

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA BOUMERDES
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR



MEMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de mastère II
Filière : Génie civil
Option : structure

THEME

ELABORATION D'UN PROGRAMME D'ANALYSE M E F DES STRUCTURES PLANES PAR LA METHODE DES DEPLACEMENTS ET LA METHODE DES CONTRAINTES

Présenté par

M^r : BENGRAB REDA

Encadreur

Mr M.A. HAMADOUCHE (HDR)

Année universitaire 2016 – 2017

Table des matières

PARTIE A.....	4
INTRODUCTION.....	5
RESUME	6
CHAPITRE 1	7
1. EQUATIONS DE BASE	8
1.1. introduction	8
1.2. équations de l'élasticité dans le domaine tridimensionnel.....	8
1.2.1. Les équations d'équilibres	9
1.2.2. Relation déplacements déformations.....	9
1.2.3. Relations contraintes déformations loi de comportement.....	10
1.3. Equations de l'élasticité dans le cas plan.....	11
1.3.1. Contraintes planes	11
1.3.2. Déformations planes	13
1.4. Les équations d'élasticité en coordonnées polaires.....	14
1.5. Problème axisymétrique : structure à symétrie axiale	15
1.6. Structure a symétrie axiale	16
1.7. Résolution d'un problème d'élasticité	17
1.7.1. Principes fondamentaux d'analyse	17
1.7.2. Méthodes de résolutions analytique	18
1.7.3. Méthode de déplacement	18
1.7.3.1. Principe	18
1.7.3.2. Minimisation de l'énergie potentielle totale	18
1.7.4. Méthode des contraintes	20
1.7.4.1. Principe	20
1.7.4.2. Minimisation de l'énergie potentielle complémentaire	20
CHAPITRE 2	21
2. METHODE DES ELMENTS FINIS DE TYPE DEPLACEMENT	22
2.1. Définition	22
2.2. Classification des traitements.....	22
2.3. Etapes de calcul	23

2.4.	Formulation des caractéristiques d'un élément fini.....	23
2.4.1.	Présentation de l'élément isoparamétrique	24
2.4.2.	Repère naturel et repère cartésien	25
2.5.	Fonctions d'interpolation	26
2.5.1.	Fonctions d'interpolation de l'élément isoparamétrique	26
2.6.	Matrice d'interpolation des déformations.....	29
2.6.1.	Détermination de la matrice B pour l'élément isoparamétriques.....	30
2.7.	Matrice d'interpolation des contraintes	33
2.8.	Formulation des équations d'équilibre	34
2.8.1.	Expression de l'énergie potentielle totale d'un système.....	34
2.8.2.	Matrice de rigidité élémentaire	35
2.8.3.	Assemblage	36
2.9.	Prise en compte des conditions aux limites :	36
2.10.	La méthode de résolution du système linéaire	37
2.10.1.	Choix de la méthode de résolution	37
2.11.	Convergence.....	38
CHAPITRE 3		40
3.	METHODE DES CONTRAINTES (FORCES)	41
3.1.	Introduction.....	41
3.2.	Formulation du problème.....	41
3.2.1.	Principe du minimum de l'énergie complémentaire	41
3.2.2.	Discrétisation à l'aide de fonction de contraintes.....	42
3.2.2.1.	Fonction de contrainte d'AIRY	42
3.2.3.	Continuité des contraintes inter-éléments.....	45
3.3.	Développement de la fonction d'Airy	49
3.3.1.	Fonction de forme élément rectangulaire :	49
3.3.2.	Approximation de la fonction d'Airy par les polynômes d'Hermite.	51
PARTIE B.....		71
CHAPITRE 4.....		72
4.	PRESENTATION DU PROGRAMME ET EXEMPLES.....	73
4.1.	L'interface du programme et mode d'utilisation.....	73
4.1.1.	Pré-processeur	73
4.1.2.	Fichier de données.....	73

4.1.2.1.	Fichier de donnees methode des déplacements :.....	74
4.1.2.2.	Fichier de données méthode des contraintes :.....	75
4.2.	Validation du programme	88
4.2.1.	Validation des déplacements.....	88
4.2.2.	Validation des contraintes.....	91
4.3.	Interface du programme.....	94
4.4.	exemples de calcul.....	108
4.4.1.	Poutre console 02 éléments.....	108
4.4.2.	Poutre a 04 éléments.....	109
4.4.3.	Poutre a 08 éléments.....	111
4.4.4.	Poutre a 16 éléments.....	113
4.4.5.	Poutre a 32 éléments.....	116
4.4.6.	Exemple tunnel.....	127
4.4.7.	Exemple sol.....	148
4.4.8.	Exemple plaque trouée.....	153
ANNEXES.....		175
1.1.	ANNEXE 1 : intégration numérique de gauss	176
1.2.	ANNEXE 2 : Méthode de factorisation de Cholevsky.....	180

INTRODUCTION

Aujourd'hui, devant l'avènement des calculateurs électroniques et des micros-ordinateurs, qui ont permis le développement des méthodes numériques, les problèmes qui autrefois étaient considérés comme insolubles avec les méthodes de résolutions classiques sont devenus facilement accessibles.

Parmi ces méthodes numériques, une méthode qui est pratiquement la plus répandue et la plus utilisée pour ses performances de résolution des problèmes les plus complexes s'est distinguée très rapidement et qui est la méthode des éléments finis.

Cette évolution dans le domaine de la programmation a donc permis la création d'un certain nombre de logiciels d'éléments finis capables de faire des analyses linéaires, dynamiques et même non-linéaires pour des structures diverses rencontrées en Génie civil et pour différents matériaux les constituant; et qui se sont actuellement généralisés dans d'autres domaines comme la mécanique des fluides, le transfert de chaleur etc....

Ainsi la méthode des éléments finis consiste en la discrétisation d'un milieu continu en un milieu discret équivalent ;

- Le milieu est subdivisé en un nombre fini d'éléments géométriques simples
- Les équations aux dérivées partielles régissant le milieu et son comportement sont remplacées par des équations algébriques à l'aide des méthodes de minimisation d'erreur comme les méthodes des résidus pondérés.

Ainsi ce projet se propose de développer un programme qui permettrait de déterminer le comportement statique des structures planes par la méthode des éléments finis en se basant sur la méthode des déplacements et la méthode des contraintes .

Résumé

L'objectif de ce mémoire de fin d'études est le développement d'un programme informatique qui analyse par les deux méthodes des **déplacements** dite des éléments finis et la méthode des **contraintes**, les structures planes ayant un comportement linéaire et par le biais duquel on déterminerait le comportement statique de ces structures.

La première partie de ce travail traite en trois chapitres le fondement des deux méthodes déplacements et contraintes.

Dans le premier chapitre, nous développons les équations d'équilibre en élasticité, ainsi que les relations entre déformations – déplacements et contraintes – déformations.

Dans le second chapitre, nous présentons le fondement théorique et la méthodologie générale de la méthode des déplacements ou éléments finis pour les problèmes de la statique en contrainte plane et déformations planes.

Dans le troisième chapitre, nous présentons le fondement théorique et la méthodologie générale de la méthode des contraintes pour les problèmes de la statique en contrainte plane et déformations planes. Ainsi que le développement de la fonction D'Airy

Dans une deuxième partie, nous exploitons notre programme.

Nous commençons par sa validation en comparant les résultats qu'il nous fournit avec des résultats connus dans la littérature. Puis nous le déroulons pour un certain nombre d'exemples de déformations et de contraintes planes, en statique sol, tunnel, plaque et poutre ..., et présentant les fichiers de données le mode de calcul et les fichiers résultats et listings des déplacements et contraintes aux nœuds.

ملخص

الهدف من مذكرة التخرج هذه هو تطوير برنامج كمبيوتر على اساس طريقة العناصر المنتهية يقوم بمعالجة و دراسة المسائل المتعلقة بالأجسام المسطحة ذات السلوك الخطي في حالة السكون بطريقتين مختلفتين هما :

1. طريقة التنقلات

2. طريقة الضغوط

- الجزء الاول من هذه المذكرة مقسم الى ثلاثة ابواب نبين فيها الاسس النظرية للطريقتين السالفتي الذكر

- الباب الاول نعرض فيه معادلات التوازن في حالة المرونة و العلاقة الرياضية بين التشوه والانتقال , الضغط والتشوه .
- في الباب الثاني نتطرق الى الاسس النظرية و المنهجية العامة في طريقة التنقلات لحل المسائل المتعلقة بالأجسام المسطحة (تشوه مسطح او ضغط مسطح) في حالة السكون .
- في الباب الاخير ندرس نفس المسائل السالفة الذكر في الباب الثاني و لكن باستعمال طريقة الضغوط مع الاسهاب في شرح و عرض دالة AIRY و هي الدالة التي تتأسس عليها الطريقة الثانية .

- في الجزء الثاني من هذه المذكرة نقوم ببعض التطبيقات باستعمال البرنامج المطور لحل مجموعة من المسائل المختلفة بكاتى الطريقتين و نعرض في هذا الجزء طريقة عمل البرنامج و النتائج المحصلة عليها من تشوهات و تنقلات و ضغوط في كل اركان الجسم المدروس

Abstract

The objective of this thesis is the development of a computer program which analyzes by both methods the so-called finite element displacements and the constraints method, the structures plane having a linear behavior and by means of which Would determine the static behavior of these structures.

The first part of this work deals in three chapters with the basis of the two methods of displacement and constraints.

In the first chapter, we develop equations of equilibrium in elasticity, as well as the relations between deformations - displacements and stresses - deformations.

In the second chapter, we present the theoretical basis and the general methodology of the displacements or finite elements method for the problems of the static in plane stress and flat deformations.

In the third chapter, we present the theoretical basis and the general methodology of the stress method for static problems in plane stress and plane deformations. As well as the development of Airy

In a second part, we operate our program.

We begin by validating it by comparing the results it gives us with results known in the literature. Then we present it for a number of examples of deformations and plane stresses, static ground, tunnel, plate beam, presenting the data files calculation mode and files results and listings of displacements and constraints at nodes.

PARTIE A

INTRODUCTION

Aujourd'hui, devant l'avènement des calculateurs électroniques et des micros-ordinateurs, qui ont permis le développement des méthodes numériques, les problèmes qui autrefois étaient considérés comme insolubles avec les méthodes de résolutions classiques sont devenus facilement accessibles.

Parmi ces méthodes numériques, une méthode qui est pratiquement la plus répandue et la plus utilisée pour ses performances de résolution des problèmes les plus complexes s'est distinguée très rapidement et qui est la méthode des éléments finis.

Cette évolution dans le domaine de la programmation a donc permis la création d'un certain nombre de logiciels d'éléments finis capables de faire des analyses linéaires, dynamiques et même non-linéaires pour des structures diverses rencontrées en Génie civil et pour différents matériaux les constituant; et qui se sont actuellement généralisés dans d'autres domaines comme la mécanique des fluides, le transfert de chaleur etc....

Ainsi la méthode des éléments finis consiste en la discrétisation d'un milieu continu en un milieu discret équivalent ;

- Le milieu est subdivisé en un nombre fini d'éléments géométriques simples
- Les équations aux dérivées partielles régissant le milieu et son comportement sont remplacées par des équations algébriques à l'aide des méthodes de minimisation d'erreur comme les méthodes des résidus pondérés.

Ainsi ce projet se propose de développer un programme qui permettrait de déterminer le comportement statique des structures planes par la méthode des éléments finis en se basant sur la méthode des déplacements et la méthode des contraintes .

RESUME

L'objectif de ce mémoire de fin d'études est le développement d'un code de calcul en éléments en utilisant la méthode des déplacements et la méthode des contraintes, les structures planes ayant un comportement linéaire et par le biais duquel on déterminerait le comportement statique de ces structures.

Dans le premier chapitre, nous développons les équations d'équilibre en élasticité, ainsi que les relations entre déformations – déplacements et contraintes – déformations.

Dans le second chapitre, nous présentons le fondement théorique et la méthodologie générale de la méthode des déplacements pour les problèmes de la statique en contrainte plane et déformations planes.

Dans le troisième chapitre, nous présentons le fondement théorique et la méthodologie générale de la méthode des contraintes pour les problèmes de la statique en contrainte plane et déformations planes. Ainsi que le développement de la fonction D'Airy

Dans une deuxième partie, nous exploitons notre programme.

Nous commençons par sa validation en comparant les résultats qu'il nous fournit avec des résultats connus dans la littérature. Puis nous le déroulons pour un certain nombre d'exemples de déformations et de contraintes planes, en statique sol, tunnel, plaque et poutre ..., et présentant les fichiers de données le mode de calcul et les fichiers résultats et listings des déplacements et contraintes aux nœuds.

CHAPITRE 1

EQUATIONS DE BASE

1. EQUATIONS DE BASE

1.1. introduction

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes statiques et dynamiques, nécessite la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire.

L'analyse de ces équations présente les relations entre contraintes déformations dans le cas général tridimensionnel d'où dérive le cas particulier de l'élasticité plane et l'élasticité dans le cas unidimensionnel.

1.2. équations de l'élasticité dans le domaine tridimensionnel

A l'intérieur d'un solide soumis à des forces extérieures (volumiques et surfaciques) se créent des forces intérieures de telle façon que chaque point matériel soit soumis à neuf composantes de contraintes :

- 3 contraintes normales σ_{ii} tel que $i = 1,2,3$
- 6 contraintes tangentielles σ_{ij} tel que $i = 1,2,3$ et $j = 1,2,3$

L'équilibre d'un élément de volume $dv = dx.dy.dz$ du solide exige :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.1)$$

Où σ_{ij} : la contrainte sur une facette, dont la normale est dirigée suivant la direction i , dans la direction j .

1.2.1. Les équations d'équilibres

Les équations d'équilibres régissant l'équilibre d'un solide s'écrivent ;

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{dans } V \quad (1.2)$$

Où f_i : sont les composantes des forces de volume suivant les directions i .

Suivant une normale n (n_1, n_2, n_3) donnée, le vecteur contrainte est donné par :

$$Q_i = \sigma_{ij} \cdot n_j = T_i \quad \text{sur } S_T \quad (1.3)$$

Tels que $i, j = 1, 2, 3$

Où

σ_{ij} : tenseur des contraintes tel que $i, j = 1, 2, 3$

n_i : composantes de la normale tel que $j = 1, 2, 3$

Q_i : vecteur de force extérieur

1.2.2. Relation déplacements déformations

➤ Déformation directe

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} ; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} ; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

➤ Déformation de cisaillement

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} ; \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} ; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \quad (1.4)$$

Tels que $i, j = 1, 2, 3$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

1.2.3. Relations contraintes déformations loi de comportement

La relation contrainte déformations s'écrit sous la forme

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{ij} = -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \quad (1.6)$$

δ : Symbole de KRONECKER défini par : $\delta_{ij} = 1$ si $i=j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

L'inverse donne :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

1.3. Equations de l'élasticité dans le cas plan

Les problèmes d'élasticité plane sont classés en deux catégories

- ✓ Les contraintes planes
- ✓ Les déformations planes

1.3.1. Contraintes planes

Les contraintes planes reposent sur les suppositions suivantes

- Le solide est mince c'est à dire que sa dimension suivant x_3 est petite par rapport aux deux autres dimensions x_1 et x_2 .
- Le solide n'est pas chargé sur les faces dont la normale est dirigée suivant x_3

On peut citer comme exemples de structures étudiés en contraintes planes :

- ✓ Plaque
- ✓ Voiles minces

En tenant compte des hypothèses en contraintes planes

le tenseur de contrainte ne dépend que du vecteur de $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad ; \quad u_2 = u_2(x_1, x_2)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2) \quad \text{avec} \quad i, j = 1, 2$$

on dit alors que nous avons un état de contrainte plane par rapport au (ox_1, ox_2)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{12} = 2 \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{E} \quad \gamma_{13} = \gamma_{23}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) ; \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) ; \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & \nu \\ -\nu & 1 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Dans le cas des contraintes planes les déformations dépendent uniquement de $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$ et sont indépendantes de $\vec{X}_3$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(X_1, X_2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(X_1, X_2)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 & \nu \\ \nu & (1-\nu) & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ \nu & \nu & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu \varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} + 0 \varepsilon_{12} + (1-\nu) \varepsilon_{33}] = 0$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

Ces relations expriment que les contraintes et les déplacements (non nuls) sont les fonctions de x_1 et x_2 seulement.

Notons que u_3 n'est pas forcément nul et par conséquent ε_{33} peut être déterminé en fonction de σ_{ij} .

1.3.2. Déformations planes

Cet état est atteint, si les suppositions suivantes sont vérifiées :

La longueur suivant x_3 est importante par rapport aux deux autres :

exemple : - barrage - tunnel

en d'autre terme

Un état de déformation plan par rapport au plan (OX_1, OX_2)

$$u_i = u_i(X_1, X_2) \quad i = 1 ; 2 \quad u_3 = 0$$

$$u_3 = 0 \Rightarrow \varepsilon_{33} = 0$$

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$$

Notons que dans ce cas non plus σ_{33} n'est pas forcément nulle et qu'elle peut être déterminée en fonction des autres composantes . Les équations gouvernant ainsi ce cas se déduisent de (1, 7) et en tenant compte des relations (1,10) On obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_{11} - \nu(1 + \nu)\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_{22} - \nu(1 + \nu)\sigma_{11}] \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{G} (\sigma_{12})$$

d'où

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 0, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})), \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 & \nu \\ \nu & (1-\nu) & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ \nu & \nu & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

L'inverses de ces relations nous donne

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\lambda}{\nu} [(1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}] \\ \sigma_{22} &= \frac{\lambda}{\nu} [(1-\nu)\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}] \\ \sigma_{12} &= G\varepsilon_{12} ; \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & \nu \\ -\nu & 1 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

$$\sigma^T = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12})$$

On citera comme exemples étudiés en déformations planes

- Les talus
- Les murs de soutènement
- Les tunnels
- Les barrages poids

1.4. Les équations d'élasticité en coordonnées polaires

- Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + R = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + H = 0 \quad (1.15)$$

$$(r \equiv X_r, \theta \equiv X_\theta, z \equiv X_z, u = u_1, v = u_2, w \equiv u_3) \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{zz}) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr} - \nu \sigma_{zz}) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{r\theta} & \gamma_{rz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{rz} & \gamma_{\theta z} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\theta z} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \varepsilon_{rr} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2G \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} &= 2G \varepsilon_{zz} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{r\theta} &= G \gamma_{r\theta} \\ \sigma_{rz} &= G \gamma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} &= G \gamma_{\theta z} \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.5. Problème axisymétrique : structure à symétrie axiale

Si on a un solide de révolution autour de l'axe chargé de manière symétrique les composantes de déplacement sont indépendantes, les tenseur des contraintes et des déformation ont alors la forme suivante

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & \varepsilon_{rz} \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ \varepsilon_{rz} & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

$$\varepsilon^T = (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{zz})$$

$$\sigma^T = (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{zz})$$

1.6. Structure a symétrie axiale

Toutes les dérivés par rapport à θ disparaissent des équations d'équilibre ainsi que $\gamma_{r\theta}, \gamma_{z\theta}$

$$\sigma_{r\theta}, \sigma_{z\theta}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + R = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + Z = 0$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad ; \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{rr} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 & \nu \\ \nu & (1-\nu) & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ \nu & \nu & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

1.7. Résolution d'un problème d'élasticité

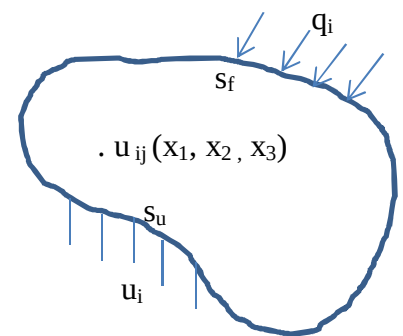
1.7.1. Principes fondamentaux d'analyse

Pour connaître la distribution des contraintes des déformations et des déplacements d'un corps élastique soumis à un système de forces on doit utiliser certaines conditions liées aux lois physiques, des propriétés des matériaux et la géométrie. C'est principes fondamentaux d'analyse, aussi appelés les trois aspects des problèmes de la mécanique des solides, sont les suivantes

- Les conditions d'équilibres $\sigma_{ij,j} = f_i$
Les conditions statiques doivent être satisfaites dans tout le corps
- Les relations contraintes déformations $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2G \varepsilon_{ij}$
Les propriétés du matériau doivent être conformes au comportement du matériau
- Les conditions de comptabilités .
La géométrie de la déformation et la distribution de la déformation doit être consistante avec préservation de la continuité de la matière.
- En plus les champs de contraintes déformations et déplacement doivent être conformes aux conditions de chargement imposées en limite. Ceci est connu sous la satisfaction des conditions aux limites .

Données

- Force appliquée q_i (S_f)
- Conditions aux limites cinématiques
- Caractéristiques mécaniques (E G K)
- Caractéristiques géométrique (dimension cosinus directeur)



Inconnues

Soit a calculer en chaque point $p(x, y, z)$

- Les 6 composantes du tenseur des déformations ε_{ij} $i, j = 1, 2, 3$
(ε_{11} ; ε_{22} ; ε_{33} ; ε_{12} ; ε_{13} ; ε_{23})
- Les 6 contraintes au point $p(x, y, z)$ σ_{ij} $i, j = 1, 2, 3$
(σ_{11} σ_{22} σ_{33} σ_{12} σ_{13} σ_{23})
- Les 3 composantes du vecteur de déplacement (u v w)

1.7.2. Méthodes de résolutions analytique

- la méthode de déplacement
- la méthode de contrainte

1.7.3. Méthode de déplacement

1.7.3.1. Principe

Il s'agit de déterminer un champs de déplacement cinématiquement admissible Cette méthode est basée sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale

1.7.3.2. Minimisation de l'énergie potentielle totale

w_e : travail des forces extrêmes

$$w_e = \int_V \vec{u} \vec{f} dv + \int_{ST} \vec{u} \vec{T} ds \quad (1. 22)$$

u : doit etre cinématiquement admissible

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{ij} + \delta u_{ji})$$

$$Ed = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dv = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T D \varepsilon dv$$

$$\delta Ed = \frac{1}{2} [\int_V \delta \varepsilon^T D \varepsilon dv + \int_V \varepsilon^T D \delta \varepsilon dv] \text{ puisque } D \text{ est symetrique}$$

Les deux termes sont égaux

$$\delta Ed = \int_V \varepsilon^T D \delta \varepsilon dv = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv$$

la variation du travail des efforts extérieurs dans le champs de déplacement $\vec{\delta u}$ s'ecrit

$$\delta w_e = \int_V \delta \vec{u} \vec{f} dv + \int_{ST} \delta \vec{u} \vec{T} ds$$

la première variation de la fonction Π

$$\delta \Pi = \delta Ed - \delta w_e$$

$$\delta \Pi = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv + \int_V \delta \vec{u} \vec{F} dv + \int_{ST} \delta \vec{u} \vec{T} ds = 0 \quad (1)$$

on a le Principe du travail virtuel

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \int_V F_i U_i dv + \int_{ST} T_i U_i ds$$

On introduit δ

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_V F_i \delta U_i dv + \int_{ST} T_i \delta U_i ds \quad (2)$$

On comparant (1) et (2) on remarque que $\delta \Pi = 0$

Donc la fonction Π passe par un extremum

$$\delta^2 \Pi > 0$$

$$\delta^2 \Pi = \delta \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv + \delta \int_V \delta \vec{u} \vec{F} dv + \delta \int_{ST} \delta \vec{u} \vec{T} ds = 0$$

$$\delta^2 \Pi = \int_V \delta \delta \varepsilon^T \sigma dv + \int_V \delta \varepsilon^T D \delta \varepsilon dv - \int_V \delta \delta \vec{u} \vec{F} dv - \delta \int_{ST} \delta \delta \vec{u} \vec{T} ds = 0$$

$$\delta^2 \Pi = + \int_V \delta \varepsilon^T D \delta \varepsilon dv > 0$$

D : est une matrice symétrique définie positive

D'où

$$\delta \varepsilon^T \delta \varepsilon > 0$$

$$\delta^2 \Pi > 0$$

Π passe par un minimum

Parmi tous les champs des déplacements cinématiquement admissibles

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{ij} + \delta u_{ji})$$

$$U_{ij} = \frac{\partial U_j}{\partial_i}$$

Le champ de déplacement réel solution minimise l'énergie potentielle totale

1.7.4. Méthode des contraintes

1.7.4.1. Principe

Il s'agit de déterminer un champs de contrainte statiquement admissible basée sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle complémentaire

1.7.4.2. Minimisation de l'énergie potentielle complémentaire

L'énergie complémentaire Π_c d'une structure est donnée par la somme de l'énergie complémentaire de déformation (U^*) et du potentiel (V^*) des forces de frontière agissant dans les déplacements imposés :

$$\Pi_c = U^* + V^* \quad (1.34)$$

$$\delta \Pi_c = \delta U^* + \delta V^* = 0 \quad (1.35)$$

$$\delta^2 \Pi_c = \delta^2 U^* + \delta^2 V^* \geq 0 \quad (1.36)$$

$$\Pi_c = 1/2 \int_V \sigma [L] \sigma dV - \int_S \bar{T} \bar{u} dS \quad (1.37)$$

CHAPITRE 2

METHODE DES ELMENTS FINIS DE TYPE DEPLACEMENT

2. METHODE DES ELEMENTS FINIS DE TYPE DEPLACEMENT

2.1. Définition

La **M. E. F.** est l'une des méthodes de discrétisation à domaine d'application très vaste elle est utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie d'où le Génie Civil.

La **M. E. F.** permet de ramener les problèmes des milieux continus régis par des équations différentielles à des problèmes discrets aux nombre fini de paramètres inconnus. Elle est à caractère pluridisciplinaire car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base.

- **La mécanique des structures** : Elasticité, Résistances des matériaux Dynamique, Plasticité etc....
- **L'analyse numérique** : Méthodes d'approximation, Résolutions des systèmes etc....
- **L'informatique appliquée** : Techniques de développement et de maintenance des grands logiciels.

2.2. Classification des traitements

On peut classer les problèmes de structures en traitements

- Linéaires statiques
- Linéaires dynamiques
- Non - linéaires statiques
- Non - linéaires dynamiques

NB : la non linéarité peut être matérielle, géométrique ou mixte.

Dans notre travail nous avons opté pour un traitement linéaire statique.

2.3. Etapes de calcul

- 1- Discrétisation du milieu en un certain nombre d'éléments finis
- 2- Calcul matriciel des caractéristiques élémentaires ;
(matrices de rigidité, , vecteurs forces)
- 3- Assemblage des matrices de rigidités et vecteur forces
- 4- Résolution numérique du problème global ;
(obtention des déplacements)
- 5- Calcul des contraintes et déformations aux nœuds

Ce fractionnement montre que les traitements peuvent être programmés d'une façon modulaire cependant la difficulté majeure des calculs au niveau global réside essentiellement dans le nombre très important des inconnus nécessaires pour la modélisation des structures complexes. La résolution d'un problème par la Mef dépend des performances de l'ordinateur (vitesse d'exécution et capacité mémoire des ordinateurs)

2.4. Formulation des caractéristiques d'un élément fini

L'étude d'un milieu élastique plan par la **m. e. f.** consiste à le subdiviser en un nombre fini d'élément ou l'élément choisi pour une discrétisation donnée doivent être de forme et de géométrie bien déterminées de façon à ce qu'ils décrivent le mieux la géométrie du milieu et ces conditions aux limites

une grandes variétés d'éléments peuvent être utilisés pour la résolution des problèmes de l'élasticité plane ces éléments sont répertoriés dans la figures (2.1)

l'élément que nous avons jugé le milieu compatible dans notre étude pouvant éventuellement être utilisé pour la discrétisation d'un grand nombre de structures est l'élément isoparamétriques à huit nœuds, chaque nœud ayant deux degrés de liberté U_i et V_i Respectivement suivant les deux directions x et y

2.4.1. Présentation de l'élément isoparamétriques

Les éléments de formes géométriques élémentaires de grandes simplicités et dont les cotés sont rectilignes (triangles et quadrilatères) ne sont appropriés que si les contours du domaine entier sont eux-mêmes rectilignes.

l'approximation ainsi admise n'est plus exacte lorsque ceux-ci sont courbes pour palier à cela on utilise les éléments appelés éléments isoparamétriques courbes ou paraboliques dont les cotés épousent parfaitement les contours non rectilignes

notons que la famille iso paramétriques est un groupe d'éléments dans lesquelles les fonctions de forme sont utilisées pour définir non seulement le champ de déplacement mais aussi la géométrie des éléments d'où ; la nom d'iso paramétrique.

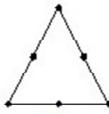
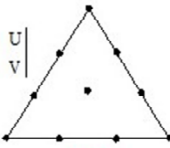
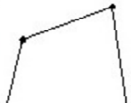
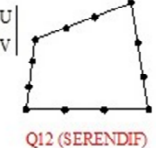
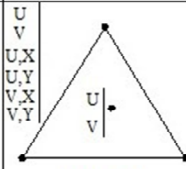
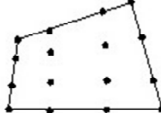
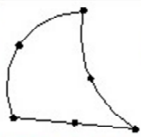
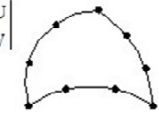
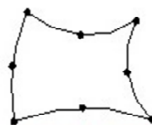
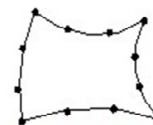
	TRIANGLES			QUADRILATÈRES		
	LINÉAIRE	QUADRATIQUE	CUBIQUE	LINÉAIRE	QUADRATIQUE	CUBIQUE
ÉLÉMENT DE BASE	 C.S.T. 6 d.d.l.	 L.S.T. 12 d.d.l.	 Q.S.T. 20/18 d.d.l.	 Q4 8 d.d.l.	 Q8 (SERENDIF) 16 d.d.l.	 Q12 (SERENDIF) 24 d.d.l.
VARIANTES			 20/18 d.d.l.	Q8 (MODES INTERNES) Q6 (MODES INCOMPATIBLES) QM INTÉGRATION SELECTIVE	 Q8 (LAGRANGE) QM8 INTÉGRATION REDUITE	 Q12 (LAGRANGE) QM12 INTÉGRATION REDUITE
		 ISOPARAMETRIQUE	 ISOPARAMETRIQUE		 ISOPARAMETRIQUE	 ISOPARAMETRIQUE

Fig2. 1 Classification des éléments bidimensionnelles

2.4.2. Repère naturel et repère cartésien

L'utilisation d'éléments isoparamétriques courbes nécessite le traitement de ces derniers dans un repère local lié à l'élément mais il est difficile de travailler dans un tel repère et qu'il est pratique de travailler dans un repère cartésien une relation liant des deux repères s'avère nécessaire

soit $(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ le repère naturel, et $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ le repère cartésien, on définit la matrice Jacobienne $\mathbf{J}$ qui lie $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ et $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ comme suit ;

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Par inversion on obtient

$$[\mathbf{J}^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Ecrit avec les éléments de $[\mathbf{J}]$; $[\mathbf{J}^{-1}]$ donnée en (2.2)

Devient :

$$[\mathbf{J}^{-1}] = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}} & -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}} \\ -\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Pour le calcul des dérivées nous avons ;

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{y}} \quad (2.5)$$

Notons aussi que :

$$dx.dy = \det \mathbf{J}.dr.ds \quad (2.6)$$

Dans notre cas, la fonction f peut être soit la fonction déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ou $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

2.5. Les fonctions d'interpolation

Les fonctions d'interpolation nous permettent d'avoir une relation entre les déplacements aux nœuds δ^e . Avec les points se trouvant dans le champ ayant pour frontière ces nœuds ; Autrement dit les déplacements nodaux étant connus, on peut déterminer ceux des points à l'intérieur du milieu grâce aux fonctions de formes (N_i) qui y définissent le champ de déplacement δ^e en tout point. La relation écrite sous forme matricielle est :

$$\{\delta\} = [N]\{\delta^e\}$$

Où $[N]$: matrice d'interpolation des déplacements

δ^e : déplacement nodal

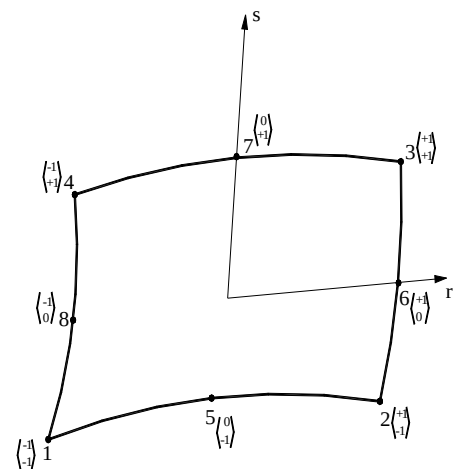
δ : déplacement au point donné

2.5.1. Fonctions d'interpolations de l'élément isoparamétrique

Le point clé de l'analyse par M E F est de définir l'interpolation du champ continu $u(x,y)$ approximation du champ réel $\hat{u}(x,y)$ à partir des valeurs nodales u_i , i étant le numéro du nœud considéré

$$\hat{u}(x,y) = u(x,y) = \sum N_i(x,y) \cdot u_i$$

où $N_i(x,y)$ est la fonction de forme ou d'interpolation associée au nœud i et u_i est la valeur du déplacement au même nœud. Elle représente le poids associé à chaque des nœuds de l'élément et permettent prédire l'évolution du champ à l'intérieur du domaine d'interpolation



Pour que l'interpolation soit licite les fonctions de forme doivent respecter les conditions suivantes

- Elles doivent être continues sur le domaine. Deux points voisins ne peuvent pas avoir des déplacements très différents.
- Pour un jeu unique de valeurs nodales, les fonctions de formes doivent conduire à des valeurs uniques du champ en tout point du domaine
- Les fonctions de forme doivent satisfaire les valeurs nodales implique que

- $N_i(x,y)$ doit avoir la valeur 1 au nœud i et 0 à tous les autres nœuds

$$N_i(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{au nœud } j = i \\ 0, & \text{au nœud } j \neq i \end{cases}$$

Les fonctions d'interpolation sont données aux nœuds principaux (1, 2, 3, 4) par

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + r.r_i).(1 + s.s_i).(r.r_i + s.s_i - 1) \quad (2.7)$$

Aux nœuds d'interfaces (5, 6, 7, 8)

$$N_{i(r=0)} = \frac{1}{2} (1 - r^2).(1 + s.s_i) \quad (2.8)$$

$$N_{i(s_i=0)} = \frac{1}{2} (1 - s^2).(1 + r.r_i) \quad (2.9)$$

En utilisant les équations (2.7), (2.8) et (2.9) développés pour les huit nœuds dans l'équation (2.6) ;

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots\dots & N_8 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots\dots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \vdots \\ U_8 \\ V_8 \end{Bmatrix}$$

Mes fonction de formes de l'élément quadratique iso paramétriques a huit nœuds sont :

$$N_1(r, s) = \frac{1}{4} (1 - r).(1 - s).(-r - s - 1)$$

$$N_2(r, s) = \frac{1}{4} (1 + r).(1 - s).(r - s - 1)$$

$$N_3(r, s) = \frac{1}{4} (1 + r).(1 + s).(r + s - 1)$$

$$N_4(r, s) = \frac{1}{4} (1 - r).(1 + s).(-r + s - 1)$$

$$N_5(r, s) = \frac{1}{2} (1 - r^2).(1 - s)$$

$$N_6(r, s) = \frac{1}{2} (1 + r).(1 - s^2)$$

$$N_7(r, s) = \frac{1}{2} (1 - r^2).(1 + s)$$

$$N_8(r, s) = \frac{1}{2} (1 - r).(1 - s^2)$$

(2.10)

2.6. Matrice d'interpolation des déformations

En reprenant les équations (1.15) donnant les relations entre les déplacements - déformations en élasticité plane sous forme matricielle on obtient ;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Où la matrice définie dans (2.11) est notée [L].

L'équation (2.11) écrite autrement nous donne ;

$$\{\varepsilon\} = [L]\{\delta\} \quad (2.12)$$

En injectant l'expression de $\{\delta\}$ donné e par l'équation (2.6)

On obtient

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{\delta^e\} \quad (2.13)$$

On pose

$$[B] = [L][N] \quad (2.14)$$

d'ou

[B] : matrice d'interpolation des déformations

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta^e\} \quad (2.15)$$

2.6.1. Détermination de la matrice **B** pour l'élément isoparamétriques

Les fonctions d'interpolation géométriques sont données par ;

$$X = [N]^T \cdot [x]$$

$$Y = [N]^T \cdot [y] \quad (2.16)$$

Les fonctions d'interpolation des déplacements sont données par ;

$$U = [N]^T \cdot [u]$$

$$V = [N]^T \cdot [v] \quad (2.17)$$

$$\text{Où } [N]^T = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ \dots \ N_8] \quad (2.18)$$

$$[x] = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{Bmatrix} \quad [y] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_8 \end{Bmatrix} \quad [u] = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_8 \end{Bmatrix} \quad [v] = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_8 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

On peut écrire la formule de différenciation suivante ;

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Où **J** étant le Jacobien défini dans la relation (2.1).

Nous calculons le Jacobien en utilisant les relations d'interpolation géométriques données en (2.19) soit par exemple ;

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i \quad (2.21)$$

On obtient donc l'expression matricielle de **J** en utilisant l'équation (2.21)

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,r} & N_{2,r} & N_{3,r} & N_{4,r} & \dots & N_{8,r} \\ N_{1,s} & N_{2,s} & N_{3,s} & N_{4,s} & \dots & N_{8,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} N_{i,r} &= \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ N_{i,s} &= \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.23)$$

où

L'expression (2,22) écrite sous forme condensée devient

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{,r}^T \\ N_{,s}^T \end{bmatrix} [X \quad Y] \quad (2.24)$$

Si la transformation géométrique est unique le Jacobien est non singulier, on peut écrire

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

On obtient à partir des relations précédentes, l'expression des dérivées des déplacements

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} N_{,r}^T \\ N_{,s}^T \end{bmatrix} [u] \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} N_{,r}^T \\ N_{,s}^T \end{bmatrix} [v] \quad (2.27)$$

D'où

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{,r}^T & 0 \\ N_{,s}^T & N_{,r}^T \\ 0 & N_{,s}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

D'où l'expression des déformations

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

On peut obtenir à partir des deux expressions (2.28) et (2.29) la matrice $[\mathbf{B}]$ d'interpolation ; des déformations telle que l'on puisse écrire :

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}]\{\delta^e\}$$

Par identification la matrice $[\mathbf{B}]$ a pour expression

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{,r}^T & 0 \\ N_{,s}^T & N_{,r}^T \\ 0 & N_{,s}^T \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

2.7. Matrice d'interpolation des contraintes

Les relations entre contraintes et déformations données par l'équation (1.9) pour les contraintes planes peuvent être écrites sous forme matricielle, ce qui nous donne :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.31)$$

En injectant l'expression de $\{\varepsilon\}$ donnée par l'équation (2.11)

On aboutit à ;

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (2.32)$$

Avec

$[D]$; $[B]$ matrice d'interpolation des contraintes

et où $[D]$ est la matrice d'élasticité du milieu, qui est en fonction des caractéristiques du matériau le constituant.

Dans le cas des contraintes planes ; la matrice $[D]$ est déduite de l'équation (1.9) et a comme expression :

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \quad (2.33)$$

Dans le cas des déformations planes la matrice $[D]$ est déduite de la relation (1.11) et a comme expression :

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.34)$$

2.8. Formulation des équations d'équilibre

Dans les expressions des contraintes et déformations des équations (2.15) et (2. 32) le vecteur $\{\delta^e\}$ subsiste comme une inconnue du problème, ce dernier sera déterminé lors de la résolution des équations que nous allons établir.

Ces équations sont obtenues par une approche cinématique "déplacements" par le principe des travaux virtuels ou encore par le théorème de l'énergie potentielle totale.

Dans ce qui suit nous appliquerons ce théorème pour la formulation de nos équations

2.8.1. Expression de l'énergie potentielle totale d'un système

Soient ;

Π_s : L'énergie potentielle totale d'un système

Π_i : L'énergie de déformation des contraintes internes

Π_{ext} : L'énergie des forces extérieures

On a :

$$\Pi_s = \Pi_i - \Pi_{ext} \quad (2. 35)$$

Où :

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv \quad (2. 36)$$

$$\Pi_{ext} = \int_V \{\delta\}^T \{b\} dv + \int_S \{\delta\}^T \{q\} ds + \{\delta\}^T \{F\} \quad (2. 37)$$

Avec :

$\{b\} ds$: Force volumique élémentaire

$\{q\} ds$: Force surfacique élémentaire

$\{f\} ds$: Force concentrée

L'injection de (2. 36) et (2. 37) dans (2. 35) donne l'expression

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv - \int_V \{\delta\}^T \{b\} dv - \int_S \{\delta\}^T \{q\} ds - \{\delta\}^T \{F\} \quad (2. 38)$$

2.8.2. Matrice de rigidité élémentaire

Pour un système discrétisé en n éléments, on peut écrire que

$$\Pi_s = \sum \Pi_e \quad (2.39)$$

Où : Π_e énergie potentielle totale de l'élément

Pour tout élément de volume V_e l'équation (2.35) s'écrit en injectant les expressions des vecteurs $\{\delta\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$ donnés par les équations (2.6) (2.15) (2.30)

On aboutit à :

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_V \{\delta^e\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta^e\} dv - \int_{V_e} \{\delta^e\}^T [N]^T \{b\} dv - \int_{S_e} \{\delta^e\}^T [N]^T \{q\} ds - \{\delta^e\}^T \{F\} \quad (2.40)$$

Dans cette expression on peut mettre en évidence

L'expression des forces énergiquement équivalentes aux nœuds

$$\{F^e\} = \int_{V_e} [N]^T \{b\} dv - \int_{S_e} [N]^T \{q\} ds - \{F\} \quad (2.41)$$

$\{F^e\}$ = Forces de volume + Forces de surface + Forces concentrées (nodale)

L'expression de la matrice de rigidité de l'élément $[K^e]$

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dv \quad (2.42)$$

Pour l'élément isoparamétrique l'expression de $[B]$ est donnée par l'équation

(2.30), l'expression de $[D]$ par l'équation (2.33) ou (2.34) selon que l'on est en contraintes planes ou en déformations planes.

L'expression de dv est donnée par l'équation de $dv = t \cdot dx \cdot dy$

En passant au repère intrinsèque l'équation (2.42) devient alors

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] t (\det J) dr ds \quad (2.43)$$

L'évaluation de cette intégrale se fera par une méthode d'intégration numérique

(*Intégration de Gauss*). soit donc :

$$[K^e] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t \cdot w_i \cdot w_j \cdot B(r_i, s_j) \cdot D \cdot B(r_i, s_j) \cdot \det J(r_i, s_j) \quad (2.44)$$

Où w_i, w_j : Poids des points d'intégration de Gauss (**voir annexe 1**)

n : Nombre de points d'intégration de Gauss

De même que les différentes intégrales dans l'équation (2.41) ne pouvant être évaluée explicitement seront calculées par intégration numérique.

2.8.3. Assemblage

La phase d'assemblage consiste à construire la matrice de rigidité globale $[K_s]$ et le vecteur force globale $\{F\}$ de la structure complète à partir des matrices caractéristiques des différents éléments $[K^e]$ et $\{F^e\}$ préalablement calculées.

Pour tout le système et cela pour un équilibre stable on a l'énergie potentielle totale sera minimale soit

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial \delta} = 0 \quad (2.45)$$

On aboutit donc à

$$[K_s] \cdot \{\delta^e\} - \{F\} = 0 \quad (2.46)$$

Avec

$$[K_s] = \sum [K^e] \quad (2.47)$$

$$\{F\} = \sum \{F^e\} \quad (2.48)$$

L'équation (2.46) représente un système linéaire où les déplacements aux nœuds sont les inconnues. la résolution de ce système se fera par **la méthode de factorisation de Cholesky** (Développées en Annexe 2).

2.9. Prise en compte des conditions aux limites :

La matrice de rigidité de la structure complète est de dimension égale au produit du nombre de nœuds par le degré de liberté de chaque nœud de valeur deux. Cette matrice K définit positive.

Avant de résoudre le système des équations d'équilibre données en (2.46) il faut prendre en compte ces conditions aux limites de la façon suivante :

- Si on a un déplacement bloqué au nœud i dans le sens x ou y on multiplie la rigidité dans la matrice globale $[K_s]$ à l'adresse correspondante sur la diagonale au nœud i par un chiffre suffisamment grand pour augmenter au maximum la rigidité de ce nœud.

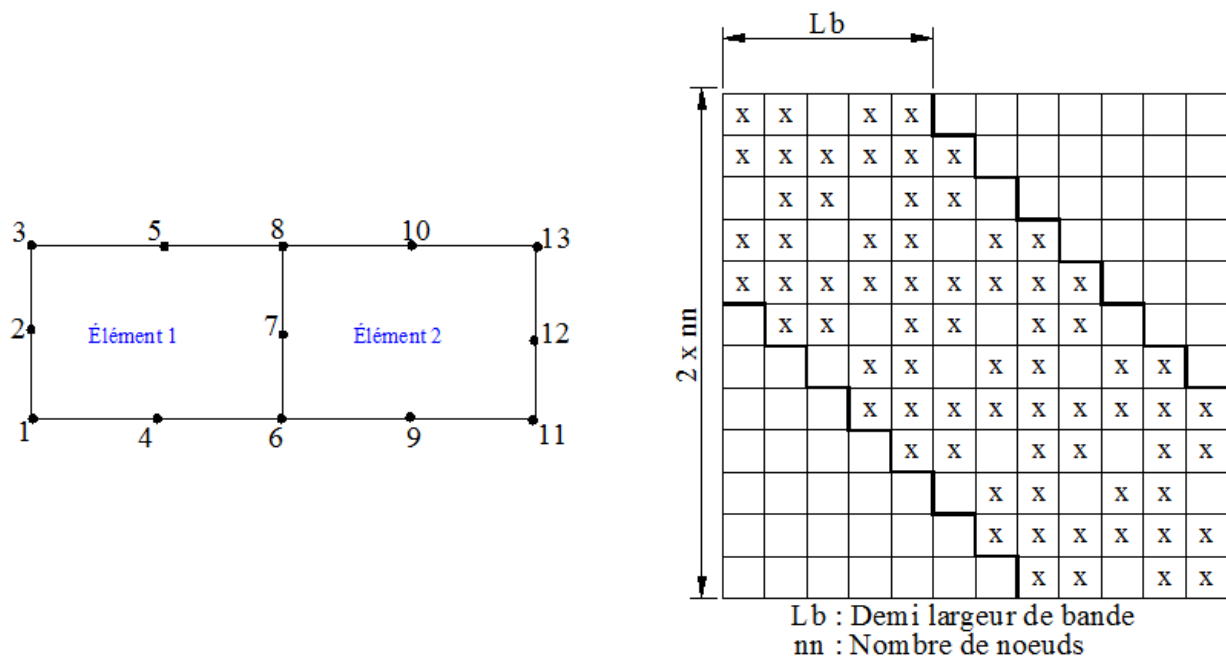
- Si on a un chargement repartie sur une facette d'un élément il sera prise en compte sur le vecteur charge globale, on l'évaluant et on injectant la valeur calculée à l'adresse approprié sur $\{F\}$.

2.10. La méthode de résolution du système linéaire

Après avoir pris en compte les conditions de déplacements imposés et chargements extérieur, La méthode de résolution utilisée doit être adaptée à ces types de problèmes, en tirant profit de la symétrie de la matrice de rigidités $[K_S]$ et sa faible densité de peuplement.

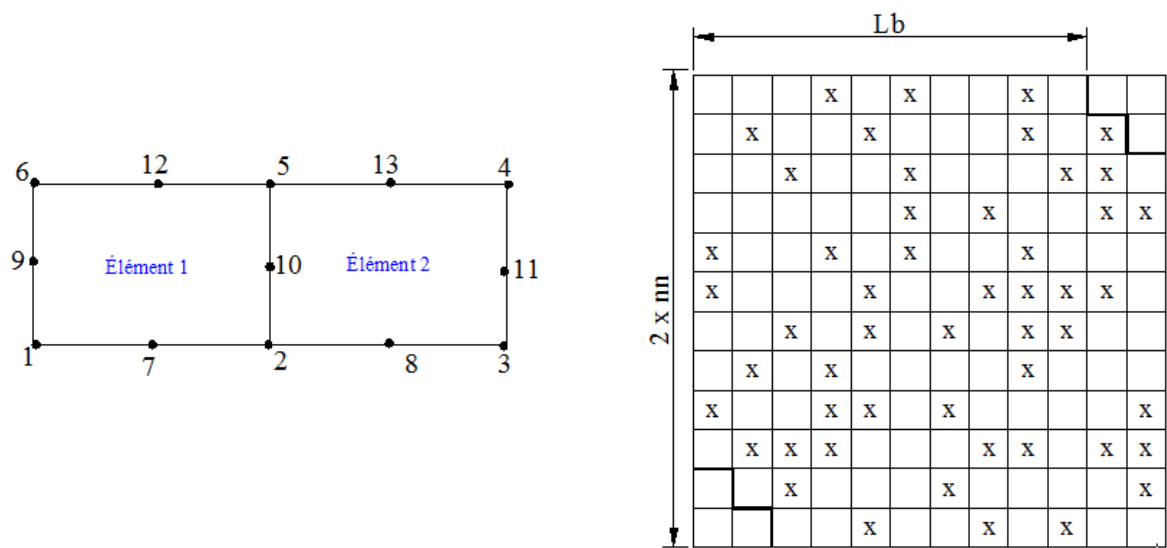
2.10.1. Choix de la méthode de résolution

Notre choix pour la résolution, s'est arrêté sur la méthode directe de factorisation de Cholevsky sur matrice bande symétrique (développé en annexe 2)



(A) NUMÉROTATION OPTIMALE

Figure 2.2 : Numérotation optimale



(B) MAUVAISE NUMÉROTATION

Figure 3 numérotation non optimale

2.11. Convergence

Le taux de convergence de l'élément dépend du respect des conditions de conformité

La convergence de l'élément se traduit par l'atteinte de la solution théorique quand les éléments deviennent infiniment petits. Pour assurer la convergence, on doit choisir des fonctions de forme remplissant certaines conditions. Paragraphe 2.5.1

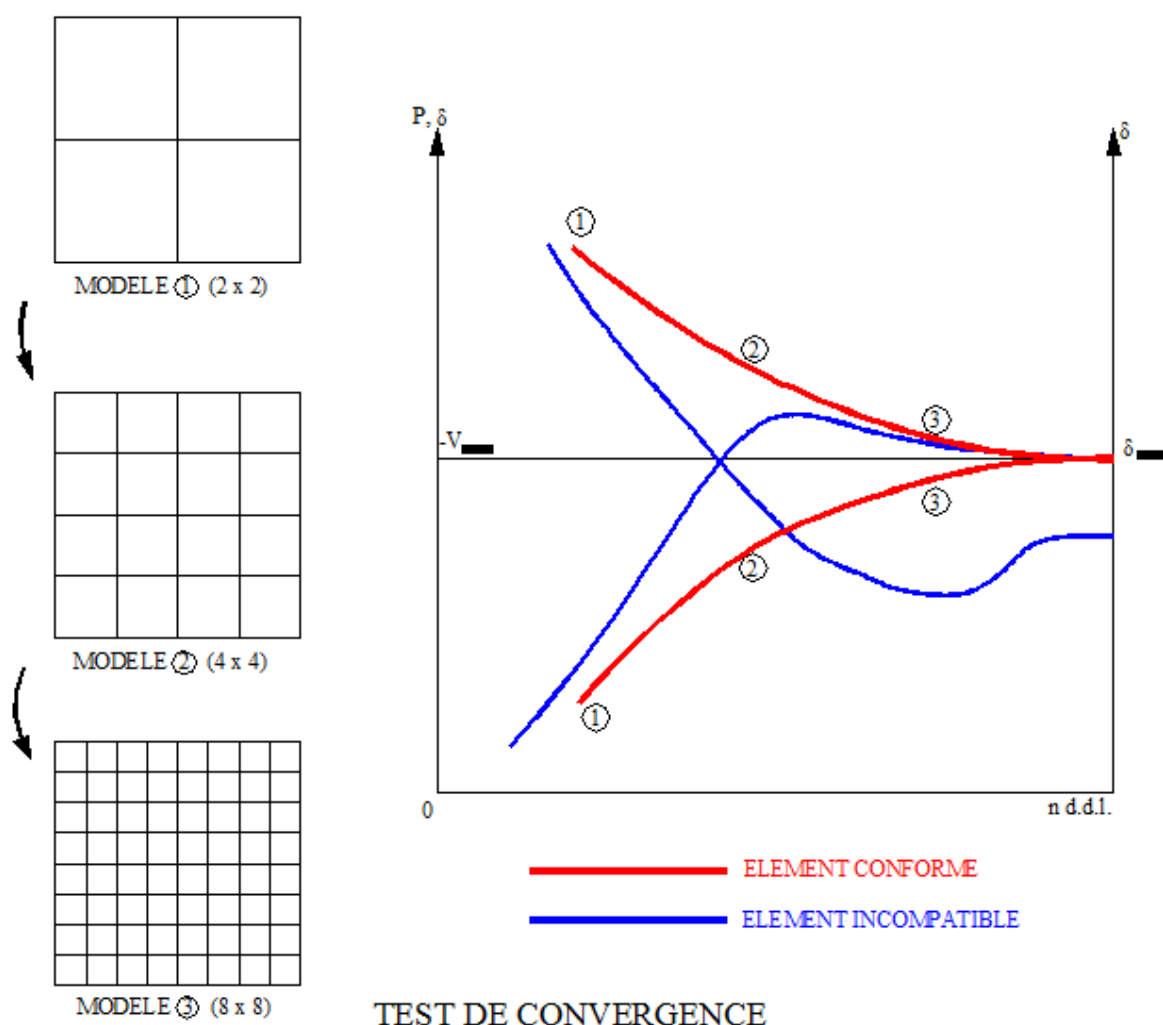


Fig2. 4 : Test de convergence

CHAPITRE 3

METHODE DES CONTRAINTES (FORCES)

3. METHODE DES CONTRAINTES (FORCES)

3.1. Introduction

La méthode des éléments finis de type contraintes est basée sur le principe de minimisation de l'énergie complémentaire (GALLAGHER & DHALLA) .Celle-ci utilise les fonctions de contraintes pour la construction de la fonction d'énergie complémentaire .

3.2. Formulation du problème

3.2.1. Principe du minimum de l'énergie complémentaire

Le principe du minimum de l'énergie complémentaire constitue un fondement vibrationnel de la formulation directe des souplesses des éléments.

L'énergie complémentaire Π_c d'une structure est donnée par la somme de l'énergie complémentaire de déformation (U^*) et du potentiel (V^*) des forces de frontière agissant dans les déplacements imposés ; c'est-à-dire que l'on a :

$$\Pi_c = U^* + V^* \quad (3.1)$$

Nous rappelons que cette énergie complémentaire peut avoir une valeur stationnaire à l'équilibre

$$\delta \Pi_c = \delta U^* + \delta V^* = 0 \quad (3.2)$$

Notons que dans le cas d'élasticité linéaire Π_c est minimum à l'équilibre:

$$\delta^2 \Pi_c = \delta^2 U^* + \delta^2 V^* \geq 0 \quad (3.3)$$

$$\Pi_c = 1/2 \int_V \sigma [L] \sigma dV - \int_{S_u} \bar{T} \bar{u} dS \quad \bar{U} = 0 \text{ équilibre} \quad (3.4)$$

où la première intégrale du second membre est (U^*) et la deuxième est ($-V^*$). La frontière S_u est la frontière sur laquelle les déplacements $\bar{U}$ sont imposés, et $\bar{T}$ représente les réactions de frontière correspondantes.

3.2.2. Discrétisation à l'aide de fonction de contraintes

Une solution pratique pour définir des champs de contraintes qui satisfassent aux équations d'équilibre consiste en utilisation de fonctions potentielles, ou fonctions de contraintes. Ces fonctions sont des expressions qui, dérivées selon certaines règles, donnent des composantes de contraintes qui vérifient automatiquement les conditions d'équilibre. L'état de contraintes planes n'admet qu'une seule de ces fonctions, appelée fonction de contrainte d'Airy.

3.2.2.1. Fonction de contrainte d'AIRY

Nous avons choisi pour la discrétisation du problème la fonction de contraintes d'AIRY Qui définit les champs de contrainte à n'importe quel point de notre structure et qui vérifie les équations d'équilibre ainsi que les conditions de compatibilité

$$\Phi = \Phi (x, y)$$

dont la définition est la suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Phi_{,yy} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi_{,xx} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\Phi_{,xy}\end{aligned}\tag{3.5}$$

En absence des forces de volume, l'équilibre dans le volume V prend la forme suivante:

$$\begin{aligned}\Phi_{,yyx} - \Phi_{,xyy} &= 0 \\ -\Phi_{,xyx} + \Phi_{,xxy} &= 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

L'équation cinématique aura lieu si la condition de compatibilité est satisfaite.

$$\epsilon_{x,yy} + \epsilon_{y,xx} - 2 \epsilon_{xy,xy} = 0\tag{3.7}$$

Compte tenu de la loi de Hooke et de la définition de la fonction de contraintes d'Airy, l'équation (3.7) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} [(\sigma_{x,yy} - \nu \sigma_{y,yy}) + (-\nu \sigma_{x,xx} + \sigma_{y,xx}) - 2(1+\nu) \sigma_{xy,xy}] &= 0 \\ \sigma_{x,yy} - \nu \sigma_{y,yy} - \nu \sigma_{x,yy} + \sigma_{y,xx} - 2 \sigma_{xy,xy} - 2 \nu \sigma_{xy,xy} &= 0 \\ \Phi_{,yyyy} - \nu \Phi_{,xxyy} - \nu \Phi_{,yyxx} + \Phi_{,xxxx} + 2 \Phi_{,xyxy} + 2 \nu \Phi_{,xyxy} &= 0 \\ \Phi_{,yyyy} + \Phi_{,xxxx} + 2 \Phi_{,xyxy} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

et connaissant l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \Delta(\cdot) &= (\cdot)_{,xx} + (\cdot)_{,yy} \\ \Delta\Delta(\cdot) &= (\cdot)_{,xxxx} + (\cdot)_{,yyyy} + 2(\cdot)_{,xyxy} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\text{on obtient l'équation bi harmonique suivante :} \quad \Delta\Delta\Phi = 0 \quad (3.10)$$

De ce fait, n'importe quel champ de contrainte qui dérive de la fonction Φ étant une solution de l'équation différentielle (3.10), doit satisfaire l'équation d'équilibre statique.

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_S \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix} [L] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} t \, ds \quad (3.11)$$

Compte tenu de l'équation (3.5), on obtient :

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_S \begin{bmatrix} \Phi_{,yy} & \Phi_{,xx} - \Phi_{,xy} \end{bmatrix} [L] \begin{Bmatrix} \Phi_{,yy} \\ \Phi_{,xx} \\ -\Phi_{,xy} \end{Bmatrix} t \, ds \quad (3.12)$$

L'écriture du champ des fonctions de contraintes sous forme analogues aux fonctions de déformées, nous donne :

$$\Phi = [N] \{\Phi^e\}^T \quad (3.13)$$

où

$[N]$: vecteur contenant les fonctions d'interpolation.

Φ : défini les quantités individuelles.

$\{\Phi^e\}$: désigne un vecteur de coefficients de fonction de contraintes aux nœuds de l'élément.

Ainsi, le vecteur des dérivées secondes peut s'écrire

$$[\Phi_{,yy} \quad \Phi_{,xx} \quad - \Phi_{,xy}]^T = [N]' \{\Phi^e\}^T \quad (3.14)$$

En substituant l'équation (3.14) dans l'expression de l'énergie complémentaire de déformation, on obtient :

$$\Pi_c = 1/2 \int_s \{\Phi^e\} [L][N]''^T [N]'' \{\Phi^e\}^T t \, ds = \frac{1}{2} \{\Phi^e\}^T [f^e] \{\Phi^e\} \quad (3.15A)$$

$$\text{Ou} \quad [f^e] = \int_s [N]''^T [L] [N]'' t \, ds \quad (3.15B)$$

avec $[f^e]$ est la matrice de flexibilité élémentaire.

Nous avons vu que dans la formulation des problèmes de contraintes planes, l'énergie complémentaire fait usage d'une fonctionnelle exprimée en fonction de dérivées secondes de la fonction de contraintes d'Airy Φ en tant qu'inconnue de base aux nœuds : la continuité de Φ et de ses dérivées premières au passage des frontières des éléments est donc nécessaire pour le principe du minimum de l'énergie complémentaire totale soit valide.

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 (a_{ij} x^i y^j) \quad (3.17)$$

Les 16 inconnues (a_{ij}) de l'expression (3.17) sont remplacées par le vecteur (Φ_{ij}) . Ce dernier regroupe non seulement les valeurs de Φ mais aussi les dérivées premières $\Phi_{,x}$, et $\Phi_{,y}$ et les dérivées secondes $\Phi_{,xy}$ dans les 4 nœuds de chaque élément (voir annexe A).

3.2.3. Continuité des contraintes inter-éléments

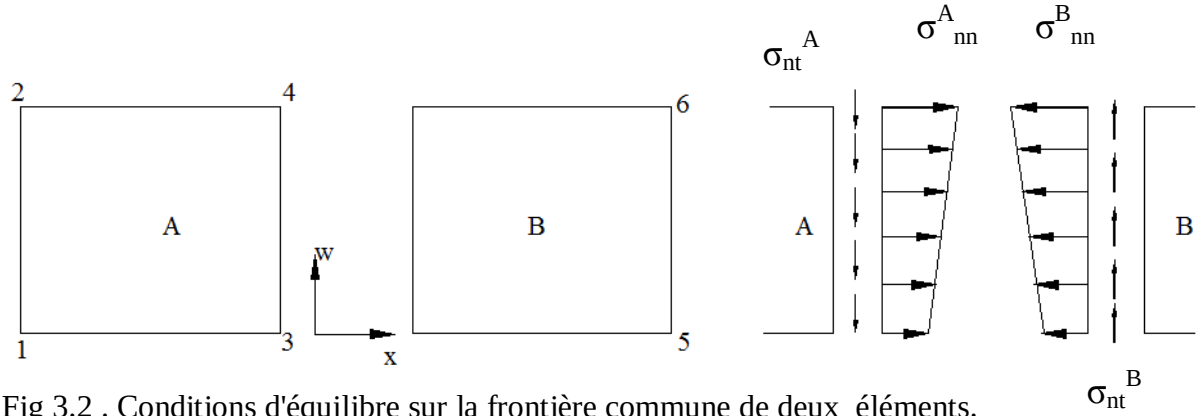


Fig 3.2 . Conditions d'équilibre sur la frontière commune de deux éléments.

$$\sigma_{nn}^A = \sigma_{nn}^B = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)^A = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)^B$$

$$\sigma_{nt}^A = \sigma_{nt}^B = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial t} \right)^A = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial t} \right)^B \quad (3.18)$$

Les deux conditions sont valables pour chaque côté des deux éléments voisins A et B

. De même on a:

$$\Phi^A = \Phi^B$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^B \quad (3.19)$$

La nécessité de satisfaire les conditions d'équilibre inter-élément qui exigent la continuité de Φ et de ses dérivées d'un élément à l'autre est assurée par l'utilisation des polynômes d'interpolation bi cubique d'Hermite

Considérons à présent un exemple de contraintes planes dont lequel les contraintes $\sigma_y(\mathbf{x})$ et $\tau_{xy}(\mathbf{x})$ agissent sur un élément dont un côté est parallèle à l'axe des x (Fig. 3.3). En tout point de ce côté on a :

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi^{i-j}}{\partial x^2}\right)^A = \sigma_y(x) \quad (3.20)$$

En intégrant deux fois la relation (3.20), et en évaluant les constantes d'intégration en fonction des valeurs de Φ et de $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_{,x}$ aux extrémités, on obtient :

$$\begin{aligned} -\Phi_{,xi} + \Phi_{,xj} &= \int_0^a \sigma_y(x) dx \\ -\Phi_i + \Phi_j - a \Phi_{xi} &= \int_0^a dx \int_0^x \sigma_y(x) dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

La présence de la contrainte de cisaillement le long du côté (i-j), nous donne :

$$\Phi_{yi} - \Phi_{yj} = \int_0^a \tau_{xy}(x) dx \quad (3.22a)$$

avec

$$-\Phi_{,xyi} = \tau_{xy}(x=0) \quad -\Phi_{,xyj} = \tau_{xy}(x=a) \quad (3.22b)$$

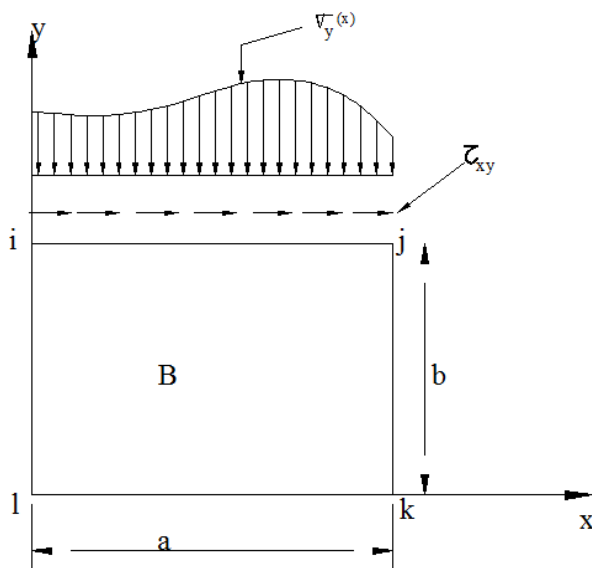


Fig 3. 3. : cas d'un chargement appliqué sur la frontière

L'ensemble des équations provenant des conditions aux limites constitue un système d'équation de contraintes qui peut se mettre sous forme matricielle suivante

$$[C_{nn}]\{\Phi_{nl}\} = \{P_{nl}\}$$

où $\{P_{nl}\}$ est le vecteur des charges extérieures résultant à partir de l'intégration de la surface de tractions le long de frontière de chaque élément ([GALLAGHER & DALLA](#)).

L'énergie complémentaire totale (Π_c) pour une structure à (N_e) éléments est donnée par:

$$\Pi_c = \sum_{e=1}^{N_e} \Pi_c^e = \frac{1}{2} \{\Phi\}^T [f] \{\Phi\} \quad (3.24)$$

où $[f]$ est la matrice de souplesse globale, et $\{\Phi\}$ est le vecteur global des fonctions de contraintes. De même on a :

$$[C]\{\Phi\} = \{P\} \quad (3.25)$$

qui représente le système d'équations de contraintes globales, et la matrice $[C]$ contient les coefficients des équations de contraintes.

Pour tenir compte de ces équations de contraintes dans la formulation de l'énergie complémentaire, nous introduisons la notion des multiplicateurs de Lagrange. Ceci nous permet d'obtenir la fonctionnelle augmentée :

$$\overline{\Pi_c} = \frac{\{\Phi\}^T}{2} [f] \{\Phi\} + \{\lambda\}^T [C] \{\Phi\} - \{\lambda\}^T \{P\} \quad (3.26)$$

où, λ est le multiplicateur de Lagrange.

Ainsi, la première variation par rapport à Φ et λ donne le système d'équations suivant:

$$\begin{pmatrix} f & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Nous remarquons tout de suite que la partition inférieure est tout simplement constituée du système des équations de contraintes. Dans ce cas, nous pouvons résoudre ces équations directement par partition si $[f]$ n'est pas singulière. La partition supérieure donne :

$$\{\Phi\} = - [f]^{-1} \{C\}^T \{\lambda\} \quad (3.28)$$

et la partition inférieure donne :

$$\{\lambda\} = (\{C\} [f]^{-1} \{C\}^T)^{-1} (-\{p\}) \quad (3.29)$$

La substitution de $\{\lambda\}$ par sa valeur dans l'équation (4.28) nous permet de déterminer les paramètres de la fonction de contrainte $\{\Phi\}$. Ces paramètres seront utilisés à leur tour pour la détermination des contraintes élastiques aux 4 points de Gauss en utilisant les expressions de contraintes (équations 3.5).

3.3. Développement de la fonction d’Airy

3.3.1. Fonction de forme élément rectangulaire :

Rectangle de fonction de forme

On prend comme exemple poutre :

Polynôme d’Hermite :

Les polynôme d’Hermite impose les conditions nodales sur le champs et sur les premières dérivées , donc fonctions de forme de classe $C^1, C^2, \dots, C^n$ indique continuité de n ... dérivée

Pour construire un polynôme d’Hermite

Il faut imposé au polynôme un champ de contraintes ou le champ de dérivée

On travail pour le nœud

$$V(x) = N_1 V_1 + N_2 \theta_1 + N_3 V_2 + N_4 \theta_2$$

Avec

$$V(0) = V_1 \quad V'(0) = \theta_1$$

$$V(L) = V_2 \quad V'(L) = \theta_2$$

$$V(0) = V_1 \Rightarrow N_2 = N_3 = N_4 = 0 \quad \text{et} \quad N_1 = 1$$

$$V'(0) = \theta_1 \Rightarrow N'_1 = N'_3 = N'_4 = 0 \quad \text{et} \quad N'_2 = 1$$

$$V(L) = V_2 \Rightarrow N_1 = N_2 = N_4 = 0 \quad \text{et} \quad N_3 = 1$$

$$V'(L) = \theta_2 \Rightarrow N'_1 = N'_2 = N'_3 = 0 \quad \text{et} \quad N'_4 = 1$$

Polynôme d’Hermite pour une poutre

$$N_i(x) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i} x + \alpha_{2i} x^2 + \alpha_{3i} x^3$$

$$N'_i(x) = \alpha_{1i} + 2 \alpha_{2i} x + 3 \alpha_{3i} x^2$$

$$N_i(0) = \alpha_{0i}$$

$$N'_i(0) = \alpha_{1i}$$

$$N_i(L) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i} L + \alpha_{2i} L^2 + \alpha_{3i} L^3$$

$$N'_i(L) = \alpha_{1i} + 2 \alpha_{2i} L + 3 \alpha_{3i} L^2$$



$$(0) \qquad \qquad \qquad (L)$$

$$\begin{Bmatrix} N_i(0) \\ N'_i(0) \\ N_i(L) \\ N'_i(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{0i} \\ \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \alpha_{3i} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{1i}(0) \\ N_{2i}(0) \\ N_{3i}(L) \\ N_{4i}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{0i} \\ \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \alpha_{3i} \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_{0i} = N_i(0) \quad \alpha_{1i} = N'_i(0)$$

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$\varepsilon = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b}$$

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_2(\xi) = a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$$

$$N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_4(\xi) = a(\xi^3 - \xi^2)$$

$$N_1(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3$$

$$N_2(\eta) = a(\eta - 2\eta^2 + \eta^3)$$

$$N_3(\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3$$

$$N_4(\eta) = a(\eta^3 - \eta^2)$$

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_2(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_{1x1}(\xi) = a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$$

$$N_{1x2}(\xi) = a(\xi^3 - \xi^2)$$

$$N_1(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3$$

$$N_2(\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3$$

$$N_{1y1}(\eta) = b(\eta - 2\eta^2 + \eta^3)$$

$$N_{1y2}(\eta) = b(\eta^3 - \eta^2)$$

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_2(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_3(\xi) = a\xi(\xi - 1)^2$$

$$N_4(\xi) = a\xi^2(\xi - 1)$$

$$N_1(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3$$

$$N_2(\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3$$

$$N_3(\eta) = b\eta(\eta - 1)^2$$

$$N_4(\eta) = b\eta^2(\eta - 1)$$

3.3.2. Approximation de la fonction d'Airy par les polynômes d'Hermite.

L'approximation de la fonction de **contrainte d'Airy** $\Phi(x,y)$ est de la forme
(GALLAGHER & DHALLA)

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j \quad i, j = 0,1,2,3$$

Les paramètres inconnus a_{ij} sont au nombre de 16

Ils sont remplacés par les paramètres Φ_{ij}

Lesquelles permettant une identification mécanique . ils sont données par la valeur de la fonction Φ_i dérivée première $\Phi_{,x}$ et $\Phi_{,y}$ ses dérivées secondes $\Phi_{,xy}$ aux points nodaux de chaque élément

$$\Phi_{(x,y)} = [[N \Phi]^T, [N \Phi_{,x}]^T, [N \Phi_{,y}]^T, [N \Phi_{,xy}]^T]$$

Avec

$$[N \Phi]^T = [N_1(\xi) N_1(\eta), N_2(\xi) N_1(\eta), N_2(\xi) N_2(\eta), N_1(\xi) N_2(\eta)]$$

$$[N \Phi_{,x}]^T = [N_3(\xi) N_1(\eta), N_4(\xi) N_1(\eta), N_4(\xi) N_2(\eta), N_3(\xi) N_2(\eta)]$$

$$[N \Phi_{,y}]^T = [N_1(\xi) N_3(\eta), N_2(\xi) N_3(\eta), N_2(\xi) N_4(\eta), N_1(\xi) N_4(\eta)]$$

$$[N \Phi_{,xy}]^T = [N_3(\xi) N_3(\eta), N_4(\xi) N_3(\eta), N_4(\xi) N_4(\eta), N_3(\xi) N_4(\eta)]$$

Les fonctions de formes N sont données comme précédemment

Par :

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_1(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3$$

$$N_2(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_2(\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3$$

$$N_3(\xi) = a \xi (\xi - 1)^2$$

$$N_3(\eta) = b \eta (\eta - 1)^2$$

$$N_4(\xi) = a \xi^2 (\xi - 1)$$

$$N_4(\eta) = b \eta^2 (\eta - 1)$$

Le vecteur de $\{\Phi\}$ contient tous les paramètres de fonctions de contrainte aux nœuds :

$$\{\Phi\} = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_{,x1}, \Phi_{,x2}, \Phi_{,x3}, \Phi_{,x4}, \Phi_{,y1}, \Phi_{,y2}, \Phi_{,y3}, \Phi_{,y4}, \Phi_{,xy1}, \Phi_{,xy2}, \Phi_{,xy3}, \Phi_{,xy4}\}^T$$

Les nombres 1, 2, 3, 4 correspondent aux nœuds i, j, k, l respectivement

Evaluation $[\mathbf{N} \Phi]^T$

Terme : $N_1(\xi) N_1(\eta)$

$$\begin{aligned} N_1(\xi) N_1(\eta) &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) \\ &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 - 3\xi^2 + 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 + 2\xi^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3 \\ N_1(\xi) N_1(\eta) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3 \end{aligned}$$

Terme : $N_2(\xi) N_1(\eta)$

$$\begin{aligned} N_2(\xi) N_1(\eta) &= (3\xi^2 - 2\xi^3)(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) \\ &= 3\xi^2 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 - 2\xi^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3 \\ N_2(\xi) N_1(\eta) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3 \end{aligned}$$

Terme : $N_2(\xi) N_2(\eta)$

$$\begin{aligned} N_2(\xi) N_2(\eta) &= (3\xi^2 - 2\xi^3)(3\eta^2 - 2\eta^3) \\ &= (9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3) \\ N_2(\xi) N_2(\eta) &= (9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3) \end{aligned}$$

Terme : $N_1(\xi) N_2(\eta)$

$$\begin{aligned} N_1(\xi) N_2(\eta) &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)(3\eta^2 - 2\eta^3) \\ &= 3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3 \\ N_1(\xi) N_2(\eta) &= 3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3 \end{aligned}$$

Evaluation $[\mathbf{N} \Phi, \mathbf{x}]^T$

Terme : $N_3(\xi) N_1(\eta)$

$$\begin{aligned} N_3(\xi) N_1(\eta) &= (a\xi(\xi - 1)^2)(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) \\ &= a\xi(\xi^2 - 2\xi + 1)(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) \\ &= a(\xi^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3 - 2\xi^2 + 6\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 + \xi - 3\xi\eta^2 + 2\xi\eta^3) \\ N_3(\xi) N_1(\eta) &= a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi\eta^3 + 6\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \end{aligned}$$

Terme : $N_4(\xi) N_1(\eta)$

$$\begin{aligned} N_4(\xi) N_1(\eta) &= (a \xi^2 (\xi - 1)) (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) \\ &= a (\xi^3 - \xi^2) (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) \\ &= a (\xi^3 - \xi^2 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3 + 3\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3) \\ N_4(\xi) N_1(\eta) &= a (-\xi^2 + \xi^3 + 3\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \end{aligned}$$

Terme : $N_4(\xi) N_2(\eta)$

$$\begin{aligned} N_4(\xi) N_2(\eta) &= (a \xi^2 (\xi - 1)) (3\eta^2 - 2\eta^3) = a (\xi^3 - \xi^2) (3\eta^2 - 2\eta^3) \\ N_4(\xi) N_2(\eta) &= a (2\xi^2\eta^3 - 3\xi^2\eta^2 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) \end{aligned}$$

Terme : $N_3(\xi) N_2(\eta)$

$$\begin{aligned} N_3(\xi) N_2(\eta) &= (a \xi (\xi - 1)^2) (3\eta^2 - 2\eta^3) \\ &= a \xi (1 + \xi^2 - 2\xi) (3\eta^2 - 2\eta^3) \\ &= a \xi \eta^2 (1 + \xi^2 - 2\xi) (3 - 2\eta) \\ N_3(\xi) N_2(\eta) &= a (3\xi\eta^2 - 2\xi\eta^3 - 6\xi^2\eta^2 + 4\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) \end{aligned}$$

Evaluation de $[N \Phi, y]^T$

Terme : $N_1(\xi) N_3(\eta)$

$$\begin{aligned} N_1(\xi) N_3(\eta) &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) (b \eta (\eta - 1)^2) \\ &= b (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) (\eta^3 - 2\eta^2 + \eta) \\ &= b (\eta^3 - 2\eta^2 + \eta - 3\xi^2\eta^3 + 6\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta + 2\xi^3\eta^3 - 4\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta) \\ N_1(\xi) N_3(\eta) &= b (\eta^3 - 2\eta^2 + \eta - 3\xi^2\eta^3 + 6\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta + 2\xi^3\eta^3 - 4\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta) \end{aligned}$$

Terme : $N_2(\xi) N_3(\eta)$

$$\begin{aligned} N_2(\xi) N_3(\eta) &= (3\xi^2 - 2\xi^3) (b \eta (\eta - 1)^2) \\ &= b (3\xi^2 - 2\xi^3) (\eta^3 - 2\eta^2 + \eta) \\ N_2(\xi) N_3(\eta) &= b (3\xi^2\eta - 6\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta + 4\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) \end{aligned}$$

Terme : $N_2(\xi) N_4(\eta)$

$$N_2(\xi) N_4(\eta) = (3\xi^2 - 2\xi^3) (b \eta^2 (\eta - 1))$$

$$= b (3\xi^2 - 2\xi^3)(\eta^3 - \eta^2)$$

$$N_2(\xi) N_4(\eta) = b (3\xi^2 \eta^3 - 3\xi^2 \eta^2 + 2\xi^3 \eta^2 - 2\xi^3 \eta^3)$$

Terme : $N_1(\xi) N_4(\eta)$

$$N_1(\xi) N_4(\eta) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)(b \eta^2 (\eta - 1))$$

$$= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)b(\eta^3 - \eta^2)$$

$$N_1(\xi) N_4(\eta) = b (\eta^3 - \eta^2 + 3\xi^2 \eta^2 - 3\xi^2 \eta^3 - 2\xi^3 \eta^2 + 2\xi^3 \eta^3)$$

Evaluation $[N \Phi_{xy}]^T$

Terme : $N_3(\xi) N_3(\eta)$

$$N_3(\xi) N_3(\eta) = (a \xi (\xi - 1)^2)(b \eta (\eta - 1)^2)$$

$$= a \xi b \eta (\xi^2 - 2\xi + 1)(\eta^2 - 2\eta + 1)$$

$$N_3(\xi) N_3(\eta) = a b (\xi \eta - 2\xi \eta^2 - 2\xi^2 \eta + \xi \eta^3 + \xi^3 \eta + 4\xi^2 \eta^2 - 2\xi^2 \eta^3 - 2\xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3)$$

Terme : $N_4(\xi) N_3(\eta)$

$$N_4(\xi) N_3(\eta) = (a \xi^2 (\xi - 1))(b \eta (\eta - 1)^2)$$

$$= (a \xi^2 b \eta (\xi - 1)(\eta^2 - 2\eta + 1))$$

$$= (a \xi^2 b \eta (\xi \eta^2 - 2\xi \eta + \xi - \eta^2 + 2\eta - 1))$$

$$N_4(\xi) N_3(\eta) = a b (-\xi^2 \eta + 2\xi^2 \eta^2 - \xi^2 \eta^3 + \xi^3 \eta - 2\xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3)$$

Terme : $N_4(\xi) N_4(\eta)$

$$N_4(\xi) N_4(\eta) = (a \xi^2 (\xi - 1))(b \eta^2 (\eta - 1))$$

$$= (a \xi^2 b \eta^2 (\xi - 1)(\eta - 1))$$

$$= (a \xi^2 b \eta^2 (\xi \eta - \xi - \eta + 1))$$

$$N_4(\xi) N_4(\eta) = a b (\xi^2 \eta^2 - \xi^2 \eta^3 - \xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3)$$

Terme : $N_3(\xi) N_4(\eta)$

$$\begin{aligned} N_3(\xi) N_4(\eta) &= (a \xi (\xi - 1)^2) (b \eta^2 (\eta - 1)) \\ &= (a \xi b \eta^2 (\xi - 1)^2 (\eta - 1)) \\ &= (a \xi b \eta^2 (\xi^2 - 2\xi + 1) (\eta - 1)) \\ N_3(\xi) N_4(\eta) &= a b (-\xi \eta^2 + \xi \eta^3 + 2\xi^2 \eta^2 - 2\xi^2 \eta^3 - \xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3) \end{aligned}$$

Récapitulatif

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j \quad i, j = 0, 1, 2, 3$$

$$\Phi_{(x,y)} = [[N \Phi]^T, [N \Phi_{,x}]^T, [N \Phi_{,y}]^T, [N \Phi_{,xy}]^T] \{ \Phi \}$$

Avec

$$[N \Phi]^T = [N_1(x) N_1(y), N_2(x) N_1(y), N_2(x) N_2(y), N_1(x) N_2(y)]$$

$$[N \Phi_{,x}]^T = [N_3(x) N_1(y), N_4(x) N_1(y), N_4(x) N_2(y), N_3(x) N_2(y)]$$

$$[N \Phi_{,y}]^T = [N_1(x) N_3(y), N_2(x) N_3(y), N_2(x) N_4(y), N_1(x) N_4(y)]$$

$$[N \Phi_{,xy}]^T = [N_3(x) N_3(y), N_4(x) N_3(y), N_4(x) N_4(y), N_3(x) N_4(y)]$$

$$\begin{aligned} \Phi_{(x,y)} &= [N_1(x) N_1(y), N_2(x) N_1(y), N_2(x) N_2(y), N_1(x) N_2(y), \\ &\quad N_3(x) N_1(y), N_4(x) N_1(y), N_4(x) N_2(y), N_3(x) N_2(y), \\ &\quad N_1(x) N_3(y), N_2(x) N_3(y), N_2(x) N_4(y), N_1(x) N_4(y), \\ &\quad N_3(x) N_3(y), N_4(x) N_3(y), N_4(x) N_4(y), N_3(x) N_4(y)] \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_{,x1} \\ \Phi_{,x2} \\ \Phi_{,x3} \\ \Phi_{,x4} \\ \Phi_{,y1} \\ \Phi_{,y2} \\ \Phi_{,y3} \\ \Phi_{,y4} \\ \Phi_{,xy1} \\ \Phi_{,xy2} \\ \Phi_{,xy3} \\ \Phi_{,xy4} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{(x,y)} = & [[N_1(x) N_1(y) \Phi_1 + N_2(x) N_1(y) \Phi_2 + N_2(x) N_2(y) \Phi_3 + N_1(x) N_2(y) \Phi_4 + \\ & N_3(x) N_1(y) \Phi_{,x1} + N_4(x) N_1(y) \Phi_{,x2} + N_4(x) N_2(y) \Phi_{,x3} + N_3(x) N_2(y) \Phi_{,x4} + \\ & N_1(x) N_3(y) \Phi_{,y1} + N_2(x) N_3(y) \Phi_{,y2} + N_2(x) N_4(y) \Phi_{,y3} + N_1(x) N_4(y) \Phi_{,y4} + \\ & N_3(x) N_3(y) \Phi_{,xy1} + N_4(x) N_3(y) \Phi_{,xy2} + N_4(x) N_4(y) \Phi_{,xy3} + N_3(x) N_4(y) \Phi_{,xy4}]\end{aligned}$$

$$\text{Posons } y = \eta/b \quad x = \xi/a$$

$$\begin{aligned}N_1(\xi) N_1(\eta) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + 9\xi^2 \eta^2 - 6\xi^2 \eta^3 - 6\xi^3 \eta^2 + 4\xi^3 \eta^3 \\ N_2(\xi) N_1(\eta) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 - 9\xi^2 \eta^2 + 6\xi^2 \eta^3 + 6\xi^3 \eta^2 - 4\xi^3 \eta^3 \\ N_2(\xi) N_2(\eta) &= (9\xi^2 \eta^2 - 6\xi^2 \eta^3 - 6\xi^3 \eta^2 + 4\xi^3 \eta^3) \\ N_1(\xi) N_2(\eta) &= 3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2 \eta^2 + 6\xi^2 \eta^3 + 6\xi^3 \eta^2 - 4\xi^3 \eta^3 \\ N_3(\xi) N_1(\eta) &= a (\xi - 2\xi^2 + \xi^3 - 3\xi \eta^2 + 2\xi \eta^3 + 6\xi^2 \eta^2 - 4\xi^2 \eta^3 - 3\xi^3 \eta^2 + 2\xi^3 \eta^3) \\ N_4(\xi) N_1(\eta) &= a (-\xi^2 + \xi^3 + 3\xi^2 \eta^2 - 2\xi^2 \eta^3 - 3\xi^3 \eta^2 + 2\xi^3 \eta^3) \\ N_4(\xi) N_2(\eta) &= a (2\xi^2 \eta^3 - 3\xi^2 \eta^2 + 3\xi^3 \eta^2 - 2\xi^3 \eta^3) \\ N_3(\xi) N_2(\eta) &= a (3\xi \eta^2 - 2\xi \eta^3 - 6\xi^2 \eta^2 + 4\xi^2 \eta^3 + 3\xi^3 \eta^2 - 2\xi^3 \eta^3) \\ N_1(\xi) N_3(\eta) &= b (\eta^3 - 2\eta^2 + \eta - 3\xi^2 \eta + 6\xi^2 \eta^2 - 3\xi^2 \eta^3 + 2\xi^3 \eta + 4\xi^3 \eta^2 + 2\xi^3 \eta^3) \\ N_2(\xi) N_3(\eta) &= b (3\xi^2 \eta - 6\xi^2 \eta^2 + 3\xi^2 \eta^3 - 2\xi^3 \eta + 4\xi^3 \eta^2 - 2\xi^3 \eta^3) \\ N_2(\xi) N_4(\eta) &= b (3\xi^2 \eta^3 - 3\xi^2 \eta^2 + 2\xi^3 \eta^2 - 2\xi^3 \eta^3) \\ N_1(\xi) N_4(\eta) &= b (\eta^3 - \eta^2 + 3\xi^2 \eta^2 - 3\xi^2 \eta^3 - 2\xi^3 \eta^2 + 2\xi^3 \eta^3) \\ N_3(\xi) N_3(\eta) &= a b (\xi \eta - 2\xi \eta^2 - 2\xi^2 \eta + \xi \eta^3 + \xi^3 \eta + 4\xi^2 \eta^2 - 2\xi^2 \eta^3 - 2\xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3) \\ N_4(\xi) N_3(\eta) &= a b (-\xi^2 \eta + 2\xi^2 \eta^2 - \xi^2 \eta^3 + \xi^3 \eta - 2\xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3) \\ N_4(\xi) N_4(\eta) &= a b (\xi^2 \eta^2 - \xi^2 \eta^3 - \xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3) \\ N_3(\xi) N_4(\eta) &= a b (-\xi \eta^2 + \xi \eta^3 + 2\xi^2 \eta^2 - 2\xi^2 \eta^3 - \xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3)\end{aligned}$$

D'où : $\Phi_{(x,y)} =$

$$\begin{aligned}
&= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3) \Phi^{11} \\
&+ a (\xi - 2\xi^2 + \xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi\eta^3 + 6\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,x}^{11} \\
&+ b (\eta^3 - 2\eta^2 + \eta - 3\xi^2\eta + 6\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 + 2\xi^3\eta - 4\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,y}^{11} \\
&+ a b (\xi\eta - 2\xi\eta^2 - 2\xi^2\eta + \xi\eta^3 + \xi^3\eta + 4\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3) \Phi_{,xy}^{11} \\
\\
&+ (3\xi^2 - 2\xi^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3) \Phi^{21} \\
&+ a (-\xi^2 + \xi^3 + 3\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,x}^{21} \\
&+ b (3\xi^2\eta - 6\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta + 4\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,y}^{21} \\
&+ a b (-\xi^2\eta + 2\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 + \xi^3\eta - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3) \Phi_{,xy}^{21} \\
\\
&+ (9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3) \Phi^{22} \\
&+ a (2\xi^2\eta^3 - 3\xi^2\eta^2 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,x}^{22} \\
&+ b (3\xi^2\eta^3 - 3\xi^2\eta^2 + 2\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,y}^{22} \\
&+ a b (\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3) \Phi_{,xy}^{22} \\
\\
&+ (3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3) \Phi^{12} \\
&+ a (3\xi\eta^2 - 2\xi\eta^3 - 6\xi^2\eta^2 + 4\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,x}^{12} \\
&+ b (\eta^3 - \eta^2 + 3\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,y}^{12} \\
&+ a b (-\xi\eta^2 + \xi\eta^3 + 2\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3) \Phi_{,xy}^{12}
\end{aligned}$$

calcul σ_x

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Phi_{,yy}$$

1^{er} terme :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3) \Phi^{11}] \\ &= (-\frac{6}{b^2} + \frac{12}{b^3}y + 9\frac{2}{b^2}\zeta^2 - \frac{12}{b^2}\zeta^3 - 6\zeta^2\frac{6}{b^3}y + 4\zeta^3\frac{6}{b^3}y) \Phi^{11} \\ &= (-\frac{6}{b^2} + \frac{12}{b^2}\eta + \frac{18}{b^2}\zeta^2 - \frac{36}{b^2}\zeta^2\eta - \frac{12}{b^2}\zeta^3 + \frac{24}{b^2}\zeta^3\eta) \Phi^{11} \\ &= \frac{1}{b^2} [(-6 + 12\eta + 18\zeta^2 - 36\zeta^2\eta - 12\zeta^3 + 24\zeta^3\eta) \Phi^{11}] \end{aligned}$$

Terme 2 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi\eta^3 + 6\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,x}^{11}] \\ &= (-\frac{6}{b^2}\zeta + 2\zeta\frac{6}{b^3}y + 6\frac{2}{b^2}\zeta^2 - 4\zeta^2\frac{6}{b^2}\eta - 3\zeta^3\frac{2}{b^2} + 2\zeta^3\frac{6}{b^2}\eta) a \Phi_{,x}^{11} \\ &= (-\frac{6}{b^2}\zeta + \frac{12}{b^2}\zeta\eta + \frac{12}{b^2}\zeta^2 - \frac{6}{b^2}\zeta^3 - \frac{24}{b^2}\zeta^2\eta + \frac{12}{b^2}\zeta^3\eta) a \Phi_{,x}^{11} \\ &= \frac{1}{b^2} (-6\zeta + 12\zeta\eta + 12\zeta^2 - 6\zeta^3 - 24\zeta^2\eta + 12\zeta^3\eta) a \Phi_{,x}^{11} \end{aligned}$$

Terme 3 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta - 3\xi^2\eta + 6\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 + 2\xi^3\eta - 4\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,y}^{11}] \\ &= (-2\frac{2}{b^2} + \frac{6}{b^2}\eta + 6\frac{2}{b^2}\zeta^2 - 3\zeta^2\frac{6}{b^2}\eta - 4\zeta^3\frac{2}{b^2} + 2\zeta^3\frac{6}{b^2}\eta) b \Phi_{,y}^{11} \\ &= (-\frac{4}{b^2} + \frac{6}{b^2}\eta + \frac{12}{b^2}\zeta^2 - \frac{8}{b^2}\zeta^3 - \frac{18}{b^2}\zeta^2\eta + \frac{12}{b^2}\zeta^3\eta) b \Phi_{,y}^{11} \\ &= \frac{1}{b^2} (-4 + 6\eta + 12\zeta^2 - 8\zeta^3 - 18\zeta^2\eta + 12\zeta^3\eta) b \Phi_{,y}^{11} \end{aligned}$$

Terme 4 :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a b (\xi \eta - 2\xi \eta^2 - 2\xi^2 \eta + \xi \eta^3 + \xi^3 \eta + 4 \xi^2 \eta^2 - 2 \xi^2 \eta^3 - 2\xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3) \Phi_{,xy}^{11}] \\
&= (-2 \xi \frac{2}{b^2} + \xi \frac{6}{b^2} \eta + 4 \frac{2}{b^2} \xi^2 - 2 \xi^2 \frac{6}{b^2} \eta - 2 \xi^3 \frac{2}{b^2} + \xi^3 \frac{6}{b^2} \eta) \Phi_{,xy}^{11} \\
&= (-\frac{4}{b^2} \xi + \frac{6}{b^2} \xi \eta + \frac{8}{b^2} \xi^2 - \frac{4}{b^2} \xi^3 - \frac{12}{b^2} \xi^2 \eta + \frac{6}{b^2} \xi^3 \eta) a b \Phi_{,xy}^{11} \\
&= \frac{1}{b^2} (-4 \xi + 6 \xi \eta + 8 \xi^2 - 4 \xi^3 - 12 \xi^2 \eta + 6 \xi^3 \eta) a b \Phi_{,xy}^{11}
\end{aligned}$$

Terme 5

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(3 \xi^2 - 2 \xi^3 - 9 \xi^2 \eta^2 + 6 \xi^2 \eta^3 + 6 \xi^3 \eta^2 - 4 \xi^3 \eta^3) \Phi^{21}] \\
&= (-9 \frac{2}{b^2} \xi^2 + 6 \xi^2 \frac{6}{b^2} \eta + 6 \xi^3 \frac{2}{b^2} - 4 \xi^3 \frac{6}{b^2} \eta) \Phi^{21} \\
&= (-\frac{18}{b^2} \xi^2 + \frac{12}{b^2} \xi^3 + \frac{36}{b^2} \xi^2 \eta - \frac{24}{b^2} \xi^3 \eta) \Phi^{21} \\
&= \frac{1}{b^2} (-18 \xi^2 + 12 \xi^3 + 36 \xi^2 \eta - 24 \xi^3 \eta) \Phi^{21}
\end{aligned}$$

Terme 6 :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(a (-\xi^2 + \xi^3 + 3 \xi^2 \eta^2 - 2 \xi^2 \eta^3 - 3 \xi^3 \eta^2 + 2 \xi^3 \eta^3) \Phi_{,x}^{21})] \\
&= (+3 \frac{2}{b^2} \xi^2 - 2 \xi^2 \frac{6}{b^2} \eta - 3 \xi^3 \frac{2}{b^2} + 2 \xi^3 \frac{6}{b^2} \eta) a \Phi_{,x}^{21} \\
&= (\frac{6}{b^2} \xi^2 - \frac{6}{b^2} \xi^3 - \frac{12}{b^2} \xi^2 \eta + \frac{12}{b^2} \xi^3 \eta) a \Phi_{,x}^{21} \\
&= \frac{1}{b^2} (6 \xi^2 - 6 \xi^3 - 12 \xi^2 \eta + 12 \xi^3 \eta) a \Phi_{,x}^{21}
\end{aligned}$$

Terme 7 :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b (3 \xi^2 \eta - 6 \xi^2 \eta^2 + 3 \xi^2 \eta^3 - 2 \xi^3 \eta + 4 \xi^3 \eta^2 - 2 \xi^3 \eta^3) \Phi_{,y}^{21}] \\
&= \frac{1}{b^2} (-12 \xi^2 + 8 \xi^3 + 18 \xi^2 \eta - 12 \xi^3 \eta) b \Phi_{,y}^{21}
\end{aligned}$$

Terme 8 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a b (-\xi^2 \eta + 2\xi^2 \eta^2 - \xi^2 \eta^3 + \xi^3 \eta - 2\xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3) \Phi_{,xy}^{21}] \\ = \left(\frac{4}{b^2} \zeta^2 - \frac{4}{b^2} \zeta^3 - \frac{6}{b^2} \zeta^2 \eta + \frac{6}{b^2} \zeta^3 \eta \right) a b \Phi_{,xy}^{21} \\ = \frac{1}{b^2} (4 \zeta^2 - 4 \zeta^3 - 6 \zeta^2 \eta + 6 \zeta^3 \eta) a b \Phi_{,xy}^{21} \end{aligned}$$

Terme 9

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(9 \xi^2 \eta^2 - 6 \xi^2 \eta^3 - 6 \xi^3 \eta^2 + 4 \xi^3 \eta^3) \Phi^{22}] \\ = \frac{1}{b^2} (18 \zeta^2 - 12 \zeta^3 - 36 \zeta^2 \eta + 24 \zeta^3 \eta) \Phi^{22} \end{aligned}$$

Terme 10 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(a (2 \xi^2 \eta^3 - 3 \xi^2 \eta^2 + 3 \xi^3 \eta^2 - 2 \xi^3 \eta^3) \Phi_{,x}^{22}] \\ = \frac{1}{b^2} (-6 \zeta^2 + 6 \zeta^3 + 12 \zeta^2 \eta - 12 \zeta^3 \eta) a \Phi_{,x}^{22} \end{aligned}$$

Terme 11 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b (3 \xi^2 \eta^3 - 3 \xi^2 \eta^2 + 2 \xi^3 \eta^2 - 2 \xi^3 \eta^3) \Phi_{,y}^{22}] \\ = \frac{1}{b^2} (-6 \zeta^2 + 4 \zeta^3 + 18 \zeta^2 \eta - 12 \zeta^3 \eta) b \Phi_{,y}^{22} \end{aligned}$$

Terme 12 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a b (\xi^2 \eta^2 - \xi^2 \eta^3 - \xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3) \Phi_{,xy}^{22}] \\ = \frac{1}{b^2} (2 \zeta^2 - 2 \zeta^3 - 6 \zeta^2 \eta + 6 \zeta^3 \eta) a b \Phi_{,xy}^{22} \end{aligned}$$

Terme 13

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3) \Phi^{12}] \\ = \frac{1}{b^2} (6 - 12\eta - 18\zeta^2 + 12\zeta^3 + 36\zeta^2\eta - 24\zeta^3\eta) \Phi^{12} \end{aligned}$$

Terme 14 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(3\xi\eta^2 - 2\xi\eta^3 - 6\xi^2\eta^2 + 4\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) a \Phi_{,x}^{12}] \\ = \frac{1}{b^2} (6\zeta - 12\zeta\eta - 12\zeta^2 + 6\zeta^3 + 24\zeta^2\eta - 12\zeta^3\eta) a \Phi_{,y}^{12} \end{aligned}$$

Terme 15 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(\eta^3 - \eta^2 + 3\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,y}^{12}] \\ = \frac{1}{b^2} (-2 + 6\eta + 6\zeta^2 - 4\zeta^3 - 18\zeta^2\eta + 12\zeta^3\eta) b \Phi_{,x}^{12} \end{aligned}$$

Terme 16 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a b (-\xi\eta^2 + \xi\eta^3 + 2\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3) \Phi_{,xy}^{12}] \\ = \frac{1}{b^2} (-2\zeta + 6\zeta\eta + 4\zeta^2 - 2\zeta^3 - 12\zeta^2\eta + 6\zeta^3\eta) a b \Phi_{,xy}^{12} \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Phi_{,yy}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = \Phi_{,yy} = \frac{1}{b^2} [& (-6 + 12\eta + 18\zeta^2 - 36\zeta^2\eta - 12\zeta^3 + 24\zeta^3\eta) \Phi^{11} \\ & + (-6\zeta + 12\zeta\eta + 12\zeta^2 - 6\zeta^3 - 24\zeta^2\eta + 12\zeta^3\eta) a \Phi_{,x}^{11} \\ & + (-4 + 6\eta + 12\zeta^2 - 8\zeta^3 - 18\zeta^2\eta + 12\zeta^3\eta) b \Phi_{,y}^{11} \\ & + (-4\zeta + 6\zeta\eta + 8\zeta^2 - 4\zeta^3 - 12\zeta^2\eta + 6\zeta^3\eta) a b \Phi_{,xy}^{11} \\ & + (-18\zeta^2 + 12\zeta^3 + 36\zeta^2\eta - 24\zeta^3\eta) \Phi^{21} \\ & + (6\zeta^2 - 6\zeta^3 - 12\zeta^2\eta + 12\zeta^3\eta) a \Phi_{,x}^{21} \\ & + (-12\zeta^2 + 8\zeta^3 + 18\zeta^2\eta - 12\zeta^3\eta) b \Phi_{,y}^{21} \\ & + (4\zeta^2 - 4\zeta^3 - 6\zeta^2\eta + 6\zeta^3\eta) a b \Phi_{,xy}^{21} \\ & + (18\zeta^2 - 12\zeta^3 - 36\zeta^2\eta + 24\zeta^3\eta) \Phi^{22} \\ & + (-6\zeta^2 + 6\zeta^3 + 12\zeta^2\eta - 12\zeta^3\eta) a \Phi_{,x}^{22} \\ & + (-6\zeta^2 + 4\zeta^3 + 18\zeta^2\eta - 12\zeta^3\eta) b \Phi_{,y}^{22} \\ & + (2\zeta^2 - 2\zeta^3 - 6\zeta^2\eta + 6\zeta^3\eta) a b \Phi_{,xy}^{22} \\ & + (6 - 12\eta - 18\zeta^2 + 12\zeta^3 + 36\zeta^2\eta - 24\zeta^3\eta) \Phi^{12} \\ & + (6\zeta - 12\zeta\eta - 12\zeta^2 + 6\zeta^3 + 24\zeta^2\eta - 12\zeta^3\eta) a \Phi_{,x}^{12} \\ & + (6\zeta^2 - 4\zeta^3 - 18\zeta^2\eta + 12\zeta^3\eta) b \Phi_{,y}^{12} \\ & + (-2\zeta + 6\zeta\eta + 4\zeta^2 - 2\zeta^3 - 12\zeta^2\eta + 6\zeta^3\eta) a b \Phi_{,xy}^{12} \end{aligned}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi_{,xx}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x^2} = \frac{2}{a^2} \qquad \frac{\partial^2 \xi^3}{\partial x^2} = \frac{6}{a^2} \xi$$

Terme 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3) \Phi^{11} \\ = \frac{1}{a^2} (-6 + 12\zeta + 18\eta^2 - 36\eta^2\zeta - 12\eta^3 + 24\eta^3\zeta) \Phi^{11} \end{aligned}$$

Terme 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi\eta^3 + 6\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,x}^{11} \\ = \frac{1}{a^2} (-4 + 6\zeta + 12\eta^2 - 8\eta^3 - 18\eta^2\zeta + 12\eta^3\zeta) a \Phi_{,x}^{11} \end{aligned}$$

Terme 3

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta - 3\xi^2\eta + 6\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 + 2\xi^3\eta - 4\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,y}^{11} \\ = \frac{1}{a^2} (-6\eta + 12\eta\zeta + 12\eta^2 - 6\eta^3 - 24\eta^2\zeta + 12\eta^3\zeta) b \Phi_{,y}^{11} \end{aligned}$$

Terme 4

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (ab(\xi\eta - 2\xi\eta^2 - 2\xi^2\eta + \xi\eta^3 + \xi^3\eta + 4\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3) \Phi_{,xy}^{11} \\ = \frac{1}{a^2} (-4\eta + 6\eta\zeta + 8\eta^2 - 4\eta^3 - 12\eta^2\zeta + 6\eta^3\zeta) ab \Phi_{,xy}^{11} \end{aligned}$$

Terme 5

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (3\xi^2 - 2\xi^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3) \Phi^{21} \\ = \frac{1}{a^2} (6 - 12\zeta - 18\eta^2 + 12\eta^3 + 36\eta^2\zeta - 24\eta^3\zeta) \Phi^{21} \end{aligned}$$

Terme 6

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a(-\xi^2 + \xi^3 + 3\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,x}^{21} \\ = \frac{1}{a^2} (-2 + 6\zeta + 6\eta^2 - 4\eta^3 - 18\eta^2\zeta + 12\eta^3\zeta) a \Phi_{,x}^{21} \end{aligned}$$

Terme 7

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b (3\xi^2 \eta - 6\xi^2 \eta^2 + 3\xi^2 \eta^3 - 2\xi^3 \eta + 4\xi^3 \eta^2 - 2\xi^3 \eta^3) \Phi_{,y}^{21} \\ = \frac{1}{a^2} (6\eta - 12\eta\zeta - 12\eta^2 + 6\eta^3 + 24\eta^2\zeta - 12\eta^3\zeta) b \Phi_{,y}^{21} \end{aligned}$$

Terme 8

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a b (-\xi^2\eta + 2\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 + \xi^3\eta - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3) \Phi_{,xy}^{21} \\ = \frac{1}{a^2} (-2\eta + 6\eta\zeta + 4\eta^2 - 2\eta^3 - 12\eta^2\zeta + 6\eta^3\zeta) a b \Phi_{,xy}^{21} \end{aligned}$$

Terme 9

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3) \Phi^{22} \\ = \frac{1}{a^2} (18\eta^2 - 12\eta^3 - 36\eta^2\zeta + 24\eta^3\zeta) \Phi^{22} \end{aligned}$$

Terme 10

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a (2\xi^2\eta^3 - 3\xi^2\eta^2 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,x}^{22} \\ = \frac{1}{a^2} (-6\eta^2 + 4\eta^3 + 18\eta^2\zeta - 12\eta^3\zeta) a \Phi_{,x}^{22} \end{aligned}$$

Terme 11

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b (3\xi^2\eta^3 - 3\xi^2\eta^2 + 2\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,y}^{22} \\ = \frac{1}{a^2} (-6\eta^2 + 6\eta^3 + 12\eta^2\zeta - 12\eta^3\zeta) b \Phi_{,y}^{22} \end{aligned}$$

Terme 12

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a b (\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3) \Phi_{,xy}^{22} \\ = \frac{1}{a^2} (2\eta^2 - 2\eta^3 - 6\eta^2\zeta + 6\eta^3\zeta) a b \Phi_{,xy}^{22} \end{aligned}$$

Terme 13

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3) \Phi^{12} \\ = \frac{1}{a^2} (-18\eta^2 + 12\eta^3 + 36\eta^2\zeta - 24\eta^3\zeta) \Phi^{12} \end{aligned}$$

Terme 14

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (3\xi \eta^2 - 2\xi \eta^3 - 6\xi^2 \eta^2 + 4\xi^2 \eta^3 + 3\xi^3 \eta^2 - 2\xi^3 \eta^3) a \Phi_{,x}^{12} \\ = \frac{1}{a^2} (-12\eta^2 + 8\eta^3 + 18\eta^2\zeta - 12\eta^3\zeta) a \Phi_{,x}^{12} \end{aligned}$$

Terme 15

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b (\eta^3 - \eta^2 + 3\xi^2 \eta^2 - 3\xi^2 \eta^3 - 2\xi^3 \eta^2 + 2\xi^3 \eta^3) \Phi_{,y}^{12} \\ = \frac{1}{a^2} (6\eta^2 - 6\eta^3 - 12\eta^2\zeta + 12\eta^3\zeta) b \Phi_{,y}^{12} \end{aligned}$$

Terme 16

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a b (-\xi \eta^2 + \xi \eta^3 + 2\xi^2 \eta^2 - 2\xi^2 \eta^3 - \xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3) \Phi_{,xy}^{12} \\ = \frac{1}{a^2} (4\eta^2 - 4\eta^3 - 6\eta^2\zeta + 6\eta^3\zeta) a b \Phi_{,xy}^{12} \end{aligned}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi_{,xx}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = \Phi_{,xx} = & \frac{1}{a^2} [(-6 + 12\zeta + 18\eta^2 - 36\eta^2\zeta - 12\eta^3 + 24\eta^3\zeta) \Phi^{11} \\ & + (-4 + 6\zeta + 12\eta^2 - 8\eta^3 - 18\eta^2\zeta + 12\eta^3\zeta) a \Phi_{,x}^{11} \\ & + (-6\eta + 12\eta\zeta + 12\eta^2 - 6\eta^3 - 24\eta^2\zeta + 12\eta^3\zeta) b \Phi_{,y}^{11} \\ & + (-4\eta + 6\eta\zeta + 8\eta^2 - 4\eta^3 - 12\eta^2\zeta + 6\eta^3\zeta) a b \Phi_{,xy}^{11} \\ & + (6 - 12\zeta - 18\eta^2 + 12\eta^3 + 36\eta^2\zeta - 24\eta^3\zeta) \Phi^{21} \\ & + (-2 + 6\zeta + 6\eta^2 - 4\eta^3 - 18\eta^2\zeta + 12\eta^3\zeta) a \Phi_{,x}^{21} \\ & + (6\eta - 12\eta\zeta - 12\eta^2 + 6\eta^3 + 24\eta^2\zeta - 12\eta^3\zeta) b \Phi_{,y}^{21} \\ & + (-2\eta + 6\eta\zeta + 4\eta^2 - 2\eta^3 - 12\eta^2\zeta + 6\eta^3\zeta) a b \Phi_{,xy}^{21} \\ & + (18\eta^2 - 12\eta^3 - 36\eta^2\zeta + 24\eta^3\zeta) \Phi^{22} \\ & + (-6\eta^2 + 4\eta^3 + 18\eta^2\zeta - 12\eta^3\zeta) a \Phi_{,x}^{22} \\ & + (-6\eta^2 + 6\eta^3 + 12\eta^2\zeta - 12\eta^3\zeta) b \Phi_{,y}^{22} \\ & + (2\eta^2 - 2\eta^3 - 6\eta^2\zeta + 6\eta^3\zeta) a b \Phi_{,xy}^{22} \\ & + (-18\eta^2 + 12\eta^3 + 36\eta^2\zeta - 24\eta^3\zeta) \Phi^{12} \\ & + (-12\eta^2 + 8\eta^3 + 18\eta^2\zeta - 12\eta^3\zeta) a \Phi_{,x}^{12} \\ & + (6\eta^2 - 6\eta^3 - 12\eta^2\zeta + 12\eta^3\zeta) b \Phi_{,y}^{12} \\ & + (4\eta^2 - 4\eta^3 - 6\eta^2\zeta + 6\eta^3\zeta) a b \Phi_{,xy}^{12} \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = - \Phi_{,xy}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{b} \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{a} \quad , \quad \frac{\partial \xi^2}{\partial x} = \frac{2}{a^2} \quad , \quad \frac{\partial \eta^2}{\partial y} = \frac{2}{b^2} \quad , \quad \frac{\partial \xi^3}{\partial x} = \frac{6}{b^2} \eta$$

$$\frac{\partial \eta^3}{\partial y} = \frac{6}{b^3}$$

Terme 1

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3) \Phi^{11} \\ & = - \frac{1}{ab} [(36\xi\eta - 36\xi^2\eta - 36\xi\eta^2 + 36\eta^2\xi^2) \Phi^{11} \end{aligned}$$

Terme 2

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi\eta^3 + 6\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,x}^{11}) \\ & = - \frac{1}{ab} (-6\eta + 6\eta^2 + 24\xi\eta - 24\xi\eta^2 - 18\xi^2\eta + 18\xi^2\eta^2) a \Phi_{,x}^{11} \end{aligned}$$

Terme 3

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (b(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta - 3\xi^2\eta + 6\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 + 2\xi^3\eta - 4\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,y}^{11}) \\ & = - \frac{1}{ab} (-6\xi + 6\xi^2 + 24\eta\xi - 18\xi\eta^2 - 24\xi^2\eta + 18\eta^2\xi^2) b \Phi_{,y}^{11} \end{aligned}$$

Terme 4

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (a b (\xi\eta - 2\xi\eta^2 - 2\xi^2\eta + \xi\eta^3 + \xi^3\eta + 4\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3) \Phi_{,xy}^{11}) \\ & = - \frac{1}{ab} (1 - 4\eta - 4\xi + 3\eta^2 + 3\xi^2 + 16\xi\eta - 12\xi\eta^2 - 12\xi^2\eta + 9\xi^2\eta^2) a b \Phi_{,xy}^{11} \end{aligned}$$

Terme 5

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (3\xi^2 - 2\xi^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3) \Phi^{21} \\ & = - \frac{1}{ab} (-36\xi\eta + 36\xi^2\eta + 36\xi\eta^2 - 36\eta^2\xi^2) \Phi^{21} \end{aligned}$$

Terme 6

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (a(-\xi^2 + \xi^3 + 3\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,x}^{21}) \\ & = - \frac{1}{ab} (12\xi\eta - 12\xi\eta^2 - 18\xi^2\eta + 18\xi^2\eta^2) a \Phi_{,x}^{21} \end{aligned}$$

Terme 7

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (b (3\xi^2 \eta - 6\xi^2 \eta^2 + 3\xi^2 \eta^3 - 2\xi^3 \eta + 4\xi^3 \eta^2 - 2\xi^3 \eta^3) \Phi_{,y}^{21}) \\
 & = -\frac{1}{ab} (6\zeta - 24\eta\zeta - 6\zeta^2 + 18\zeta\eta^2 + 24\zeta^2\eta - 18\eta^2\zeta^2) b \Phi_{,y}^{21}
 \end{aligned}$$

Terme 8

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (a b (-\xi^2\eta + 2\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 + \xi^3\eta - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3) \Phi_{,xy}^{21}) \\
 & = -\frac{1}{ab} (-2\zeta + 8\eta\zeta + 3\zeta^2 - 6\zeta\eta^2 - 12\zeta^2\eta + 9\zeta^2\eta^2) a b \Phi_{,xy}^{21}
 \end{aligned}$$

Terme 9

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3) \Phi^{22} \\
 & = -\frac{1}{ab} (36\zeta\eta - 36\zeta^2\eta - 36\zeta\eta^2 + 36\eta^2\zeta^2) \Phi^{22}
 \end{aligned}$$

Terme 10

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (a (2\xi^2\eta^3 - 3\xi^2\eta^2 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,x}^{22}) \\
 & = -\frac{1}{ab} (-12\zeta\eta + 12\zeta\eta^2 + 18\zeta^2\eta - 18\zeta^2\eta^2) a \Phi_{,x}^{22}
 \end{aligned}$$

Terme 11

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (b (3\xi^2\eta^3 - 3\xi^2\eta^2 + 2\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3) \Phi_{,y}^{22}) \\
 & = -\frac{1}{ab} (-12\zeta\eta + 18\zeta\eta^2 + 12\zeta^2\eta - 18\eta^2\zeta^2) b \Phi_{,y}^{22}
 \end{aligned}$$

Terme 12

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (a b (\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3) \Phi_{,xy}^{22}) \\
 & = -\frac{1}{ab} (4\zeta\eta - 6\zeta\eta^2 - 6\zeta^2\eta + 9\zeta^2\eta^2) a b \Phi_{,xy}^{22}
 \end{aligned}$$

Terme 13

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3) \Phi^{12} \\
 & = -\frac{1}{ab} (-36\zeta\eta + 36\zeta^2\eta + 36\zeta\eta^2 - 36\eta^2\zeta^2) \Phi^{12}
 \end{aligned}$$

Terme 14

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (a (3\xi \eta^2 - 2\xi \eta^3 - 6\xi^2 \eta^2 + 4 \xi^2 \eta^3 + 3\xi^3 \eta^2 - 2 \xi^3 \eta^3) \Phi_{,x}^{12}) \\
 & = -\frac{1}{ab} (6 \eta - 6\eta^2 - 24 \zeta \eta + 24 \zeta \eta^2 + 18 \zeta^2 \eta - 18 \zeta^2 \eta^2) a \Phi_{,x}^{12}
 \end{aligned}$$

Terme 15

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (b (\eta^3 - \eta^2 + 3\xi^2 \eta^2 - 3 \xi^2 \eta^3 - 2\xi^3 \eta^2 + 2 \xi^3 \eta^3) \Phi_{,y}^{12}) \\
 & = -\frac{1}{ab} (+12 \zeta \eta - 18 \zeta \eta^2 - 12 \zeta^2 \eta + 18\eta^2\zeta^2) b \Phi_{,y}^{12}
 \end{aligned}$$

Terme 16

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (a b (-\xi \eta^2 + \xi \eta^3 + 2\xi^2 \eta^2 - 2\xi^2 \eta^3 - \xi^3 \eta^2 + \xi^3 \eta^3) \Phi_{,xy}^{12}) \\
 & = -\frac{1}{ab} (-2\eta + 3\eta^2 + 8 \zeta \eta - 12 \zeta \eta^2 - 6 \zeta^2 \eta + 9 \zeta^2 \eta^2) a b \Phi_{,xy}^{12}
 \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = - \Phi_{,xy}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & - \Phi_{,xy} = - \frac{1}{ab} [(36 \zeta \eta - 36 \zeta^2 \eta - 36 \zeta \eta^2 + 36 \eta^2 \zeta^2) \Phi^{11} \\ & + (-6 \eta + 6 \eta^2 + 24 \zeta \eta - 24 \zeta \eta^2 - 18 \zeta^2 \eta + 18 \zeta^2 \eta^2) a \Phi_{,x}^{11} \\ & + (-6 \zeta + 6 \zeta^2 + 24 \eta \zeta - 18 \zeta \eta^2 - 24 \zeta^2 \eta + 18 \eta^2 \zeta^2) b \Phi_{,y}^{11} \\ & + (1 - 4 \eta - 4 \zeta + 3 \eta^2 + 3 \zeta^2 + 16 \zeta \eta - 12 \zeta \eta^2 - 12 \zeta^2 \eta + 9 \zeta^2 \eta^2) a b \Phi_{,xy}^{11} \\ & + (-36 \zeta \eta + 36 \zeta^2 \eta + 36 \zeta \eta^2 - 36 \eta^2 \zeta^2) \Phi^{21} \\ & + (12 \zeta \eta - 12 \zeta \eta^2 - 18 \zeta^2 \eta + 18 \zeta^2 \eta^2) a \Phi_{,x}^{21} \\ & + (6 \zeta - 24 \eta \zeta - 6 \zeta^2 + 18 \zeta \eta^2 + 24 \zeta^2 \eta - 18 \eta^2 \zeta^2) b \Phi_{,y}^{21} \\ & + (-2 \zeta + 8 \eta \zeta + 3 \zeta^2 - 6 \zeta \eta^2 - 12 \zeta^2 \eta + 9 \zeta^2 \eta^2) a b \Phi_{,xy}^{21} \\ & + (36 \zeta \eta - 36 \zeta^2 \eta - 36 \zeta \eta^2 + 36 \eta^2 \zeta^2) \Phi^{22} \\ & + (-12 \zeta \eta + 12 \zeta \eta^2 + 18 \zeta^2 \eta - 18 \zeta^2 \eta^2) a \Phi_{,x}^{22} \\ & + (-12 \zeta \eta + 18 \zeta \eta^2 + 12 \zeta^2 \eta - 18 \eta^2 \zeta^2) b \Phi_{,y}^{22} \\ & + (4 \zeta \eta - 6 \zeta \eta^2 - 6 \zeta^2 \eta + 9 \zeta^2 \eta^2) a b \Phi_{,xy}^{22} \\ & + (-36 \zeta \eta + 36 \zeta^2 \eta + 36 \zeta \eta^2 - 36 \eta^2 \zeta^2) \Phi^{12} \\ & + (6 \eta - 6 \eta^2 - 24 \zeta \eta + 24 \zeta \eta^2 + 18 \zeta^2 \eta - 18 \zeta^2 \eta^2) a \Phi_{,x}^{12} \\ & + (+12 \zeta \eta - 18 \zeta \eta^2 - 12 \zeta^2 \eta + 18 \eta^2 \zeta^2) b \Phi_{,y}^{12} \\ & + (-2 \eta + 3 \eta^2 + 8 \zeta \eta - 12 \zeta \eta^2 - 6 \zeta^2 \eta + 9 \zeta^2 \eta^2) a b \Phi_{,xy}^{12} \end{aligned}$$

PARTIE B

CHAPITRE 4

PRESENTATION DU PROGRAMME ET EXEMPLES

4. PRESENTATION DU PROGRAMME ET EXEMPLES

4.1. L'interface du programme et mode d'utilisation

L'interface du programme a été élaboré sous **MATLAB** les codes sources de calcul des deux méthodes déplacements et contraintes sont compilés sous **FORTRAN**

4.1.1. Pré-processeur

Vu la complexité des structures et la raffinité du maillage demandé, notre programme est munie d'une interface graphique qui permet de visualiser le maillage de la structure ; numéros de nœuds et d'éléments pour détecter toutes anomalies de données et permettant de corriger les erreurs éventuelles

4.1.2. Fichier de données

Dans un programme d'éléments finis les données sont généralement devisées en 03 catégories Principales

- Données géométriques
- Propriétés des matériaux
- Sollicitations

Il est important de noter que la façon de discrétiser la structure influe considérablement sur la précision des calculs :

- En effet une bonne numérotation des nœuds donne une demi-largeur de bande de la matrice de rigidité minime, qui reviendrait à économiser l'espace mémoire et le temps de calcul.
- Plus le nombre d'éléments est grand plus la précision est bonne mais aussi plus le calcul est long pour le programme.

Ainsi la structure sera discrétisée et numérotée suivant un certain ordre optimal

Dans notre programme les données sont introduit dans un fichier texte sous la forme suivante

4.1.2.1. Fichier de donnees methode des déplacements :

```

13 2 1 1 1
1 0.00 0.00 11
2 0.00 0.25 11
3 0.00 0.50 11
4 1.25 0.00 00
5 1.25 0.50 00
6 2.50 0.00 00
7 2.50 0.25 00
8 2.50 0.50 00
9 3.75 0.00 00
10 3.75 0.50 00
11 5.00 0.00 00
12 5.00 0.25 00
13 5.00 0.50 00
1 1 6 8 3 4 7 5 2 1 1 1 0.3
2 6 11 13 8 9 12 10 7 1 1 1 0.3
1 25000000.
1 25.
1 0.3
1
13 0.0 -2.0
FIN

```

Cet exemple a été donné pour un élément de poutre à deux maillages, donc à 13 nœuds; et constitué d'un seul matériau.

Module de Young = 25×10^6 kN
Masse volumique = 2500 Kg/m^3
Coefficient de Poisson = 0.3

Ensuite sont données

- Le nombre de nœud total de la structure
- Le nombre d' éléments finis
- Le nombre de module de Young (Cas de plusieurs matériaux)
- Le nombre de masse volumique (Cas de plusieurs matériaux)
- Le nombre de coefficient de Poisson (Cas de plusieurs matériaux)

Ensuite sont données pour chaque nœud

- Le numéro du nœud
- Les coordonnées suivant x
- Les coordonnées suivant y
- Les conditions aux limites suivant x
- Les conditions aux limites suivant y

Ensuite sont données pour chaque élément :

- les nœuds qui lui correspondent dans l'ordre et dans le sens trigonométrique
- nœuds des coins en suite nœuds des facettes
- les numéros du module de Young, masse volumique et coefficient de Poisson lui correspondant.
- Ensuite sont données les modules de Young, masses volumique et coefficients de Poisson pour les différents matériaux constituant ainsi la structure.
- Et enfin sont données les cas de charge pour chaque nœud sollicité.

Bien sur cet exemple traite d'une structure simple et seulement en statique, mais cela suffit pour définir un exemple de travail.

4.1.2.2. Fichier de données méthode des contraintes :

NB : les longueur sont introduites en inch , les contraintes en psi

*** exemple 9 elements SOL ***

16 , 9 , 9 , 15

1 , 5.90 , 11.81 , 1000.0 , 1.0 , 0.47

2 , 33.46 , 11.81 , 1000.0 , 1.0 , 0.47

3 , 39.37 , 11.81 , 1000.0 , 1.0 , 0.47

4 , 5.90 , 27.56 , 1000.0 , 1.0 , 0.47

5 , 33.46 , 27.56 , 1000.0 , 1.0 , 0.47

6 , 39.37 , 27.56 , 1000.0 , 1.0 , 0.47

7 , 5.90 , 39.37 , 1000.0 , 1.0 , 0.47

8 , 33.46 , 39.37 , 1000.0 , 1.0 , 0.47

9 , 39.37 , 39.37 , 1000.0 , 1.0 , 0.47

1 , 5 , 1 , 2 , 6 , 1

2 , 6 , 2 , 3 , 7 , 2

3 , 7 , 3 , 4 , 8 , 3

4 , 9 , 5 , 6 , 10 , 4

5 , 10 , 6 , 7 , 11 , 5

6 , 11 , 7 , 8 , 12 , 6

7 , 13 , 9 , 10 , 14 , 7

8 , 14 , 10 , 11 , 15 , 8

9 , 15 , 11 , 12 , 16 , 9

4

0.0 , 0.0

1.0 , 0.0

0.0 , 1.0

1.0 , 1.0

1 , 0 , 0.0

Nombre de : nœuds ,éléments, matériaux
En fin nombre de conditions aux limites

Numero du noued ,longueur X ,longueur Y
Module de young, epaisseur,coefficient
De poisson

Pour chaque éléments finis les numéros des
04 nœuds sens horaire

Nombre de point de calcul des contraintes
par éléments
Position Des nœuds à échelle unitaire

2, 0, 0.0
 3, 0, 0.0
 4, 0, 0.0
 5, 0, 0.0
 8, 0, 0.0
 9, 0, 0.0
 12, 0, 0.0
 13, 0, 0.0
 16, 0, 0.0
 1, 2, 5.90, 0, 1, 0, 1, 29.5, 0.0, 0.0
 2, 3, 33.46, 0, 1, 0, 1, 0.0, 0.0, 0.0
 3, 4, 39.37, 0, 1, 0, 1, 0.0, 0.0, 0.0
 5, 1, 11.81, 0, 0, 1, 0, 0.0, 0.0, 0.0
 8, 4, 11.81, 0, 0, 1, 0, 0.0, 0.0, 0.0
 9, 5, 27.56, 0, 0, 1, 0, 0.0, 0.0, 0.0
 12, 8, 27.56, 0, 0, 1, 0, 0.0, 0.0, 0.0
 13, 9, 39.37, 0, 0, 1, 0, 0.0, 0.0, 0.0
 16, 12, 39.37, 0, 0, 1, 0, 0.0, 0.0, 0.0
 0, 0, 0.00, 0, 0, 0, 0, 0.0, 0.0, 0.0

Conditions aux limites aux nœuds

NA - numéro premier nœud bord chargée
 NB - numéro deuxième bord chargée
 RL - distance entre deux nœud chargés
 NSX - mise à 1 si σ_x est contrainte verticale
 mise à 0 si aucune condition n'est donnée pour σ_x
 NSY - même chose pour σ_y
 NTAUX - mise à 1 si bord parallèle a la direction x et
 si la condition sur τ_{xy} est donnée
 si non mise à 0
 NTAUY - même chose pour NTAUX si le bord est parallèle a y
 RS1 - première intégral de la contrainte normale
 RS2 - deuxième intégrale de la contrainte normale
 RTAU1 - première intégrale de cisaillement
 Arrêt de lecture si NA = 0

Exemple traite d'une structure simple d'un sol utilisant 16 nœuds et 09 éléments finis .avec 15 condition au limites et chaque élément et représente par 04 nœuds ou fonctions de forme

Exemples de calcul Methode des contrainte

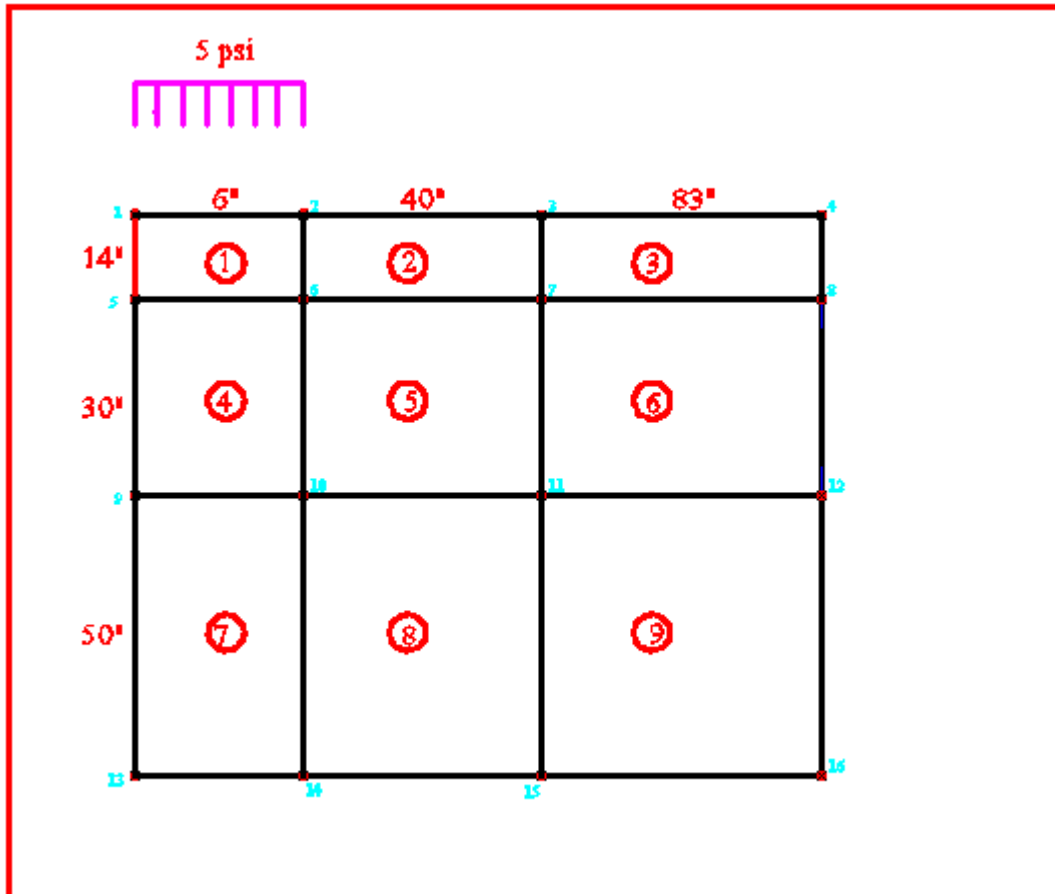
Exemple 02 sol avec chargement pneumatique (contrainte normale et cisaillement):
(contrainte normale sans cisaillement):

Description :

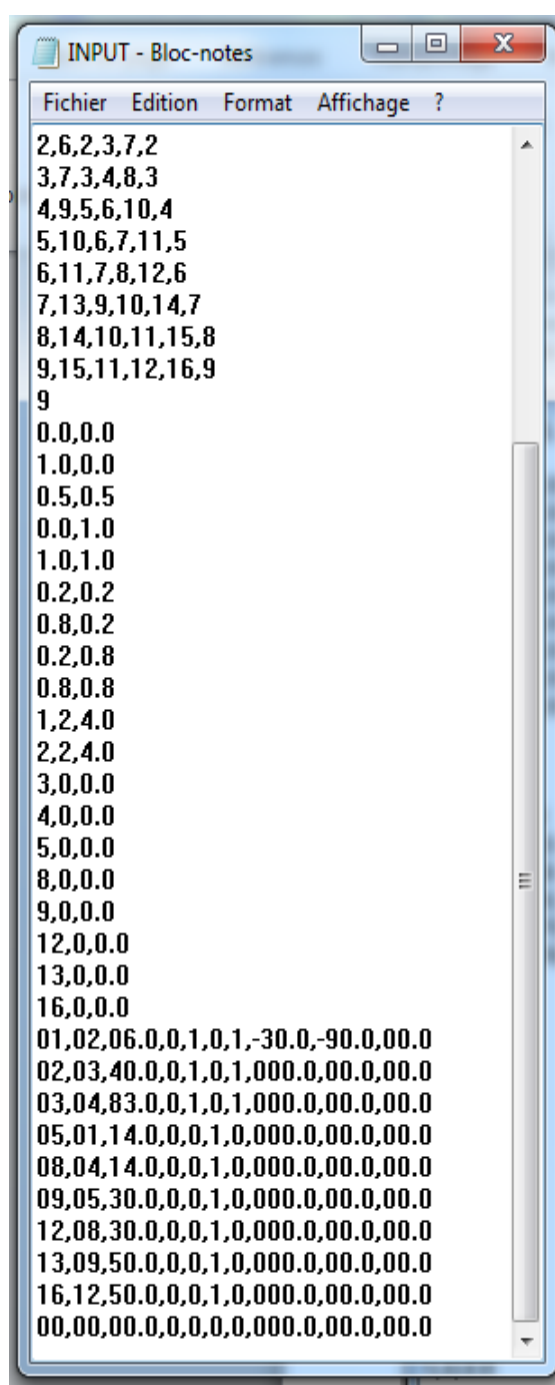
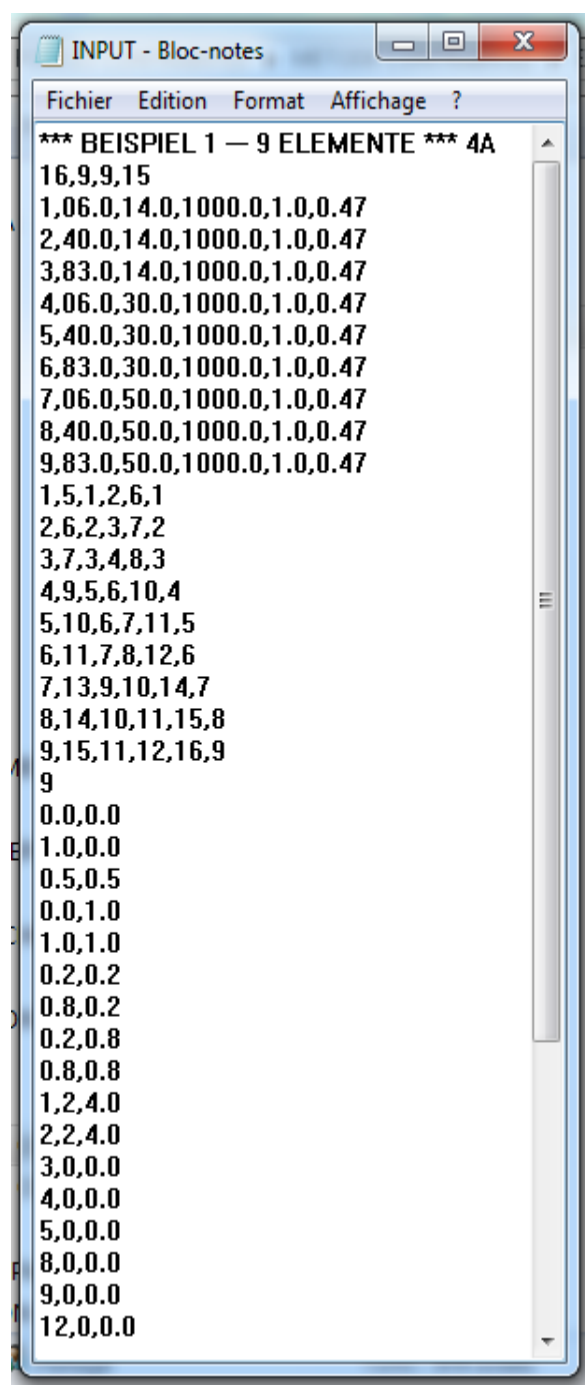
Cette exemple mentre le comportement d'un sol soumis a une charge pneumaticque verticale

La valeur de la contrainte appliquée est de 5 psi entre les deux noueds 01 et 02

Le sol est décritise en 9 elements finis rectangulaires comme sur figure



fihier de donnes



*** BEISPIEL 1 --- 9 ELEMENTE *** 4A

NOMBRE DE NOEUDS : 16

NOMBRE D ELEMENTS: 9

NOMBRE DE DOMAINE MATERIEL: 9

NOMBRE DE CONDITION LIMITE: 15

MAT.-BEREICH	LONG A	LARG B	E-MODUL	EPAI	NUE
1	6.0000	14.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
2	40.0000	14.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
3	83.0000	14.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
4	6.0000	30.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
5	40.0000	30.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
6	83.0000	30.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
7	6.0000	50.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
8	40.0000	50.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
9	83.0000	50.0000	1000.0000	1.0000	0.4700

ELEMENTDATEN

1	5	1	2	6	1
2	6	2	3	7	2
3	7	3	4	8	3
4	9	5	6	10	4
5	10	6	7	11	5
6	11	7	8	12	6
7	13	9	10	14	7
8	14	10	11	15	8
9	15	11	12	16	9

CONTRAINTE	SIGX	SIGY	TAU	SIGZ	SIG1	SIG2	ANGLE
------------	------	------	-----	------	------	------	-------

ALFA

ELEMENT NR: 1

X=0.00 Y=0.00 0.5823E+00 -0.3375E+01 0.0000E+00 -0.1312E+01 0.5823E+00 -0.3375E+01
0.0000E+00

X=1.00 Y=0.00 0.2052E+00 -0.1376E+01 0.6659E+00 -0.5504E+00 0.4483E+00 -0.1619E+01
0.2005E+02

X=0.50 Y=0.50 -0.7056E+00 -0.2787E+01 0.4019E+00 -0.1642E+01 -0.6307E+00 -0.2862E+01 0.1056E+02

X=0.00 Y=1.00 -0.2546E+01 -0.5000E+01 -0.2909E+01 -0.3546E+01 -0.6157E+00 -0.6930E+01 -0.3356E+02

X=1.00 Y=1.00 -0.1726E+01 -0.5000E+01 0.8452E+00 -0.3161E+01 -0.1521E+01 -0.5205E+01 0.1365E+02

X=0.20 Y=0.20 -0.1646E+00 -0.3024E+01 0.5761E+00 -0.1499E+01 -0.5288E-01 -0.3136E+01 0.1097E+02

X=0.80 Y=0.20 -0.1158E+00 -0.2110E+01 0.7212E+00 -0.1046E+01 0.1177E+00 -0.2343E+01

0.1794E+02

X=0.20 Y=0.80 -0.1429E+01 -0.2658E+01 -0.3101E+00 -0.1921E+01 -0.1355E+01 -0.2732E+01 -0.1339E+02

X=0.80 Y=0.80 -0.1351E+01 -0.4653E+01 0.9467E+00 -0.2822E+01 -0.1099E+01 -0.4905E+01 0.1492E+02

ELEMENT NR: 2

X=0.00 Y=0.00 0.2052E+00 -0.1140E+01 0.6659E+00 -0.4395E+00 0.4790E+00 -0.1414E+01
0.2235E+02

X=1.00 Y=0.00 -0.3969E-01 0.3470E+00 -0.3203E-01 0.1444E+00 0.3497E+00 -0.4233E-01 0.4702E+01

X=0.50 Y=0.50 -0.4063E+00 -0.2048E+00 0.2613E-01 -0.2872E+00 -0.2014E+00 -0.4097E+00 -0.7268E+01

X=0.00 Y=1.00 -0.1726E+01 -0.6484E-15 0.8452E+00 -0.8112E+00 0.3449E+00 -0.2071E+01 -0.2220E+02

X=1.00 Y=1.00 0.1453E+00 -0.3064E-15 0.0000E+00 0.6829E-01 0.1453E+00 -0.3053E-15 0.0000E+00

X=0.20 Y=0.20 -0.7088E+00 -0.7453E+00 0.6186E+00 -0.6834E+00 -0.1082E+00 -0.1346E+01 0.4416E+02

X=0.80 Y=0.20 -0.1376E+00 0.7802E-01 -0.2621E-01 -0.2801E-01 0.8116E-01 -0.1407E+00 0.6832E+01

X=0.20 Y=0.80 -0.7679E+00 -0.1846E+00 0.4837E+00 -0.4477E+00 0.8862E-01 -0.1041E+01 -0.2946E+02

X=0.80 Y=0.80 0.6472E-01 0.4196E-01 -0.2141E+00 0.5014E-01 0.2677E+00 -0.1611E+00 -0.4348E+02

ELEMENT NR: 3

X=0.00 Y=0.00	-.3969E-01	-.1096E-01	-.3203E-01	-.2381E-01	0.9774E-02	-.6043E-01	0.3292E+02
X=1.00 Y=0.00	-.8333E-01	0.1384E-01	0.0000E+00	-.3266E-01	0.1384E-01	-.8333E-01	0.0000E+00
X=0.50 Y=0.50	-.4981E-01	0.4328E-04	-.2598E-01	-.2339E-01	0.1112E-01	-.6088E-01	0.2309E+02
X=0.00 Y=1.00	0.1453E+00	-.1554E-15	0.0000E+00	0.6829E-01	0.1453E+00	-.1665E-15	0.0000E+00
X=1.00 Y=1.00	-.1266E+00	-.4974E-15	0.0000E+00	-.5948E-01	-.4996E-15	-.1266E+00	0.0000E+00
X=0.20 Y=0.20	-.5676E-01	-.5246E-02	-.2929E-01	-.2914E-01	0.7999E-02	-.7000E-01	0.2434E+02
X=0.80 Y=0.20	-.9389E-01	0.6438E-02	-.1823E-01	-.4110E-01	0.9648E-02	-.9710E-01	0.9986E+01
X=0.20 Y=0.80	0.8094E-01	-.5913E-03	-.7812E-02	0.3776E-01	0.8168E-01	-.1333E-02	-.5425E+01
X=0.80 Y=0.80	-.9534E-01	0.5444E-03	-.8285E-02	-.4456E-01	0.1255E-02	-.9605E-01	0.4902E+01

ELEMENT NR: 4

X=0.00 Y=0.00	-.6676E-01	-.1037E+01	0.0000E+00	-.5187E+00	-.6676E-01	-.1037E+01	0.0000E+00
X=1.00 Y=0.00	-.1678E-01	-.8331E+00	0.9336E-01	-.3994E+00	-.6235E-02	-.8436E+00	0.6442E+01
X=0.50 Y=0.50	-.8822E-01	-.1297E+01	0.1127E+00	-.6512E+00	-.7781E-01	-.1308E+01	0.5278E+01
X=0.00 Y=1.00	-.4800E-01	-.3375E+01	0.0000E+00	-.1609E+01	-.4800E-01	-.3375E+01	0.0000E+00
X=1.00 Y=1.00	-.2786E+00	-.1376E+01	0.6659E+00	-.7778E+00	0.3549E-01	-.1690E+01	0.2525E+02
X=0.20 Y=0.20	-.6209E-01	-.1092E+01	0.7843E-02	-.5423E+00	-.6203E-01	-.1092E+01	0.4364E+00
X=0.80 Y=0.20	-.6228E-01	-.9843E+00	0.7983E-01	-.4919E+00	-.5542E-01	-.9911E+00	0.4913E+01
X=0.20 Y=0.80	-.6412E-01	-.1945E+01	0.1717E+00	-.9444E+00	-.4857E-01	-.1961E+01	0.5174E+01
X=0.80 Y=0.80	-.1850E+00	-.1683E+01	0.4498E+00	-.8782E+00	-.6032E-01	-.1808E+01	0.1549E+02

ELEMENT NR: 5

X=0.00 Y=0.00	-.1678E-01	-.9356E+00	0.9336E-01	-.4476E+00	-.7386E-02	-.9450E+00	0.5744E+01
X=1.00 Y=0.00	-.3299E+00	-.1908E+00	0.1362E+00	-.2447E+00	-.1073E+00	-.4133E+00	-.3148E+02
X=0.50 Y=0.50	-.3353E+00	-.5494E+00	0.3279E+00	-.4158E+00	-.9745E-01	-.7872E+00	0.3596E+02
X=0.00 Y=1.00	-.2786E+00	-.1140E+01	0.6659E+00	-.6669E+00	0.8365E-01	-.1503E+01	0.2855E+02
X=1.00 Y=1.00	-.2221E+00	0.3470E+00	-.3203E-01	0.5872E-01	0.3488E+00	-.2239E+00	0.3211E+01
X=0.20 Y=0.20	-.1405E+00	-.8416E+00	0.2265E+00	-.4616E+00	-.7370E-01	-.9084E+00	0.1644E+02
X=0.80 Y=0.20	-.3139E+00	-.2919E+00	0.2241E+00	-.2847E+00	-.7853E-01	-.5273E+00	-.4359E+02
X=0.20 Y=0.80	-.3913E+00	-.9226E+00	0.4201E+00	-.6175E+00	-.1599E+00	-.1154E+01	0.2885E+02
X=0.80 Y=0.80	-.3176E+00	-.4143E-01	0.1510E+00	-.1688E+00	0.2513E-01	-.3842E+00	-.2378E+02

ELEMENT NR: 6

X=0.00 Y=0.00	-.3299E+00	-.1176E+00	0.1362E+00	-.2103E+00	-.5101E-01	-.3964E+00	-.2604E+02
X=1.00 Y=0.00	-.1656E+00	0.7269E-01	0.0000E+00	-.4365E-01	0.7269E-01	-.1656E+00	0.0000E+00
X=0.50 Y=0.50	-.1527E+00	-.2900E-02	-.2747E-01	-.7311E-01	0.1981E-02	-.1575E+00	0.1007E+02
X=0.00 Y=1.00	-.2221E+00	-.1096E-01	-.3203E-01	-.1095E+00	-.6210E-02	-.2268E+00	0.8439E+01
X=1.00 Y=1.00	-.1259E+00	0.1384E-01	0.0000E+00	-.5265E-01	0.1384E-01	-.1259E+00	0.0000E+00
X=0.20 Y=0.20	-.2509E+00	-.5771E-01	0.4584E-01	-.1450E+00	-.4738E-01	-.2612E+00	-.1270E+02
X=0.80 Y=0.20	-.1628E+00	0.3114E-01	-.2375E-01	-.6190E-01	0.3400E-01	-.1657E+00	0.6879E+01
X=0.20 Y=0.80	-.1548E+00	-.1037E-01	-.1358E-01	-.7764E-01	-.9105E-02	-.1561E+00	0.5325E+01
X=0.80 Y=0.80	-.1259E+00	0.1439E-01	-.2260E-01	-.5240E-01	0.1794E-01	-.1294E+00	0.8930E+01

ELEMENT NR: 7

X=0.00 Y=0.00	-.4178E+00	-.5332E+00	0.0000E+00	-.4470E+00	-.4178E+00	-.5332E+00	0.0000E+00
X=1.00 Y=0.00	-.4050E+00	-.5866E+00	0.4195E-01	-.4661E+00	-.3958E+00	-.5958E+00	0.1240E+02
X=0.50 Y=0.50	-.2197E+00	-.6939E+00	0.1169E-01	-.4294E+00	-.2194E+00	-.6942E+00	0.1412E+01
X=0.00 Y=1.00	-.1907E-01	-.1037E+01	0.0000E+00	-.4963E+00	-.1907E-01	-.1037E+01	0.0000E+00
X=1.00 Y=1.00	-.3988E-01	-.8331E+00	0.9336E-01	-.4103E+00	-.2903E-01	-.8439E+00	0.6623E+01
X=0.20 Y=0.20	-.3376E+00	-.6344E+00	0.6822E-02	-.4568E+00	-.3374E+00	-.6345E+00	0.1316E+01
X=0.80 Y=0.20	-.3331E+00	-.6032E+00	0.2512E-01	-.4400E+00	-.3308E+00	-.6055E+00	0.5268E+01
X=0.20 Y=0.80	-.9978E-01	-.8003E+00	0.1740E-01	-.4230E+00	-.9935E-01	-.8008E+00	0.1422E+01
X=0.80 Y=0.80	-.1094E+00	-.8148E+00	0.5421E-01	-.4344E+00	-.1053E+00	-.8190E+00	0.4369E+01

ELEMENT NR: 8

X=0.00 Y=0.00	-.4050E+00	-.5747E+00	0.4195E-01	-.4605E+00	-.3952E+00	-.5845E+00	0.1315E+02
X=1.00 Y=0.00	-.2575E+00	-.3171E+00	0.1813E+00	-.2701E+00	-.1036E+00	-.4711E+00	0.4033E+02
X=0.50 Y=0.50	-.2521E+00	-.5196E+00	0.1167E+00	-.3627E+00	-.2083E+00	-.5634E+00	0.2055E+02
X=0.00 Y=1.00	-.3988E-01	-.9356E+00	0.9336E-01	-.4585E+00	-.3025E-01	-.9452E+00	0.5888E+01
X=1.00 Y=1.00	-.2672E+00	-.1908E+00	0.1362E+00	-.2152E+00	-.8748E-01	-.3705E+00	-.3717E+02
X=0.20 Y=0.20	-.3244E+00	-.5761E+00	0.7343E-01	-.4232E+00	-.3045E+00	-.5959E+00	0.1513E+02
X=0.80 Y=0.20	-.2782E+00	-.3813E+00	0.1470E+00	-.3100E+00	-.1740E+00	-.4856E+00	0.3534E+02
X=0.20 Y=0.80	-.1417E+00	-.7195E+00	0.1196E+00	-.4047E+00	-.1179E+00	-.7432E+00	0.1124E+02
X=0.80 Y=0.80	-.2501E+00	-.3800E+00	0.1585E+00	-.2961E+00	-.1438E+00	-.4863E+00	0.3386E+02

ELEMENT NR: 9

X=0.00 Y=0.00	-.2575E+00	-.2479E+00	0.1813E+00	-.2375E+00	-.7130E-01	-.4341E+00	-.4424E+02
X=1.00 Y=0.00	-.4508E-01	0.3572E-01	0.0000E+00	-.4397E-02	0.3572E-01	-.4508E-01	0.0000E+00
X=0.50 Y=0.50	-.1816E+00	-.6086E-01	0.4730E-01	-.1140E+00	-.4454E-01	-.1979E+00	-.1904E+02
X=0.00 Y=1.00	-.2672E+00	-.1176E+00	0.1362E+00	-.1808E+00	-.3696E-01	-.3478E+00	-.3061E+02
X=1.00 Y=1.00	-.1940E+00	0.7269E-01	0.0000E+00	-.5702E-01	0.7269E-01	-.1940E+00	0.0000E+00
X=0.20 Y=0.20	-.2154E+00	-.1759E+00	0.1283E+00	-.1839E+00	-.6584E-01	-.3254E+00	-.4062E+02
X=0.80 Y=0.20	-.8785E-01	0.3851E-02	0.3641E-01	-.3948E-01	0.1655E-01	-.1005E+00	-.1923E+02
X=0.20 Y=0.80	-.2604E+00	-.1125E+00	0.7008E-01	-.1753E+00	-.8454E-01	-.2884E+00	-.2172E+02
X=0.80 Y=0.80	-.1761E+00	0.3617E-01	-.5573E-02	-.6579E-01	0.3631E-01	-.1763E+00	0.1503E+01

** DEFORMATION PLANE (NUMERIQUE PAR IFLEX) **

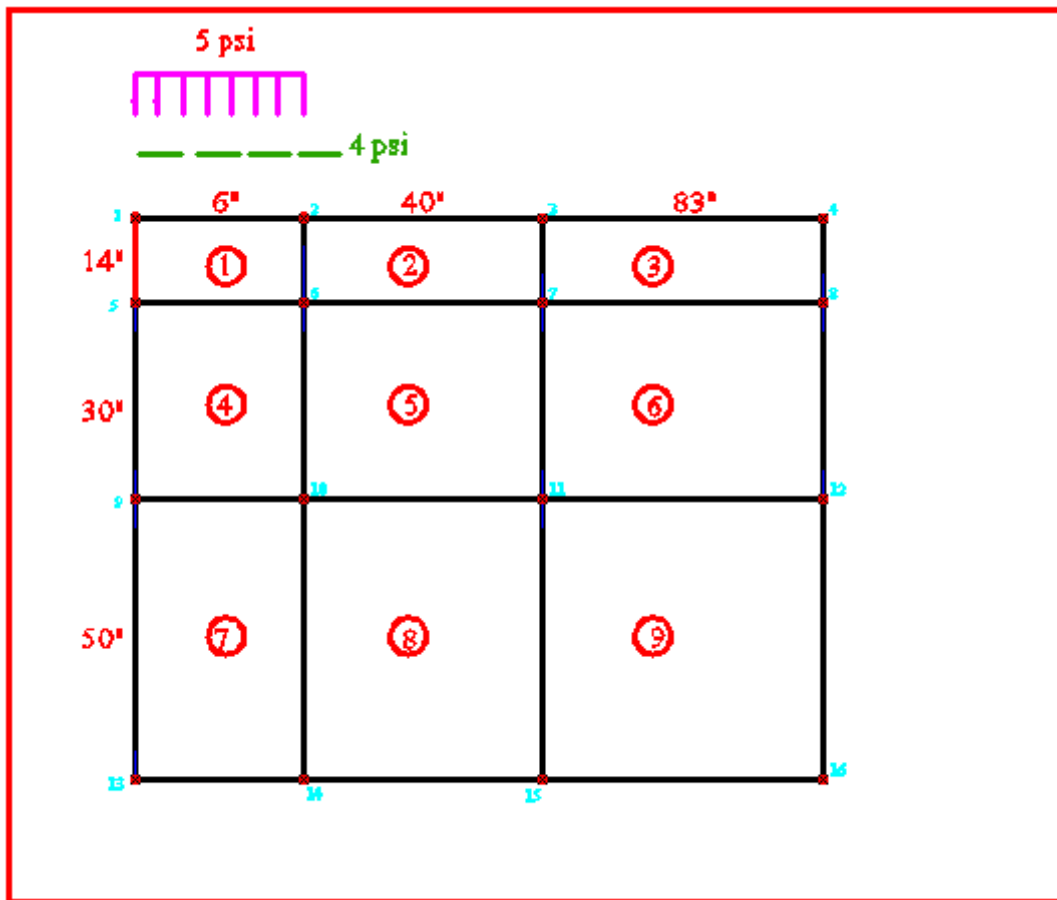
Exemple 02 sol avec chargement pneumatique (contrainte normale et cisaillement) :

Description :

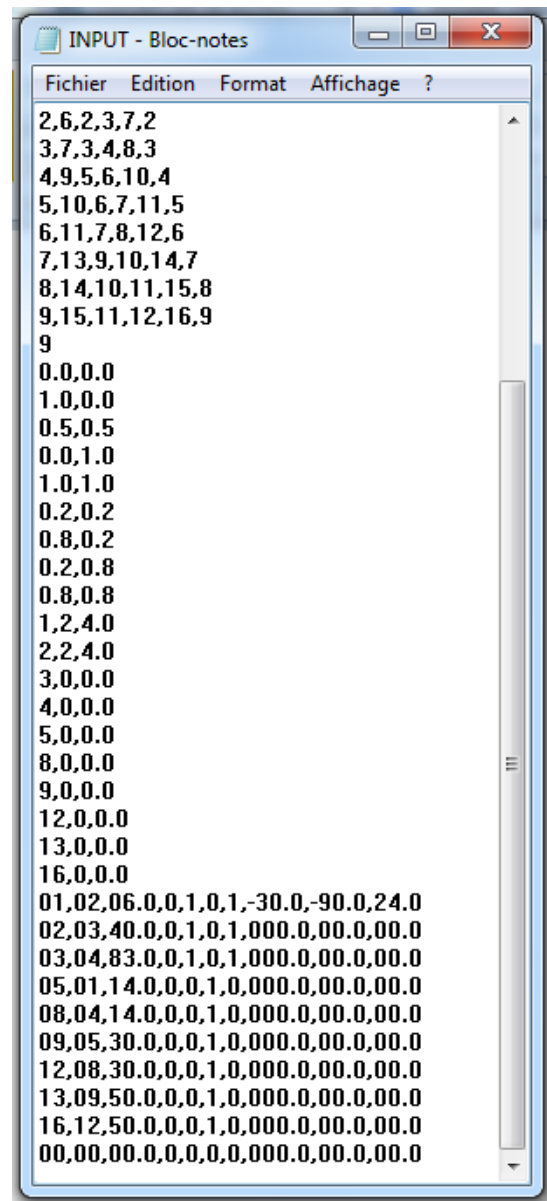
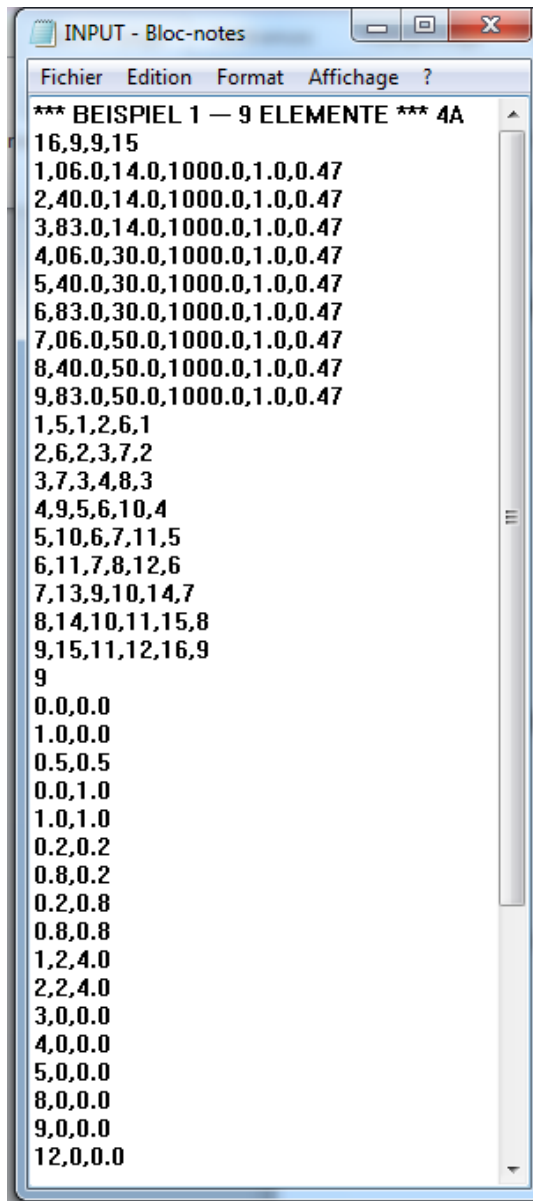
Cette exemple montre le comportement d'un sol soumis à une charge pneumatique verticale, La valeur de la contrainte appliquée est de 5 psi entre les deux nœuds 01 et 02 en plus un cisaillement

De 4 PSI

Le sol est décrite en 9 éléments finis rectangulaires comme sur figure



Fichier de donnees



FICHER RESULTATS CONTRAINTES :

** BEISPIEL 1 --- 9 ELEMENTE *** 4A

NOMBRE DE NOEUDS : 16

NOMBRE D ELEMENTS: 9

NOMBRE DE DOMAINE MATERIEL: 9

NOMBRE DE CONDITION LIMITE: 15

DATA MATERIEL

=====

MAT.-BEREICH	LONG A	LARG B	E-MODUL	EPAI	NUE
1	6.0000	14.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
2	40.0000	14.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
3	83.0000	14.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
4	6.0000	30.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
5	40.0000	30.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
6	83.0000	30.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
7	6.0000	50.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
8	40.0000	50.0000	1000.0000	1.0000	0.4700
9	83.0000	50.0000	1000.0000	1.0000	0.4700

ELEMENTDATEN

=====

1	5	1	2	6	1
2	6	2	3	7	2
3	7	3	4	8	3
4	9	5	6	10	4
5	10	6	7	11	5
6	11	7	8	12	6
7	13	9	10	14	7
8	14	10	11	15	8
9	15	11	12	16	9

CONTRAINTE	SIGX	SIGY	TAU	SIGZ	SIG1	SIG2	ANGLE
ALFA							

ELEMENT NR: 1

X=0.00 Y=0.00	-0.1986E+01	-.3756E+01	0.0000E+00	-.2699E+01	-.1986E+01	-.3756E+01	0.0000E+00
X=1.00 Y=0.00	0.1232E+01	0.9764E-01	0.4106E+00	0.6250E+00	0.1365E+01	-.3534E-01	0.1795E+02
X=0.50 Y=0.50	-0.1271E+00	-.3470E+01	-.9049E+00	-.1691E+01	0.1021E+00	-.3699E+01	-.1422E+02
X=0.00 Y=1.00	0.3171E+01	-.5000E+01	0.8395E+00	-.8597E+00	0.3256E+01	-.5085E+01	0.5806E+01
X=1.00 Y=1.00	-0.2885E+01	-.5000E+01	0.1060E+01	-.3706E+01	-.2445E+01	-.5440E+01	0.2254E+02
X=0.20 Y=0.20	-0.7365E+00	-.3002E+01	-.7580E+00	-.1757E+01	-.5064E+00	-.3233E+01	-.1689E+02
X=0.80 Y=0.20	0.4349E+00	-.1528E+01	0.6651E-01	-.5136E+00	0.4372E+00	-.1530E+01	0.1939E+01
X=0.20 Y=0.80	0.1552E+01	-.1606E+01	0.1201E+01	-.2554E-01	0.1956E+01	-.2011E+01	0.1862E+02
X=0.80 Y=0.80	-0.1744E+01	-.7664E+01	0.1957E+01	-.4422E+01	-.1156E+01	-.8252E+01	0.1673E+02

ELEMENT NR: 2

X=0.00 Y=0.00	0.1232E+01	-.1328E+01	0.4106E+00	-.4517E-01	0.1296E+01	-.1392E+01	0.8891E+01
X=1.00 Y=0.00	-.1837E-01	0.3755E+00	-.3871E-01	0.1678E+00	0.3793E+00	-.2214E-01	0.5560E+01
X=0.50 Y=0.50	-.6162E+00	-.2649E+00	0.8205E-01	-.4141E+00	-.2467E+00	-.6345E+00	-.1252E+02
X=0.00 Y=1.00	-.2885E+01	0.8660E-15	0.1060E+01	-.1356E+01	0.3478E+00	-.3232E+01	-.1816E+02
X=1.00 Y=1.00	0.7885E-01	-.9548E-15	0.0000E+00	0.3706E-01	0.7885E-01	-.9576E-15	0.0000E+00
X=0.20 Y=0.20	-.6829E+00	-.9163E+00	0.7120E+00	-.7516E+00	-.7807E-01	-.1521E+01	0.4035E+02
X=0.80 Y=0.20	-.1843E+00	0.7913E-01	0.1995E-01	-.4941E-01	0.8063E-01	-.1858E+00	-.4307E+01
X=0.20 Y=0.80	-.1260E+01	-.2353E+00	0.6576E+00	-.7026E+00	0.8609E-01	-.1581E+01	-.2604E+02
X=0.80 Y=0.80	-.2392E-01	0.5124E-01	-.2544E+00	0.1284E-01	0.2709E+00	-.2435E+00	0.4080E+02

ELEMENT NR: 3

X=0.00 Y=0.00	-.1837E-01	-.1314E-01	-.3871E-01	-.1481E-01	0.2304E-01	-.5455E-01	0.4307E+02
X=1.00 Y=0.00	-.7719E-01	0.1384E-01	0.0000E+00	-.2977E-01	0.1384E-01	-.7719E-01	0.0000E+00
X=0.50 Y=0.50	-.6968E-01	-.6409E-03	-.2496E-01	-.3305E-01	0.7436E-02	-.7776E-01	0.1793E+02
X=0.00 Y=1.00	0.7885E-01	0.2252E-15	0.0000E+00	0.3706E-01	0.7885E-01	0.2220E-15	0.0000E+00
X=1.00 Y=1.00	-.1473E+00	-.4179E-15	0.0000E+00	-.6923E-01	-.4163E-15	-.1473E+00	0.0000E+00
X=0.20 Y=0.20	-.8509E-01	-.7411E-02	-.2523E-01	-.4348E-01	0.6280E-04	-.9256E-01	0.1650E+02
X=0.80 Y=0.20	-.1008E+00	0.6367E-02	-.1660E-01	-.4436E-01	0.8880E-02	-.1033E+00	0.8609E+01
X=0.20 Y=0.80	0.5719E-01	-.9234E-03	-.3952E-02	0.2645E-01	0.5746E-01	-.1191E-02	-.3873E+01
X=0.80 Y=0.80	-.1088E+00	0.5784E-03	-.9258E-02	-.5085E-01	0.1357E-02	-.1096E+00	0.4805E+01

ELEMENT NR: 4

X=0.00 Y=0.00	-.1957E+00	-.1198E+01	0.0000E+00	-.6551E+00	-.1957E+00	-.1198E+01	0.0000E+00
X=1.00 Y=0.00	-.1704E-01	-.5458E+00	0.7251E-01	-.2645E+00	-.7275E-02	-.5556E+00	0.7669E+01
X=0.50 Y=0.50	-.6390E-01	-.1139E+01	-.3199E-02	-.5655E+00	-.6389E-01	-.1139E+01	-.1704E+00
X=0.00 Y=1.00	0.1687E+00	-.3756E+01	0.0000E+00	-.1686E+01	0.1687E+00	-.3756E+01	0.0000E+00
X=1.00 Y=1.00	-.2453E+00	0.9764E-01	0.4106E+00	-.6941E-01	0.3711E+00	-.5188E+00	-.3367E+02
X=0.20 Y=0.20	-.1156E+00	-.1120E+01	-.4262E-01	-.5805E+00	-.1138E+00	-.1121E+01	-.2426E+01
X=0.80 Y=0.20	-.6491E-01	-.7848E+00	0.1260E-01	-.3994E+00	-.6469E-01	-.7850E+00	0.1003E+01
X=0.20 Y=0.80	0.6839E-01	-.1455E+01	0.2395E+00	-.6518E+00	0.1051E+00	-.1492E+01	0.8726E+01
X=0.80 Y=0.80	-.1557E+00	-.1502E+01	0.4164E+00	-.7790E+00	-.3728E-01	-.1620E+01	0.1587E+02

ELEMENT NR: 5

X=0.00 Y=0.00	-.1704E-01	-.8903E+00	0.7251E-01	-.4265E+00	-.1106E-01	-.8963E+00	0.4714E+01
X=1.00 Y=0.00	-.3021E+00	-.2251E+00	0.1459E+00	-.2478E+00	-.1127E+00	-.4145E+00	-.3761E+02
X=0.50 Y=0.50	-.3011E+00	-.5660E+00	0.3241E+00	-.4076E+00	-.8349E-01	-.7837E+00	0.3388E+02
X=0.00 Y=1.00	-.2453E+00	-.1328E+01	0.4106E+00	-.7396E+00	-.1073E+00	-.1466E+01	0.1859E+02
X=1.00 Y=1.00	-.2916E+00	0.3755E+00	-.3871E-01	0.3945E-01	0.3777E+00	-.2938E+00	0.3310E+01
X=0.20 Y=0.20	-.1177E+00	-.8121E+00	0.1972E+00	-.4370E+00	-.6558E-01	-.8642E+00	0.1479E+02
X=0.80 Y=0.20	-.2955E+00	-.3221E+00	0.2242E+00	-.2903E+00	-.8416E-01	-.5334E+00	0.4331E+02
X=0.20 Y=0.80	-.3103E+00	-.9748E+00	0.3646E+00	-.6040E+00	-.1492E+00	-.1136E+01	0.2383E+02
X=0.80 Y=0.80	-.3555E+00	-.8461E-01	0.2036E+00	-.2069E+00	0.2444E-01	-.4646E+00	-.2818E+02

ELEMENT NR: 6

X=0.00 Y=0.00	-.3021E+00	-.1297E+00	0.1459E+00	-.2030E+00	-.4647E-01	-.3854E+00	-.2971E+02
X=1.00 Y=0.00	-.1689E+00	0.7049E-01	0.0000E+00	-.4625E-01	0.7049E-01	-.1689E+00	0.0000E+00
X=0.50 Y=0.50	-.1633E+00	-.6297E-02	-.2184E-01	-.7971E-01	-.3317E-02	-.1663E+00	0.7773E+01
X=0.00 Y=1.00	-.2916E+00	-.1314E-01	-.3871E-01	-.1432E+00	-.7860E-02	-.2968E+00	0.7769E+01
X=1.00 Y=1.00	-.1460E+00	0.1384E-01	0.0000E+00	-.6213E-01	0.1384E-01	-.1460E+00	0.0000E+00
X=0.20 Y=0.20	-.2579E+00	-.6641E-01	0.5984E-01	-.1524E+00	-.4925E-01	-.2751E+00	-.1600E+02
X=0.80 Y=0.20	-.1714E+00	0.2778E-01	-.2244E-01	-.6752E-01	0.3028E-01	-.1739E+00	0.6349E+01
X=0.20 Y=0.80	-.1760E+00	-.1163E-01	-.4617E-02	-.8819E-01	-.1150E-01	-.1761E+00	0.1608E+01
X=0.80 Y=0.80	-.1398E+00	0.1305E-01	-.2045E-01	-.5957E-01	0.1574E-01	-.1425E+00	0.7489E+01

ELEMENT NR: 7

X=0.00 Y=0.00	-.4200E+00	-.4362E+00	0.0000E+00	-.4024E+00	-.4200E+00	-.4362E+00	0.0000E+00
X=1.00 Y=0.00	-.3895E+00	-.6588E+00	0.2949E-01	-.4927E+00	-.3863E+00	-.6620E+00	0.6176E+01
X=0.50 Y=0.50	-.2162E+00	-.6649E+00	-.3504E-02	-.4141E+00	-.2162E+00	-.6649E+00	-.4474E+00
X=0.00 Y=1.00	-.8116E-02	-.1198E+01	0.0000E+00	-.5669E+00	-.8116E-02	-.1198E+01	0.0000E+00
X=1.00 Y=1.00	-.4985E-01	-.5458E+00	0.7251E-01	-.2800E+00	-.3947E-01	-.5562E+00	0.8150E+01
X=0.20 Y=0.20	-.3359E+00	-.6449E+00	0.8054E-02	-.4610E+00	-.3357E+00	-.6451E+00	0.1492E+01
X=0.80 Y=0.20	-.3233E+00	-.5418E+00	0.2396E-01	-.4066E+00	-.3207E+00	-.5444E+00	0.6183E+01
X=0.20 Y=0.80	-.9299E-01	-.7237E+00	0.2790E-01	-.3839E+00	-.9176E-01	-.7250E+00	0.2528E+01
X=0.80 Y=0.80	-.1136E+00	-.8137E+00	0.5929E-01	-.4359E+00	-.1086E+00	-.8187E+00	0.4807E+01

ELEMENT NR: 8

X=0.00 Y=0.00	-.3895E+00	-.5503E+00	0.2949E-01	-.4417E+00	-.3843E+00	-.5555E+00	0.1007E+02
X=1.00 Y=0.00	-.2556E+00	-.3190E+00	0.1731E+00	-.2701E+00	-.1113E+00	-.4632E+00	0.3982E+02
X=0.50 Y=0.50	-.2450E+00	-.5071E+00	0.1092E+00	-.3535E+00	-.2055E+00	-.5467E+00	0.1990E+02
X=0.00 Y=1.00	-.4985E-01	-.8903E+00	0.7251E-01	-.4419E+00	-.4364E-01	-.8965E+00	0.4895E+01
X=1.00 Y=1.00	-.2570E+00	-.2251E+00	0.1459E+00	-.2266E+00	-.9432E-01	-.3878E+00	-.4188E+02
X=0.20 Y=0.20	-.3174E+00	-.5572E+00	0.6807E-01	-.4111E+00	-.2995E+00	-.5752E+00	0.1479E+02
X=0.80 Y=0.20	-.2736E+00	-.3777E+00	0.1400E+00	-.3061E+00	-.1763E+00	-.4751E+00	0.3481E+02
X=0.20 Y=0.80	-.1398E+00	-.6908E+00	0.1073E+00	-.3904E+00	-.1196E+00	-.7110E+00	0.1064E+02
X=0.80 Y=0.80	-.2392E+00	-.3870E+00	0.1540E+00	-.2943E+00	-.1423E+00	-.4839E+00	0.3218E+02

ELEMENT NR: 9

X=0.00 Y=0.00	-.2556E+00	-.2520E+00	0.1731E+00	-.2386E+00	-.8074E-01	-.4269E+00	-.4470E+02
X=1.00 Y=0.00	-.5173E-01	0.2719E-01	0.0000E+00	-.1153E-01	0.2719E-01	-.5173E-01	0.0000E+00
X=0.50 Y=0.50	-.1860E+00	-.6897E-01	0.4946E-01	-.1199E+00	-.5087E-01	-.2041E+00	-.2010E+02
X=0.00 Y=1.00	-.2570E+00	-.1297E+00	0.1459E+00	-.1818E+00	-.3421E-01	-.3525E+00	-.3322E+02
X=1.00 Y=1.00	-.2024E+00	0.7049E-01	0.0000E+00	-.6198E-01	0.7049E-01	-.2024E+00	0.0000E+00
X=0.20 Y=0.20	-.2152E+00	-.1827E+00	0.1251E+00	-.1870E+00	-.7282E-01	-.3250E+00	-.4130E+02
X=0.80 Y=0.20	-.9429E-01	-.3828E-02	0.3718E-01	-.4612E-01	0.9493E-02	-.1076E+00	-.1971E+02
X=0.20 Y=0.80	-.2591E+00	-.1228E+00	0.7498E-01	-.1795E+00	-.8966E-01	-.2922E+00	-.2388E+02
X=0.80 Y=0.80	-.1838E+00	0.3055E-01	-.3109E-02	-.7203E-01	0.3059E-01	-.1838E+00	0.8308E+00

** DEFORMATION PLANE (NUMERIQUE PAR IFLEX) **

4.2. Validation du programme

4.2.1. Validation des déplacements

Des exemples ayant des résultats connus dans la littérature, seront donnés pour une comparaison avec les résultats que donne le programme.

Ainsi serons mis en évidence la validité des résultats des déplacements et des contraintes obtenus en statique, ainsi que la prise en compte de l'effet du cisaillement dans le calcul

Exemple 01

on prend une console de dimension

$L \times B \times H = 5 \times 0.2 \times 0.5$ (m) Chargée à son extrémité

Sa flèche théorique notée est donnée par

$$f_{th} = P \frac{L^3}{3EI}$$

On est en présence d'un problème de contraintes planes

On fait dérouler cet exemple pour une succession de maillages pris comme suit

- 2 éléments ;
- 4 éléments ;
- 8 éléments ;
- 16 éléments ;
- 32 éléments .

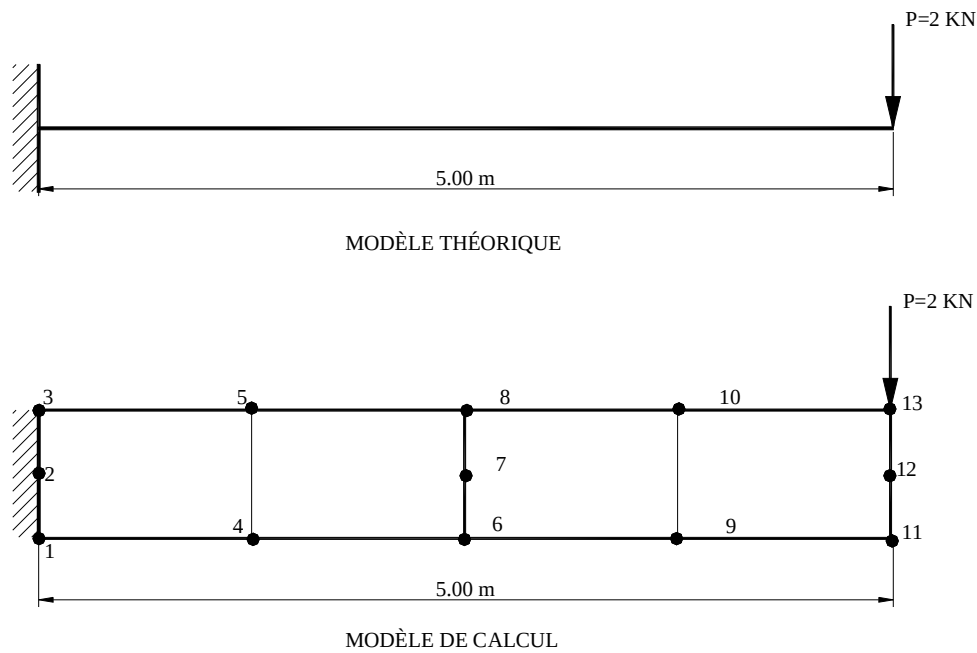


Fig 5 Contraintes normale et de cisaillement réparties sur un côté d'un élément

Avec :

$$P = 2 \text{ kN}$$

$$L = 2 \times 2.5 = 5 \text{ m} ; \quad B = 0.3 \text{ m}$$

$$E = 25 \times 10^6 \text{ kN} ; \quad H = 0.5 \text{ m}$$

Le résultat théorique du déplacement :

$$f_{th} = \frac{2 \times 5^3}{3 \times 25 \times 10^6 \times \frac{0.2 \times 0.3^3}{12}}$$

$$f_{th} = 1.066 \text{ mm}$$

Ainsi nous donnons un résumé de comparaison entre les résultats théorique et les résultats calculés par le programme, dans le tableau ci-dessous :

Tableau 1 : Tableau de comparaison résultats théoriques et calculés

Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Flèche calculée	Flèche donnée au N° du nœud
2	13	-1,03196	11
4	23	-1,05230	21
8	43	-1,06264	41
16	69	-1,06600	65
32	133	-1,07120	129

l'analyse de ces résultats nous montre la conformité avec les résultats théoriques

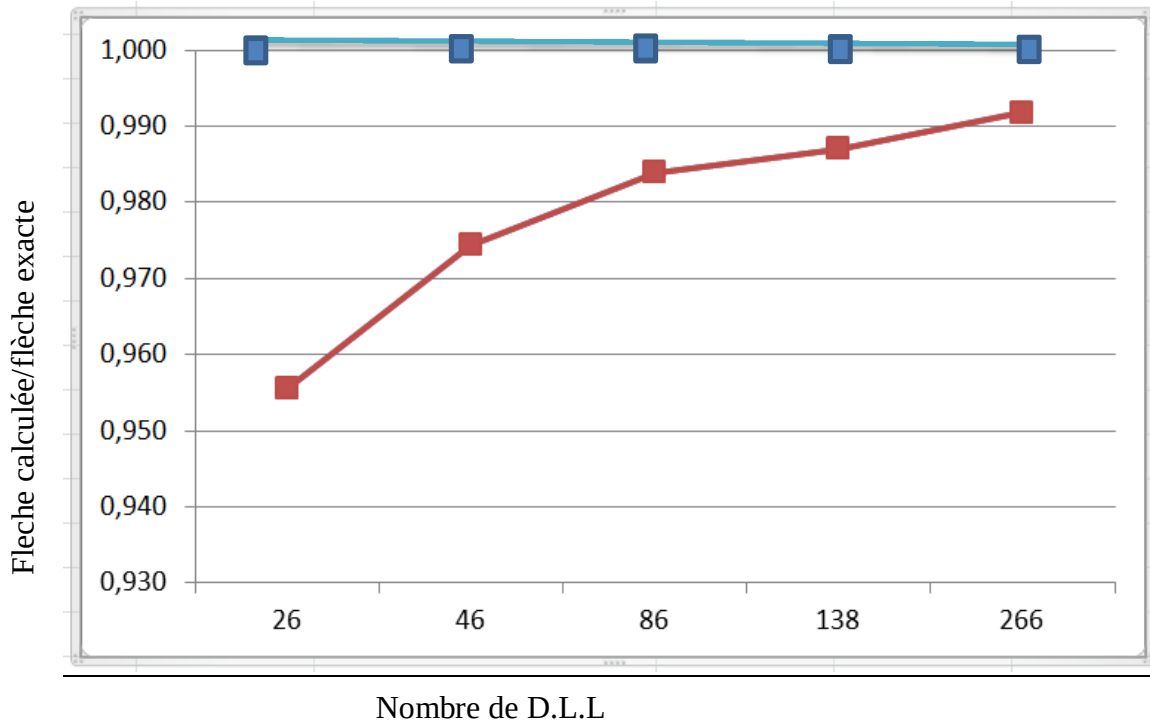
mettons à présent l'attrait sur la convergence

on prend la flèche pouvant être connue avec exactitude.

et on évalue le rapport de la flèche calculée par le programme pour différents maillages par la flèche exacte puis on trace à partir du tableau le graphe de la convergence

Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Nombre de ddl pour chaque maillage	Flèche calculée / flèche exacte
2	13	26	0,95
4	23	46	0,97
8	43	86	0,98
16	69	138	0,99
32	133	266	0,99

le graphe ainsi tracé, et comparé avec celui donné au titre (2.11) nous montrons que notre solution converge d'une façon correcte



4.2.2. Validation des contraintes

dans la théorie, la contrainte suivant une direction x est donnée par

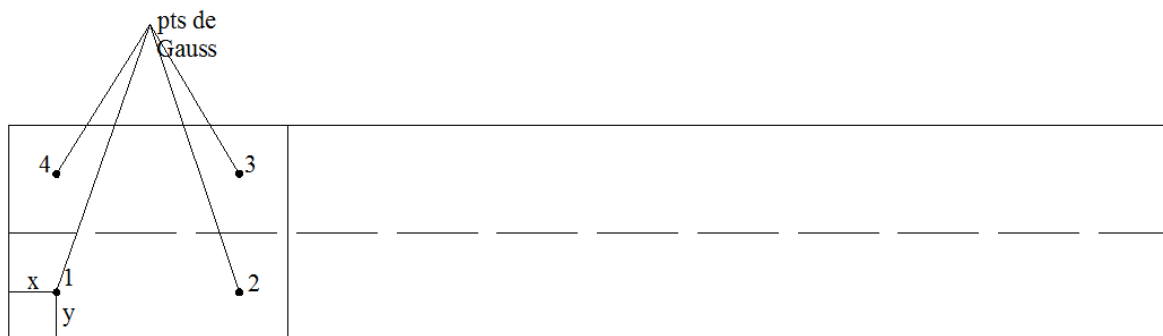
$$\sigma_x = \frac{M_x V}{I}$$

Ou :

M_x : est le moment dans la section ou on calcul la contrainte

v: la distance entre l'axe neutre et le point de calcul de la contrainte

I: le moment d'inertie



le programme nous donne les contraintes aux différents points de Gauss
Cherchons pour ces mêmes points les contraintes théoriques.

$$x = 1.25 - \frac{1.25}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 0.5283 \text{ m}$$

$$v = \frac{1.25}{\sqrt{3}} \Rightarrow v = 0.1443 \text{ m}$$

$$M_{1x} = P_x - P_l$$

$$M_{1x} = 2 \times 0.5283 - 2 \times 5 \Rightarrow M_{1x} = -8.94338 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$I = \frac{0.3 \times 0.5^3}{12} \Rightarrow I = 0.003125 \text{ m}^4$$

$$\sigma_{1x} = \frac{-8.94338 \times 0.1443}{0.003125} \Rightarrow \sigma_{1x} = -412.97 \text{ kN} / \text{m}^2$$

La contrainte donnée par le programme au même point est

$$\sigma_{1x} = -413.0768 \text{ kN} / \text{m}^2$$

Nous remarquons que lors du raffinement du maillage, la flèche que donne le programme dépasse celle que l'on a calculée théoriquement à partir d'une certaine discrétisation.

Cela est dû au fait que lors du calcul de la flèche théorique on n'a pas tenu compte de l'effet du cisaillement, alors que notre programme en tient compte

La mise en évidence de cela sera établie dans l'exemple qui suit :

Exemple 02

Dans cet exemple l'objectif est de montrer que le programme tient compte du cisaillement

Donc soit une console de dimensions $L \times B \times H = 1.5 \times 0.2 \times 1 \text{ (m)}$

Soumise à une charge concentrée à son extrémité

Le calcul théorique par la R.D.M. nous donne un déplacement de l'extrémité égale à ;

$$f = f_m + f_t$$

Avec ;

f_t : déplacement dû à l'effort tranchant

f_m : déplacement dû au moment fléchissant

$$f_m = \frac{P_l^3}{3EI}$$

$$f_t = \frac{Pl}{G.S}$$

Le rapport des deux flèches nous fournit le résultat

$$\frac{f_t}{f_m} = \frac{E}{G} \frac{1}{4} \frac{h^2}{l}$$

Pour une section rectangulaire $\frac{E}{G} = 2,6$

on obtient donc

$$f_m = 9,450 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$f_t = 2,729 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

La flèche totale est égale donc à

$$f = 12,179 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

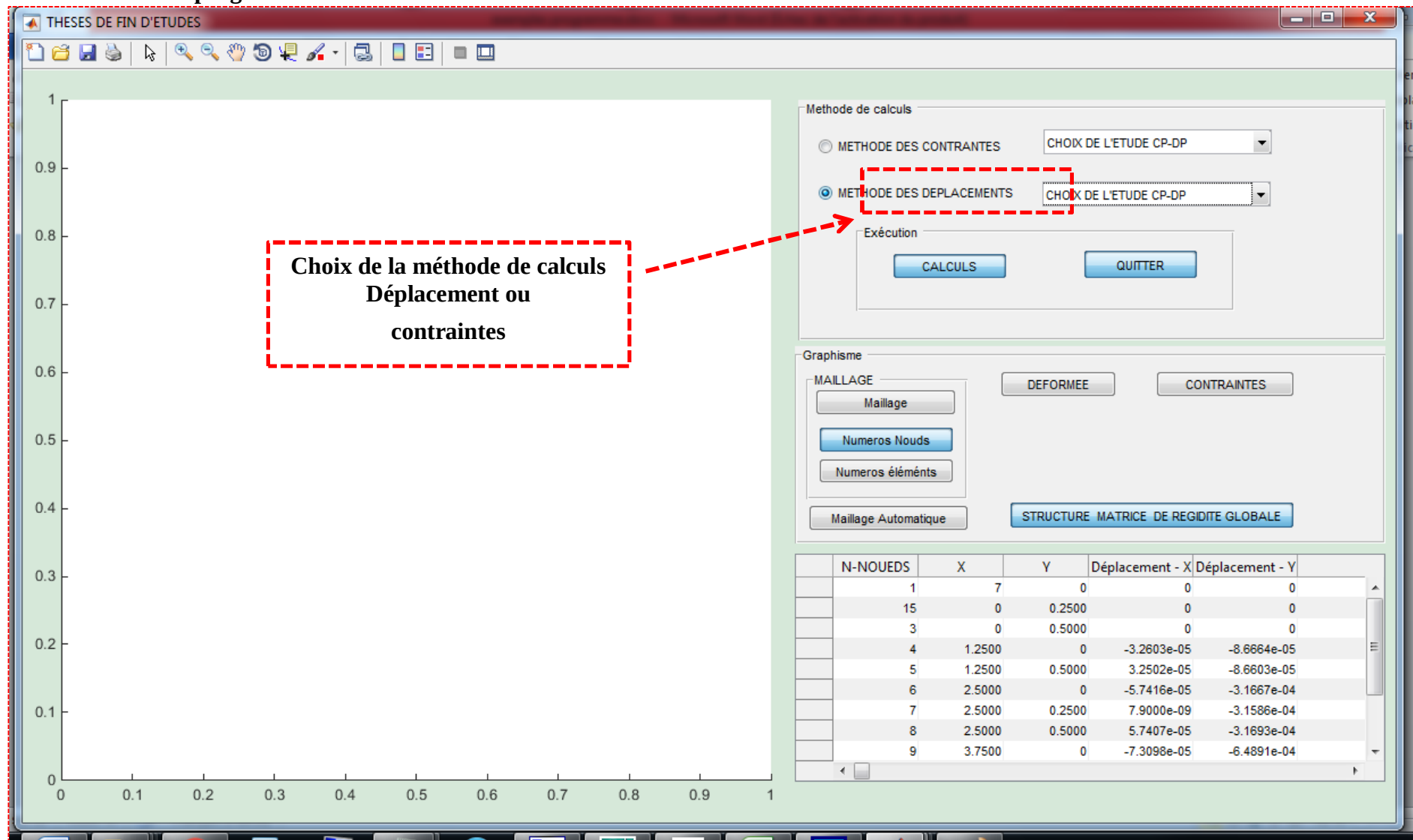
Le programme déroulé pour cet exemple nous donne la flèche suivante

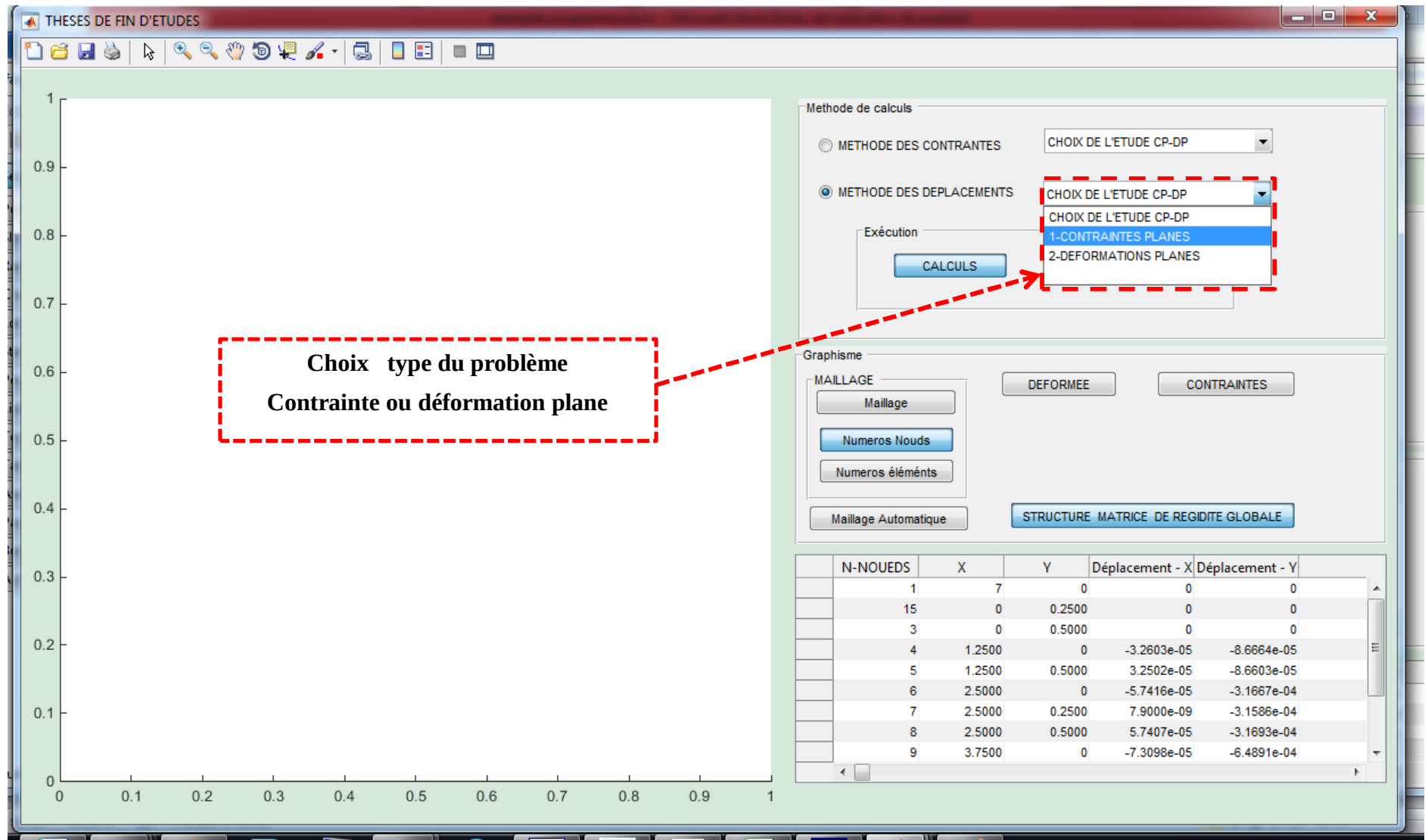
-Pour un maillage de 2 éléments ; $f = 11,66 \times 10^{-3} \text{ mm}$

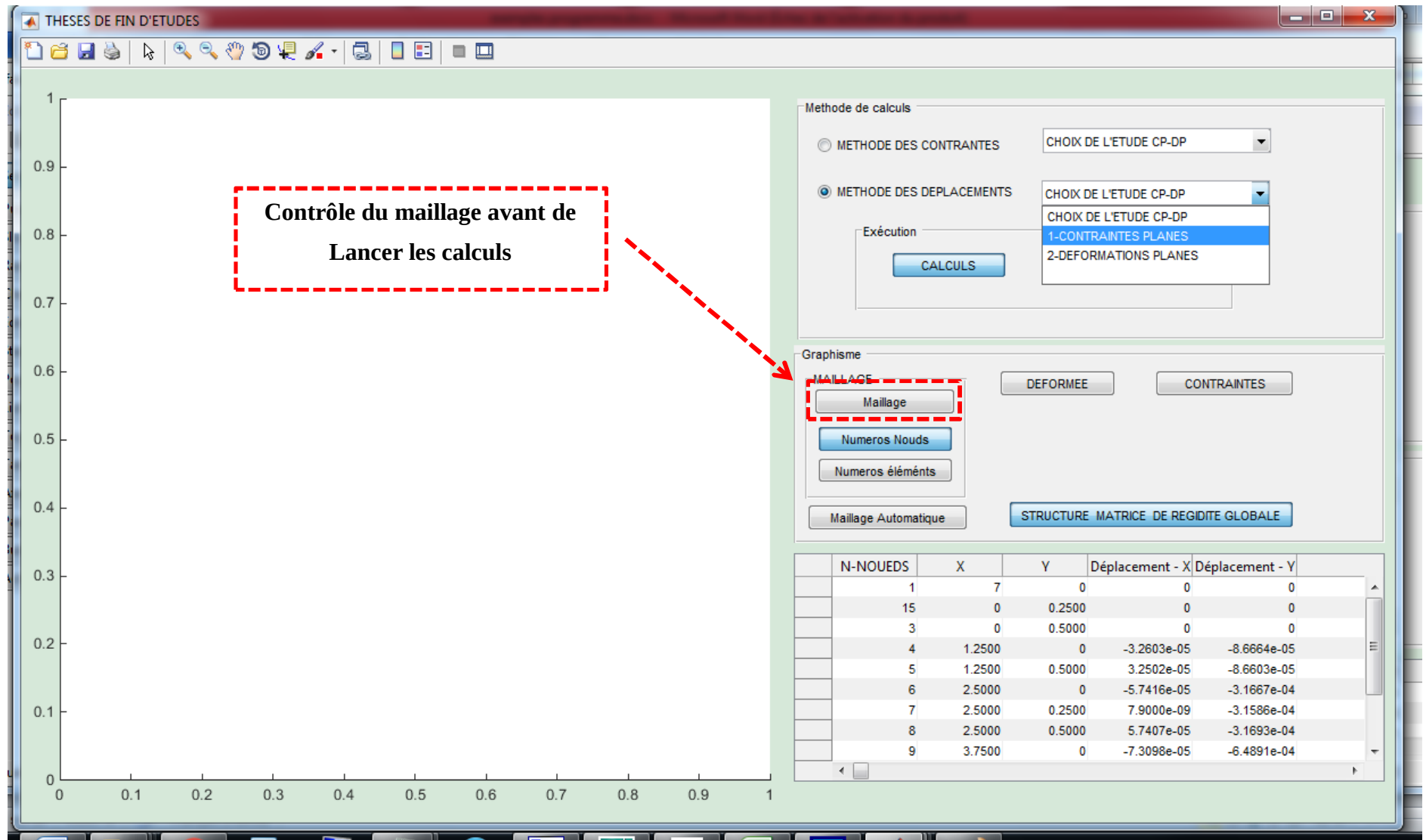
-Pour un maillage de 4 éléments ; $f = 11,72 \times 10^{-3} \text{ mm}$

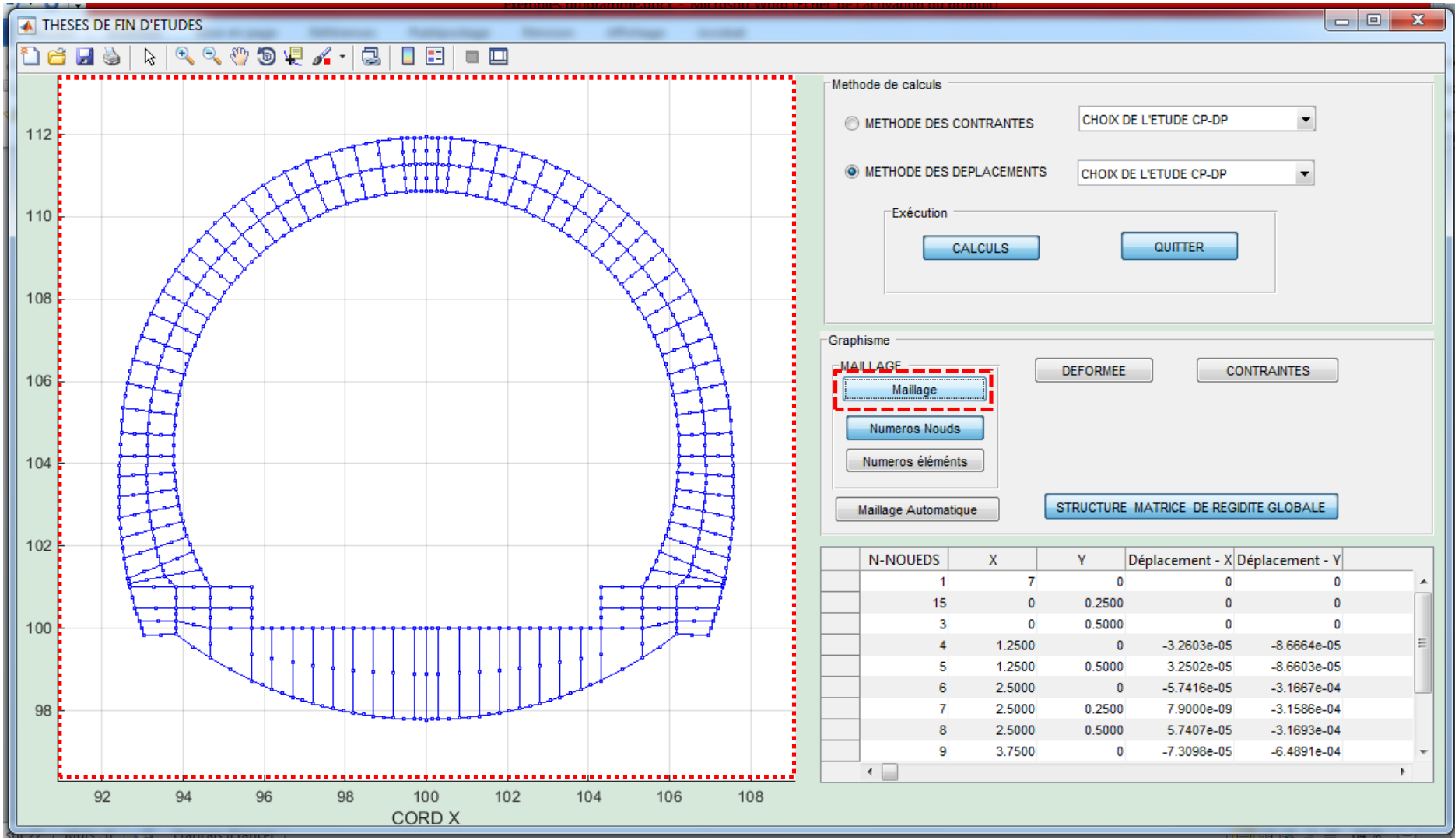
La comparaison du résultat théorique et celui calculé nous permet de conclure que le programme tient compte du cisaillement.

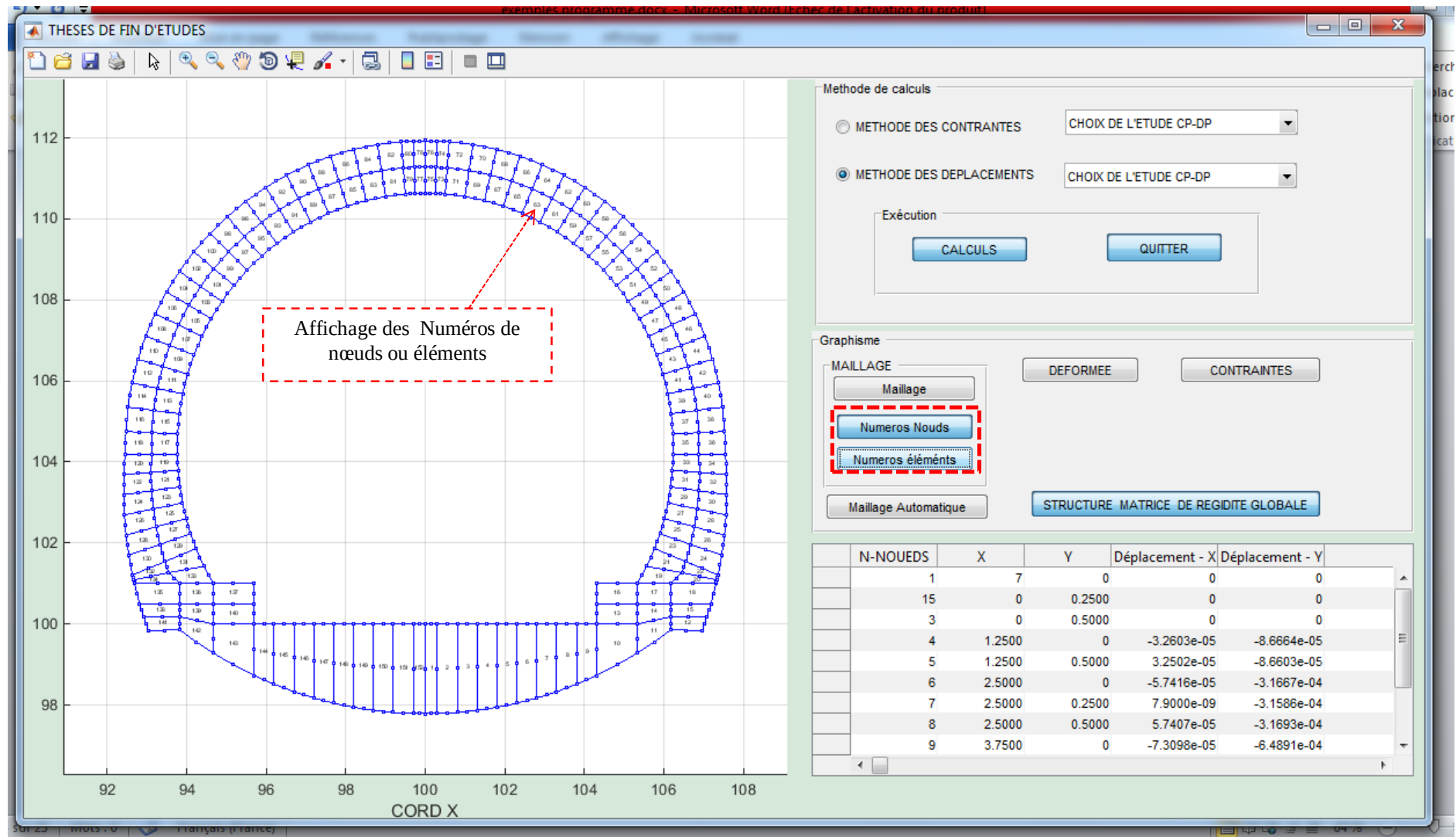
4.3. Interface du programme

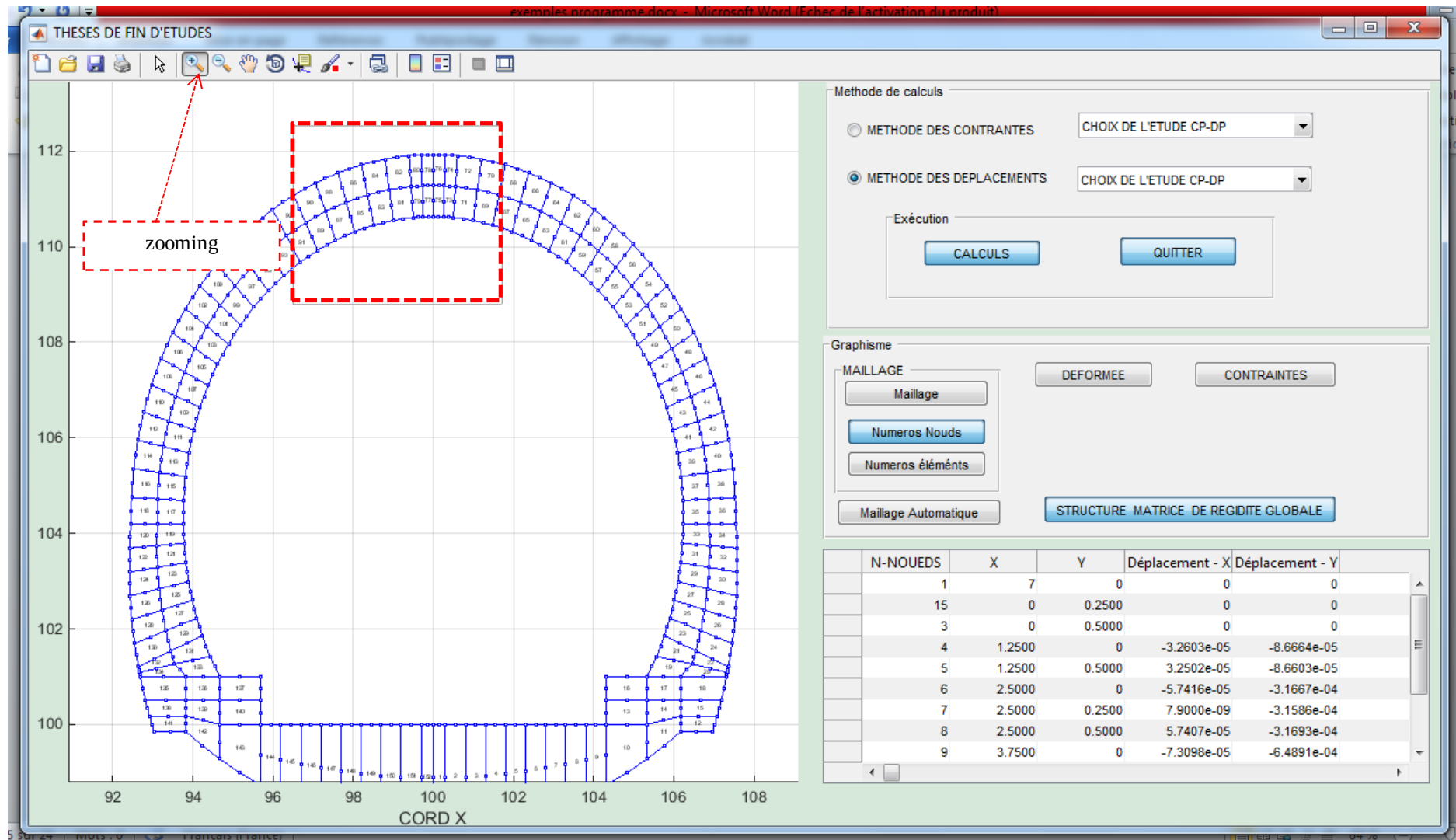


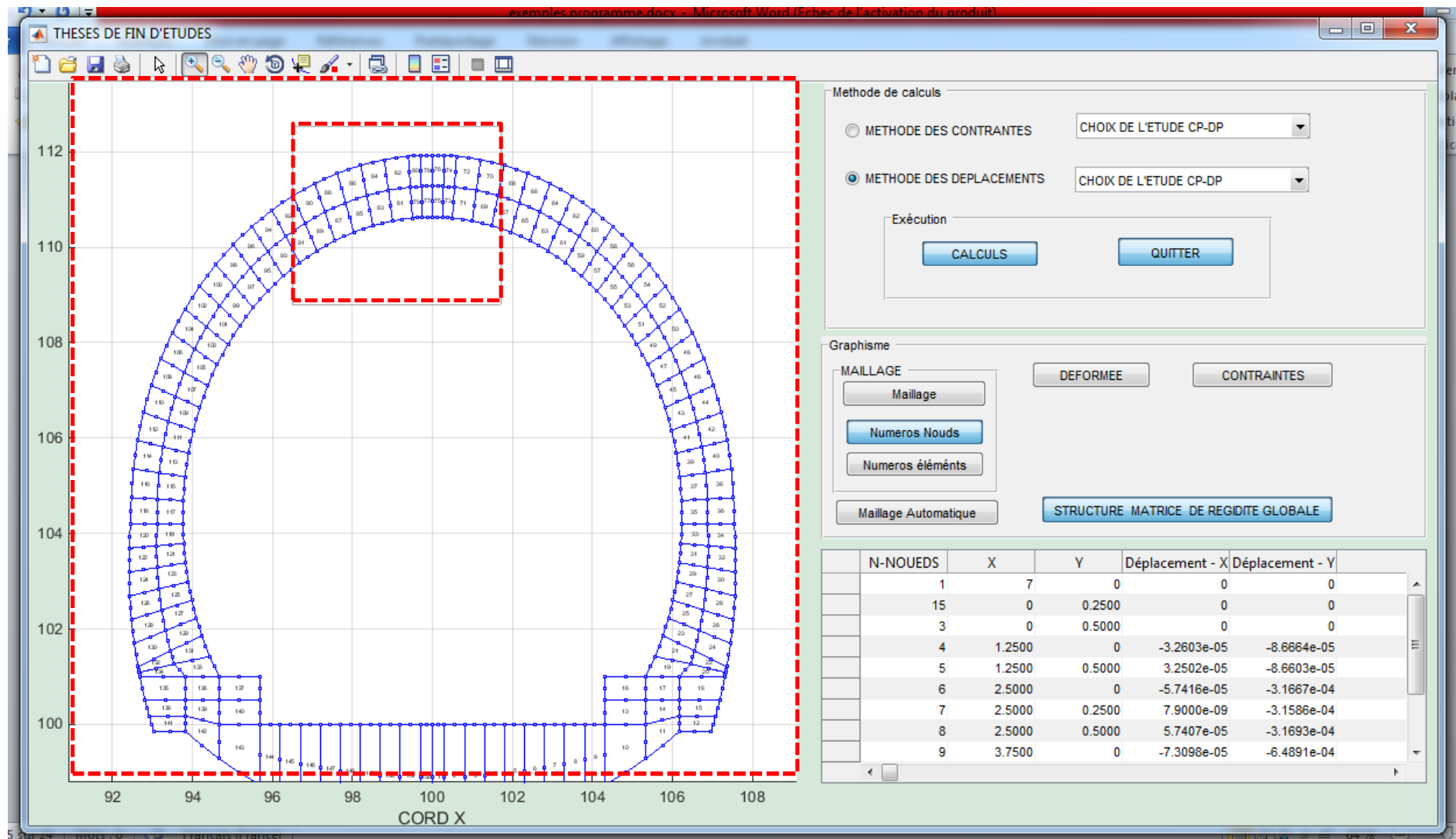


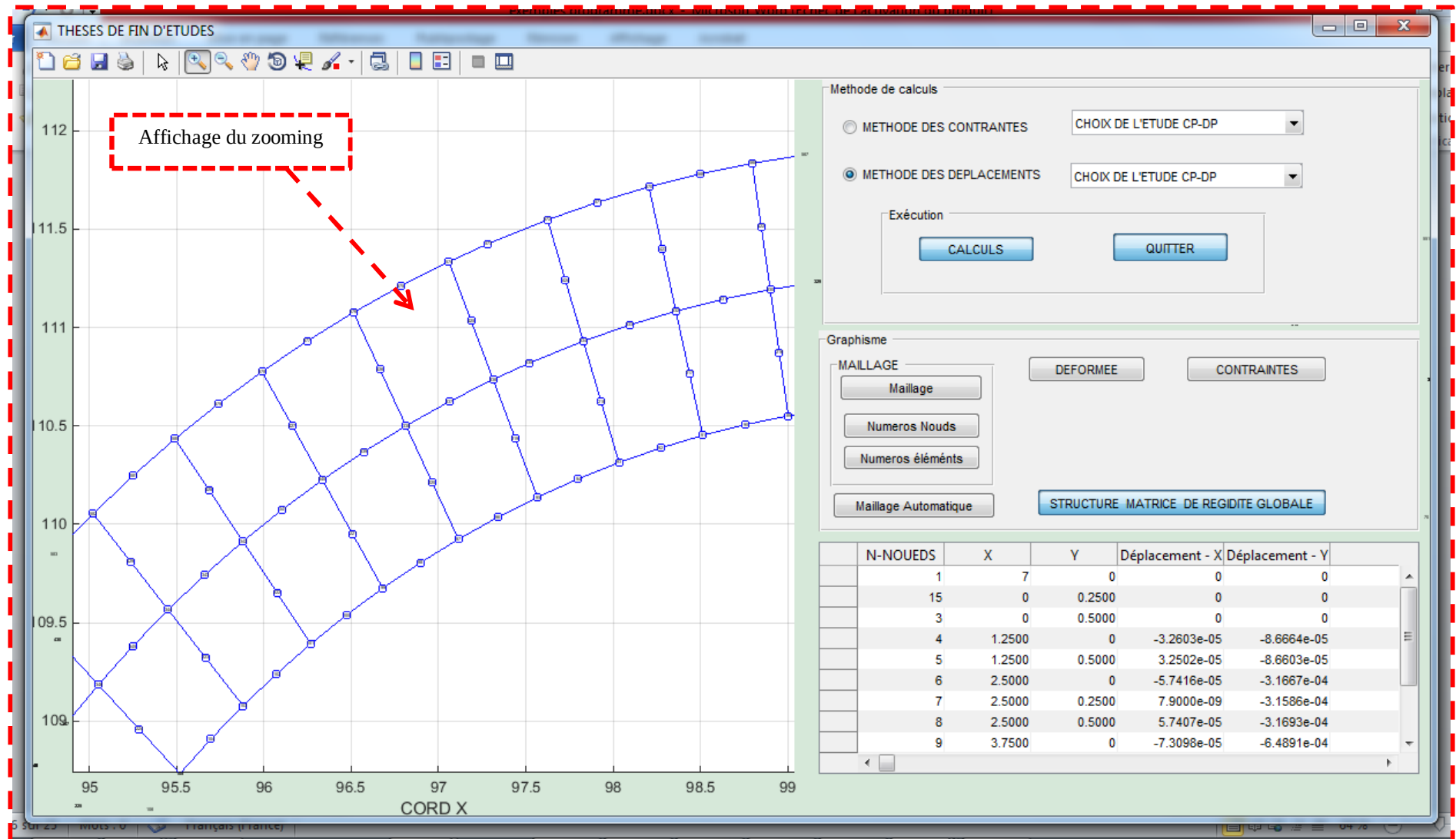


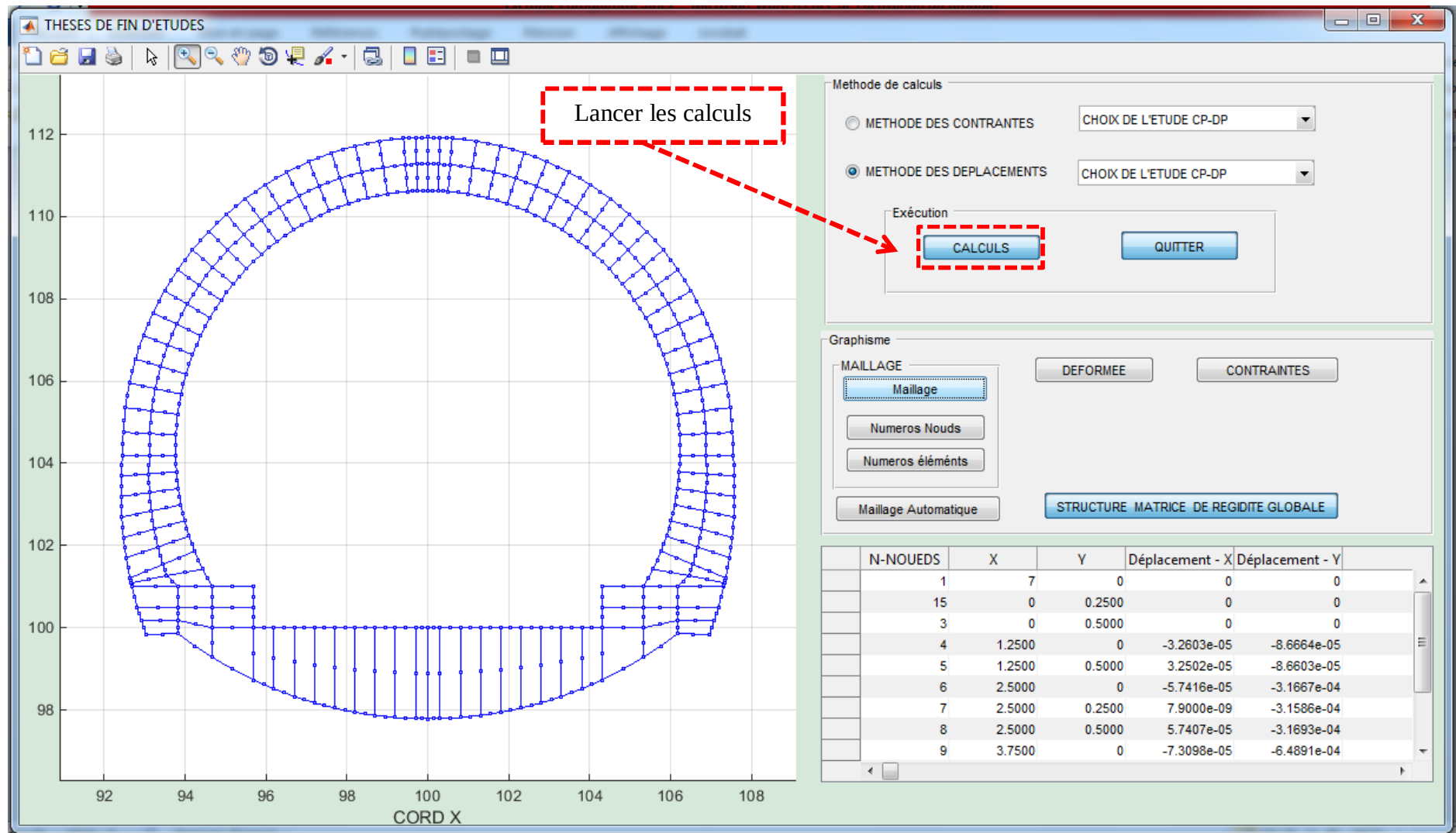


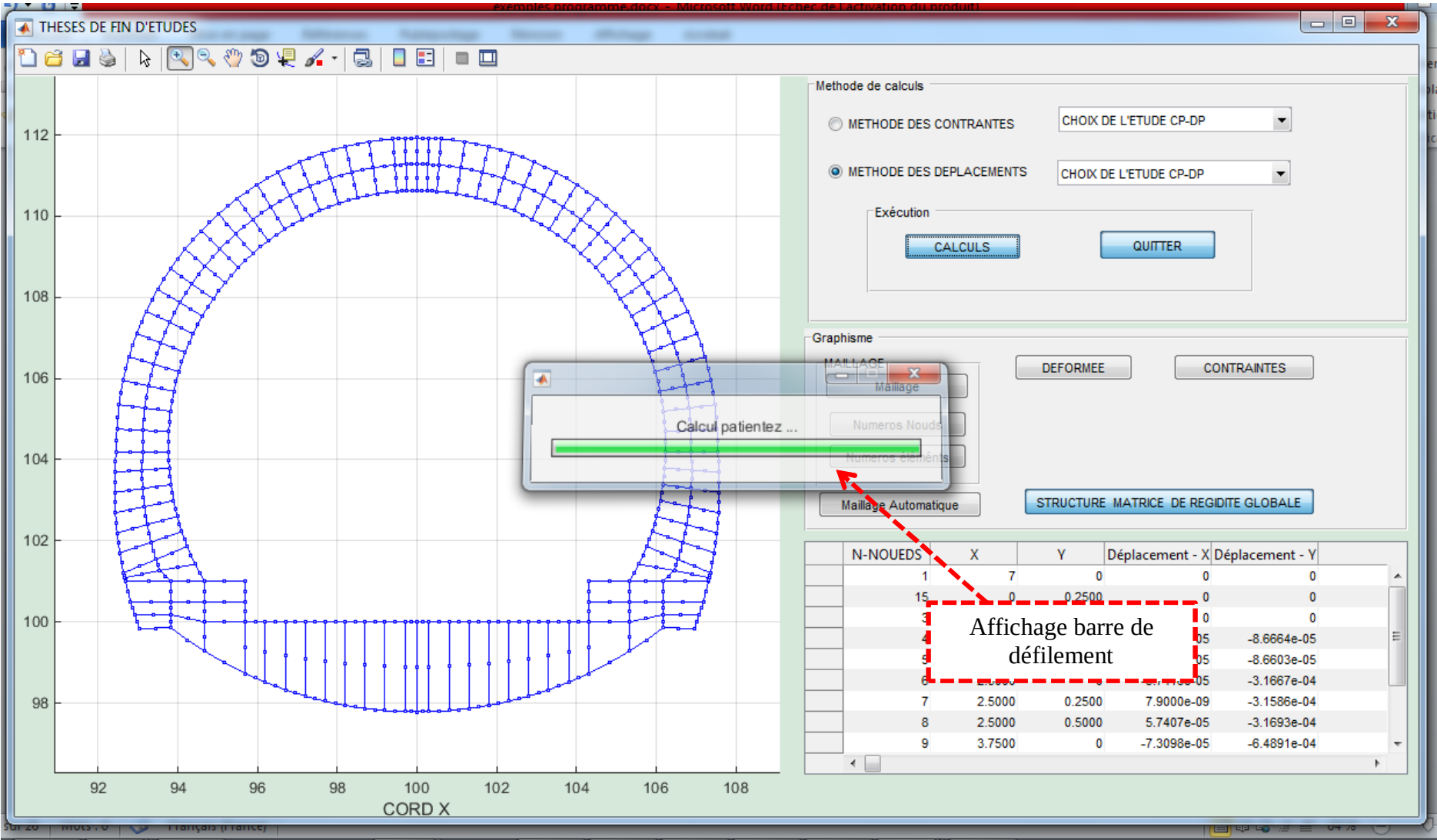


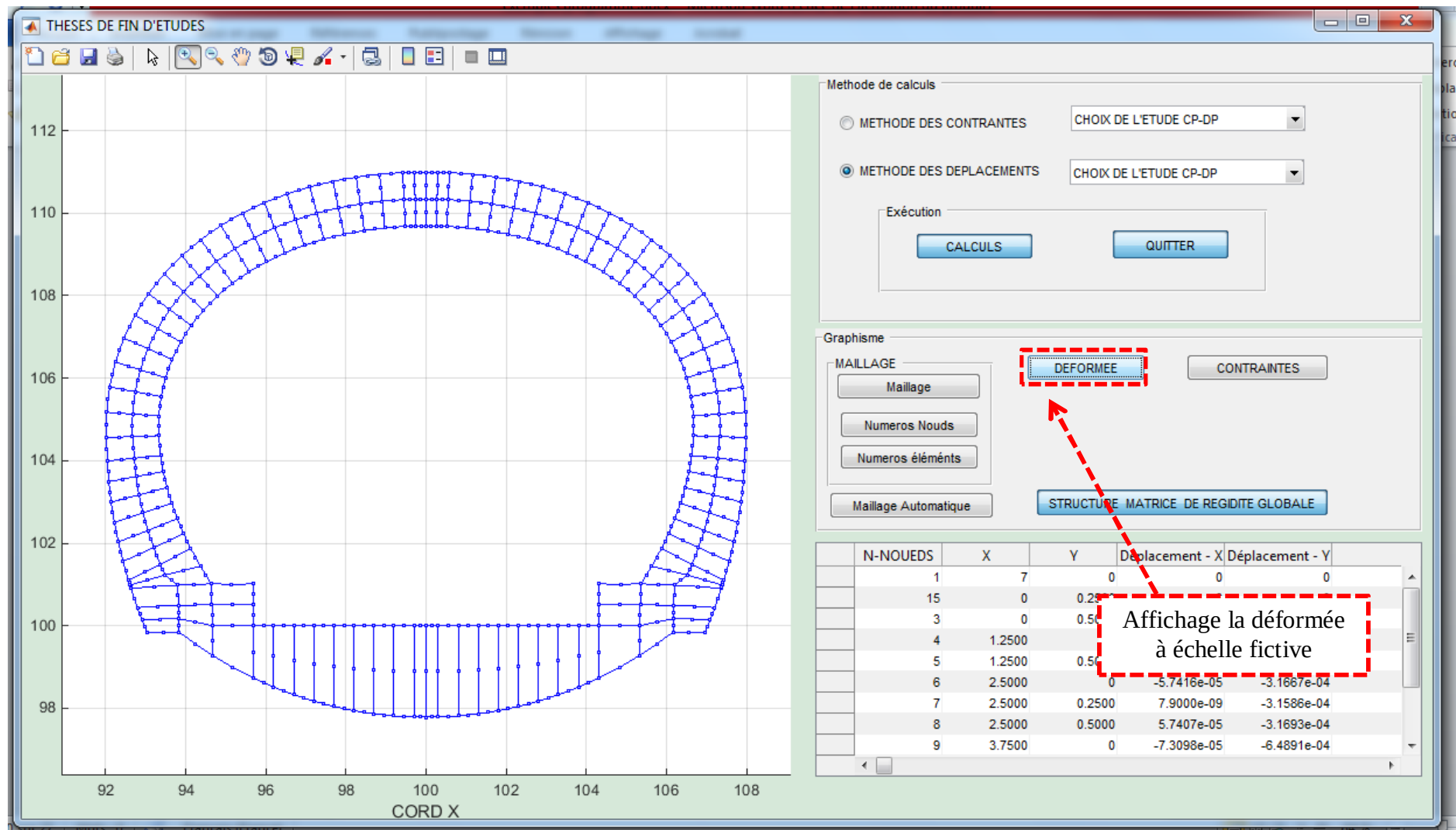




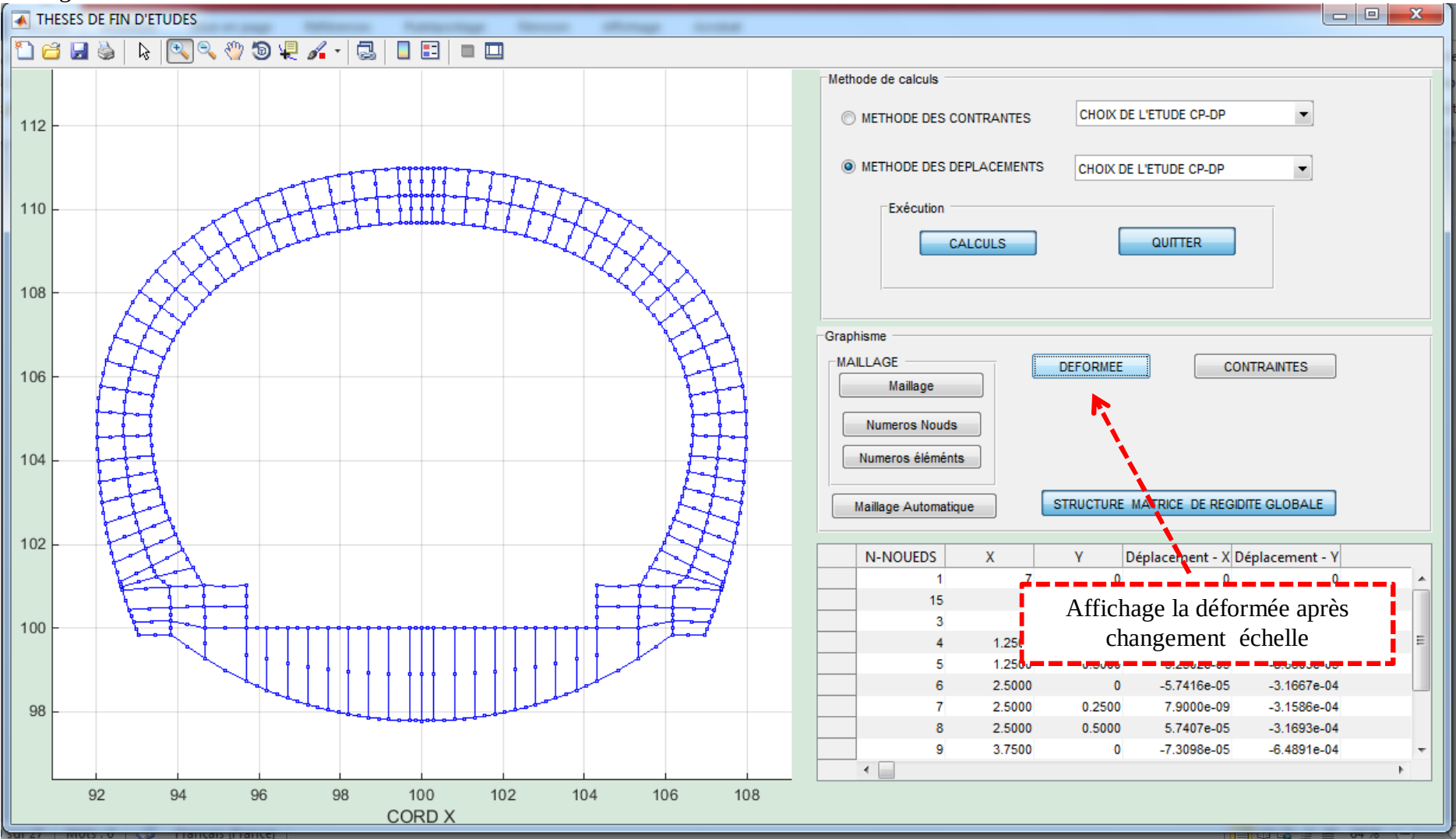


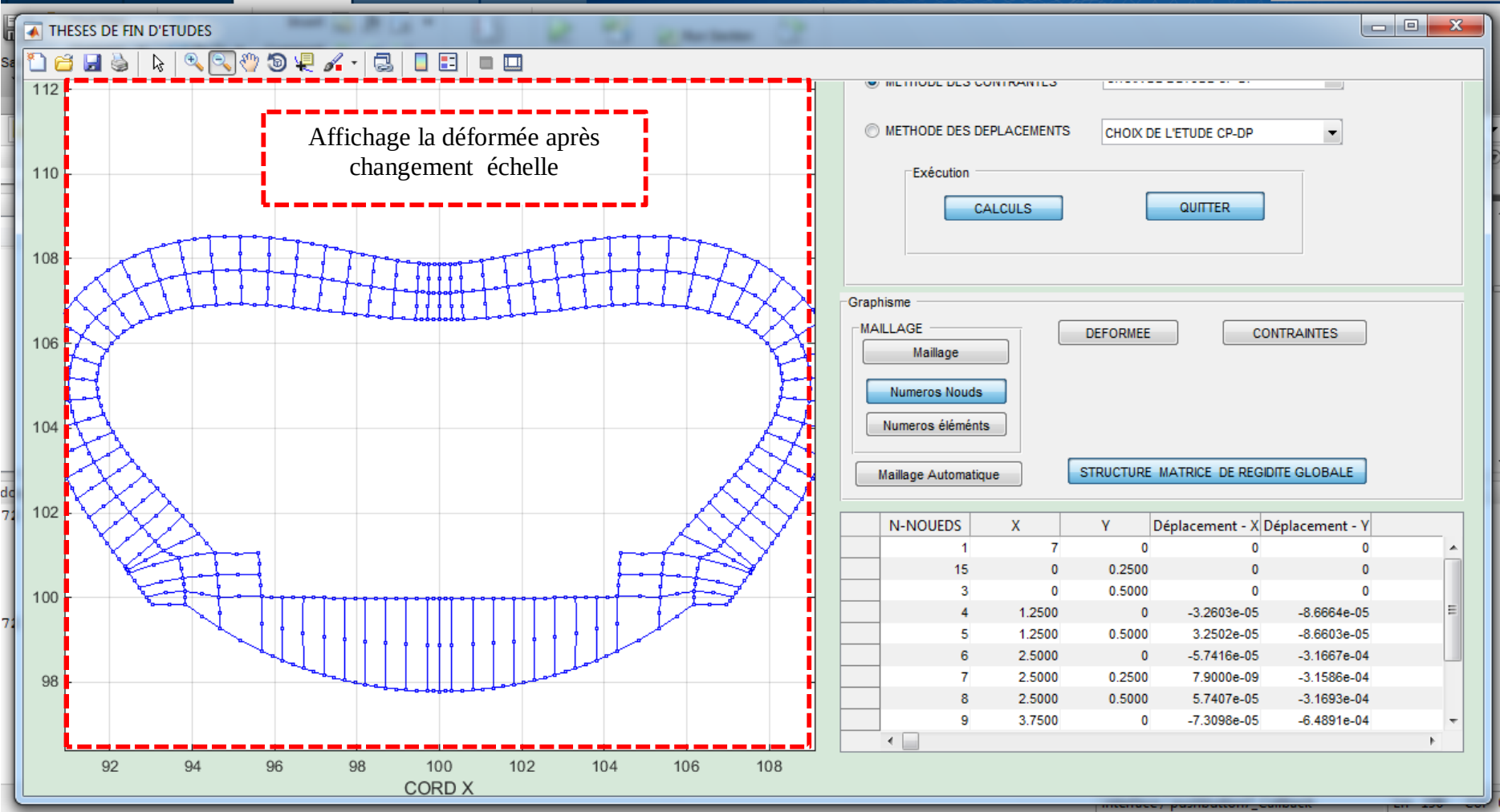


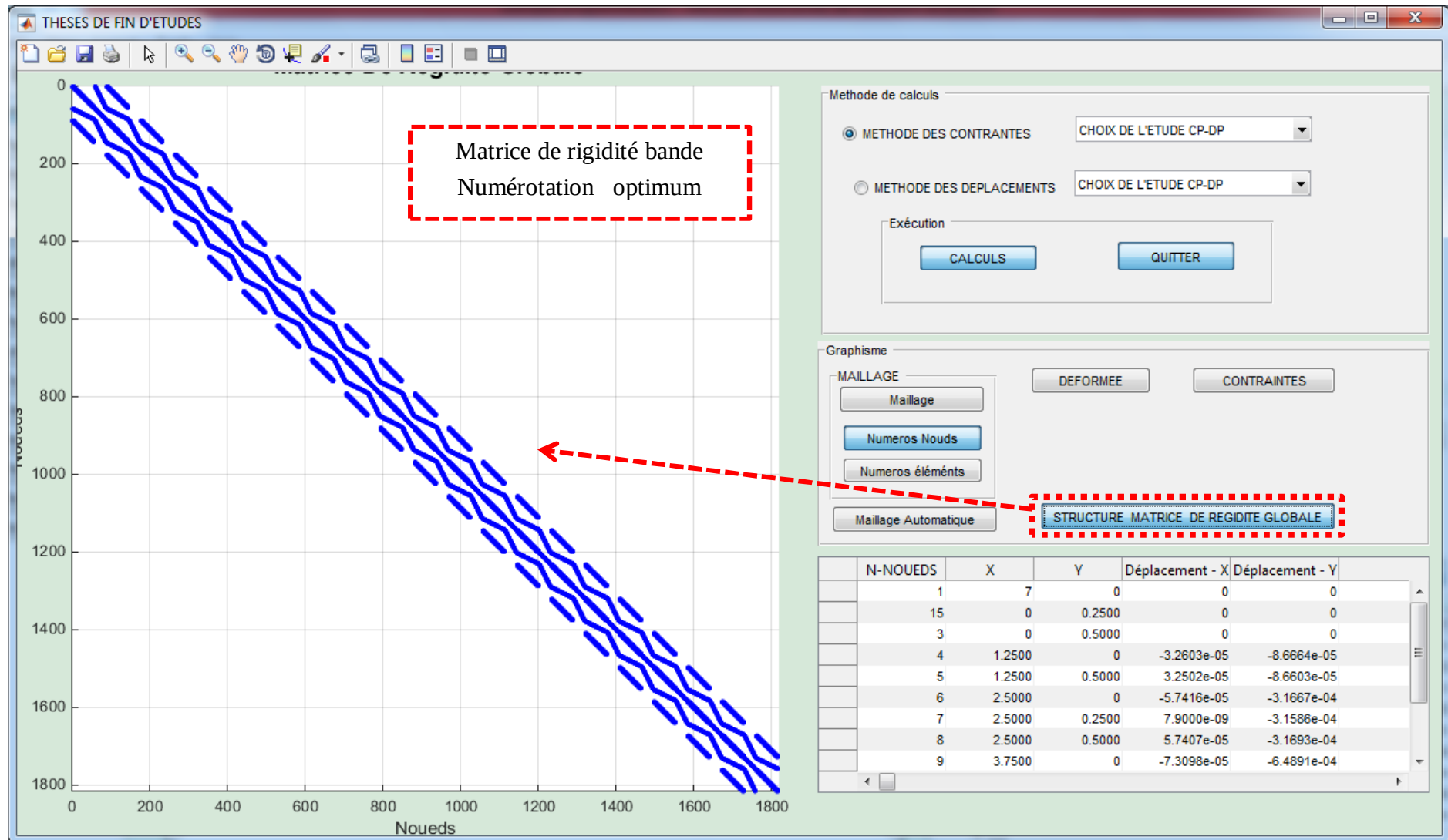




Changement







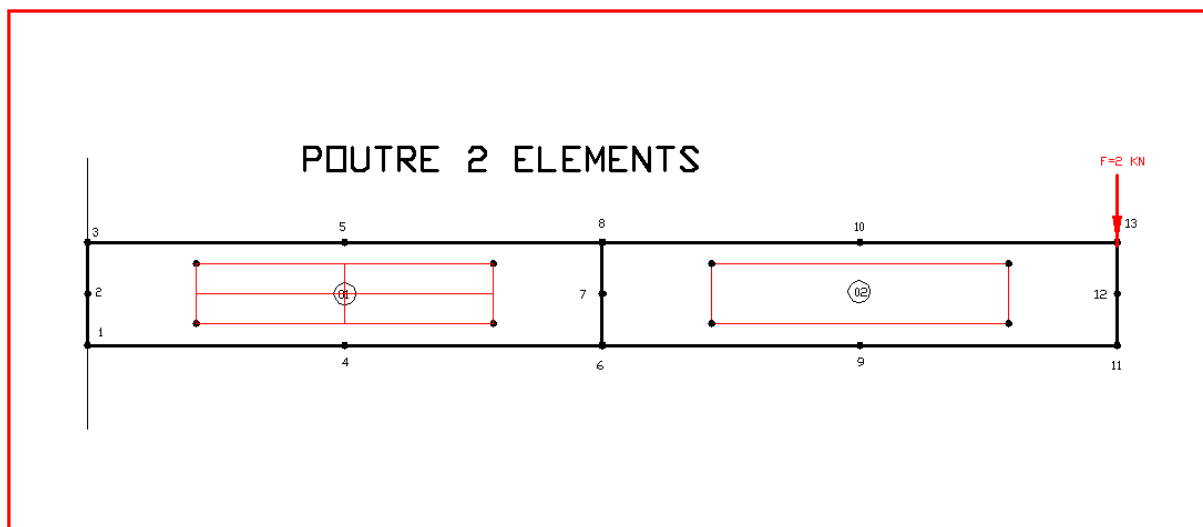
4.4. exemples de calcul

4.4.1. Poutre console 02 éléments

Fichier de données

```

13 2 1 1 1
1 0.00 0.00 11
2 0.00 0.25 11
3 0.00 0.50 11
4 1.25 0.00 00
5 1.25 0.50 00
6 2.50 0.00 00
7 2.50 0.25 00
8 2.50 0.50 00
9 3.75 0.00 00
10 3.75 0.50 00
11 5.00 0.00 00
12 5.00 0.25 00
13 5.00 0.50 00
1 1 6 8 3 4 7 5 2 1 1 1 0.3
2 6 11 13 8 9 12 10 7 1 1 1 0.3
1 25000000.
1 25.
1 0.3
1
13 0.0 -2.0
FIN
    
```



4.4.2. Poutre a 04 éléments

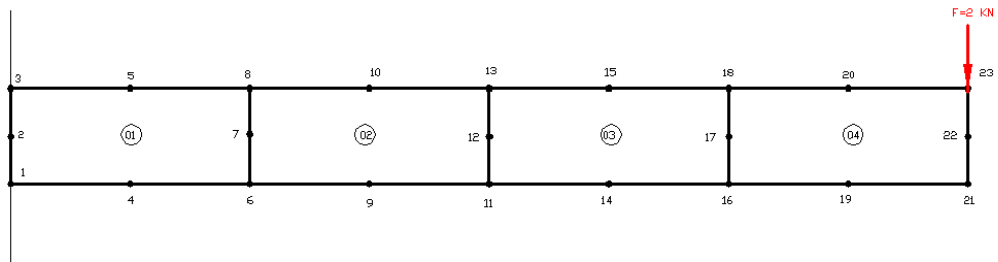
Fichier de données

```

23      4      1      1      1
1      0.0000  0.0000  11
2      0.0000  0.2500  11
3      0.0000  0.5000  11
4      0.6250  0.0000  00
5      0.6250  0.5000  00
6      1.2500  0.0000  00
7      1.2500  0.2619  00
8      1.2500  0.5000  00
9      1.8750  0.0000  00
10     1.8750  0.5000  00
11     2.5000  0.0000  00
12     2.5000  0.2500  00
13     2.5000  0.5000  00
14     3.1250  0.0000  00
15     3.1250  0.5000  00
16     3.7500  0.0000  00
17     3.7500  0.2500  00
18     3.7500  0.5000  00
19     4.3750  0.0000  00
20     4.3750  0.5000  00
21     5.0000  0.0000  00
22     5.0000  0.2500  00
23     5.0000  0.5000  00
1  1  6  8  3  4  7  5  2  1  1  1  0.3
2  6  11 13  8  9 12 10 7  1  1  1  0.3
3 11 16 18 13 14 17 15 12  1  1  1  0.3
4 16 21 23 18 19 22 20 17  1  1  1  0.3
1 25000000.00
1 25.00
1 0.30
1
23 0.00 -2.00
0
FIN

```

POUTRE 4 ELEMENTS



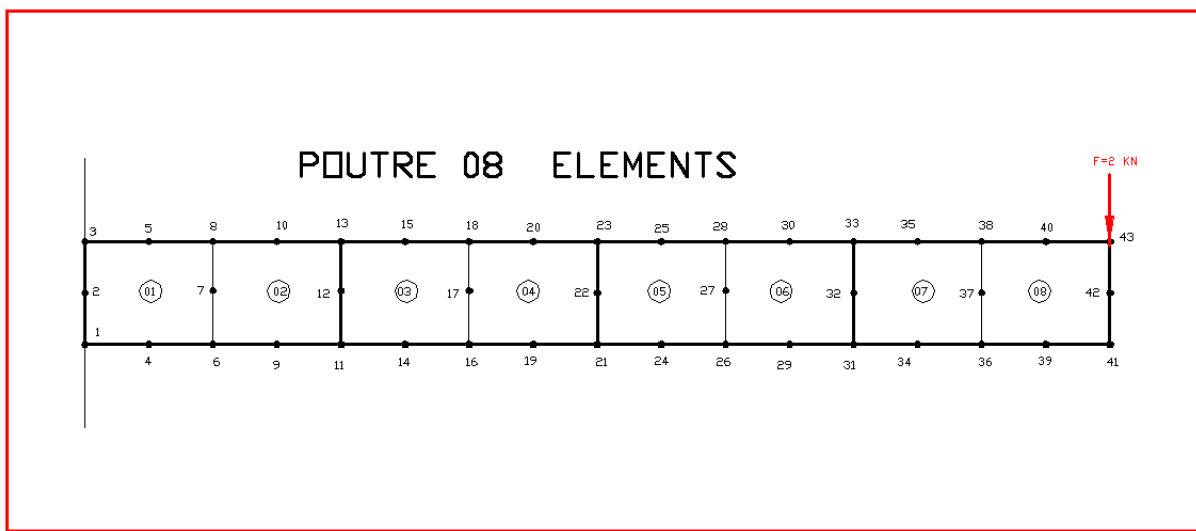
4.4.3. Poutre a 08 éléments**Fichier de données**

43	8	1	1	1
1	0.0000	0.0000	11	
2	0.0000	0.2500	11	
3	0.0000	0.5000	11	
4	0.3125	0.0000	0	
5	0.3125	0.5000	0	
6	0.6250	0.0000	0	
7	0.6250	0.2500	0	
8	0.6250	0.5000	0	
9	0.9375	0.0000	0	
10	0.9375	0.5000	0	
11	1.2500	0.0000	0	
12	1.2500	0.2500	0	
13	1.2500	0.5000	0	
14	1.5625	0.0000	0	
15	1.5625	0.5000	0	
16	1.8750	0.0000	0	
17	1.8750	0.2500	0	
18	1.8750	0.5000	0	
19	2.1875	0.0000	0	
20	2.1875	0.5000	0	
21	2.5000	0.0000	0	
22	2.5000	0.2500	0	
23	2.5000	0.5000	0	
24	2.8125	0.0000	0	
25	2.8125	0.5000	0	
26	3.1250	0.0000	0	
27	3.1250	0.2500	0	
28	3.1250	0.5000	0	
29	3.4375	0.0000	0	
30	3.4375	0.5000	0	
31	3.7500	0.0000	0	
32	3.7500	0.2500	0	
33	3.7500	0.5000	0	
34	4.0625	0.0000	0	
35	4.0625	0.5000	0	
36	4.3750	0.0000	0	
37	4.3750	0.2500	0	
38	4.3750	0.5000	0	
39	4.6875	0.0000	0	
40	4.6875	0.5000	0	
41	5.0000	0.0000	0	
42	5.0000	0.2500	0	
43	5.0000	0.5000	0	

```

1  1  6  8  3  4  7  5  2  1  1  1  0.30
2  6 11 13  8  9 12 10  7  1  1  1  0.30
3 11 16 18 13 14 17 15 12  1  1  1  0.30
4 16 21 23 18 19 22 20 17  1  1  1  0.30
5 21 26 28 23 24 27 25 22  1  1  1  0.30
6 26 31 33 28 29 32 30 27  1  1  1  0.30
7 31 36 38 33 34 37 35 32  1  1  1  0.30
8 36 41 43 38 39 42 40 37  1  1  1  0.30
1 25000000.0
1 25.00
1 0.30
1
1 0.00 -2.00
0
FIN

```



4.4.4. Poutre a 16 éléments

Fichier de données

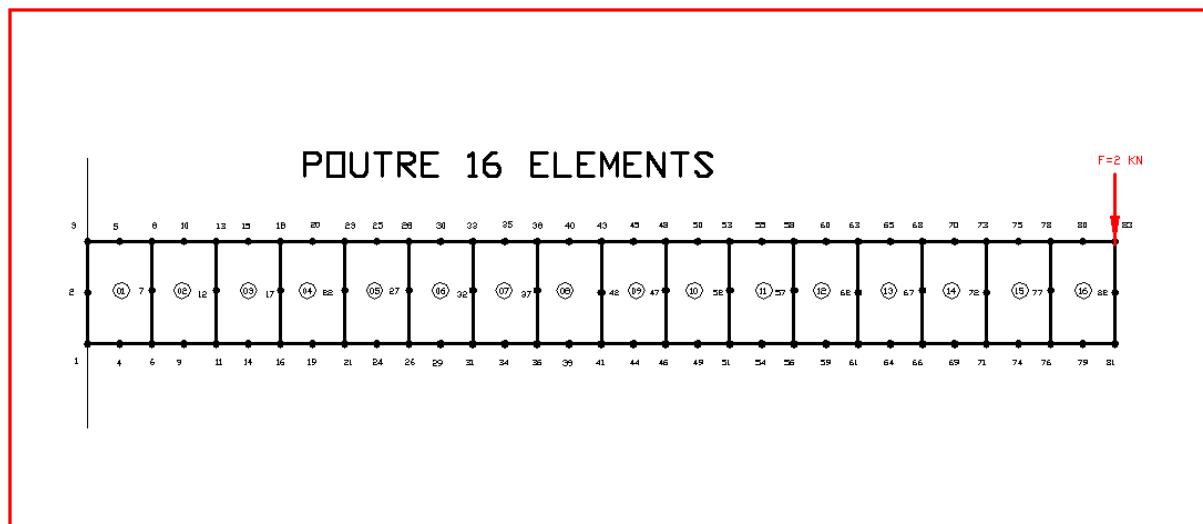
83	16	1	1	1
1	0.0000	0.0000	11	
2	0.0000	0.2500	11	
3	0.0000	0.5000	11	
4	0.1563	0.0000	0	
5	0.1563	0.5000	0	
6	0.3125	0.0000	0	
7	0.3125	0.2619	0	
8	0.3125	0.5000	0	
9	0.4688	0.0000	0	
10	0.4688	0.5000	0	
11	0.6250	0.0000	0	
12	0.6250	0.2619	0	
13	0.6250	0.5000	0	
14	0.7813	0.0000	0	
15	0.7813	0.5000	0	
16	0.9375	0.0000	0	
17	0.9375	0.2619	0	
18	0.9375	0.5000	0	
19	1.0938	0.0000	0	
20	1.0938	0.5000	0	
21	1.2500	0.0000	0	
22	1.2500	0.2619	0	
23	1.2500	0.5000	0	
24	1.4063	0.0000	0	
25	1.4063	0.5000	0	
26	1.5625	0.0000	0	
27	1.5625	0.2619	0	
28	1.5625	0.5000	0	
29	1.7188	0.0000	0	
30	1.7188	0.5000	0	
31	1.8750	0.0000	0	
32	1.8750	0.2619	0	
33	1.8750	0.5000	0	
34	2.0313	0.0000	0	
35	2.0313	0.5000	0	
36	2.1875	0.0000	0	
37	2.1875	0.2619	0	
38	2.1875	0.5000	0	
39	2.3438	0.0000	0	
40	2.3438	0.5000	0	
41	2.5000	0.0000	0	
42	2.5000	0.2500	0	
43	2.5000	0.5000	0	
44	2.6563	0.0000	0	

	45	2.6563	0.5000	0
46	2.8125	0.0000	0	
47	2.8125	0.2619	0	
48	2.8125	0.5000	0	
49	2.9688	0.0000	0	
50	2.9688	0.5000	0	
51	3.1250	0.0000	0	
52	3.1250	0.2619	0	
53	3.1250	0.5000	0	
54	3.2813	0.0000	0	
55	3.2813	0.5000	0	
56	3.4375	0.0000	0	
57	3.4375	0.2619	0	
58	3.4375	0.5000	0	
59	3.5938	0.0000	0	
60	3.5938	0.5000	0	
61	3.7500	0.0000	0	
62	3.7500	0.2500	0	
63	3.7500	0.5000	0	
64	3.9063	0.0000	0	
65	3.9063	0.5000	0	
66	4.0625	0.0000	0	
67	4.0625	0.2619	0	
68	4.0625	0.5000	0	
69	4.2188	0.0000	0	
70	4.2188	0.5000	0	
71	4.3750	0.0000	0	
72	4.3750	0.2500	0	
73	4.3750	0.5000	0	
74	4.5313	0.0000	0	
75	4.5313	0.5000	0	
76	4.6875	0.0000	0	
77	4.6875	0.2619	0	
78	4.6875	0.5000	0	
79	4.8438	0.0000	0	
80	4.8438	0.5000	0	
81	5.0000	0.0000	0	
82	5.0000	0.2500	0	
83	5.0000	0.5000	0	

```

1 1 6 8 3 4 7 5 2 1 1 1 0.30
2 6 11 13 8 9 12 10 7 1 1 1 0.30
3 11 16 18 13 14 17 15 12 1 1 1 0.30
4 16 21 23 18 19 22 20 17 1 1 1 0.30
5 21 26 28 23 24 27 25 22 1 1 1 0.30
6 26 31 33 28 29 32 30 27 1 1 1 0.30
7 31 36 38 33 34 37 35 32 1 1 1 0.30
8 36 41 43 38 39 42 40 37 1 1 1 0.30
9 41 46 48 43 44 47 45 42 1 1 1 0.30
10 46 51 53 48 49 52 50 47 1 1 1 0.30
11 51 56 58 53 54 57 55 52 1 1 1 0.30
12 56 61 63 58 59 62 60 57 1 1 1 0.30
13 61 66 68 63 64 67 65 62 1 1 1 0.30
14 66 71 73 68 69 72 70 67 1 1 1 0.30
15 71 76 78 73 74 77 75 72 1 1 1 0.30
16 76 81 83 78 79 82 80 77 1 1 1 0.30
1 25000000.
1 25.0
1 0.3
1
83 0.0 -2.0
0
FIN

```



4.4.5. Poutre a 32 éléments**Fichier de données**

163	32	1	1	1
1	0.0000	0.0000	11	
2	0.0000	0.2500	11	
3	0.0000	0.5000	11	
4	0.0781	0.0000	00	
5	0.0781	0.5000	00	
6	0.1563	0.0000	00	
7	0.1563	0.2500	00	
8	0.1563	0.5000	00	
9	0.2344	0.0000	00	
10	0.2344	0.5000	00	
11	0.3125	0.0000	00	
12	0.3125	0.2500	00	
13	0.3125	0.5000	00	
14	0.3906	0.0000	00	
15	0.3906	0.5000	00	
16	0.4688	0.0000	00	
17	0.4688	0.2500	00	
18	0.4688	0.5000	00	
19	0.5469	0.0000	00	
20	0.5469	0.5000	00	
21	0.6250	0.0000	00	
22	0.6250	0.2500	00	
23	0.6250	0.5000	00	
24	0.7031	0.0000	00	
25	0.7031	0.5000	00	
26	0.7813	0.0000	00	
27	0.7813	0.2500	00	
28	0.7813	0.5000	00	
29	0.8594	0.0000	00	
30	0.8594	0.5000	00	
31	0.9375	0.0000	00	
32	0.9375	0.2500	00	
33	0.9375	0.5000	00	
34	1.0156	0.0000	00	
35	1.0156	0.5000	00	
36	1.0938	0.0000	00	
37	1.0938	0.2500	00	
38	1.0938	0.5000	00	
39	1.1719	0.0000	00	
40	1.1719	0.5000	00	
41	1.2500	0.0000	00	
42	1.2500	0.2500	00	
43	1.2500	0.5000	00	
44	1.3281	0.0000	00	
45	1.3281	0.5000	00	
46	1.4063	0.0000	00	
47	1.4063	0.2500	00	
48	1.4063	0.5000	00	

49	1.4844	0.0000	00
50	1.4844	0.5000	00
51	1.5625	0.0000	00
52	1.5625	0.2500	00
53	1.5625	0.5000	00
54	1.6406	0.0000	00
55	1.6406	0.5000	00
56	1.7188	0.0000	00
57	1.7188	0.2500	00
58	1.7188	0.5000	00
59	1.7969	0.0000	00
60	1.7969	0.5000	00
61	1.8750	0.0000	00
62	1.8750	0.2500	00
63	1.8750	0.5000	00
64	1.9531	0.0000	00
65	1.9531	0.5000	00
66	2.0313	0.0000	00
67	2.0313	0.2500	00
68	2.0313	0.5000	00
69	2.1094	0.0000	00
70	2.1094	0.5000	00
71	2.1875	0.0000	00
72	2.1875	0.2500	00
73	2.1875	0.5000	00
74	2.2656	0.0000	00
75	2.2656	0.5000	00
76	2.3438	0.0000	00
77	2.3438	0.2500	00
78	2.3438	0.5000	00
79	2.4219	0.0000	00
80	2.4219	0.5000	00
81	2.5000	0.0000	00
82	2.5000	0.2500	00
83	2.5000	0.5000	00
84	2.5781	0.0000	00
85	2.5781	0.5000	00
86	2.6563	0.0000	00
87	2.6563	0.2500	00
88	2.6563	0.5000	00
89	2.7344	0.0000	00
90	2.7344	0.5000	00
91	2.8125	0.0000	00
92	2.8125	0.2500	00
93	2.8125	0.5000	00
94	2.8906	0.0000	00
95	2.8906	0.5000	00
96	2.9688	0.0000	00
97	2.9688	0.2500	00
98	2.9688	0.5000	00

99 3.0469 0.0000 00
 100 3.0469 0.5000 00
 101 3.1250 0.0000 00
 102 3.1250 0.2500 00
 103 3.1250 0.5000 00
 104 3.2031 0.0000 00
 105 3.2031 0.5000 00
 106 3.2813 0.0000 00
 107 3.2813 0.2500 00
 108 3.2813 0.5000 00
 109 3.3594 0.0000 00
 110 3.3594 0.5000 00
 111 3.4375 0.0000 00
 112 3.4375 0.2500 00
 113 3.4375 0.5000 00
 114 3.5156 0.0000 00
 115 3.5156 0.5000 00
 116 3.5938 0.0000 00
 117 3.5938 0.2500 00
 118 3.5938 0.5000 00
 119 3.6719 0.0000 00
 120 3.6719 0.5000 00
 121 3.7500 0.0000 00
 122 3.7500 0.2500 00
 123 3.7500 0.5000 00
 124 3.8281 0.0000 00
 125 3.8281 0.5000 00
 126 3.9063 0.0000 00
 127 3.9063 0.2500 00
 128 3.9063 0.5000 00
 129 3.9844 0.0000 00
 130 3.9844 0.5000 00
 131 4.0625 0.0000 00
 132 4.0625 0.2500 00
 133 4.0625 0.5000 00
 134 4.1406 0.0000 00
 135 4.1406 0.5000 00
 136 4.2188 0.0000 00
 137 4.2188 0.2500 00
 138 4.2188 0.5000 00
 139 4.2969 0.0000 00
 140 4.2969 0.5000 00
 141 4.3750 0.0000 00
 142 4.3750 0.2500 00
 143 4.3750 0.5000 00
 144 4.4531 0.0000 00
 145 4.4531 0.5000 00
 146 4.5313 0.0000 00
 147 4.5313 0.2500 00
 148 4.5313 0.5000 00
 149 4.6094 0.0000 00
 150 4.6094 0.5000 00

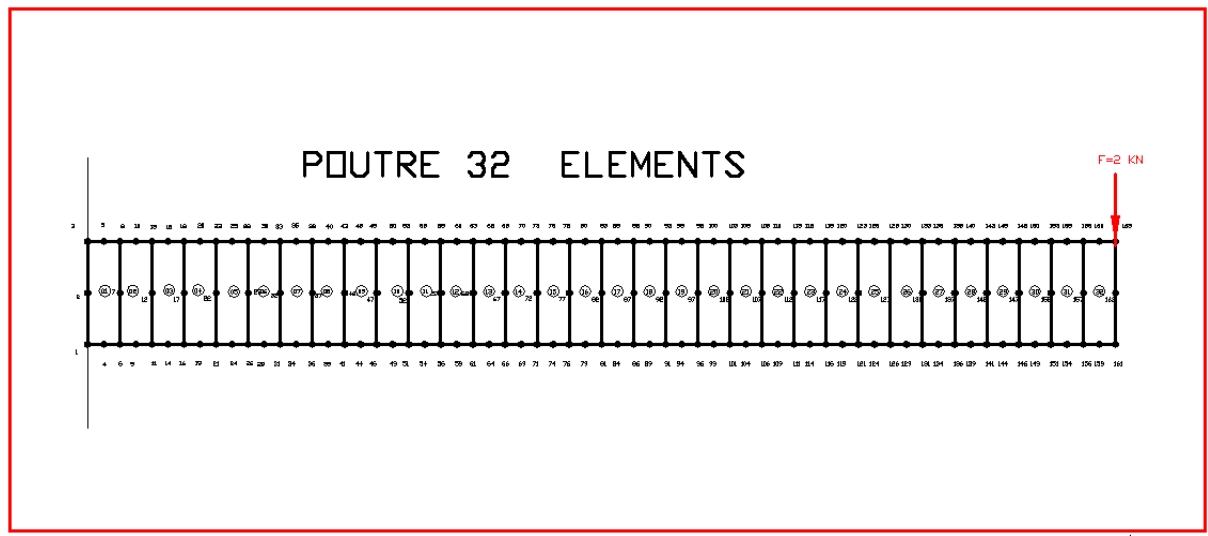
```

151 4.6875 0.0000 00
152 4.6875 0.2500 00
153 4.6875 0.5000 00
154 4.7656 0.0000 00
155 4.7656 0.5000 00
156 4.8438 0.0000 00
157 4.8438 0.2500 00
158 4.8438 0.5000 00
159 4.9219 0.0000 00
160 4.9219 0.5000 00
161 5.0000 0.0000 00
162 5.0000 0.2500 00
163 5.0000 0.5000 00
1 1 6 8 3 4 7 5 2 1 1 1 0.3
2 6 11 13 8 9 12 10 7 1 1 1 0.3
3 11 16 18 13 14 17 15 12 1 1 1 0.3
4 16 21 23 18 19 22 20 17 1 1 1 0.3
5 21 26 28 23 24 27 25 22 1 1 1 0.3
6 26 31 33 28 29 32 30 27 1 1 1 0.3
7 31 36 38 33 34 37 35 32 1 1 1 0.3
8 36 41 43 38 39 42 40 37 1 1 1 0.3
9 41 46 48 43 44 47 45 42 1 1 1 0.3
10 46 51 53 48 49 52 50 47 1 1 1 0.3
11 51 56 58 53 54 57 55 52 1 1 1 0.3
12 56 61 63 58 59 62 60 57 1 1 1 0.3
13 61 66 68 63 64 67 65 62 1 1 1 0.3
14 66 71 73 68 69 72 70 67 1 1 1 0.3
15 71 76 78 73 74 77 75 72 1 1 1 0.3
16 76 81 83 78 79 82 80 77 1 1 1 0.3
17 81 86 88 83 84 87 85 82 1 1 1 0.3
18 86 91 93 88 89 92 90 87 1 1 1 0.3
19 91 96 98 93 94 97 95 92 1 1 1 0.3
20 96 101 103 98 99 102 100 97 1 1 1 0.3
21 101 106 108 103 104 107 105 102 1 1 1 0.3
22 106 111 113 108 109 112 110 107 1 1 1 0.3
23 111 116 118 113 114 117 115 112 1 1 1 0.3
24 116 121 123 118 119 122 120 117 1 1 1 0.3
25 121 126 128 123 124 127 125 122 1 1 1 0.3
26 126 131 133 128 129 132 130 127 1 1 1 0.3
27 131 136 138 133 134 137 135 132 1 1 1 0.3
28 136 141 143 138 139 142 140 137 1 1 1 0.3
29 141 146 148 143 144 147 145 142 1 1 1 0.3
30 146 151 153 148 149 152 150 147 1 1 1 0.3
31 151 156 158 153 154 157 155 152 1 1 1 0.3
32 156 161 163 158 159 162 160 157 1 1 1 0.3

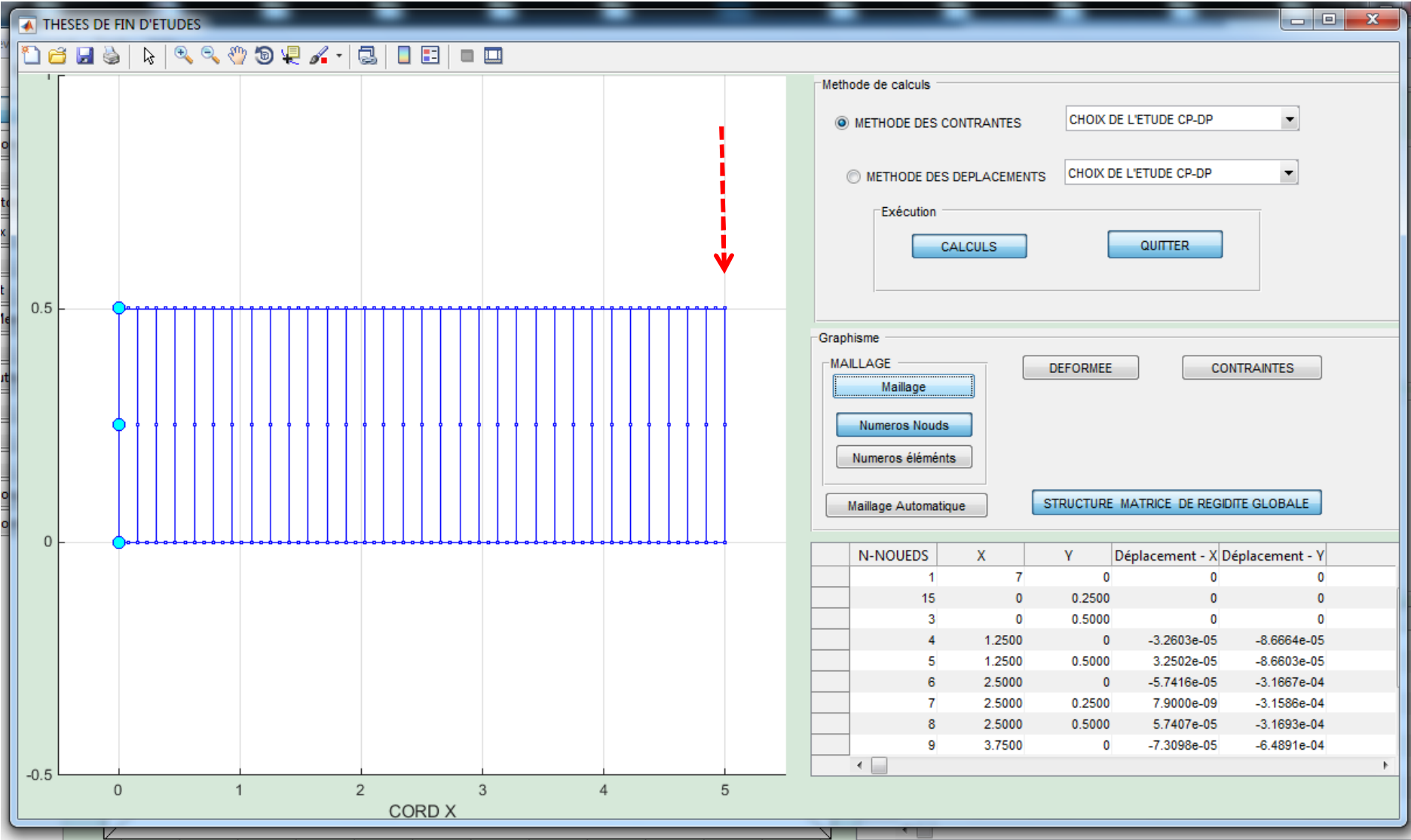
```

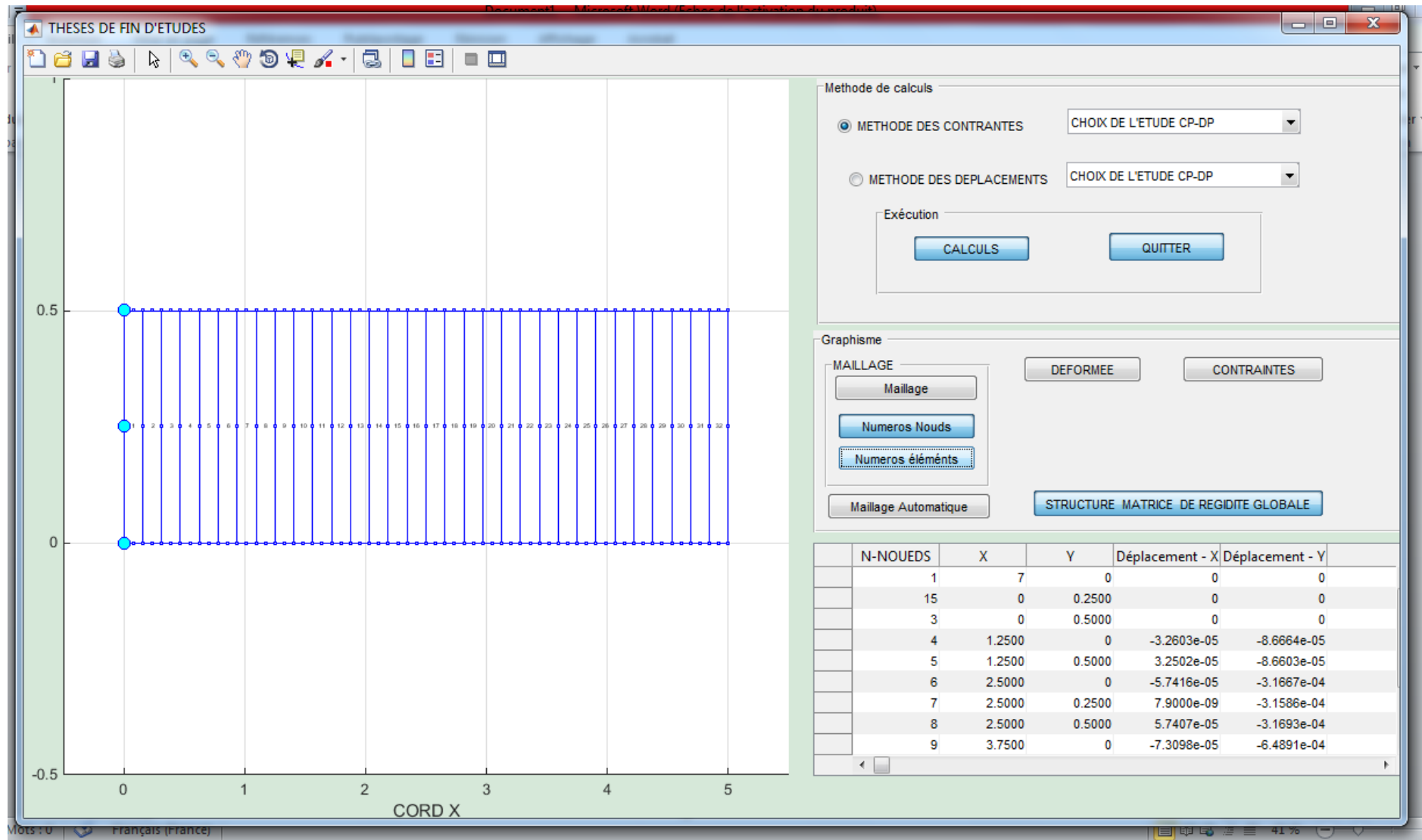
1 25000000.0
 1 25.0
 1 0.3
 1
 163 0.00 -2.00

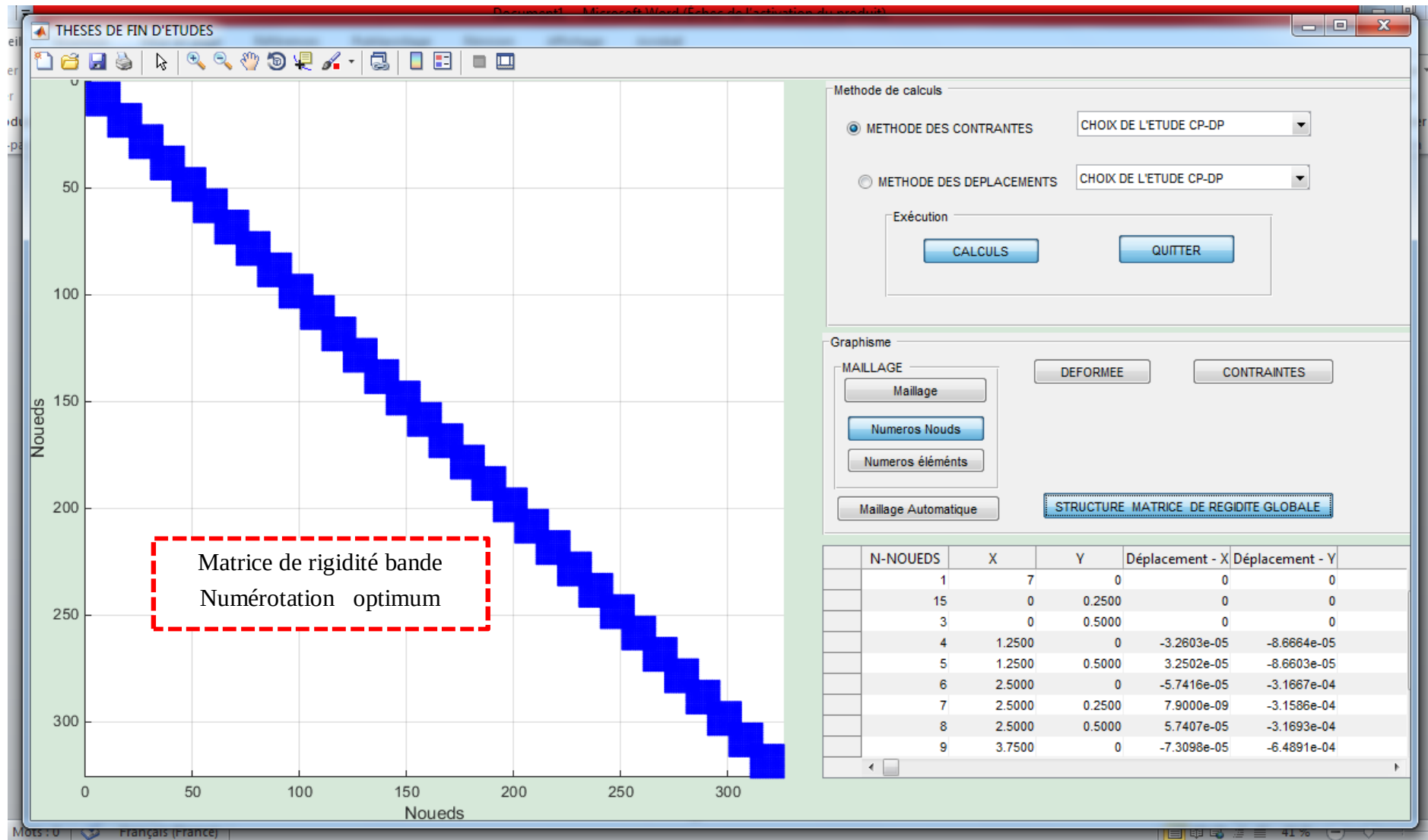
FIN

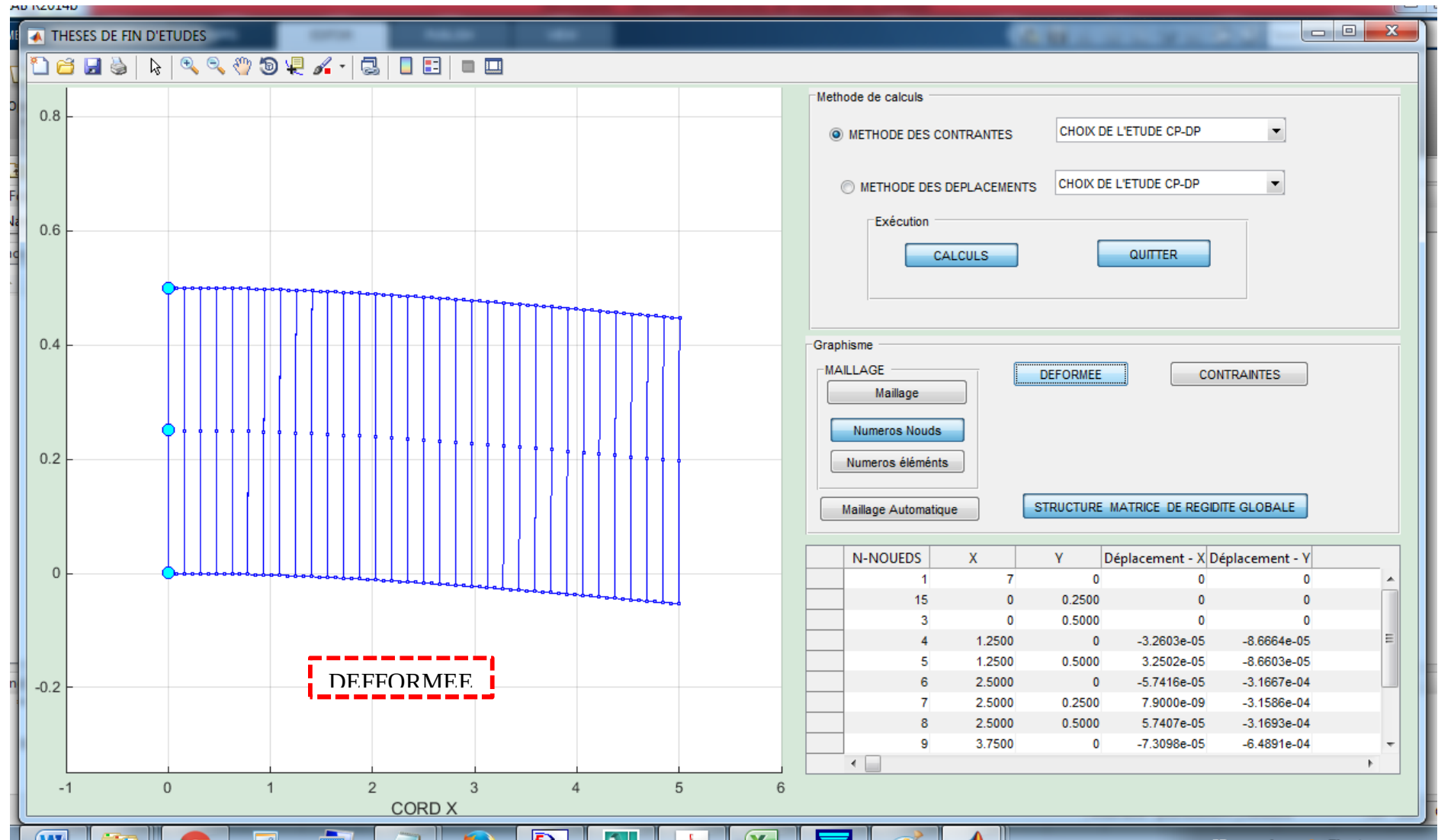


POUTRE CONSSOLE CHARGEES A SANS EXTREMITE CONTRAINTES-PLANES









Fichier resultat deplacement

EXEMPLE CALCUL POUTRE A 32 ELEMENTS SOUMISE A UNE
TRACTION

DEPLACEMENTS DES NOUEDS

NOUED	X	Y	DEP-X (m)	DEP-Y (m)
1	0,0000	0,0000	0,00E+00	0,00E+00
2	0,0000	0,2500	0,00E+00	0,00E+00
3	0,0000	0,5000	0,00E+00	0,00E+00
4	0,0781	0,0000	-2,33E-06	-9,64E-07
5	0,0781	0,5000	2,33E-06	-9,64E-07
6	0,1563	0,0000	-4,76E-06	-2,67E-06
7	0,1563	0,2500	0,00E+00	-1,19E-06
8	0,1563	0,5000	4,76E-06	-2,67E-06
9	0,2344	0,0000	-7,20E-06	-4,50E-06
10	0,2344	0,5000	7,20E-06	-4,50E-06
11	0,3125	0,0000	-9,57E-06	-7,08E-06
12	0,3125	0,2500	0,00E+00	-6,04E-06
13	0,3125	0,5000	9,57E-06	-7,08E-06
14	0,3906	0,0000	-1,19E-05	-1,06E-05
15	0,3906	0,5000	1,19E-05	-1,06E-05
16	0,4688	0,0000	-1,42E-05	-1,48E-05
17	0,4688	0,2500	0,00E+00	-1,37E-05
18	0,4688	0,5000	1,42E-05	-1,48E-05
19	0,5469	0,0000	-1,64E-05	-1,96E-05
20	0,5469	0,5000	1,64E-05	-1,96E-05
21	0,6250	0,0000	-1,86E-05	-2,52E-05
22	0,6250	0,2500	0,00E+00	-2,42E-05
23	0,6250	0,5000	1,86E-05	-2,52E-05
24	0,7031	0,0000	-2,08E-05	-3,15E-05
25	0,7031	0,5000	2,08E-05	-3,15E-05
26	0,7813	0,0000	-2,29E-05	-3,84E-05
27	0,7813	0,2500	0,00E+00	-3,74E-05
28	0,7813	0,5000	2,29E-05	-3,84E-05
29	0,8594	0,0000	-2,50E-05	-4,60E-05
30	0,8594	0,5000	2,50E-05	-4,60E-05
31	0,9375	0,0000	-2,71E-05	-5,42E-05
32	0,9375	0,2500	0,00E+00	-5,32E-05
33	0,9375	0,5000	2,71E-05	-5,42E-05
34	1,0156	0,0000	-2,91E-05	-6,31E-05
35	1,0156	0,5000	2,91E-05	-6,31E-05
36	1,0938	0,0000	-3,10E-05	-7,26E-05

37	1,0938	0,2500	0,00E+00	-7,16E-05
38	1,0938	0,5000	3,10E-05	-7,26E-05
125	3,8281	0,5000	7,55E-05	-7,02E-04
126	3,9063	0,0000	-7,60E-05	-7,26E-04
127	3,9063	0,2500	2,80E-09	-7,26E-04
128	3,9063	0,5000	7,60E-05	-7,26E-04
129	3,9844	0,0000	-7,66E-05	-7,50E-04
130	3,9844	0,5000	7,66E-05	-7,50E-04
131	4,0625	0,0000	-7,70E-05	-7,74E-04
132	4,0625	0,2500	-6,40E-09	-7,74E-04
133	4,0625	0,5000	7,71E-05	-7,74E-04
134	4,1406	0,0000	-7,75E-05	-7,98E-04
135	4,1406	0,5000	7,75E-05	-7,98E-04
136	4,2188	0,0000	-7,79E-05	-8,23E-04
137	4,2188	0,2500	1,44E-08	-8,22E-04
138	4,2188	0,5000	7,79E-05	-8,22E-04
139	4,2969	0,0000	-7,83E-05	-8,47E-04
140	4,2969	0,5000	7,83E-05	-8,47E-04
141	4,3750	0,0000	-7,86E-05	-8,72E-04
142	4,3750	0,2500	-3,26E-08	-8,71E-04
143	4,3750	0,5000	7,87E-05	-8,72E-04
144	4,4531	0,0000	-7,90E-05	-8,96E-04
145	4,4531	0,5000	7,89E-05	-8,96E-04
146	4,5313	0,0000	-7,93E-05	-9,21E-04
147	4,5313	0,2500	7,35E-08	-9,21E-04
148	4,5313	0,5000	7,90E-05	-9,21E-04
149	4,6094	0,0000	-7,93E-05	-9,46E-04
150	4,6094	0,5000	7,95E-05	-9,46E-04
151	4,6875	0,0000	-7,92E-05	-9,71E-04
152	4,6875	0,2500	-1,66E-07	-9,71E-04
153	4,6875	0,5000	7,99E-05	-9,71E-04
154	4,7656	0,0000	-7,99E-05	-9,96E-04
155	4,7656	0,5000	7,95E-05	-9,96E-04
156	4,8438	0,0000	-8,05E-05	-1,02E-03
157	4,8438	0,2500	3,84E-07	-1,02E-03
158	4,8438	0,5000	7,90E-05	-1,02E-03
159	4,9219	0,0000	-7,88E-05	-1,05E-03
160	4,9219	0,5000	8,09E-05	-1,05E-03
161	5,0000	0,0000	-7,70E-05	-1,07E-03
162	5,0000	0,2500	-1,41E-06	-1,07E-03
163	5,0000	0,5000	8,28E-05	-1,07E-03

4.4.6. Exemple tunnel

Fichier de données

626	152	1	1	1
1	100.0000	100.0000	0	
2	100.1509	100.0000	0	
3	100.3019	100.0000	0	
4	100.5519	100.0000	0	
5	100.8019	100.0000	0	
6	101.0519	100.0000	0	
7	101.3019	100.0000	0	
8	101.5519	100.0000	0	
9	101.8019	100.0000	0	
10	102.0519	100.0000	0	
11	102.3019	100.0000	0	
12	102.5519	100.0000	0	
13	102.8019	100.0000	0	
14	103.0519	100.0000	0	
15	103.3019	100.0000	0	
16	103.5519	100.0000	0	
17	103.8019	100.0000	0	
18	104.0519	100.0000	0	
19	104.3019	100.0000	0	
20	104.3019	100.2500	0	
21	104.3019	100.5000	0	
22	104.3019	100.7500	0	
23	104.3019	101.0000	0	
24	104.8319	101.0000	0	
25	105.3319	101.0000	0	
26	105.4524	101.2090	0	
27	105.5648	101.4224	0	
28	105.6689	101.6401	0	
29	105.7645	101.8616	0	
30	105.8352	102.0424	0	
31	105.9002	102.2253	0	
32	105.9603	102.4124	0	
33	106.0144	102.6014	0	
34	106.0632	102.7943	0	
35	106.1057	102.9885	0	
36	106.1425	103.1862	0	
37	106.1729	103.3850	0	
38	106.1970	103.5866	0	
39	106.2147	103.7888	0	
40	106.2257	103.9899	0	
41	106.2302	104.1913	0	
42	106.2336	104.4412	0	
43	106.2270	104.6911	0	
44	106.2104	104.9406	0	
45	106.1838	105.1891	0	
46	106.1472	105.4364	0	

47	106.1008	105.6821	0
48	106.0445	105.9256	0
49	105.9737	106.1653	0
50	105.9029	106.4050	0
51	105.8131	106.6383	0
52	105.7233	106.8715	0
53	105.6151	107.0968	0
54	105.5069	107.3221	0
55	105.3853	107.5405	0
56	105.2550	107.7539	0
57	105.1122	107.9590	0
58	104.9693	108.1640	0
59	104.8105	108.3570	0
60	104.6517	108.5500	0
61	104.4815	108.7331	0
62	104.3041	108.9093	0
63	104.1198	109.0782	0
64	103.9289	109.2395	0
65	103.7316	109.3931	0
66	103.5284	109.5386	0
67	103.3194	109.6758	0
68	103.1051	109.8046	0
69	102.8859	109.9247	0
70	102.6620	110.0358	0
71	102.4338	110.1379	0
72	102.2017	110.2308	0
73	101.9660	110.3142	0
74	101.7272	110.3882	0
75	101.4857	110.4525	0
76	101.2417	110.5070	0
77	100.9958	110.5517	0
78	100.7482	110.5866	0
79	100.4995	110.6114	0
80	100.3747	110.6196	0
81	100.2499	110.6263	0
82	100.1250	110.6298	0
83	100.0000	110.6311	0
84	99.8755	110.6300	0
85	99.7501	110.6263	0
86	99.6252	110.6201	0
87	99.5005	110.6114	0
88	99.2518	110.5866	0
89	99.0042	110.5517	0
90	98.7583	110.5070	0
91	98.5143	110.4525	0
92	98.2728	110.3882	0
93	98.0340	110.3142	0
94	97.7983	110.2308	0
95	97.5662	110.1379	0
96	97.3380	110.0358	0
97	97.1141	109.9247	0
98	96.8949	109.8046	0
99	96.6806	109.6758	0

100	96.4716	109.5386	0
101	96.2684	109.3931	0
102	96.0711	109.2395	0
103	95.8802	109.0782	0
104	95.6959	108.9093	0
105	95.5185	108.7331	0
106	95.3483	108.5500	0
107	95.1895	108.3570	0
108	95.0307	108.1640	0
109	94.8878	107.9590	0
110	94.7450	107.7539	0
111	94.6147	107.5405	0
112	94.4931	107.3221	0
113	94.3849	107.0968	0
114	94.2767	106.8715	0
115	94.1869	106.6383	0
116	94.0971	106.4050	0
117	94.0263	106.1653	0
118	93.9555	105.9256	0
119	93.8992	105.6821	0
120	93.8528	105.4364	0
121	93.8162	105.1891	0
122	93.7896	104.9406	0
123	93.7730	104.6911	0
124	93.7664	104.4412	0
125	93.7698	104.1913	0
126	93.7743	103.9899	0
127	93.7853	103.7888	0
128	93.8030	103.5866	0
129	93.8271	103.3850	0
130	93.8575	103.1862	0
131	93.8943	102.9885	0
132	93.9368	102.7943	0
133	93.9856	102.6014	0
134	94.0397	102.4124	0
135	94.0998	102.2253	0
136	94.1648	102.0424	0
137	94.2355	101.8616	0
138	94.3311	101.6401	0
139	94.4352	101.4224	0
140	94.5476	101.2090	0
141	94.6681	101.0000	0
142	95.1681	101.0000	0
143	95.6981	101.0000	0
144	95.6981	100.7500	0
145	95.6981	100.5000	0
146	95.6981	100.2500	0
147	95.6981	100.0000	0
148	95.9481	100.0000	0
149	96.1981	100.0000	0
150	96.4481	100.0000	0
151	96.6981	100.0000	0

152	96.9481	100.0000	0
153	97.1981	100.0000	0
154	97.4481	100.0000	0
155	97.6981	100.0000	0
156	97.9481	100.0000	0
157	98.1981	100.0000	0
158	98.4481	100.0000	0
159	98.6981	100.0000	0
160	98.9481	100.0000	0
161	99.1981	100.0000	0
162	99.4481	100.0000	0
163	99.6981	100.0000	0
164	99.8491	100.0000	0
165	100.0000	98.8924	0
166	100.3019	98.8944	0
167	100.8024	98.9076	0
168	101.3019	98.9331	0
169	101.8030	98.9715	0
170	102.3019	99.0222	0
171	102.8037	99.0870	0
172	103.3019	99.1644	0
173	103.8045	99.2580	0
174	104.3019	99.3647	0
175	105.3319	99.6401	0
176	104.8319	100.0000	0
177	104.8319	100.5000	0
178	105.3319	100.0000	0
179	105.3319	100.2500	0
180	105.3319	100.5000	0
181	105.3319	100.7500	0
182	105.7501	100.0875	0
183	105.7501	100.5000	0
184	105.7501	101.0000	0
185	106.0106	101.3453	0
186	106.1573	101.7009	0
187	106.2862	102.0947	0
188	106.3916	102.4997	0
189	106.4722	102.9143	0
190	106.5269	103.3367	0
191	106.5548	103.7647	0
192	106.5554	104.1912	0
193	106.5517	104.7062	0
194	106.5062	105.2302	0
195	106.4188	105.7489	0
196	106.2902	106.2588	0
197	106.1211	106.7568	0
198	105.9125	107.2397	0
199	105.6660	107.7042	0
200	105.3830	108.1476	0
201	105.0653	108.5667	0
202	104.7151	108.9591	0

203	104.3345	109.3221	0
204	103.9261	109.6535	0
205	103.4924	109.9510	0
206	103.0362	110.2128	0
207	102.5605	110.4372	0
208	102.0684	110.6227	0
209	101.5630	110.7681	0
210	101.0475	110.8726	0
211	100.5253	110.9354	0
212	100.2627	110.9510	0
213	100.0000	110.9561	0
214	99.7373	110.9510	0
215	99.4747	110.9354	0
216	98.9525	110.8726	0
217	98.4370	110.7681	0
218	97.9316	110.6227	0
219	97.4395	110.4372	0
220	96.9638	110.2128	0
221	96.5076	109.9510	0
222	96.0739	109.6535	0
223	95.6655	109.3221	0
224	95.2849	108.9591	0
225	94.9347	108.5667	0
226	94.6170	108.1476	0
227	94.3340	107.7042	0
228	94.0875	107.2397	0
229	93.8789	106.7568	0
230	93.7098	106.2588	0
231	93.5812	105.7489	0
232	93.4938	105.2302	0
233	93.4483	104.7062	0
234	93.4446	104.1912	0
235	93.4452	103.7647	0
236	93.4731	103.3367	0
237	93.5278	102.9143	0
238	93.6084	102.4997	0
239	93.7138	102.0947	0
240	93.8427	101.7009	0
241	93.9894	101.3453	0
242	94.2499	101.0000	0
243	94.2499	100.5000	0
244	94.2499	100.0875	0
245	94.6681	100.7500	0
246	94.6681	100.5000	0
247	95.1681	100.5000	0
248	94.6681	100.2500	0
249	94.6681	100.0000	0
250	95.1681	100.0000	0
251	94.6681	99.6401	0
252	95.6981	99.3647	0
253	96.1955	99.2580	0
254	96.6981	99.1644	0
255	97.1963	99.0870	0

256	97.6981	99.0222	0
257	98.1970	98.9715	0
258	98.6981	98.9331	0
259	99.1976	98.9076	0
260	99.6981	98.8944	0
261	106.1683	100.0124	0
262	106.1683	100.1750	0
263	106.1683	100.3375	0
264	106.1683	100.5000	0
265	106.1683	100.7500	0
266	106.1683	101.0000	0
267	106.3124	101.1341	0
268	106.4564	101.2681	0
269	106.5046	101.4037	0
270	106.5501	101.5402	0
271	106.6144	101.7512	0
272	106.6723	101.9641	0
273	106.7239	102.1803	0
274	106.7688	102.3980	0
275	106.8071	102.6185	0
276	106.8386	102.8401	0
277	106.8633	103.0639	0
278	106.8809	103.2884	0
279	106.8915	103.5144	0
280	106.8949	103.7407	0
281	106.8913	103.9660	0
282	106.8805	104.1912	0
283	106.8836	104.4454	0
284	106.8763	104.7213	0
285	106.8580	104.9968	0
286	106.8286	105.2713	0
287	106.7882	105.5444	0
288	106.7369	105.8156	0
289	106.6748	106.0846	0
290	106.6019	106.3509	0
291	106.5184	106.6140	0
292	106.4244	106.8736	0
293	106.3200	107.1292	0
294	106.2055	107.3804	0
295	106.0810	107.6268	0
296	105.9467	107.8680	0
297	105.8029	108.1036	0
298	105.6497	108.3333	0
299	105.4874	108.5566	0
300	105.3163	108.7733	0
301	105.1366	108.9829	0
302	104.9487	109.1851	0
303	104.7528	109.3796	0
304	104.5492	109.5661	0
305	104.3384	109.7443	0
306	104.1205	109.9139	0
307	103.8961	110.0746	0

308	103.6653	110.2262	0
309	103.4287	110.3684	0
310	103.1865	110.5009	0
311	102.9393	110.6237	0
312	102.6873	110.7364	0
313	102.4310	110.8390	0
314	102.1707	110.9311	0
315	101.9070	111.0128	0
316	101.6402	111.0838	0
317	101.3708	111.1441	0
318	101.0992	111.1935	0
319	100.8258	111.2319	0
320	100.5511	111.2594	0
321	100.4134	111.2684	0
322	100.2755	111.2758	0
323	100.1378	111.2796	0
324	100.0000	111.2808	0
325	99.8622	111.2798	0
326	99.7245	111.2758	0
327	99.5866	111.2690	0
328	99.4489	111.2594	0
329	99.1742	111.2319	0
330	98.9008	111.1935	0
331	98.6292	111.1441	0
332	98.3598	111.0838	0
333	98.0930	111.0128	0
334	97.8293	110.9311	0
335	97.5175	110.8193	0
336	97.3127	110.7364	0
337	97.0607	110.6237	0
338	96.8135	110.5009	0
339	96.5713	110.3684	0
340	96.3347	110.2262	0
341	96.1039	110.0746	0
342	95.8795	109.9139	0
343	95.6616	109.7443	0
344	95.4508	109.5661	0
345	95.2472	109.3796	0
346	95.0513	109.1851	0
347	94.8634	108.9829	0
348	94.6837	108.7733	0
349	94.5126	108.5566	0
350	94.3503	108.3333	0
351	94.1971	108.1036	0
352	94.0533	107.8680	0
353	93.9190	107.6268	0
354	93.7945	107.3804	0
355	93.6800	107.1292	0
356	93.5756	106.8736	0
357	93.4816	106.6140	0
358	93.3981	106.3509	0
359	93.3252	106.0846	0

360 93.2631 105.8156 0
 361 93.2118 105.5444 0
 362 93.1714 105.2713 0
 363 93.1420 104.9968 0
 364 93.1237 104.7213 0
 365 93.1164 104.4454 0
 366 93.1195 104.1912 0
 367 93.1087 103.9660 0
 368 93.1051 103.7407 0
 369 93.1085 103.5144 0
 370 93.1191 103.2884 0
 371 93.1367 103.0639 0
 372 93.1614 102.8401 0
 373 93.1929 102.6185 0
 374 93.2312 102.3980 0
 375 93.2761 102.1803 0
 376 93.3277 101.9641 0
 377 93.3856 101.7512 0
 378 93.4499 101.5402 0
 379 93.4954 101.4037 0
 380 93.5436 101.2681 0
 381 93.6876 101.1341 0
 382 93.8317 101.0000 0
 383 93.8317 100.7500 0
 384 93.8317 100.5000 0
 385 93.8317 100.3375 0
 386 93.8317 100.1750 0
 387 93.8317 100.0124 0
 388 106.6250 100.1725 0
 389 106.6761 100.5000 0
 390 106.7419 101.0000 0
 391 106.8959 101.1770 0
 392 106.9562 101.3741 0
 393 107.0636 101.8317 0
 394 107.1459 102.2963 0
 395 107.2027 102.7664 0
 396 107.2333 103.2403 0
 397 107.2374 103.7164 0
 398 107.2057 104.1912 0
 399 107.2010 104.7364 0
 400 107.1510 105.3124 0
 401 107.0550 105.8824 0
 402 106.9136 106.4430 0
 403 106.7277 106.9904 0
 404 106.4985 107.5211 0
 405 106.2274 108.0318 0
 406 105.9164 108.5190 0
 407 105.5672 108.9798 0
 408 105.1823 109.4111 0
 409 104.7639 109.8101 0
 410 104.3150 110.1743 0
 411 103.8383 110.5013 0
 412 103.3369 110.7891 0

413	102.8140	111.0357	0
414	102.2731	111.2396	0
415	101.7175	111.3995	0
416	101.1509	111.5143	0
417	100.5770	111.5833	0
418	100.2884	111.6005	0
419	100.0000	111.6061	0
420	99.7116	111.6005	0
421	99.4230	111.5833	0
422	98.8491	111.5143	0
423	98.2825	111.3995	0
424	97.7269	111.2396	0
425	97.1860	111.0357	0
426	96.6631	110.7891	0
427	96.1617	110.5013	0
428	95.6850	110.1743	0
429	95.2361	109.8101	0
430	94.8177	109.4111	0
431	94.4328	108.9798	0
432	94.0836	108.5190	0
433	93.7726	108.0318	0
434	93.5015	107.5211	0
435	93.2723	106.9904	0
436	93.0864	106.4430	0
437	92.9450	105.8824	0
438	92.8490	105.3124	0
439	92.7990	104.7364	0
440	92.7943	104.1912	0
441	92.7626	103.7164	0
442	92.7667	103.2403	0
443	92.7973	102.7664	0
444	92.8541	102.2963	0
445	92.9364	101.8317	0
446	93.0438	101.3741	0
447	93.1041	101.1770	0
448	93.2581	101.0000	0
449	93.3239	100.5000	0
450	93.3750	100.1725	0
451	93.4317	99.8469	11
452	93.8317	99.8499	11
453	94.2428	99.5546	11
454	94.6681	99.2802	11
455	95.1681	98.9938	11
456	95.6981	98.7294	11
457	95.9441	98.6194	11
458	96.1928	98.5159	11
459	96.4442	98.4191	11
460	96.6981	98.3289	11
461	96.9453	98.2482	11

462	97.1945	98.1739	11
463	97.4455	98.1060	11
464	97.6981	98.0445	11
465	97.9475	97.9904	11
466	98.1959	97.9429	11
467	98.4476	97.9013	11
468	98.6981	97.8663	11
469	98.9473	97.8377	11
470	99.1972	97.8152	11
471	99.4475	97.7989	11
472	99.6981	97.7888	11
473	99.8490	97.7857	11
474	100.0000	97.7848	11
475	100.1510	97.7861	11
476	100.3019	97.7888	11
477	100.5525	97.7989	11
478	100.8028	97.8152	11
479	101.0527	97.8377	11
480	101.3019	97.8663	11
481	101.5524	97.9013	11
482	101.8041	97.9429	11
483	102.0525	97.9904	11
484	102.3019	98.0445	11
485	102.5545	98.1060	11
486	102.8055	98.1739	11
487	103.0547	98.2482	11
488	103.3019	98.3289	11
489	103.5558	98.4191	11
490	103.8072	98.5159	11
491	104.0559	98.6194	11
492	104.3019	98.7294	11
493	104.8319	98.9938	11
494	105.3319	99.2802	11
495	105.7572	99.5546	11
496	106.1683	99.8499	11
497	106.5683	99.8469	11
498	106.9683	99.8440	11
499	107.0250	100.0071	0
500	107.0816	100.1701	0
501	107.1327	100.3351	0
502	107.1838	100.5000	0
503	107.2528	100.7492	0
504	107.3155	101.0000	0
505	107.3256	101.0430	0
506	107.3354	101.0859	0
507	107.3491	101.1469	0
508	107.3624	101.2080	0
509	107.4117	101.4531	0
510	107.4549	101.6993	0
511	107.4921	101.9465	0
512	107.5231	102.1946	0
513	107.5480	102.4433	0

514	107.5667	102.6926	0
515	107.5793	102.9423	0
516	107.5857	103.1922	0
517	107.5859	103.4422	0
518	107.5799	103.6921	0
519	107.5677	103.9418	0
520	107.5494	104.1912	0
521	107.5427	104.4716	0
522	107.5256	104.7515	0
523	107.5055	105.0530	0
524	107.4734	105.3534	0
525	107.4292	105.6523	0
526	107.3730	105.9492	0
527	107.3050	106.2436	0
528	107.2252	106.5351	0
529	107.1338	106.8231	0
530	107.0310	107.1072	0
531	106.9168	107.3869	0
532	106.7914	107.6618	0
533	106.6552	107.9315	0
534	106.5082	108.1955	0
535	106.3507	108.4534	0
536	106.1831	108.7048	0
537	106.0054	108.9492	0
538	105.8182	109.1863	0
539	105.6215	109.4157	0
540	105.4158	109.6370	0
541	105.2014	109.8499	0
542	104.9787	110.0541	0
543	104.7479	110.2491	0
544	104.5094	110.4347	0
545	104.2638	110.6106	0
546	104.0112	110.7765	0
547	103.7522	110.9321	0
548	103.4872	111.0772	0
549	103.2166	111.2116	0
550	102.9408	111.3350	0
551	102.6602	111.4472	0
552	102.3754	111.5481	0
553	102.0868	111.6375	0
554	101.7948	111.7152	0
555	101.4999	111.7811	0
556	101.2026	111.8352	0
557	100.9034	111.8773	0
558	100.6028	111.9073	0
559	100.4520	111.9173	0
560	100.3012	111.9253	0
561	100.1506	111.9295	0
562	100.0000	111.9311	0
563	99.8494	111.9297	0

564	99.6988	111.9253	0
565	99.5479	111.9178	0
566	99.3972	111.9073	0
567	99.0966	111.8773	0
568	98.7974	111.8352	0
569	98.5001	111.7811	0
570	98.2052	111.7152	0
571	97.9132	111.6375	0
572	97.6246	111.5481	0
573	97.2833	111.4257	0
574	97.0592	111.3350	0
575	96.7834	111.2116	0
576	96.5128	111.0772	0
577	96.2478	110.9321	0
578	95.9888	110.7765	0
579	95.7362	110.6106	0
580	95.4906	110.4347	0
581	95.2521	110.2491	0
582	95.0213	110.0541	0
583	94.7986	109.8499	0
584	94.5842	109.6370	0
585	94.3785	109.4157	0
586	94.1818	109.1863	0
587	93.9946	108.9492	0
588	93.8169	108.7048	0
589	93.6493	108.4534	0
590	93.4918	108.1955	0
591	93.3448	107.9315	0
592	93.2086	107.6618	0
593	93.0832	107.3869	0
594	92.9690	107.1072	0
595	92.8662	106.8231	0
596	92.7748	106.5351	0
597	92.6950	106.2436	0
598	92.6270	105.9492	0
599	92.5708	105.6523	0
600	92.5266	105.3534	0
601	92.4945	105.0530	0
602	92.4744	104.7515	0
603	92.4573	104.4716	0
604	92.4506	104.1912	0
605	92.4323	103.9418	0
606	92.4201	103.6921	0
607	92.4141	103.4422	0
608	92.4143	103.1922	0
609	92.4207	102.9423	0
610	92.4333	102.6926	0
611	92.4520	102.4433	0
612	92.4769	102.1946	0
613	92.5079	101.9465	0

614	92.5451	101.6993	0
615	92.5883	101.4531	0
616	92.6376	101.2080	0
617	92.6509	101.1469	0
618	92.6646	101.0859	0
619	92.6744	101.0430	0
620	92.6845	101.0000	0
621	92.7472	100.7492	0
622	92.8162	100.5000	0
623	92.8673	100.3351	0
624	92.9184	100.1701	0
625	92.9750	100.0071	0
626	93.0317	99.8440	11

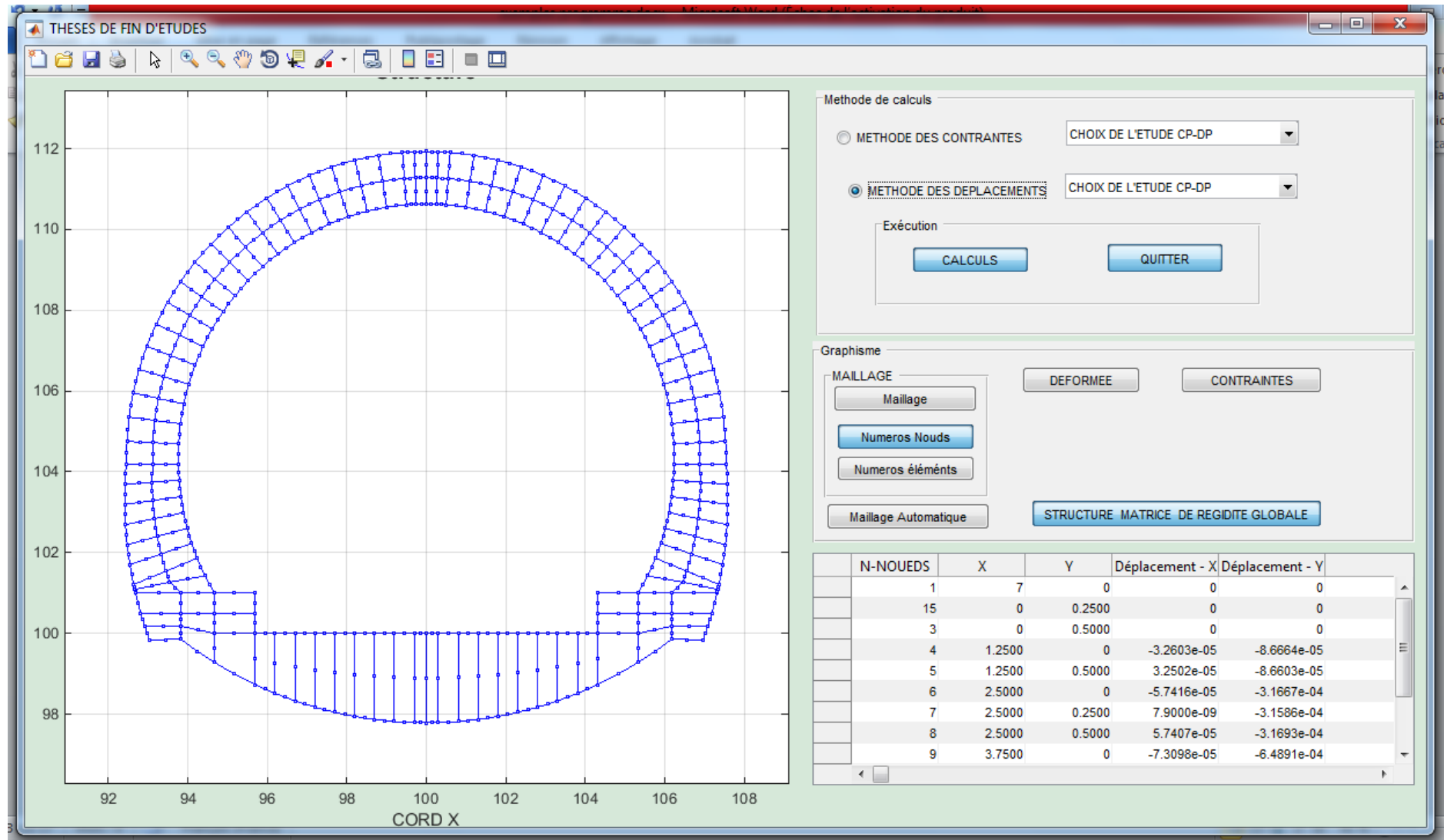
1	474	476	3	1	475	166	2	165	1	1	1	1.00
2	476	478	5	3	477	167	4	166	1	1	1	1.00
3	478	480	7	5	479	168	6	167	1	1	1	1.00
4	480	482	9	7	481	169	8	168	1	1	1	1.00
5	482	484	11	9	483	170	10	169	1	1	1	1.00
6	484	486	13	11	485	171	12	170	1	1	1	1.00
7	486	488	15	13	487	172	14	171	1	1	1	1.00
8	488	490	17	15	489	173	16	172	1	1	1	1.00
9	490	492	19	17	491	174	18	173	1	1	1	1.00
10	492	494	178	19	493	175	176	174	1	1	1	1.00
11	494	496	262	178	495	261	182	175	1	1	1	1.00
12	496	498	500	262	497	499	388	261	1	1	1	1.00
13	19	178	180	21	176	179	177	20	1	1	1	1.00
14	178	262	264	180	182	263	183	179	1	1	1	1.00
15	262	500	502	264	388	501	389	263	1	1	1	1.00
16	21	180	25	23	177	181	24	22	1	1	1	1.00
17	180	264	266	25	183	265	184	181	1	1	1	1.00
18	264	502	504	266	389	503	390	265	1	1	1	1.00
19	25	266	268	27	184	267	185	26	1	1	1	1.00
20	266	504	506	268	390	505	391	267	1	1	1	1.00
21	27	268	270	29	185	269	186	28	1	1	1	1.00
22	268	506	508	270	391	507	392	269	1	1	1	1.00
23	29	270	272	31	186	271	187	30	1	1	1	1.00
24	270	508	510	272	392	509	393	271	1	1	1	1.00
25	31	272	274	33	187	273	188	32	1	1	1	1.00
26	272	510	512	274	393	511	394	273	1	1	1	1.00
27	33	274	276	35	188	275	189	34	1	1	1	1.00
28	274	512	514	276	394	513	395	275	1	1	1	1.00
29	35	276	278	37	189	277	190	36	1	1	1	1.00
30	276	514	516	278	395	515	396	277	1	1	1	1.00
31	37	278	280	39	190	279	191	38	1	1	1	1.00
32	278	516	518	280	396	517	397	279	1	1	1	1.00
33	39	280	282	41	191	281	192	40	1	1	1	1.00
34	280	518	520	282	397	519	398	281	1	1	1	1.00
35	41	282	284	43	192	283	193	42	1	1	1	1.00
36	282	520	522	284	398	521	399	283	1	1	1	1.00
37	43	284	286	45	193	285	194	44	1	1	1	1.00
38	284	522	524	286	399	523	400	285	1	1	1	1.00
39	45	286	288	47	194	287	195	46	1	1	1	1.00

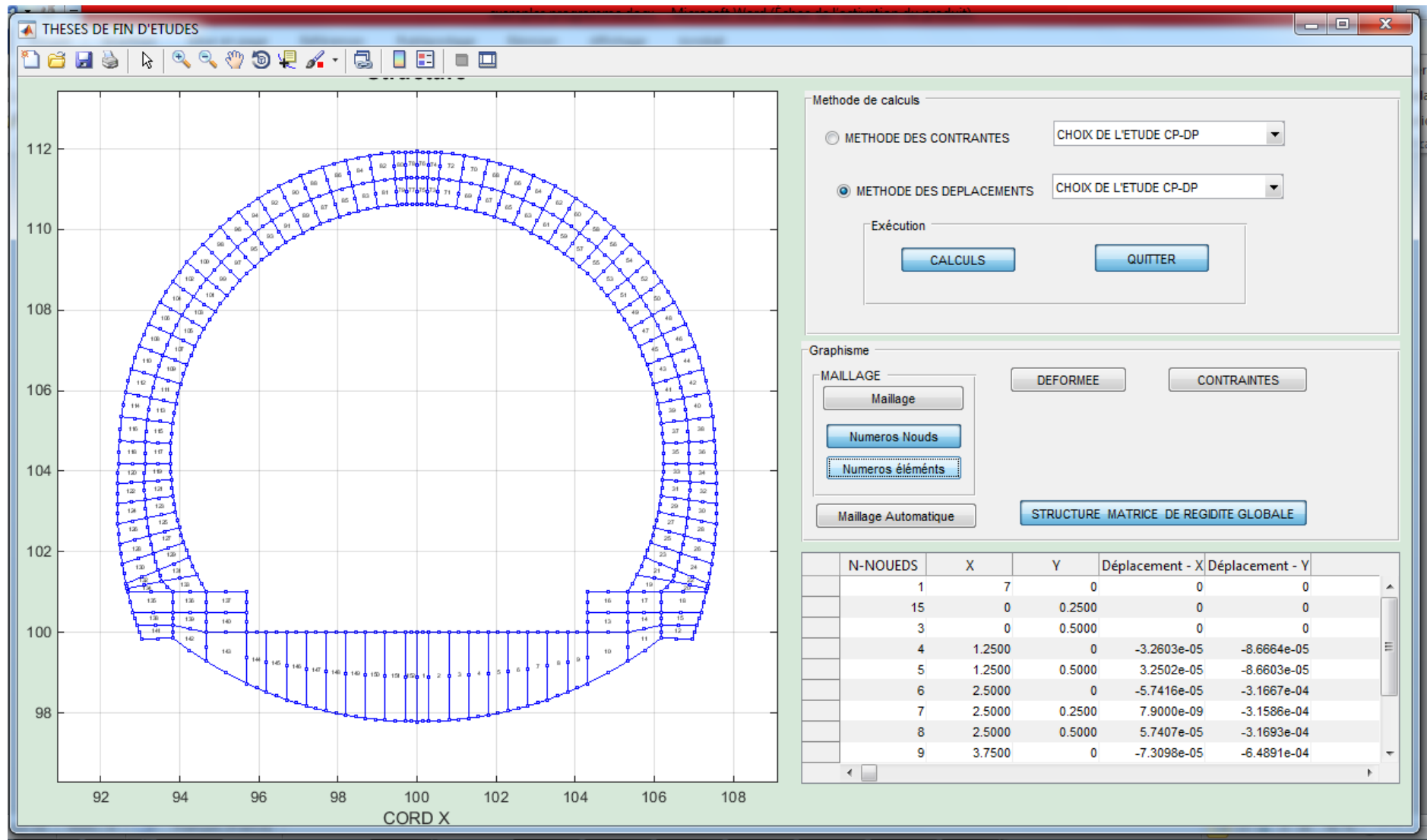
40	286	524	526	288	400	525	401	287	1	1	1	1.00
41	47	288	290	49	195	289	196	48	1	1	1	1.00
42	288	526	528	290	401	527	402	289	1	1	1	1.00
43	49	290	292	51	196	291	197	50	1	1	1	1.00
44	290	528	530	292	402	529	403	291	1	1	1	1.00
45	51	292	294	53	197	293	198	52	1	1	1	1.00
46	292	530	532	294	403	531	404	293	1	1	1	1.00
47	53	294	296	55	198	295	199	54	1	1	1	1.00
48	294	532	534	296	404	533	405	295	1	1	1	1.00
49	55	296	298	57	199	297	200	56	1	1	1	1.00
50	296	534	536	298	405	535	406	297	1	1	1	1.00
51	57	298	300	59	200	299	201	58	1	1	1	1.00
52	298	536	538	300	406	537	407	299	1	1	1	1.00
53	59	300	302	61	201	301	202	60	1	1	1	1.00
54	300	538	540	302	407	539	408	301	1	1	1	1.00
55	61	302	304	63	202	303	203	62	1	1	1	1.00
56	302	540	542	304	408	541	409	303	1	1	1	1.00
57	63	304	306	65	203	305	204	64	1	1	1	1.00
58	304	542	544	306	409	543	410	305	1	1	1	1.00
59	65	306	308	67	204	307	205	66	1	1	1	1.00
60	306	544	546	308	410	545	411	307	1	1	1	1.00
61	67	308	310	69	205	309	206	68	1	1	1	1.00
62	308	546	548	310	411	547	412	309	1	1	1	1.00
63	69	310	312	71	206	311	207	70	1	1	1	1.00
64	310	548	550	312	412	549	413	311	1	1	1	1.00
65	71	312	314	73	207	313	208	72	1	1	1	1.00
66	312	550	552	314	413	551	414	313	1	1	1	1.00
67	73	314	316	75	208	315	209	74	1	1	1	1.00
68	314	552	554	316	414	553	415	315	1	1	1	1.00
69	75	316	318	77	209	317	210	76	1	1	1	1.00
70	316	554	556	318	415	555	416	317	1	1	1	1.00
71	77	318	320	79	210	319	211	78	1	1	1	1.00
72	318	556	558	320	416	557	417	319	1	1	1	1.00
73	79	320	322	81	211	321	212	80	1	1	1	1.00
74	320	558	560	322	417	559	418	321	1	1	1	1.00
75	81	322	324	83	212	323	213	82	1	1	1	1.00
76	322	560	562	324	418	561	419	323	1	1	1	1.00
77	85	83	324	326	84	213	325	214	1	1	1	1.00
78	326	324	562	564	325	419	563	420	1	1	1	1.00
79	87	85	326	328	86	214	327	215	1	1	1	1.00
80	328	326	564	566	327	420	565	421	1	1	1	1.00
81	89	87	328	330	88	215	329	216	1	1	1	1.00
82	330	328	566	568	329	421	567	422	1	1	1	1.00
83	91	89	330	332	90	216	331	217	1	1	1	1.00
84	332	330	568	570	331	422	569	423	1	1	1	1.00
85	93	91	332	334	92	217	333	218	1	1	1	1.00
86	334	332	570	572	333	423	571	424	1	1	1	1.00
87	95	93	334	336	94	218	335	219	1	1	1	1.00
88	336	334	572	574	335	424	573	425	1	1	1	1.00
89	97	95	336	338	96	219	337	220	1	1	1	1.00
90	338	336	574	576	337	425	575	426	1	1	1	1.00

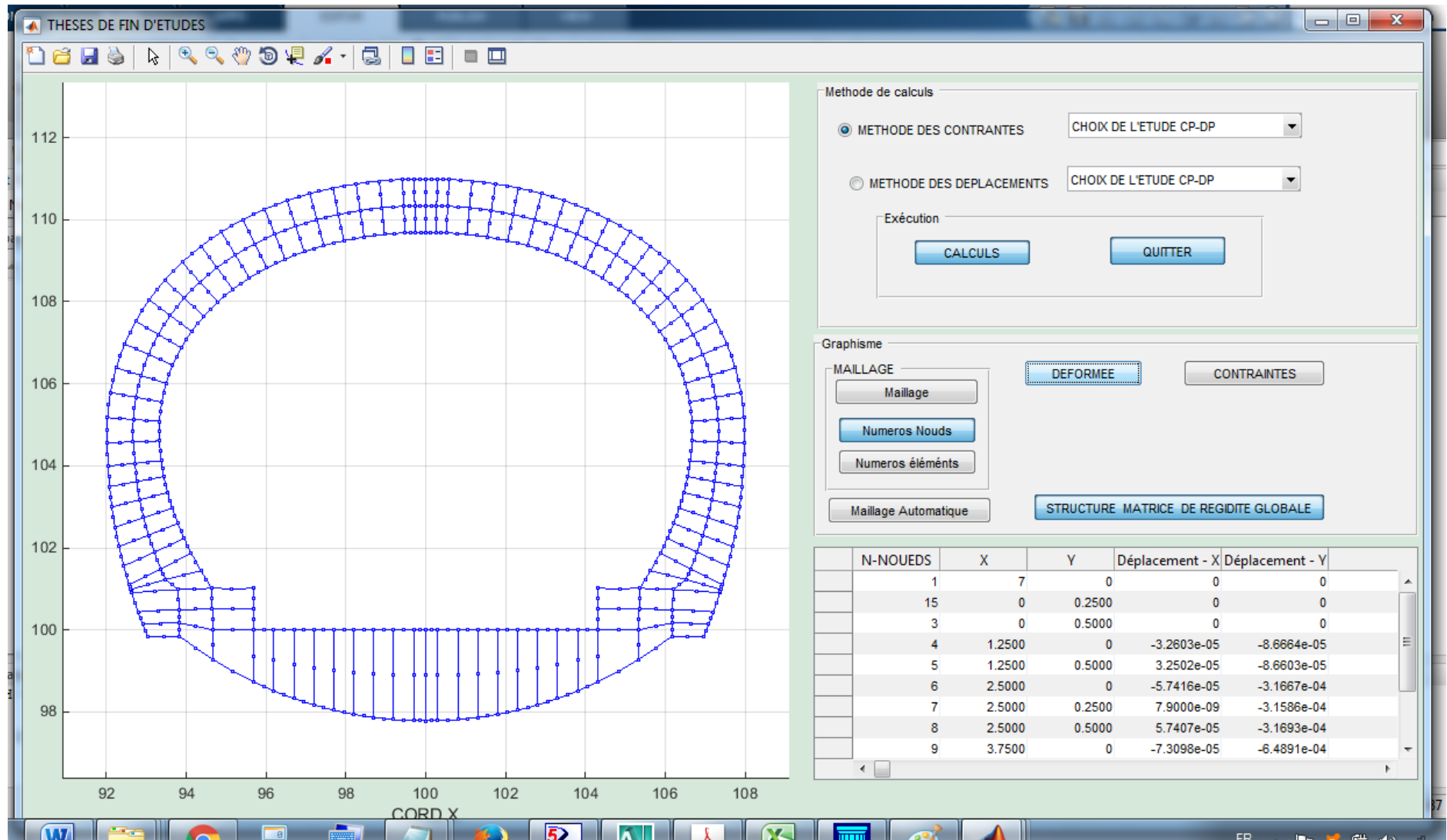
91	99	97	338	340	98	220	339	221	1	1	1	1.00
92	340	338	576	578	339	426	577	427	1	1	1	1.00
93	101	99	340	342	100	221	341	222	1	1	1	1.00
94	342	340	578	580	341	427	579	428	1	1	1	1.00
95	103	101	342	344	102	222	343	223	1	1	1	1.00
96	344	342	580	582	343	428	581	429	1	1	1	1.00
97	105	103	344	346	104	223	345	224	1	1	1	1.00
98	346	344	582	584	345	429	583	430	1	1	1	1.00
99	107	105	346	348	106	224	347	225	1	1	1	1.00
100	348	346	584	586	347	430	585	431	1	1	1	1.00
101	109	107	348	350	108	225	349	226	1	1	1	1.00
102	350	348	586	588	349	431	587	432	1	1	1	1.00
103	111	109	350	352	110	226	351	227	1	1	1	1.00
104	352	350	588	590	351	432	589	433	1	1	1	1.00
105	113	111	352	354	112	227	353	228	1	1	1	1.00
106	354	352	590	592	353	433	591	434	1	1	1	1.00
107	115	113	354	356	114	228	355	229	1	1	1	1.00
108	356	354	592	594	355	434	593	435	1	1	1	1.00
109	117	115	356	358	116	229	357	230	1	1	1	1.00
110	358	356	594	596	357	435	595	436	1	1	1	1.00
111	119	117	358	360	118	230	359	231	1	1	1	1.00
112	360	358	596	598	359	436	597	437	1	1	1	1.00
113	121	119	360	362	120	231	361	232	1	1	1	1.00
114	362	360	598	600	361	437	599	438	1	1	1	1.00
115	123	121	362	364	122	232	363	233	1	1	1	1.00
116	364	362	600	602	363	438	601	439	1	1	1	1.00
117	366	125	123	364	234	124	233	365	1	1	1	1.00
118	604	366	364	602	440	365	439	603	1	1	1	1.00
119	368	127	125	366	235	126	234	367	1	1	1	1.00
120	606	368	366	604	441	367	440	605	1	1	1	1.00
121	370	129	127	368	236	128	235	369	1	1	1	1.00
122	608	370	368	606	442	369	441	607	1	1	1	1.00
123	372	131	129	370	237	130	236	371	1	1	1	1.00
124	610	372	370	608	443	371	442	609	1	1	1	1.00
125	374	133	131	372	238	132	237	373	1	1	1	1.00
126	612	374	372	610	444	373	443	611	1	1	1	1.00
127	376	135	133	374	239	134	238	375	1	1	1	1.00
128	614	376	374	612	445	375	444	613	1	1	1	1.00
129	378	137	135	376	240	136	239	377	1	1	1	1.00
130	616	378	376	614	446	377	445	615	1	1	1	1.00
131	380	139	137	378	241	138	240	379	1	1	1	1.00
132	618	380	378	616	447	379	446	617	1	1	1	1.00
133	382	141	139	380	242	140	241	381	1	1	1	1.00
134	620	382	380	618	448	381	447	619	1	1	1	1.00
135	622	384	382	620	449	383	448	621	1	1	1	1.00
136	384	246	141	382	243	245	242	383	1	1	1	1.00
137	246	145	143	141	247	144	142	245	1	1	1	1.00
138	624	386	384	622	450	385	449	623	1	1	1	1.00
139	386	249	246	384	244	248	243	385	1	1	1	1.00
140	249	147	145	246	250	146	247	248	1	1	1	1.00
141	626	452	386	624	451	387	450	625	1	1	1	1.00
142	452	454	249	386	453	251	244	387	1	1	1	1.00
143	454	456	147	249	455	252	250	251	1	1	1	1.00

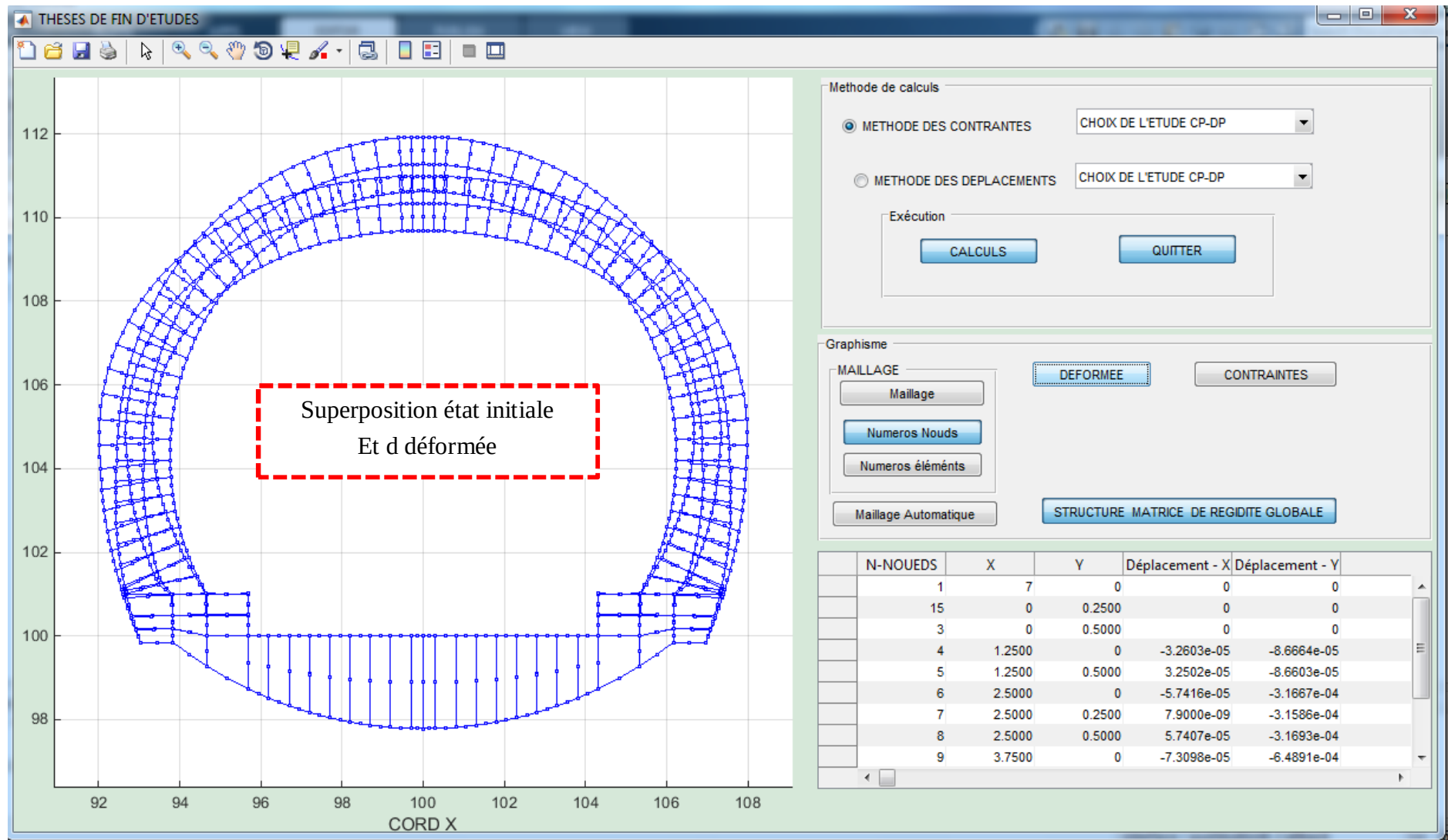
144	456	458	149	147	457	253	148	252	1	1	1	1.00
145	458	460	151	149	459	254	150	253	1	1	1	1.00
146	460	462	153	151	461	255	152	254	1	1	1	1.00
147	462	464	155	153	463	256	154	255	1	1	1	1.00
148	464	466	157	155	465	257	156	256	1	1	1	1.00
149	466	468	159	157	467	258	158	257	1	1	1	1.00
150	468	470	161	159	469	259	160	258	1	1	1	1.00
151	470	472	163	161	471	260	162	259	1	1	1	1.00
152	472	474	1	163	473	165	164	260	1	1	1	1.00
1	25000000.00											
1	25.00											
1	0.3											
0												

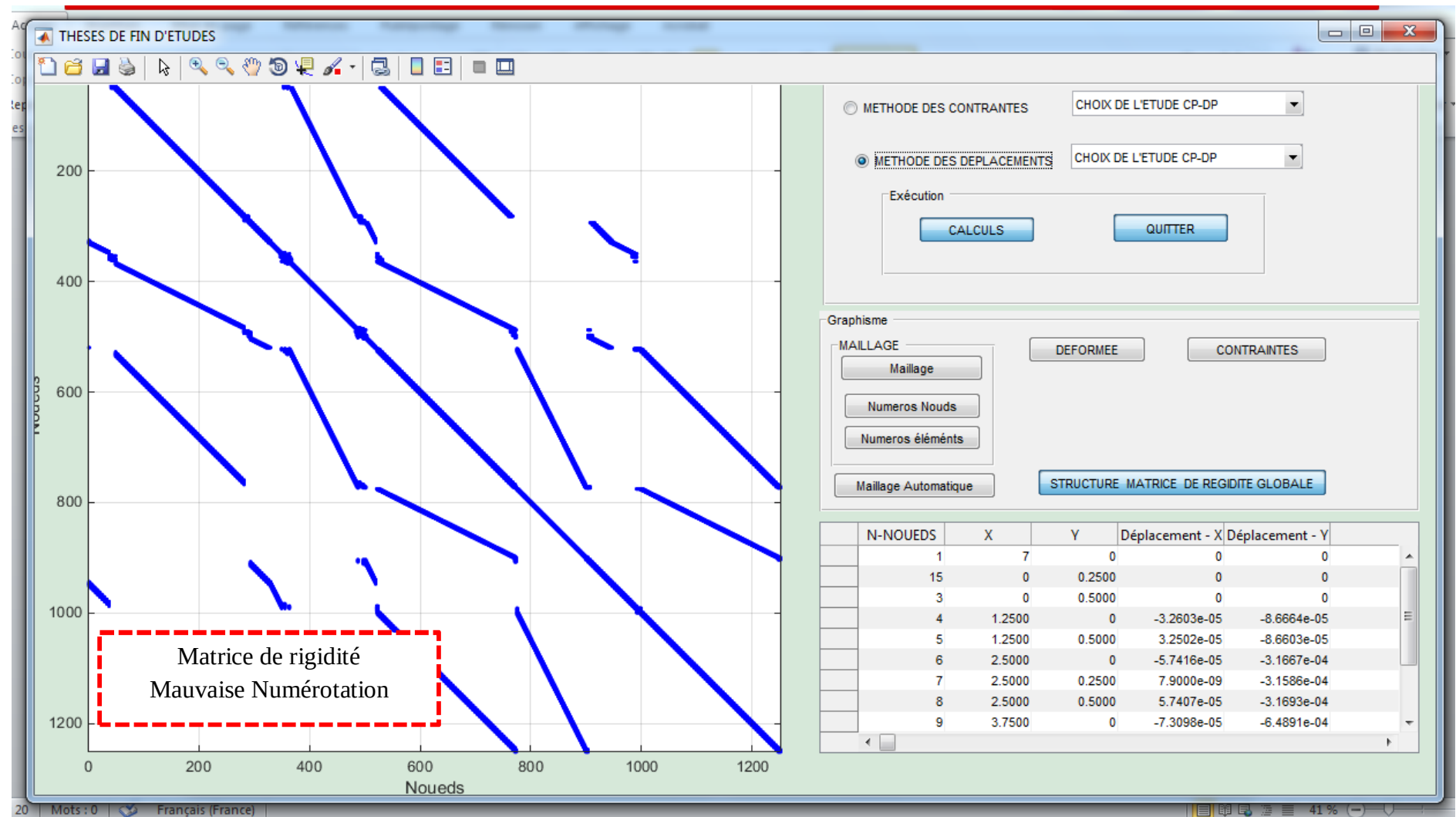
TUNNEL SOUMIS A SANS POIDS PROPRE DEFORMATIONS PLANES





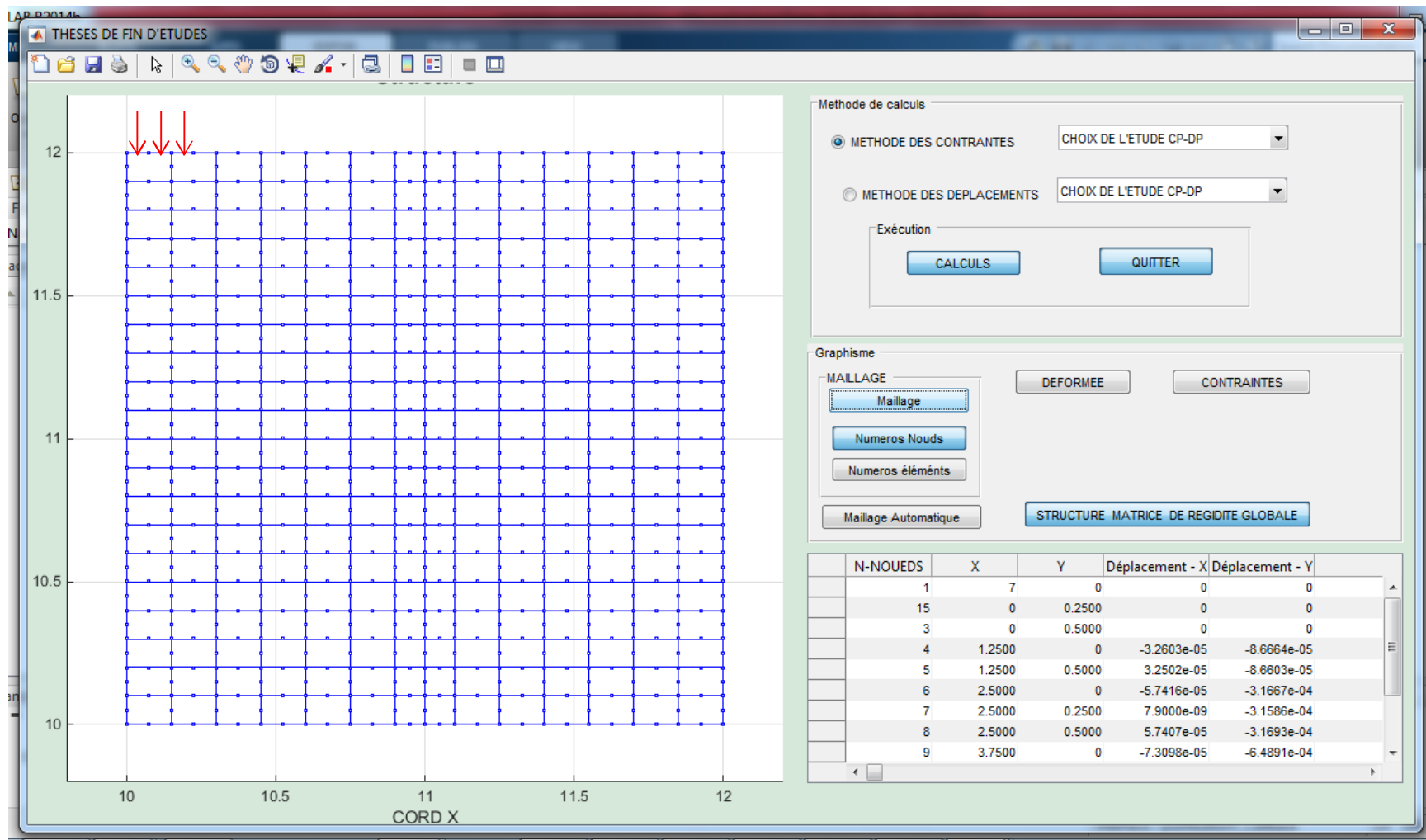


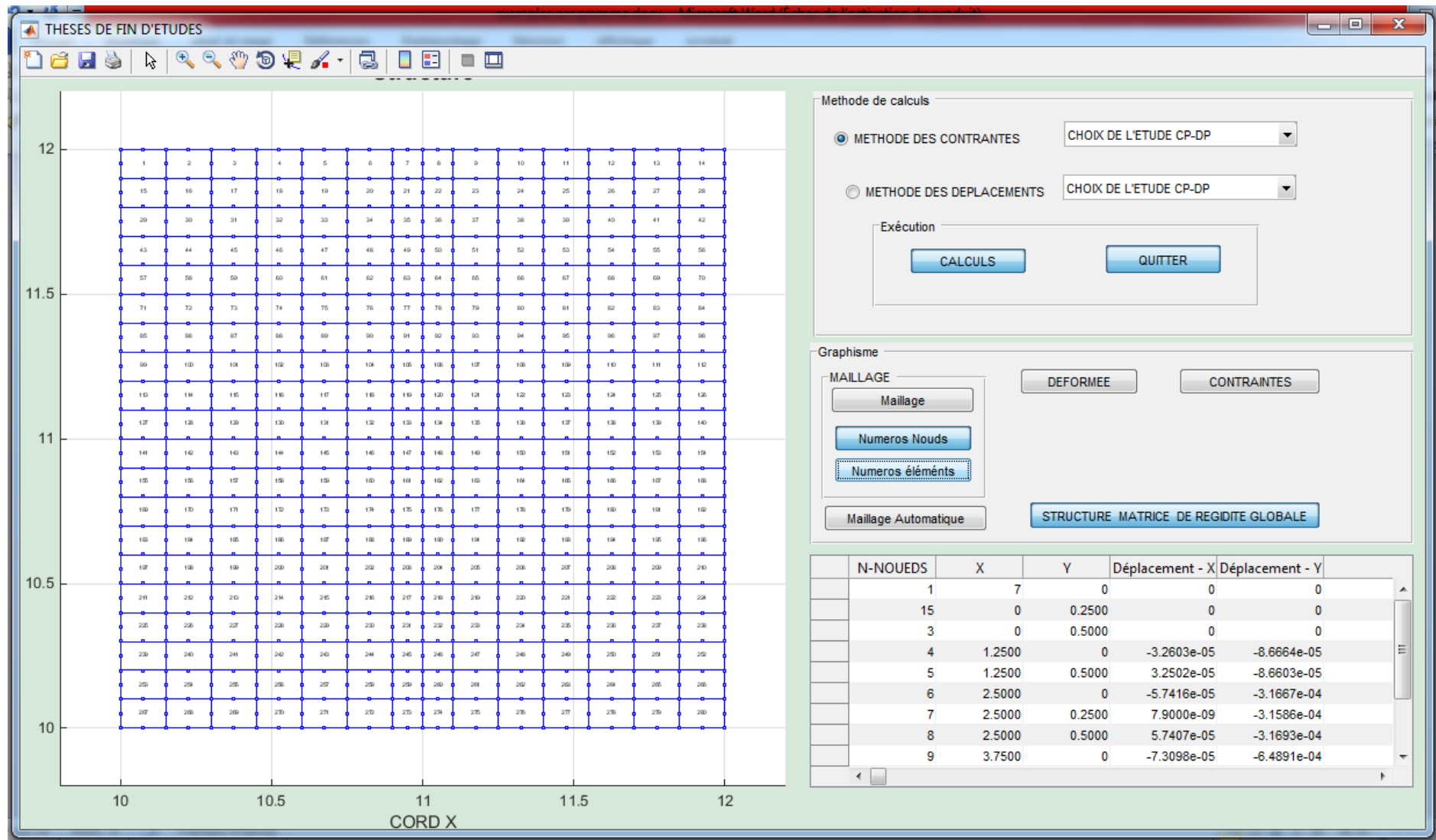


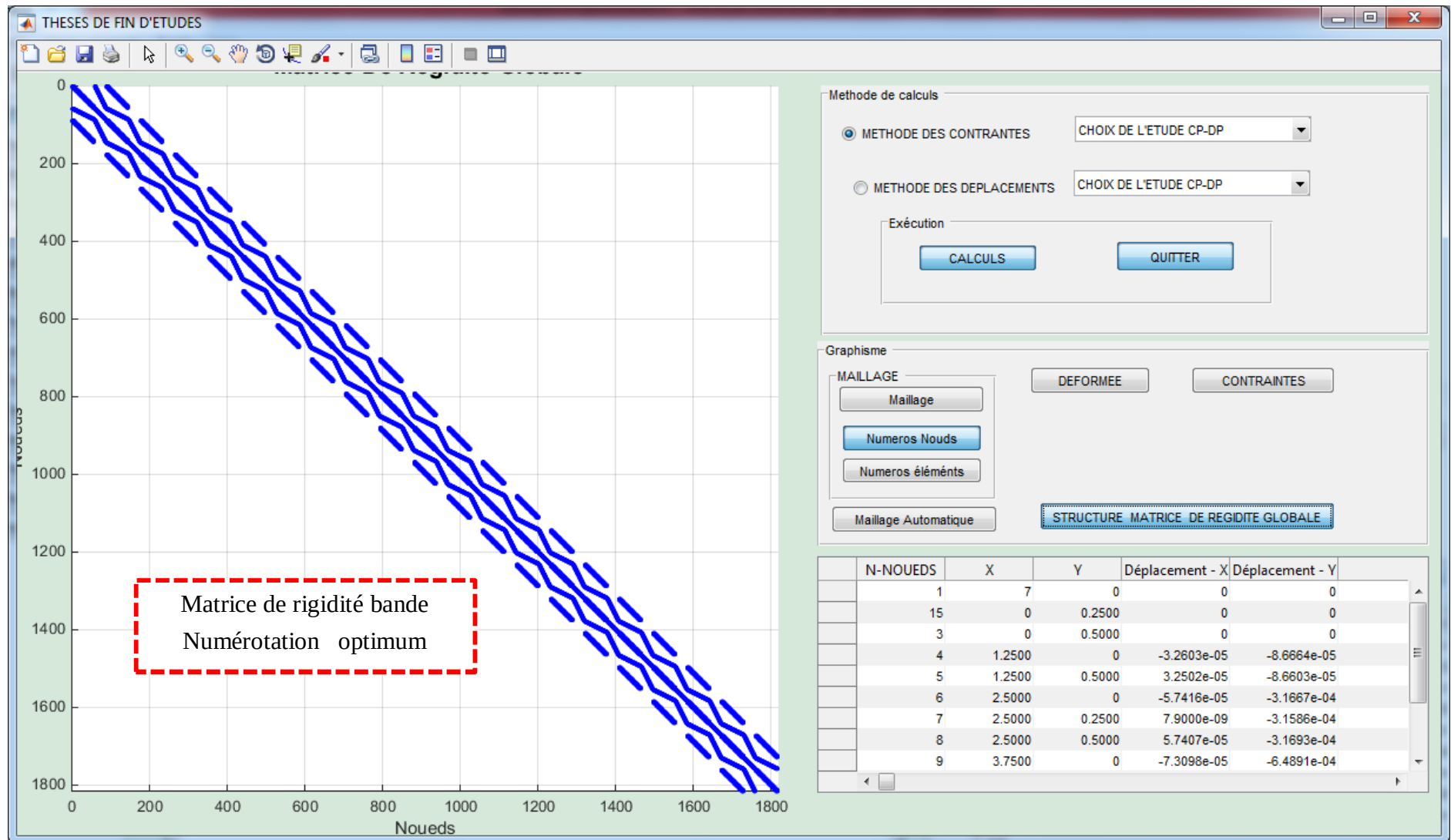


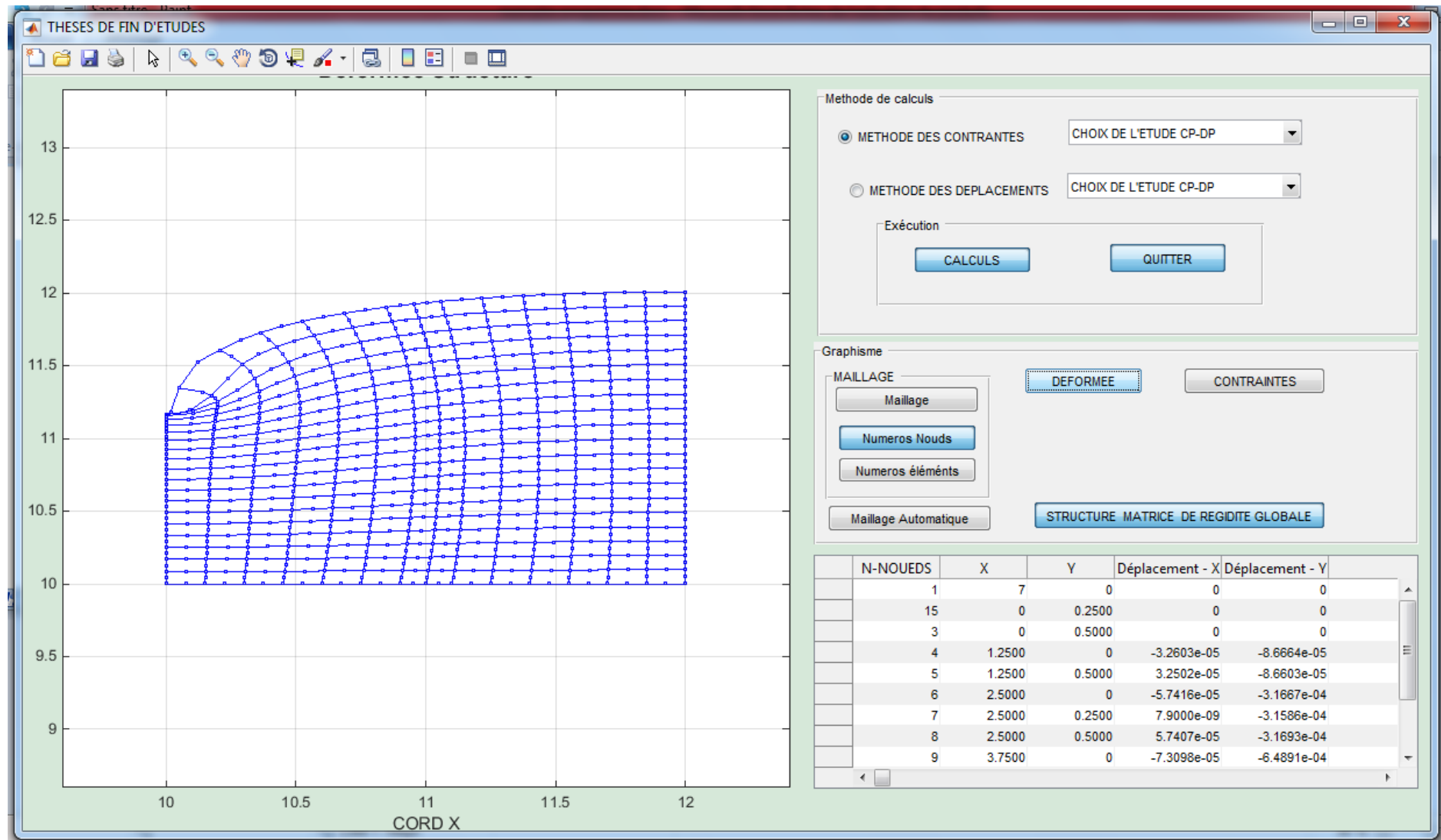
4.4.7. Exemple sol

SOL SOUMIS A UNE CHARGE REPARTIE DEFORMATIONS PLANES









4.4.8. Exemple plaque trouée

Fichier de données

500	144	1	1	1	
1	0.0000	0.0000	11		
2	0.0000	0.0136	11		
3	0.0000	0.0272	11		
4	0.0000	0.0371	11		
5	0.0000	0.0471	11		
6	0.0000	0.0596	11		
7	0.0000	0.0722	11		
8	0.0000	0.0861	11		
9	0.0000	0.1000	11		
10	0.0000	0.1139	11		
11	0.0000	0.1278	11		
12	0.0000	0.1404	11		
13	0.0000	0.1529	11		
14	0.0000	0.1629	11		
15	0.0000	0.1728	11		
16	0.0000	0.1864	11		
17	0.0000	0.2000	11		
18	0.0200	0.0000	0		
19	0.0200	0.0272	0		
20	0.0200	0.0471	0		
21	0.0200	0.0722	0		
22	0.0200	0.1000	0		
23	0.0200	0.1278	0		
24	0.0200	0.1529	0		
25	0.0200	0.1728	0		
26	0.0200	0.2000	0		
27	0.0400	0.0000	0		
28	0.0400	0.0136	0		
29	0.0400	0.0272	0		
30	0.0400	0.0371	0		
31	0.0400	0.0471	0		
32	0.0400	0.0596	0		
33	0.0400	0.0722	0		
34	0.0400	0.0861	0		
35	0.0400	0.1000	0		
36	0.0400	0.1139	0		
37	0.0400	0.1278	0		
38	0.0400	0.1404	0		
39	0.0400	0.1529	0		
40	0.0400	0.1629	0		
41	0.0400	0.1728	0		
42	0.0400	0.1864	0		
43	0.0400	0.2000	0		
44	0.0600	0.0000	0		

45	0.0600	0.0272	0
46	0.0600	0.0471	0
47	0.0600	0.0722	0
48	0.0600	0.1000	0
49	0.0600	0.1278	0
50	0.0600	0.1529	0
51	0.0600	0.1728	0
52	0.0600	0.2000	0
53	0.0800	0.0000	0
54	0.0800	0.0136	0
55	0.0800	0.0272	0
56	0.0800	0.0371	0
57	0.0800	0.0471	0
58	0.0800	0.0596	0
59	0.0800	0.0722	0
60	0.0800	0.0861	0
61	0.0800	0.1000	0
62	0.0800	0.1139	0
63	0.0800	0.1278	0
64	0.0800	0.1404	0
65	0.0800	0.1529	0
66	0.0800	0.1629	0
67	0.0800	0.1728	0
68	0.0800	0.1864	0
69	0.0800	0.2000	0
70	0.1000	0.0000	0
71	0.1000	0.0272	0
72	0.1000	0.0471	0
73	0.1000	0.0722	0
74	0.1000	0.1000	0
75	0.1000	0.1278	0
76	0.1000	0.1529	0
77	0.1000	0.1728	0
78	0.1000	0.2000	0
79	0.1200	0.0000	0
80	0.1200	0.0136	0
81	0.1200	0.0272	0
82	0.1200	0.0371	0
83	0.1200	0.0471	0
84	0.1200	0.0596	0
85	0.1200	0.0722	0
86	0.1200	0.0861	0
87	0.1200	0.1000	0
88	0.1200	0.1139	0
89	0.1200	0.1278	0
90	0.1200	0.1404	0
91	0.1200	0.1529	0
92	0.1200	0.1629	0
93	0.1200	0.1728	0
94	0.1200	0.1864	0
95	0.1200	0.2000	0
96	0.1400	0.0000	0
97	0.1400	0.0272	0
98	0.1400	0.0471	0

99	0.1400	0.0722	0
100	0.1400	0.1000	0
101	0.1400	0.1278	0
102	0.1400	0.1529	0
103	0.1400	0.1728	0
104	0.1400	0.2000	0
105	0.1600	0.0000	0
106	0.1600	0.0136	0
107	0.1600	0.0272	0
108	0.1600	0.0371	0
109	0.1600	0.0471	0
110	0.1600	0.0596	0
111	0.1600	0.0722	0
112	0.1600	0.0861	0
113	0.1600	0.1000	0
114	0.1600	0.1139	0
115	0.1600	0.1278	0
116	0.1600	0.1404	0
117	0.1600	0.1529	0
118	0.1600	0.1629	0
119	0.1600	0.1728	0
120	0.1600	0.1864	0
121	0.1600	0.2000	0
122	0.1800	0.0000	0
123	0.1800	0.0272	0
124	0.1800	0.0471	0
125	0.1800	0.0722	0
126	0.1800	0.1000	0
127	0.1800	0.1278	0
128	0.1800	0.1529	0
129	0.1800	0.1728	0
130	0.1800	0.2000	0
131	0.2000	0.0000	0
132	0.2000	0.0136	0
133	0.2000	0.0272	0
134	0.2000	0.0371	0
135	0.2000	0.0471	0
136	0.2000	0.0596	0
137	0.2000	0.0722	0
138	0.2000	0.0861	0
139	0.2000	0.1000	0
140	0.2000	0.1139	0
141	0.2000	0.1278	0
142	0.2000	0.1404	0
143	0.2000	0.1529	0
144	0.2000	0.1629	0
145	0.2000	0.1728	0
146	0.2000	0.1864	0
147	0.2000	0.2000	0
148	0.2235	0.0000	0
149	0.2235	0.0272	0
150	0.2136	0.0471	0
151	0.2072	0.0722	0
152	0.2050	0.1000	0

153	0.2072	0.1278	0
154	0.2136	0.1529	0
155	0.2235	0.1728	0
156	0.2235	0.2000	0
157	0.2471	0.0000	0
158	0.2471	0.0136	0
159	0.2471	0.0272	0
160	0.2364	0.0364	0
161	0.2272	0.0471	0
162	0.2198	0.0591	0
163	0.2144	0.0722	0
164	0.2111	0.0859	0
165	0.2100	0.1000	0
166	0.2111	0.1141	0
167	0.2144	0.1278	0
168	0.2198	0.1409	0
169	0.2272	0.1529	0
170	0.2364	0.1636	0
171	0.2471	0.1728	0
172	0.2471	0.1864	0
173	0.2471	0.2000	0
174	0.2596	0.0000	0
175	0.2591	0.0198	0
176	0.2530	0.0353	0
177	0.2353	0.0530	0
178	0.2239	0.0753	0
179	0.2200	0.1000	0
180	0.2239	0.1247	0
181	0.2353	0.1470	0
182	0.2530	0.1647	0
183	0.2591	0.1802	0
184	0.2596	0.2000	0
185	0.2722	0.0000	0
186	0.2722	0.0072	0
187	0.2722	0.0144	0
188	0.2753	0.0239	0
189	0.2784	0.0334	0
190	0.2682	0.0376	0
191	0.2589	0.0434	0
192	0.2505	0.0505	0
193	0.2434	0.0589	0
194	0.2376	0.0682	0
195	0.2334	0.0784	0
196	0.2309	0.0890	0
197	0.2300	0.1000	0
198	0.2309	0.1110	0
199	0.2334	0.1216	0
200	0.2376	0.1318	0
201	0.2434	0.1411	0
202	0.2505	0.1495	0
203	0.2589	0.1566	0
204	0.2682	0.1624	0
205	0.2784	0.1666	0
206	0.2753	0.1761	0

207	0.2722	0.1856	0
208	0.2722	0.1928	0
209	0.2722	0.2000	0
210	0.2861	0.0000	0
211	0.2859	0.0111	0
212	0.2890	0.0309	0
213	0.2815	0.0429	0
214	0.2647	0.0515	0
215	0.2515	0.0647	0
216	0.2429	0.0815	0
217	0.2400	0.1000	0
218	0.2429	0.1185	0
219	0.2515	0.1353	0
220	0.2647	0.1485	0
221	0.2815	0.1571	0
222	0.2890	0.1691	0
223	0.2859	0.1889	0
224	0.2861	0.2000	0
225	0.3000	0.0000	0
226	0.3000	0.0050	0
227	0.3000	0.0100	0
228	0.3000	0.0200	0
229	0.3000	0.0300	0
230	0.3000	0.0400	0
231	0.3000	0.0500	0
232	0.2922	0.0506	0
233	0.2845	0.0524	0
234	0.2773	0.0554	0
235	0.2706	0.0595	0
236	0.2646	0.0646	0
237	0.2595	0.0706	0
238	0.2554	0.0773	0
239	0.2524	0.0845	0
240	0.2506	0.0922	0
241	0.2500	0.1000	0
242	0.2506	0.1078	0
243	0.2524	0.1153	0
244	0.2554	0.1227	0
245	0.2595	0.1294	0
246	0.2646	0.1354	0
247	0.2706	0.1405	0
248	0.2773	0.1446	0
249	0.2845	0.1476	0
250	0.2922	0.1494	0
251	0.3000	0.1500	0
252	0.3000	0.1600	0
253	0.3000	0.1700	0
254	0.3000	0.1800	0
255	0.3000	0.1900	0
256	0.3000	0.1950	0
257	0.3000	0.2000	0
258	0.3139	0.2000	0
259	0.3141	0.1889	0
260	0.3110	0.1691	0

261	0.3078	0.1494	0
262	0.3155	0.1476	0
263	0.3227	0.1446	0
264	0.3294	0.1405	0
265	0.3354	0.1354	0
266	0.3405	0.1294	0
267	0.3446	0.1227	0
268	0.3476	0.1155	0
269	0.3494	0.1078	0
270	0.3500	0.1000	0
271	0.3494	0.0922	0
272	0.3476	0.0845	0
273	0.3446	0.0773	0
274	0.3405	0.0706	0
275	0.3354	0.0646	0
276	0.3294	0.0595	0
277	0.3227	0.0554	0
278	0.3155	0.0524	0
279	0.3078	0.0506	0
280	0.3110	0.0309	0
281	0.3141	0.0111	0
282	0.3139	0.0000	0
283	0.3278	0.0000	0
284	0.3278	0.0072	0
285	0.3278	0.0144	0
286	0.3247	0.0239	0
287	0.3216	0.0334	0
288	0.3185	0.0429	0
289	0.3353	0.0515	0
290	0.3485	0.0647	0
291	0.3571	0.0815	0
292	0.3600	0.1000	0
293	0.3571	0.1185	0
294	0.3485	0.1353	0
295	0.3353	0.1485	0
296	0.3185	0.1571	0
297	0.3216	0.1666	0
298	0.3247	0.1761	0
299	0.3278	0.1856	0
300	0.3278	0.1928	0
301	0.3278	0.2000	0
302	0.3404	0.2000	0
303	0.3409	0.1802	0
304	0.3318	0.1624	0
305	0.3411	0.1566	0
306	0.3495	0.1495	0
307	0.3566	0.1411	0
308	0.3624	0.1318	0
309	0.3666	0.1216	0
310	0.3691	0.1110	0
311	0.3700	0.1000	0
312	0.3691	0.0890	0
313	0.3666	0.0784	0
314	0.3624	0.0682	0

315	0.3566	0.0589	0
316	0.3495	0.0505	0
317	0.3411	0.0434	0
318	0.3318	0.0376	0
319	0.3409	0.0198	0
320	0.3404	0.0000	0
321	0.3529	0.0000	0
322	0.3529	0.0136	0
323	0.3529	0.0272	0
324	0.3470	0.0353	0
325	0.3647	0.0530	0
326	0.3761	0.0753	0
327	0.3800	0.1000	0
328	0.3761	0.1247	0
329	0.3647	0.1470	0
330	0.3470	0.1647	0
331	0.3529	0.1728	0
332	0.3529	0.1864	0
333	0.3529	0.2000	0
334	0.3765	0.2000	0
335	0.3636	0.1636	0
336	0.3728	0.1529	0
337	0.3802	0.1409	0
338	0.3856	0.1278	0
339	0.3889	0.1141	0
340	0.3900	0.1000	0
341	0.3889	0.0859	0
342	0.3856	0.0722	0
343	0.3802	0.0591	0
344	0.3728	0.0471	0
345	0.3636	0.0364	0
346	0.3765	0.0000	0
347	0.3765	0.0272	0
348	0.3864	0.0471	0
349	0.3928	0.0722	0
350	0.3950	0.1000	0
351	0.3928	0.1278	0
352	0.3864	0.1529	0
353	0.3765	0.1728	0
354	0.4000	0.0000	0
355	0.4000	0.0136	0
356	0.4000	0.0272	0
357	0.4000	0.0371	0
358	0.4000	0.0471	0
359	0.4000	0.0596	0
360	0.4000	0.0722	0
361	0.4000	0.0861	0
362	0.4000	0.1000	0
363	0.4000	0.1139	0
364	0.4000	0.1278	0
365	0.4000	0.1404	0
366	0.4000	0.1529	0
367	0.4000	0.1629	0
368	0.4000	0.1728	0

369	0.4000	0.1864	0
370	0.4000	0.2000	0
371	0.4200	0.0000	0
372	0.4200	0.0272	0
373	0.4200	0.0471	0
374	0.4200	0.0722	0
375	0.4200	0.1000	0
376	0.4200	0.1278	0
377	0.4200	0.1529	0
378	0.4200	0.1728	0
379	0.4200	0.2000	0
380	0.4400	0.0000	0
381	0.4400	0.0136	0
382	0.4400	0.0272	0
383	0.4400	0.0371	0
384	0.4400	0.0471	0
385	0.4400	0.0596	0
386	0.4400	0.0722	0
387	0.4400	0.0861	0
388	0.4400	0.1000	0
389	0.4400	0.1139	0
390	0.4400	0.1278	0
391	0.4400	0.1404	0
392	0.4400	0.1529	0
393	0.4400	0.1629	0
394	0.4400	0.1728	0
395	0.4400	0.1864	0
396	0.4400	0.2000	0
397	0.4600	0.0000	0
398	0.4600	0.0272	0
399	0.4600	0.0471	0
400	0.4600	0.0722	0
401	0.4600	0.1000	0
402	0.4600	0.1278	0
403	0.4600	0.1529	0
404	0.4600	0.1728	0
405	0.4600	0.2000	0
406	0.4800	0.0000	0
407	0.4800	0.0136	0
408	0.4800	0.0272	0
409	0.4800	0.0371	0
410	0.4800	0.0471	0
411	0.4800	0.0596	0
412	0.4800	0.0722	0
413	0.4800	0.0861	0
414	0.4800	0.1000	0
415	0.4800	0.1139	0
416	0.4800	0.1278	0
417	0.4800	0.1404	0
418	0.4800	0.1529	0
419	0.4800	0.1629	0
420	0.4800	0.1728	0
421	0.4800	0.1864	0
422	0.4800	0.2000	0

423	0.5000	0.0000	0
424	0.5000	0.0272	0
425	0.5000	0.0471	0
426	0.5000	0.0722	0
427	0.5000	0.1000	0
428	0.5000	0.1278	0
429	0.5000	0.1529	0
430	0.5000	0.1728	0
431	0.5000	0.2000	0
432	0.5200	0.0000	0
433	0.5200	0.0136	0
434	0.5200	0.0272	0
435	0.5200	0.0371	0
436	0.5200	0.0471	0
437	0.5200	0.0596	0
438	0.5200	0.0722	0
439	0.5200	0.0861	0
440	0.5200	0.1000	0
441	0.5200	0.1139	0
442	0.5200	0.1278	0
443	0.5200	0.1404	0
444	0.5200	0.1529	0
445	0.5200	0.1629	0
446	0.5200	0.1728	0
447	0.5200	0.1864	0
448	0.5200	0.2000	0
449	0.5400	0.0000	0
450	0.5400	0.0272	0
451	0.5400	0.0471	0
452	0.5400	0.0722	0
453	0.5400	0.1000	0
454	0.5400	0.1278	0
455	0.5400	0.1529	0
456	0.5400	0.1728	0
457	0.5400	0.2000	0
458	0.5600	0.0000	0
459	0.5600	0.0136	0
460	0.5600	0.0272	0
461	0.5600	0.0371	0
462	0.5600	0.0471	0
463	0.5600	0.0596	0
464	0.5600	0.0722	0
465	0.5600	0.0861	0
466	0.5600	0.1000	0
467	0.5600	0.1139	0
468	0.5600	0.1278	0
469	0.5600	0.1404	0
470	0.5600	0.1529	0
471	0.5600	0.1629	0
472	0.5600	0.1728	0
473	0.5600	0.1864	0
474	0.5600	0.2000	0
475	0.5800	0.0000	0
476	0.5800	0.0272	0

477	0.5800	0.0471	0
478	0.5800	0.0722	0
479	0.5800	0.1000	0
480	0.5800	0.1278	0
481	0.5800	0.1529	0
482	0.5800	0.1728	0
483	0.5800	0.2000	0
484	0.6000	0.0000	0
485	0.6000	0.0136	0
486	0.6000	0.0272	0
487	0.6000	0.0371	0
488	0.6000	0.0471	0
489	0.6000	0.0596	0
490	0.6000	0.0722	0
491	0.6000	0.0861	0
492	0.6000	0.1000	0
493	0.6000	0.1139	0
494	0.6000	0.1278	0
495	0.6000	0.1404	0
496	0.6000	0.1529	0
497	0.6000	0.1629	0
498	0.6000	0.1728	0
499	0.6000	0.1864	0
500	0.6000	0.2000	0

1	1	27	29	3	18	28	19	2	1	1	1	0.0100
2	3	29	31	5	19	30	20	4	1	1	1	0.0100
3	5	31	33	7	20	32	21	6	1	1	1	0.0100
4	7	33	35	9	21	34	22	8	1	1	1	0.0100
5	9	35	37	11	22	36	23	10	1	1	1	0.0100
6	11	37	39	13	23	38	24	12	1	1	1	0.0100
7	13	39	41	15	24	40	25	14	1	1	1	0.0100
8	15	41	43	17	25	42	26	16	1	1	1	0.0100
9	27	53	55	29	44	54	45	28	1	1	1	0.0100
10	29	55	57	31	45	56	46	30	1	1	1	0.0100
11	31	57	59	33	46	58	47	32	1	1	1	0.0100
12	33	59	61	35	47	60	48	34	1	1	1	0.0100
13	35	61	63	37	48	62	49	36	1	1	1	0.0100
14	37	63	65	39	49	64	50	38	1	1	1	0.0100
15	39	65	67	41	50	66	51	40	1	1	1	0.0100
16	41	67	69	43	51	68	52	42	1	1	1	0.0100
17	53	79	81	55	70	80	71	54	1	1	1	0.0100
18	55	81	83	57	71	82	72	56	1	1	1	0.0100
19	57	83	85	59	72	84	73	58	1	1	1	0.0100
20	59	85	87	61	73	86	74	60	1	1	1	0.0100
21	61	87	89	63	74	88	75	62	1	1	1	0.0100
22	63	89	91	65	75	90	76	64	1	1	1	0.0100
23	65	91	93	67	76	92	77	66	1	1	1	0.0100
24	67	93	95	69	77	94	78	68	1	1	1	0.0100
25	79	105	107	81	96	106	97	80	1	1	1	0.0100
26	81	107	109	83	97	108	98	82	1	1	1	0.0100
27	83	109	111	85	98	110	99	84	1	1	1	0.0100
28	85	111	113	87	99	112	100	86	1	1	1	0.0100
29	87	113	115	89	100	114	101	88	1	1	1	0.0100
30	89	115	117	91	101	116	102	90	1	1	1	0.0100
31	91	117	119	93	102	118	103	92	1	1	1	0.0100
32	93	119	121	95	103	120	104	94	1	1	1	0.0100
33	105	131	133	107	122	132	123	106	1	1	1	0.0100

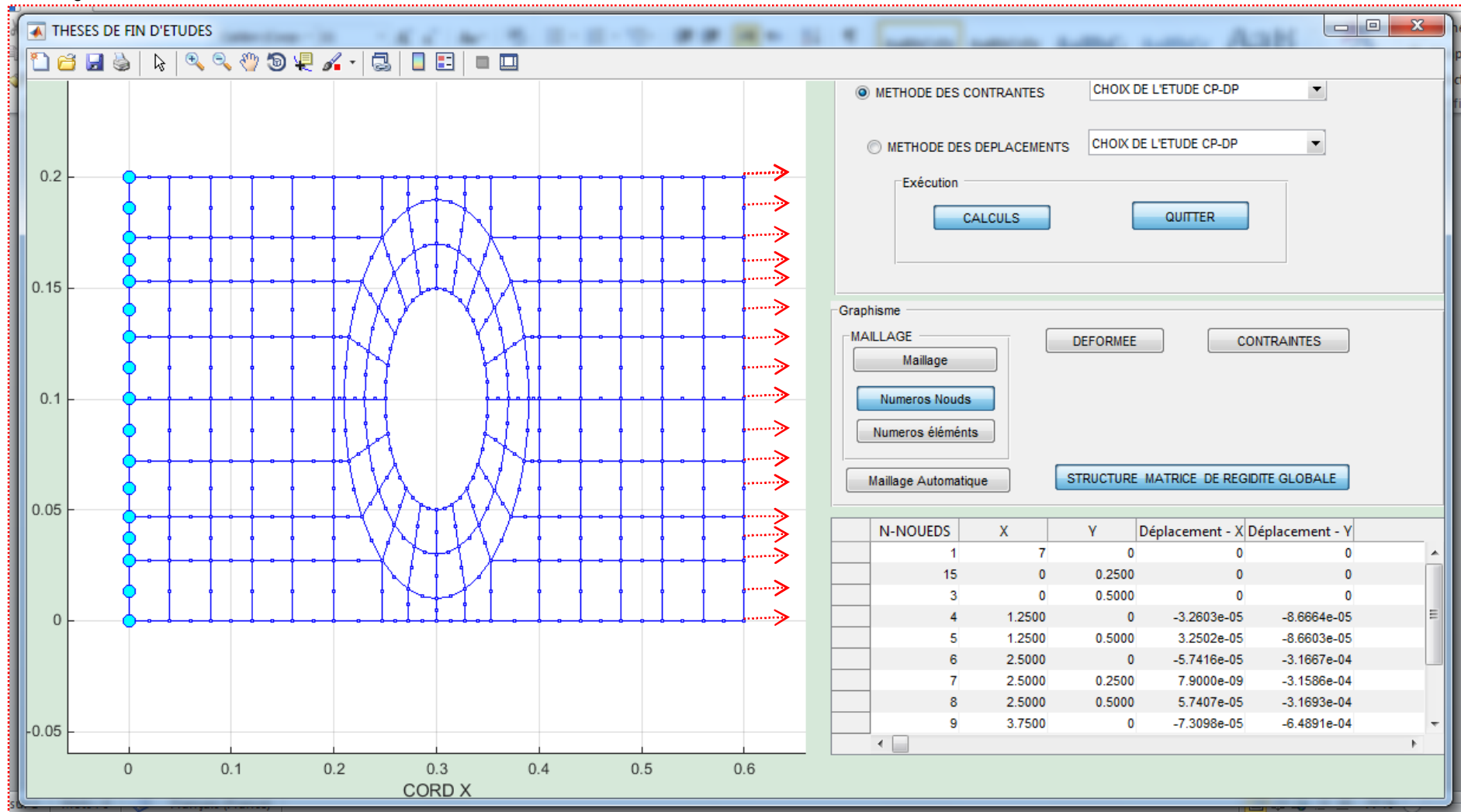
34	107	133	135	109	123	134	124	108	1	1	1	0.0100
35	109	135	137	111	124	136	125	110	1	1	1	0.0100
36	111	137	139	113	125	138	126	112	1	1	1	0.0100
37	113	139	141	115	126	140	127	114	1	1	1	0.0100
38	115	141	143	117	127	142	128	116	1	1	1	0.0100
39	117	143	145	119	128	144	129	118	1	1	1	0.0100
40	119	145	147	121	129	146	130	120	1	1	1	0.0100
41	131	157	159	133	148	158	149	132	1	1	1	0.0100
42	133	159	161	135	149	160	150	134	1	1	1	0.0100
43	135	161	163	137	150	162	151	136	1	1	1	0.0100
44	137	163	165	139	151	164	152	138	1	1	1	0.0100
45	139	165	167	141	152	166	153	140	1	1	1	0.0100
46	141	167	169	143	153	168	154	142	1	1	1	0.0100
47	143	169	171	145	154	170	155	144	1	1	1	0.0100
48	145	171	173	147	155	172	156	146	1	1	1	0.0100
49	157	185	187	159	174	186	175	158	1	1	1	0.0100
50	185	225	227	187	210	226	211	186	1	1	1	0.0100
51	225	283	285	227	282	284	281	226	1	1	1	0.0100
52	283	321	323	285	320	322	319	284	1	1	1	0.0100
53	321	354	356	323	346	355	347	322	1	1	1	0.0100
54	323	356	358	344	347	357	348	345	1	1	1	0.0100
55	344	358	360	342	348	359	349	343	1	1	1	0.0100
56	342	360	362	340	349	361	350	341	1	1	1	0.0100
57	340	362	364	338	350	363	351	339	1	1	1	0.0100
58	338	364	366	336	351	365	352	337	1	1	1	0.0100
59	336	366	368	331	352	367	353	335	1	1	1	0.0100
60	331	368	370	333	353	369	334	332	1	1	1	0.0100
61	299	331	333	301	303	332	302	300	1	1	1	0.0100
62	255	299	301	257	259	300	258	256	1	1	1	0.0100
63	207	255	257	209	223	256	224	208	1	1	1	0.0100
64	171	207	209	173	183	208	184	172	1	1	1	0.0100
65	163	195	197	165	178	196	179	164	1	1	1	0.0100
66	165	197	199	167	179	198	180	166	1	1	1	0.0100
67	197	241	243	199	217	242	218	198	1	1	1	0.0100

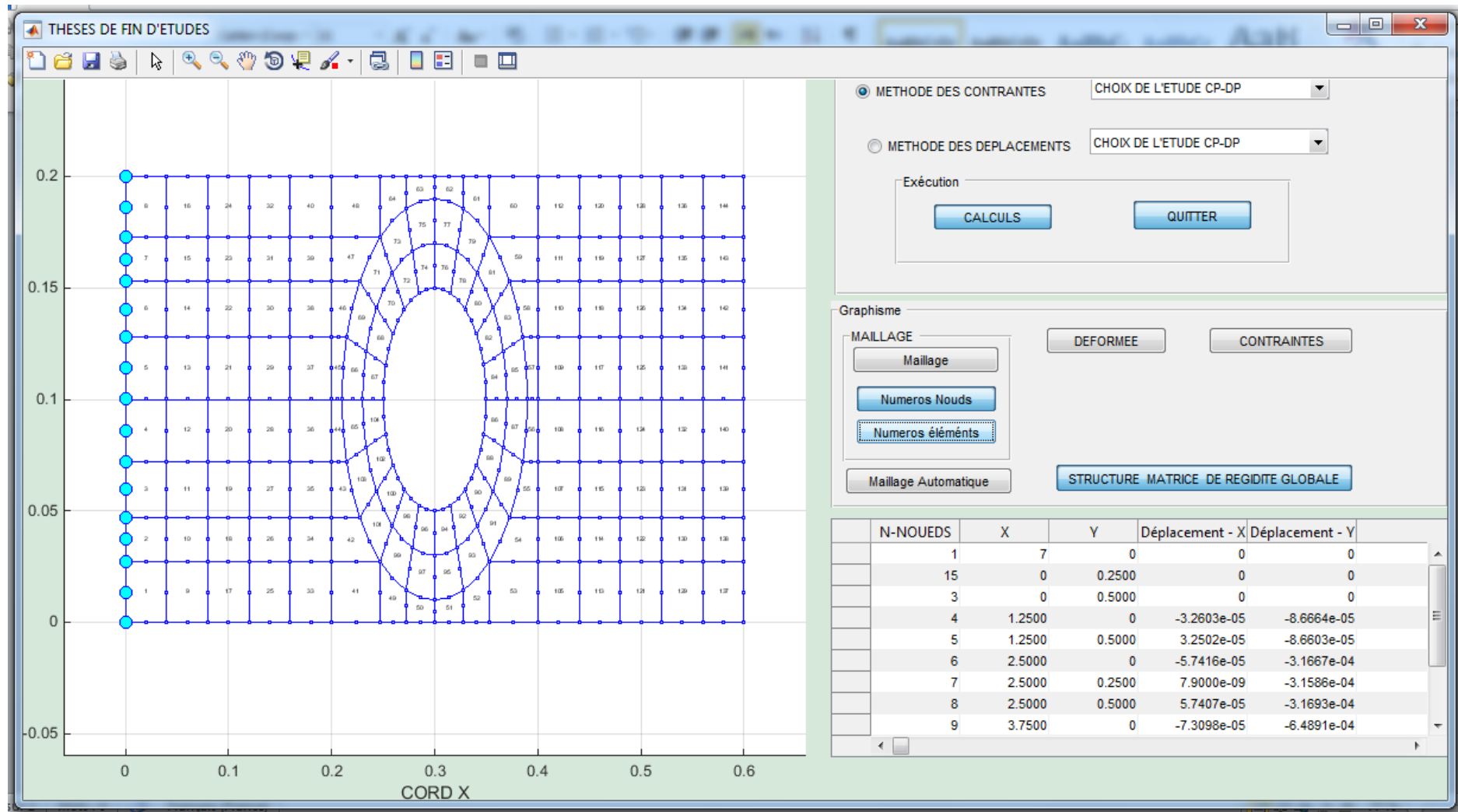
68	199	243	245	201	218	244	219	200	1	1	1	0.0100
69	167	199	201	169	180	200	181	168	1	1	1	0.0100
70	201	245	247	203	219	246	220	202	1	1	1	0.0100
71	169	201	203	171	181	202	182	170	1	1	1	0.0100
72	247	249	205	203	248	221	204	220	1	1	1	0.0100
73	203	205	207	171	204	206	183	182	1	1	1	0.0100
74	249	251	253	205	250	252	222	221	1	1	1	0.0100
75	205	253	255	207	222	254	223	206	1	1	1	0.0100
76	251	262	297	253	261	296	260	252	1	1	1	0.0100
77	253	297	299	255	260	298	259	254	1	1	1	0.0100
78	262	264	305	297	263	295	304	296	1	1	1	0.0100
79	297	305	331	299	304	330	303	298	1	1	1	0.0100
80	266	307	305	264	294	306	295	265	1	1	1	0.0100
81	307	336	331	305	329	335	330	306	1	1	1	0.0100
82	268	309	307	266	293	308	294	267	1	1	1	0.0100
83	309	338	336	307	328	337	329	308	1	1	1	0.0100
84	270	311	309	268	292	310	293	269	1	1	1	0.0100
85	311	340	338	309	327	339	328	310	1	1	1	0.0100
86	272	313	311	270	291	312	292	271	1	1	1	0.0100
87	313	342	340	311	326	341	327	312	1	1	1	0.0100
88	315	313	272	274	314	291	273	290	1	1	1	0.0100
89	315	344	342	313	325	343	326	314	1	1	1	0.0100
90	317	315	274	276	316	290	275	289	1	1	1	0.0100
91	323	344	315	317	345	325	316	324	1	1	1	0.0100
92	287	317	276	278	318	289	277	288	1	1	1	0.0100
93	285	323	317	287	319	324	318	286	1	1	1	0.0100
94	229	287	278	231	280	288	279	230	1	1	1	0.0100
95	227	285	287	229	281	286	280	228	1	1	1	0.0100
96	189	229	231	233	212	230	232	213	1	1	1	0.0100
97	187	227	229	189	211	228	212	188	1	1	1	0.0100
98	191	189	233	235	190	213	234	214	1	1	1	0.0100
99	159	187	189	191	175	188	190	176	1	1	1	0.0100
100	191	235	237	193	214	236	215	192	1	1	1	0.0100
101	159	191	193	161	176	192	177	160	1	1	1	0.0100

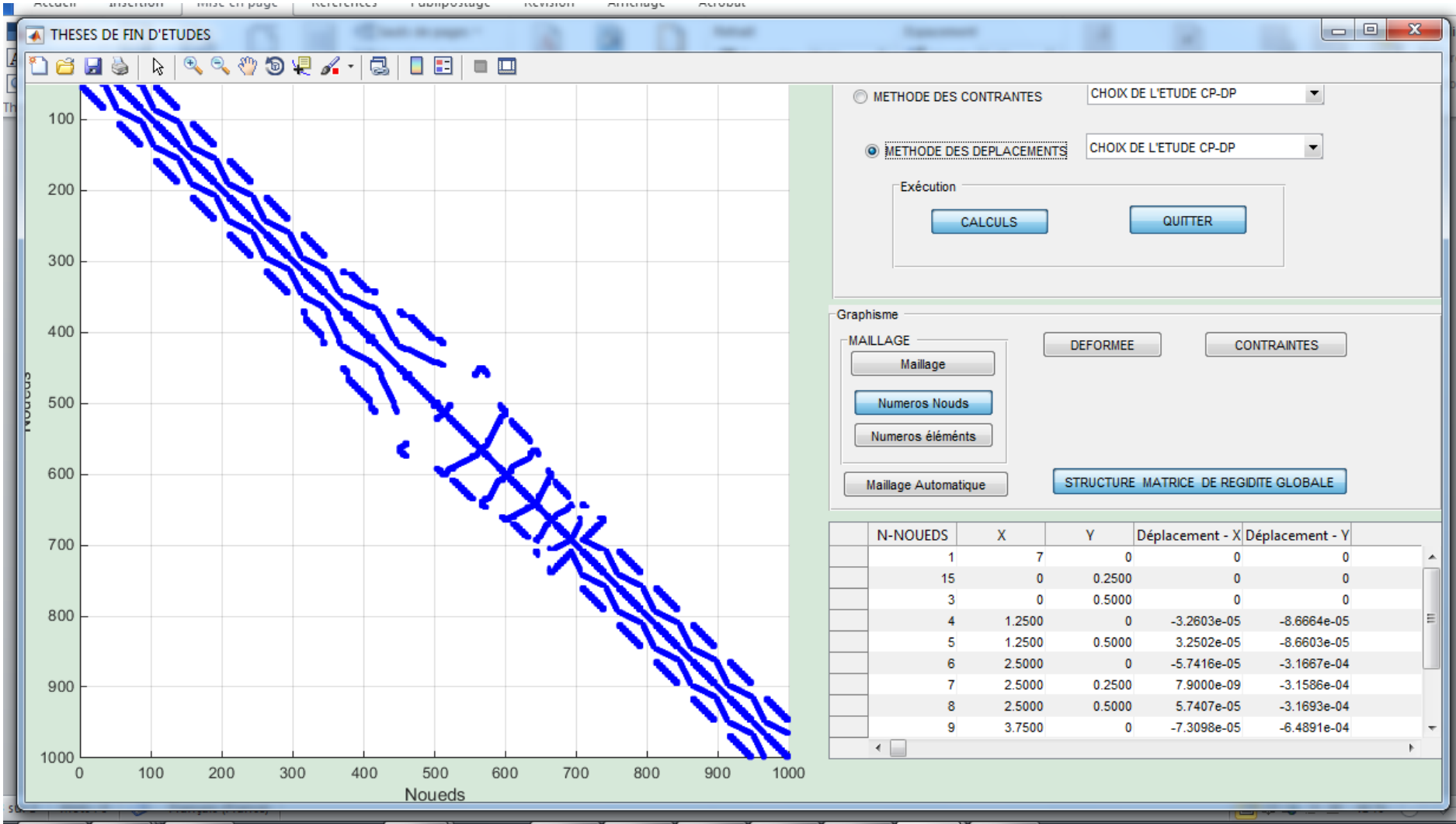
102	193	237	239	195	215	238	216	194	1	1	1	0.0100
103	161	193	195	163	177	194	178	162	1	1	1	0.0100
104	195	239	241	197	216	240	217	196	1	1	1	0.0100
105	354	380	382	356	371	381	372	355	1	1	1	0.0100
106	356	382	384	358	372	383	373	357	1	1	1	0.0100
107	358	384	386	360	373	385	374	359	1	1	1	0.0100
108	360	386	388	362	374	387	375	361	1	1	1	0.0100
109	362	388	390	364	375	389	376	363	1	1	1	0.0100
110	364	390	392	366	376	391	377	365	1	1	1	0.0100
111	366	392	394	368	377	393	378	367	1	1	1	0.0100
112	368	394	396	370	378	395	379	369	1	1	1	0.0100
113	380	406	408	382	397	407	398	381	1	1	1	0.0100
114	382	408	410	384	398	409	399	383	1	1	1	0.0100
115	384	410	412	386	399	411	400	385	1	1	1	0.0100
116	386	412	414	388	400	413	401	387	1	1	1	0.0100
117	388	414	416	390	401	415	402	389	1	1	1	0.0100
118	390	416	418	392	402	417	403	391	1	1	1	0.0100
119	392	418	420	394	403	419	404	393	1	1	1	0.0100
120	394	420	422	396	404	421	405	395	1	1	1	0.0100
121	406	432	434	408	423	433	424	407	1	1	1	0.0100
122	408	434	436	410	424	435	425	409	1	1	1	0.0100
123	410	436	438	412	425	437	426	411	1	1	1	0.0100
124	412	438	440	414	426	439	427	413	1	1	1	0.0100
125	414	440	442	416	427	441	428	415	1	1	1	0.0100
126	416	442	444	418	428	443	429	417	1	1	1	0.0100
127	418	444	446	420	429	445	430	419	1	1	1	0.0100
128	420	446	448	422	430	447	431	421	1	1	1	0.0100
129	432	458	460	434	449	459	450	433	1	1	1	0.0100
130	434	460	462	436	450	461	451	435	1	1	1	0.0100
131	436	462	464	438	451	463	452	437	1	1	1	0.0100
132	438	464	466	440	452	465	453	439	1	1	1	0.0100
133	440	466	468	442	453	467	454	441	1	1	1	0.0100
134	442	468	470	444	454	469	455	443	1	1	1	0.0100
135	444	470	472	446	455	471	456	445	1	1	1	0.0100

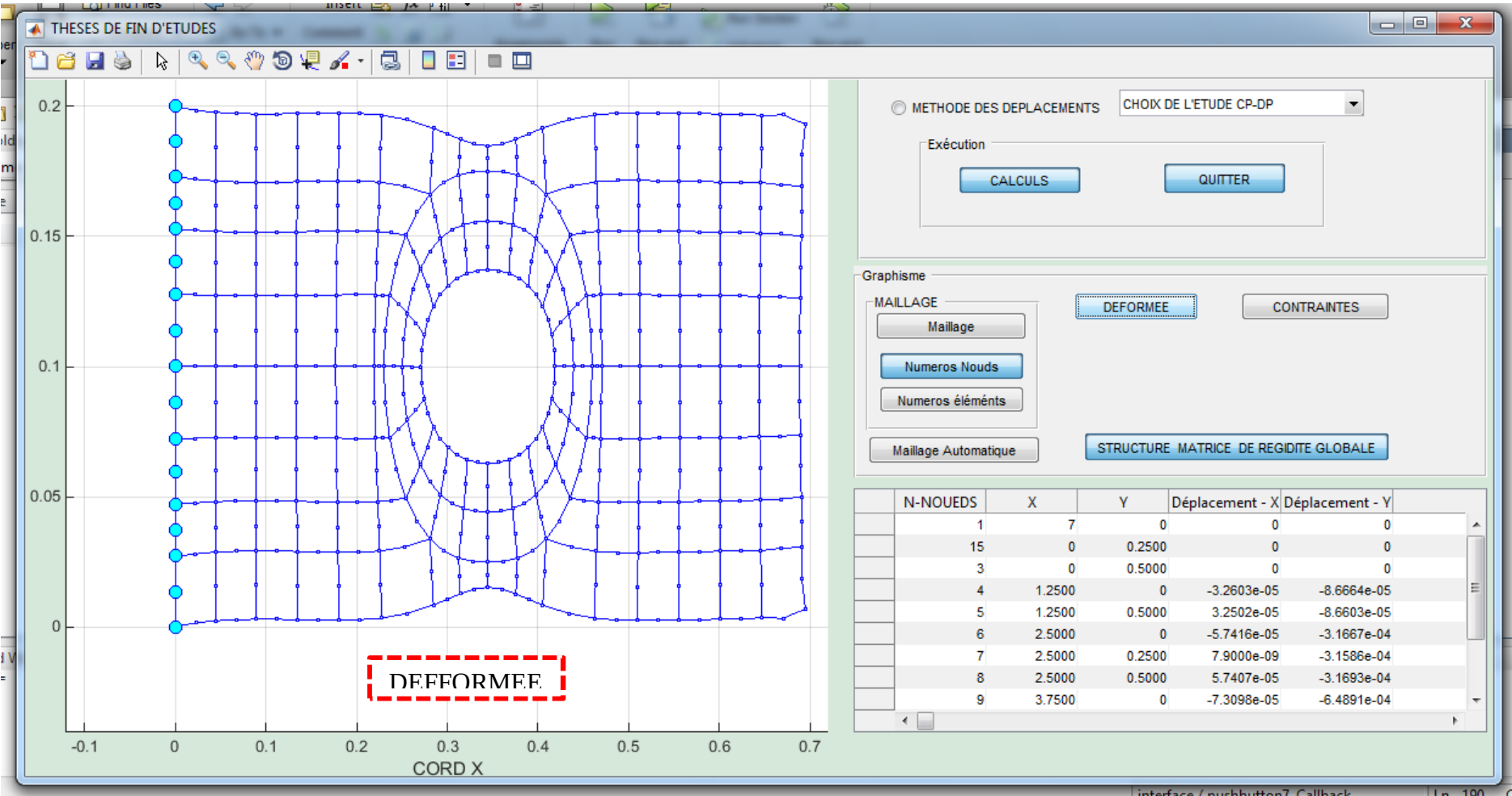
136	446	472	474	448	456	473	457	447	1	1	1	0.0100
137	458	484	486	460	475	485	476	459	1	1	1	0.0100
138	460	486	488	462	476	487	477	461	1	1	1	0.0100
139	462	488	490	464	477	489	478	463	1	1	1	0.0100
140	464	490	492	466	478	491	479	465	1	1	1	0.0100
141	466	492	494	468	479	493	480	467	1	1	1	0.0100
142	468	494	496	470	480	495	481	469	1	1	1	0.0100
143	470	496	498	472	481	497	482	471	1	1	1	0.0100
144	472	498	500	474	482	499	483	473	1	1	1	0.0100
1	2100000000.											
1	25.0											
1	0.3											
17	11.75	00.00										
484	11.75	00.00										
485	11.75	00.00										
486	11.75	00.00										
487	11.75	00.00										
488	11.75	00.00										
489	11.75	00.00										
490	11.75	00.00										
491	11.75	00.00										
492	11.75	00.00										
493	11.75	00.00										
494	11.75	00.00										
495	11.75	00.00										
496	11.75	00.00										
497	11.75	00.00										
498	11.75	00.00										
499	11.75	00.00										
500	11.75	00.00										
0												
FIN												

PLAQUE SOUMISE A UNE TRACTION CONTRAINTES-PLANES









		CONTRAINTE (KN/m2)			Exemple de résultats de calcul contrainte aux nœuds				
		NOUED1	NOUED2	NOUED3	NOUED4	NOUED5	NOUED6	NOUED7	NOUED8
ELEMENT 1	σ_X	143368.0725	113486.2473	121141.4020	120414.5437	128821.0546	117008.3788	121788.2087	132510.2494
	σ_y	45029.5448	16007.8751	24371.1106	40815.3830	128821.0546	117008.3788	121788.2087	132510.2494
	T_{xy}	20187.6905	35.1163	4264.5344	12522.4399	10151.3258	2135.7296	9778.7855	16571.3916
ELEMENT 2	σ_X	120414.5437	121141.4020	120490.9852	117722.1829	121788.2087	121320.4064	118961.4269	118619.6952
	σ_y	40815.3830	24371.1106	30107.7229	45329.8727	121788.2087	121320.4064	118961.4269	118619.6952
	T_{xy}	12522.4399	4264.5344	3973.0688	8557.2298	9778.7855	4298.8586	7230.9178	10897.1361
ELEMENT 3	σ_X	117722.1829	120490.9852	118729.7676	116082.9500	118961.4269	119578.5332	117215.3456	116836.6683
	σ_y	45329.8727	30107.7229	34086.6619	45716.9482	118961.4269	119578.5332	117215.3456	116836.6683
	T_{xy}	8557.2298	3973.0688	2025.8187	4020.5873	7230.9178	3057.9896	3457.8207	6157.1032
ELEMENT 4	σ_X	116082.9500	118729.7676	117958.4550	115564.2540	117215.3456	118177.1864	116569.1505	115719.2267
	σ_y	45716.9482	34086.6619	35466.9440	45939.3672	117215.3456	118177.1864	116569.1505	115719.2267
	T_{xy}	4020.5873	2025.8187	0.0098	0.0020	3457.8207	992.1769	0.0043	1990.6624
ELEMENT 5	σ_X	115564.2540	117958.4550	118729.7777	116082.9496	116569.1505	118177.1924	117215.3486	115719.2274
	σ_y	45939.3672	35466.9440	34086.6393	45716.9458	116569.1505	118177.1924	117215.3486	115719.2274
	T_{xy}	0.0020	0.0098	-2025.8105	-4020.5858	0.0043	-992.1606	-3457.8178	-1990.6591
ELEMENT 6	σ_X	116082.9496	118729.7777	120490.9883	117722.1786	117215.3486	119578.5423	118961.4248	116836.6656
	σ_y	45716.9458	34086.6393	30107.6983	45329.8688	117215.3486	119578.5423	118961.4248	116836.6656
	T_{xy}	-4020.5858	-2025.8105	-3973.0784	-8557.2316	-3457.8178	-3057.9907	-7230.9218	-6157.1033

EXEMPLE CALCUL PLAQUE SOUMISE A UNE TRACTION
DEPLACEMENTS DES NOUDES

NOUED	X	Y	DEP-X (m)	DEP-Y (m)
1	0,0000	0,0000	0,000E+00	0,000E+00
2	0,0000	0,0136	0,000E+00	0,000E+00
3	0,0000	0,0272	0,000E+00	0,000E+00
4	0,0000	0,0371	0,000E+00	0,000E+00
5	0,0000	0,0471	0,000E+00	0,000E+00
6	0,0000	0,0596	0,000E+00	0,000E+00
7	0,0000	0,0722	0,000E+00	0,000E+00
8	0,0000	0,0861	0,000E+00	0,000E+00
9	0,0000	0,1000	0,000E+00	0,000E+00
10	0,0000	0,1139	0,000E+00	0,000E+00
11	0,0000	0,1278	0,000E+00	0,000E+00
12	0,0000	0,1404	0,000E+00	0,000E+00
13	0,0000	0,1529	0,000E+00	0,000E+00
14	0,0000	0,1629	0,000E+00	0,000E+00
15	0,0000	0,1728	0,000E+00	0,000E+00
16	0,0000	0,1864	0,000E+00	0,000E+00
17	0,0000	0,2000	0,000E+00	0,000E+00
18	0,0200	0,0000	1,134E-06	6,713E-07
19	0,0200	0,0272	8,821E-07	3,342E-07
20	0,0200	0,0471	8,583E-07	2,150E-07
21	0,0200	0,0722	8,399E-07	1,021E-07
22	0,0200	0,1000	8,342E-07	0,000E+00
23	0,0200	0,1278	8,399E-07	-1,021E-07
24	0,0200	0,1529	8,583E-07	-2,150E-07
25	0,0200	0,1728	8,821E-07	-3,342E-07
26	0,0200	0,2000	1,134E-06	-6,713E-07
27	0,0400	0,0000	2,083E-06	9,527E-07
28	0,0400	0,0136	1,930E-06	7,822E-07
29	0,0400	0,0272	1,867E-06	6,399E-07
30	0,0400	0,0371	1,809E-06	5,122E-07
31	0,0400	0,0471	1,770E-06	4,010E-07
32	0,0400	0,0596	1,743E-06	2,894E-07
33	0,0400	0,0722	1,725E-06	1,919E-07
34	0,0400	0,0861	1,713E-06	9,300E-08
35	0,0400	0,1000	1,708E-06	0,000E+00

NOUED	X	Y	DEP-X (m)	DEP-Y (m)
476	0,5800	0,0272	3,539E-05	1,215E-06
477	0,5800	0,0471	3,514E-05	8,053E-07
478	0,5800	0,0722	3,484E-05	4,188E-07
479	0,5800	0,1000	3,470E-05	6,000E-10
480	0,5800	0,1278	3,484E-05	-4,176E-07
481	0,5800	0,1529	3,514E-05	-8,041E-07
482	0,5800	0,1728	3,539E-05	-1,214E-06
483	0,5800	0,2000	3,613E-05	-1,348E-06
484	0,6000	0,0000	3,801E-05	2,779E-06
485	0,6000	0,0136	3,644E-05	2,047E-06
486	0,6000	0,0272	3,641E-05	1,396E-06
487	0,6000	0,0371	3,626E-05	1,271E-06
488	0,6000	0,0471	3,626E-05	1,145E-06
489	0,6000	0,0596	3,579E-05	8,720E-07
490	0,6000	0,0722	3,579E-05	6,023E-07
491	0,6000	0,0861	3,545E-05	3,046E-07
492	0,6000	0,1000	3,564E-05	6,000E-10
493	0,6000	0,1139	3,545E-05	-3,033E-07
494	0,6000	0,1278	3,579E-05	-6,011E-07
495	0,6000	0,1404	3,579E-05	-8,708E-07
496	0,6000	0,1529	3,626E-05	-1,144E-06
497	0,6000	0,1629	3,626E-05	-1,270E-06
498	0,6000	0,1728	3,641E-05	-1,394E-06
499	0,6000	0,1864	3,644E-05	-2,046E-06
500	0,6000	0,2000	3,801E-05	-2,778E-06

ANNEXES

1.1. ANNEXE 1 : intégration numérique de gauss

Comme il a été noté antérieurement, l'évaluation numérique des expressions intégrales parues dans les paragraphes précédents a été faite en faisant appel à une des méthodes d'intégrations, c'est la méthode d'intégration de Gauss.

Pour illustrer la technique de la méthode, supposons que nous cherchons à calculer l'intégrale ;

$$I = \int_{-1}^{+1} f(r)dr \quad (0.1)$$

- **LA METHODE CORRESPOND AUX DEMARCHES SUIVANTES :**

On choisit à priori n points de l'espace d'intégration ; si ces points sont régulièrement espacés, la donnée de leur nombre entraîne la connaissance de toutes leurs abscisses

r_i ($i=1,2,3,\dots,n$)

On réalise une approximation à l'aide d'un polynôme de degré $n-1$

$$P_{n-1}(r) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i r_i \quad (0.2)$$

$$P_{n-1}(r_i) = f(r_i) \quad (j=1,2,3,\dots,n) \quad (0.3)$$

On calcul analytiquement l'intégrale de ce polynôme

$$I_{n-1}^* = \int_{-1}^{+1} P_{n-1}(r)dr \quad (0.4)$$

I_{n-1}^* Est une valeur approchée de I ; la précision de cette approximation est $O(h^n)$, ou h est la valeur de la largeur des intervalles entre les points .

En pratique on écrit sous forme.

$$I_{n-1}^* = \sum_{i=1}^n P_i f(r_i) \quad (0.5)$$

Où les n coefficients sont des coefficients de pondération qui peuvent s'exprimer à partir des n coefficients a_i de l'approximation polynomiale.

Dans la technique de Gauss, les points d'intégration ne sont fixes à priori, mais calculés de façon à maximiser la précision de l'approximation.

Considérons une approximation du type (5), on voit que le nombre d'inconnues à calculer est égal à $(2n)$

Soit $p_1, \dots, p_n$ Et $r_1, \dots, r_n$

le polynôme d'approximation devra donc avoir $2n$ coefficients et sera du degré impair $(2n-1)$, l'erreur sera donc $O(h^{2n})$

Notons qu'une approximation polynomiale de degré n nécessite que $\frac{n+1}{2}$ points d'intégration

Illustrons le cas où $(n = 2)$; Il est évident que les deux points d'intégration ne peuvent être que symétriques par rapport à l'origine soit donc

$$r_2 = -r_1 = \Delta$$

Le polynôme d'approximation de $f(r)$ degré $(2n-1 = 3)$ s'écrit

$$P_3(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3$$

Donc l'approximation de l'intégrale

$$I_3^* = \int_{-1}^{+1} P_3(r) dr = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 \quad (0.6)$$

La nouvelle approximation s'écrit

$$I_3^* = \sum_{i=1}^2 P_i f(r_i)$$

Les deux points étant symétriques

$$P_1 = P_2 = P$$

Compte tenu de (0.3)

$$I_3^* = p \cdot P_3(-\Delta) + p \cdot P_3(+\Delta) = 2p \cdot (a_0 + a_2 \Delta^2) \quad (0.7)$$

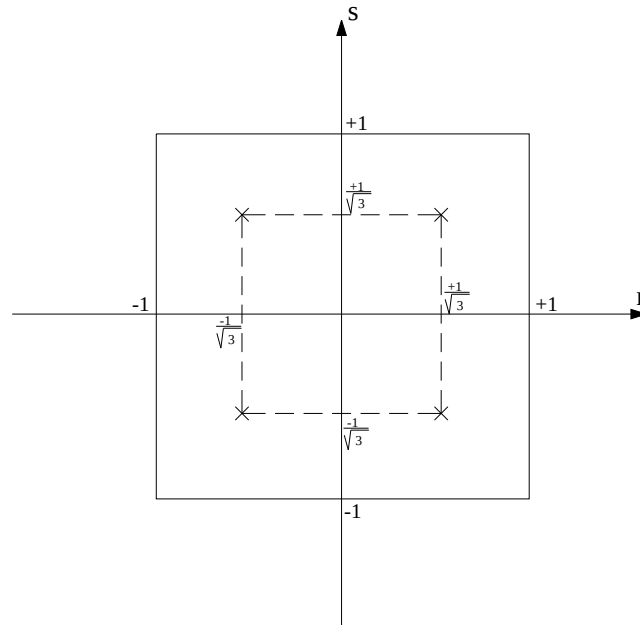
Les expressions (0.6) et (0.7) sont identiques et la précision de l'approximation I_3^* est maximale ; si on a

$$P=1 \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Notons que quand n est plus grand que (02) deux ; la détermination mathématique de p_i et r_i n'est pas aussi simple , et fait appel aux polynômes de Legendre, Le tableau ci-après donne quelques valeurs de p_i et r_i pour des approximations courantes allant jusqu'à six.

Dans le cas d'une intégrale double à deux variables (r, s) Il suffit de généraliser les formules écrites pour le cas d'une seule variable

Soit à évaluer



$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(r,s) dr ds$$

On pose

$$I_n^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i P_j f(r_i, s_j)$$

Où n est le nombre de points d'intégration supposé le même dans les deux directions r et s ce qui fait $(n \times n)$ points d'intégrations

Pour $(n = 2)$ on a

$$\begin{aligned} P_i &= P_j = 1 & (i, j = 1, 2) \\ r_i, s_j &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} & (i, j = 1, 2) \end{aligned}$$

Le nombre de point de Gauss choisis dans l'intégration est $(n = 2)$

Figure 6

Tableau des valeurs de r_i et p_i

N	r_i	p_i
1	0.000000	2.0000000
2	± 0.5773502	1.0000000
3	± 0.7745966 0.0000000	0.5555555 0.8888889
4	± 0.8611363 ± 0.3399810	0.3478548 0.6521452
5	± 0.9061798 ± 0.3384693	0.2369269 0.4786287
6	± 0.9324695 ± 0.6612094 ± 0.2386192	0.1713245 0.3607616 0.4679139

1.2. ANNEXE 2 : Méthode de factorisation de Cholevsky

- La résolution du système des équations d'équilibre par la méthode de **Cholevsky** peut s'organiser en quatre phases de calcul.
- Factorisation de [K]

le principe de la méthode est basé sur le théorème suivant :

Théorème

Si la matrice [A] est symétrique définie positive, il est possible de factoriser cette matrice sous forme de :

$$[A] = [S]^T [S]$$

Où [S] : Est une matrice triangulaire supérieure.

De là on arrive à factoriser la matrice sous forme :

$$[A] = [L] [D] [L]^T$$

[D] : Matrice diagonale

[L] : Matrice supérieure dont les éléments diagonaux sont égaux à l'unité

C'est cette décomposition qu'on adoptera

Les éléments des différentes matrices sont définis comme suit

$$L_{ii} = 1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum L_{ik} \cdot d_{kk} \cdot L_{ik} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$L_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} a_{ij} - \sum L_{ik} \cdot d_{kk} \cdot L_{jk} \quad j = i+1, \dots, n$$

Résolution du système triangulaire : $[L]\{Y\} = \{B\}$

Résolution du système triangulaire : $[D]\{Z\} = \{B\}$

Résolution du système triangulaire : $[L]^T\{X\} = \{Z\}$

BIBLIOGRAPHIE

- HAMADOUCHE Mohand Ameziane – Analyse dynamique des structures inélastiques par la théorie de l'adaptation
- JEAN CHRISTOPHE CUILIERE - Introduction a la méthodes des éléments finis
- GALLAGHER RICHARD H - Introduction aux éléments finis
- CHATEAUNEUF Alaa - Comprendre les éléments finis
- CAZENAVE Michel Méthode des éléments finis
- (H. G. ROCKEY; H. R. EVANS; W. GRIFFITHS- Introduction à la méthode des éléments finis
- Y. W. CHEUNG & M. F. YEO) -A practical introduction to finite element analysis
- O. C. ZIENKIEWICZ -The finite element method in engineering science
- KLAUS JURGEN & BATHE - Finites elements procedures in engineering analysis (Part II)
- Charles MASSONET - Résistance des matériaux
- GALLAGHER, R. H. & DHALLA, A. K., "Direct Flexibility Finite Element Elastoplastic Analysis", Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A, (1975).
- IMBERT, J. F., "Analyse des structures par éléments finis", Cepadues, Toulouse, (1979).

PRINCIPALE NOTATION

K : matrice de rigidité

B : matrice d'interpolation des déformations

E : tenseur d'élasticité

E : module de Young

u : déplacement

ε : déformation totale

ρ : masse volumique

ν : coefficient de poisson

δ : symbole de Kronecker

V : énergie potentielle totale

U : énergie de déformation

σ : contrainte élastique

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: contraintes principales

$N_i(x, y, z)$: fonction de forme