

Etude des résonances hormiques des ondes interfaciales de gravité-capillarité en profondeurs arbitraires

N. ALLALOU^a, M. DEBIANE^b, D. BOUGHAZI^b, C. KHARIF^c

- a. Université M'Hamed Bougara de Boumerdes, Département de Physique, Avenue de l'Indépendance, Boumerdes, 35000, Algérie, email : nallalou@univ-boumerdes.dz (Allalou)
- b. Faculté de Physique, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne, B.P. 32 El Alia, Alger, 16111, Algérie.
- c. Université Aix-Marseille, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE, Marseille, France

Résumé :

Les ondes interfaciales se sont des ondes qui se développent à l'interface de deux fluides de densités différentes. Ces ondes peuvent apparaître, par exemple, dans les fjords norvégiens, où l'eau douce provenant de la fonte des glaciers polaires se trouve au-dessus de l'eau salée. Dans ce travail, on s'intéresse à la propagation des ondes interfaciales progressives et permanentes soumises à la fois aux forces de gravité et de tension de surface. La méthode de calcul des perturbations suivant un petit paramètre lié à la cambrure. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de mettre en évidence le phénomène de la résonance harmonique.

Abstract :

The interfacial waves are waves that develop at the interface of two fluids of different densities. In the present work, we study a progressive interfacial waves in which the two forces gravity and capillarity are present. The perturbation method is used obtain solutions to the fifth order. The advantage of this technique is that it highlights the harmonic resonance.

Mots clefs : onde interfaciale de gravité-capillarité ; méthode des perturbations ; résonance harmonique.

1 Introduction

L'océan est stratifié par la variation, avec la profondeur, de la température et de la salinité. L'atmosphère quant à elle est stratifiée en température. Dans le cas où les ondes se propagent à l'interface de deux couches de fluides de densités différentes, on les appelle ondes interfaciales. Ces ondes sont soumises à des forces de rappel permettant leurs propagations. Si la force de rappel à l'œuvre est la gravité, on parle d'onde interfaciale de gravité. Lorsque les effets de gravité et de la tension superficielle sont tous deux considérés, les ondes sont dites de gravité-capillarité. Le paramètre adimensionnel qui mesure l'importance relative des deux effets est :

$$b = \frac{k^2 T}{g(\rho_2 - \rho_1)}$$

Ici k est le nombre d'onde, T la tension superficielle, g l'accélération de la pesanteur, ρ_2 la densité du fluide de la couche inférieure et ρ_1 celle de la couche supérieure. b est l'inverse du nombre de Bond qui mesure le rapport des forces de gravité et de capillarité. Le problème des ondes interfaciales

bidimensionnelles a été l'objet de nombreux travaux analytiques ou numériques. La méthode de perturbation est généralement utilisée pour l'approche analytique. Hunt [1] calcula des solutions des ondes interfaciales de gravité au quatrième ordre et Tsuji & Nagata [2] l'ont étendus au cinquième ordre. Des solutions numériques jusqu'à 31ème ordre ont été calculées par Holyer [3]. Vanden-Broeck [4] a considéré le problème des ondes interfaciales de gravité-capillarité en profondeurs infinies. Il a transformé le système d'équations du problème en une équation intégral-différentielle qu'il l'a résolu en utilisant la méthode de Newton. Saffman & Yuen [5] ont considéré le problème des ondes interfaciales de formes permanentes en présence d'un courant constant, de vitesse U , parallèle à la direction de propagation. Bontozoglou & Hanratty [6] ont reconsidéré cette étude en incluant l'effet de la profondeur de la couche inférieure. La présente étude concerne les ondes interfaciales bidimensionnelles en profondeurs arbitraires et dans le cas où la gravité et la tension superficielle sont simultanément prises en compte. Elle a pour objectif d'étendre le travail de Barakat & Houston [7], effectué pour les ondes de surface, au cas des ondes interfaciales. Récemment, Allalou & al. [8] ont calculé des solutions analytiques dans le cas des ondes interfaciales de gravité-capillarité en profondeurs infinies. La méthode que nous proposons est celle des perturbations qui consiste à développer suivant un petit paramètre lié à la cambrure l'interface η et les potentiels des vitesses des deux fluides ϕ_1 et ϕ_2 . Il s'agit d'étendre l'étude de Allalou & al aux profondeurs finies.

2 Position du problème

On considère deux couches de fluides parfaits incompressibles, d'épaisseurs d_1 et d_2 , en équilibre et limitées par deux plans horizontaux (figure 1). On désigne par ρ_1 et ρ_2 les masses volumiques des deux fluides avec $\rho_2 > \rho_1$ (stratification stable). On étudiera les ondes de gravité-capillarité progressives pouvant se propager dans ce milieu. Pour étudier les formes permanentes, on impose à $\mathfrak{R}(O, x, z)$ de se déplacer dans la direction de propagation, celle de l'axe (Ox) , avec une vitesse constante égale à la célérité c de l'onde. On obtient finalement ce système d'équation, on supposant les fluides comme non-visqueux et que l'écoulement est irrotationnel :

$$\begin{aligned} \phi_{ixx} + \phi_{iyy} &= 0 & \text{pour } i = 1 \quad \eta \leq z \leq d_1 & \text{ et } i = 2 \quad -d_2 \leq z \leq \eta \\ \left(\eta - \omega \phi_{2x} + \frac{1}{2}(\phi_{2x}^2 + \phi_{2z}^2) \right) - \mu \left(\eta - \omega \phi_{1x} + \frac{1}{2}(\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2) \right) - \frac{\kappa \eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} &= 0 & \text{pour } z = \eta \\ -\omega \eta_x + \phi_{ix} \eta_x - \phi_{iz} &= 0 & \text{pour } z = \eta & i = 1, 2 \\ \phi_{1z} &= 0 & \text{pour } z = d_1 \\ \phi_{2z} &= 0 & \text{pour } z = -d_2 \end{aligned}$$

Ici, $\mu = \rho_1/\rho_2$ représente le rapport des densités et $\kappa = k^2 T / (g \rho_2)$ est l'inverse du nombre de Bond qui mesure le rapport des forces de tension superficielle et de gravité. Ce système d'équation admet des solutions périodiques de formes permanentes dont la résolution est réalisée par la méthode de perturbation qui fera l'objet du paragraphe suivant.

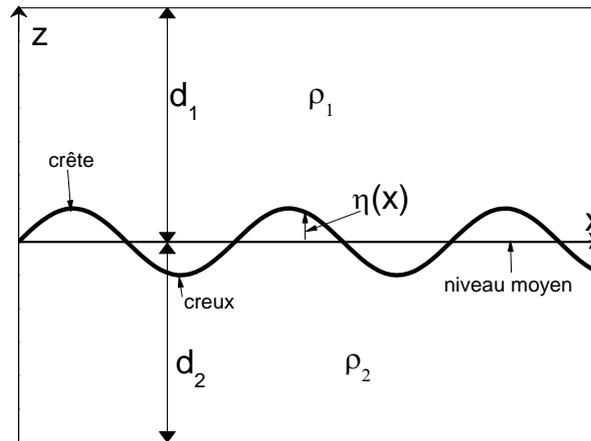


Figure 1 : Représentation schématique de l'onde et ses caractéristiques.

3 Méthode de résolution

Pour résoudre le problème des ondes d'amplitude finie, on utilise la méthode des perturbations. Elle consiste à présenter la solution sous forme d'un développement en série de puissances d'un paramètre lié à la cambrure h :

$$\begin{cases} \phi_i(x, z) = \phi_i^{(1)} h + \phi_i^{(2)} h^2 + \phi_i^{(3)} h^3 + \dots \\ \eta(x) = \eta^{(1)} h + \eta^{(2)} h^2 + \eta^{(3)} h^3 + \dots \\ \omega = \omega_0 + h\omega_1 + h^2\omega_2 + \dots \end{cases} \quad (1)$$

Les potentiels des vitesses, pour chaque fluide, sont développés en série de Taylor autour de $z=0$, tronquée à l'ordre 5 :

$$\phi_i(x, z) = \sum_{r=1}^5 \phi_i^{(r)}(x, 0) h^r + \left(\sum_{r=1}^5 \eta^{(r)} h^r \right) \sum_{r=1}^5 \frac{\partial \phi_i^{(r)}}{\partial z} h^r + \left(\sum_{r=1}^5 \eta^{(r)} h^r \right)^2 \sum_{r=1}^5 \frac{\partial^2 \phi_i^{(r)}}{\partial z^2} h^r$$

On cherche des solutions vérifiant les conditions aux limites et qui se présentent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \eta^{(l)} = \sum_{i=1}^l a_i^{(l)} \cos(ix) \\ \phi_1^{(l)} = \sum_{i=1}^l b_i^{(l)} \sin(ix) \frac{\cosh(i(z-d_1))}{\sinh(id_1)} \\ \phi_2^{(l)} = \sum_{i=1}^l c_i^{(l)} \sin(ix) \frac{\cosh(i(z+d_2))}{\sinh(id_2)} \end{cases}$$

Les procédures de calcul sont identiques à celles de Allalou & et al. [8]. On peut montrer le problème admet les solutions suivantes :

$$a_m^{(l)} = \frac{\chi_m^{(l-1)} \omega_0 \tanh(md_1) + \mu \beta_m^{(l-1)} \omega_0 \tanh(md_2) + \alpha_m^{(l-1)} \tanh(md_1) \tanh(md_2)}{(\kappa m^2 + 1 - \mu) \tanh(md_1) \tanh(md_2) - m \omega_0^2 \tanh(md_1) - \mu m \omega_0^2 \tanh(md_2)}$$

$$b_m^{(l)} = \frac{\tanh(md_1) \left[\omega_0^2 m (\chi_m^{(l-1)} - \beta_m^{(l-1)}) + \tanh(md_2) (\beta_m^{(l-1)} (\kappa m^2 + 1 - \mu) + m \omega_0 \alpha_m^{(l-1)}) \right]}{(\kappa m^2 + 1 - \mu) \tanh(md_1) \tanh(md_2) - m \omega_0^2 \tanh(md_1) - \mu m \omega_0^2 \tanh(md_2)}$$

$$c_m^{(l)} = \frac{\tanh(md_2) \left[\omega_0^2 m \mu (\beta_m^{(l-1)} - \chi_m^{(l-1)}) + \tanh(md_1) (\chi_m^{(l-1)} (\kappa m^2 + 1 - \mu) + m \omega_0 \alpha_m^{(l-1)}) \right]}{(\kappa m^2 + 1 - \mu) \tanh(md_1) \tanh(md_2) - m \omega_0^2 \tanh(md_1) - \mu m \omega_0^2 \tanh(md_2)}$$

Le phénomène de résonance harmonique se produit lorsque le fondamental se propage avec la même vitesse de phase qu'un harmonique de mode (m). Mathématiquement, cette situation se traduit par l'apparition de diviseurs nuls dans les coefficients des harmoniques $a_m^{(i)}$, $b_m^{(i)}$ et $c_m^{(i)}$. Ceci apparait lorsque les paramètres de l'onde vérifient la relation suivante :

$$(\kappa m^2 + 1 - \mu) \tanh(md_1) \tanh(md_2) - m \omega_0^2 \tanh(md_1) - \mu m \omega_0^2 \tanh(md_2) = 0$$

Cette relation constitue une généralisation des «rides de Wilton» au cas des ondes interfaciales. La valeur de κ pour laquelle la résonance se produit est :

$$\kappa = \frac{(\mu - 1) \left[F_m G_m (F_1 + \mu G_1) - m F_1 G_1 (\mu G_m + F_m) \right]}{m \left[m F_m G_m (F_1 + \mu G_1) - F_1 G_1 (\mu G_m + F_m) \right]}, \quad m=2,3,\dots \quad (2)$$

avec : $F_m = \tanh(md_1)$ et $G_m = \tanh(md_2)$.

Signalons que pour les valeurs critiques de κ données par l'expression précédente, la solution trouvée par la méthode des perturbations n'est plus valable. En effet, une des hypothèses formulées dans le cas de cette méthode est que les coefficients d'ordre n sont inférieurs à ceux d'ordre n+1. Si la relation (2) est satisfaite, cette hypothèse n'est plus vérifiée car les coefficients des harmoniques tendront vers l'infini. Sur la figure (2), nous avons représenté les courbes de résonances dans le plan $(1/\kappa, \mu)$ jusqu'à l'ordre 5 et pour des valeurs de $d_1=1$ et $d_2=0.8$. Ces courbes coupent l'axe $1/\kappa$, qui représente le nombre de Bond, en :

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{m^2 \tanh md_2 - m \tanh d_2}{m \tanh d_2 - \tanh md_2}$$

De plus ces figures montrent que les courbes de résonance atteignent des valeurs asymptotiques lorsque μ tend vers 1. Théoriquement pour $\mu = 1$, la valeur de κ est nulle. Notons aussi les courbes de résonance remplissent l'espace des paramètres dans un ordre bien particulier. Lorsque l'ordre augmente, ces courbes s'ordonnent toujours au dessous de la courbe $m = 2$. Signalons aussi pour ces valeurs critiques de κ , le problème des ondes interfaciales de gravité-capillarité ne peut se résoudre d'une manière unique à cause de la dégénérescence des solutions.

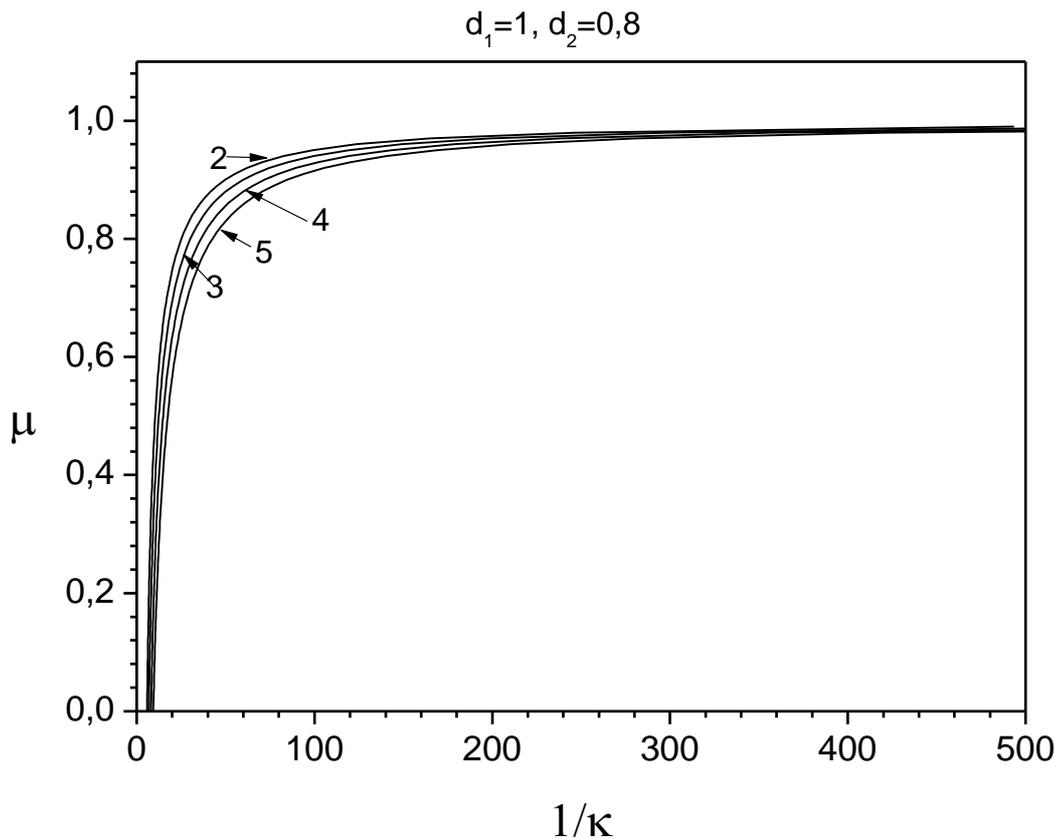


Figure 2 : ensemble des courbes de résonance jusqu'à l'ordre 5, en fonction du nombre de Bond et du rapport des densités pour le cas des profondeurs finies.

Références

- [1] Hunt, J. N.; Interfacial waves of finite amplitude. *Houille Blanche* , 16, 515–531 (1961).
- [2] Tsuji, Y., & Nagata, Y.; Stokes expansion of internal deep water waves to the fifth order. *J. Ocean. Soc. Japan* , 29, 61–69 (1973).
- [3] Holyer, Y. J.; Large amplitude progressive interfacial waves.; *J. Fluid Mech.* , 93, 433–448 (1979).
- [4] Vanden-Broeck, J. M.; Numerical calculation of gravity-capillary interfacial waves of finite amplitude. 23 (9), 1723-1726 (1980).
- [5] Saffman, P. G., & Yuen, H. B. (1982). Finite-amplitudes interfacial waves in the presence of a current. *J. Fluid Mech.*, 123, 459-476.
- [6] Bontozoglou, & Hanratty, T. J.; Capillary-gravity Kelvin-Helmholtz waves close to resonance. *J. Fluid Mech.*, 217, 71-91 (1990).
- [7] Barakat, R., & Houston, A.; Nonlinear periodic capillary-gravity waves on fluid of finite depth. *J. Geophys. Res.* , 20, 6546-6554 (1968).
- [8] Allalou N., Trea, I. Boughazi, D. Debiane, M. & Kharif, C.; A fifth-order approximation to gravity-capillary interfacial waves of infinite depth, *C. R. Mecanique* 344 , 137–150 (2016).