

Résolution d'un problème de convection naturelle en 2D et 3D par la méthode spectrale et la méthode des différences finies

S. Bouarab^{a,b}, F. Mokhtari^b, S. Kaddeche^c, A. Hamrani^a, A. Merah^a,
F.Haddad^b

^aUniversité M'hammed Bougara, Boumerdes, Algérie

^bLaboratoire de Thermodynamique et des Systèmes Energétiques (LTSE), Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene. BP 32 El Alia, Bab Ezzouar, Alger, Algérie.

^cLaboratoire de Recherche Matériaux, Mesures et Applications, LR 11 ES 25, Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie (INSAT), Université de Carthage, B.P 676, 1080 Tunis Cedex, Tunisie.

email: sa.bouarab@gmail.com,

Résumé :

L'objectif de ce travail consiste à étudier le problème de la convection naturelle à l'intérieur d'une cavité carrée différemment chauffée à l'aide de la méthode spectrale. Les simulations numériques bidimensionnelles et tridimensionnelles sont effectuées pour différents nombres de Prandtl et de Rayleigh caractéristiques de l'écoulement du fluide à l'intérieur de la cavité connu sous le nom d'écoulement de Hadley.

La simulation numérique des écoulements incompressibles par les méthodes classiques tels que les différences finies, volumes finis et éléments finis, nécessite des temps de calcul relativement longs et une capacité de stockage très importante. Un modèle basé sur les méthodes spectrales a été développé et a mis en valeur la précision, la simplicité et la rapidité d'une telle méthode, notamment pour des simulations voulues de plus en plus proches de la réalité des processus multi-physiques complexes.

La méthode spectrale sera utilisée dans notre étude afin d'effectuer des modélisations bidimensionnelles et tridimensionnelles des écoulements incompressibles en formulation vorticité-fonction de courant pour le modèle 2D et en utilisant la méthode d'Uzawa pour le modèle 3D.

Les résultats de la simulation d'écoulements incompressibles par méthodes spectrales seront comparés à ceux obtenus par différences finies et en termes de temps de calcul et précision des résultats.

Mots clefs : Convection naturelle en 2D et 3D, écoulement de Hadley, éléments finis, méthode spectrale.

1 Introduction

Le phénomène de la convection naturelle a fait l'objet de nombreux travaux dans différents domaines: géophysique, météorologique, santé, ingénierie, notamment, la croissance cristalline, refroidissement des instrument électronique,....etc

Dans cette étude on utilise deux méthodes de simulation numérique, à savoir, la méthode des différences finies et la méthode spectrale. La méthode des différences finies qui fait partie des méthodes classiques, nécessite des temps de calcul relativement long et une capacité de stockage très importante. Un modèle basé sur les méthodes spectrales a été développé et a mis en valeur la précision, la simplicité et la rapidité d'une telle méthode, notamment pour des simulations voulues de plus en plus proches de la réalité des processus multi-physiques complexes [1-9].

Un exemple de validation a été adopté qui est l'exemple de la cavité rectangulaire bidimensionnelle et tridimensionnelle, avec deux cotés actifs. Dans cet écoulement connu sous le nom de l'écoulement de Hadley, le coté gauche est à une température supérieure à celle du coté droit, les parois supérieure et inférieure dans le modèle 2D et ainsi les cotés avant et amont de modèle 3D de la cavité sont thermiquement isolées. Les résultats sont donnés pour un nombre de Prandtl de l'ordre de 0.01 caractérisant un bain de métal liquide pour le cas bidimensionnel et différentes valeurs du nombre de Grashof caractérisant différentes dimensions et conditions thermiques d'un système de croissance cristalline. Pour le cas tridimensionnel, on s'intéresse à un fluide caractérisé par un nombre de $Pr=0.71$ caractérisant un fluide compressible. Dans ce cas, on donne les valeurs et profils de vitesse et de température pour une valeur de $Ra=10000$. Les résultats obtenus par les deux méthodes, différences finies et spectrale, sont comparés à ceux de la littérature.

2 Formulation du problème:

Le problème physique considéré est schématisé sur la figure 1. Il s'agit d'une cavité bidimensionnelle, de longueur L et de hauteur H remplie d'un métal liquide ($Pr=0.01$). Le rapport forme $A=L/H=1$. Les parois verticales $x=0$ et $x=L$ thermiquement actives de la cavité sont maintenues à deux températures différentes et uniformes, nommées respectivement, T_h et T_f ($T_h > T_f$). Les parois horizontales $y=0$ et $y=H$ sont adiabatique (une condition du flux nul de Newman).

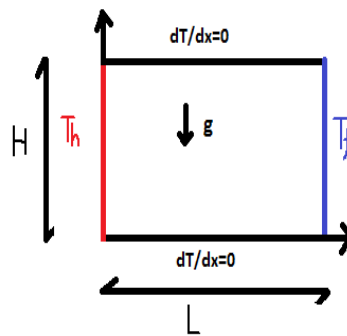


Figure 1: Domaine de calcul bidimensionnel: cavité carrée et conditions thermiques

Dans cette étude l'écoulement est supposé incompressible et satisfaisant à l'hypothèse de Boussinesq. La dissipation de la chaleur par frottement visqueux est considérée négligeable.

En coordonnées cartésiennes le système des équations qui gouvernent le problème étudié sont données par:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + g(\beta(T - T_0)) \\ (\mathbf{V} \cdot \nabla) T &= \frac{\lambda}{\rho C_p} \nabla^2 T\end{aligned}$$

V , T et P sont le vecteur vitesse, la température et la pression du fluide respectivement. g est le vecteur accélération de la pesanteur. Les propriétés thermophysiques λ , C_p et ν sont Conductivité thermique, la capacité calorifique massique et la viscosité cinématique du fluide.

Afin d'éliminer la pression des équations bidimensionnelles de Navier Stokes on utilise la formulation vorticité-fonction de courant. On définit la fonction de courant ψ la vorticité ω par:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = -\nabla^2 \psi$$

On pose les quantités adimensionnelles suivantes :

$$u = \frac{U \times H}{g} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad v = \frac{V \times H}{g} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad \Psi = \frac{\psi}{g}, \quad \Omega = \frac{\omega \times H^2}{g}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H},$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_h - T_f}, \quad \text{avec la température de référence } T_0 \text{ est définie comme: } T_0 = \frac{T_h + T_f}{2},$$

On aboutit au modèle mathématique adimensionnel ci-dessous :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) - Gr \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) = -\Omega$$

- d'ou :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} \nabla^2 \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} \nabla^2 \Psi = \nabla^4 \Psi + Gr \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)$$

Les nombres adimensionnelles caractéristiques sont: $Gr = \frac{g \beta H^3 (T_h - T_f)}{g^2}$, $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$

L'étude du transfert de chaleur dans la cavité nécessite la détermination des taux de transfert de chaleur, donnés par le biais du nombre de Nusselt. Les valeurs de ce dernier sur les parois verticales sont définies comme suit :

$$Nu_{locale} = Nu(Y) = -\frac{\partial \theta}{\partial X}$$

La valeur moyenne de nombre de Nusselt le long des parois verticales se calcule comme suit :

$$Nu_{moy} = \frac{1}{H} \int Nu(Y) dy$$

Les conditions aux limites associées sont données comme suit:

- parois horizontales: $Y = 0$, $Y = 1$ et $0 \leq X \leq A$: $\Psi = 0$, $\Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}$, $\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$

- parois verticales: $X = 0$ et $0 \leq Y \leq 1$: $\Psi = 0$, $\Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}$, $\theta = 0.5$

$$X = A \quad \text{et} \quad 0 \leq Y \leq 1 : \Psi = 0, \quad \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \quad \theta = -0.5$$

3 Résolution numérique:

Dans cette étude nous allons exposer deux méthodes numériques pour la résolution de ce problème, la méthode des différences finies et la méthode spectrale.

La méthode des différences finies consiste à discrétiser le domaine de calcul en un maillage uniforme. La variable inconnue est décrite par plusieurs valeurs dans les points de ce maillage. Le développement de la grandeur recherchée en séries de Taylor tronquées est utilisé pour approximer les dérivées de l'inconnu, dans chaque point du maillage, par différences finies en utilisant les valeurs voisines. En remplaçant les dérivées dans les équations différentielles par différences finies on obtient un système d'équations algébriques pour les valeurs de l'inconnue dans chaque point du maillage.

A l'intérieur du domaine discrétisé, les dérivées partielles de premier et deuxième ordre sont approchées selon un schéma aux différences finies centrées. Sur les frontières du domaine, les dérivées partielles qui expriment les conditions aux limites sont discrétisées avec un schéma aux différences finies décentrées en amont ou en aval.

La présence de forts gradients dans ce genre d'écoulements nécessite l'utilisation de méthodes numériques d'ordre élevé afin d'assurer une description précise des modes d'instabilités ainsi que des différents seuils de bifurcation associés.

Les principales étapes de résolution par la méthode spectrale consistent à déterminer tout d'abord une loi de distribution, on pourrait à priori choisir les points de Tchebychev, ensuite définir une fonction de base ou d'interpolation basée sur le polynôme de Tchebychev, en dernier on calcule la matrice de dérivation de Tchebychev. Cette configuration permet de traiter avec plus de précision les conditions aux limites, ou encore les problèmes de couche limites.

Pour résoudre par méthodes spectrales les équations de Navier Stokes on utilise en général le polynôme de Tchebyshev $T_n(x) \in \mathcal{N}$, particulièrement pour les conditions aux limites non périodiques. La matrice dérivation de Tchebyshev D_N , illustre comment l'approximation par la méthode spectrale peut calculer explicitement les solutions de l'équation de Navier Stocks et d'énergie.

- **Critère de convergence:**

Le programme de calcul s'arrête lorsque le critère de convergence suivant est satisfait :

$$\sum_{i,j} |\Phi_{i,j}^{n-1} - \Phi_{i,j}^n| \leq 10^{-8}$$

n: représente l'avancement des itérations successives.

- **Stabilité numérique :**

Les facteurs de sous-relaxation sont utilisés dans le cas des problèmes non linéaires. Il est nécessaire de contrôler le changement d'un paramètre du domaine fluide lors de la résolution numérique afin d'éviter la divergence du calcul numérique. Le critère de sous relaxation réduit le changement des paramètres durant chaque itération :

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \alpha \Delta \Phi$$

où α est le facteur de sous-relaxation. $\Delta \Phi$ et la différence entre les résultats des deux itérations n-1 et n.

• Les équations discrétisées par les méthodes spectrale et différences finies ont été résolues par un code informatique élaboré en MATLAB. Les résultats de la simulation seront comparés à ceux obtenus par méthode spectrale en termes de temps de calcul et précision des résultats.

4. Résultats et discussions:

4.1 Cavité carrée 2D:

Les tableaux ci-dessous donnent les valeurs de nombre de Nusselt moyen et des deux composantes de la vitesse obtenues par la méthode des différence finies, par la méthode spectrale et ceux du benchmark. On constate que nos résultats sont très proches de ceux du benchmark, avec un pourcentage d'erreur acceptable .

Tableau 1 : Cas N°01: Gr=10 000

tol=10 ⁻⁸	Résultats trouvés par le code différences finies	Résultats trouvés par le code spectrale	Résultats de Benchmark
Nombre de Prandtl	Pr=0.01	Pr=0.01	Pr=0.01
Grashof thermique	Gr=10 000	Gr=10 000	Gr=10 000
Nombre de points	31x31	31x31	31x31
Nusselt NU-H	1.001468211149322	1.001429832951211	1.00142983332924
Nusselt NU-C	1.001468209219720	1.001429832254228	1.00142983332780
Vmax	38.564895047430539	38.679135946925378	38.7563899075137
Wmax	38.650473278799225	38.712236606061374	38.8372138468150

Tableau 2 : Cas N°02: Gr=50 000, maillage 31x31

tol=10 ⁻⁸	Résultats trouvés par le code différences finies	Résultats trouvés par le code spectrale	Résultats de Benchmark
Nombre de Prandtl	Pr=0.01	Pr=0.01	Pr=0.01
Grashof thermique	Gr=50 000	Gr=50 000	Gr=50 000
Nombre de points	31x31	31x31	31x31
Nusselt NU-H	1.031436445636682	1.031302633358286	1.03130265230221
Nusselt NU-C	1.031436438964987	1.031302633444344	1.03130265230117
Vmax	177.0089666238981	179.9321357763999	179.658101726
Wmax	176.4558200348646	180.3065598076560	179.731454157

Tableau 3 : Cas N°03: Gr=1000 000, maillage 31x31

tol=10 ⁻⁸	Résultats trouvés par le code différence finis	Résultats trouvés par le code spectrale	Résultats de Benchmark
Nombre de Prandtl	Pr=0.01 stationnaire	Pr=0.01	Pr=0.01
Grashof thermique	Gr=1000 000	Gr=1000 000	Gr=1000 000
Nombre de points	31x31	31x31	31x31
Nusselt NU-H	1.946885324038403	1.959022522801914	1.95868159672075
Nusselt NU-C	1.703567747242053	1.959022485710100	1.95868159681822
Vmax	1242.916728773801	1502.622470025618	1502.95936191693
Wmax	1223.542597038759	1493.979922329964	1498.68156623053

Tableau 4 : Cas N°04, maillages 101x101, 61x61 et 101x101

tol=10 ⁻⁸	Résultats trouvés par le code différences finies	Résultats trouver par le code spectrale	Résultats de Benchmark
Nombre de Prandtl	Pr=0.01	Pr=0.01	Pr=0.01
Grashof thermique	Gr=1000 000	Gr=1000 000	Gr=1000 000
Nombre de points	101x101	61x61	101x101
Nusselt NU-H	1.9498	1.958975419547793	1.95827468069485
Nusselt NU-C	1.9494	1.958975375100903	1.95827468066727
Vmax	1490.3	1506.040612010751	1506.46130090913
Wmax	1484.2	1498.091752320386	1500.22358092965

Les résultats obtenus montrent que le nombre de Nusselt moyen sur les parois croît avec l'augmentation du nombre de Grashof. Pour les faibles nombres de Grashof $< 10^4$ le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction bien qu'il y est de la convection, le nombre de Nusselt moyen le long de la paroi est légèrement supérieur à un pour cette gamme. Cependant, l'échange de chaleur se fait essentiellement par convection pour des valeurs élevées de Gr. L'augmentation de nombre de Grashof fait accélérer l'écoulement dans la cavité et le transfert de chaleur passe du régime diffusif au régime convectif et par conséquent le nombre de Nusselt augmente.

La figure2 montre l'écart entre les valeurs obtenues par la méthode des différences finies et la méthode spectrale pour les valeurs de Nusselt et de la vitesse dans la gamme de Grashof étudiée.

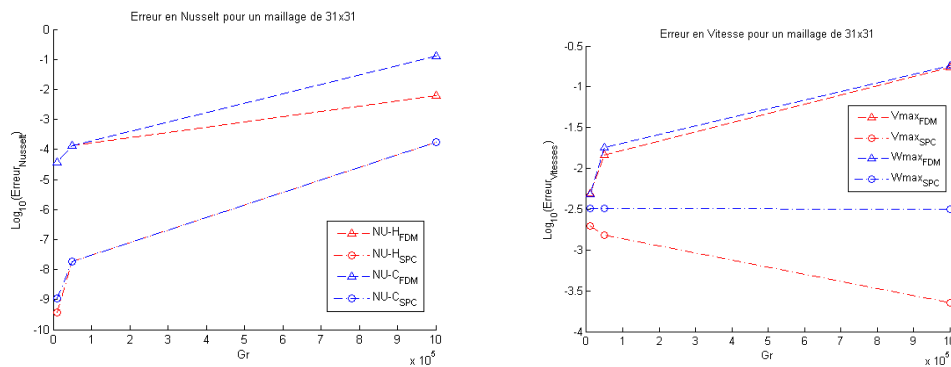


Figure 2: Comparaison entre les résultats de la méthode des DF et spectrale

4.2 Cavité cubique 3D:

Le modèle mathématique adopté repose sur les équations de Navier Stokes, et de l'énergie en formulation vitesse-pressure en coordonnées cartésiennes 3D dans le cas d'une cavité cubique. Les notations adoptées à l'exemple 2D sont reprises. Un écart de température est imposé entre les deux parois $T(x = \pm 0.5, y, z) = \pm 0.5$, et le reste des parois $(x, y = \pm 0.5, z)$ et $(x, y, z = \pm 0.5)$ sont adiabatique

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

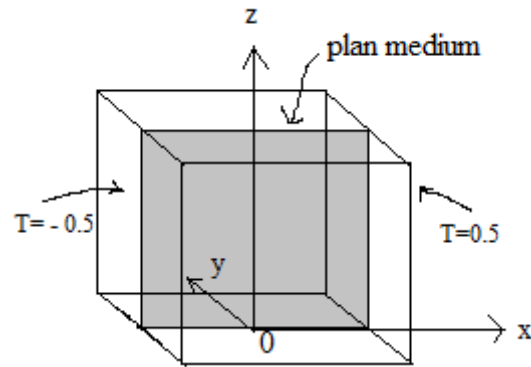


Figure 3: Domaine de calcul tridimensionnel et conditions aux limites adimensionnelles

Le schéma d'Uzawa utilisé consiste à résoudre l'équation de correction de la pression suivant:

$$P^{n+1} = P^n + r \operatorname{div} V^n$$

Où r est le multiplicateur d'Uzawa qui permet d'accélérer la convergence.

Le critère de convergence dans le code est un test sur la divergence, réalisé pour chaque itération car la température, la vitesse et la pression converge avant l'opérateur de divergence.

Ce critère de convergence repose sur le calcul de l'écart suivant: $\sum_{i,j} |\Phi_{i,j}^{n-1} - \Phi_{i,j}^n|$

Les solutions obtenues par la méthode spectrale pour le cas de la cavité cubique 3D différentiellement chauffée ont été présentées, pour les valeurs de Rayleigh égale à 1000, nombre de Pr égale à 0.71. et un maillage de 16x16x16.

Le tableau ci-dessous montre les premiers résultats de validation qui sont présentés en considérant un maillage de 16x16x16 et un nombre de Ra=1000, et qui sont en très bon accord avec les résultats 3D de E.Tric et al [10] et les calculs 2D de la littérature.

Tableau 5 : Résultats de la convection naturelle dans la cavité tridimensionnelle

	Résultats trouvés par le code spectrale	Résultats de Benchmark article de validation E.Tric et al [10]
écart	10^{-2}	4×10^{-7}
Nombre de Prandtl	0.71	0.71
Ra	1000	1000
Nombre de points	16x16x16	51x51x51
Nusselt NU_3d	1.071084906844230	1.07000
Nusselt NU_2d	1.099057850258674	1.0874
Umax	0.1698	0.17332
Point (x , y , z)	(0.0, -0.2778 , 0.0)	(0.14×10^{-10} , 0.2521 , 0.44×10^{-10})
Vmax	3.4380	3.54356
Point (x , y , z)	(0.0 , 0.0 , -0.2778)	(0.0166 , 0.56×10^{-10} , 0.3169)
Wmax	3.4677	3.54477
Point (x , y , z)	(0.3536 , 0.0 , 0.0)	(0.3233 , 0.24×10^{-10} , 0.32×10^{-2})
Umpmax (yz)	3.4380	3.54356
Point (0 , y ,z)	(0 , 0 , 0.500)	(0 , 0.0166 , 0.3169)
Wmpmax(yz)	3.4677	3.54477
Point (0 , y ,z)	(0 , 0.3536 , 0.500)	(0 , 0.3233 , 0.32×10^{-2})

Umpmax (y)	3.4380	3.53621
Point (0, y, 0)	(0, 0.500, 0)	(0, 0.3192, 0)
Wmpmax (z)	3.4677	3.54311
Point (0, 0, z)	(0, 0, 0.3536)	(0, 0, -0.3187)
d3D	0.001847769851341	0.263×10^{-3}

Les vecteurs vitesse, les isotherme, et les profils des vitesses aux plans médians de la cavité $x=0$, $y=0$, $z=0$ sont données dans la figure 4.

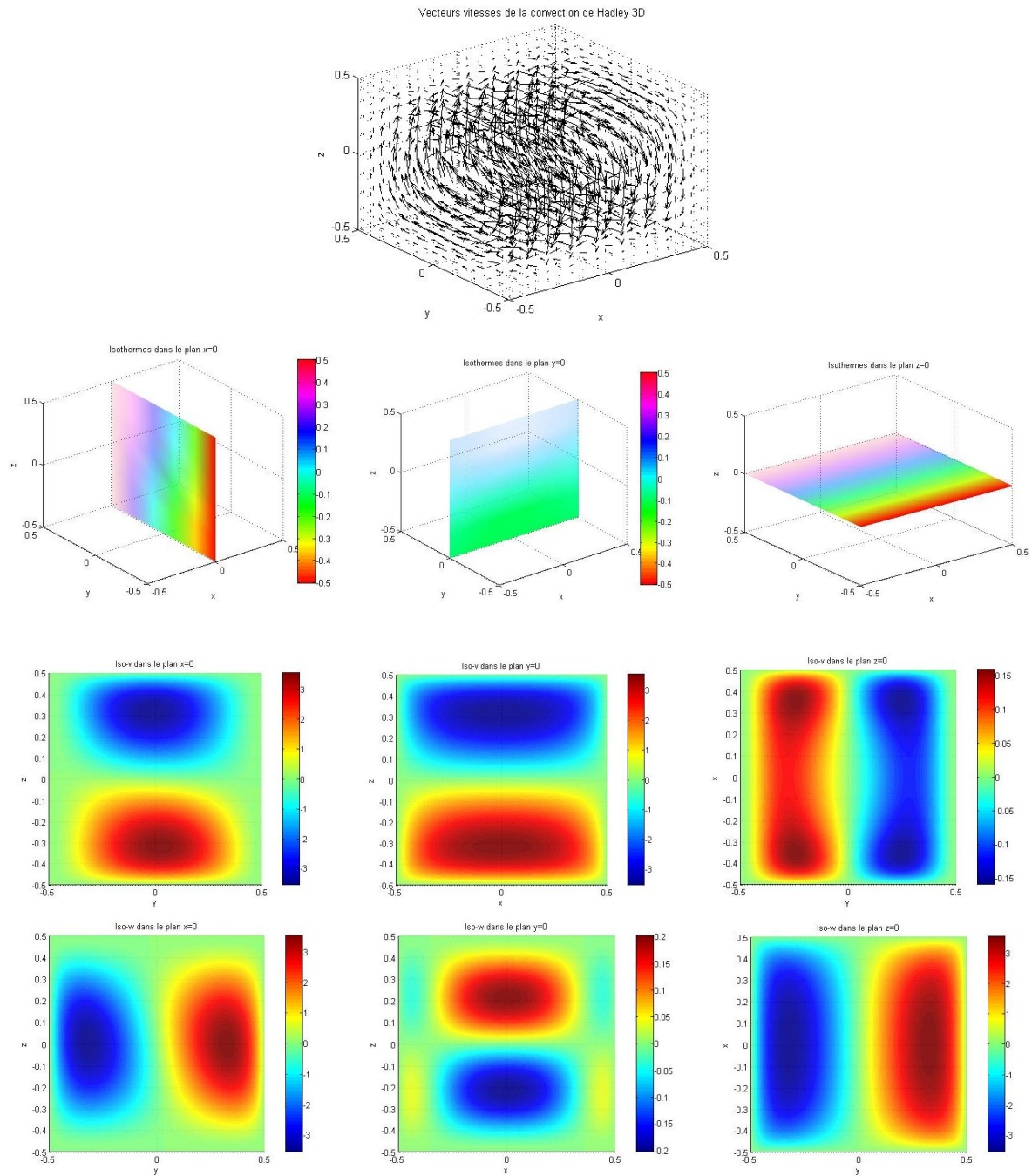


Figure 4: Vecteurs vitesses, isothermes et composantes des vitesses dans la cavité 3D

5. Conclusion

Dans ce papier deux méthodes ont été proposées pour la résolution des équations bidimensionnelles et tridimensionnelles du problème de la convection naturelle dans une cavité, écoulement de Hadley, la méthode spectrale et les différences finies. Les deux méthodes donnent un bon accord avec les résultats des benchmarks 2D et 3D. Les deux codes sont comparés en terme de capacité de stockage et temps de calcul qui est relativement long pour la méthode de différence finies par rapport à la méthode spectrale.

Références

- [1] Mokhtar Ben Sassi, Slim Kaddeche, Marcello Lappa, Séverine Millet, Daniel Henry and Hamda Ben Hadid, On the effect of thermodiffusion on solute segregation during the growth of semiconductor materials by the vertical Bridgman method, *Journal of Crystal Growth*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2016.09.043>
- [2] Ben Hadid H., Henry D., Kaddeche S., "Numerical study of convection in the horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field. Part I. Two-dimensional flow", *J. Fluid Mech.* 333 (1997) 23-56.
- [3] Kaddeche S., Henry D., Putelat T., Ben Hadid H., "Instabilities in liquid metals controlled by constant magnetic field. Part I: Vertical magnetic field", *J. Cryst. Growth* 242 (2002) 491-500.
- [4] Kaddeche S., Henry D., Putelat T., Ben Hadid H., "Instabilities in liquid metals controlled by constant magnetic field. Part II: Horizontal magnetic field", *J. Cryst. Growth* 242 (2002) 501-510.
- [5] Kaddeche S., Garandet J.P., Barat C., Ben Hadid H., Henry D., "Interface curvature and convection related macrosegregation in the vertical Bridgman configuration", *J. Cryst Growth*. 158 (1996) 144-152.
- [7] Kaddeche, S., Ben Hadid, H. & Henry, D. 1994 Macrosegregation and convection in the horizontal Bridgman configuration. I. Dilute alloys. *J. Cryst. Growth* **135**, 341
- [8] Kaddeche, S., Ben Hadid, H. & Henry, D. 1994 Macrosegregation and convection in the horizontal Bridgman configuration. II. Concentrated alloys. *J. Cryst. Growth* **141**, 279
- [9] Ben Hadid, Roux, *Adv. Space Res.* Vol. 8, No. 12, pp.251-264, 1988
- [10] E. Tric, G. Labrosse, M. Betrouni, 2000, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 43, 4043-4056