

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'hamed Bougara Boumerdes
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



Mémoire Présenté
Pour L'Obtention Du Diplôme De Master
En Recherche Opérationnelle
Option : Recherche Opérationnelle Modélisation et Aide à la Décision
(ROMAD)

par : Hocine Dalila
Et : Zoubir Ibtissem

**Etude de la sensibilité de la probabilité de ruine
via une copule**

Soutenu à l'UMBB, le 01/07/2017, devant le jury composé de :

M ^{me} F.GATT	M.A.A	Président	à l'UMBB - Boumerdes.
M ^r B.ISSAADI	M.C.B	Examineur	à l'UMBB - Boumerdes.
M ^r F.CHEURFA	M.A.A	Encadreur	à l'UMBB - Boumerdes
M ^{me} M.BENMANSSOUR	M.A.A	Co-Encadreur	à l'UMBB - Boumerdes

Année Universitaire 2016 – 2017

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions ALLAH, de nos avoir donné les forces, la volonté et le courage pour réaliser ce travail modeste.

Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur à monsieur CHEURFA Fateh pour sa patience, pour sa disponibilité, pour ses nombreux conseils, pour ces corrections et son appréciation au cours de l'élaboration de ce travail.

Nous adressons nos vifs remerciements à madame Ben Manssour.M pour ses conseils et encouragement.

Nous tenons également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils nos ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance, madame GATT.F et monsieur ISSADI.B .

Nos remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui auront contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Enfin, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à nos familles qui nous ont toujours soutenues et à tout ce qui a participé de réaliser ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents vous m'avez tout donnée sans rien recevoir que dieu vous protège.

A mes frères, à mes soeurs et à toute ma famille

A ma soeur, amie et binôme DALILA sans elle ce travail n'aurait jamais pu réaliser

A tous mes amis(e) avec lesquels j'ai partagé mes moments de Joie et de bonheur et à tout les étudiants de "Recherche Operationnelle".

Ibtissem

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents que j'aime énormément qui n'ont pas cessé de m'encourager pour achever mon travail. Je souhaite qu'ils trouveront dans ce travail ma reconnaissance pour leurs sacrifices et leur soutien permanent.

A mes frères, et mes soeurs à qui je souhaite une bonne continuation dans leurs vie.

A mes adorables nièces Maya, Khadija, Merieme.

A ma soeur, copine et mon binome IBTISSEM avec qui j'ai partagée une grande partie de ma vie.

A tous mes amis(e) avec lesquels j'ai passée mes moments de Joie et de bonheur et à tout les étudiants de recherche operationnelle.

Dalila

Table des matières

Introduction générale	6
1 La théorie de la ruine	8
Introduction	8
1 Le modèle individuel et le modèle collectif	9
1.1 Modèle individuel	9
1.2 Modèle collectif	10
2 Modèle classique de la théorie de la ruine	11
2.1 Processus de réserve et de surplus	11
2.2 Probabilité de ruine	13
3 Chargement de sécurité :	14
4 Calcul de la probabilité de ruine à horizon infini :	15
4.1 Autres approches	17
Conclusion	17
2 Valeur à Risque	18
Introduction	18
1 Définition	18
2 Avantages et inconvénients de la VaR	19
3 Calcul de la Valeur à Risque	21
4 Problématique	22
4.1 Modèles d'évaluation	23
4.2 Historique	24
4.3 Techniques d'estimation	25
3 les copules	30
Introduction	30
1 Quelques rappels concernant les distributions multivariées et la loi uniforme	31
1.1 Définition de la fonction de répartition conjointe	31
1.2 Définition des lois marginales	31
1.3 lois de probabilité absolument continues	31
1.4 Définition et propriétés de la loi uniforme	31
2 Les mesures de dépendance	32
2.1 le coefficient de corrélation	32

2.2	Les coefficients de corrélation de Kendall et de Spearman	33
3	La copule	34
3.1	Définition d'une copule	34
3.2	Propriétés des copules	35
4	Exemple des Copules Paramétriques	39
4.1	Copules Archimédiennes	39
4.2	Copules elliptiques	42
	Conclusion	44
4	<i>Modélisation des dépendances dans le modèle classique de ruine par une copule</i>	45
	Introduction	45
1	Simulation directe du processus de surplus $R(t)$	45
1.1	Algorithme de la simulation	45
2	Modélisation des dépendances dans le processus de surplus à l'horizon fini	47
2.1	Impact de la dépendance entre montants des sinistres X_i sur la probabilité de ruine	47
2.2	Le modèle de dépendance (copule normale)	48
2.3	Représentation graphique de distribution des montants des sinistre	49
2.4	Algorithm de Simulation des probabilités de ruine pour les variables dépendantes de Copula normale	51
2.5	Exemple d'application	51
2.6	L'impact de la dépendance entre les inter-arrivées des sinistres sur la probabilité de ruine	53
2.7	Résultats	53
	Conclusion	54
	Conclusion générale	55
	Annexe	56
	Bibliographie	62

Introduction générale

En actuariat, la théorie de la ruine consiste à la modélisation mathématique et à l'étude de l'évolution des richesses d'une compagnie d'assurance. La problématique la plus souvent posée dans ce domaine est le calcul de la probabilité de ruine de la compagnie, c'est-à-dire de la probabilité que ses réserves financières passent sous la frontière fatidique du zéro. La probabilité de ruine en temps finie se comporte un peu comme la Valeur à Risque.

Auparavant, la théorie du ruine supposait l'indépendance entre les différentes variables aléatoires et autres paramètres intervenant dans la modélisation actuarielle. De nos jours, cette hypothèse d'indépendance est souvent relâchée afin de tenir compte de possibles interactions entre les différents éléments des modèles.

Dans ce mémoire, nous proposons d'introduire des modèles de dépendance pour Cramer-Lundberg [26] de la théorie du ruine. Nous suggérons l'emploi des copules comme structure de dépendance.

Le terme copule (copula) vient du mot latin "*copulæ*", qui signifie au sens figuré, liaison, lien, alliance ou union. En statistique mathématique, et sous d'autres appellations, la notion de copule apparaît, entre autres, dans certains travaux fondateurs de Fréchet(1951)[17] et Dall'Aglio(1956) [9] portant sur l'étude des tables de contingence et les lois multivariées à structures marginales fixées.

Les fonctions copules permettent de déterminer la nature de dépendance des séries qu'elle soit linéaire ou pas. Elles doivent remplacer les outils de mesure de risque ou de corrélation utilisée par des banques et les gestionnaires d'actifs. On utilise les copules pour introduire la relation de dépendance entre les montants des sinistres d'une part et entre les inter-arrivées des sinistre d'autre part.

Ce mémoire comprend, en plus de la présente introduction, quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous traiterons les principes fondamentaux de la théorie du risque et certaines notions sur la probabilité de ruine.

Dans le deuxième chapitre, nous définissons la Valeur à Risque, la problématique générale de sa construction ainsi que les techniques classiques de son estimation.

Dans le troisième chapitre, nous présentons la définition et les propriétés fondamen-

tales des copules où on étudions quelques familles des copules paramétriques les plus utilisées et leurs propriétés fondamentales.

Dans le quatrième chapitre, nous donnons une application des copules dans la théorie de ruine, on calculera la probabilité de ruine.

Enfin, nous terminerons par une conclusion générale.

1

La théorie de la ruine

Introduction

La théorie de la ruine appartient aux sciences de la gestion des risques et aux mathématiques appliquées à l'assurance.

Il s'agit de l'étude mathématique de modèles stochastiques et dynamiques adaptés aux réserves financières allouées à un portefeuille de contrats d'assurance de type non-vie d'une compagnie d'assurance. Assurance de type IARD (Incendie, Accidents et Risques Divers).

L'objectif est de définir un cadre permettant la bonne gestion d'un portefeuille de contrat. On imagine une compagnie d'assurance qui se lance sur un nouveau marché, la business line doit être :

- Viable, la compagnie doit être solvable à tout instant (la réserve ne doit pas tomber en dessous de 0). Elle doit être en mesure de faire face aux engagements qu'elle a pris vis à vis des assurés par voie contractuelle
- Rentable, la tarification doit permettre à l'assureur d'engranger des bénéfices pour rémunérer les actionnaires et les employés.

La gestion comptable est rendue difficile à cause de l'inversion du cycle de production. La compagnie reçoit les primes avant de verser des prestations, elle doit mettre du cash de côté, c'est ce qu'on appelle le provisionnement. Cela nécessite une évaluation des risques dans un univers aléatoire, d'où l'intervention de statisticiens et de probabilistes.

Cela passe par la définition de deux paramètres :

- Un niveau de capital initial.
- Une tarification.

L'analyse statistique permet de calibrer :

- Une loi pour les montants des sinistres.
- Une loi pour le nombre de sinistres.

L'hypothèse sous-jacente est celle d'un portefeuille homogène dans lequel les montants de sinistres sont indépendantes identiques distribuées. L'autre hypothèse est celle d'un modèle collectif quant à la modélisation de la charge totale générée par les sinistres.

La modélisation de la charge totale induite par les sinistres impactant un portefeuille de contrats d'assurance sur une période de temps donnée (souvent 1 an) permet de mettre au point la tarification mais aussi de définir le niveau de provision requis pour faire face aux engagements pris par rapport aux assurés. L'étude de sa distribution donne accès à ces quantiles pouvant être vue comme des Value-at-Risk.

Dans ce chapitre, on présente les modèles du risque classique d'une manière générale, par la suite, on introduit la probabilité de ruine à horizon fini et infini, le moment de la ruine et le processus de renouvellement. Enfin, on cite les principales approches utilisées pour approximer la probabilité de ruine dans un modèle de risque classique.

1. Le modèle individuel et le modèle collectif

La charge globale de sinistres peut s'écrire comme la somme, sur le nombre de polices, du montant de sinistre total engendré par chaque police ou encore comme la somme, sur le nombre de sinistres, des montants de chaque sinistre. On appelle modèle individuel la première approche et modèle collectif la seconde[8].

1.1. Modèle individuel

Le modèle individuel modélise la charge total générée par les sinistres individu par individu. La charge totale pour un portefeuille comprenant n contrats est définie par la formule[8, 27]

$$S^{Ind} = \sum_{i=1}^n I_i X_i \quad (1.1)$$

Avec,

- $I_i \sim \{i.i.d\} B(p)$ indiquant si l'assuré i a subi un sinistre sur la période donnée.
- X_i variable aléatoire positive indépendante de I_i , montant de l'ensemble des sinistres subi par l'assuré i sur l'exercice.

Les calculs sont difficiles à effectuer lorsque le nombre de contrats augmente. La fonction de répartition de S^{Ind} est donnée par la formule classique des convolutions [4]

$$F_s(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} F_X^{*k}(x) \quad (1.2)$$

où $F_X^{*k}(x)$ est la fonction de répartition de $X_1 + X_2 + \dots + X_k$ et vérifie la relation de récurrence[24]

$$F_X^{*k+1}(x) = \int_0^x F_X^{*k}(x-y) dF_X(y) \quad (1.3)$$

Remarquons que :

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (1.4)$$

Représente ici la probabilité que k contrats parmi n aient subi au moins un sinistre sur la période considérée.

Dans ce cas :

$$E(S^{Ind}) = npE(X) \quad (1.5)$$

$$Var(S^{Ind}) = npVar(X) + np(1-p)[E(X)]^2 \quad (1.6)$$

Lorsque X suit un certain type de lois, comme les lois Gamma, il est possible d'utiliser les propriétés d'additivité de ces lois pour obtenir directement les F_X^{*k} pour $k \geq 1$. Par exemple, Si $X \sim G(\alpha, \lambda)$, alors F_X^{*k} est la fonction de répartition d'une loi Gamma de paramètres $(k\alpha, \lambda)$. [38]

Ce résultat se généralise si l'indépendance est vérifiée, même si les $X_i \sim G(\alpha_i, \lambda)$, avec des paramètres α_i différents, mais le même paramètre λ .

Le modèle individuel étant souvent difficile à utiliser numériquement, on lui préfère souvent le modèle collectif, dans lequel le N n'est plus le nombre de polices ayant au moins un accident, mais le nombre total d'accidents, sans distinguer police par police [7].

1.2. Modèle collectif

Le modèle collectif modélise la charge totale subit par un portefeuille vue, non pas contrat par contrat, mais suivant un nombre total de sinistre tout assuré confondu, la charge totale est définie par [8].

$$S^{coll} = \sum_{i=1}^N X_i \quad (1.7)$$

Avec,

– N v.a. discrète à valeur entière

- X_i v.a. positive i.i.d. indépendante de N Lorsque le nombre de contrats est important et que le portefeuille est homogène on peut approximer le modèle individuel par un modèle collectif.

$$S^{Ind} \sim S^{Coll} \quad (1.8)$$

Le modèle individuel peut s'écrire comme un modèle collectif

Lequel ?

→ $S^{ind} = \sum_{i=0}^N X_i$ où N est loi binomiale de paramètre n et p . n étant le nombre de contrats en portefeuille.

Par quel loi peut-on approximer la loi binomial ?

→ une loi de Poisson si p petit et n grand. Convergence en loi d'une $Bin(n;p)$ vers $Pois(a)$ si $p n \rightarrow a$ et $p \rightarrow 0$

Demonstration :

On écrit la $P(N = k)$ pour N binomial ou on passe par la fonction génératrice. On passe ensuite à la limite.

La description des modèles collectif et individuel se trouve dans [16].

2. Modèle classique de la théorie de la ruine

La théorie de la ruine a pris naissance en Suède au début du 20^{ème} siècle dans les travaux de Lundberg (1903) [26]. Le modèle classique de la théorie de ruine, le modèle de Cramér-Lundberg, représente l'évolution des réserves d'une compagnie d'assurance par un processus Poisson-composé avec dérive.

2.1. Processus de réserve et de surplus

On note $\{R_t : t \geq 0\}$ le processus de réserve, et $u = R(0)$ la réserve initiale. On fait les hypothèses suivantes :

- $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suite de v.a. positives i.i.d. égales aux temps inter-arrivée des sinistres,
- $\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i$ instant d'occurrence du $n^{ième}$ sinistre,

- $N_t = \max\{n \in N; \sigma_n \leq t\} = \max\{n \in N; \sigma_{n+1} \geq t\}$ processus de comptage égal au nombre de sinistres jusqu'au temps t .
- $(X_i)_{i \in N^*}$ suite de v.a. positives i.i.d. égales aux montants des sinistres, On notera F_X leur fonction de répartition, f_X leur densité et μ leur moyenne commune.
- c flux de prime générée par le portefeuille par unité de temps.

Ce qui donne :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i \tag{1.9}$$

On note par la suite $N(t)_{t \geq 0}$ le processus qui représente les pertes agrégées de la compagnie avec

$$Z_t = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i \tag{1.10}$$

On définit également le processus de surplus $\{S(t); t \geq 0\}$

$$S(t) = u - R(t) \tag{1.11}$$

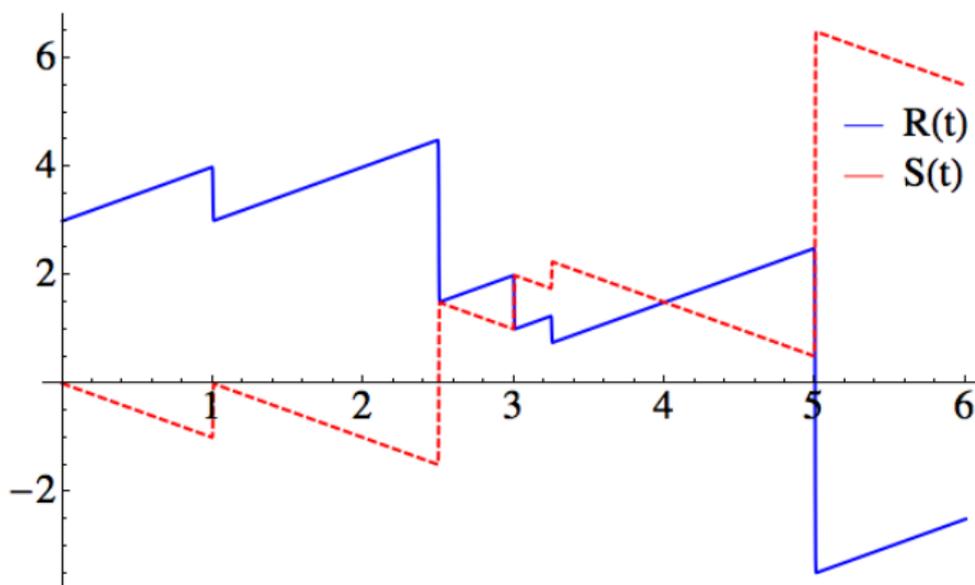


FIGURE 1.1 : Evolution de la réserve et du surplus au cours du temps

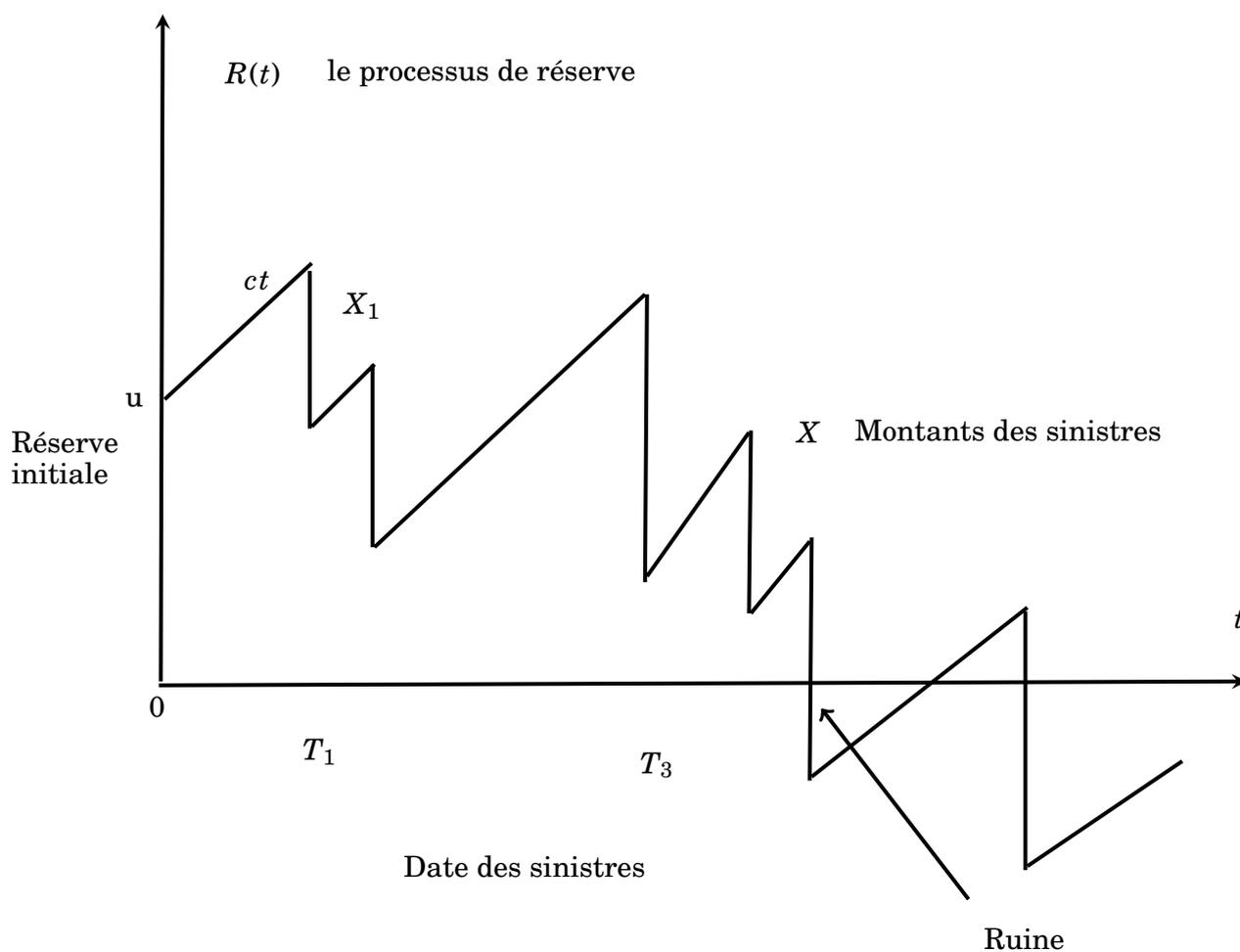


FIGURE1.2 :Description du modèle de base en assurance

2.2. Probabilité de ruine

Pour tout modèle de risque d'un surplus financier, la première quantité d'intérêt est la probabilité de ruine.[21],[32],[28],[25]

Définition 2.1 L'instant de la ruine dénotant par τ associé à une réserve initiale u , est défini par :

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\} = \inf\{t \geq 0; S(t) > u\} \quad (1.12)$$

Définition 2.2 La probabilité de ruine ultime ou probabilité de ruine à horizon de temps infini notée ψ , est définie par :

$$\psi(u) = P(\inf_{t \geq 0} R(t) < 0 : R(0) = u) \quad (1.13)$$

Définition 2.3 La probabilité de ruine avant l'instant T ou probabilité de ruine à horizon de temps fini est définie par :

$$\psi(u, T) = P(\inf_{t \in [0, T]} R(t) < 0 : R(0) = u) \quad (1.14)$$

Définition 2.4 La probabilité complémentaire ou probabilité de non ruine, notée ϕ , est définie par :

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \quad \phi(u, T) = 1 - \psi(u, T) \quad (1.15)$$

3. Chargement de sécurité :

On appelle chargement ou coefficient de sécurité, la quantité définie par :

$$\theta = c - \lambda\mu$$

La constante θ définit le chargement de sécurité de la compagnie. Il mesure la rentabilité de la compagnie .

Le coefficient $\lambda\mu$ est interprété comme le montant moyen des sinistres par unité de temps. Il paraît prudent que l'assureur fixe un taux de prime c supérieur à $\lambda\mu$ pour que, en moyenne, les primes reçues soient supérieures aux indemnités payées par la compagnie d'assurance. En effet, nous avons la propriété suivante :[2]

Propriété 3.1 du coefficient de sécurité[5]

- Si $\theta > 0$, alors, presque sûrement,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_t = +\infty$$

et

$$\phi(u) \neq 0$$

- Si $\theta < 0$, alors, presque sûrement,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_t = -\infty$$

et

$$\phi(u) = 1$$

L'activité n'est donc pas rentable.

4. Calcul de la probabilité de ruine à horizon infini :

Le théorème suivant fournit une expression de la probabilité de ruine à horizon infini $\Psi(u)$ dans le cas du modèle de risque classique.

Théorème 4.1 [40]

Pour tout $u \geq 0$,

$$\Psi(u) = (1 - \lambda\mu/c) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda\mu/c)^i \overline{(F_Z^s)^{*i}}(u) \quad (1.16)$$

où

$\overline{(F_Z^s)^{*n}} = 1 - (F_Z^s)^{*n}$ est la $n^{\text{ème}}$ convolution de F_Z^s tel que :

$$F_Z^s(x) = \frac{1}{u} \int_0^x (1 - F_Z(y)) dy, x > 0$$

Application au modèle de Lundberg (P/P)

En utilisant la formule (1.16), nous allons déduire l'expression exacte de $\Psi(u)$ pour le modèle de risque de Lundberg (P/P).

$$\Psi(u) = (1 - \rho) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \overline{(F_Z^s)^{*i}}(u), \rho = \frac{\lambda}{\delta c}$$

Pour des montants de réclamations exponentielles de paramètre δ , nous avons :

$$F_Z(u) = \begin{cases} 1 - \exp(-\delta u), & \text{si } u \geq 0 \\ 0, & \text{si } u < 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Calculons

$$F_Z^s(u) = \delta \int_0^u (1 - F_Z(y)) dy, x \geq 0$$

$$F_Z^s(u) = \delta \int_0^u \exp(-\delta y) dy = \delta \left(\frac{-1}{\delta} \right) [\exp(-\delta y)]_0^u = 1 - \exp(-\delta u)$$

Ainsi

$$F_Z^s(u) = F_Z(u), u \in R$$

$(F_Z^s)^{*n}$ représente la $n^{\text{ème}}$ convolution de (F_Z^s) Puisque nous avons l'indépendance des n variables aléatoires $Z_i, \{i = 1, \dots, n\}$

Nous utiliserons les transformées de Laplace afin de déterminer $(F_Z^s)^{*n}$. Où f_z est la densité de probabilité des montants des réclamations $Z_i, \{i = 1, \dots, n\}$. Ainsi,

$$L_{f_z}(x) = \int_0^{\infty} f_z(t) \exp^{-xt} dt = \int_0^{\infty} \delta \exp^{-(\delta+x)t} dt = \frac{\delta}{\delta+x}$$

D'où

$$L_{(f_z)^n}(x) = \left[\frac{\delta}{\delta+x} \right]^n$$

En se référant aux tables des transformées de Laplace[39] nous trouvons que

$$(f_z)^n(x) = \frac{\delta(\delta x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp^{-\delta x}, x \geq 0$$

qui correspond à la densité de probabilité de la loi d'Erlang(δ, n) [23] dont la fonction de répartition est donnée par :

$$(f_z)^n(x) = (F_z^s)^n(x) = \frac{\Gamma(n, \delta x)}{(n-1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \exp^{-\delta x} \frac{(\delta x)^k}{k!}$$

Ce résultat signifie que la somme de n variables aléatoires indépendantes de distributions exponentielles de même paramètre δ est une loi d'Erlang(δ, n). Alors,

$$\overline{(F_Z^s)^*n}(x) = 1 - (F_Z^s)^*n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp^{-\delta x} \frac{(\delta x)^k}{k!}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} \exp^{-\delta u} \frac{(\delta u)^k}{k!} \\ &= (1-\rho) \exp^{-\delta u} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta u)^k}{k!} \\ &= (1-\rho) \exp^{-\delta u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta u)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \rho^n \\ &= (1-\rho) \exp^{-\delta u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta u)^k}{k!} \frac{\rho^{k+1}}{1-\rho} \\ &= \rho \exp^{-\delta u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho \delta u)^k}{k!} = \rho \exp^{-\delta u} \exp^{\rho \delta u} = \rho \exp^{-(\delta - \frac{\lambda}{c})u} \end{aligned}$$

Finalement

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c\delta} \exp^{-(\delta - \frac{\lambda}{c})u} \quad (1.18)$$

4.1. Autres approches

En plus de l'approche stochastique pour l'évaluation de la probabilité de ruine, qui possède de large champs dans les modèles de risques, il existe plusieurs autres approches. Ces approches permettent une meilleure considération des faits, car certains faits ignorés dans la modélisation stochastique se retrouvent dans d'autres domaines. C'est le cas par exemple des réactions des assureurs et des assurés dans la théorie des jeux. En général, les solutions proposées pour estimer la probabilité de ruine sont basées sur : les théorèmes limites des marches aléatoires ([41, 19]), les représentations matricielles avec modèles markoviens (Asmussen et al [3]), la théorie des martingales et inégalités de probabilités (Kalashnikov [37]), les méthodes d'optimisation (De Vylder et al.[12]), les transformations analytiques (De Vylder et al.[11]) et la théorie des distributions [46, 45].

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux résultats de la théorie de ruine : des expressions exactes, des approximations et des bornes de la probabilité de ruine pour le modèle de risque classique.

Le modèle de risque classique, connu comme le fondement théorique de la théorie du risque fût l'objet de plusieurs études, et de nombreux résultats sur la probabilité de ruine existent pour ce modèle.

2

Valeur à Risque

Introduction

Au cours de ces vingt dernières années la Valeur à Risque (VaR) est devenue une mesure de risque. Elle est de plus en plus utilisée dans les établissements financiers [20, 22, 29]. Cette mesure de risque est nommée Valeur exposée au risque ou risque potentiel de perte ou bien plus connue sous le nom Value at Risk (*VaR*) désigne la perte potentielle que nous nous autorisons sur un certain horizon T et pour un niveau de probabilité α donné.

Le but de ce chapitre est de donner la définition de la mesure de risque et leurs propriétés et de décrire brièvement plusieurs mesures de risque bien connues comme la Valeur en Risque (*VaR*, Value-at-Risk).

1. Définition

La Valeur à Risque est une méthodologie récente qui utilise des techniques statistiques, pour calculer la perte maximale probable due au risque de marché, sur un portefeuille donné.

La définition de la firme J .P . Morgan [29] est celle qui résume le mieux concept de la VaR : "La VaR est un estimé, avec un niveau de confiance prédéterminé, de combien peut-on perdre en gardant une position, durant un horizon donné".

Exemple

Si un portefeuille possède une VaR de 31210 pour un seuil de confiance à 95% et un horizon de 1 jour, alors nous pouvons dire que :

- à la fin de la prochaine journée de marché, la perte enregistrée par le portefeuille sera plafonnée en valeur absolue à 31210 avec une probabilité de 95%.
- soit de manière équivalente, la perte du portefeuille à la fin de la prochaine journée de marché aura dépassé 31210 avec une probabilité de 5%.

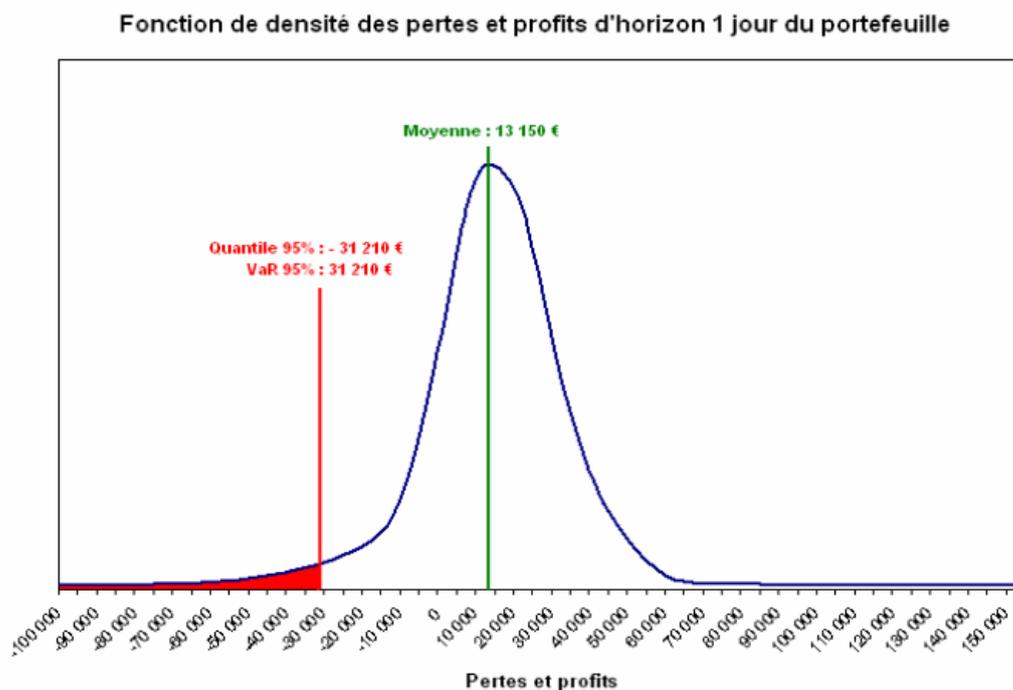


FIGURE 2.1 : Présentation graphique de la VaR

2. Avantages et inconvénients de la VaR

Avantages

La VaR est une mesure de risque, un indicateur simple et facilement interprétable. on peut aussi dit la VaR est une représentation du risque par un chiffre, ce chiffre s'exprime dans une unité facile à appréhender (généralement un montant dans une devise donnée). La VaR est devenu un standard en finance, est un indicateur adapté aux différents types de risque, elle est proposé par JP Morgan dans les années 90 (RiskMetrics©) est peu à peu étendu à l'ensemble de la communauté financière.

Le champ d'application de ce mesure de plus en plus vaste (activités de marché, gestion de portefeuille, financement...), la VaR est aussi bien utilisée par les opérationnels que par la direction générale pour :

- Le calcul de la VaR sur une position ou sur l'ensemble d'un portefeuille.
- Suivi du risque pour les différents métiers d'une banque.
- Allocation de fonds propres économiques en couverture des risques.

La VaR répond également à une exigence réglementaire sur le niveau de fonds propres des établissements bancaires.

Elle est probabiliste, et fournit à un gestionnaire des risques l'information utile sur les probabilités associées avec montants spécifiques de perte. La VaR est universel, elle peut être mesurée sur des portefeuilles de n'importe quel type.

Inconvénients

Plusieurs auteurs ont précisé les insuffisances de la VaR

- La VaR n'est qu'un montant de perte potentiel et son évaluation peut être assez imprécise.
- Elle seule d'un niveau prédéterminé α ne fournit aucune information sur l'épaisseur de la queue supérieur de la fonction de répartition au-delà ce quantile. En d'autres termes, en se concentrant sur la VaR à un certain niveau, on ignore la sévérité potentielle du défaut au-delà de ce seuil. Ceci signifie qu'on n'a aucune information sur à quel point les mauvaises choses peuvent devenir dans une situation réelle de stress.
- Cette mesure de risque peut être très dangereuse et on peut rencontrer des cas où

$$VaR[X, \alpha] \leq E[X]$$

c-à-d la VaR ne possède pas de chargement de sécurité.

Artzner et al. [1] ont montré que la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle ne satisfait pas la condition de sous additivité qui déclare qu'une mesure de risque devrait toujours refléter les avantages de la diversification. Alors, la VaR comme mesure de risque contredit le principe de la diversification qui stipule que l'agrégation de différents actifs dans un portefeuille permet de réduire le risque et par conséquent, elle ne se comporte pas bien en ce qui concerne l'addition des risques, créant des problèmes sévères d'agrégation.

3. Calcul de la Valeur à Risque

Comme il a été mentionné dans la section précédente, la VaR dépend de deux données essentielles : le niveau de confiance et l'horizon de temps :

- Le niveau de confiance représente la probabilité que le gestionnaire se fixe (en général supérieur à 95%) ce qui signifie que selon le modèle il y a 95% de chances que la perte encourue par la banque durant la période de détention soit inférieure au chiffre VaR.
- L'horizon de temps représente la durée considérée, autrement : "le temps nécessaire pour déboucler des positions dans des univers dont la liquidité est assurée" (Demilie [33]).

L'équation générique de la Valeur à Risque peut être alors posée de la façon suivante :

$$Pr[L_t \leq VaR] = \alpha \quad (2.1)$$

où L_t représente la variable aléatoire perte. La VaR n'est alors que le quantile Q_α de la variable perte L_t . L'équation (2.1) montre que la connaissance de la fonction de répartition est importante afin de déterminer la VaR. En effet :

$$VaR_\alpha = F_{L_t}^{-1}(\alpha)$$

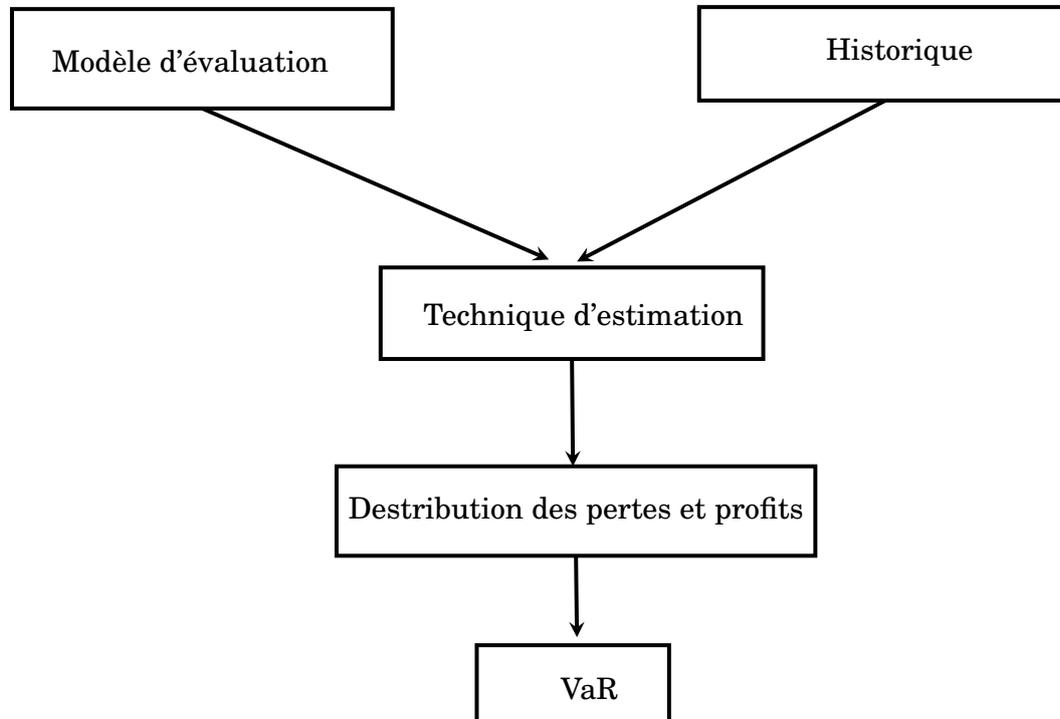
où $F_{L_t}(\alpha)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire L_t et $F_{L_t}^{-1}(\alpha)$ la fonction inverse associée, nommée aussi le quantile de L_t . Toutefois, la vraie distribution des rendements est rarement connue.

Calculer la Valeur à Risque nécessite trois grandes étapes importantes :

- La spécification d'un horizon temporel, c'est à dire la période de temps utilisée pour l'échantillonnage des variables.
- L'identification des différents facteurs de risque auxquels s'expose le portefeuille.
- La génération de la distribution des changements des valeurs du portefeuille (distribution des pertes et profits)

4. Problématique

L'étape critique dans la détermination de la VaR, est l'obtention de la distribution des changements de valeurs du portefeuille (i.e. la distribution des pertes et profits potentiels).



Problématique générale de l'obtention de la VaR

Dans ce qui suit, nous examinerons de plus près, les différentes étapes de cette problématique.

Étudions d'abord le cas simple où la variable aléatoire perte L_t suit une loi normale de moyenne $E(L_t)$ et de variance $\sigma^2(L_t)$. D'après la définition générale de la VaR, nous avons :

$$Pr[L_t \leq VaR_\alpha] = \alpha$$

Nous pouvons aussi écrire :

$$Pr\left[\frac{L_t - E(L_t)}{\sigma(L_t)} \leq \frac{VaR_\alpha - E(L_t)}{\sigma(L_t)}\right] = \alpha$$

L'expression

$$\frac{VaR_\alpha - E(L_t)}{\sigma(L_t)}$$

représente le quantile de la distribution normale centrée réduite, que nous allons noter par Z_α :

$$Z_\alpha = \frac{VaR_\alpha - E(L_t)}{\sigma(L_t)}$$

Ainsi

$$VaR_\alpha = E(L_t) + Z_\alpha \sigma(L_t) \quad (2.2)$$

Les valeurs du quantile Z_α se trouvent dans la table de la distribution normale centrée réduite [30].

4.1. Modèles d'évaluation

Les méthodes d'estimation de la distribution des pertes et profits utilisent souvent des modèles d'évaluation, exprimant le prix des actifs financiers p d'un portefeuille en fonction des différents facteurs de risque X_1, X_2, \dots, X_n et un terme d'erreur ϵ :

$$p = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \epsilon \quad (2.3)$$

Ces modèles d'évaluation peuvent être :

- Linéaires : actions (e.g. le modèle CAPM (Capital Asset Pricing Model))
- Non-linéaires : bons, obligations, options, swaps de taux d'intérêts.

- Modèles linéaires

Soit p_t le prix d'un actif à l'instant t . Dans le cas linéaire, la variation du prix $\Delta_t p$ est une fonction du 1^{ier} degré des variations $(\Delta X_i)_{i=1, \dots, n}$ des différents facteurs de risque et de celle du résidu $\Delta \epsilon$:

$$\Delta p = a + b \Delta X + \Delta \epsilon$$

En supposant que les $(\Delta X_i)_{i=1, \dots, n}$ et $\Delta \epsilon$ ne sont pas corrélés et que la moyenne $E(\Delta \epsilon) = 0$, nous avons

$$E(\Delta p) = a + bE(\Delta X),$$

$$var(\Delta p) = b^2 var(\Delta X) + var(\Delta \epsilon).$$

Posons

$$E(\Delta X) = E_X,$$

$$var(\Delta X) = \sigma_X^2,$$

$$var(\Delta \epsilon) = \sigma_\epsilon^2,$$

Ainsi

$$E(\Delta p) = a + bE_X.$$

$$var(\Delta p) = b^2 \sigma_X^2 + \sigma_\epsilon^2.$$

Si la variable perte, étant $L_t = -\Delta p$, suit une loi normale, alors la VaR pour un niveau de confiance α est donnée par

$$VaR_\alpha = -a - bE_X + z_\alpha \sqrt{b^2\sigma_X^2 + \sigma_\epsilon^2}$$

– Modèles non-linéaires

Dans le cas le plus général, où la fonction f de la relation (2.3) est non-linéaire, la détermination de la moyenne et l'écart-type devient plus complexe.

Lorsque le temps n'est pas pris en considération, l'évaluation est faite à l'aide d'un développement de Taylor :

$$\begin{aligned} \Delta p &= \sum_{i=1}^n f'_{X_i}(X_1, X_2, \dots, X_n) \Delta X_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{X_i X_j}(X_1, X_2, \dots, X_n) \Delta X_i \Delta X_j \\ &\quad + \dots + \Delta \epsilon. \\ \Delta p &\approx \sum_{i=1}^n f'_{X_i}(X_1, X_2, \dots, X_n) \Delta X_i + \Delta \epsilon \end{aligned}$$

Lorsque les variations des facteurs de risque sont faibles, nous pouvons négliger les termes du second ordre et plus. Par conséquent, nous retrouvons le cas d'un modèle linéaire.

Dans le cas d'actifs qui dépendent du temps, il est nécessaire de construire des modèles spécifiques qui tiennent compte de cette composante supplémentaire. À titre d'exemple, nous pouvons citer le modèle de Black Scholes [6] pour les actifs optionnels.

4.2. Historique

L'historique représente les observations des prix des différents titres, pour un certain nombre de périodes passées. Le tableau suivant illustre un exemple d'un historique des taux de change (USD/CAD) durant le mois de février 2002.

<i>Date</i>	<i>USD/CAD</i>
2002-02-28	1.605132
2002-02-27	1.606660
2002-02-26	1.605506
2002-02-25	1.597662
2002-02-24	1.590717
2002-02-23	1.590717
2002-02-22	1.590717
2002-02-21	1.588668
2002-02-20	1.590758
2002-02-19	1.589277
2002-02-18	1.590591
2002-02-17	1.591269
2002-02-16	1.591269
2002-02-15	1.591269
2002-02-14	1.589670
2002-02-13	1.595006
2002-02-12	1.591454
2002-02-11	1.593700
2002-02-10	1.596796
2002-02-09	1.596796
2002-02-08	1.596796
2002-02-07	1.604571
2002-02-06	1.601916
2002-02-05	1.598641
2002-02-04	1.590352
2002-02-03	1.588160
2002-02-02	1.588160
2002-02-01	1.588160

TABLE 2.1 : Exemple d'un historique des taux de change *USD/CAD*

4.3. Techniques d'estimation

Une fois le modèle spécifié et les rendements historiques obtenus , nous passons à la deuxième étape qui est l'application d'une méthode d'estimation.

Trois grandes méthodes classiques ont été mises en œuvre pour l'estimation de la distribution des pertes et profits :

1. La méthode paramétrique ou la méthode de la matrice des variances-covariances.
2. La méthode de simulation historique.

3. La méthode de simulation Monte Carlo.

Chacune de ces méthodes utilise les données du passé pour estimer les variations potentielles de la valeur du portefeuille dans le futur proche. Ceci suppose implicitement, que le futur se comporte comme le passé.

Nous pouvons ajouter que le résultat de chacune de ces méthodes est la distribution des pertes et profits qui va nous servir de base pour la déduction de la valeur de la VaR.

La distribution des pertes et profits

Soit P_t la valeur du portefeuille à l'instant t (t peut être une journée, dix jours, etc ...), alors la variable

$$\Delta p = p_t - p_{t-1} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

représente les variations ou les changements de valeurs du portefeuille durant une certaine période T .

où T représente la taille de l'historique et ($t = 0$) représente la valeur actuelle de l'actif. Notons par f_{Δ_p} la densité de probabilité de la variable Δ_p , et α un intervalle de confiance quelconque. D'après l'équation (2.1), nous avons :

$$\begin{aligned} Pr[\Delta_p \leq VaR] &= \alpha \\ \int_{-\infty}^{VaR} f_{\Delta_p}(x) dx &= \alpha \end{aligned}$$

Dans RiskMetric, J.P Morgan suppose que les rendements d'un portefeuille suivent une loi normale. Cette hypothèse simplifie énormément le calcul de la VaR. Cependant, ce n'est pas toujours le cas. Un contre exemple est le cas d'option. Dans ce qui suit, nous allons présenter les grandes méthodes d'estimation de la Valeur à Risque, des exemples seront présentés au besoin.

La méthode historique

la méthode historique est l'observation du comportement historique de la position, c'est la première méthode et la plus simple à utiliser. Elle ne pose pas d'hypothèses sur les rendements en termes de distribution ou d'indépendance. Elle repose sur la stationnarité des variations des différents facteurs de risque pour l'horizon choisi, et réplique aujourd'hui les fluctuations du passé.

les différentes étapes à suivre pour calculer la VaR au seuil α d'un portefeuille à une date t avec la méthode historique sont les suivantes (la longueur de l'historique est déterminée à l'avance à N jours)

1. Récupérer la composition (nom de chaque actif et quantité de l'actif) du portefeuille à la date t .
2. Calculer les N rendements historiques de chacun des actifs composant le portefeuille à la date t .
3. Recomposer la distribution historique des valeurs du portefeuille (avec sa composition à la date t) : calculer sa valeur fictive à la première date de l'historique et appliquer les rendements de chaque actif qui le compose à chaque date jusqu'à la date t .
4. Classer et numéroter par ordre croissant les N différentes variations (pertes ou gains)fictives du portefeuille reconstitué et obtenir ainsi une distribution de N variations.
5. On détermine le quantile souhaité associé à ces simulations.

La méthode paramétrique

La méthode paramétrique ou la méthode des variances-covariances a été proposée et développée par J.P. Morgan en 1994. C'est un modèle statistique qui suppose que les changements des prix d'un portefeuille sont distribués selon une loi normale.

Cette méthode se déroule en cinq étapes distinctes :

1. On détermine un modèle d'évolution des gains/pertes du portefeuille en fonction des divers facteurs de risque (qui peuvent être les rendements des actifs financiers constitutifs du portefeuille).
2. On fait le choix de lois paramétriques pertinentes qui correspondent aux qualités distributionnelles des facteurs de risque.
3. On estime les paramètres de ces lois à partir des données passées suivant les méthodes statistiques classiques (méthode des moments ou du maximum de vraisemblance).
4. On détermine la loi de distribution des pertes et profits à partir du modèle choisi.
5. On calcule le quantile associé au seuil de confiance.

La méthode monté carlo

La simulation Monte Carlo est une méthode numérique qui est utilisée lorsqu'il est difficile de déterminer la distribution d'un échantillon à partir d'un raisonnement mathématique. Elle est basée sur le tirage de nombres aléatoires. Généralement, nous utilisons des séries de nombres pseudo-aléatoires générées par des algorithmes spécialisés.

1- Principe de la méthode

Le principe de la méthode consiste à générer des valeurs d'une variable aléatoire X , dont la fonction de distribution F_x est connue. Il existe plusieurs méthodes pour obtenir des valeurs d'une variable aléatoire uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$. Nous pouvons par exemple utiliser des logiciels de génération de nombres pseudo aléatoires. La simulation Monte Carlo consiste alors à transformer ces valeurs, en utilisant la fonction réciproque de F_X (Puisque l'ensemble des valeurs de la fonction F_x est l'intervalle $[0, 1]$) (Figure suivante). Ainsi, pour chaque valeur u générée on calcule son quantile $Q_x(u)$.

Il faut noter que la variable $Q_x(U)$ est distribuée suivant la loi de X . En effet :

$$\begin{aligned} P[Q_x(U) \leq a] &= P[F_X(Q_x(U)) \leq F_X(a)] \\ &= P[U \leq F_X(a)] \\ &= F_X(a) \end{aligned}$$

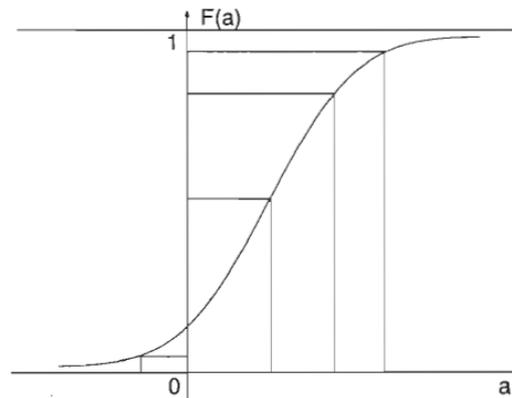


FIGURE 2.2 : Simulation monté carlo

2- Estimation de la VaR par la méthode Monte Carlo

La méthode de simulation Monte Carlo a été adoptée par Bankers Trust. L'estimation de la *VaR* par la méthode Monte Carlo, est basée sur la simulation des facteurs de risque dont on se donne une loi de distribution admissible avec l'historique.

Il suffit alors de calculer le quantile correspondant tout comme pour la simulation historique. Cette méthode consiste à valoriser le portefeuille en appliquant ces facteurs simulés.

Il suffit alors de calculer le quantile correspondant tout comme pour la simulation historique. La seule différence entre ces deux approches est que la méthode historique utilise les facteurs passés, alors que la méthode Monte Carlo utilise des facteurs simulés.

On peut définir 6 étapes distinctes :

1. On détermine un modèle d'évolution des gains/pertes du portefeuille en fonction des divers facteurs de risque.
2. On choisit des modèles d'évolution paramétriques pour chaque facteur de risque.
3. On estime les paramètres de ces modèles à partir des données historiques.
4. On simule un grand nombre de gains/pertes.
5. On classe ces profits ou pertes dans l'ordre croissant et on crée l'histogramme de la distribution.
6. On détermine le quantile souhaité associé à ces simulations.

3

les copules

Introduction

La distribution normale multivariée a souvent servi de modèle. Ce type de distribution est attrayant dans la mesure où les lois marginales sont elles aussi normales et que la dépendance est entièrement déterminée par le coefficient de corrélation.

Mais la loi normale n'est malheureusement pas toujours la plus appropriée à l'étude de certains phénomènes. Pour pallier à ceci de nombreuses distributions bivariées ont été développées, nous pensons notamment à la Pareto bivariée ou bien à la loi Gamma.

Mais, encore une fois, ces lois n'ont pas que des avantages. D'une part, le "paramètre d'association" se retrouve souvent dans les lois marginales, d'autre part ces lois marginales sont de la même famille.

Les copulas vont nous permettre la construction de distribution multivariées qui n'ont pas tous ces défauts. Les copulas, qui ne sont ni plus ni moins que des fonctions, vont nous permettre d'établir un lien entre les lois marginales et la distribution multivariée.

L'objectif de ce chapitre est de donner des bases théoriques sommaires mais néanmoins nécessaires à la bonne compréhension des copulas.

1. Quelques rappels concernant les distributions multivariées et la loi uniforme

1.1. Définition de la fonction de répartition conjointe

Considérons un vecteur aléatoire en n -dimensions $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. On appelle alors fonction de répartition conjointe de $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, la fonction de n variables réelles définie par :

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

1.2. Définition des lois marginales

Cette fonction de répartition conjointe nous permet d'établir les fonctions de répartition F_1, \dots, F_n des variables aléatoires marginales X_1, \dots, X_n (donc les fonctions de répartition marginales) comme suit :

$F_i(X_i) = P(X_i \leq x_i) = F(\infty, \dots, \infty, x_i, \dots, \infty, \dots, \infty)$. La dernière expression doit se comprendre comme la limite lorsque chaque composante $x_j (j \neq i)$ tend vers l'infini.

1.3. lois de probabilité absolument continues

la fonction de répartition de X est dite absolument continue s'il existe une fonction f telle que :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

la fonction f est alors appelée densité de probabilité conjointe de la loi de X .

Si la loi de X est absolument continue, alors ses variables aléatoires marginales sont absolument continues et sa densité conjointe détermine les densités marginales $f_i(x_i)$ ainsi

$$f_i(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) dX_1 \dots dX_{i-1} dX_{i+1}, \dots, dX_n$$

1.4. Définition et propriétés de la loi uniforme

Une variable aléatoire U à valeurs dans $[0, 1]$ est dite uniformément répartie sur $[0, 1]$ si elle est absolument continue et admet pour densité : $f(x) = 1_{[0,1]}(x)$

Il est très facile de montrer que :

$$E[U] = 1/2 \quad \text{et} \quad \text{Var}(U) = 1/12$$

Théorème 1.1 Soit X une variable aléatoire ayant pour fonction de répartition F . Notons F^{-1} la fonction-quantile de F , et $\alpha \in [0,1]$

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x/F(x) \geq \alpha\}$$

alors :

-Pour toute variable aléatoire U uniformément répartie sur $[0,1]$ ($U \sim U(0,1)$) alors $F^{-1}(U) \sim F$.

-Si F est continue alors la variable aléatoire $F(X)$ est uniformément répartie sur $[0,1]$, $F(X) \sim U(0,1)$.

La notation $X \sim F$ signifie bien entendu que la variable aléatoire X a F pour fonction de répartition. Ce théorème est des plus importants.

2. Les mesures de dépendance

2.1. le coefficient de corrélation

Ce coefficient est un indice qui caractérise une relation linéaire entre deux variables aléatoire.

Définition 2.1 [42]

soient X et Y deux variables aléatoire possédent des moments d'ordre 2. Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y , noté $\rho(X, Y)$, est défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

$\text{Cov}(X, Y)$ désigne la covariance entre X et Y , $\text{Var}(X)$ et $\text{Var}(Y)$ sont les variance de X et Y respectivement.

ce coefficient n'est pas généralement constant par transformation croissantes non-linéaires. En effet, il constitue une mesure de dépendance adaptée seulement pour des variables quantitatives et pour les liaisons linéaire. Mais, il reste le cas des variables qualitative, en plus. la notion d'association et d'indépendance ne peut pas être restreinte aux liaisons linéaire. En effet, qu'il existe des variable qui ont un faible coefficient de corrélation linéaire et qui cependant sont très liées par une relation monotone autre que linéaire. Les coefficient de tau de Kendall et rho de Spearman sont d'autre alternatives de mesures de dépendance.

2.2. Les coefficients de corrélation de Kendall et de Spearman

La définition de ces deux coefficients est liée à la notion de concordance. Ils constituent une alternative au coefficient de corrélation linéaire

Notion de concordance

Définition 2.2 Notons (x, y) et (x', y') deux observations d'un vecteur aléatoire (X, Y) , alors (x, y) et (x', y') sont dites **concordantes** si :

$$(x - x')(y - y') > 0 \Leftrightarrow (x < x' \text{ et } y < y') \text{ ou } (x > x' \text{ et } y > y')$$

Pour un n -échantillon de n observations d'un couple $(X; Y)$. Il existe $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ pairs de distributions de couples (x_i, y_i) (x_j, y_j) qui sont soit concordantes.

a- Tau de Kendall

Soient (X, Y) (X', Y') deux vecteurs aléatoires continus i.i.d de fonction de répartition conjointe H et de fonctions marginales F pour $(X \text{ et } X')$ et G (pour $Y \text{ et } Y'$). Le tau de Kendall noté τ est défini par :

$$\tau = P((X - X')(Y - Y') > 0) - P((X - X')(Y - Y') < 0)$$

ainsi

$$- 1 \leq \tau \leq 1$$

- si X et Y sont comonotones alors $\tau = 1$

- si X et Y sont antimonotones alors $\tau = -1$

- si X et Y sont indépendantes alors $\tau = 0$

- si α et β sont des fonctions strictement croissantes, alors $\tau(\alpha(X), \beta(Y)) = \tau(X, Y)$

Malheureusement, lorsque $\tau = 0$ les variables X et Y ne sont pas forcément indépendantes.

b- Le Rho de Spearman

Pour donner une définition du coefficient de corrélation de Spearman, il est non seulement nécessaire de conserver les paires (X, Y) et (X', Y') définies dans la partie précédente, mais en plus d'y rajouter une autre paire identique (X^*, Y^*) .

Ce coefficient se définit :

$$\rho_s = 3(P[(X - X')(Y - Y^*) > 0] - P[(X - X')(Y - Y^*) < 0])$$

Les propriétés du ρ de Spearman sont les mêmes que celles du τ de Kendall, à savoir

- $-1 \leq \rho_s \leq 1$
- si X et Y sont comonotones alors $\rho_s = 1$
- si X et Y sont antimonotones alors $\rho_s = -1$
- si X et Y sont indépendantes alors $\rho_s = 0$
- si α et β sont des fonctions strictement croissantes, alors $\rho_s(\alpha(X), \beta(Y)) = \rho_s(X, Y)$

3. La copule

Les copules permettent l'introduction et la caractérisation d'une forme très flexible de dépendance entre différentes variables aléatoires. Elles servent à établir une fonction de répartition multivariée à partir des fonctions de répartition marginales .

3.1. Définition d'une copule

Une copule est une fonction de répartition multivariée C définie sur l'hypercube $[0, 1]^n$ et dont les marginales sont uniformes sur $[0, 1]$. Elle est définie par l'équation suivante :

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) \quad (3.1)$$

u_1, u_2, \dots, u_n sont des variables aléatoires de lois uniformes sur $[0, 1]$. Dans toute la suite I désigne l'intervalle $[0, 1]$.

la copule C est une fonction de $I^n \rightarrow I$ définie par les caractéristiques suivantes :

- i.** pour tout vecteur aléatoire $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in I^n$, $C(\mathbf{u}) = 0$ si au moins une coordonnée de \mathbf{u} est égale à 0.

ii. $C(1, \dots, 1, u_j, 1, \dots, 1) = u_j, \forall j \in 1, \dots, n$

iii. C est n-croissante ,c'est-à-dire : $\forall \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ dans I^n tels que $u_i \leq v_i$, pour $i = 1, \dots, n$, on a :

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} \times C(x_{1_{i_1}}, \dots, x_{n_{i_n}}) \geq 0$$

ou $x_{1_j} = u_j$ et $x_{2_j} = v_j, \forall j \in 1, \dots, n$

dans le cas à deux dimensions, la propriété (iii) se résume à :

pour tout $u_1 \leq v_1$ et $u_2 \leq v_2$

$$C(u_1, v_1) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_2, v_2) \geq 0$$

3.2. Propriétés des copules

Théorème 3.1 (continuité)[34]

Soit C une copule bivariée, pour tout $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$ on a :

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \quad (3.2)$$

Théorème 3.2 (différentiabilité)[10]

Soit C une copule bivariée $\forall u_1, u_2 \in I$

- les dérivés partielle $\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_j}$ existent p.s et $0 \leq \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_j} \leq 1 \quad \forall j = 1, 2$

- Les fonctions $u \rightarrow \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$ et $v \rightarrow \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$ sont bien définies et décroissantes sur I p.s

Théorème de sklar

Il est fait appel au théorème de sklar, du nom de celui qui a introduit le concept copule en 1959.

Ce théorème précise comment il est possible de relier le principe de la copule à la fonction de répartition bivariée et aux lois marginales.

Le théorème suivant est fondamental dans la théorie des copules.

Théorème 3.3 (sklar)[34]

Soit H une fonction de répartition conjointe de n variables aléatoires x_1, \dots, x_n dont les marginales sont F_1, \dots, F_n . Alors il existe une copule C tel que : $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$,

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (3.3)$$

Ainsi, la copule combine les marginales en formant la distribution multivariée.

Ce théorème fournit à la fois une paramétrisation des distributions multivariées et un schéma de construction pour les copules.

D'après [34], si les marginales sont continues, alors C est unique si non C est uniquement déterminée en fonction de $ImF_1 \times ImF_2 \times \dots ImF_n$.

Réciproquement, si C est une copule a n dimension et que F_1, \dots, F_n sont des fonctions de répartition, alors la fonction H définie ci-dessus est une fonction de répartition conjointe à n dimension dont les marginales sont F_1, \dots, F_n .

Corollaire 3.1 (inversion de sklar)

Soient H, C, F_1, \dots, F_n comme définies précédemment, et soient $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ les quasi-inverses de F_1, \dots, F_n respectivement. supposons que F_1, \dots, F_n sont continue alors $\forall \mathbf{u} \in [0, 1]^n$,

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (3.4)$$

Exemple

Pour illustrer l'application du théorème de Sklar, soient deux variables aléatoires X_1 et X_2 de fonction de répartition

$$H(x_1; x_2) = (1 - e^{-x_1} - e^{-x_2}) \quad x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Les marges de H sont :

$$F_1(x_1) = (1 - e^{-x_1})^{-1} \quad \text{et} \quad F_2(x_2) = (1 - e^{-x_2})^{-1}$$

de telle sorte que

$$F_1^{-1}(u) = F_2^{-1}(u) = -\log\left(1 - \frac{1}{u}\right)$$

En appliquant l'équation (3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= (1 - e^{F_1^{-1}(x_1)} - e^{F_2^{-1}(x_2)})^{-1} \\ &= (1 - (1 - \frac{1}{u_1}) - (1 - \frac{1}{u_2}))^{-1} \\ &= (\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - 1)^{-1} \\ &= \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2} \end{aligned}$$

Bornes de Fréchet-Hoeffding

Définissons tout d'abord trois copules importantes :

1. **la copule minimum** : qui a pour expression

$$W = C^-(u_1, \dots, u_n) = \max(\sum_{i=1}^n u_i - n + 1, 0) \quad \text{avec } (u_1, \dots, u_n) \in I^n.$$

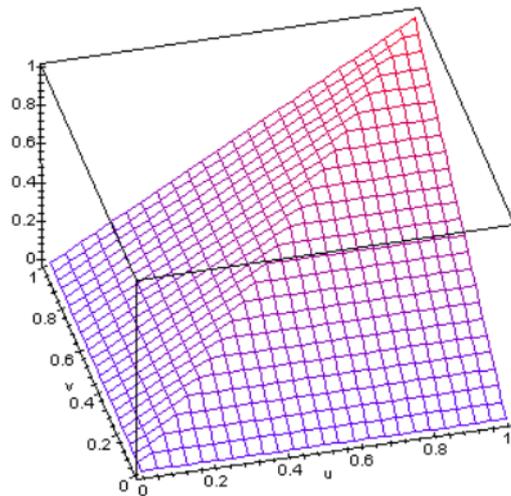


FIGURE 3.1 : Représentation de la copule minimum

2. **la copule maximum** : qui est notée par

$$M = C^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n) \quad \text{avec } (u_1, \dots, u_n) \in I^n.$$

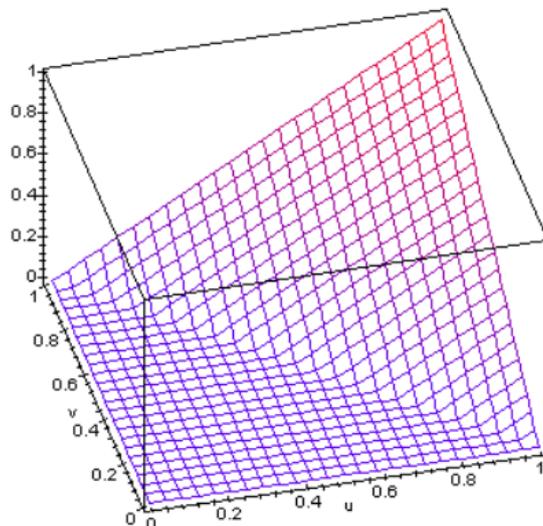


FIGURE 3.2 : Représentation de la copule maximum

3. **La copule produit** : qui est notée par

$$\Pi = C^\perp(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i \quad \text{avec } (u_1, \dots, u_n) \in I^n$$

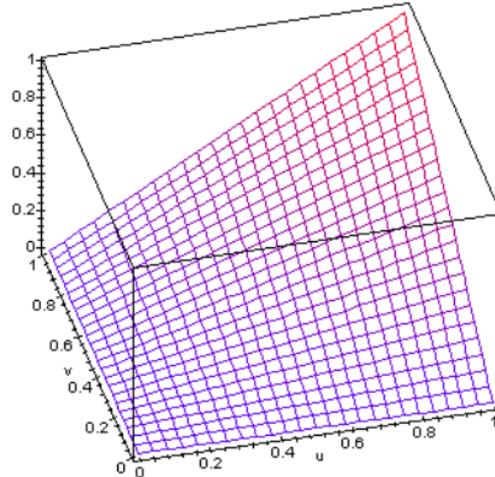


FIGURE 3.3 : Représentation de la copule d'indépendance

Les copules minimum C^- et maximum C^+ sont essentielles puisqu'elles définissent des copules extrémales de toute copule, que l'on appelle les bornes de Fréchet.

Pour toute copule C , nous avons :

$$W = C^-(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq C^+(u_1, \dots, u_n) = M$$

Densité d'une copule

et c est la densité de la copule C définie par :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$$

La densité f d'une fonction de distribution F , peut s'écrire en fonction de la densité c de la copule associée et des densités des marginales f_1, f_2, \dots, f_n :

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \times \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

et c est la densité de la copule C définie par :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$$

Propriété d'invariance

C est invariante par transformation croissante.

Si T_1, \dots, T_n sont des fonctions strictement croissantes, alors $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))$ a la même copula que (X_1, \dots, X_n) .

Preuve[18] : Notons F_i la fonction de répartition de X_i et T_i^{-1} la fonction inverse généralisée de T_i .

La variable $T_i(X_i)$ a pour fonction de répartition $G_i = F_i \circ T_i^{-1}$ et donc :

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &= P(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \dots, X_n \leq F_n^{-1}(u_n)) \\ &= P(T_1(X_1) \leq T_1 \circ F_1^{-1}(u_1), \dots, T_n(X_n) \leq T_n \circ F_n^{-1}(u_n)) \\ &= P(T_1(X_1) \leq G_1^{-1}(u_1), \dots, T_n(X_n) \leq G_n^{-1}(u_n)) \end{aligned}$$

4. Exemple des Copules Paramétriques

On va présenter quelques copules paramétriques les plus utilisées dans le cas multivariées, ainsi que leurs propriétés accompagnées de présentation graphique.

Nous commencerons par les copules Archimédiennes qui constituent une classe très importante des copules ainsi que ses trois familles, les plus connues (Frank, Clayton, Gumbel). Puis nous présenterons la famille des copules Elliptiques, en donnant les deux exemples les plus utilisés de cette famille qui sont la copule Gaussienne et la copule de Student.

4.1. Copules Archimédiennes

Définition 4.1 Soit φ une fonction continue, strictement décroissante définie de $[0, 1]$ vers $[0, \infty]$ telle que $\varphi(1) = 0$, La fonction pseudo-inverse de φ , notée $\varphi^{[-1]}$ avec $\text{dom} \varphi^{[-1]} = [0, \infty]$ et $\text{Ran} \varphi^{[-1]} = [0, 1]$ est définie comme suit :

$$\varphi^{[-1]} = \begin{cases} \varphi^{-1} & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Remarque que $\varphi^{[-1]}$ est continue, et strictement décroissante sur $[0, \varphi(0)]$.

En outre $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ sur $[0, 1]$ et

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0) & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

si $\varphi(0) = \infty$, alors $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Théorème 4.1 Soient φ une fonction continue, strictement décroissante de $[0, 1]$ vers $[0, \infty]$ telle que $\varphi(1) = 0$ et $\varphi^{[-1]}$ la fonction pseudo-inverse de φ .
Soit C la fonction définie de $[0, 1]^2$ vers $[0, 1]$ telle que :

$$C(u_1, u_n) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))$$

Cette fonction est une Copula si et seulement si φ est convexe. Ce type de copula est appelé Copula Archimédienne, et la fonction φ est plus connue sous le nom de **générateur** de la copula.

C vérifie les propriétés fondamentales d'une copule (i) et (ii)
la fonction C est 2-croissante si et seulement si :

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1 \quad \forall u_1 \leq u_2$$

cette condition nécessaire et suffisante pour que la fonction C soit 2-croissante.

Propriétés d'une copule Archimédienne [34]

Théorème 4.2 [1]

soit C une copule Archimédienne et φ son générateur, alors

1. C est symétrique.

2. C est associative, c'est à dire $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ pour tout $u, v, w \in [0, 1]$:

L'associativité des copules Archimédiennes n'est pas nécessairement une propriété commune pour toutes les copules.

Le tau de Kendall

Le tau de Kendall pour les copules archimédienne peut être évalué directement du générateur, ce qui sera montré dans le théorème suivant :

Théorème 4.3 [31]

Soient X et Y deux variables aléatoires d'une copule Archimédienne C générée par φ . Le tau de Kendall de X et Y est donné par :

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$$

Les trois familles de copules archimédiennes :

1- Copule de Frank

La copule de Frank permet de modéliser les dépendances aussi bien positives que négatives. Le générateur de cette copule archimédienne est :

$$\varphi(u) = -\ln\left(\frac{e^{-\alpha u} - 1}{e^{-\alpha} - 1}\right)$$

où $\alpha \neq 0$ et $u \in]0, 1]$.

la copule de Frank s'écrit sous la forme suivante :

$$C_\alpha(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{(e^{-\alpha} - 1)^{n-1}} \prod_{i=1}^n (e^{-\alpha u_i} - 1)\right)$$

Les cas limites sont donc les suivants :

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} C_\alpha = C^-$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} C_\alpha = C^+$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_\alpha = C^\perp$$

2- La Copula de Clayton

La Copula de Clayton, aussi connu sous le nom copule de Cook-Johnson, dont le générateur est défini, pour $\alpha > 0$ et pour $u \in]0, 1]$ par :

$$\varphi(u) = \alpha^{-1}(u^{-\alpha} - 1)$$

la copule de Clayton s'écrit sous la forme suivante :

$$C_\alpha(u_1, \dots, u_n) = \left(1 - n + \sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Les cas limites suivant la valeur du paramètre sont donc :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_\alpha = C^+$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} C_\alpha = C^\perp$$

3- La copula de Gumbel

Prenons comme générateur :

$$\varphi(u) = (-\ln(u))^\alpha$$

la copule de Gumbel s'écrit sous la forme suivante :

$$C_\alpha(u_1, \dots, u_n) = \exp\left(-\left[\sum_{i=1}^d (-\ln(u_i))^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

Les cas limites suivant la valeur du paramètre sont donc :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} C_\alpha = C^\perp$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} C_\alpha = C^+$$

4.2. Copules elliptiques

Les copules elliptiques sont définies à partir des lois elliptiques. une copule dite elliptique, Pour un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$, on dira que X suit une loi elliptique s'il admet la représentation suivante :

$$X = \mu + R\Sigma^{1/2}U$$

où μ est la moyenne, si elle existe, R une variable aléatoire positive indépendante de U , Σ une matrice (matrice de variance-covariance, si elle existe) et U est un vecteur aléatoire uniforme sur la sphère unité dans R^n (voir [44] pour plus de détails). Les courbes de niveau des densités de telles distributions forment des ellipses d'excentricité constante [34]. Dans ce qui suit, nous donnons quelques définitions de la distribution elliptique ainsi que deux exemples classiques de cette famille de copule : la copule Gaussienne et la copule de Student.

Définition 4.2 La fonction de densité d'une distribution elliptique (si elle existe) est donnée par :

$$f(x) = (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)')$$

où g est une fonction définie R^+ dans R , dite génératrice de densité.

1- La copule gaussienne

La copule gaussienne ne présente pas de dépendance de queue et n'est donc pas adaptée à des valeurs extrêmes. L'importance de cette copule réside dans le fait qu'elle est sous-jacente à la distribution normale multi-variée. En effet, modéliser la structure de dépendance d'un échantillon par une copule gaussienne est cohérent avec la mesure de cette dépendance par le coefficient de corrélation linéaire. La fonction de distribution de la copule gaussienne n -dimensionnelle, s'écrit pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$.

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi_{\Sigma}(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_n))$$

La fonction de distribution ϕ^{-1} est l'inverse de la distribution normale centrée réduite univariée.

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est :

$$\phi_{\Sigma}(x) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}x\Sigma^{-1}x')}{(2\pi)^{n/2}\mathbf{det}(\Sigma)^{1/2}}$$

En dérivant la formule définissant la copule gaussienne on peut facilement extraire la densité de la copule gaussienne n -variée qui s'écrit :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{\mathbf{det}(\Sigma)^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}\beta(\Sigma^{-1} - I_n)\beta')$$

ou I_n est la matrice unité de l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n^2 et $\beta = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$

2- La copule de student

La copule de Student (t copula) est la copule sous-jacente à une distribution multi-variée de Student. Cette structure de dépendance capte les dépendances extrêmes positives et négatives. Elle est construite de la même manière que la copule gaussienne mais à partir de la distribution de Student centrée réduite. La fonction de densité de la copule de Student n -variée, s'écrit pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{f_{v, \Sigma}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n))}{\prod_{i=1}^n f_v(t_v^{-1}(u_i))}$$

La fonction de distribution t_v^{-1} est l'inverse de la distribution de Student centrée réduite univariée à V degrés de liberté. La fonction $f_{v,\Sigma}$ est la densité de probabilité de la loi de Student centrée réduite, Σ sa matrice de corrélation et f_v est la densité uni-variée de la loi de Student centrée réduite ($\Sigma = 1$). A titre de rappel sa densité s'écrit pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$:

$$f_{v,\Sigma}(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+n}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\sqrt{(\pi v)^n \det(\Sigma)}} \left(1 + \frac{x \Sigma^{-1} x'}{v}\right)^{-(v+n/2)}$$

ou Γ est la fonction gamma[44].

Conclusion

La théorie des copules montrée sa "robustesse" en particulier lors de son application dans la modélisation de la troncature dépendante. Cependant cette théorie n'est pas utilisée de façon à explorer ses potentialités. Son application dans des domaines comme l'assurance non-vie, segmentation d'image et la finance peut montrer son utilité.

4

Modélisation des dépendances dans le modèle classique de ruine par une copule

Introduction

L'objectif de ce travail est de modéliser l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance et d'évaluer sa probabilité de ruine. Dans la modélisation des risques d'assurance et de réassurance, on peut relever différentes natures de dépendance. Parmi les nombreux outils mathématiques possibles pour prendre en compte de telles dépendances, nous proposons dans ce mémoire l'utilisation des copules pour les dépendances entre les montants des sinistres d'une part et entre les inter-arrivées des sinistres d'autre part pour le calcul de la probabilité de ruine .

1. Simulation directe du processus de surplus $R(t)$

1.1. Algorithme de la simulation

L'idée générale de cet algorithme est d'exploiter la propriété du processus de Poisson composé selon laquelle le temps entre deux réclamations successives, suit une distribution exponentielle. Soit $t_{i0 \leq i \leq N}$ l'ensemble des instants où surviennent les réclamations $X_{t_{i0 \leq i \leq N}}$, On définit le temps entre deux réclamations successives $W_i = t_{i+1} - t_i$, pour

$0 \leq i \in N$. W_i suit une distribution exponentielle de moyenne λ , l'intensité du processus de Poisson composé. Les grandes lignes de l'algorithme sont énoncées ici.

1. On fixe la limite de temps T_{\max} .
2. On génère des temps W_i jusqu'à cumuler une durée totale de T_{\max} .
3. On initialise le surplus au temps 0, i.e. $R(0) = u$, et le compteur de temps $t = 0$.
4. Pour chaque intervalle de temps W_i , on ajuste le compteur du temps $t = t + W_i$ et on ajuste le surplus R dans l'ordre suivant :
 - On rajoute la prime accumulée $R = R + c * W_i$
 - On soustrait la réclamation $R = R - X_{t_{i+1}}$
 - Si $R < 0$, alors on indique la ruine, sinon on recommence jusqu'à atteindre le temps T_{\max} .
5. On répète ces étapes un grand nombre de fois pour estimer $\psi_T(u)$ en faisant la moyenne du nombre d'indicateurs de ruine.

Algorithm 1 Algorithme de simulation de la probabilité de ruine à horizon fini.

Entrée : N, c, u, T_{\max} .
Sortie : $\psi(u)$ la probabilité de ruine .
 Pour $j = 1$ à N faire
 Tant que ($t \leq T_{\max}$) faire
 générer $t_i \rightsquigarrow$ exponentielle(λ);
 générer $X_i \rightsquigarrow$ exponentielle(μ);
 $t \leftarrow t + t_i$;
 $R \leftarrow u + c * t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$;
 si ($R < 0$) faire
 $Ruin \leftarrow Ruin + 1$;
 break;
 Fin si
 Tant que
 Fin pour
 $\psi(u) = \frac{Ruin}{N}$;
 Fin

L'application de l'algorithme de simulation avec les paramètres : $u = 105000, c = 40000, T_{\max} = 365, N = 1000$ dont les résultats suivantes :

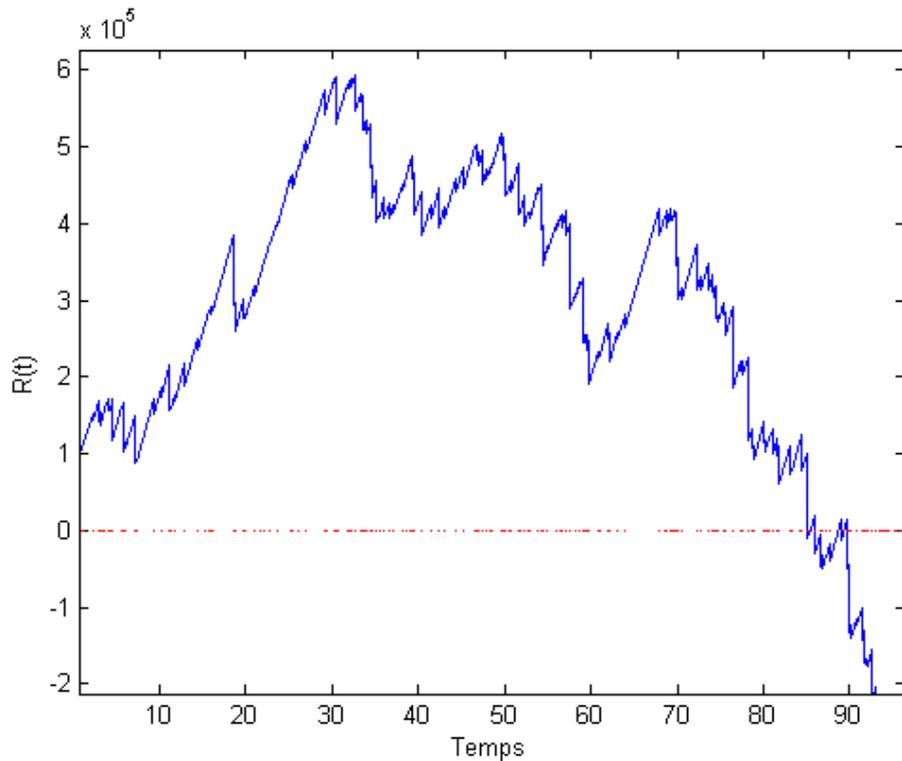


FIGURE 4.1 : Simulation de processus $R(t)$.

2. Modélisation des dépendances dans le processus de surplus à l'horizon fini

2.1. Impact de la dépendance entre montants des sinistres X_i sur la probabilité de ruine

Le processus du risque $R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ peut être simulé en dessinant de manière aléatoire des chemins d'échantillonnage selon le processus homogène de poisson $N(t)$ pour les arrivées de réclamations et selon la distribution des distribution marginales et la structure de copule des réclamations X_i (les montants des sinistres sont exprimée par la copule gaussienne bivariée $C(u, v)$).

2.2. Le modèle de dépendance (copule normale)

Une façon typique de réaliser la dépendance entre deux variables aléatoires dans un modèle mathématique est de les combiner à travers une copule, qui est définie sur le carré de l'unité et combine deux variables uniformément réparties selon une certaine structure de dépendance. Il existe diverses fonctions copula disponibles dans la littérature.

Cependant, pour notre objectif de variable consécutive dans une séquence, nous avons besoin pour exprimer la variable dépendante par son "précesseur" est une variable compacte. Ceci n'est pas possible que pour la soidisant "copule normale".

$$C(u, v) = \Phi_{\Sigma(\rho)}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$$

où : $\Phi_{\Sigma(\rho)}$ est la fonction de distribution bivariée normale avec un vecteur moyen nul et matrice de covariance

$$\Sigma(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

et u, v sont uniformément répartis

Soient maintenant X_1, Z_2, Z_3, \dots i.i.d avec la fonction de distribution F . Par le fait qu'une fonction de distribution d'une variable uniformément répartie, la copule peut être réécrite à :

$$F(X_{i+1}) = \Phi(\rho\Phi^{-1}(F(X_i)) + \sqrt{1-\rho^2}\Phi^{-1}(F(Z_{i+1}))) \quad (4.1)$$

D'où

$$X_{i+1} = F^{-1}\Phi(\rho\Phi^{-1}(F(X_i)) + \sqrt{1-\rho^2}\Phi^{-1}(F(Z_{i+1}))) \quad (4.2)$$

avec Φ désignant la distribution normale.

cette formule peut maintenant être utilisée pour simuler une séquence X_i , les variables adjacents dans la séquence étant connectées par la copule normale. Il convient de noter que les distributions marginales du X_i restent inchangées, ce qui est hautement souhaitable pour un modèle de dépendance, en tant que changements dans la distribution marginale ("les variables indépendantes") aurait un impact supplémentaire sur la valeur de la probabilité de ruine.

dans (4.1) on a : $X_{i+1} = X_i$ (dépendance complet) pour $\rho = 1$ et X_{i+1} est indépendant de X_i pour $\rho = 0$.

On peut facilement vérifier que X_{i+1} est une régression positive dépendante sur X_i pour $\rho \geq 0$.

2.3. Représentation graphique de distribution des montants des sinistre

Les deux graphes suivants représentent les 400 observations issues des simulations des montants des sinistre par la copule gaussienne. Il permettent d'avoir la distribution des montants des sinistres, le premier graphe représente le cas d'indépendance ($\rho = 0$) et le deuxième graphe le cas de dépendance ($\rho = 0.8$).

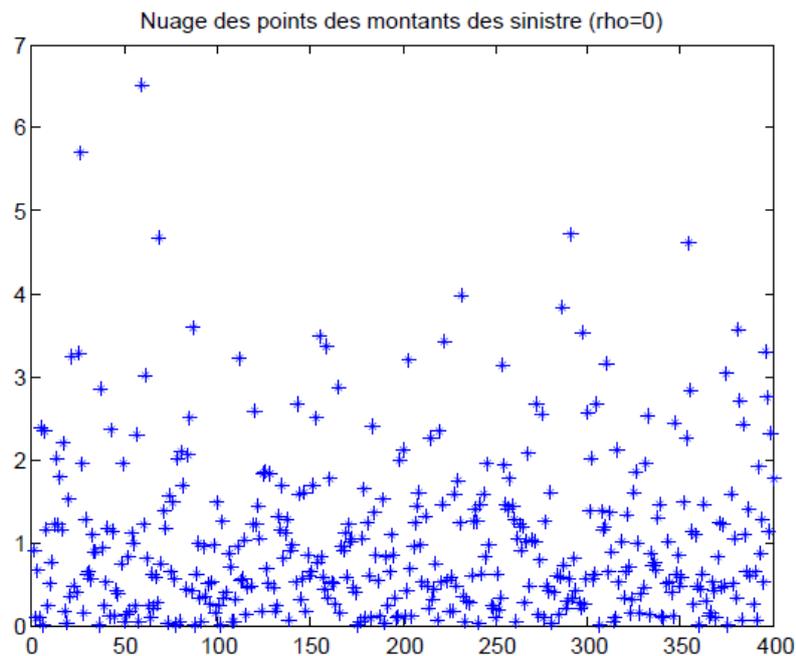


FIGURE 4.2 : Montants des sinistre $\rho = 0$

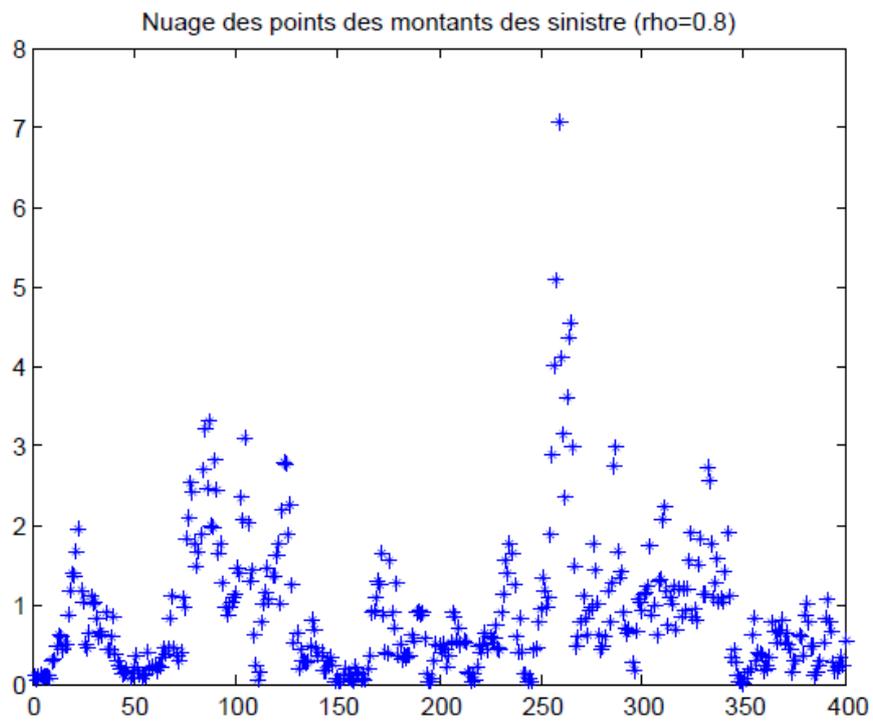


FIGURE 4.3 : Montants des sinistre $\rho = 0.8$

2.4. Algorithm de Simulation des probabilités de ruine pour les variables dépendantes de Copula normale

Algorithm 2 Algorithme de simulation de la probabilité de ruine avec les monotants x_i dépendantes.

Entrée : N, c, vu : vecteur des capitaux initiaux de taille k_1 ,

$v\rho$: vecteur des valeurs de rho de taille k_2 ,

T_{max} .

Sortie : $\psi(u)$ la probabilité de ruine .

Pour $p = 1$ à k_1 faire

$u0 \leftarrow vu(k)$;

Pour $l = 1$ à k_2 faire

$\rho \leftarrow v\rho(l)$;

Pour $j = 1$ à N faire

Tant que ($t \leq T_{max}$) faire

générer $t_i \rightsquigarrow \text{exponentielle}(\lambda)$;

$x_{i+1} = F^{-1}\Phi(\rho\Phi^{-1}(F(X_i)) + \sqrt{1-\rho^2}\Phi^{-1}(F(Z_{i+1})))$;

$t \leftarrow t + t_i$;

$R \leftarrow u + c * t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$;

si ($R < 0$) faire

$Ruin \leftarrow Ruin + 1$;

break;

Fin si

Tant que

Fin pour

$\psi(u) = \frac{Ruin}{N}$;

Fin

2.5. Exemple d'application

Pour estimer la probabilité de ruine, $\psi(u)$ est simulé pour $u = 100, 130, 200, 400, 800$ et $\rho = -0.8, \dots, 0.8$ en pas 0.2.

Les résultats de la simulation est sur le tableau suivant :

$\rho \backslash u$	$u = 85$	$u = 100$	$u=130$	$u=200$	$u=400$	$u=800$
-0.8	0.2060	0.1290	0.0670	0.0130	0	0
-0.6	0.1370	0.0710	0.0310	0.0040	0	0
-0.4	0.1080	0.0500	0.0190	0.0030	0	0
-0.2	0.1060	0.0410	0.0130	0.0030	0	0
0	0.3560	0.2080	0.0990	0.0130	0	0
0.2	0.3400	0.2280	0.1270	0.0280	0	0
0.4	0.4170	0.2950	0.1640	0.0630	0	0
0.6	0.4770	0.3680	0.2760	0.1040	0.0020	0
0.8	0.5690	0.5180	0.4020	0.2620	0.0280	0

TABLE 4.1 : La simulation de $\psi(u)$

La représentation graphique est donnée par :

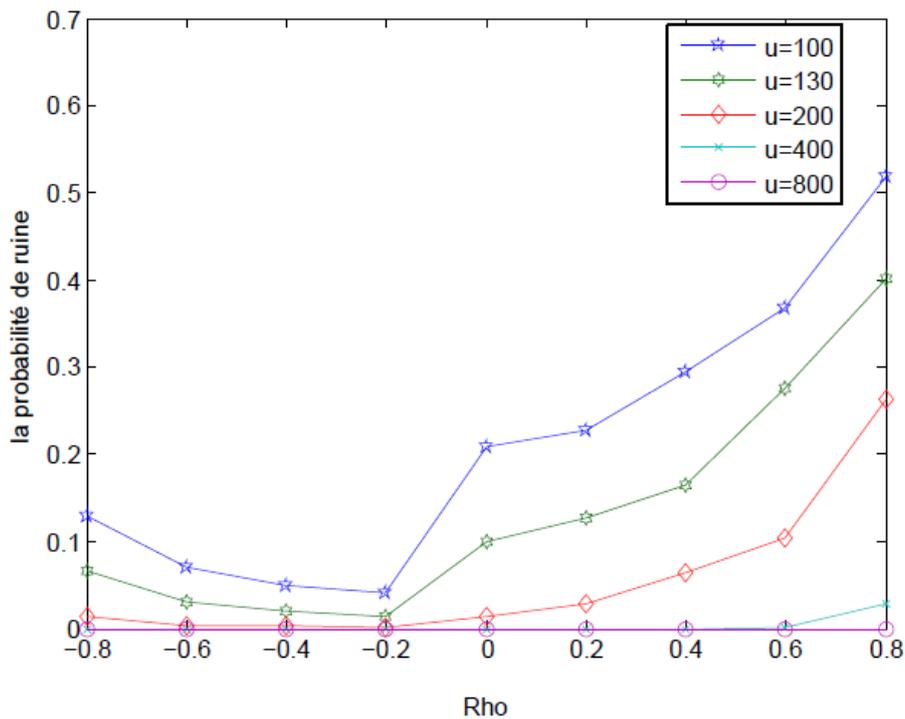


FIGURE 4.4 : Simulation de ψ pour les montants des sinistre dépendantes de Copula normale

2.6. L'impact de la dépendance entre les inter-arrivées des sinistres sur la probabilité de ruine

$\rho \setminus u$	$u = 85$	$u = 100$	$u=130$	$u=200$
0.001	0.3990	0.3180	0.1660	0.0370
0.003	0.6180	0.4960	0.3820	0.1070
0.005	0.7760	0.7280	0.5520	0.2190
0.007	0.9080	0.8700	0.7700	0.4070
0.009	0.9700	0.9520	0.8840	0.6470
0.011	0.9940	0.9790	0.9550	0.8180

TABLE 4.2 : La simulation de $\psi(u)$

La représentation graphique est donnée par :

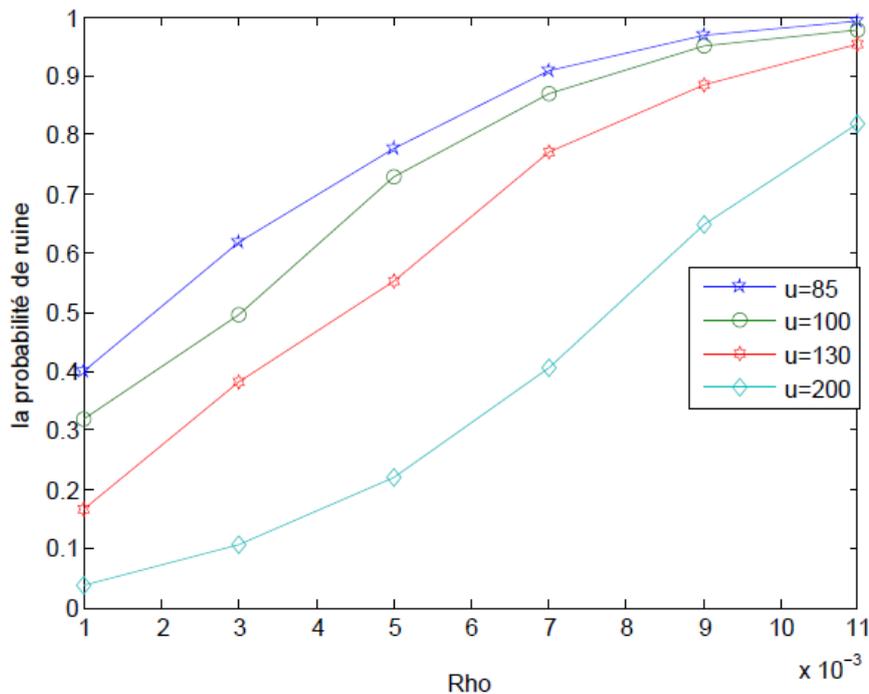


FIGURE 4.5 : Simulation de ψ pour les inter-arrivées des sinistres dépendantes de Copula normale

2.7. Résultats

La figure 4.4 montre une simulation des probabilités de ruine en fonction de ρ pour chaque valeur des capitaux, lorsque la dépendance des montants des sinistres. Le taux de cotisation c est constant tout au long de la simulation et sa valeur est choisie de telle sorte que pour le cas indépendant ($\rho = 0$), on obtient une valeur pour la probabilité de ruine qui

serait souhaitable pour les compagnies d'assurance.

Il est clairement visible qu'une augmentation de ρ augmente la probabilité de ruine. Et on remarque que cette probabilité se diminue lorsque le capital initial u est augmenté.

La figure 4.5 aussi montre une simulation des probabilités de ruine, mais cette fois lorsque la dépendance des inter-arrivées des sinistres, remarquons que une corrélation très faible implique une probabilité de ruine très élevé par rapport à la probabilité de ruine calculé dans la figure 4.4, d'ou la dépendance des inter-arrivées des sinistres est très sensibles par rapport au dépendance des montants des sinistre.

Pour différents scénarios avec des dégâts dépendants, la probabilité de ruine est considérablement supérieure à celle des événements indépendants.

Conclusion

Dans ce travail nous avons calculé la probabilité de ruine à horizon fini. La modélisation des dépendances dans le processus de surplus à horizon fini examine l'impact de la dépendance entres montants des sinistres d'une part et les inter-arrivées d'autre part sur la probabilité de ruine. la dépendance entre inter-arrivées des sinistres est très sensible par rapport à cell des montants des sinistres.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, Nous avons présenté différents modèles de la théorie du ruine dans lesquels nous introduisons un modèle de dépendance. Nous nous sommes intéressés à l'étude de la dépendance pour calculé la probabilité de ruine. cette probabilité est intéressant pour les compagnies d'assurance et de réassurance.

Pour cela, nous avons présenté le modèle individuel, le modèle collectif, modèle classique de théorie de la ruine et des généralités sur la probabilité de ruine. Ensuite, nous avons défini la Valeur à Risque qui provenance au monde Bancaire et qui se comporte un peu comme la probabilité de ruine en temps fini. Par la suite, on a défini la problématique générale de la VaR ainsi que les différentes étapes associées, et à la fin, on a cité les grandes méthodes classiques de l'estimation de la VaR.

Nous avons aussi présenté un outil mathématique pour prendre en compte de telle dépendance, nous avons proposé les copules pour les dépendances entre les variables aléatoires. Pour cela, nous avons présenté la définition et les propriétés fondamentales des copules. Ainsi on a étudié quelques familles des copules paramétriques les plus utilisées et leurs propriétés fondamentales.

Dans ce travail, on a étudié l'impact de la dépendance sur les montants des sinistres d'une part, et sur les inter-arrivées des sinistres d'autre part. Les résultats obtenus sont très encourageants et méritent d'être étudiés plus en détail dans de futur travaux.

Annexe

Notion fondamentales sur les lois de probabilités

La loi normale

Définition 2.1 [15]

une variable aléatoire continue X est distribuée selon une loi normale si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \quad (4.3)$$

cette loi de probabilité dépend de deux paramètres, m et σ ; on l'écrit $N(m, \sigma^2)$. On a l'habitude d'effectuer le changement de variable :

$$T = \frac{X - m}{\sigma}$$

la loi de distribution de T est alors :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

noté $N(0,1)$. cette loi est dénommée, loi normale centrée réduite. f est une fonction paire, définie pour tout t réel.

Propriété 2.1 [13]

Espérance de la loi normale est :

$$E(x) = \mu$$

Et la variance est donné par :

$$var = \sigma^2$$

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires normales **indépendantes** de paramètres respectifs $(\mu_1, \sigma_1), (\mu_2, \sigma_2)$, alors leur somme $X_1 + X_2$ est une variable aléatoire normale de paramètres $(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

La loi de poisson

Définition 2.2 Une variable aléatoire X suit une loi de poisson notée $X \sim p(\lambda)$ si elle est susceptible de prendre les valeurs entières $X = k$ avec la probabilité P :

$$P(X = k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{ou} \quad k \in \mathbb{N}$$

cette loi est la loi des événements rares ou loi des petites probabilités.

Propriété 2.2 [44]

soit X une variable de loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$.

$$E(x) = \text{Var}(X) = \lambda$$

(λ est à la fois la **moyenne** et la **variance**)

La somme de deux variables aléatoires de Poisson, indépendantes, de paramètres λ_1 et λ_2 , est une variable aléatoire de Poisson, de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

La loi exponentielle

Définition 2.3 [14]

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$), si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette loi est aussi appelée loi de durée de vie sans vieillissement.

Fonction de répartition :

$$F(\alpha) = P(X \leq \alpha) = \int_0^\alpha \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda \alpha}$$

Propriété 2.3 soit X une variable de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

La loi exponentielle est qualifiée de loi « sans mémoire » [44], elle permet la modélisation du

comportement des matériels fonctionnant avec un taux de défaillance constant (ou pouvant être considéré comme constant).

La loi exponentielle est fréquemment utilisée pour décrire des événements aléatoires dans le temps (file d'attente, durée de vie d'un composant, ect).

Processus du poisson

Définition 2.4 soit $X_n (n \geq 1)$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ . Posons $S_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1, S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Pour tout réel $t \geq 0$, définissons la v.a. N_t , à valeurs entières, par :

$$N_t = n \Leftrightarrow S_n \leq t < S_{n+1}$$

Le processus stochastique $N_t (t \geq 0)$ est appelé processus de poisson d'intensité λ .

Théorème 2.1 Le processus de poisson d'intensité constante λ est l'unique processus à accroissements indépendants et stationnaires tel que pour tous $s < t$, $N(t) - N(s)$ suit la loi de poisson de paramètre $\lambda(t - s)$.

Généralités sur le langage

Matlab est un logiciel parfaitement dédié à la résolution de problèmes d'analyse numérique ou de traitement du signal. Permet d'effectuer des calculs matriciels ou de visualiser les résultats sous forme graphique. La formulation des problèmes s'apparente à la formulation mathématique des problèmes à résoudre. L'utilisation de ce logiciel consiste à lancer des lignes de commandes, qui peuvent le plus souvent ressembler à la programmation en C. Le nom Matlab vient de MATrix LABoratory, les éléments de données de base manipulés par Matlab étant des matrices (mais pouvant évidemment se réduire à des vecteurs et des scalaires) qui ne nécessitent ni dimensionnement ni déclaration de type. Contrairement aux langages de programmation classiques, les fonctions du Matlab permettent de manipuler directement et interactivement ces données matricielles, le rendant ainsi particulièrement efficace en calcul numérique, analyse et visualisation de données en particulier. Il exist deux modes de fonctionnement sur Matlab :

- **Le mode interactif** : les instructions sont exécutées au fur et à mesure qu'elles sont données par l'utilisateur.
- **Le mode exécutif** : dans ce cas, l'utilisateur utilise un fichier "M-file" contenant toutes les instructions à exécuter.

Programmation avec Matlab

Il y a deux façons pour écrire des fonctions Matlab :

- soit directement dans la fenêtre de commandes,

- soit en utilisant l'éditeur de développement de Matlab, en sauvegardant les programmes dans des fichiers texte avec l'extension ".m".

Fichiers *.m

Les programmes sauvegardés dans les fichiers Matlab (*.m) sont alors directement utilisables comme des fonctions Matlab à partir de la fenêtre de commande. Pour cela, le fichier doit se trouver dans le répertoire Matlab, qui est en pratique le dossier Work.

Création d'une fonction

La création d'une fonction dans Matlab se fait par la syntaxe suivante : fonction [s1,s2,...]=nom-fonction (e1,e2,...). Les variables s1, s2, . . . , sont les arguments de sortie (S) de la fonction et les variables e1, e2, . . . , sont les arguments d'entrée (E). Attention : le fichier M (M-file) doit avoir le même nom que la fonction qu'il contient.

Bibliographie

- [1] ARTZNER. P, DELBAEN. F, EBER. J.M, and HEATH. D, *Thinking Coherently.Risk* 10,68-71.(1997).
- [2] ASMUSSEN. S, and ALBRECHER. H, *Ruin probabilities. World Scientific* (2010).
- [3] ASMUSSEN. S, *Conditioned limit theorems relating a random walk to its associate, with applications to risk reserve processes and the GI/G/1 queue. Adv. Appl. Prob.* 14, 143-170.(1982).
- [4] AUGÉ. M, *Le temps en ruines. Editions Galilée*, 2003.
- [5] BENOUARET. Z, *Stabilité dans les modèles de risque. Mathématiques Appliquées, option Modélisation Mathématique et Techniques de Décision* (1992).
- [6] BLACK. F, et SHOLES. M, *The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637-659.(1973).
- [7] CAI. J, *Ruin probabilities under dependent rates of interest. Journal of Applied Probability* (2002).
- [8] CHARPENTIER. A, AND DENUIT. M, *Mathématiques de l'assurance non vie. Principe Fondamentaux de Théorie de Risque, Economica* (2004).
- [9] DALL'AGLIO. G, *Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), 10, 35-74. (1956).
- [10] DENUIT. M, DHAENE. J, GOOVAERTS. M, KAAS. R, *Actuarial Theory for Dependent Risks Measures, Wiley, England*,(2005).
- [11] DEVYLDER. F, and MARCEAU. E, *Explicite Analytic Ruin Probabilites for Bounded Claims, Inssurance : Mathematics and Economics*, 79-105, (1995).
- [12] DEVYLDER. F, GOOVAERTS. M, and MARCEAU. E, *The Bi-atomic Minimal Solution of Schmitter's Problem, Inssurance : Mathematics and Economics*, 59-78, (1997).
- [13] DE VAUCOULEURS. G, *La loi normale de luminosité des éclipses de lune de 1894 à 1943. Comptes rendus* 218 , 655.(1944).
- [14] DODGE. Y, AND MELFI. G, *Premiers pas en simulation. Springer Science Business Media, Sept.* 2008.
- [15] FOURASTIÉ. J, JEAN-FRANÇOIS. LASLIER, *Probabilités et Statistique, DUNOD* 3^{eme} édition.
- [16] FRANÇOIS. *Notes de cours de processus aléatoires.*

- [17] FRÉCHET, M. *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données.* Ann. Univ. Lyon. Sect. A. (3), 14, 53-77. (1951).
- [18] GENEST. C, et MACKAY. J, *Bivariate distributions with uniform marginals, The joy of copulas American, Statistician, 40,280-283,(1986).*
- [19] GRANDELL. J, *Aspects of Risk Theory. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, 1991.*
- [20] GREBECK. M.J, *Applications of Stochastic Programming to asset liability Management, Ph. D. thesis in Statistics and Applied Probability , University of California, Santa Barbara, 2006.*
- [21] JANSSEN. S, AND MANCA. R, *Semi-markov risk models for finance. insurance and reliability (Springer, 2007).*
- [22] JORION. P, *Value at Risk, McGraw-Hill, New York, 2000.*
- [23] LI, S., G. J. *On ruin for the erlang (n) risk process. Insurance : Mathematics and Economics, 391, 408.(2000).*
- [24] LOISEL. S, *Cours de gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine.*
- [25] LOISEL. S, *Cours de gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine. Cours en ISFA 3^{ème} année (Université de Lyon 1, 2005-2006).*
- [26] LUNDBERG. F, *Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen. Akad. Afhandling. Almqvist och Wiksell, Uppsala.(1903)*
- [27] MARCEAU, AND DEVYLLDER, *Explicite analytic ruin probabilities for bounded claims, insurance : Mathematics and economics.*
- [28] MARCEAU, *Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat. Modèles sur une période. Springer.*
- [29] MORGAN. J.P, *RiskMetrics™ - Technical Document, 4th ed., Morgan Guaranty Trust Company, New York (1996).*
- [30] PEARSON. E.S et HARTLEY. H.O, *Biometrika tables for statisticians, Biometrika Trust, London, p. 118, (1976).*
- [31] ROBB. J, *Muirhead : Aspects of Multivariate Statistical Theory. Wiley series in probability and mathematical statistics. John Wiley Sons, Inc, 1982.*
- [32] ROSS. S, *Introduction to probability models. Academic press. (1990)*
- [33] RODOLPHE. D, *Le Value at Risk : une méthodologie d'estimation des risques de marché. FUNDP, Fac. des sciences économiques , sociales et de gestion, Namur(1997).*
- [34] ROGER. B, NELSEN : *An Introduction to Copulas. Springer Series in Statistics. Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2e édition, 2006.*
- [35] ROLSKI. T, SCHMIDLI. H, SCHMIDT. V, and TEUGELS. J, *Stochastic Processes for Insurance and Finance. Wiley series in probability and statistics, 1999.*
- [36] SAIDANE. HADDA, *Sur l'estimation des mesures de risque, thèse de magistère, mai 2012.*

- [37] SATO. K.I, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999.
- [38] SAXÉN. T, *Sur les mouvements aléatoires et le problème de ruine de la théorie de risque collective*. PhD thesis, Societas scientiarum Fennica, 1951.
- [39] SCHIFF, J. L. *The laplace transform : Theory and applications*. *The Laplace transform : Theory and applications*.
- [40] SCHMIDT. V, TEUGELS. R. J, and SCHMIDLI. H, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. (Wiley,1999).
- [41] TEUGELST. J. L, *Estimation of the Ruin Probability, Insurance : Mathematics and Economics*, 169-175, (1982)
- [42] TRIVEDI. P, ZIMMER. K. D. M, *Copula Modeling :An Introduction for Practitioners*. *Foundations and Trends in Econometrics* (2005).
- [43] TSYBAKOV. A, *Introduction to Nonparametric Estimation*. Springer Science and Business Media, New York, 2009.
- [44] VEYSSEYRE. R : *Aide-mémoire, Statistique et probabilités pour l'ingénieur*, 2e édition. © Dunod, Paris, 2001, 2006. **IBLIOGRAPHIE 59**
- [45] WILLMOT. G. E, and LIN. X. S. *Simplified Bounds on the Tails Compound Distribution*, *Journal of Applied Probability*, 127-133, (1997).
- [46] WILLMOT. G. E, *Refinements and Distributional Generalizations of Lundberg's Inequality*, *Insurance : Mathematics and Economics*, 49-63, (1994).