



جامعة أمحمد بوقرة بومرداس
UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA DE BOUMERDES
كلية المحروقات والكيمياء
FACULTE DES HYDROCARBURES ET DE LA CHIMIE



Cours et Exercices D'Hydrodynamique Appliquée

Par

Mourad GARECHE

Docteur ès Sciences

Maitre de Conférences A à l'Université M'Hamed Bougara de Boumerdès

Edition 2021

***"Dans les sciences, le chemin est plus important que le but.
Les sciences n'ont pas de fin."***

Erwin Chargaff

Avant-propos

A titre de préliminaire à ce cours, on pourra par exemple se poser les questions suivantes :

- pourquoi les portes claquent dans un courant d'air ?
- pourquoi les bulles remontent dans l'eau ?
- pourquoi un avion ne tombe t'il pas sous son propre poids ?
- comment faire monter un fluide d'un point bas à un point haut ?

Toutes ces questions sont généralement posées plutôt par les enfants, parce qu'ils cherchent à comprendre le monde qui les entoure. Avec l'âge, la tendance intellectuelle naturelle est plutôt à l'acceptation du phénomène.

L'hydrodynamique ou la mécanique des fluides de façon générale a cet avantage sur d'autres disciplines de la physique qu'elle fait partie de notre quotidien. Aussi, il est toujours bon d'appréhender un écoulement de fluide tout d'abord avec sa seule intuition. Les équations de la mécanique des fluides ont une structure mathématique complexe, et doivent être vues comme un ultime recours pour décrire ou quantifier un phénomène, là où l'intuition s'arrête. Les équations ne sont pas la mécanique des fluides, elles la décrivent.

Ce document est un ouvrage d'Hydrodynamique Appliquée. Il s'adresse aux licences 2 de la spécialité Génie Pétrolier et Gazier : Production des Hydrocarbures, forage des puits et du réservoir engineering. Il constitue une synthèse succincte de quelques travaux collectés sur plusieurs ouvrages (voir références bibliographiques) permettant aux étudiants de mieux assimiler cette matière qui s'avère un peu complexe surtout s'agissant des écoulements à travers des géométries complexes qui peuvent aussi être le siège de phénomènes supplémentaires tel que les résistances locales favorables dans les pertes de charges singulières.

Ce polycopié est élaboré en sept chapitres de cours suivi par une série d'exercices avec quelques réponses permettant ainsi à l'étudiant de mieux comprendre cette discipline.

Ce document n'a pas la prétention de rentrer en compétition avec d'autres livres dont certains sont excellents (voir bibliographie) mais malheureusement, ne sont pas toujours disponible. Et même si cette disponibilité lui sera assurée, ne dit-on pas : "abondance des biens ne nuit pas".

Le lecteur comprendra que mon souhait est que ce présent polycopié puisse lui apporter quelques notions pour pouvoir formuler et résoudre certains problèmes d'hydrodynamique dans le domaine de génie pétrolier.

Enfin, Je remercie d'une part, Mr. Kamel MOHAMMEDI, Professeur en mécanique des fluides au département de transport des hydrocarbures, de l'université de Boumerdès qui a prêté une attention à cet ouvrage en acceptant d'examiner le contenu et d'autre part, je souhaite très vivement recevoir des lecteurs les remarques et les critiques qui me permettront d'améliorer le contenu de cet ouvrage.

Mourad GARECHE.

Table des Matières

	Introduction Générale	1
Chapitre I :	Statique des fluides	
	1- Généralités sur les fluides.....	2
	2- Equation fondamentale de l'hydrostatique.....	3
	3- Principe de Pascal.....	4
	4- Calcul de forces de pression.....	4
	5- Principe d'Archimède.....	7
Chapitre II :	Equations de base de la mécanique des fluides	
	1- Introduction.....	9
	2- Systèmes de coordonnées Eulérien et Lagrangien.....	9
	3- Théorème de transport de Reynolds.....	9
	4- Principe de conservation de masse.....	10
	5- Principe de conservation de mouvement	10
	6- Rotation-Translation-Déformation.....	12
	7- Equations de Navier-Stokes.....	13
Chapitre III :	Cinématique des fluides	
	1- Définitions.....	15
	2- Accélération d'une particule fluide.....	15
	3- Analyse du mouvement d'un élément de volume de fluide.....	15
	4- Notion de circulation.....	17
Chapitre IV :	Dynamique des fluides parfaits	
	1- Introduction.....	18
	2- Equation de continuité.....	18
	3- Equation du mouvement.....	18
	3.1- Equation d'Euler.....	18
	3.2- Equation de Bernoulli.....	19
Chapitre V :	Dynamique des fluides réels	
	1- Introduction.....	24
	2- Notion de loi comportement de fluides.....	24
	2.1- Fluide Newtoniens.....	24
	2.2- Fluide non-Newtoniens.....	24
	3- Equation du mouvement d'un fluide réel ou visqueux.....	25
	4- Equation de Bernoulli pour un fluide réel ou visqueux.....	26
	5- Notions sur les pertes de charge.....	27
	5.1-Pertes de charge linéaire.....	27
	5.2-Pertes de charge singulière.....	27

Chapitre VI :	Régimes d'écoulement et Pertes de charge	
	1- Régimes d'écoulement	28
	1.1-Expérience de Reynolds.....	28
	2- Pertes de charge linéaires et singulières	29
	2.1-Perte de charge linéaire.....	29
	2.2-Pertes de charge singulière.....	32
Chapitre VII :	Calcul de Conduites	
	1- Introduction.....	36
	2- Les différents types de conduites.....	36
	3- Caractéristique d'une conduite simple.....	37
	4- Classification de problèmes de calcul de conduite.....	38
	4.1-Calcul de conduites simples.....	38
	4.2-Calcul de conduites mixtes.....	40
	4.3-Calcul de conduites multiples ou parallèles.....	40
	4.4-Calcul de conduites ramifiées	41
	4.5-Calcul de conduites complexes	41
	4.6-Calcul de conduites d'aspiration et de refoulement.....	41
Chapitre VIII :	Exercices.....	43
	Référence.....	52
	Annexe.....	53

Introduction

L'hydrodynamique est la science qui étudie le mouvement des liquides appelés aussi fluides incompressibles. Elle fait partie de la mécanique des fluides.

L'étude de la mécanique des fluides remonte au moins à l'époque de la Grèce antique avec le célèbre savon Archimède, connu par son principe qui fut à l'origine de la statique des fluides. Aujourd'hui, la dynamique des fluides est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus.

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle comprend deux grandes sous branches:

- la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.
- la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement. Comme autres branches de la mécanique des fluides.

On distingue également d'autres branches liées à la mécanique des fluides : l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, ... Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies: la mécanique des fluides numérique (CFD ou Computational Fluid Dynamics en anglais), qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs très puissants : les supercalculateurs.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, mais aussi la météorologie, la climatologie ou encore les pipes lines (oléoducs et gazoducs).

La matière a une structure discontinue et la notion de milieu continu est un pur schéma. Elle consiste à admettre que la masse et toutes ses propriétés sont réparties continûment dans le matériau (ce qui n'exclut pas les discontinuités aux interfaces). Bien entendu ce schéma ne prétend représenter que les phénomènes macroscopiques dont les échelles caractéristiques sont très grandes devant la distance intermoléculaire moyenne. Comme il n'est pas question d'ignorer complètement les phénomènes dont le siège est à l'échelle moléculaire (comme celui de la diffusion), ceux-ci devront être représentés à travers une description macroscopique de leurs conséquences à grande échelle.

Un milieu matériel est dit continu lorsque toutes ses propriétés sont des fonctions continues de l'espace et du temps (champ de contraintes, température, vitesse, loi de comportement etc.). Toutefois, un milieu peut être continu par morceaux, ceux-ci étant séparés par des surfaces de discontinuité (cas d'un contact entre milieux différents).

On adopte habituellement deux hypothèses simplificatrices :

- hypothèse d'homogénéité. – Certaines propriétés du milieu sont indépendantes des coordonnées spatiales (chaleur massique, conductivité thermique...);
- hypothèse d'isotropie. – Certaines propriétés sont identiques dans toutes les directions.

Chapitre I

Statique des fluides

1- Généralités sur les fluides

1.1-Définition de fluide

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entre particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient, par exemple: les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes.

On insiste sur le fait qu'un fluide est supposé être un milieu continu : même si l'on choisit un très petit élément de volume, il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constitue. Par exemple, une gouttelette de brouillard, aussi petite soit-elle à notre échelle, est toujours immense à l'échelle moléculaire. Elle sera toujours considérée comme un milieu continu. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement par leur viscosité. La viscosité est une de leur caractéristique physico-chimique qui sera définie dans la suite du cours et qui définit le frottement interne des fluides. Les fluides peuvent être classés en deux grandes familles : La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée par les fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent.

1.2- Propriétés de fluide

Les propriétés physiques de fluide les plus importantes du point de vue mécanique sont :

- Isotropie : propriétés identiques dans toutes les directions du fluide
- Mobilité : le fluide n'a pas de forme propre
- Compressibilité : la capacité de variation du volume sous l'effort de force
- Viscosité : c'est la résistance du fluide à l'écoulement

1.3- Pression en un point d'un fluide

Dans un fluide en équilibre, la pression sur un élément de surface quelconque dS (intérieur au fluide ou sur la paroi) est toujours normal à l'élément de surface.

On observe que la force normale dF sur une petite surface dS en un point M d'un fluide au repos est une force de compression indépendante de l'orientation de cette surface. Le module de cette pression est :

$$P = dF/dS \quad [N/m^2]$$

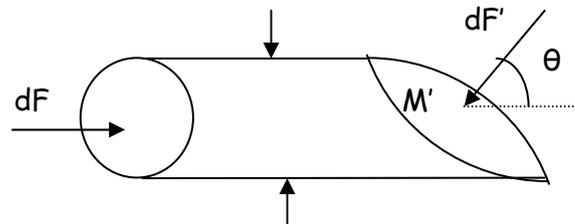


Fig. I.1- Élément de fluide

Soit une masse de fluide de forme cylindrique infiniment petite de section droite dS de centre M . L'autre base de section dS' de centre M' et d'orientation quelconque définie par l'angle θ . Soient P et P' les pressions normales aux sections respectivement dS et dS' .

Par définition, $dF = P dS$ et $dF' = P' dS'$

En écrivant l'équilibre des forces sur l'axe MM' (dans le sens horizontal de la fig.1.1), en ne tenant compte pas des force appliquées sur la surface latérales qui s'éliminent, on aura :

$$dF - dF' \cos\theta = 0$$

$$PdS - P' dS' \cos\theta = 0$$

$$P dS = P' dS' \cos \theta \text{ or } dS = dS' \cos \theta \text{ d'ou } P = P'$$

Cette égalité est vraie quelque soit l'angle. La pression est donc indépendante de l'orientation de la surface.

2- Equation fondamentale de l'hydrostatique

Soit un volume cylindrique de liquide séparé du reste du liquide au repos.

Equilibrions le volume cylindrique en faisant l'inventaire de forces qui lui sont appliquées d'après la 1 ère loi de Newton en mécanique.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \text{ ou } \vec{F}_0 + \vec{F}_G + \vec{F}_M = 0$$

Où F_0 est la force de pression à la surface libre du liquide, F_G est le poids du liquide considéré (volume cylindrique) et F_M la force de pression à estimer.

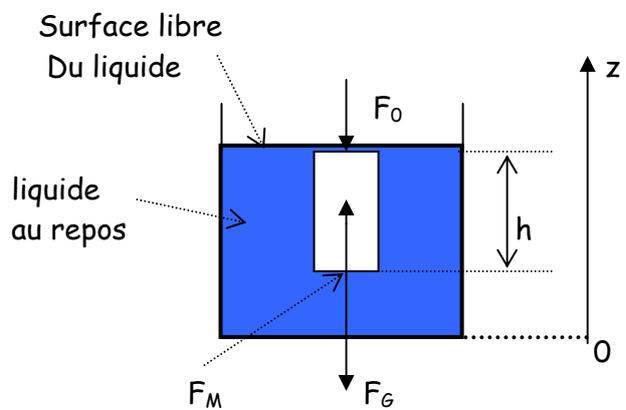


Fig.1.2- Volume de liquide au repos dans un récipient

Par projection sur l'axe vertical Oz : $F_M = F_0 + F_G$ ou $P_M \Delta S = P_0 \Delta S + Mg$

Or $M = \rho V = \rho h \Delta S$

D'où $P_M = P_0 + \rho g h$

Cette pression comme le montre l'équation est composée de deux termes : de la pression agissant sur la surface libre du liquide P_0 et de la pression créée par le poids des couches liquides superposées.

Désignons par z la coordonnée du point M. On aura $h = z_0 - z_M$

Remplaçons dans l'équation l'expression de h et on trouve :

$$P_M + \rho g z_M = P_0 + \rho g z_0$$

Comme le point M a été choisi arbitrairement, nous pouvons affirmer que pour tout le volume du liquide considéré, on aura :

$$P + \rho g z = cte$$

2.1- Unités de mesure de la pression

Les unités normalisées de pression sont données comme suite :

- Système M.T.S : 1 pièze (pz) = 1 sthène/m² = 10⁴ baryes
- Système C.G.S : 1 barye = 1 dyne/cm²
- Système M.K.S.A ou système international (S.I) : 1 Pa = 1 N/m² = 10 baryes = 10⁻³ pz

On trouve également d'autres unités de mesure en pratique telles que :

$$1 \text{ atm} = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$$

$$1 \text{ kgf/cm}^2 = 10^4 \text{ mm d'eau}$$

2.2- Pression absolue et pression relative

Dans de nombreux cas, on peut mesurer les pressions à partir d'une origine quelconque (pression relative). Comme origine de repère, il est fréquent de prendre la pression atmosphérique P_{atm} , ainsi la pression correspondant sera appelée pression effective ou relative tel que :

$$P_{\text{eff}} = P_{\text{abs}} - P_{\text{atm}}$$

La pression effective peut être positive ou négative. Dans ce dernier cas, il s'agit du vide puisque elle correspond à la pression inférieure à P_{atm} .

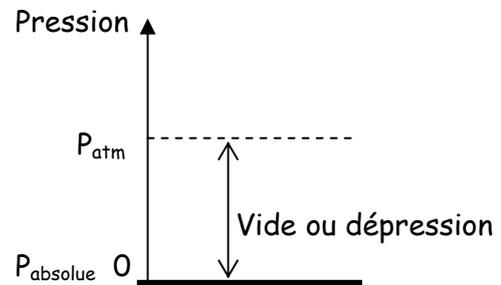


Fig.1.3- Référentiel de pression

Cette pression effective est importante car la plupart des manomètres industriels sont gradués en pression effectives : le zéro de la graduation correspond à la pression atmosphérique.

3- Principe de Pascal

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de la pression à la surface libre du liquide est transmise intégralement et dans toutes les directions du liquide.

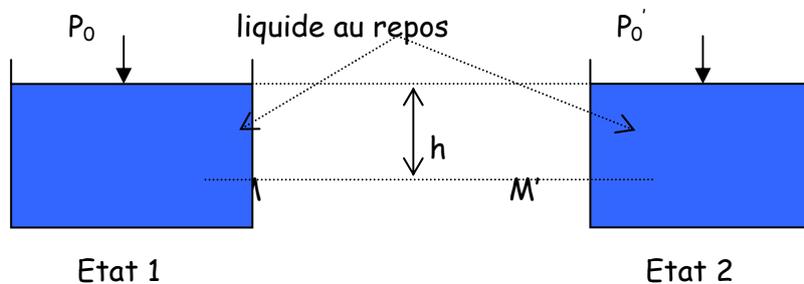


Fig.1.4- Mise en évidence du principe de Pascal

$$P_M = P_0 + \rho g h \quad \text{et} \quad P_{M'} = P_0' + \rho g h$$

$$P_{M'} - P_M = P_0' - P_0 \quad \text{où} \quad \Delta P = \Delta P_0$$

4- Calcul de forces de pression

4.1- Force de pression sur une paroi plane inclinée

4.1.1- Résultante de force de pression sur la paroi

Sur un élément de surface de la paroi dS s'exerce une force élémentaire dF tel que :

$$dF = P \cdot dS = (P_0 + \rho g z) dS = P_0 \cdot dS + \rho g z \cdot dS$$

la valeur de cette résultante de force de pression est :

$$F = \int_S dF = \int P_0 \cdot dS + \int \rho g z \cdot dS$$

comme P_0 , g et ρ sont constantes alors,

$$F = P_0 \int dS + \rho g \int z \cdot dS = P_0 S + \rho g \int z \cdot dS = F_0 + \rho g \int z \cdot dS$$

Si $P_0 = P_{atm}$

Alors on parlera de F comme force effective au lieu de force absolue car $P_{abs} = P_{eff} + P_{atm}$

D'où $F = \rho g \int z \cdot dS$ (*)

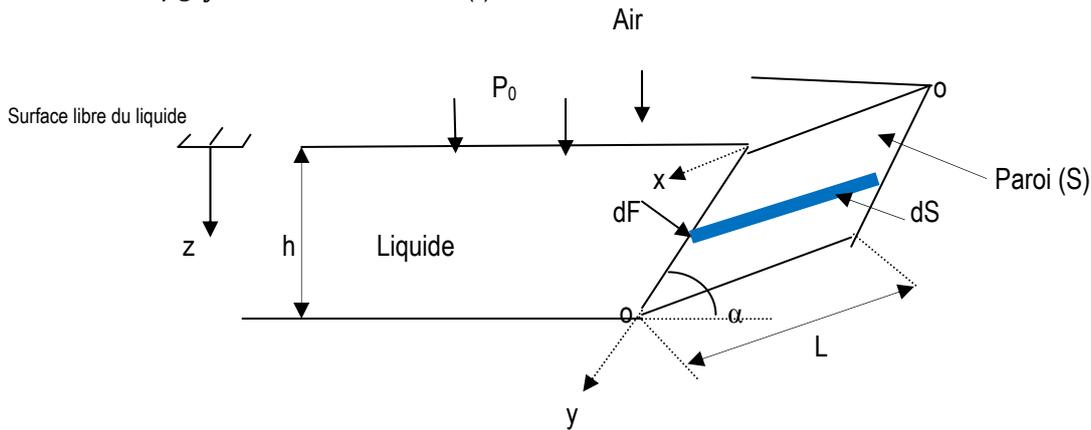


Fig.1.5- Force de pression sur paroi plane inclinée

Méthode de résolution de l'équation (*)

a- en utilisant la géométrie de masse

$\int z \cdot dS = z_G \cdot S$: Représente le moment statique de la paroi autour de l'axe ox et G , le centre de gravité de la paroi.

La poussée exercée sur une surface plane par un fluide pesant en équilibre est égale au poids d'une colonne de fluide ayant pour base la surface de la paroi et pour hauteur la profondeur du centre de gravité de la surface au dessus de la surface libre du fluide.

On peut dire que la pression moyenne qui s'exerce sur la paroi plane est celle qui règne au centre de gravité.

Donc $F = \rho g z_G \cdot S$

b- en faisant l'intégration de façon générale de l'équation (*)

$$dS = L \cdot dy$$

$$z = y \cdot \sin \alpha$$

$$0 \leq z \leq h$$

$$0 \leq y \leq \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$\text{alors } F = \frac{\rho g L}{\sin \alpha} \int_0^h z \cdot dz = \frac{\rho g L h^2}{2 \sin \alpha}$$

4.1.2- Point d'application de la résultante de force de pression sur la paroi

Le point d'application de la résultante de force de pression est appelé centre de poussée. Sa position s'obtient en prenant le moment de la force résultante est égale à la somme des moments des forces élémentaires par rapport à un point ou à l'axe ox. Ce qui se traduit par :

$$z_p \cdot \int dF = \int z \cdot dF \quad \text{avec } F = \rho g z \cdot dS$$

$$z_p = \frac{\int z \cdot dF}{\int dF} = \frac{\int z^2 \cdot dS}{\int z \cdot dS}$$

Z_p représente le rapport du moment d'inertie sur le moment statique de la paroi par rapport à l'axe ox.

$$\int z^2 \cdot dS = I$$

$$\text{et } \int z \cdot dS = z_G \cdot S$$

En utilisant le théorème de Huygens : $I = I_G + S \cdot z_G^2$

$$z_p = z_G + \frac{I_G}{S \cdot z_G}$$

4.2- Force de pression sur une paroi cylindrique ou sphérique

Soient

S_h : surface horizontale de la paroi AB projetée sur la direction horizontale : EB

S_v : surface verticale de la paroi AB projetée sur la direction verticale : AE

G : position du centre de gravité de la paroi AB

P : position du centre de poussée de la force de pression appliquée sur la paroi AB

F_G : poids du volume de liquide considéré

F : force de pression résultante appliquée sur la paroi AB

P_0 : pression extérieure de l'air

Z_G : profondeur verticale où se trouve la position du centre de gravité de S_v

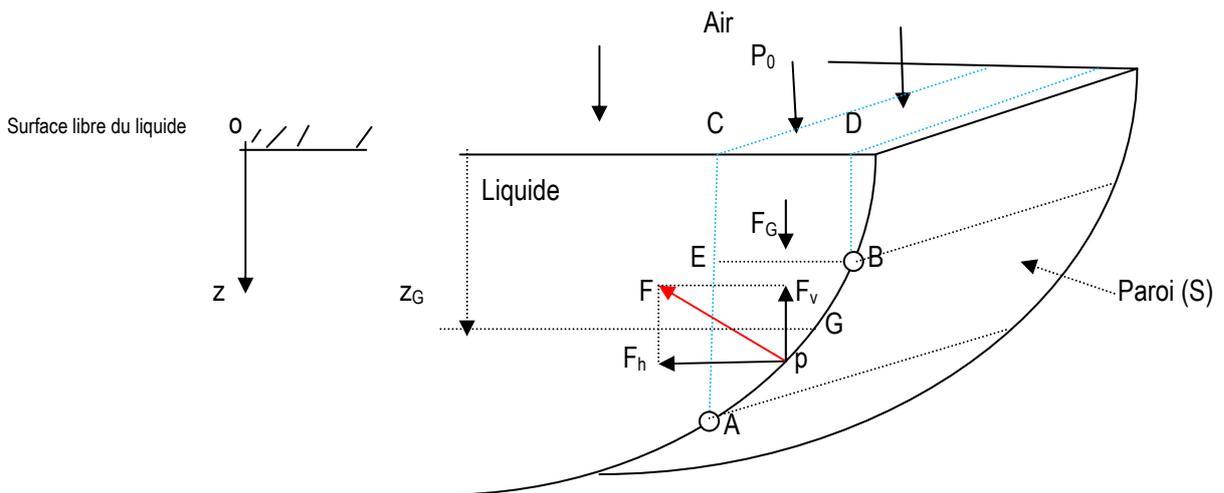


Fig.I.6- Force de pression sur paroi cylindrique

Remarque : la pression exercée suivant la direction horizontale de part et d'autre CE et BD s'équilibrent et s'annulent.

La détermination de la pression d'un liquide sur une paroi de forme quelconque est en général assez difficile. Le plus souvent, on a affaire à des parois cylindriques ou sphériques.

Déterminons la force de pression totale que le liquide exerce sur la paroi AB :

Considérons le volume de liquide compris entre la paroi AB, les surfaces verticales passant les contours de cette région et la surface libre du liquide, c'est-à-dire le volume ABCDA et exprimons les conditions de son équilibre dans les directions verticales et horizontales. Si le liquide agit sur la paroi AB avec une force F, cette paroi agit à son tour sur le liquide avec une force égale mais, dirigée en sens inverse. Cette force de réaction se décompose en deux forces horizontale et verticale respectivement F_h et F_v .

-les conditions de son équilibre du volume ABCD suivant la direction verticales :

$$F_v = P_0 S_h + F_G$$

- les conditions de son équilibre du volume ABCD suivant la direction horizontale :

$$F_h = (P_0 + \rho g Z_G) S_v$$

La force de pression résultante est :

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2}$$

Remarque : La méthode de détermination de la force de pression sur les parois cylindriques qui vient d'être exposée peut être utilisée pour les parois sphériques. Dans ce cas, la force de pression résultante passe nécessairement par le centre de la sphère.

5- Principe d'Archimède

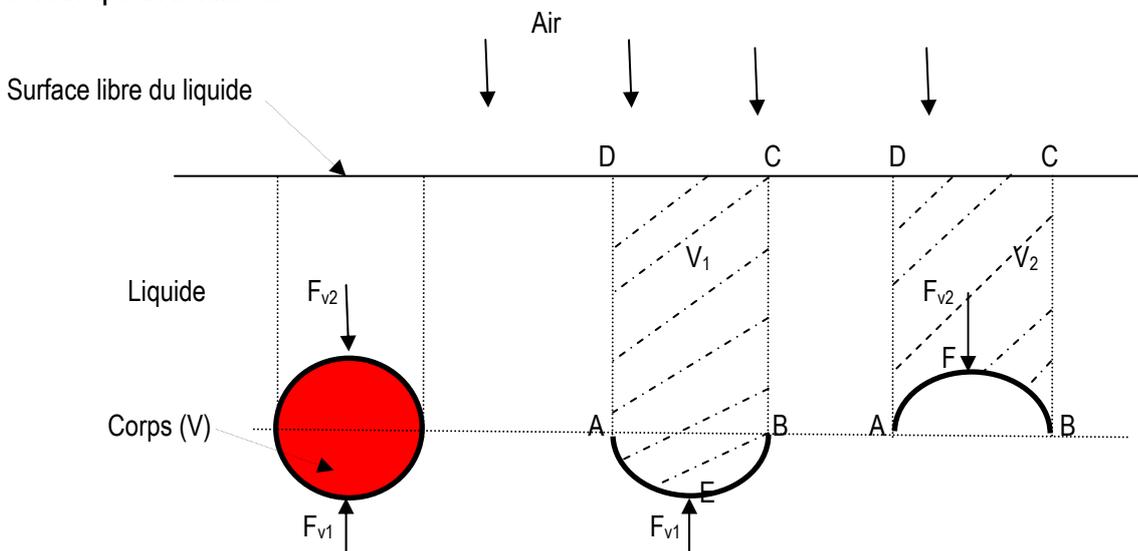


Fig.1.7- Mise en évidence du principe d'Archimède

La composante verticale de la pression du liquide sur la partie inférieure de la surface du corps \vec{F}_{v1} est dirigée vers le haut et égale au poids du liquide contenu dans le volume AEBCDA.

La composante verticale de la pression du liquide sur la partie supérieure de la surface du corps \vec{F}_{v2} est dirigée vers le haut et égale au poids du liquide contenu dans le volume AFBCDA.

Par conséquent, la résultante verticale de la force de pression P_A qu'exerce le liquide sur un corps est dirigée vers le haut et égale au poids du liquide contenu dans un volume représentant la différence des volumes cités, c'est-à-dire dans le volume du corps.

$$P_A = F_{v1} - F_{v2} = \rho g (V_1 - V_2) = \rho g V$$

Enoncé du principe d'Archimède :

Tous corps plongé dans un liquide au repos, subit de la part de ce liquide une poussée verticale de bas en haut égale au poids du volume de liquide déplacé. Ce principe est aussi pour les corps flottants (dans ce cas, la poussée d'Archimède est supérieure au poids du corps).

Chapitre II

Equations de base de la mécanique des fluides

1-Introduction

Les équations résultantes des principes physiques de conservation se résument comme suite :

- Conservation de la masse représentée par l'équation de continuité (équation scalaire)
- Conservation de quantité de mouvement représentée par l'équation du mouvement (équation vectorielle)
- Conservation d'énergie (équation scalaire).

L'équation de conservation d'énergie ne sera pas abordée dans ce chapitre.

2-Systèmes de coordonnées Eulérien et Lagrangien

La description du fluide en mouvement peut se faire de deux façons équivalentes. On peut choisir de suivre les particules fluides dans leur mouvement (point de vue de Lagrange) ou on peut faire un cliché à un instant donné du champ de vitesse de toutes les particules fluides (point de vue d'Euler).

- Dans le système Lagrangien, l'attention est portée sur une masse de fluide au fur et à mesure qu'elle s'écoule. Ainsi, la position d'une particule fluide est repérée par le vecteur $\vec{M}(t)$. Les variables de Lagrange sont le temps t et la position de la particule à un instant de référence t_0 : $\vec{M}(t_0)$
- Dans le système Eulérien, on considère un volume de contrôle (un volume imaginaire limité par une surface fermée). L'attention est portée sur le fluide qui passe à travers ce volume. Ainsi, au lieu de suivre les particules fluides dans leur mouvement, on se place en un point fixe de la particule du référentiel d'étude. La particule est repérée par le vecteur \vec{M} et la vitesse de la particule fluide en ce point à l'instant t est $\vec{v}(\vec{M}, t)$. Les variables d'Euler sont \vec{M} , position du point d'observation et le temps t . Ces variables sont indépendantes.

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w$$

Avec f , une propriété de fluide

3-Théorème de transport de Reynolds

Une fois que le volume de contrôle est défini, on peut écrire les équations du mouvement à l'aide du théorème de transport. Ce théorème a la forme d'expressions générales dont l'un des domaines d'application est celui de la mécanique des fluides.

Le théorème de transport pour un volume n'est rien d'autre que la règle de Leibniz qui est la méthode de la dérivation généralisée à trois dimensions sous le signe somme ou intégrale.

Nous n'allons pas démontrer ce théorème. Il sera juste énoncé comme suite [1] :

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (f \cdot u_i) \right) dV$$

Avec f , une propriété de fluide

Et $i = 1, 2, 3$

4-Principe de conservation de masse

Soit une masse m de fluide délimitée par un volume V . ρ étant sa masse volumique. La conservation de la masse se traduit par $dm/dt = 0$

$$\text{Or } m = \int_V \rho \cdot dV$$

$$\frac{d}{dt} \int \rho \cdot dV = 0$$

En utilisant le théorème de transport de Reynolds, on peut écrire :

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \cdot u_i) \right) dV = 0$$

Le volume V étant choisi arbitrairement, pour que cette équation soit satisfaite pour tous volume V , il faut que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \cdot u_i) = 0 \quad \text{C'est l'équation de continuité.}$$

Avec $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ est le champ de vitesse

Dans le cas où le fluide est incompressible (liquide ou $\rho = \text{cte}$), l'équation de continuité se résume alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \cdot u_i) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{comme } \rho \text{ est cte, alors } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div } v = 0$$

5-Principe de conservation de mouvement

La deuxième loi de Newton appliquée à une masse de fluide en mouvement avec une accélération \vec{a} est :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d}{dt} (m\vec{a})$$

Les forces qui peuvent sur cet élément de fluide peuvent être classées en :

- Forces de volumes telles que les forces gravitationnelles, les forces électromagnétiques...
- Forces de surfaces telles que les forces de pression, les forces de frottement visqueux...

Si f représente la résultante des forces de volume par unité de masse. La force agissant sur toute la masse de fluide est : $\int \rho \vec{f} dV$

Si P représente la résultante des forces de surface par unité de surface. La force agissant sur toute la surface : $\int \vec{P} dS$

La quantité de mouvement de la masse de fluide dans le volume est : $\int \rho \vec{u} dV$

En appliquant la loi de Newton nous obtenons : $\frac{d}{dt} \int \rho \vec{u} dV = \int \vec{P} dS + \int \overline{\rho f} dV$

En général, il y a 9 composantes de contraintes : Une composante normale pour deux composantes tangentiels sur chaque plan de coordonnées.

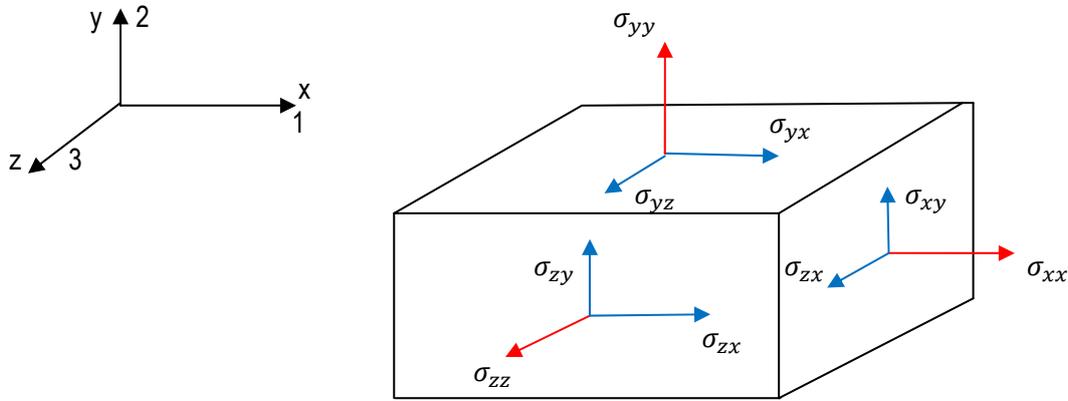


Fig.II.1- Répartition de contraintes sur une masse de fluide de forme cubique

La force de surface peut s'écrire sous forme : $P_j = \sigma_{ij} \cdot n_i$

i représente le plan, j représente la direction et n_i la composante du vecteur unitaire normale à la surface.

L'équation de la variation de quantité de mouvement s'écrit sous forme indicelle :

$$\frac{d}{dt} \int \rho u_j dV = \int \sigma_{ij} \cdot n_i ds + \int \rho f_j dV$$

Le terme de gauche de la relation est transformé en utilisant le théorème de Reynolds. L'intégrale de surface du terme de droite est transformé en une intégrale de volume en utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradsky.

$$\int \left[\frac{\partial (\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j u_k)}{\partial x_k} \right] dV = \int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV + \int \rho f_j dV$$

$$\frac{\partial (\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial (\sigma_{ij})}{\partial x_i} + \rho f_j$$

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j$$

Or d'après l'équation de continuité on a : $u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0$

D'où on obtient l'équation de quantité de mouvement : $\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j$

Le membre de gauche représente la variation de la quantité de mouvement : le 1^{er} terme est l'accélération locale ou temporelle et le 2^{ème} terme est l'accélération convective ou spatiale.

Le membre de droite les forces causant ces accélérations : le 1^{er} terme sont les forces de surface ou de frottement visqueux et le 2^{ème} terme sont les forces de volume ou la pesanteur.

6-Rotation-Translation-Déformation

L'élément de fluide peut subir en une translation, une rotation et une déformation tel que illustrée dans la fig. II.2. On peut définir :

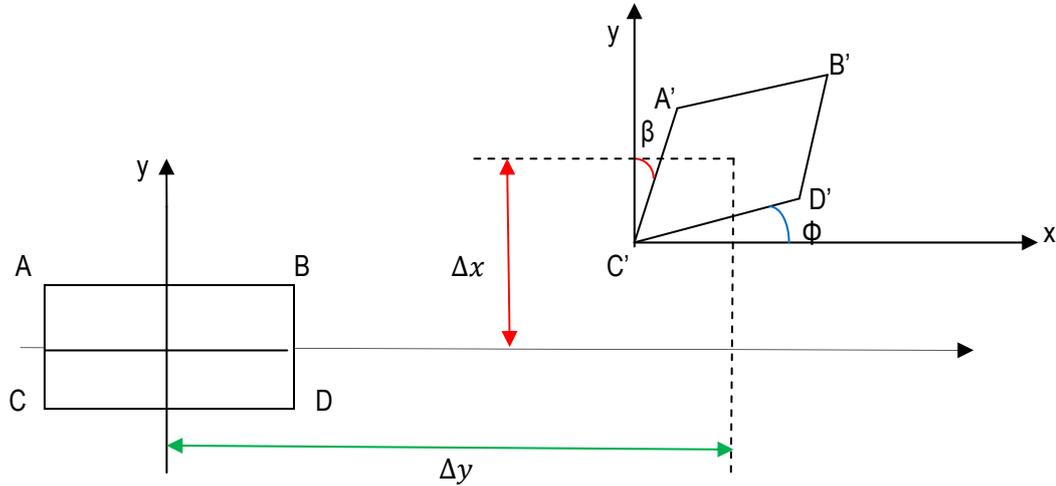


Fig.II.2- Mise en évidence des : translation – rotation – déformation d'un élément de fluide

La vitesse de rotation : $\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$ anti symétrique

La vitesse de déformation : $\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$ symétrique

Le tenseur de déformation \bar{D} : $D_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$

$\bar{D} = \bar{D}_s + \bar{D}_\delta$ définit comme suite

$$\bar{D}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{D}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

\bar{D}_s : Tenseur sphérique pour les déformations linéaires

\bar{D}_δ : Tenseur déviateur pour les déformations angulaires

Par ailleurs le tenseur de contraintes $\bar{\sigma}$ est définit par $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_\delta$ tel que :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = -P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} + P & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} + P & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} + P \end{bmatrix}$$

$\overline{\sigma}_s$: Composantes qui sont dues aux pressions

$\overline{\sigma}_\delta$: Composantes qui sont dues contraintes de frottement visqueux.

P : la pression isotrope

Les hypothèses de Newton

1^{ère} hypothèse : les composantes tangentielles des contraintes visqueuses sont proportionnelles aux vitesses de déformation.

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

2^{ème} hypothèse : les composantes normales des contraintes visqueuses sont :

$$\sigma_{11} + P = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \vec{u} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{22} + P = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \vec{u} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{33} + P = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \vec{u} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

μ : la viscosité dynamique du fluide en [Pa.s]

λ : la viscosité secondaire du fluide en [Pa.s]

Un fluide Newtonien est un fluide où les contraintes s'écrivent sous les formes précédentes.

Dans le cas où le fluide est incompressible alors :

$$\rho = \text{cte}, \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{d'ou} \quad \begin{cases} \sigma_{11} + P = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{22} + P = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{33} + P = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

7-Equations de Navier-Stokes

Pour un fluide Newtonien, l'équation de Navier-Stokes (N-S) peut s'écrire algébriquement comme suite :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \overline{\operatorname{grad}} P + \mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \overline{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u})$$

Où

\vec{f} : est l'accélération de la pesanteur

$\rho \frac{d\vec{u}}{dt}$: force d'inertie par unité de volume

$\rho \vec{f}$: force de pesanteur par unité de volume

$\overrightarrow{\text{grad}P}$: force de pression par unité de volume

$\mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u})$: force de frottement visqueux par unité de volume

Les équations algébriques de Navier-Stokes peuvent s'écrire par projection sur les 3 axes comme suite :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Remarque

Dans le cas où le fluide est incompressible, $\rho = \text{cte}$, $\text{div} \vec{u} = 0$ et l'éq (N-S) s'écrit algébriquement comme suite :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}P} + \mu \Delta \vec{u}$$

Si le fluide s'écoule en régime permanent, on aura l'accélération locale ou temporelle nulle : $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$

Chapitre III

Cinématique des fluides

1- Définitions

- La **cinématique** des fluides étudie le mouvement des fluides sans faire intervenir les forces qui crée ce mouvement.
- La **trajectoire** est le lieu géométrique des positions occupées par une particule fluide au cours du temps lors de son mouvement.
- La **ligne de courant** : à l'instant t , on définit un champs de vitesse \vec{u} . On appelle ligne de courant une courbe tangente en chacun de ces points aux vecteurs vitesses en ces points.

Soient $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ les positions de différentes particules se trouvant sur la même ligne de courant.

$$\vec{u} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

$$\vec{dr} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

L'équation de la ligne de courant est donnée par : $u \times \vec{dr} = 0$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

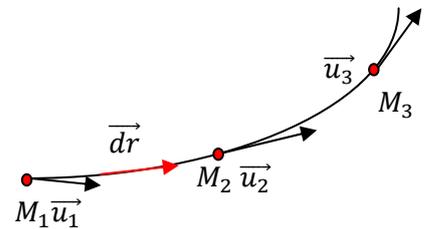


Fig.III.1- Ligne courant des particules fluides à un instant.

- Le **tube de courant** : On désigne ainsi une surface tubulaire engendrée à un instant donné par toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe arbitraire fermée constitue un tube de courant.
- Le **filet de courant** : Si le contour du tube de courant délimite une section droite infiniment petite, on parle de filet de courant.

2- Accélération d'une particule fluide

Soit un champ de vitesse défini par $\vec{u} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$ et $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right)$$

- Le 1^{er} terme est l'accélération locale ou temporelle
- Le 2^{ème} terme est l'accélération spatiale ou advection du vecteur vitesse.

-Le **mouvement est dit permanent** : (on parle aussi de **régime stationnaire**) s'il se reproduit identique à lui-même au cours du temps, c'est-à-dire si on notera que dans cet écoulement, l'accélération temporelle : $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ et l'accélération spatiale est non nulle ou bien $\vec{a} = \left(u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right)$

3- Analyse du mouvement d'un élément de volume de fluide

$$\nabla \times \vec{u} = \overrightarrow{rot} \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{u} = (rot_x \vec{u}) \vec{i} + (rot_y \vec{u}) \vec{j} + (rot_z \vec{u}) \vec{k}$$

Soit un volume de fluide en mouvement tel que :

$$M = (x, y, z, t) \text{ et } M_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$$

$$\begin{cases} \vec{u} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \\ \vec{u}_1 = u_1 \vec{i} + v_1 \vec{j} + w_1 \vec{k} \\ \vec{dr} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{cases}$$

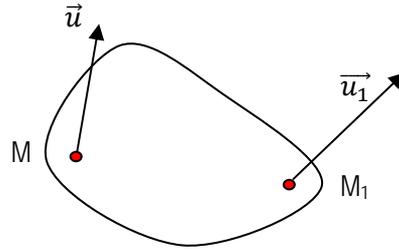


Fig.III.2- Particule fluide en mouvement

On peut écrire

$$\begin{cases} u_1 = u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v_1 = v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w_1 = w + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases}$$

On ne va traiter que la composante u_1 tel que on va rajouter et retrancher cette expression $\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dy + \frac{\partial w}{\partial x} dz \right) \right]$ dans la relation u_1 .

$$u_1 = u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} dz - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} dz$$

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{rot_z \vec{u}} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)}_{rot_y \vec{u}} dz$$

On note que le vecteur tourbillon est défini par : $\omega = \frac{1}{2} rot \vec{u}$

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2} rot_x \vec{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y = \frac{1}{2} rot_y \vec{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \omega_z = \frac{1}{2} rot_z \vec{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases}$$

$$u_1 = u + (\omega_y dz - \omega_z dy) + \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \right]$$

Pour généraliser les résultats obtenus pour les deux autres composantes v_1 et w_1 , le même traitement sera fait pour les 2 autres composantes v_1 et w_1 tels que :

On va rajouter et retrancher cette expression $\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dz \right) \right]$ dans la relation v_1 et l'expression $\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} dx + \frac{\partial v}{\partial z} dy \right) \right]$ dans la relation w_1 .

On obtient alors,

$$v_1 = v + (\omega_z dx - \omega_x dz) + \left[\frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz \right]$$

$$w_1 = w + (\omega_x dy - \omega_y dx) + \left[\frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \right]$$

Ainsi, sous forme vectorielle, on obtient le mouvement d'un élément de fluide caractérisé par :

$$\vec{u}_1 = \vec{u} + \vec{u} \times \vec{dr} + \vec{u}_{Def}$$

Où $\vec{u}_{Def} = \bar{D} \cdot \vec{dr}$

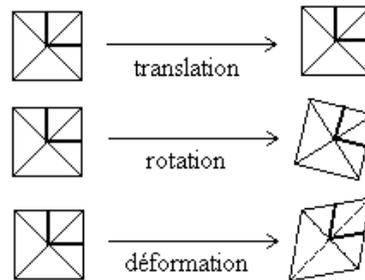
Et \bar{D} est un tenseur de déformation tel que : $D_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$

D'une manière générale, le mouvement d'une particule fluide est la superposition d'une translation, d'une rotation et d'une déformation tel que :

\vec{u} : représente une translation

$\vec{u} \times \vec{dr}$: représente une rotation

\vec{u}_{Def} : représente une déformation



Remarque

On dit qu'un écoulement est rotationnel si le vecteur tourbillon $\omega \neq 0$. Dans le cas contraire, l'écoulement est irrotationnel $\omega = 0$.

4-Notion de circulation

Soit un champ de vitesse $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$. On définit la circulation Γ du vecteur \vec{u} le long d'une ligne quelconque reliant les points A et B par l'intégrale :

$$\Gamma_{(AB)} = \int_{AB} \vec{u} \cdot \vec{dl} \quad \text{tel que} \quad d\Gamma = \vec{u} \cdot \vec{dl}$$

Pour que Γ ne dépende que des points A et B, il faut que Γ soit une différentielle totale exacte.

$$d\Gamma = \vec{u} \cdot \vec{dl} = u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz$$

$$d\Gamma = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

Par identification, on $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

On dit alors que le champ de vitesse découle d'un potentiel et on écrira : $\Gamma_{(AB)} = \varphi_B - \varphi_A$

Remarque : sur un contour fermé (c) , $\Gamma_c = \oint \vec{u} \cdot \vec{dl}$. Et si u dérive d'un potentiel alors $\Gamma_c = 0$

Chapitre IV

Dynamique des fluides parfaits

1-Introduction

Un fluide parfait ignore tout effort tangentiel, c'est-à-dire les forces de frottement visqueux. Dans ce cas le tenseur de contrainte s'exprime par :

$$\bar{\sigma} = -P \bar{I} \quad \text{où } \bar{I} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ est le tenseur identité}$$

$$\text{Et } \begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P \\ \sigma_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Dans cette partie, nous allons considérer que les fluides incompressibles (liquide).

2- Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \cdot u_i) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Pour un fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$), alors $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ ou $\text{div } v = 0$

3-Equation du mouvement

Les équations de Navier-Stokes sous forme vectorielle sont :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}P} + \mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{u})$$

Pour un fluide parfait, les forces de frottements sont nuls, c'est-à-dire que : $\mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{u}) = 0$

L'équation se résume à la forme suivante appelée équation d'Euler : $\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}P}$

3.1- Equation d'Euler

Pour un fluide parfait, les équations algébriques d'Euler s'écrivent :

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z}$$

3.2- Equation de Bernoulli

En prenant les équations d'Euler que l'on multiplie de part et d'autre chacune respectivement par dx, dy et dz, on obtient :

$$\rho \frac{du}{dt} dx = \rho f_x dx - \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

$$\rho \frac{dv}{dt} dy = \rho f_y dy - \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$\rho \frac{dw}{dt} dz = \rho f_z dz - \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

Si l'écoulement est permanent, l'accélération locale ou temporelle est nulle alors,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{et}$$

$$\frac{du}{dt} = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\frac{dw}{dt} = \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

En multipliant de part et d'autre chacune des équations respectivement par dx, dy et dz, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} dx = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx \\ \frac{dv}{dt} dy = \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy \\ \frac{dw}{dt} dz = \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz \end{cases}$$

Sur la ligne de courant, nous avons :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} v dx = u dy \\ w dy = v dz \\ u dz = w dx \end{cases}$$

On ne va traiter que la 1^{ère} composante suivant ox. On utilisera les résultats pour les 2 autres composantes.

$$\frac{du}{dt} dx = u \frac{\partial u}{\partial x} dx + v \frac{\partial u}{\partial y} dx + w \frac{\partial u}{\partial z} dx$$

En utilisant les expressions des équations de lignes de courant on :

$$\frac{du}{dt} dx = u \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = u \cdot du = \frac{1}{2} d(u^2)$$

De la même manière pour les autres composantes :

$$\frac{dv}{dt} dy = v \cdot dv = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\frac{dw}{dt} dz = w \cdot dw = \frac{1}{2} d(w^2)$$

Le système d'équation (*) devient :

$$\begin{cases} \rho u \cdot du = \rho f_x dx - \frac{\partial P}{\partial x} dx \\ \rho v \cdot dv = \rho f_y dy - \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ \rho w \cdot dw = \rho f_z dz - \frac{\partial P}{\partial z} dz \end{cases}$$

En faisant la somme membre à membre, on obtient une équation globale :

$$\rho u \cdot du + \rho v \cdot dv + \rho w \cdot dw = \rho f_x dx - \frac{\partial P}{\partial x} dx + \rho f_y dy - \frac{\partial P}{\partial y} dy + \rho f_z dz - \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

$$\frac{1}{2} \rho d(u^2) + \frac{1}{2} \rho d(v^2) + \frac{1}{2} \rho d(w^2) = \rho (f_x dx + f_y dy + f_z dz) - \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right)$$

$$\frac{1}{2} \rho d(u^2 + v^2 + w^2) = \rho (f_x dx + f_y dy + f_z dz) - dP$$

$\overleftarrow{\hspace{1.5cm}}$
produit scalaire

$$\frac{1}{2} \rho d(u^2) = \rho (f_x dx + f_y dy + f_z dz) - dP \quad \text{c'est l'équation de Bernoulli}$$

Un cas particulier d'écoulement qu'on rencontre très souvent est celui dans lequel le champ de force de volume dérive d'un potentiel :

$$\vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad \text{où} \quad \varphi = -gz \quad \text{ainsi} \quad \begin{cases} f_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ f_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ f_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -g \end{cases}$$

$$\text{L'équation de Bernoulli devient : } \frac{1}{2} \rho d(u^2) = -\rho g dz - dP$$

$$\text{Après intégration, on obtient : } \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z + P = cte$$

$$\text{C'est l'équation de Bernoulli connue le plus souvent sous la forme suivante : } z + \frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = cte$$

Où

z : hauteur géométrique de la position de la particule

$\frac{P}{\rho g}$: hauteur piézométrique (due à la pression)

$\frac{u^2}{2g}$: hauteur dynamique due à la vitesse

Cte : la hauteur totale.

Les conditions de validité de l'équation de Bernoulli :

- fluide parfait
- fluide incompressible
- écoulement permanent
- sur une ligne de courant
- dans un champ de pesanteur.

3.2.1-Interprétation du théorème de Bernoulli

Selon la forme de l'équation de Bernoulli, nous pouvons donner différentes interprétations.

a-Interprétation en énergie

En écrivant l'équation de Bernoulli par unité de masse $\left[\frac{J}{kg} = \frac{m^2}{s^2}\right]$ on obtient : $\frac{P}{\rho} + gz + \frac{u^2}{2} = cte$

Où

$\frac{P}{\rho}$: énergie potentielle de situation

gz : énergie potentielle

$\frac{u^2}{2}$: énergie cinétique

Cte : énergie totale

b-Interprétation en pression

En écrivant l'équation de Bernoulli par unité de volume $\left[\frac{J}{m^3} = \frac{N}{m^2} = Pa.\right]$ on obtient : $p + \rho gz + \rho \frac{u^2}{2} = cte$

Où

p : pression statique

$\rho \frac{u^2}{2}$: pression dynamique

$p + \rho gz$: pression motrice

Cte : pression totale.

c-Interprétation graphique

En écrivant l'équation de Bernoulli par unité de poids $\left[\frac{J}{N} = m\right]$ on obtient :

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = cte$$

Où

z : hauteur géométrique de la position de la particule

$\frac{P}{\rho g}$: hauteur piézométrique (due à la pression)

$\frac{u^2}{2g}$: hauteur dynamique due à la vitesse

Cte : la hauteur totale.

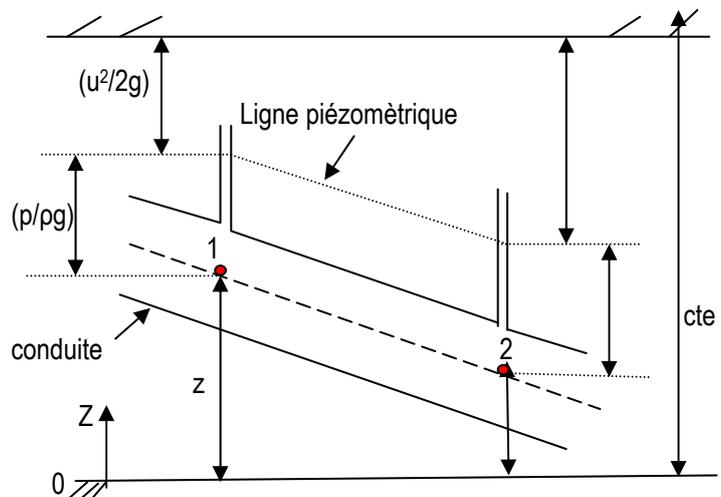


Fig. IV.1- Représentation graphique de l'équation de Bernoulli

3.2.2-Application du théorème de Bernoulli

Dans cette section, nous allons voir les différentes applications de l'équation de Bernoulli.

a-Sonde de pression

On place un obstacle dans un écoulement permanent. Il existe un point d'arrêt où la vitesse d'écoulement du fluide est nulle.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les 2 points M et R :

$$z_M + \frac{P_M}{\rho g} + \frac{u_M^2}{2g} = z_R + \frac{P_R}{\rho g} + \frac{u_R^2}{2g}$$

$$P_R = P_M + \rho \frac{u_M^2}{2}$$

La pression d'arrêt au point R représente la pression totale. En effet, si on remplace l'obstacle par un tube recourbé qui sera relié à un manomètre, celui-ci indiquera une pression totale.

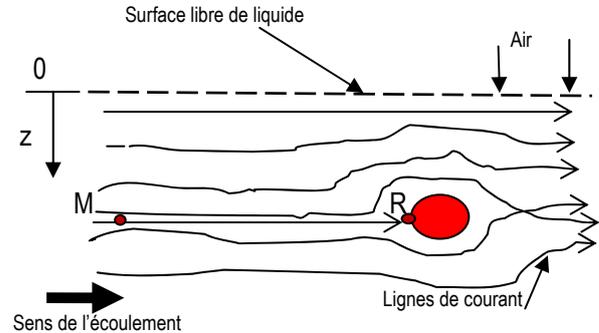


Fig.IV.2- Ecoulement autour d'un obstacle.

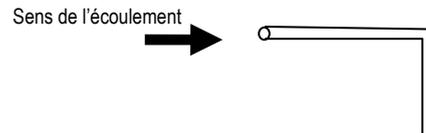


Fig.IV.3- Mesure de pression totale

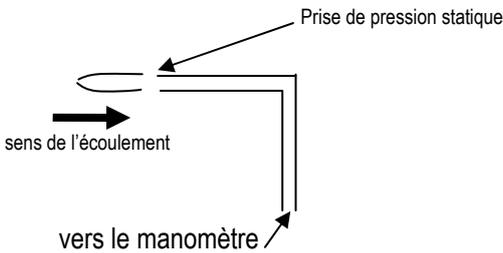


Fig.IV.4- Mesure de pression statique

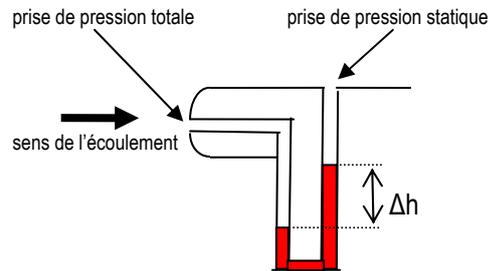


Fig.IV.5- Mesure de pression dynamique

b-vidange de réservoir

On peut appliquer le théorème de Bernoulli pour calculer la vitesse de vidange d'un réservoir.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les 2 points M et R :

$$z_M + \frac{P_M}{\rho g} + \frac{u_M^2}{2g} = z_R + \frac{P_R}{\rho g} + \frac{u_R^2}{2g}$$

$$\text{or } P_R = P_M = P_0$$

$$\text{D'où } u_R = \sqrt{2 g h}$$

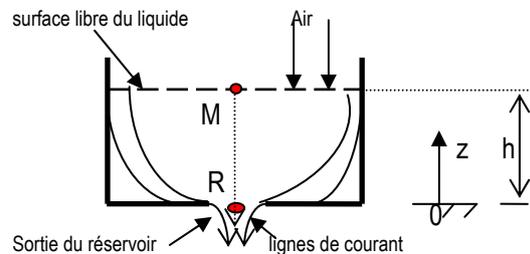


Fig.IV.6- Vidange de réservoir

d-Phénomènes de Venturi

On peut appliquer le théorème de Bernoulli pour calculer la différence de pression entre 2 points dans une conduite de sections variables reliées par un col et où circule un fluide.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les 2 points M et R :

$$z_M + \frac{P_M}{\rho g} + \frac{u_M^2}{2g} = z_R + \frac{P_R}{\rho g} + \frac{u_R^2}{2g}$$

$$\frac{P_M - P_R}{\rho g} = \frac{u_R^2 - u_M^2}{2g} = \Delta h$$

$$\Delta h = \frac{u_M^2}{2g} \left[\left(\frac{S_M^2}{S_R^2} \right) - 1 \right] \quad \text{ou} \quad \Delta P = \rho \frac{u_M^2}{2} \left[\left(\frac{S_M^2}{S_R^2} \right) - 1 \right]$$

La dépression au col est égale à la pression dynamique multiplié par un coefficient de Venturi β , tel que

$$\beta = \left[\left(\frac{S_M^2}{S_R^2} \right) - 1 \right]$$

Remarque

La mesure de Δh permet aussi de calculer la vitesse d'écoulement dans la conduite et en déduire le débit.

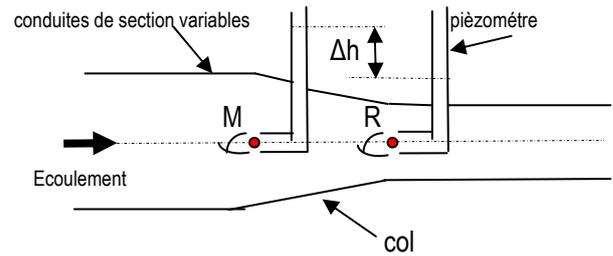


Fig.IV.7- Phénomène de Venturi

Chapitre V

Dynamique des fluides réels

1-Introduction

Expérimentalement le mouvement de fluide réel fait apparaître une divergence avec celle prévue dans la théorie des fluides parfaits. La notion de fluide parfait est une première approximation faite dans la dynamique des fluides réels. Les fluides réels sont doués d'une propriété physique introduisant les forces de frottement visqueux.

La force de frottement s'exerçant entre les couches de fluide et la paroi sont tangentielles et parallèle à la paroi dS et égale à :

$$dF = \tau \cdot dS$$

Où

$\tau = f\left(\frac{du}{dy}, t\right)$ est la contrainte de cisaillement [Pa]

$u = g(y)$ est la vitesse d'écoulement sur la paroi

$\frac{du}{dy} = \dot{\gamma}$: taux de déformation ou vitesse de déformation. [s⁻¹]

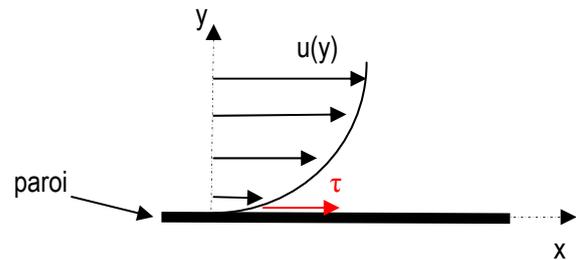


Fig.V.1-Ecoulement de fluide sur une paroi plane

La relation entre la contrainte et la déformation est appelée loi de comportement ou loi rhéologique.

2-Notion de loi comportement de fluides

On peut classer les fluides en deux catégories :

- Fluides Newtoniens
- Fluides non-Newtoniens (FNN)

2.1- Fluide Newtoniens

La catégorie de ces fluides est caractérisée par une loi de comportement empirique établie par Newton. Cette loi $\tau = f\left(\frac{du}{dy}\right)$, mentionne de plus une évolution proportionnelle entre la contrainte et la vitesse de déformation, telle que :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad [\text{Pa}]$$

Où μ est la viscosité dynamique du fluide [Pa.s]. On peut aussi définir la viscosité cinématique par $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ [m²/s].

2.2- Fluide non-Newtoniens

Cette catégorie de fluides est caractérisé par une loi de comportement dont l'évolution de la contrainte et la vitesse de déformation n'est pas proportionnelle telle que : $\tau = f\left(\frac{du}{dy}, t\right)$. On peut distinguer 3 classes de FNN :

2.2.1-Fluides à loi de comportement dépendant du taux de déformation ou de cisaillement

a-Fluides viscoplastique de Bingham

La loi rhéologique : $\tau = \tau_c + \mu_p \dot{\gamma}$

Où τ_c : contrainte seuil d'écoulement, μ_p : viscosité plastique et $\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$: taux de cisaillement

Exemple : fluide de forage, le dentifrice...

b-Fluide pseudo-plastique ou rhéofluidifiant

La loi rhéologique : $\tau = k \dot{\gamma}^n$

Où k ; indice de consistance et n : indice d'écoulement ($0 < n < 1$)

Exemple : la colle, la peinture....

c-Fluide dilatant ou rhéoépaississant

La loi rhéologique : $\tau = k \dot{\gamma}^n$

Où k ; indice de consistance et n : indice d'écoulement ($n > 1$)

Exemple : la mayonnaise

2.2.2-Fluides à loi de comportement dépendant du temps

a-Fluides thixotropes

Se sont des fluides qui diminuent de viscosité sous cisaillement dans le temps. Par contre, au repos leur viscosité augmente pour former un gel.

Exemple : fluide de forage pour maintenir les débris de la roche en suspension lors de changement de tige de forage.

b-fluides anti-thixotrope ou rhéopexe

Se sont des fluides qui augmentent de viscosité sous cisaillement dans le temps. Par contre, au repos leur viscosité diminue pour se fluidifier.

Exemple ; gilet par balle, les pneus de voiture...

2.2.3-Fluide viscoélastiques

Certains fluides présentent des propriétés viscoélastiques. En effet, sous de faibles déformations la structure se déforme et lorsque la déformation est annulée, la structure du fluide revient à son état initial.

Exemple : le miel...

On peut récapituler les différentes classes de fluides que l'on vient de traiter sous forme de la figure suivante :

- a : fluide parfait
- b : fluide rhéofluidifiant
- c : fluide Newtonien
- d : fluide rhéoépaississant
- e : fluide à seuil type de Bingham
- f : fluide à seuil rhéofluidifiant type d'Herschel-Bulkley

$$\tau = \tau_c + k \dot{\gamma}^n$$

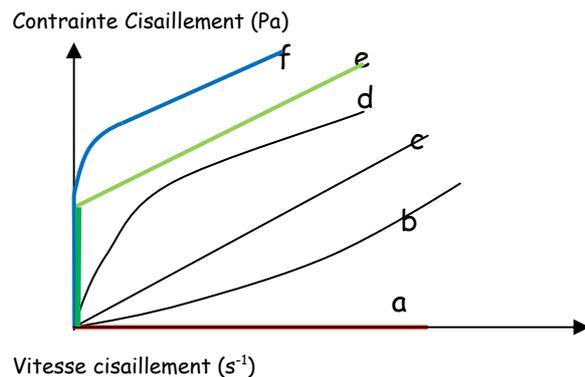


Fig. V.2- Classe de fluides

3-Equation du mouvement d'un fluide réel ou visqueux

Les équations de Navier-Stokes sous forme vectorielle sont :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{grad}P + \mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{grad} (div \vec{u})$$

Pour un fluide réel, les forces de frottements sont non nuls, c'est-à-dire que : $\mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{grad} (div \vec{u}) \neq 0$

Pour un fluide incompressible ($\rho = cte$) et $div \vec{u} = 0$ et les forces de frottements deviennent : $\mu \Delta \vec{u}$
 Les équations algébriques de Navier-Stokes peuvent s'écrire par projection sur les 3 axes comme suite :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

La résolution de ces équations aux dérivées partielles ne peut se faire analytiquement, vu la complexité et l'aspect non linéaire. Ce pendant, il est possible de résoudre analytiquement ces équation, en admettant des hypothèses simplificatrices dans le cas du mouvement de fluide incompressible en écoulement permanent et unidirectionnel.

Quelques solutions exactes des équations de Navier-Stokes sont données pour quelques écoulement usuels et simple tels que :

- Ecoulement de Poiseuille dans un tube de section constante
- Ecoulement de Couette entre deux plans parallèles
- Ecoulement de Couette rotatif entre 2 cylindres co-axiaux
- Ecoulement dans un tube de section annulaire.

Dans cette section, nous allons traiter juste l'équation de Bernoulli qui en découle des équations de Navier-Stokes remplissant les conditions de sa validité.

4-Equation de Bernoulli pour un fluide réel ou visqueux

Quant un liquide visqueux (réel) se déplace le long d'une conduite, son mouvement est ralenti par l'action des forces de frottements entre le liquide et paroi, cela entraine une irrégularité de la répartition des vitesses et ensuite des pertes d'énergie appelées aussi pertes de charges.

En écrivant l'équation de Bernoulli par unité de poids $\left[\frac{J}{N} = m \right]$ pour un fluide réel entre les 2 sections d'écoulement 1 et 2, on obtient :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{u_2^2}{2g} + \Delta H$$

Où

z : hauteur géométrique de la position de la particule

$\frac{P}{\rho g}$: hauteur piézométrique (due à la pression)

$\frac{u^2}{2g}$: hauteur dynamique due à la vitesse

α : coefficient de l'irrégularité de vitesse

ΔH : perte d'énergie ou perte de charge entre les 2 sections d'écoulement (départ-arrivée)

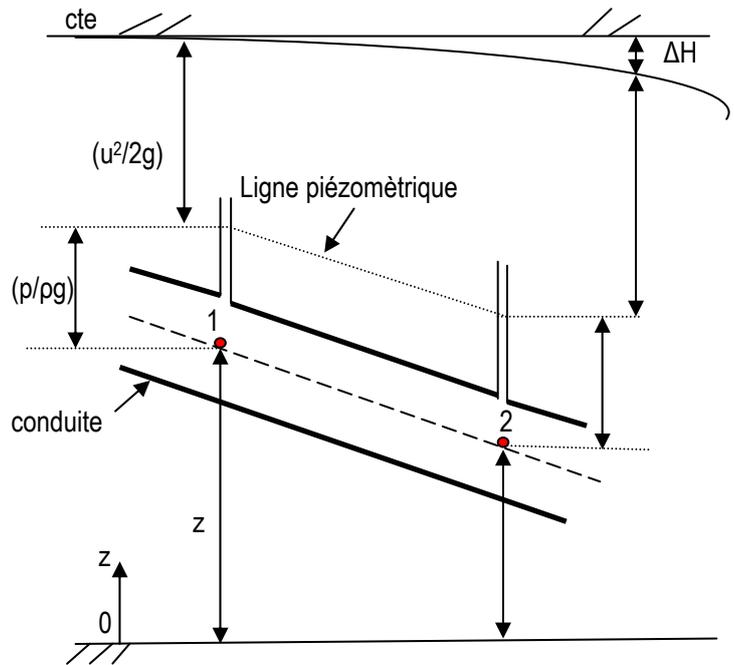


Fig. V.3- Représentation graphique de l'équation de Bernoulli pour un fluide visqueux

Ces pertes d'énergie ou pertes de charge entre les positions de départ et arrivée du fluide existent en deux catégories. Elles sont toujours proportionnelles au carrée de leurs vitesses d'écoulement.

- Pertes de charge linéaires
- Pertes de charge singulière.

5- Notions sur les pertes de charge

5.1-Pertes de charge linéaire

Se sont des pertes hydrauliques inévitables dans les conduites à section constantes proportionnelles à la longueur de la conduite. Ces pertes sont dues au frottement entre liquide et paroi de la conduite. Leurs expression est de la forme :

$$\Delta H_L = \varepsilon_l \frac{u^2}{2g} \text{ ou } \Delta P_l = \rho \varepsilon_l \frac{u^2}{2} \text{ avec } \varepsilon_l = \frac{\lambda L}{D}$$

ε_l : coefficient de pertes de charge linéaire

λ ; coefficient de frottement unitaire appelé aussi coefficient de Darcy-weisbach ou coefficient de Fanning

D ; diamètre de la conduite

L ; longueur de la conduite

u : vitesse d'écoulement

5.2-Pertes de charge singulière

Se sont des pertes de charge constituant des résistances locales, dues aux variations de la forme et des dimensions de la conduite entraînant ainsi la formation de tourbillons causées par la variation de vitesse. Leurs expression est de la forme :

$$\Delta H_s = \varepsilon_s \frac{u^2}{2g} \text{ ou } \Delta P_s = \rho g \varepsilon_s \frac{u^2}{2g}$$

ε_s : coefficient de pertes de charge singulières dépendant de la nature de la résistance locale.

On verra plus en détail ces pertes de charge dans le prochain chapitre.

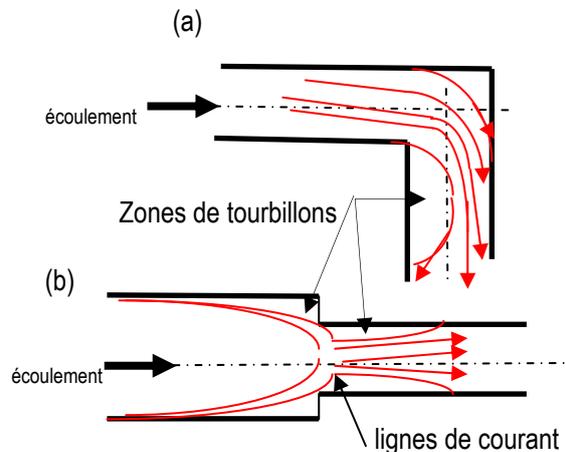


Fig.V.4-Pertes de charge singulière : (a) changement de direction/coude à 90°. (b) changement de section/rétrécissement brusque

Chapitre VI

Régimes d'écoulement et Pertes de charge

1-Régimes d'écoulement

1.1-Expérience de Reynolds

Si nous ouvrons un peu le robinet (3), l'eau s'écoule à une vitesse très faible. En introduisant le colorant à l'aide du robinet (5) dans le courant liquide, nous constatons que le colorant ne se mélange. Il reste nettement visible, ce qui démontre le caractère stratifié de l'écoulement et l'absence du brassage. Un tel régime d'écoulement est appelé "laminaire".

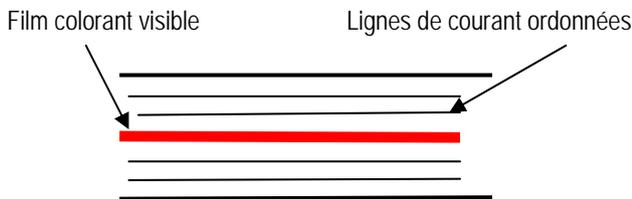


Fig. VI.2-Ecoulement laminaire (eau+du colorant)

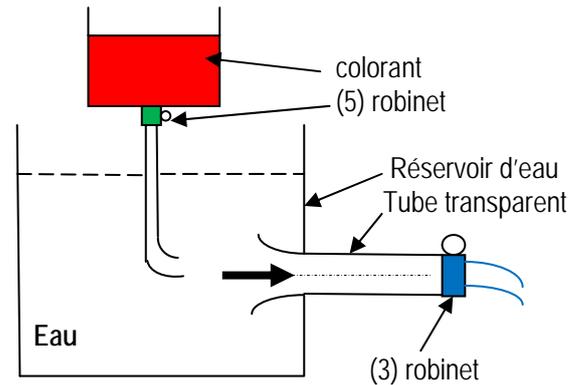


Fig.VI.1- Expérience de Reynolds

Au fur et à mesure que la vitesse d'écoulement d'eau augmente, obtenue avec l'ouverture du robinet (3) on observe :

Dans les premiers temps, l'écoulement ne change pas mais ensuite, à partir d'une vitesse critique, le régime d'écoulement change brusquement. En effet, à la sortie du tube (6), le colorant commence à onduler, après quoi, il se mélange au courant d'eau. A ce moment, le tourbillon et les mouvements rotatifs du liquide sont nettement visibles. Un tel régime d'écoulement est appelé "turbulent".

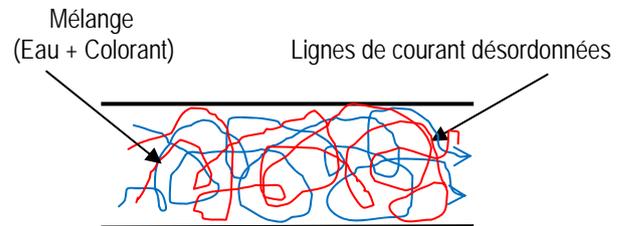


Fig. VI.3-Ecoulement turbulent (eau+du colorant)

Remarque

Si nous diminuons de nouveau la vitesse d'écoulement du liquide, le régime laminaire sera rétabli.

Le changement du régime d'écoulement se produit à une vitesse critique proportionnelle à la viscosité cinématique et inversement proportionnelle au diamètre du tube.

$$u_c = R_{ec} \frac{\nu}{D}$$

R_{ec} : représente le coefficient universel sans dimension appelé "nombre de Reynold". Il ne dépend ni de la nature du liquide ni du diamètre de la conduite.

Comme le montre l'expérience, le nombre critique de Reynolds est d'environ 2300. Il caractérise le passage du régime d'écoulement laminaire vers le turbulent.

Par conséquent, pour identifier le régime d'écoulement, il suffit de calculer la valeur du nombre de Reynolds défini par :

$$Re = \frac{u D}{\nu} = \rho \frac{u D}{\mu}$$

2-Pertes de charge linéaires et singulières

2.1-Perte de charge linéaire

2.1.1-Ecoulement laminaire

L'écoulement laminaire est un mouvement strictement ordonné et stratifié qui se produit sans brassage du liquide. C'est un écoulement qui obéit à la loi de frottement de Newton.

a-Ecoulement de Poiseuille

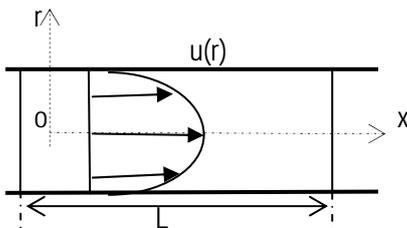
On désigne par ce terme, l'écoulement laminaire se produisant dans une conduite cylindrique de section constante.

Equation du mouvement

Soit une masse de liquide de longueur L, s'écoulant dans une conduite. En appliquant la seconde loi de Newton, on obtient :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt} (m\vec{a})$$

(a)



(b)

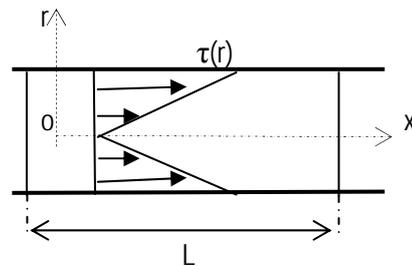


Fig. VI.4- Ecoulement de Poiseuille. (a) : Répartition du profil de vitesse.
(b) : Répartition de la contrainte (force de frottement).

Comme le mouvement est permanent suite au régime d'écoulement laminaire alors : $(P_1 - P_2) \pi r^2 - 2\pi rL \tau = 0$

$$\tau = \frac{(P_1 - P_2)}{2L} r$$

Or la force de frottement tangentielle obéissant à la loi linéaire de Newton : $\tau = \mu \frac{du}{dy} = -\mu \frac{du}{dr}$

$$D'où -\mu \frac{du}{dr} = \frac{(P_1 - P_2)}{2L} r$$

$$\text{Par intégration } \int_0^r du = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\mu L} \int_R^r r dr$$

$$u(r) = -\frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L} r^2 + cte$$

Conditions aux limites : à $r = R$, $u(R) = 0$

$$D'où u(r) = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Calcul de débit d'écoulement

$$Q = \int dq = \int u(r) \cdot ds = \int_0^R \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r \cdot dr$$

$$Q = \frac{(P_1 - P_2)\pi R^4}{8\mu L} = \frac{(P_1 - P_2)\pi D^4}{128\mu L} = \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\Delta P}{L} \quad \text{c'est l'équation de Poiseuille.}$$

Coefficient de frottement unitaire ou le coefficient de Darcy-Weisbach

Par définition, les pertes de charges linéaires s'expriment : $\Delta H_L = \varepsilon_l \frac{u^2}{2g}$ ou $\Delta P_l = \rho \varepsilon_l \frac{u^2}{2}$ avec $\varepsilon_l = \frac{\lambda L}{D}$

$$\text{Donc } \Delta P = \rho \frac{\lambda L}{D} \frac{u^2}{2}$$

D'après la formule de Poiseuille, on a : $\Delta P = \frac{128\mu L}{\pi D^4} Q$

Par ailleurs la vitesse est donnée par $u = \frac{4Q}{\pi D^2}$

Et le nombre de Reynolds est donné par $Re = \rho \frac{uD}{\mu}$

On en déduit le coefficient de frottement unitaire λ tel que : $\lambda = \frac{64}{Re}$

2.1.2-Ecoulement turbulent

L'écoulement turbulent est caractérisé par le brassage du liquide et la pulsation de vitesse et pressions au cours du mouvement.

Les pertes de charge linéaires dans le régime turbulent sont beaucoup élevées par rapport au régime laminaire en raison de la formation de tourbillons.

La formule de calcul de pertes de charge linéaire reste toujours la même que pour le régime laminaire sauf que le coefficient de frottement unitaire va dépendre de la rugosité relative de la paroi interne du tube (conduite).

$$\Delta H_L = \varepsilon_l \frac{u^2}{2g} \quad \text{ou} \quad \Delta P_l = \rho \varepsilon_l \frac{u^2}{2} = \rho \frac{\lambda L}{D} \frac{u^2}{2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_l = \frac{\lambda L}{D} \quad \text{et} \quad \lambda = f(Re, k/D)$$

Avec k/D est la rugosité relative ; k est l'épaisseur du grain et D est le diamètre de la conduite.

a-Courbes de Nikuradze

L'expérience a été faite sur des conduites rendues artificiellement rugueuses par des grains de sable collés à l'intérieur des conduites pour mettre en évidence l'influence de la rugosité des parois sur l'écoulement de fluide.

Les courbes représentent en coordonnées logarithmiques le coefficient de frottement unitaire λ en fonction du nombre de Reynolds. Elles sont tracées pour différentes valeurs de la rugosité relative.

L'analyse de ces courbes montre que :

- La rugosité n'a aucune influence pour le régime laminaire, la valeur de λ est pratiquement indépendante de la rugosité des parois de la conduite.
- Pour des valeurs de Reynolds élevées dans le cas du régime turbulent, le coefficient de frottement λ est indépendant du nombre de Reynolds. Il est uniquement en fonction de la rugosité notamment pour le régime turbulent rugueux.

L'interprétation du diagramme de Moody, un graphe adimensionnel qui représente le facteur de friction de Darcy-Weisbach λ en fonction du nombre de Reynolds Re et de la rugosité relative (k/D) pour un débit de pleine section dans une conduite circulaire. Ce graphe permet de calculer les pertes de charges linéaires ou le débit dans un tuyau donné.

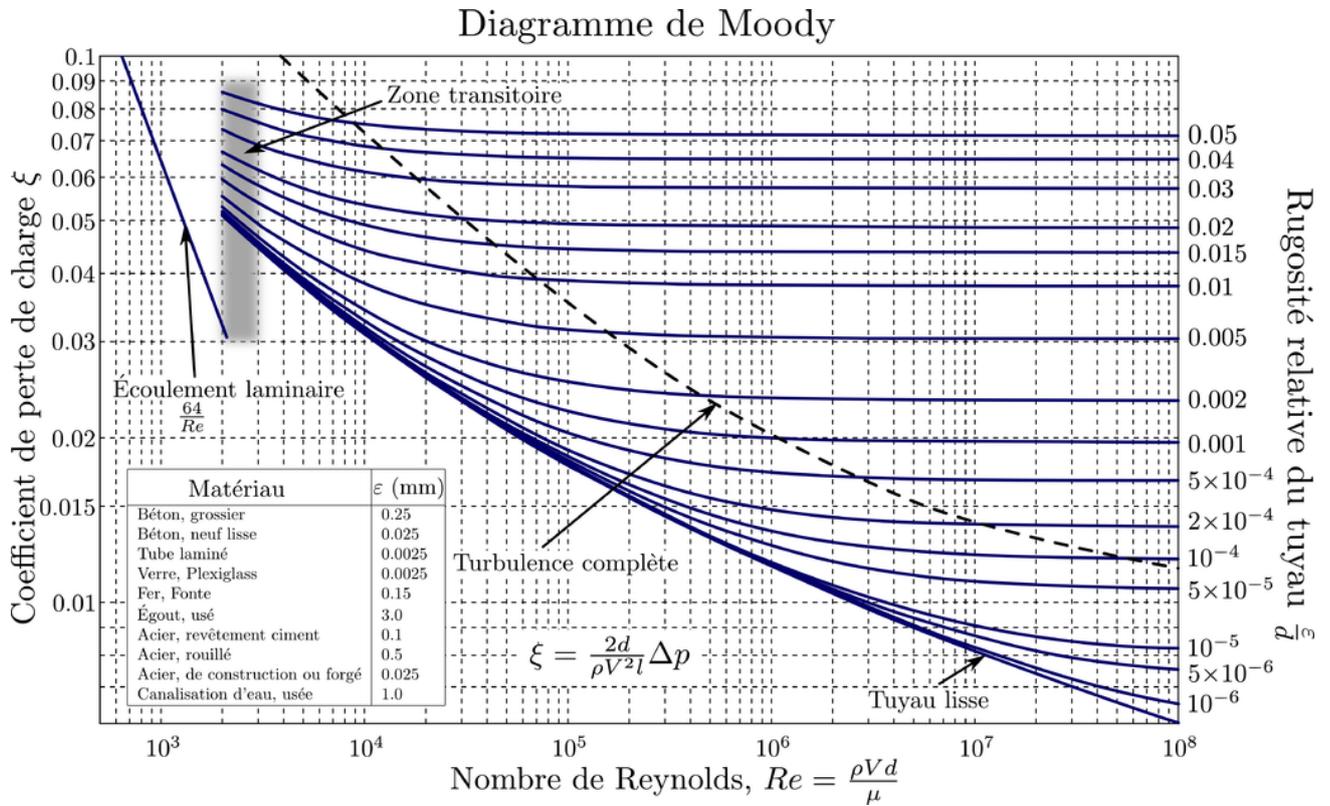


Fig. VI.5- Diagramme pour le calcul des pertes de charge linéaires dans les différents régimes d'écoulement

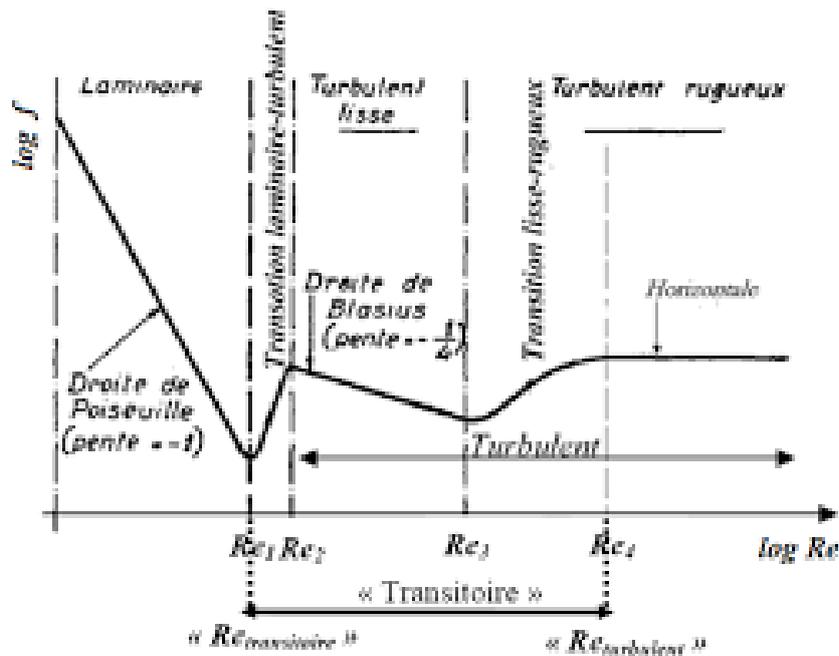


Fig. VI.6- Délimitation de la zone transition pour les différents régimes d'écoulement en vue de la Représentation des différentes corrélations pour les différents régimes d'écoulement

Par ailleurs, ce diagramme fait apparaître différents zones d'écoulement en vue d'utiliser les corrélations permettant de prédire la valeur de coefficient de perte de charge linéaire.

Pour $R_e \leq 2000$ à 2300 , le régime est laminaire : $\lambda = \frac{64}{R_e}$ formule de Poiseuille

Pour $R_e > 2000$ à 2300 , l'écoulement est en général turbulent, λ est donné par la formule générale de Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \text{Log}_{10} k \left(\frac{k/D}{3.71} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right)$$

- Si la rugosité est faible, la conduite se comporte comme hydrauliquement lisse et on a :

Pour $2300 < R_e < 10^5$, alors $\lambda = \frac{0.3164}{R_e^{0.25}}$ formule de Blasius

Pour $10^5 < R_e < R_{eI} = \frac{59.5}{(k/D)^{8/7}}$, alors λ est donné par $\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{R_e^{0.25}}$ formule de Nikuradze

- Si la rugosité est forte, la conduite se comporte comme hydrauliquement rugueuse et on a :

Pour $R_{eI} < R_e < R_{eII} = \frac{665 - 765 \text{Log}_{10}(k/D)}{(k/D)}$, alors λ est donné par $\lambda = 0.11 \cdot \left(1.462 \frac{k}{D} + \frac{100}{R_e} \right)^{0.25}$
 formule d'Al'Tsul, valable pour $8 \cdot 10^{-5} < k/D < 0.0125$

Pour $R_e > R_{eII}$, alors λ est donné par $\lambda = 1.74 + 2 \text{Log}_{10}(D/2k)$ 2^{ème} formule de Nikuradze

2.2-Pertes de charge singulière

Se sont des résistance locales créant des pertes de charge locales suite aux variations des dimensions de la conduite telles que le changement de section ou le changement de direction. Ces pertes entraînent la variation des vitesses et la formation de tourbillons.

2.2.1-Changement de section

a-Elargissement brusque

En appliquant l'équation de Bernoulli entre les 2 sections d'écoulement

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{u_2^2}{2g} + \Delta H \dots \dots (1)$$

Avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

Appliquons le théorème de la quantité de mouvement au volume cylindrique délimité par les sections S_1 et S_2 .

- En supposant que la force tangentielle exercée sur la surface latérale du cylindre est nulle
- En supposant qu'à la section S_1 , la pression P_1 agit sur toute l'aire S_2

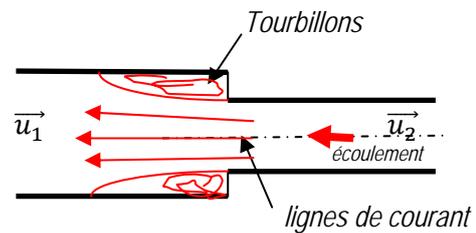


Fig.VI.7-Elargissement brusque

En écrivant la variation de force par unité de temps $(P_1 - P_2) \cdot S_2$ est égale à la variation de la quantité de mouvement entre l'entrée et la sortie.

Conformément au théorème :

$(P_1 - P_2)S_2 = \rho Q (u_2 - u_1)$ or $Q_1 = Q_2 = Q = v_2 S_2$ selon le principe de conservation de la masse

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = u_2 \frac{u_2 - u_1}{g} = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{u_1^2}{2g} - 2 \frac{u_1 u_2}{2g} + \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g}$$

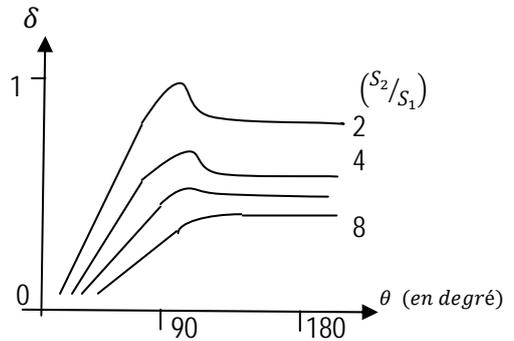
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} \dots \dots \dots (2)$$

Par identification des équations (1) et (2), on obtient : $\Delta H = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} = \frac{u_1^2}{2g} \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)^2 = \frac{u_1^2}{2g} \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$

b-Elargissement graduel ou Divergent

Si l'élargissement est graduel, l'élément est appelé diffuseur et la perte de charge associée est plus faible. Elle s'exprime par :

$$\Delta H = \epsilon_s \frac{u_1^2}{2g} = \delta \left(1 - S_1/S_2\right) \frac{u_1^2}{2g}$$



c-Rétrécissement brusque

On a $\Delta H = \frac{(u - u_2)^2}{2g} = \frac{u_2^2}{2g} \left(\frac{u}{u_2} - 1\right)^2 = \frac{u_2^2}{2g} \left(\frac{S_2}{\delta} - 1\right)^2$

Avec $u_2 S_2 = u \delta$, $\frac{S_2}{\delta} = \frac{u}{u_2}$ et $C_c = \frac{\delta}{S_2}$

C_c : coefficient de contraction théorique

D'où $\Delta H = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2 \frac{u_2^2}{2g}$

En pratique $\Delta H = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 \frac{u_2^2}{2g}$

avec $C = 0.59 + 0.41 \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^3$

C : coefficient de contraction réel qui se rapproche de du coefficient théorique C_c .

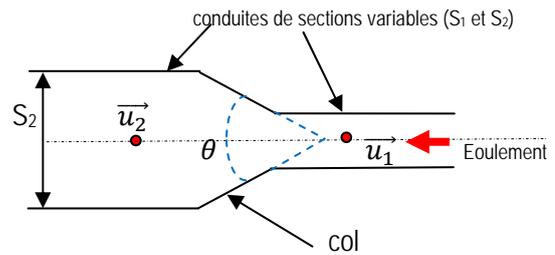


Fig.VI.8- Divergent

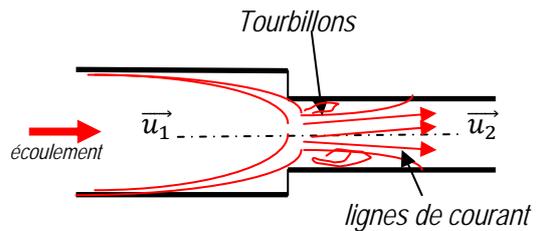


Fig.VI.9-Rétrécissement brusque

d-Rétrécissement graduel ou convergent

Si le rétrécissement est graduel de la forme conique d'un convergent, on aura le coefficient de perte de charge donné par :

$$\begin{cases} \epsilon_s = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 \sin\theta & \text{pour } \theta < \frac{\pi}{2} \\ \epsilon_s = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 & \text{pour } \theta \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

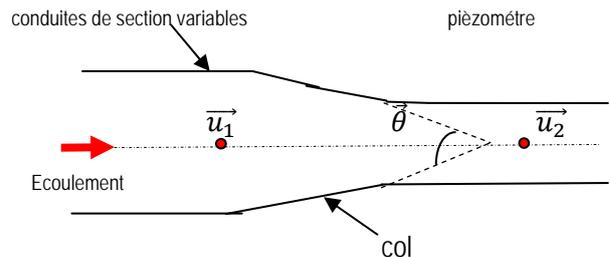


Fig.VI.10- Convergent

e-Entrées de conduites

$$\Delta H = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2 \frac{u^2}{2g}$$

Orifice de Borda :

$C = 0.5$ alors $\varepsilon \cong 1$

Orifice à bords arrondis

$C = 0.99$ alors $\varepsilon \cong 0$

Orifice à bords vifs

$C = 0.6$ alors $\varepsilon \cong 0.5$

Si les bords sont chanfreinés, C varie de 0.7 à 0.9

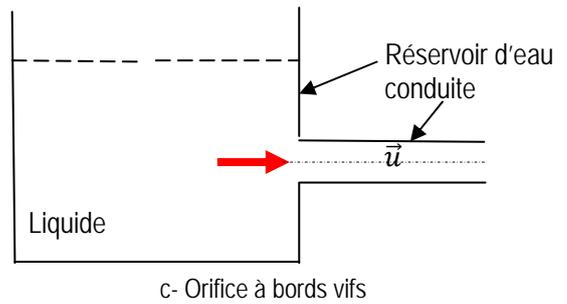
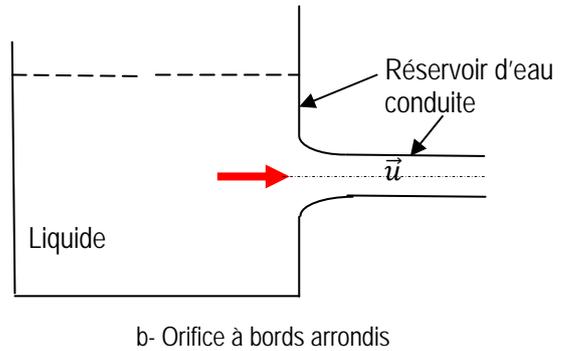
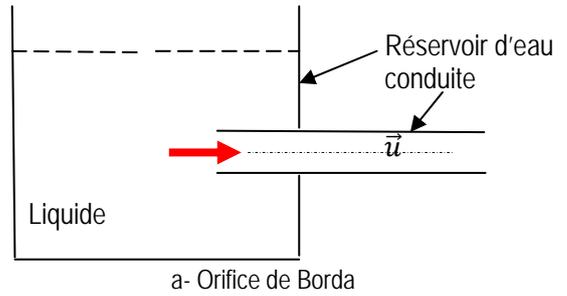


Fig.VI.11- Entrée de conduite dans un réservoir

f-Sortie de conduites

$$\Delta H = \varepsilon_s \frac{u^2}{2g} = \alpha_1 \frac{u^2}{2g} \text{ et } \varepsilon_s = \alpha_1 = 1$$

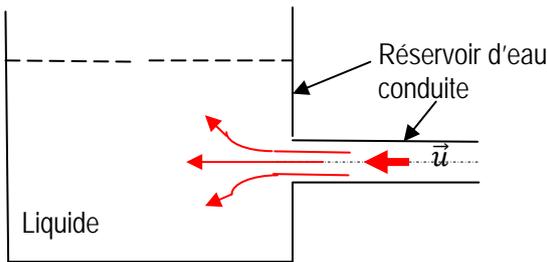


Fig.VI.12- Sortie de conduite débouchant dans un réservoir

2.2.2-Changement de direction

a-Coude arrondi

$$\Delta H = \varepsilon_s \frac{u^2}{2g} \text{ et } \varepsilon_s = f\left(\frac{D}{R_0}, \theta, R_e\right)$$

$$\varepsilon_s = \left[0.131 + 1.847 \left(\frac{D}{2R_0}\right)^{7/2}\right] \frac{\theta}{\pi} \quad \theta \text{ en radians}$$

Cette relation n'est pas valable pour $\theta = 0$

b-Coude à angle vif

$$\Delta H = \varepsilon_s \frac{u^2}{2g}$$

$$\varepsilon_s = \sin^2(\theta/2) + 2 \sin^4(\theta/2) \quad \theta \text{ en radians}$$

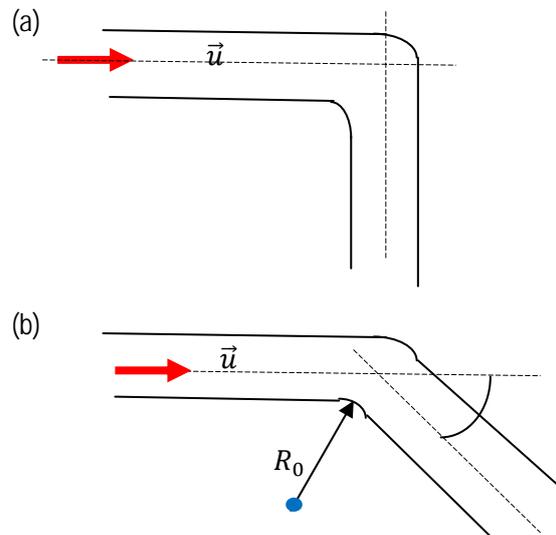


Fig.VI.13- Coudes. (a) à angle vif. (b) à angle arrondi.

Cette relation n'est pas valable pour un coude droit à 90°

Remarque

On caractérise parfois une singularité "en ligne" sur une conduite par la longueur " L_e " du tuyau cylindrique, de même diamètre produisant la même perte de charge.

Soit par exemple un robinet de coefficient de perte de charge singulière ϵ_s placé sur une conduite où le facteur de frottement ($C_f/2 = \lambda/8$).

On a $\Delta H_L = \frac{\lambda L}{D} \frac{u_m^2}{2g}$

Il vient à la traversée du robinet $\Delta H_s = \epsilon_s \frac{u^2}{2g} = \frac{\lambda L_e}{D} \frac{u_m^2}{2g}$

d'où $\epsilon_s = \frac{\lambda L_e}{D} = 8 \left(\frac{C_f}{2} \right) \frac{L_e}{D}$ et $L_e = \frac{\epsilon_s}{8 \left(\frac{C_f}{2} \right)} D$

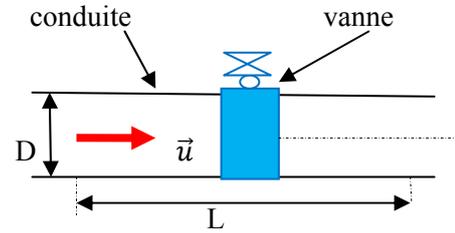


Fig.VI.14- Singularité de la vanne

A titre illustratif, on trouve des abaques (voir table 1) l'équivalence entre les singularités de certains accessoires utilisés dans les réseaux hydrauliques correspondants aux longueurs équivalentes (pertes en ligne).

On constate une ambiguïté, car la longueur équivalente L_e dépend du coefficient de frottement ($C_f/2$). Cette méthode ne représente donc pas la généralité qui donne la connaissance du coefficient perte de charge singulière ϵ_s .

Nature accessoires	(L_e/D)
Robinet à soupape normale	400
Robinet à soupape à équerre	200
Vanne à passage direct	9
Coude à 90 à brides	13
Coude à 90 taraudé	40

Chapitre VII

Calcul de Conduites

1-Introduction

Les conduites constituent un moyen de transport pour le déplacement de fluides (pétrole, gaz,...). Un fluide se déplace dans une conduite parce que son énergie potentielle en amont de la conduite est supérieure à celle qui possède à son aval. Cette chute de niveau d'énergie potentielle peut être créée de plusieurs façons, grâce à la différence des niveaux du liquide ou bien au travail fourni par une pompe.

On distingue les conduites simples et les conduites complexes. On appelle conduite simple, une conduite à diamètre constant sous ramifications. Une conduite complexe est constituée d'un tronçon principal et toute une série de ramifications que l'on présentera dans la section suivante.

2-Les différents types de conduites

2.1-Conduite simple

Elle est constituée de tronçon à section constante.



Fig. VII.1- Conduite simple.

2.2-Conduite mixte

Plusieurs conduites de diamètres et de longueurs différents sont reliées.

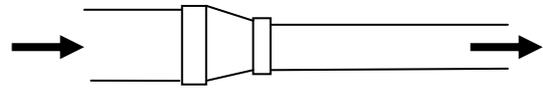


Fig. VII.2- Conduite mixte

2.3-Conduite ramifiée

Elle est composée d'une conduite principale et de conduites secondaires reliées à un nœud.

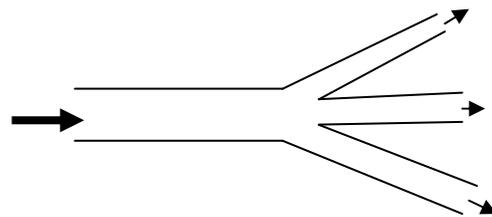


Fig. VII.3- Conduite complexes

2.4-Conduites multiples ou en parallèles

C'est une liaison en parallèle de plusieurs conduites.

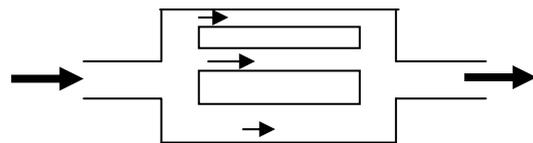


Fig. VII.4- Conduite en parallèle

2.5-Conduites fermée

L'exemple est celui d'une installation de chauffage central : Chaudière avec radiateurs.

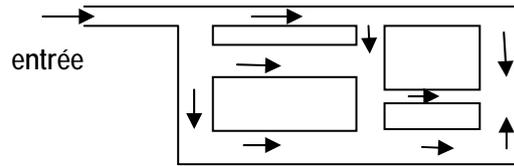


Fig. VII.5- Conduites fermée

2.6-Conduite avec la distribution ou l'adjonction continue du débit de longueur

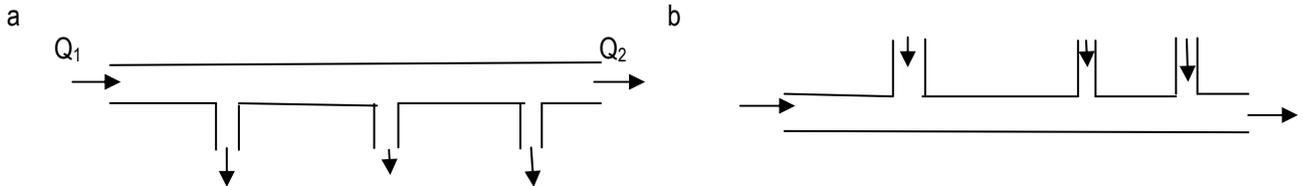


Fig. VII.6- Conduite en : (a) : distribution. (b) : adjonction

3- Caractéristique d'une conduite simple

En écrivant l'équation de Bernoulli par unité de poids $\left[\frac{J}{N} = m\right]$ pour un fluide réel entre les 2 sections d'écoulement 1 et 2, on obtient :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{u_2^2}{2g} + \Delta H$$

En appliquant le principe de conservation de masse, et comme la section est constante et en supposant $\alpha_1 = \alpha_2$, les vitesses sont égales et on aura

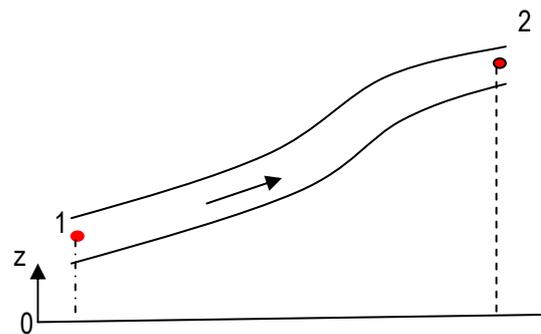


Fig. VII.7- Ecoulement dans une conduite simple

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = z_2 - z_1 + \Delta H$$

Nous appellerons le 1^{er} membre de gauche représentant la différence des hauteurs piézométriques comme hauteur exigée ou hauteur disponible si celle-ci est donnée : H_{ex} ou H_{dicp} qui est égale à la somme des hauteurs géométriques et la somme de toutes les pertes de charge qui naissent dans cette conduite.

$$H_{ex} = \Delta z + KQ^m \tag{7.1}$$

Où K grandeur dimensionnelle et m, un exposant qui dépend de la forme du canal considéré et du Reynolds.

On distingue deux régimes d'écoulements.

-Si l'écoulement est laminaire :

$$m = 1 \text{ et } K = \frac{128 \mu}{\rho g \pi D^4} L_c \tag{7.2}$$

Où $L_c = L + L_e$

L_e : Longueur équivalente de la longueur ajoutée à la longueur réelle L correspondant aux résistances locales considérées dans la conduite.

L : longueur réelle de la conduite.

-Si l'écoulement est turbulent :

$$m = 2 \text{ et } k = \left(\sum \varepsilon_s + \frac{\lambda L}{D} \right) \frac{16}{2 g \pi^2 D^4} \quad (7.3)$$

Tout en exprimant la vitesse par le débit : $Q = \frac{\pi D^2}{4} u$

L'expression (7.1) représente la caractéristique de la conduite.

On appelle donc la caractéristique de la conduite, la représentation graphique de la hauteur exigée ou disponible en fonction du débit.

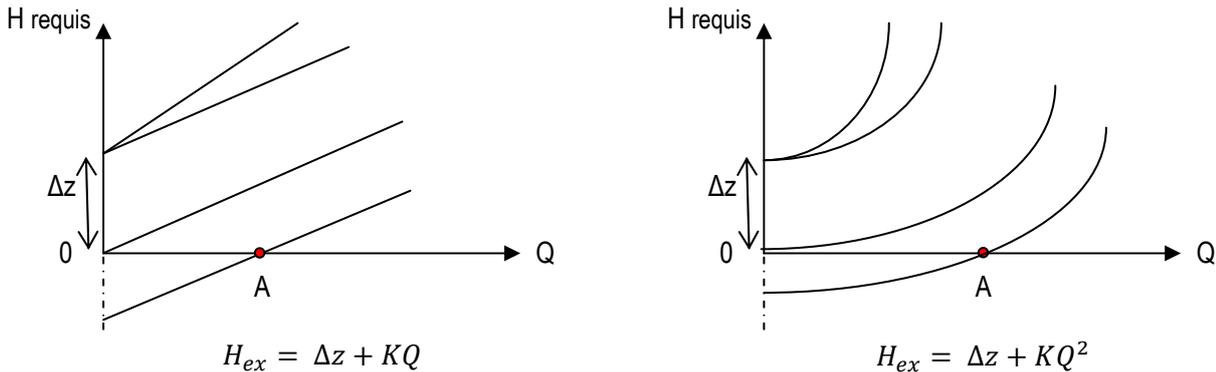


Fig. VII.8- Caractéristique d'une conduite

Remarques

$\Delta z > 0$, si le passage du liquide se fait de $z_1 < z_2$

$\Delta z < 0$, si le passage du liquide se fait de $z_1 > z_2$

Le point A, si le liquide se déplace par gravité.

4-Classification de problèmes de calcul de conduite

4.1-Calcul de conduites simples

4.1.1-Problème 1

Les données du problème sont : le débit Q , les propriétés du liquide (ρ, μ), toutes les dimensions de la conduite (L, D), ainsi que la matière dont elle est faite et la qualité de son exécution (rugosité ou k).

Le problème posé est de déterminer la hauteur exigée H_{ex} ?

La résolution du problème se fera comme suite :

- d'après le débit Q et le diamètre D , on détermine la vitesse d'écoulement " u "
- d'après la vitesse u , D et μ on détermine le nombre de Reynolds R_e pour identifier le régime d'écoulement.
- A l'aide des abaques correspondants aux pertes de charges, on évalue les résistances locales $\left(\frac{L_e}{D} \text{ ou } \varepsilon_s \right)$ dans le cas du régime laminaire ou bien $\left(\frac{L_e}{D} \text{ et } \varepsilon_s \right)$ dans le cas du régime turbulent.
- D'après R_e , on détermine le coefficient de frottement unitaire de Darcy " λ "
- On résout l'équation principale (éq. 7.1) relativement à H_{ex} .

Dans le cas où le régime d'écoulement laminaire, il n'est pas nécessaire de calculer λ et l'on peut déterminer K directement à l'aide de la relation (éq. 7.2).

4.1.2-Problème 2

Les données du problème sont la hauteur disponible H_{disp} , les propriétés du liquide (ρ, μ), toutes les dimensions de la conduite (L, D), ainsi que la matière dont elle est faite et la qualité de son exécution (rugosité ou k).

Le problème posé est de déterminer le débit d'écoulement à l'intérieur de la conduite Q ?

La résolution du problème se fera en fonction du régime d'écoulement : Comparer H_{disp} avec H_{excr}

$$\text{et } H_{excr} = \Delta z + \frac{128 \mu L}{\rho g \pi D^4} Q_{cr} = \Delta z + \frac{32 \mu L}{\rho g D^2} u_{cr} \times \frac{\rho \mu D}{\rho \mu D} = \Delta z + \frac{32 L u^2}{3g D} Re_{cr}$$

1-On choisit un régime d'écoulement

a-Si le régime d'écoulement est laminaire

2.a-Nous remplaçons la résistance locale par leurs longueurs équivalentes.

3.a-En tenant compte de l'éq. (7.2), on détermine à l'aide de l'équation (7.1), on calcule le débit Q , en remplaçant H_{ex} par H_{disp} .

b-Si le régime d'écoulement est turbulent, le problème sera résolu par approximation successives ou par voie graphique, étant donné que l'on a une équation (7.1) à deux inconnues Q et λ .

2.b- Choisir le coefficient λ en tenant compte de la rugosité ($\lambda = 0.015$ à 0.04) pour minimiser l'erreur.

3.b-Résoudre l'équation (7.1) compte tenu de l'équation (7.3) pour obtenir le débit Q de la 1^{ère} approximation.

4.b-D'après Q (1^{ère} approx.), on détermine la vitesse u et Re de la 1^{ère} approx.

5.b-D'après Re de la 1^{ère} approximation, on détermine λ plus exacte.

6.b-Retourner à l'étape 3.b.

7.b-Après avoir obtenu le débit Q de la 2^{ème} approximation, on compare les débits successifs de façon à minimiser l'erreur (généralement 2 ou 3 approximations suffisent pour obtenir une précision acceptable).

Par voie graphique :

- On trace la caractéristique $H(Q)$ en tenant compte de la variabilité de λ . C'est-à-dire pour une série de valeurs de Q . On détermine u , Re et λ et finalement H_{ex} en fonction de Q .
- Connaissant $H_{ex} = H_{disp}$, l'ordonnée du graphe, on détermine alors Q (l'abscisse du graphe).

4.1.3-Problème 3

Les données du problème sont la hauteur disponible H_{disp} , le débit d'écoulement Q , les propriétés du liquide (ρ, μ) et la longueur de la conduite L .

Le problème posé est de déterminer le diamètre de la conduite D ?

La résolution du problème se fera en fonction du régime d'écoulement :

1-On choisit le régime d'écoulement en se basant sur les propriétés du liquide (ρ, μ). C'est-à-dire que le régime d'écoulement peut être déterminé par comparaison de H_{disp} avec H_{ex} qui pour un débit donné est :

$$H_{cr} = \Delta z + \frac{128 \mu L}{\rho g \pi D^4} Q \times \frac{2\pi^4 \rho^4 \mu^4 Q^3}{2\pi^4 \rho^4 \mu^4 Q^3} = \Delta z + \frac{\pi^3 \mu^5 L R_{e_{cr}}^4}{2\rho^5 g Q^3} \quad (7.4)$$

a-Si l'écoulement est laminaire :

2.a-En tenant compte de l'éq. (7.2), on résout l'éq. (7.1) pour calculer le diamètre D , tel que :

$$D = \left(\frac{128 \mu (L+L_c)}{\rho g \pi (H-\Delta z)} Q \right)^{1/4} \quad (7.5)$$

3.a- Après avoir déterminé D , il faut choisir un diamètre normalisé le plus proche sur catalogue et à l'aide de la même éq. (7.5) corriger la valeur de H si Q est donné ou Q si H est donné.

b- Si l'écoulement est turbulent.

On résout l'éq. (7.1) en tenant compte de l'éq. (7.3) de la façon suivante :

2.b- Pour une série de valeurs normalisées de D et pour le débit Q , on calculera H_{ex} correspondant.

3.b- Tracer le graphe H_{ex} en fonction de D .

4.b- Déterminer D pour la valeur H_{disp} par le graphique.

5.b- Choisir le diamètre supérieur normal le plus proche et corriger H_{ex} .

4.2- Calcul de conduites mixtes

Considérons une conduite mixte constituée par trois tronçons et de diamètres différents, comprenant des résistances locales différentes et reliées en série.

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$$

$$\sum \Delta H_{M-N} = \sum \Delta H_1 + \sum \Delta H_2 + \sum \Delta H_3$$

$$H_{ex} = Z_N - Z_M + \frac{\alpha_N u_N^2 - \alpha_M u_M^2}{2g} + \sum \Delta H_{M-N}$$

$$H_{ex} = \Delta Z + CQ^2 + KQ^2$$

$$\text{Avec } C = \frac{1}{2g} \left(\frac{\alpha_N}{S_N^2} - \frac{\alpha_M}{S_M^2} \right)$$

sachant que les vitesses aux points M et N sont différentes.

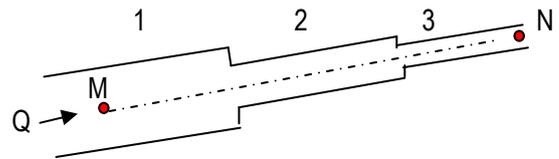


Fig. VII.9a- Conduite mixte

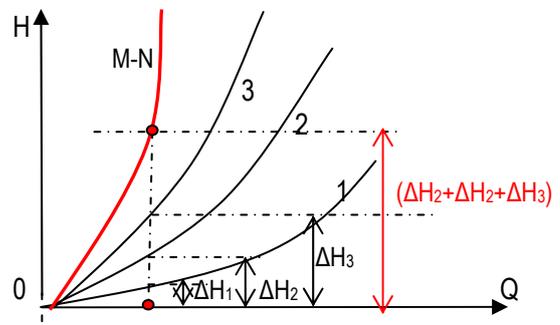


Fig. VII.9b- Représentation de la caractéristique d'une conduite mixte

4.3- Calcul de conduites multiples ou parallèles

Pour plus de simplicité, supposons que les conduites intermédiaires se trouvent dans le plan horizontal. Nous avons évidemment le débit Q :

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$$

Pour les pertes de charge, on aura :

$$\sum \Delta H_{M-N} = \sum \Delta H_1 = \sum \Delta H_2 = \sum \Delta H_3$$

Cela veut dire que les pertes de charges sont égales entre les tronçons, telle que ;

$$\sum \Delta H_1 = Q_1 Q_1^m, \sum \Delta H_2 = K_2 Q_2^m, \sum \Delta H_3 = K Q_3^m$$

Dans ce cas, le coefficient K et l'exposant m doivent être calculés par les relations (7.2) et (7.3) suivant le régime d'écoulement.

$$\text{On aura donc : } Q_1 Q_1^m = K_2 Q_2^m = K Q_3^m$$

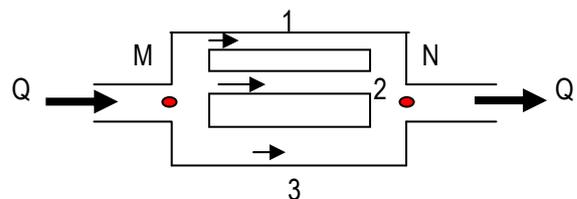


Fig. VII.10a- Conduite en parallèle

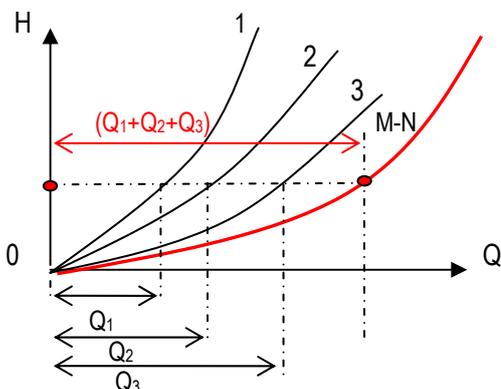


Fig. VII.10b- Représentation de la caractéristique d'une conduite mixte

Le système d'équations suivant nous permet de déterminer le problème des débits Q_1, Q_2, Q_3 , connaissant Q et toutes les dimensions des conduites.

4.4-Calcul de conduites ramifiées

Nous avons donc : $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$

Ecrivons le théorème de Bernoulli par exemple pour le tronçon 1 entre les point M et la sortie 1, en faisant abstraction des hauteurs dynamiques.

$$\frac{P_M}{\rho g} = \underbrace{Z_1 + \frac{P_1}{\rho g}}_{Z'_1} + \sum \Delta H_1 = Z'_1 + K_1 Q_1^m$$

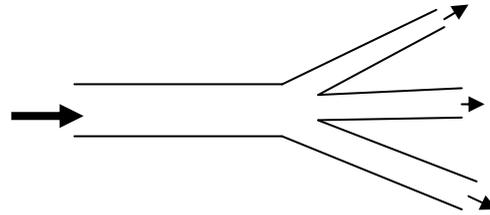


Fig. VII.11a- Conduite ramifiées

Le même raisonnement sera fait pour les autres tronçons et on obtient un système d'équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} \frac{P_M}{\rho g} = Z'_1 + K_1 Q_1^m \\ \frac{P_M}{\rho g} = Z'_2 + K_2 Q_2^m \\ \frac{P_M}{\rho g} = Z'_3 + K_3 Q_3^m \end{cases}$$

La même procédure que pour les conduites en parallèle, additionner pour une même valeur des ordonnées ($H = \frac{P_M}{\rho g}$)

Les abscisses Q et la résolution se fait graphiquement.

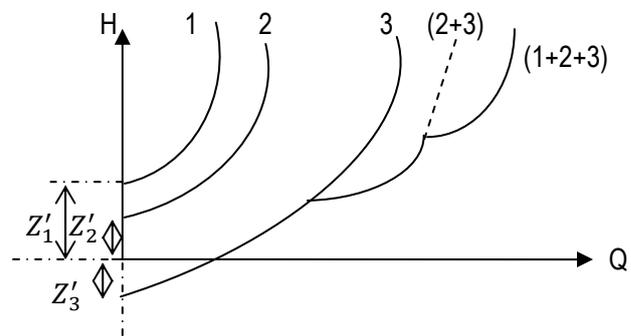


Fig. VII.11b- Représentation de la caractéristique d'une conduite ramifiée

4.5-Calcul de conduites complexes

Une conduite complexe comprend une ou plusieurs ramifications. Pour les conduites complexes aussi bien à l'écoulement libre qu'à l'alimentation par pompe, s'effectue en général par voie grapho-analytique, c'est-à-dire à l'aide des caractéristiques.

Le calcul et le tracé de la caractéristique d'une conduite complexe s'effectue de la manière suivante. La conduite complexe doit être divisée en conduites simples, dont chacune doit être calculée séparément, après quoi, on trace leurs caractéristiques ainsi qu'il a été décrit ci-dessus. Ensuite, on additionne les caractéristiques des éléments constituant une ramification suivant les lois établies à la section (4.2). De cette façon, on obtient les caractéristiques des conduites multiples aussi bien que ramifiées. Ensuite, on additionne les caractéristiques que l'on vient d'obtenir avec les caractéristiques des conduites mixtes selon les relations.

4.6-Calcul de conduites d'aspiration et de refoulement

Ecrivons le théorème de Bernoulli entre les points 0 et 1.

$$Z_0 + \frac{P_0}{\rho g} + \alpha \frac{u_0^2}{2g} = Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha \frac{u_1^2}{2g} + \sum \Delta H_{0-1}$$

$$\frac{P_0}{\rho g} = h_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha \frac{u_1^2}{2g} + \sum \Delta H_{0-1} \dots\dots\dots(*)$$

Ecrivons le théorème de Bernoulli entre les points 2 et 3.

$\frac{P_2}{\rho g} + \alpha \frac{u_2^2}{2g}$ L'énergie spécifique du liquide à l'entrée de la pompe peut être déterminée de l'équation (*) :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha \frac{u_1^2}{2g} = \frac{P_0}{\rho g} - h_1 - \sum \Delta H_{0-1} \dots \dots \dots (***)$$

L'augmentation de l'énergie spécifique du liquide créée par la pompe qui est appelée " hauteur H_p " est obtenue en faisant la différence des équations (**) et (***) :

$$\frac{u_2^2}{2g} = h_2 + \frac{P_3}{\rho g} + \alpha \frac{u_3^2}{2g} + \sum \Delta H_{2-3} \dots \dots (**)$$

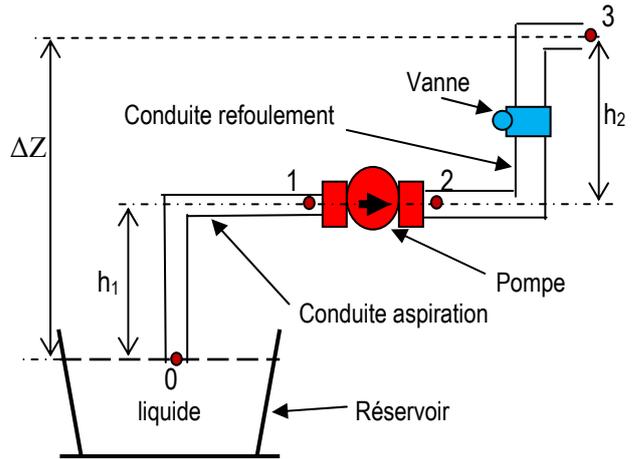


Fig. VII.13- Conduite d'aspiration et de refoulement

$$H_p = \left(\frac{P_2}{\rho g} + \alpha \frac{u_2^2}{2g} \right) - \left(\frac{P_1}{\rho g} + \alpha \frac{u_1^2}{2g} \right) = h_1 + h_2 + \frac{P_3 - P_0}{\rho g} + \alpha \frac{u_3^2}{2g} + \sum \Delta H_{0-1} + \sum \Delta H_{2-3}$$

Ou bien

$$H_p = \Delta Z + \frac{P_3 - P_0}{\rho g} + CQ^2 + KQ^m$$

ΔZ : hauteur d'élévation du liquide

$$CQ^2 = \alpha \frac{u_3^2}{2g}$$

KQ^m : somme des pertes de charge dans les conduites d'aspiration et de refoulement.

Si on appelle $\Delta Z' = \Delta Z + \frac{P_3 - P_0}{\rho g}$

Nous obtenons $H_p = \Delta Z' + \frac{P_3 - P_0}{\rho g} + CQ^2 + KQ^m$ analogue à la relation (7.3).

Donc la comparaison nous montre que $H_p = H_{ex}$

Cette égalité peut être étendue au cas où l'écoulement du liquide est permanent dans la conduite, la pompe crée une hauteur égale à la hauteur exigé. C'est seulement à cette condition que le fonctionnement stable de la pompe est possible.

La méthode de calcul des conduites à alimentation par pompe est basée sur l'égalité de la relation ($H_p = H_{ex}$). Cette méthode consiste à tracer 2 courbes à la même échelle et sur un même graphique : la caractéristique de la conduite $H_{ex} = f_1(Q)$ et la caractéristique de la pompe $H_p = f_2(Q)$. Le point d'intersection est appelé le point de régime, car il détermine les seules conditions possibles de fonctionnement de la pompe pour une caractéristique de la conduite et une vitesse de rotation donnée.

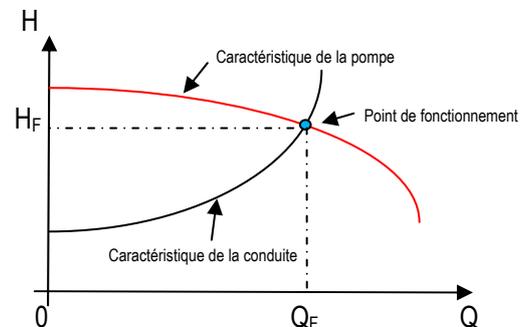


Fig. VII.12- Point de fonctionnement d'une pompe

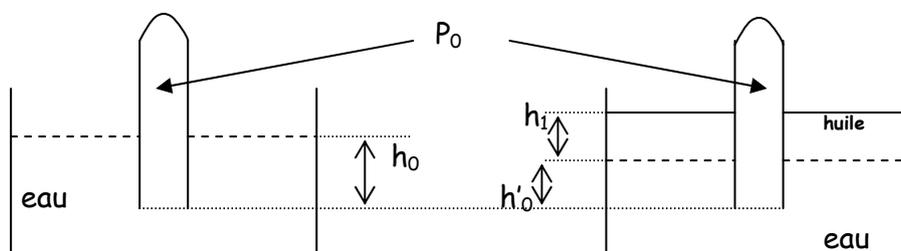
Chapitre VIII

Exercices

Exercice 1

Calculer la pression absolue P_0 qui empêche l'eau de pénétrer dans le tube lorsque $h_0 = 80$ mm suivant la figure A. On rajoute une couche d'huile de hauteur $h_1 = 30$ mm. Quelle doit être la cote h'_0 pour avoir la même pression P_0 .

On donne : $\rho_e = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\rho_h = 0,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ et $P_{\text{atm}} = 1 \text{ bar}$.

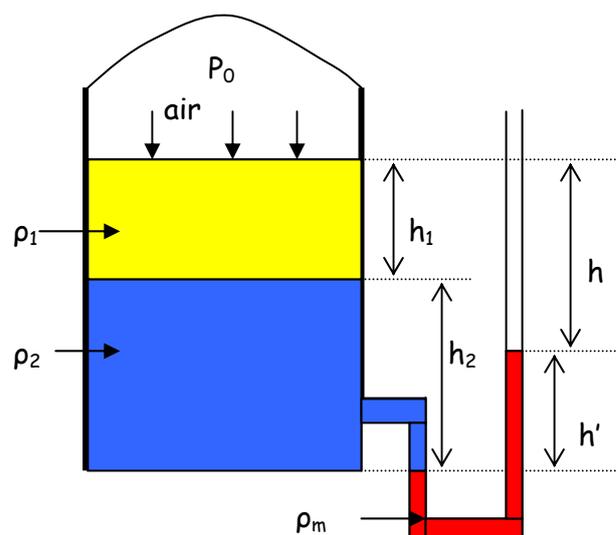


Réponses : $P_0 = 1,008 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $h'_0 = 59 \text{ mm}$

Exercice 2

Un réservoir clos contient de l'eau de masse volumique $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$ et de l'huile de masse volumique $\rho_1 = 800 \text{ kg/m}^3$ surmonté d'air à la pression effective P_0 .

La surface de séparation des liquides est 30 cm au dessous de la surface libre de l'huile. La lecture du manomètre à mercure de masse volumique $\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$ indique 40 cm. La différence entre la position des niveaux du réservoir et le manomètre est $h = 40$ cm. Déterminer la pression P_0 de l'air.



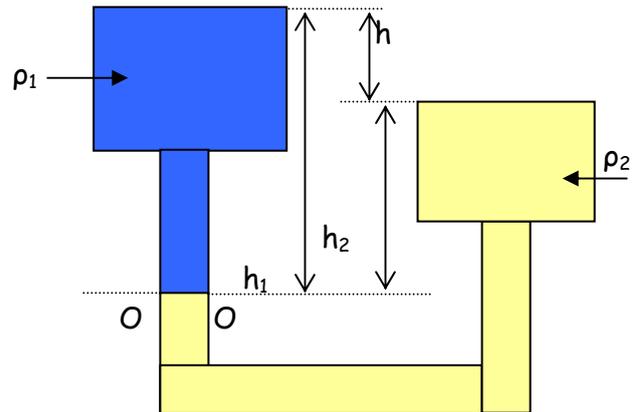
Réponses : $P_0 = 0,47 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Exercice 3

Dans des vases communicants, il y a deux liquides immiscibles ρ_1 et ρ_2 . On demande de déterminer les positions des surfaces libres des liquides h_1 et h_2 par rapport à l'interface (O-O).

On donne $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 1200 \text{ kg/m}^3$ et $h = 11 \text{ cm}$.

Réponses : $h_1 = 66 \text{ cm}$, $h_2 = 55 \text{ cm}$

Exercice 4

Un bassin d'eau de 9 m de profondeur, de forme parallélépipède est fermé par une porte verticale de longueur 9 m et de largeur 1 m. Cette porte est constituée de trois panneaux superposés.

1°- Quel doit être la hauteur de chaque panneau pour que chacun supporte le même effort total.

2°- Déterminer le centre de poussée de chaque renfort, ainsi que la force de poussée agissant sur chaque centre de poussée.

On donne : la masse volumique de l'eau 10^3 kg/m^3 et $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Réponses : 1- $h_1 = 5.196 \text{ m}$, $h_2 = 2.152 \text{ m}$, $h_3 = 1.652 \text{ m}$
 2° - $Z_{p1} = 3.464 \text{ m}$, $Z_{p2} = 6.33 \text{ m}$, $Z_{p3} = 8.2 \text{ m}$ et $F = 1.35 \cdot 10^5 \text{ N}$

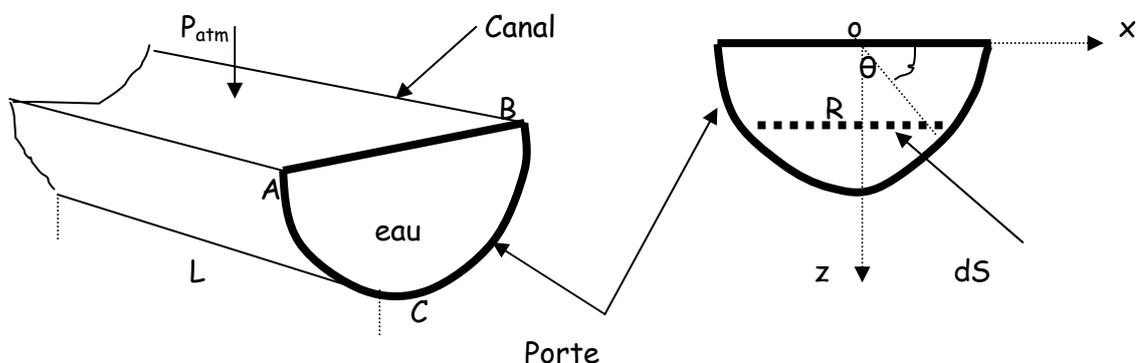
Exercice 5

Un canal d'irrigation en forme d'un demi-cylindre est obturé par une porte latérale (ABC).

1- Calculer l'effort de pression qui s'exerce sur la porte en position fermée (canal rempli d'eau).

2- Calculer le centre de poussée de cet effort de pression.

3- Montrer que la résultante des forces de pression qui s'exerce sur la coque du canal est suivant OZ, sans faire de calcul.



Réponses : 1° - $F = \frac{2}{3} \rho g R^3$

2° - $Z_p = \frac{3}{16} \text{ m}$

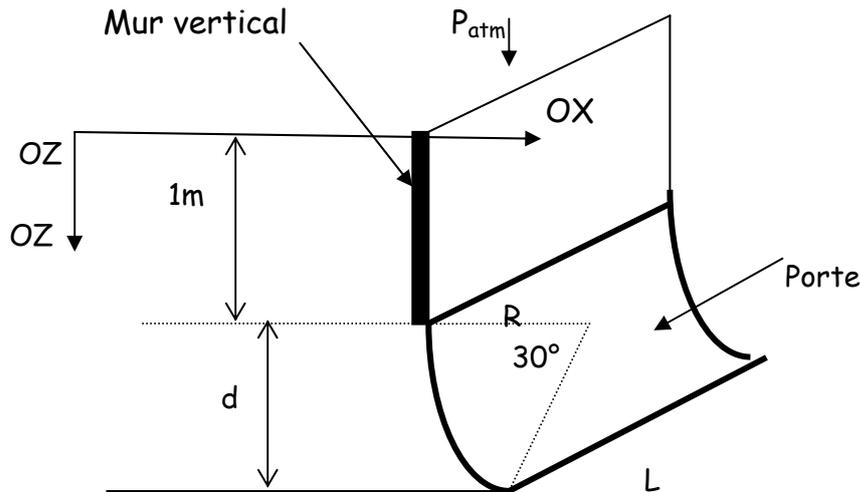
3° - Les dF_x au même niveau sont égales et de sens opposées ($dF_{x1} = dF_{x2}$) donne une résultante suivant OX nulle. La seule composante de la résultante restante est suivant OZ.

Exercice 6

Le groupe moto-pompe alimente une retenue d'eau. Une porte en forme de portion cylindrique articulée autour d'un axe horizontal permet le contrôle de débit.

- 1- Calculer les composantes de la résultante de force de pression exercée par le liquide sur la porte suivant les deux directions (OX et OZ).
- 2- En déduire la valeur de la résultante de force de pression.
- 3- calculer le centre de poussée de la résultante de force de pression.

On donne : $R = 4 \text{ m}$, $L = 5 \text{ m}$. (L : profondeur de la porte)

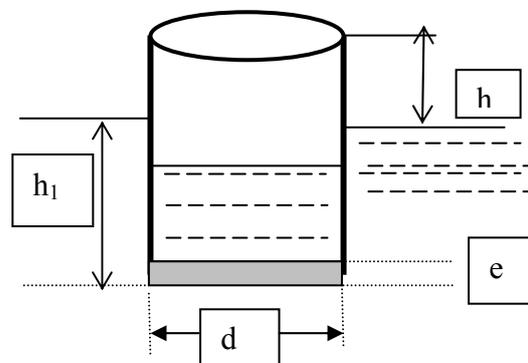
Réponses :

- 1° - $F_x = 2 \cdot 10^5 \text{ N}$, $F_z = 0.62 \cdot 10^5 \text{ N}$
- 2° - $F = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N}$
- 3° - $Z_p = 1 + R \sin \beta = 2.18 \text{ m}$ et $\beta = 17.22^\circ$

Exercice 7

Un récipient de volume V_t rempli d'eau à moitié flotte sur l'eau. On colle à sa base de forme circulaire un morceau de bois de la même forme d'épaisseur e . Calculer la hauteur h d'émersion ?

On donne : $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\rho_{\text{bois}} = 2900 \text{ kg/m}^3$, $e = 2 \text{ cm}$, $d = 30 \text{ cm}$ et $V_t = 0,04 \text{ m}^3$

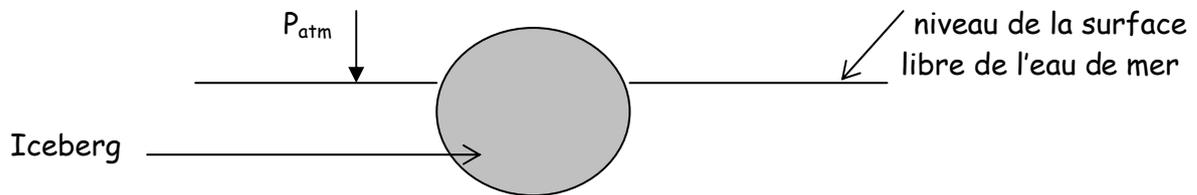


Réponses : $h_1 = 0,34 \text{ m}$, $h = 0,24 \text{ m}$

Exercice 8

La glace à -10°C a une masse volumique $\rho_{\text{glace}} = 995 \text{ kg/m}^3$. Un iceberg sphérique de 1000 tonnes flotte à la surface de l'eau. L'eau de mer a une masse volumique $\rho_{\text{eau}} = 1025 \text{ kg/m}^3$.

1. Déterminer la fraction F du volume immergée ?
2. Quelle sera F si la glace avait une forme cubique ?



Réponses : 1° - Fraction = (Poussée Archimède / Poids de la glace) = $(\rho_{\text{eau}} g V_{\text{im}}) / (\rho_{\text{glace}} g V_{\text{glace}})$
 2° - La fraction sera la même.

Exercice 9

Pour l'écoulement permanent isovolume ($\rho = \text{Cte}$), les valeurs suivantes de u , v et w sont-elles possibles ?

$$\begin{aligned} U &= (2x - 3y) t \\ V &= (x - 2y) t \\ W &= 0 \end{aligned}$$

Réponse : $\text{div} = 0$ est vérifié, donc les valeurs sont possibles.

Exercice 10

Soit un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On considère l'écoulement dont la vitesse \vec{u} admet les composantes suivantes :

$$\begin{aligned} u_r &= (k/a^2) r z \\ u_\theta &= 0 \\ u_z &= (k/a^2) [a^2 - 2r^2 - z^2] \end{aligned}$$

k et a sont des constants positives.

- 1- Montrer que l'écoulement s'effectue en régime incompressible
- 2- Calculer les composantes du vecteur $\text{rot } \vec{u}$
- 3- Trouver l'équation des lignes de courant. lors de l'intégration, on pourra poser : $Z = z^2$ et $R = r^2$

On se servira en outre du résultat suivant :

$$d[x(a-x-y)] = 0 \quad \text{équivalent à} \quad (a - 2x - y) dx = x dy$$

Réponse : 1°- $\text{div} = 0$ est vérifié, donc le régime est incompressible.

$$2^{\circ} - \text{rot } \vec{u} = \frac{5kr}{a^2} \vec{e}_z$$

$$3^{\circ} - r^2(a^2 - r^2 - z^2) = \text{cte}$$

Exercice 11

Un écoulement plan non permanent est défini par le champ de vitesse suivant :

$$\begin{aligned}v_x &= u_0 + a (t - t_0) \\v_y &= v_0\end{aligned}$$

- 1° - Le fluide est-il compressible ?
- 2° - Etablir à un instant t , l'équation des lignes de courant de cet écoulement ?
- 3° - Comparer ces lignes de courant à la trajectoire d'une particule fluide dans ce champs de vitesse

Exercice 12

Soit un écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible entre 2 plaques parallèles distantes de 1 m et avec une vitesse u ($u(y), v=0, w=0$). La pression varie le long de la conduite suivant la loi $P(x) = -30x + 100$. En supposant qu'il n'y a pas de forces de volume.

- 1- Déterminer le profil des vitesses dans la conduite
- 2- En déduire le débit volumique par unité de largeur de la conduite

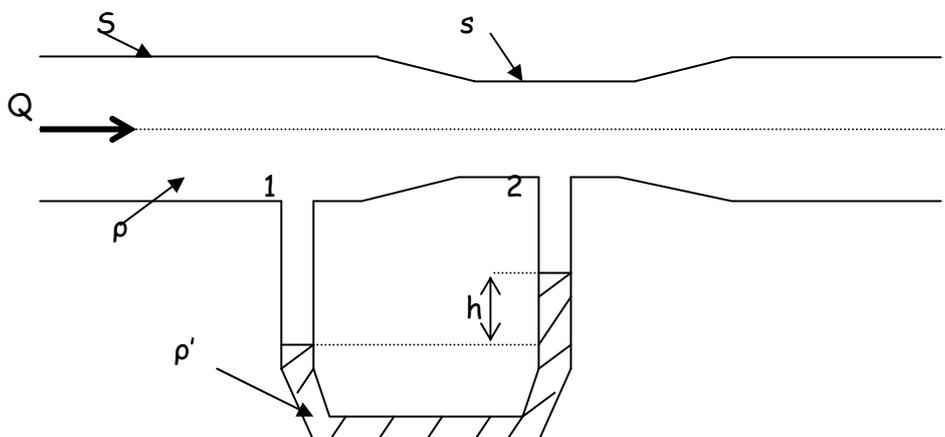
On donne la viscosité dynamique égale à 15 Pa.s

Réponses : $u(y) = -y^2 + y$, $Q/L = 1/6 \text{ m}^2/\text{s}$

Exercice 13

On utilise une jauge de venturi afin de déterminer la vitesse d'écoulement d'un liquide de masse volumique ρ . Le tube en U (manomètre) contient un liquide de masse volumique $\rho' < \rho$ la section principale du tube est S , « s » étant la section d'étranglement (rétrécissement du tube).

Déterminer la vitesse d'écoulement du fluide en fonction de la dénivellation h .



Réponses : $v_2 = \left[\frac{2gh_{AB}(\rho' - \rho)}{\rho(1 - s^2/S^2)} \right]^{1/2}$

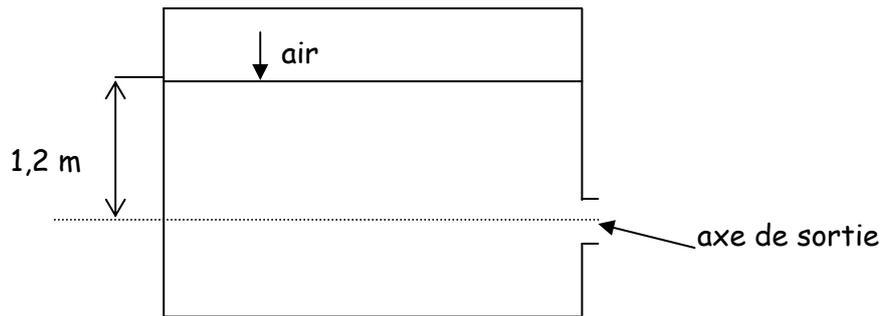
Exercice 14

Un réservoir fermé de grandes dimensions contient un liquide surmonté d'air à la pression absolue de 1.07 bars. A une distance de 1.2 m au dessous de la surface libre du liquide, se trouve un orifice de sortie de petites dimensions par où s'écoule le liquide.

Calculer la vitesse du fluide à la sortie dans ces cas :

1. Lorsque le liquide est de l'eau
2. Lorsque sous l'air se trouve une couche de 30 cm d'eau surmontée d'une couche de 90 cm d'huile ayant une densité 0.7

On donne $g = 10 \text{ m/s}^2$. Prendre l'axe de sortie comme référence des hauteurs.

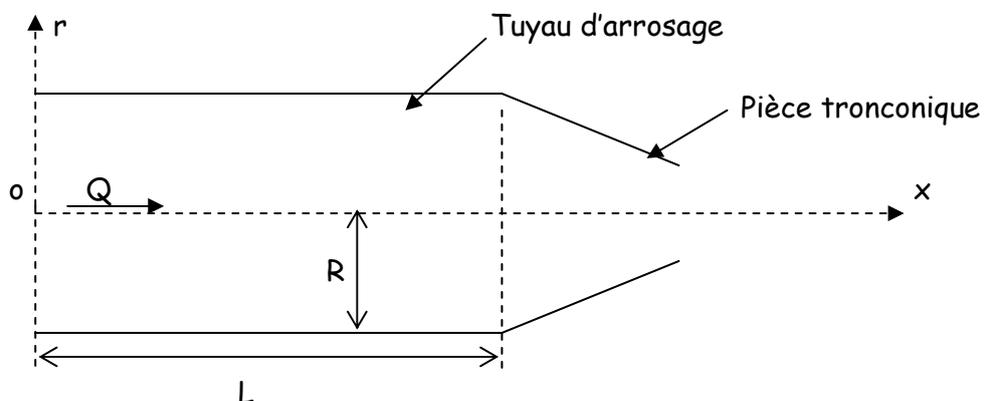


Réponses : 1- $v_B = \left[2 \frac{(P_c - P_B)}{\rho} + 2gh \right]^{1/2} = 6.16 \text{ m/s}$

2- $v_B = \left[2 \frac{(P_c - P_B)}{\rho} + 2g \left(\frac{\rho'}{\rho} (z_c - z_{c'}) + (z_{c'} - z_B) \right) \right]^{1/2} = 5.7 \text{ m/s}$

Exercice 15

Un tuyau d'arrosage de section circulaire et de diamètre 1 cm a une longueur de 10 m . Il est branché en A, à une alimentation en eau fournissant une pression $1.00038 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. La masse volumique et la viscosité dynamique de l'eau à la température ambiante sont respectivement 1 g/cm^3 et 1 Poise. Le régime d'écoulement est supposé laminaire.



1° - Etablir le profil de vitesse d'écoulement dans le tuyau.

2° - Calculer le débit volumique d'eau dans le tuyau.

3° - A l'extrémité B du tuyau, on place une pièce tronconique qui diminue la section de l'orifice. La section en C a un diamètre de 6 mm.

3.1- Calculer le nouveau débit volumique.

3.2- L'extrémité du tuyau étant horizontale, déterminer la valeur de la force exercée par l'eau sur la section de sortie du tuyau.

Réponses : 1° voir la démonstration dans le cours.

$$2^{\circ} - Q = \left(\frac{\pi D^4 \Delta P}{128 \mu L} \right) = 0.93 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

3.1° - $Q_A = Q_B = Q_C = 0.93 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ selon le principe de conservation de la masse.

3.2° - $F_c = 2.826 \text{ N}$

Exercice 16

Déterminer la force de frottement et la contrainte de cisaillement sur la surface (axb), si la température de l'eau est 14°C et la différence de vitesse entre deux couches de fluide voisines est $3 \cdot 10^{-4} \text{ m/min}$ et la distance entre couche est considérée à 0,25 mm.

On donne : $\mu = f(T)$ tel que $\mu(T) = \mu_0 / (1 + 0,0337 T + 221 \cdot 10^{-6} T^2)$

avec $\mu_0 = 17,92 \cdot 10^{-4} \text{ Pa.s}$, $a = 10 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$.

Réponse : $\mu = 1.185 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\zeta = 23.66 \text{ Pa}$, $F = 2.36 \cdot 10^{-5} \text{ N}$

Exercice 17

La répartition de vitesse dans la section transversale du courant d'un liquide de viscosité dynamique 0,05 Pa.s est donnée par l'expression suivante :

$$v(y) = 20 y - 0,5 y^2$$

Déterminer la contrainte tangentielle maximale, ζ_{\max} ?

Réponse : $\zeta_{\max} = 1 \text{ Pa}$

Exercice 18

Une conduite de 75 mm de diamètre est destinée à amener en charge un certain débit de pétrole d'une viscosité dynamique 0.03 Pa.s et d'une masse volumique 850 kg/m^3 . La vitesse d'écoulement est 1 m/s.

Déterminer la pente hydraulique J, sachant que $J = \Delta H/L$.

L étant la longueur de la conduite et ΔH la perte de charge linéaire.

Réponse : $J = 0.02$

Exercice 19

Un mouvement permanent de pétrole d'une viscosité cinématique $1.46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ et de densité 0.9, s'effectue dans une conduite de diamètre 203 mm et de longueur 10 000 mm sous une variation de pression 2.7 bars. La différence des côtes à l'entrée et la sortie de la conduite est 50 m. le coefficient de frottement de la conduite $\lambda = 0.067$. On donne $g = 10 \text{ m/s}^2$

- 1°- Déterminer le débit en poids de pétrole s'écoulant dans la conduite.
- 2°- En déduire la pente hydraulique

Réponses :

- 1- $Q_p = 200.88 \text{ N/s}$
- 2- $J = 8 \cdot 10^{-3}$

Exercice 20

Un pipe-line de diamètre $d=25 \text{ cm}$ est de longueur L est destiné à acheminer du pétrole brut d'une station A vers une station B avec un débit massique $q_m=18\text{kg/s}$.

Les caractéristiques physiques du pétrole sont les suivantes:

- masse volumique $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$,
- viscosité dynamique $\mu = 0,261 \text{ Pa.s}$.

On suppose que le pipe-line est horizontal.

1. Calculer le débit volumique q_v du pétrole.
2. Déterminer sa vitesse d'écoulement v .
3. Calculer le nombre de Reynolds R_e .
4. Quelle est la nature de l'écoulement?
5. Calculer la valeur du coefficient de perte de charge linéaire λ .
6. Exprimer la relation de Bernoulli entre A et B.
7. Déterminer la longueur L maximale entre deux stations A et B à partir de laquelle la chute de pression (P_A-P_B) dépasse 3 bar.

Réponses :

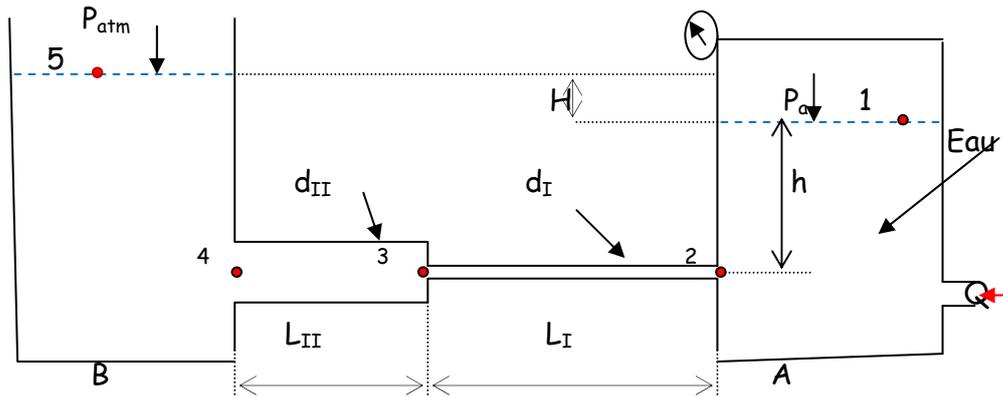
- 1- $Q = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$
- 2- $V = 0.407 \text{ m/s}$
- 3- $R_e = 350.862$
- 4- $\lambda = 0.182$
- 5- voir le cours.
- 6- $L \leq 564.108 \text{ m}$

Exercice 21

Deux réservoirs A et B de grands dimensions contenant de l'eau (l'un A est clos, l'autre B est ouvert à l'atmosphère) sont reliés par une conduite horizontale composée de tronçons de diamètre $d_I=70$ mm et $d_{II}=100$ mm, de longueurs $L_I=3$ m et $L_{II}=5$ m. La différence de niveaux des surfaces libres des deux réservoirs est supposée constante $H=5$.

On donne $h = 2$ m, les coefficients de perte de charge singulières : $\xi_2 = 0.5$, $\xi_3 = 1 - (d_I/d_{II})^2$ et $\xi_4 = 1$ et le coefficient de frottement unitaire $\lambda = 0.02$ pour les deux conduites.

Calculer le débit volumique.



Réponse : $v = 6.52$ m/s , $Q = 25.1$ l/s

Références

- N. Midoux. 1993. Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique. TEC&DOC – Lavoisier. ISBN 2-85206-928-8 (3^e tirage).
- S. Candel. Mécanique des fluides Cours. 1995. DUNOD, Paris. ISBN 2-10002585-6.
- R. Comolet et J. Bonnin. 1973. Mécanique expérimentales de fluides. Tomes 1, 2, 3. Masson et C^{ie} Editeurs. Paris. ISBN 2-225 36773-5 (2^e édition).
- R. Ouziaux. 1978. Mécanique des fluides. Edition DUNOD. BORDAS, Paris. ISBN 2-04-010143-8.
- M. Fermigier. 2004. Hydrodynamique Physique. ESPCI - Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique.
- O. Louisnard. 2012. Cours de mécanique des fluides. [http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/) ou par courrier postal _a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

Annexes

Rappels Mathématiques

Différentielle totale : $D = d = \frac{\partial}{\partial t} dt + \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz$

Dérivée particulière : $\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w$

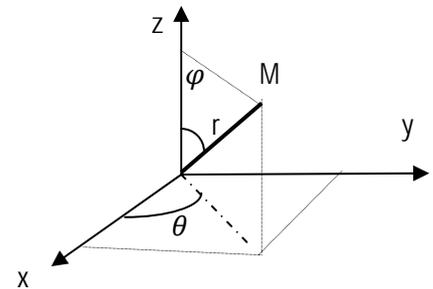
Divergence : $\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 a_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 a_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 a_3)}{\partial x_3} \right]$

Rotationnel : $\nabla \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix}$ avec $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

- En coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = 1 \\ h_3 = 1 \end{cases}$

- En coordonnées cylindriques : $\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = \theta \\ x_3 = z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = r \\ h_3 = 1 \end{cases}$

- En coordonnées sphériques : $\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = \theta \\ x_3 = \varphi \end{cases} \text{ et } \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = r \\ h_3 = r \sin \theta \end{cases}$



Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques pour un fluide incompressible:

Soit un champ de vitesse $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} \right) + \rho \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial y} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \rho f_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right) + \rho \left(\frac{u_r \partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_z \partial u_\theta}{\partial z} \right) = \rho f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right) + \rho \left(\frac{u_r \partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \Delta u_z$$

Avec
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Théorème de transport de Reynolds :
$$\frac{d}{dt} \int_V f \, dV = \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (f \cdot u_i) \right) dV$$

Avec f , une propriété de fluide et $i = 1, 2, 3$

Théorème de Gauss-Ostrogradsky :
$$\int \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS = \int \nabla \cdot \vec{a} \, dV = \int \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \, dV \quad \text{et } i = 1, 2, 3$$