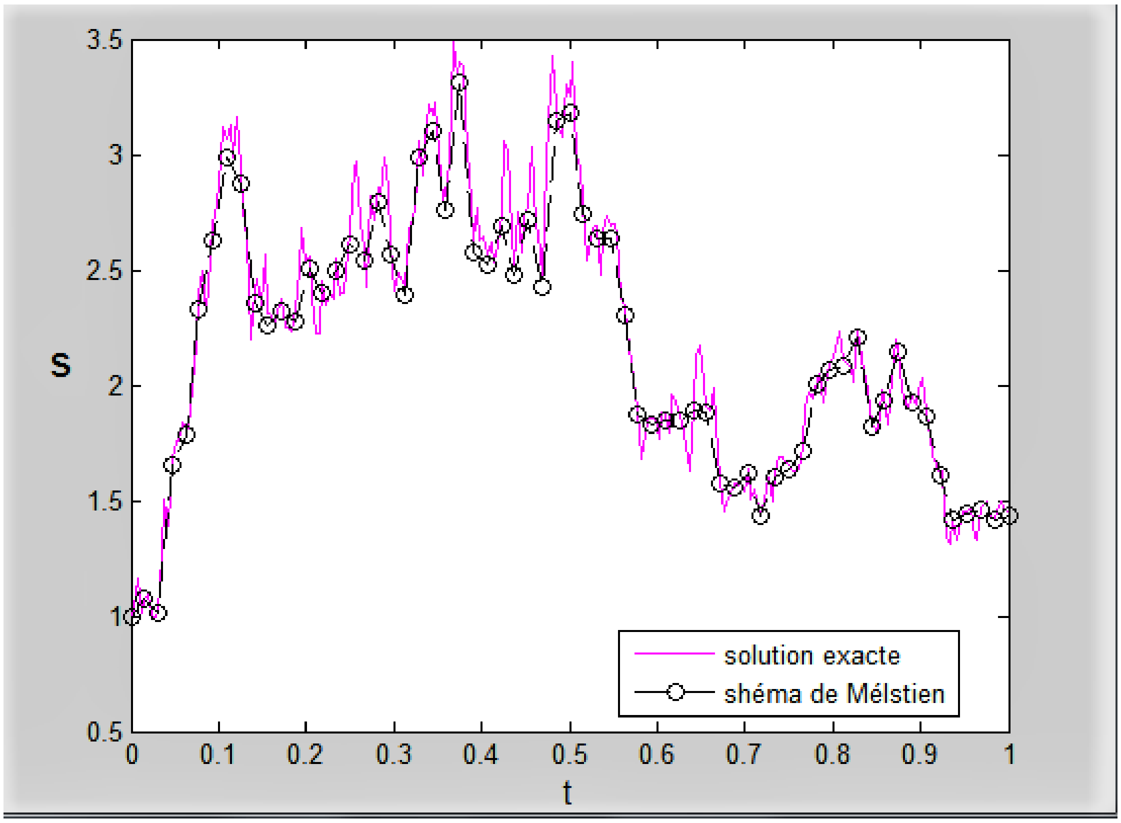


Figure 4.4- Comparaison de l'approximation de Milstien et d'une trajectoire de l'EDS précédente

4.3 Simulation des options européennes

4.3.1 Simulation du modèle Binomial

On reprend l'exemple précédent correspondant au Call européen où :

· Le prix d'exercice $K = 85$€.

· La date d'échéance est dans 3 mois.

· Le prix du sous-jacent $S = 90$€

·Le placement sans risque $r = 6\%$.

·Le facteur multiplicatif de la valeur de l'action à la hausse $u = 1,1$.

·Le facteur multiplicatif de la valeur de l'action à la baisse $d = 0,9$.

·La valeur de la prime pour $n = 4$ périodes est donnée par la formule suivante :

$$f = \sum_{j=a}^{N} C_N^j \, q^j (1-q)^{N-j} [u^j d^{N-j} S - K] e^{-Nr\,(T-t)},$$

$$\text{où} : a \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{Sd^N}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}$$

Afin de coder cette formule en Matlab, on utilise les fonctions de Matlab ceil () et nchoosek().

Voici le programme :

```
function Rep=Binomial(n,u,d,r,S0,Strike,T)
%Fonction utilise le modéle binomial pour le calcul d'une option d'achat
%n:Nombre de période
%u:Facteur multiplicatif de la hausse
%d:Facteur multiplicatif de la baisse
%r:taux d'interét sans risque
%S0:valeur initiale du sous-jacent
%Strike:prix de l'exercice de l'option
%T:Maturité
%calcul du taux d'intéret par périodes
InterestRate=exp(r*(T/n));
%Probabilité risque neutre
q=(InterestRate-d)/(u-d);
a=ceil(log(Strike/(S0*(d)^n))/(log(u/d)));
%Calcul de la valeur de la prime
ExpectedPayoffs=0;
for j=a:n
    inc=nchoosek(n,j)*q^(j)*(1-q)^(n-j)*((u)^(j)*(d)^(n-j)*S0-Strike);
    ExpectedPayoffs=ExpectedPayoffs+inc;
end
Rep=ExpectedPayoffs/(InterestRate)^n;
end
```

La valeur de la prime d'un Call est de valeur 10.5588€.

4.3.2 Simulation du modéle de Black-Scholes

Simulation de la solution de l'équation de Black-Sholes

Nous voulons simuler la solution de l'équation de Black-sholes (le mouvement brownien géométrique):

$$dS_t = \mu \; S_t \; dt + \sigma S_t \; dW_t$$

Avec la solution explicite:

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)]$$

Le programme de simulation est le suivant:

```
%Programme:simulation du la trajectoire de la solution de l'équation de
%Black-Sholes
clear all; clc;
rng('default');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Initialisation des paramétres%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
mu=1;sigma=0.3;S0=100;
T=1; n=1000;dt=T/n;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Résultat%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dW= sqrt (dt)*randn (1,n);
W= cumsum (dW);
St=S0*exp((mu-0.5*sigma^2)*([dt:dt:T])+sigma*W);
plot(0:dt:T,[S0,St],'b')
xlabel('t')
ylabel('s(t)')
```

La figure suivante représente la tajectoire de la solution de l'équation de Black-Sholes pour $S_0 = 100, \mu = 1, \sigma = 0.3$ simulée par le code Matlab.

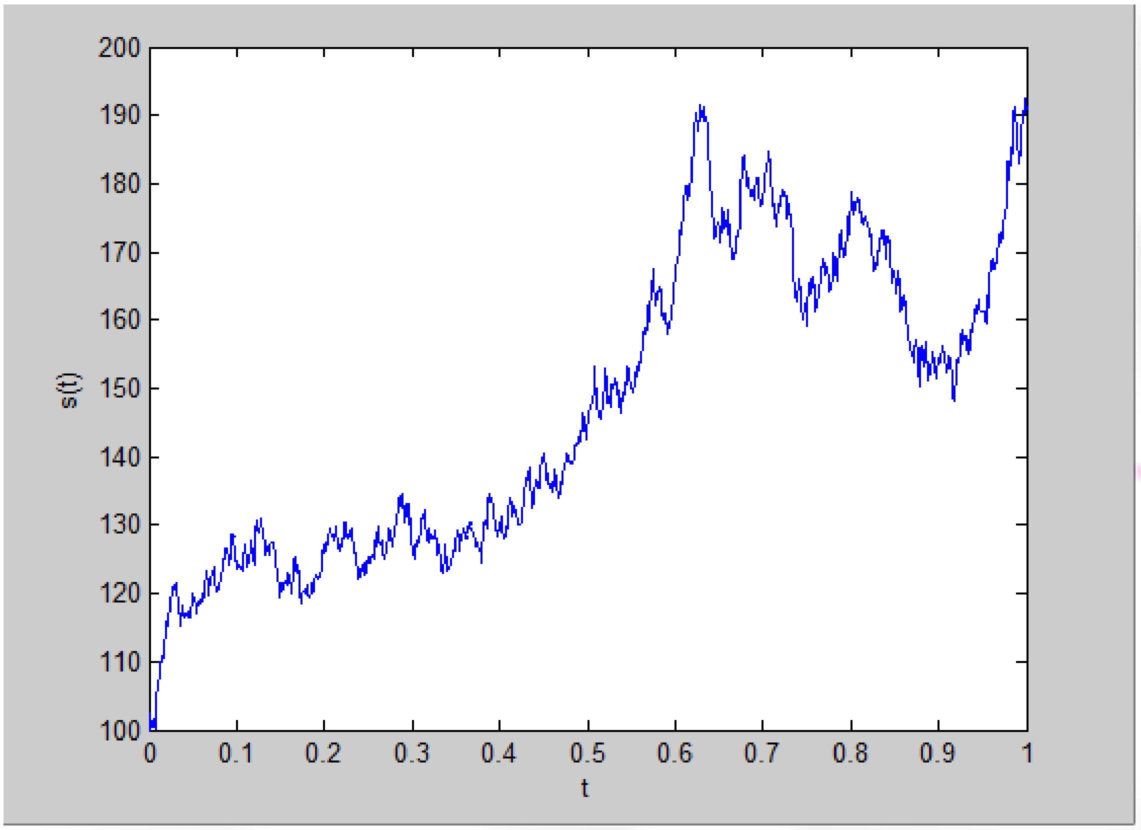


Figure 4.5-Trajectoire de mouvement Brownien géométrique

Simulation du prix d'un call

Nous avons montré dans le chapitre précédent,que la solution de l'équation d'un call de prix du sous-jacent S_t,de strike K et de maturité T est:

$$C(t, S_t) = S_t \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

Avec: d_1 et d_2 donnés précédement.

$\mathcal{N}(.)$ est la distribution cumulative de la loi normale.

A des fins pédagogiques,voici le programme d'évaluation d'un call:

```
%Programme:simulation du prix d'un call européen
function rep=CallBS(S0,K,T,r,sigma)
%S0:valeur initiale du sous-jacent
%K:prix de l'exercice
%T:temps avans l'échéance,en années
%r:taux d'intéret sans risque annul
%sigma:volatilté du sous-jacent
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%le résultat%%%%%%%%%%%%
d1=(log(S0./K)+(r+sigma.^2/2).*T)./(sigma.*sqrt(T));
d2=d1-sigma.*sqrt(T);
N1=0.5*erfc(-d1/sqrt(2));
N2=0.5*erfc(-d2/sqrt(2));
rep=S0.*N1-K.*exp(-r.*T).*N2;
end
```

Application numérique:

Pour $S_0 = 100, r = 0.05, \sigma = 0.3, K = 120, T = 1$. On obtient:

$$C_{BS} = 6.9040$$

Où C_{BS} désigne le prix du call européen du modéle de Black-Scholes.

Facteurs influençant le prix de l'option d'achat européenne: **►Influence du prix d'exercice de l'option:**

On fixe les paramétres $([S_0 = 100], [r = 0.05], [\sigma = 0.3], [T = 1ans])$ et on varié le K,on obtient à l'aide du code Matlab:

Prix d'exercice	120	125	130	135	150
Prix du call	6.9040	5.6915	4.6734	3.8237	2.0580

Plus le prix d'exercice du call est élevé,plus la valeur de l'option d'achat est faible.

►Influence de la maturité de l'option:

On fixe les paramétres$([S_0 = 100], [r = 0.05], [\sigma = 0.3], [K = 120])$ et on varié le T,on obtient à l'aide du code Matlab:

Maturité du call	1ans	2ans	3ans	4ans	5ans
Prix du call	6.9040	13.5537	19.2324	24.2617	28.8053

Plus la maturité de l'option est élevée,plus la valeur de l'option d'achat est élevée.

▶**Influence du prix de l'actif sous-jacent:**

On fixe les paramétres($[T = 1ans], [r = 0.05], [\sigma = 0.3], [K = 120]$) et on varié le S_0,on obtient à l'aide du code Matlab:

Prix de l'actif sous-jacent	90	100	110	120	130
Prix du call	6.9040	13.5537	19.2324	24.2617	23.8158

Plus le prix de l'actif sous-jacent est élevé,plus la valeur du call est élevée.

▶**Influence du taux d'intérêt sans risque:**

On fixe les paramétres ($[S_0 = 100], [T = 1ans], [\sigma = 0.3], [K = 120]$) et on varié le taux d'intérêt sans risque r,on obtient à l'aide du code Matlab:

Taux d'intérêt sans risque	3%	5%	10%	15%	20%
Prix du call	6.2902	6.9040	8.6063	10.5466	12.7156

Plux le taux d'intérêt sans risque est élevé,plus la valeur du call est élevée.

▶**Influence de la volatilité du prix de l'action:**

On fixe les paramétres ($[S_0 = 100], [T = 1ans], [r = 0.05], [K = 120]$) et on varié la volatilité σ,on obtient à l'aide du code Matlab:

Volatilité du prix de l'action	10%	20%	25%	30%	40%
Prix du call	0..4625	3.2475	5.0254	6.9040	10.8060

Plus la volatilité de l'actif sous-jacent est élevéé,plus il y a de chances que la valeur du call soit élevée.

Méthode de Monte Carlo:

Remarquons de plus que si l'on cherche une représentation fidéle des phénoménes observés,on est rapidement confronté à des difficultés dues aux calculs non explicites.Les techniques de simulation vont nous permettre d'approcher numériquement ces calculs.Nous allons développer ici les méthodes qui sont souvent utiles,dans le contexte des mathématiques financiéres,car elles permettent de calculer le prix de n'importe quelle option pour peu que l'on sache l'exprimer sous forme de l'espérance d'une variable aléatoire que l'on sait simuler.Dans ce cas,la méthode de Monte-Carlo décrite plus loin permet alors d'écrire trés rapidement un algorithme permettant l'évaluation de cette option.

Outils théoriques: la loi forte des grands nombres et théoréme de la loi central limite

Le princip: on cherche à calculer une espérance

Considérons une variable aléatoire x de loi uniforme sur $]a,b[$,la méthode de Monte carlo consiste à approcher une intégrale I de fonction f définie sur l'intervalle $]a,b[$,tel que:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{avec: } I = (b-a)E[f(x)]$$

La valeur numérique de $E[f(x)]$ est souvent difficile à obtenir.C'ést pour cela qu'on l'estime par la méthode de Monte Carlo. L'espérance $I = E[f(x)]$ est approximé par la moyenne arithmétique

$$\hat{I}_n = \frac{1}{N}\sum_{I+1}^{N} f(x_i) \qquad \text{Où :}N : \textit{échantillon de v.a } x_i$$

La loi forte des grands nombres: Si (x_i) est une suite de v.a iid suivant la loi uniforme $U_{]a,b[}$.Alors:

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = E[f(x)].$$

le théoréme central limite: Si $f(x)$ est de variance finie,alors

$$\lim \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left[\hat{I}_n - I\right] \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Donc,aprés n simulations,cette approximation permet d'obtenir un intervalle de confiance de la forme:

$$IC = \left[\hat{I}_n - \sqrt{\frac{var(f(x)))}{n}}\,\mathcal{U}_{1-\frac{\alpha}{2}}; \hat{I}_n + \sqrt{\frac{var(f(x)))}{n}}\,\mathcal{U}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Où

$\mathcal{U}_{1-\frac{\alpha}{2}}$: Désigne le quantile de la loi normale centrée réduite de niveau $\dfrac{\alpha}{2}$.

Calcul de prix de l'option call:

On sait que:

$$S_T = S_0 \exp\left[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma W_T\right]$$

$(W_T)_{t\succeq 0}$ est un mouvement brownien standard.

On souhaite calculer par la méthode de Monté Carlo:

$$E\left[\max\left(S_T - K, 0\right)e^{-r(T-t)}\right]$$

C'est simplement le prix d'un call de maturité T, de prix d'exercice K, dans un modéle de Black et Sholes où le taux d'intérêt r est constant et l'actif risqué a une volatilité σ et une valeur initiale S_0.

Le programme de simulation est le suivant:

```
%Mc valorisation d'une option d'achat par la Méthode de Monte carlo
%S0:Vleur initiale du sous-jacent
%K :le prix d'exercice
%r:taux d'intert sans risque annuel
%sigma:la volatilité
%T:temps avant l'échéance,en années
%n:le nombre de trajectoires simulées
clear all;
rng('default')
n=input('donner la valeur n=');
%%%%%%%%%%%%Parametres initial values%%%%%%%%%%%%
S0=100;  K=120 ;  T=1 ; r=0.05 ;
sigma=0.3 ; DeltaT=T/n;
%%%%%%%%%%%%%%La formule de black&sholes%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
d1=(log(S0/K)+(r)*T)/(sigma*sqrt(T))+sigma*sqrt(T)/2;
d2=d1-sigma*sqrt(T);
CallTH=S0*normcdf(d1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2);
%%%%%%%%%Simulation du mouvement brownien géométrique%%%%
S= S0*exp((r-0.5*sigma^2)*T+sigma*sqrt(T)*randn(1,n));
%%%%%%%%%%%%%%%%calcul de la valeur actuelisée du "payoff"de l'option%%%%%%%
payoff=exp(-r*T)*max(S-K*ones(1,n),zeros(1,n));
CallSIM=mean(payoff);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%calcul de l'intervalle de confiance de niveau 95%%%%%
Inf =CallSIM-1.96*(std(payoff)./sqrt(n));
Sup=CallSIM+1.96*(std(payoff)./sqrt(n));
IC=[Inf,Sup];
```

Le tableau suivant représente les intervalles de confiance à 95% obtenus,en fonction du N nombres de simulation,lorsque $S_0 = 100, K = 120, r = 0.05, \sigma = 0.3, T = 1ans.$

Option d'achat			
N	CallTH(BS)	CallSIM(simulé)	IC(intervalle de confiance)
100	6.9040	11.3776	[6.0476; 16.7076]
1000	6.9040	6.4969	[5.4114; 7.5824]
10000	6.9040	6.8165	[6.4887; 7.1444]
100000	6.9040	6.8464	[6.7443; 6.9484]
1000000	6.9040	6.9119	[6.8794; 6.9443]

A chaque fois quand augmente le nombre de simulation la valeur du call simulé attient la valeur call théorique,on va illustrer dans la figure suivante.

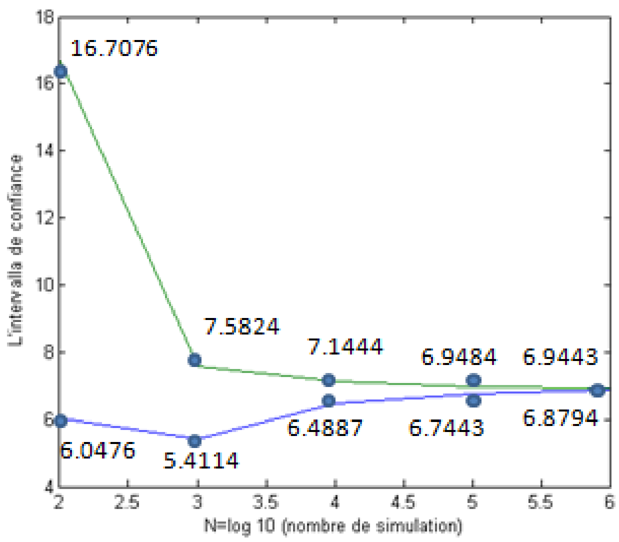


Figure 4.6-Intervalle de confiance à 95% pour le prix d'un call,avec la méthode de Monte Carlo.

4.4 Simulation des options américaines

Il n'existe pas de formule simple pour évaluer le prix d'une option américaine. Certains pourront l'évaluer avec un arbre binomial en examinant à chaque pas s'il est préférable d'exercer l'option immédiatement ou non.Cette méthode simple peut prendre beaucoup de temps de calcul pour obtenir une précision adéquate.

Il existe deux méthodes pour évaluer les prix des options américaines. Ces deux méthodes utilisent les simulations Monte carlo,au lieu des arbres binomiaux. Il s'agit de la méthode des moindres carrés(Least-Squares Methode) de Longstaff et Schwartaz (2001)et la technique de programmation dynamique avec l'agrégation des états stratifiés (Stratified State Agregation) Barraquand et Martineau (1995)....... et d'autres méthodes (méthode de différence fini,...)

Dans la présente section, nous présentons seulement la premiére méthode (Least-Squares Methode).

4.4.1 Méthode des moindres carrés: Longstaff et Schwartz (2001)

Quand il s'agit d'une option américaine, il est difficile de décider d'exercer l'option immédiatement ou de la garder dans son portefeuille jusqu'à sa date d'expiration. La stratégie optimale serait d'exercer l'option si le paiment immédiat était plus grand que les paiements éspérés et de la garder dans le cas contraire

Explication de la méthode

Supposons que le prix d'une action est donné par $S(t)$ et que la fonction de paiement est donnée par $f(S(t),t)$. Alors la stratégie optimal au $t=a$ serait:

$$\text{Exercice} = \begin{cases} \text{Oui} \;\; \text{si } f(S(a),a) > E_a[f(S(b),b)|I_a] \\ \text{Non} \;\; \text{si } f(S(a),a) < E_a[f(S(b),b)|I_a] \end{cases},$$

Où:

$$E_a[f(S(b),b)|I_a] \text{ est l'éspérance au temps } t=a \text{ des paiments futurs } b>a)$$
$$I_a \text{ représente l'information disponible au temps } t=a$$

Il est donc essentiel de connaître l'espérance des paiements futurs pour bien évaluer le prix d'une option américaine. La méthode des moindres carrés nous donne une technique pour le faire.

Nous débutons par générer N trajectoires pour le prix du sous-jacent S. Par la suite,on doit régresser les paiments futurs pour chaque trajectoire, sur des fonctions de base F_i qui dépendent du prix de S.

Posons Y comme étant le vecteur des paiements futurrs pour les N trajectoires et 1, $F_1(S)$ et $F_2(S)$ comme nos fonctions de base. On régresse Y sur ces fonctions de base, ce qui nous donne une expression:

$$E(Y|S) = \alpha + \beta F_1(S) + \gamma F_2(S) \tag{4.4.1}$$

Nous donnant l'éspérance des paiments futurs en fonction de S.Cette expression trouvée nous permet de décider s'il est préférable d'exercer immédiatement ou d'attendre encore une période.

Pour bien visualiser la méthode, nous proposons d'effectuer les calculs sur un put américain

Supposons que $S(0) = S_{Depart} = 1$,que le prix d'exercice $K = 1.10$, que la durée de l'option est trois ans ($T = 3ans$) et l'option exerçable aux temps 1, 2 et 3. Le taux sans risque $r = 6\%$, la volatilité $\sigma = 1$.

Si $S_{Depart} \neq 1$, il est préférable de la normaliser à

$$S_{Depart} = 1$$

et le

$Strike_{Nauveau} = \frac{K}{S_{Depart}}$ =1.10 Pour réduire les erreurs d'estimation dans les régressions.

La présentation par le code MATLAB:

Voici un programme $MATLAB$.représentant une implémentation de l'algorithme de la méthode des moindres carrés.Le programme comporte une foncion qui génère les trajectoires et une autre qui effectue la régression pour évaluer les prix en reculant d'un pas de temps.

```
function LSM
rng('default')
%Fonction calculant le prix d'une option de vente américaine en uilisant
%la méthode des moindres carrés.
T=3;%Echéance
TempsPresent=T;%Temps avant échéance
NbPas=3;%Nombre de pas
K=1.10;%Prix d'exercice
sigma=1;%Volatilité de l'actif
NbTraj=4;%Nombre de trajectoires
DeltaT=T/NbPas;
SqDeltaT=sqrt(DeltaT);
r=0.06;
SDepart=1;%Prix initial de l'actif
%Afin d'augmenter la précision des régressions,
%on prend un prix initial de 1
%et on réduit le prix d'exercice en conséquent
S0=1;%
Strike=K/SDepart;
%Nous générons les trajectoires du prix de l'actif
S=GenerePaths(NbTraj,NbPas,DeltaT,SqDeltaT,r,sigma,S0);
%Payoff est un vecteur formé des flux monétaires les plus élevés
%en utilisant une stratégie optimale
Payoff=zeros(2*NbTraj,1);
Payoff(:,1)=max(0,Strike-S(:,NbPas+1));
%Boucle parcourant les pas  en partant de l'échéance
for cptPas=1:NbPas-1
    %Actualisation du vecteur Payoff
    Payoff=exp(-r*DeltaT)*Payoff
    TempsPresent=TempsPresent -DeltaT
    %Calcul du nouveau vecteur Payoff en regardant si il est optimal
    %d'exercer l'option immédiatement
    Payoff=PasArriere(Payoff,Strike,TempsPresent,NbTraj,r,DeltaT,
    S(:,NbPas+1-cptPas))
end
%Calcul du prix de l'option
Prix=mean(exp(-r*DeltaT)*Payoff)
%Calcul du prix de l'option avec la valeur de départ de l'actif
disp(Prix*SDepart)
end
```

1-Le programme suivant donne seulement les résultats des simulations des valeurs de S qui'ls sont présentés dans le tableau (4.7):

```
function S=GenerePaths(NbTraj,NbPas,DeltaT,SqDeltaT,r,sigma,S0)
%fonction qui simule les trajectoires pour le prix de l'actif
dW=SqDeltaT*randn(NbTraj,NbPas);
dW=cat(1,dW,-dW);
Increments=(r-(sigma^2)/2)*DeltaT+sigma*dW;
LogPaths=cumsum([log(S0)*ones(2*NbTraj,1),Increments],2);
S=exp(LogPaths);
end

```

Numéro	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	1.0000	1.1026	0.9767	22.5296
2	1.0000	4.0305	0.7020	7.2112
3	1.0000	0.0673	0.0281	0.0047
4	1.0000	1.5253	1.3838	18.5361
5	1.0000	0.3762	0.1761	0.0032
6	1.0000	0.1029	0.2451	0.0099
7	1.0000	6.1647	6.1254	15.2157
8	1.0000	0.2719	0.1243	0.0038

Tableau 4.7- *Trajectoires des simulations de l'actif sous-jacent*

Pour utiliser la méthode des moindres carrés, nous devons débuter par la fin et remonter le temps jusqu'au temps $t = 0$. Au temps 3, le détenteur de l'option exerce seulement si l'option lui rapporte.

2-La matrice de paiements au temps $t = 3$ est alors donnée par le tableau (4.8):

:

Numéro	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	-	-	0
2	-	-	0
3	-	-	1.0953
4	-	-	0
5	-	-	1.0968
6	-	-	1.0901
7	-	-	0
8	-	-	1.0962

Tableau 4.8- Paiements à $t = 3$

Pour la vérifier manuelment:

$$\begin{aligned} \mathit{Payoff}_{Put} &= \max(Strike - S_3, 0) = \max(\frac{K}{S_{Depart}} - S_{3,N}, 0) \\ &= \max\left(1.10 - S_{3,N}\right), \qquad N \in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \end{aligned}$$

$$\text{Pour} \begin{cases} n = 1, 2, 4, 7....\mathit{Payoff}_{Put} = 0 \\ n = 3 \text{ ......} \mathit{Payoff}_{Put} = \max(1.10 - 0.0047, 0) = 1.0953 \end{cases}$$

3-Maintenant, nous devons déterminer pour quelles trajectoires il est préférable d'exercer au temps $t = 2$.

• Pour l'actif sous-jacent à $t = 2$, seulement 6 trajectoires doivent être considérées car les 2 trajectoires autres auraient des paiements négatifs.

• $Y_{t=3}$ représentée les paiements espérés actualisés:

$$Y_{t=3} = e^{-r\Delta T} * \mathit{payoff}$$

Où:

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{T}{N} = \frac{3}{3} = 1, ...N : \text{Nombre de période.} \\ e^{-r\Delta T} = e^{-0.06*1} = 0.9418 \simeq 0.9418 \\ \mathit{payoff} = \text{Paiements à } t = 3 \end{cases}$$

Nous obtenons la situation suivante représentée au tableau (4.9)

Numéro	$S_{t=2}$	$Y_{t=3}$
1	0.9767	$0.0000 * 0.9418 = 0.0000$
2	0.7020	$0.0000 * 0.9418 = 0.0000$
3	0.0281	$1.0953 * 0.9418 = 1.0315$
4	$-$	$-$
5	0.1761	$1.0968 * 0.9418 = 1.03296 \simeq 1.0330$
6	0.2451	$1.0901 * 0.9418 = 1.0266$
7	$-$	$-$
8	0.1243	$1.0962 * 0.9418 = 1.0323$

Tableau 4.9- Premiére régression

On outil le programme pour trouver les paramétre de l'équation (4.4.1 :)

$$A = inv\left[\acute{X}, X\right] * \acute{X} * Y$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2335 \\ -1.6803 \\ 0.3261 \end{bmatrix}$$

Nous prenons 1, S et S^2 comme fonctions de base. On doit donc régresser Y sur ces fonctions et nous obtenons:

$$E\left[Y|S\right] = 1.2335 - 1.6803\ S + 0.3261.S^2$$

Pour effectuer ces calculs, nous avons seulement besoin d'évaluer le produit matriciel pour obtenir les coefficients de régression

$$\left(X^{\top} X\right)^{-1} X^{\top} Y = (1.2335, -1.6803, 0.3261)^{\top}$$

où :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & S_1 & S_1^2 \\ 1 & S_2 & S_2^2 \\ 1 & S_3 & S_3^2 \\ 1 & S_5 & S_5^2 \\ 1 & S_6 & S_6^2 \\ 1 & S_8 & S_8^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9767 & 0.9540 \\ 1 & 0.7020 & 0.4928 \\ 1 & 0.0281 & 0.0008 \\ 1 & 0.1761 & 0.0310 \\ 1 & 0.2451 & 0.0601 \\ 1 & 0.1243 & 0.0155 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0315 \\ 1.0330 \\ 1.0266 \\ 1.0323 \end{pmatrix} \text{ si } S_{1,2,3,5,6,8} \in (t=2)$$

À l'aide de l'équation de régression, nous évaluons la fonction $E[Y|S]$ pour les différentes valeurs de S au temps $t = 2$.

$$\begin{aligned} E[Y|S = 0.9767] &= -0.0965 \\ E[Y|S = 0.7020] &= 0.2146 \\ E[Y|S = 0.0281] &= 1.1865 \\ E[Y|S = 0.1761] &= 0.9477 \\ E[Y|S = 0.2451] &= 0.8412 \\ E[Y|S = 0.1243] &= 1.0296 \end{aligned}$$

4-Nous les comparons ensuite aux paiements obtenus en exerçant l'option immédiateme. Cela nous donne un tableau (4.10) à l'aide de la programme:

Numéro	Exercice=$max[K - S_2, 0]$	Continuation
1	0.1233	-0.0965
2	0.3980	0.2147
3	1.0719	1.1865
4	-	-
5	0.9239	0.9477
6	0.8549	0.8413
7	-	-
8	0.9757	1.0297

Tableau 4.10-Evaluation de l'exrcice au temps t= 2

On remarque pour les valeurs d'exercice des trajectoires $1, 2, 6$ est supérieur par rapport à les valeurs des continuation. Nous voyons alors qu'il est préférable d'exercer l'option au temps 2 pour les trajectoires $1, 2, 6$. Pour les simulations $3, 5$ et 8, l'espérance des paiements est plus élevée en gardant l'option sans l'exercer.

5-Maintenant, en inscrivant les paiements des trajectoires $1, 2, 6$ pour le temps 2, nous avons la matrice de paiements au tableau (4.11):

Numéro	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	$-$	0.1233	0.0000
2	$-$	0.3980	0.0000
3	$-$	0.0000	1.0953
4	$-$	0.0000	0.0000
5	$-$	0.0000	1.0968
6	$-$	0.8549	0
7	$-$	0.0000	0.0000
8	$-$	0.0000	1.0962

Tableau 4.11- Paiements à $t = 2$

6-Nous devons refaire les mêmes étapes pour trouver les paiements au temps $t = 1$, nous devons déterminer pour quelles trajectoires il est préférable d'exercer au temps $t = 1$. Pour $t = 1$, seulement 4 trajectoires donnent des valeurs de $S_{t=1}$ supérieures à $(Strike = 1.10)$ (numéro $1, 2, 4$ et 7) .Il faudra donc considérer les 4 autres trajectoires dans la régression.Nous avons le tableau (4.12)

Numéro	$S_{t=1}$	$Y_{t=2}$
1	$-$	$-$
2	$-$	$-$
3	0.0673	$1.0953 * 0.9418^2 = 0.9715$
4	$-$	$-$
5	0.3762	$1.0968 * 0.9418^2 = 0.9728$
6	0.1029	$0.8549 * 0.9418 = 0.8051$
7	$-$	$-$
8	0.2719	$1.0962 * 0.9418^2 = 0.9722$

Tableau 4.12- Deuxiéme régression

7-Aprés avoire effectué effectué la régression, nous obtenons:

$$E\left[Y|S\right] = 0.9213 - 0.3700\ S + 1.4715.S^2$$

Pour effectuer ces calculs, nous avons seulement besoin d'évaluer le produit matriciel pour obtenir les coefficients de régression. À l'aide à la formule (4.4.1) et paralléles avec le code ***MATLAB***, on a:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9213 \\ -0.3700 \\ 1.4715 \end{bmatrix}$$

Où:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & S_3 & S_3^2 \\ 1 & S_5 & S_5^2 \\ 1 & S_6 & S_6^2 \\ 1 & S_8 & S_8^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.0673 & 0.0045 \\ 1 & 0.3762 & 0.1415 \\ 1 & 0.1029 & 0.0106 \\ 1 & 0.2719 & 0.0740 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0.9715 \\ 0.9728 \\ 0.8051 \\ 0.9722 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad S_{3,5,6,8} \in (t=1)$$

Nous évaluons la fonction $E\left[Y|S\right]$ pour les différentes valeurs de S au temps $t = 1$.

$$\begin{aligned} E\left[Y \mid S = 0.0673\right] &= 0.9030 \\ E\left[Y \mid S = 0.3762\right] &= 0.9903 \\ E\left[Y \mid S = 0.1029\right] &= 0.8988 \\ E\left[Y \mid S = 0.2719\right] &= 0.9295 \end{aligned}$$

8-Nous devons ensuite comparer les paimements immédiats si l'option est exercée et les paiements espérés. Le tableau(4.13) présente ces montants. On voit alors que cette foi-ci, il est préférable d'exercer l'option immédiatement pour les trajectoires $3, 6$, pour $5, 8$ en gardant l'option sans l'exercer. Nous pouvons maintenant compléter la table d'exercice de l'option. Le tableau (4.14) présente les résultats, et à l'aide de programme ci-déssus

Numéro	Exercice=$max\,[K - S_1, 0]$	Continuation
1	–	–
2	–	–
3	1.0327	0.9030
4	–	–
5	0.7238	0.9903
6	0.9971	0.8988
7	–	–
8	0.8281	0.9295

Tableau 4.13-Evaluation de l'exrcice au temps t=1

Solution 4.4.1

Numéro	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0.0000	0.1233	0.0000
2	0.0000	0.3980	0.0000
3	1.0327	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	1.0968
6	0.9971	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	1.0962

Tableau 4.14-Paiment au temps t=1

```matlab
function Payoff=PasArriere(Payoff,Strike,TempsPresnt,NbTraj,r,DeltaT,S)
%Fonction qui utilise la méthode des moindres carrés afin de déterminer
%si il est préférable d'exercer l'option immédiatement
%Payoff: Ancien vecteur Payoff au temps t+1
%Strike: Prix d'exercice de l'option
%TempsPresent: temps t
%NbTraj: Nombre de trajectoires
%r: taux d'intéret
%DeltaT
%S: Vecteur des prix de l'actif au temps t
%vecteur contenant les trajets où le prix de l'actif est inférieur
%au prix d'exercice (sino il n'ést pas préférable d'exercer)
SelectedPaths=(Strike>S);
%Matrice des régresseurs
X=[ones(2*NbTraj,1).*SelectedPaths,(S.*SelectedPaths),....
(S.*SelectedPaths).^2];
%Vecteur des valeurs espérées
Y=Payoff.*SelectedPaths;
%Régression afin de déterminer les coefficients
A=inv(X'*X)*X'*Y;
%Calcule des valeurs espérées en n'exerçant pas l'option
Continuation=(X*A).*SelectedPaths;
%Valeurs en exerçant l'option immédiatemment
Exercice=max(0,Strike-S);
%Parcourt des trajectoires et décision s'il est préférable
%d'exercer ou non et mise à jour du vecteur Payoff.
for i=1:(2*NbTraj)
if ((Exercice(i,1)>0)&&(Exercice(i,1)>Continuation(i,1)))
Payoff(i,1)=Exercice(i,1);
end
end
end
```

Le prix de l'option de vente américaine est alors donné par la moyenne de tous les paiements actualisés.Dans ce cas-ci, le prix serait 0.5257€ à l'aide de programme principale.

Remarque 4.4.1 *De plus, on peut prendre plus de fonctions de base, ce qui permet d'obtenir une meilleure précision. Par exemple, Longstaff et Schwartz* (2001) *suggèrent d'utiliser les polynômes de Laguerre, Hermite, Legendre, Chebychev, etc.*

Conclusion générale

Cette étude est principalement centré sur le probléme des calcul d'options, qui à été le moteur de la théorie et reste l'exemple le plus frappant de la pertinence des méthodes de calcul stochastique en finance.

Nous avons exposé des outils mathématiques indispensables qui sont le calcul stochasique et les EDS. Ces derniérs ont été utilisées et appliquées tout au long de notre travail à travers les modéles présentés.

Le modèle binomial, est un modèle très utilisé du à sa simplicité et sa précision. Cela vient en grande partie de son utilisation pour la loi binomiale, qui est relativement simple et facilement applicable. Cette méthode retrace l'évolution d'un actif sous-jacent via un arbre et permet ainsi de trouver la valeur de la prime

Le modéle mathématique de Black-Scholes, il rest le modéle dominant sur les marché financiers car considéré comme une référence utilisé dans de nombreux secteurs (assurance-banque).Celui-ci calcule les cours possibles de l'actif sous-jacent à l'échéance, en partant de l'hypothèse qu'il s'agit d'une variable aléatoire suivant une loi gaussienne. Il détermine la valeur actualisée, au taux de marché monétaire, de l'option à la date T. Pour montre la fréquence de couvrerture sur la qualité du portefeuille en étudiér l'infuence des déffirentes paramétres sur le prix de l'option d'achat du modéle qu' t elle obtenus comme résultat via logiciel MATLAB

En finance,l'évaluation de la plupart des titres financiers implique le calcul de l'éspérance mathématique des payoffs,nous décrivons alors la méthode de la simulation pour appoximer ces éspérances mathématiques.

Les travaux précédement sur l'évaluation des options européennes. Mais il est difficile de trouver des formules exactes de valorisation pour les options américaines..Dans ce but les techeniques de simulations de Monté Carlo fournissent une approche assez accessible d'évalutaion de ces options, parmi que nous allons traitées est la méthode de moindre carrés de Longstaff et Schwartaz (2001)

On déduire que la méthode de moindre carrés de Longstaff et Schwartaz (2001), elle nous a permet d'obtenir une meilleure précision.au lieu des arbres binomiaux

Bibliographie

[1] D.Lambreton.B.Lapeyre. Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance. Ellipses Marketing, 2012.

[2] Nils Berglund, Martingales et calcul stochastique, Université d'Orléans, 2014.

[3] H.T.Huynh.V.Lai.I.Soumaré. Stochastic simulation and application in nance with MATLAB programs. Wiley, 2008.

[4] D.J.Higham. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic di erential equations. SIAM REVIEW, 2001.

[5] J.Berton, Calcul stochastique, M2 mathématiques, Université de Rennes 1, 2014.

[6] J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein : Options Pricing : a simplified approach, Journal of Financial Economics, 1979.

[7] A. Bensoussan: on the theory of option pricing. Acta Applicandae Mathematicae, 2:139-158? 1984.

[8] D.J.Higham. Black-Scholes option valuation for scienti c computing students. University of strathclyde, 2004.

[9] Encadreur M. Khaldi,Valorisation des titres contingents et évaluation des options par simulation , mémoire de master 2, Université de Boumerdes, 2016

[10] Rebonato, R , Interest rate option models, Wiley, 1998.

[11] Rubinstein, R, Y , Simulation and the Monte Carlo Method, Wiley , 1981..

[12] R.Partait.P.Poncet. Finance de marché Instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risque. Dalloz, 2014.

[13] S.Bossu.P.Henrotte. Finance des marchés, Techniques quantitatives et applications pratiques.Dunond, 2008.

[14] F.E.Racicot.R.Théoret. Finance computationnelle et gestion des risques ingénierie nancières avec applications Excel (visual Basic) et Matlab. Presse de l'Université du Québec,2006.

[15] E.G.Harb.A.Masset.P.Murat. Finance. Dunod, 2014..

[16] J.Teulie.P.Topsacalian. Finance. Vuibert, 2011.

[17] Desmond J. Higham, Black–Scholes Option Valuation for Scientific Computing Students, January, 2004.

[18] G.Hirigoyen. Finance d'entreprise. Deboeck, 2001.

[19] Mme Bouguima Equations. différentielles stochastiques. mémoire de master. Université Abou Bekr Belkaid de Telemcen

[20] J.F.Le Gall, Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique, Springer, 2013.

[21] H. P. McKean, Jr., Stochastic integrals, Probability and Mathematical Statistics, No. 5, Academic Press, New York, 1969.

[22] M.Miniconi, Petite introduction aux mathématiques des dérivés financiers, Université de Nice, 2008.

[23] J. Azéma. initation aux mathématiques financières. Février 2004.

[24] H.Pham, Optimisation et controle stochastique appliqués à la finance, Springer, 2007.

[25] Sidney Resnick, Adventures in stochastic processes, Birkhauser Boston Inc, Boston, MA, 1992.

[26] A. Verraux : Résolution de l'équatin de Black et Scholes ; Tampere University of technoloy, 2008.

[27] Huyên.Pham. Introduction aux mathématiques et modèles stochastiques des marchés financiers. Université paris 7. 2007.

[28] P.Alphonse.G.Desmuliers.P.Grandin.M.Levasseur. Gestion de portefeuille et marchés financiers. Pearson, 2013.

[29] R.Cobbaut.G.V.Berg. Gestion de portefeuille. Deboeck, 2004.

[30] L.Gallardo. Mouvement brownien et calcul d'Itô avec exercices corrigés. Hermann, 2008.

[31] Nicolas Bouleau. Processus stochastiques et applications. Hermann, Paris, 1988.

[32] Monique Jeanblanc. Cours de calcul stochastique. DESS IM EVRY. Option finance, 2002.