

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
**Université M'Hamed Bougara – Boumerdes**  
Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie



**Département Gisement Minier et Pétrolier**

---

**Cours et Exercices de  
Filtration des Fluides Pétroliers**

---

Par

**Mourad GARECHE**

Docteur ès Sciences

Maitre de Conférences à l'Université M'Hamed Bougara de Boumerdes

Boumerdes 2018

« ...Lorsque vous pouvez mesurer ce dont vous parlez et l'exprimer en chiffre, vous en connaissez quelque chose ; mais lorsque vous ne pouvez l'exprimer en chiffres, votre connaissance en est superficielle et insatisfaisante, ce peut être le début de la connaissance, mais vos idées ont à peine atteint l'état de science, quel qu'en soit le sujet. »

Lord KELVIN

(Traduction libre, citation tirée de J.C. Davis, 1973, *Statistics and data analysis in geology*)

« C'est uniquement en possédant une compréhension complète de la physique qu'un ingénieur peut espérer apprécier et résoudre des problèmes complexes d'ingénierie des réservoirs d'une manière pratique. »

L.P. DAKE

(Traduction libre, tirée de L.P. Dake, 1978, *Fundamental of reservoir engineering*)

# Avant-propos

---

Bien que les premières études concernant les écoulements aient porté sur la filtration de l'eau par des couches de sable, se sont en fait les problèmes posés par l'exploitation des gisements de pétrole qui ont suscité pratiquement tous les nombreux travaux récents sur les écoulements de fluides mono et polyphasique dans les milieux poreux.

Pour exploiter convenablement un gisement de pétrole, de gaz naturel ou encore une roche aquifère, il faut connaître aussi bien que possible les caractéristiques intrinsèques des roches qui renferment ces ressources. Leur capacité de stockage (c'est-à-dire la porosité), leur aptitude à laisser circuler les fluides (c'est-à-dire la perméabilité) ainsi que les équations de la physique régissant le mouvement de ce fluide en place dans la roche pour l'acheminer du fond du réservoir à la surface.

Ce document est un ouvrage de Filtration des Fluides Pétroliers. Il s'adresse aux licences 3 de la spécialité Génie Pétrolier et Gazier : Production des Hydrocarbures et du réservoir engineering. Il constitue une synthèse succincte de quelques travaux collectés sur plusieurs ouvrages (voir références bibliographiques) permettant aux étudiants de mieux assimiler cette matière qui s'avère un peu complexe surtout s'agissant des écoulements à travers les milieux poreux qui peuvent aussi être le siège de phénomènes supplémentaires tel que la capillarité favorable dans les milieux divisés de l'ordre d'échelle microscopique.

Ce polycopié est élaboré en sept chapitres de cours suivi par une série d'exercices avec corrigé permettant ainsi à l'étudiant de mieux comprendre cette discipline.

Ce document n'a pas la prétention de rentrer en compétition avec d'autres livres dont certains sont excellents (voir bibliographie) mais malheureusement, ne sont pas toujours disponible. Et même si cette disponibilité lui sera assurée, ne dit-on pas : "abondance des biens ne nuit pas".

Le lecteur comprendra que mon souhait est que ce présent polycopié puisse lui apporter quelques notions pour pouvoir formuler et résoudre certains problèmes de filtration des fluides pétroliers monophasique et polyphasique en milieux poreux (gisement d'hydrocarbures).

Enfin, je souhaite très vivement recevoir des lecteurs les remarques et les critiques qui me permettront d'améliorer le contenu de cet ouvrage.

Mourad GARECHE.

## Table des Matières

	Introduction.....	1
Chapitre 1 :	Bases physiques et théoriques appliquées à la mécanique des fluides en milieux poreux.....	2
	1. Quelques exemples de milieux poreux.....	2
	2. Description géométrique .....	3
Chapitre 2 :	Tensions superficielles .....	8
	1. Tension superficielle-interfaciale.....	8
	2. Notion de mouillabilité.....	8
	3. Applications .....	9
Chapitre 3 :	Application de principes généraux de la mécanique à la mécanique des fluides en milieux poreux.....	12
	1. Principe de la conservation de la masse et équation de continuité.....	12
	2. Principe de la conservation du mouvement .....	13
	3. Equation d'état du fluide et la loi thermodynamique d'évolution.....	13
	4. loi d'évolution thermodynamique dans un milieu poreux et l'équation de continuité.....	14
	5. Application des équations de Navier-Poisson à quelques cas particuliers .....	14
Chapitre 4 :	Loi de filtration linéaire : loi de Darcy.....	17
	1. Expérience du perméamètre.....	17
	2. Perméabilité du milieu poreux.....	18
	3. Equation de Darcy.....	19
	4. Conductivité hydraulique d'un milieu poreux stratifié.....	20
	5. Transmissivité.....	21
	6. Limites d'application de la loi de Darcy.....	21
	7. Lois non linéaires de la filtration.....	22
	8. Effet d'inertie.....	24
Chapitre 5 :	Propriétés fondamentales de l'écoulement monophasique à travers un milieu poreux.....	28
	1. Combinaison de l'équation de continuité et les équations de Darcy.....	28
	2. Les équations aux dérivées partielles du mouvement .....	28
	3. Différentes types de l'écoulement filtrant à une dimension .....	32
	4. Les propriétés générales des solutions.....	33
Chapitre 6 :	Écoulement des gaz en milieu poreux.....	36
	1. Généralités .....	36
	2. Intégration de la loi quadratique.....	37
Chapitre 7 :	Écoulement polyphasique en milieu poreux .....	40
	1. Introduction.....	40
	2. Position du problème .....	40
	3. Forces agissant sur une particule fluide .....	41
	4. Écoulement diphasique non miscible dans un milieu poreux .....	42
	5. Théorie du déplacement frontal.....	45
	Exercices Corrigés .....	50
	Références Bibliographiques.....	55

# Introduction

---

Dans le catalogue des milieux divisés, les milieux poreux désignent des matériaux pour lesquels la phase solide, fortement imbriquée avec la phase fluide est fixe. On trouve de nombreux matériaux naturels dans cette catégorie : les sols, les couches sédimentaires, la plupart des roches, ainsi que certains matériaux vivants. Certains matériaux artificiels requièrent d'être poreux soit dans le processus de fabrication soit dans leur finalité pour jouer un rôle de filtre ou apporter des propriétés macroscopiques particulières (conductivité thermique par exemple).

D'une manière générale, les milieux poreux sont définis par deux critères :

- Le matériau doit contenir de petits espaces vides, appelé pores, délimités par une matrice solide.
- Le matériau doit être perméable à un écoulement de fluide (gaz ou liquide).

Des deux critères renvoient à deux caractéristiques essentielles d'un milieu poreux :

La porosité - la fraction de vide et la perméabilité – qui indique l'aptitude d'un milieu poreux à être traversé par un écoulement. Ces deux quantités sont des variables macroscopiques, estimés sur un volume contenant de nombreuses entités microscopiques composant le matériau : les pores.

Les problèmes d'écoulements de fluides dans les milieux poreux se posent à propos de deux types d'application : mouvements de l'eau dans les nappes souterraines aquifères et extraction du pétrole des gisements d'hydrocarbures.

Bien que les premières études concernant ces écoulements aient porté sur la filtration de l'eau par des couches de sable, se sont en fait les problèmes posés par l'exploitation des gisements de pétrole qui ont suscité pratiquement tous les nombreux travaux récents sur les écoulements de fluides mono et polyphasique dans les milieux poreux.

La mécanique des fluides dans les milieux poreux est une branche particulière de la physique; elle repose donc, comme telle sur l'observation des faits. Ce support expérimental devrait permettre de relier correctement entre elles les divers grandeurs dont on a été amené à concevoir l'existence, mais la comme ailleurs, l'interprétation des faits est souvent imparfaite et l'image que nous en retenons est toujours plus ou moins déformée : quand en face d'un problème, on croit disposer d'un tout cohérent, on a en réalité le plus souvent schématisé ses données physiques et plus ou moins idéalisé ses lois de fonctionnement.

L'étude expérimentale de la mécanique des fluides dans les milieux poreux présente des difficultés particulières. Elle porte en effet, dans ces applications sur des systèmes en général très étendus (10, 100, 1000 km<sup>2</sup> pour les gisements d'hydrocarbures et bien d'avantage encore pour les nappes d'eau). Cette extension superficielle favorise de larges variations dans les propriétés des roches et parfois aussi dans celle des fluides. On peut donc s'attendre à n'avoir à faire qu'à des systèmes à caractéristiques variées, et toute schématisation qui négligerait d'en tenir compte serait inadéquate.

Pour exploiter convenablement un gisement de pétrole, de gaz naturel ou encore une roche aquifère, il faut connaître aussi bien que possible les caractéristiques intrinsèques des roches qui renferment ces ressources. Leur capacité de stockage (c'est-à-dire la porosité), leur aptitude à laisser circuler les fluides (c'est-à-dire la perméabilité) ainsi que les méthodes utilisées pour mesurer l'une et l'autre sont des informations primordiales à réunir et à étudier pour décrire le réservoir.

Dans le cadre de ses expérimentations pour améliorer la qualité des filtres utilisés à la purification des eaux d'alimentation de la ville de Dijon en France, **Henry Darcy** fut le premier à observer en 1856, la relation entre le débit à travers le sable et la perte de charge qui lui était associée; en exprimant sa propre loi appelée « loi de filtration linéaire ».

# Chapitre 1

## Bases physiques et théoriques appliquées à la mécanique des fluides en milieux poreux

### 1- Quelques exemples de milieux poreux

#### 1.1- Milieu poreux naturels

Dans la nature, les roches et les sols sont certainement les milieux poreux les plus exploités. L'étude géologique des sous-sols permet de classifier les différentes couches géologiques selon la perméabilité à un écoulement de fluide. Les couches d'argile constituent en général les parois imperméables de réservoirs naturels d'eau ou d'hydrocarbures. On nomme aquifère, un réservoir qui non seulement contient de l'eau mais qui peut aussi être le lieu d'écoulement, par gravité ou par pompage (voir fig. 1.1).

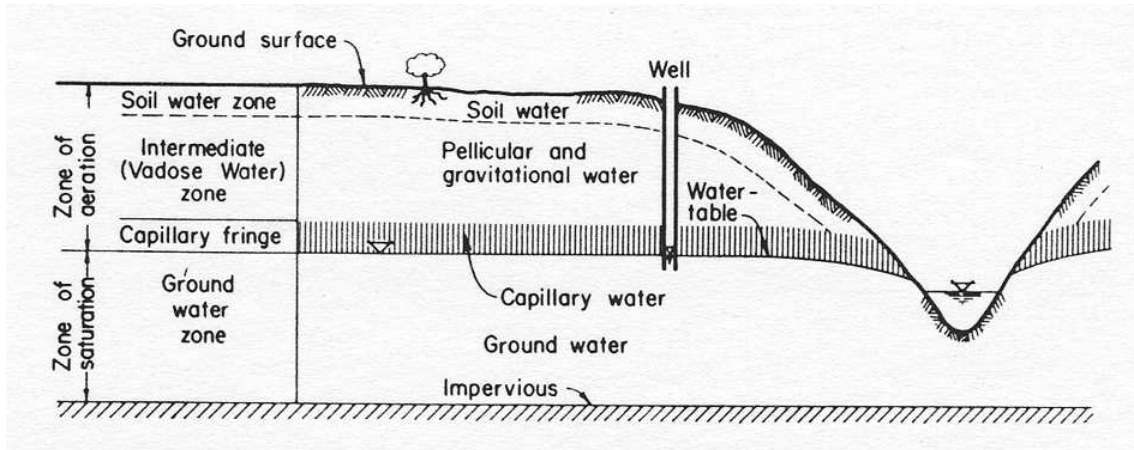


Figure 1.1- Schéma d'un aquifère (Bear, 1972).

Les roches poreuses peuvent contenir des hydrocarbures. La fig. 1.2 montre qu'un tel réservoir peut contenir de l'eau, du pétrole et du gaz, avec des couches de mélanges intermédiaires. C'est pourquoi la compréhension des écoulements multiphasiques est très importante pour l'industrie de l'extraction pétrolière.

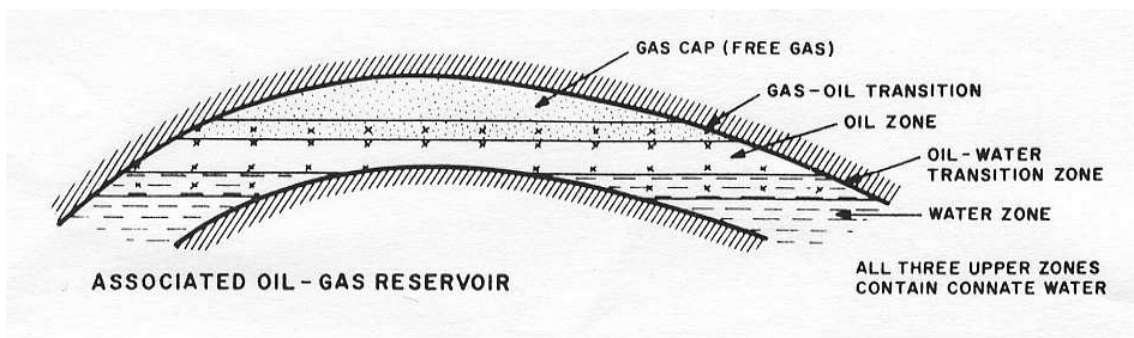


Figure 1.2- Schéma d'un réservoir naturel d'hydrocarbures (Bear, 1972).

La porosité des roches est très variable selon les conditions de température et de pression lors de la formation et de l'évolution géologique. Les roches denses comme le granit ont des porosités inférieures à 2%. Au contraire, les roches volcaniques formées à la surface (faible pression) ont des porosités élevées à cause des processus de dégazage associé au refroidissement. Certaines roches atteignent ainsi une porosité de 60%. Les roches sédimentaires se sont formées à partir d'agglomération de grains cimentés entre eux. Les schistes argileux ont une porosité de l'ordre de 10 à 25%. Le grès formé en général de grains de quartz a une porosité qui dépend fortement du matériau de cimentation des grains (entre 10 à 45%). De plus, la compaction géologique peut réduire considérablement la porosité: la fig. 1.3 montre les différentes coupes d'échantillons de grès poreux prélevés dans un même forage mais à des profondeurs différentes. On remarque que la porosité diminue avec la profondeur de forage.

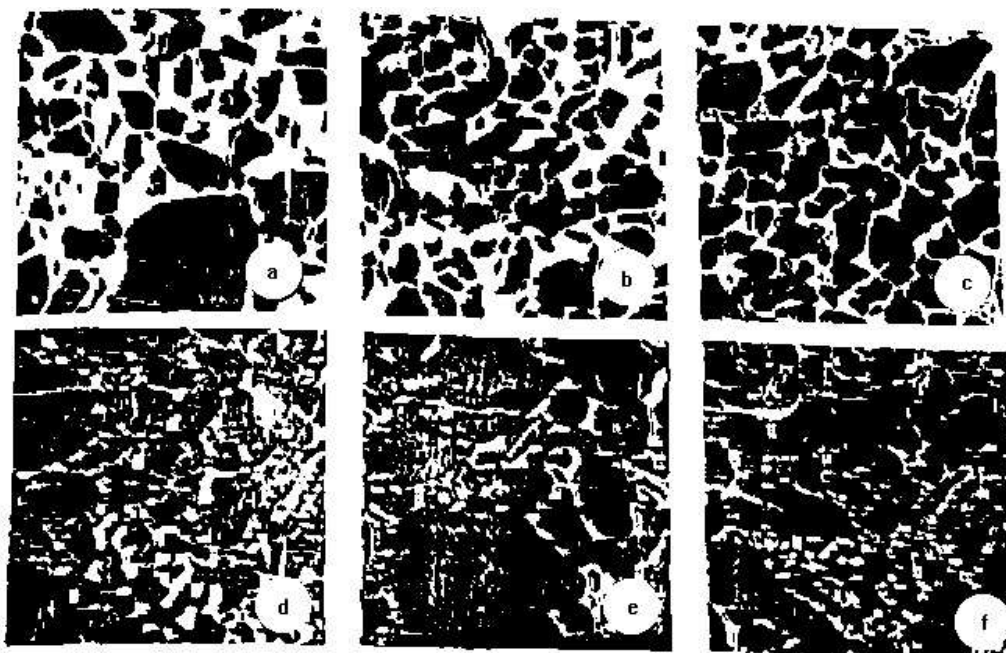


Figure 1.3- Coupes d'échantillons de grès poreux obtenues à différentes profondeurs  
P : (a)  $\beta = 27 \%$ ,  $P=1000-1500$  m; (b)  $\beta = 23 \%$ ,  $P=1700-1900$  m; (c)  $\beta = 18 \%$ ,  
 $P=2000-2300$  m; (d)  $\beta = 16 \%$ ,  $P=2500-2700$  m; (e)  $\beta = 13 \%$ ,  $P=2800-3000$  m;  
(f)  $\beta = 10 \%$ ,  $P > 3000$  m;

## 1.2- Milieux poreux artificiels

Lors de la fabrication des bétons et des ciments, une certaine porosité est nécessaire pour permettre un séchage lent et progressif et l'obtention d'un matériau robuste. Parfois, la porosité fine est complétée par un réseau de fractures qui fragilise le béton. La porosité d'un bon béton est comprise entre 6 et 10%. Le contrôle de la porosité et la structure poreuse joue un grand rôle dans l'industrie du papier. Selon les méthodes de fabrication, on peut obtenir un papier filtre très absorbant avec une porosité de 80%, ou au contraire un papier très serré et transparent (le papier calque) avec une porosité de 0.

## 2- Description géométrique

Les milieux poreux ont une géométrie complexe. Pour illustration, la fig. 1.4 montre l'espace des pores d'un grès de la mer du nord, obtenu par des mesures tomographiques.

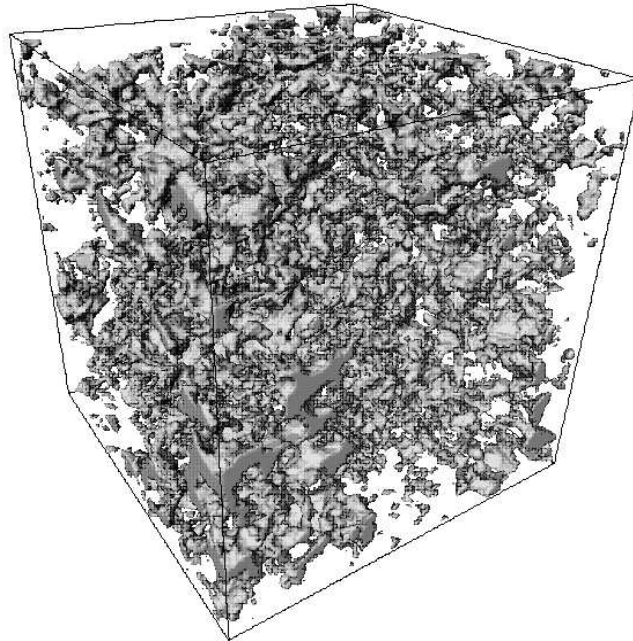


Figure 1.4- Espace des pores d'un grès de la mer du Nord (données Statoil).

## 2.1- La granulométrie

Un sol poreux est caractérisé par sa courbe granulométrique. En abscisse est portée les diamètres des grains, en ordonnée est portée le pourcentage en poids des grains.

L'analyse granulométrique se fait en général par tamisage à sec d'un échantillon de terrain au moyen d'une série de tamis à mailles différentes. Pour les particules très fine, on opère alors par lévigation qui est une méthode dont le principe est basé sur la formule de Stokes, donnant la vitesse de chute de la particule en fonction de son diamètre dans un liquide.

$$v = (1/18\mu) [\delta - w] d^2$$

$\delta$  : poids spécifique de la particule

$w$  : poids spécifique du liquide

$d$  : diamètre de la particule (sphérique dans le cas de la loi de Stokes)

$\mu$  : viscosité dynamique du liquide

La granulométrie à elle seule ne suffit pas à caractériser un terrain. Son comportement hydraulique dépend également et souvent de la forme des grains et de leur arrangement. Mais, il est pratiquement difficile de définir ces propriétés d'une façon quantitative.

## 2.2- La porosité

Le paramètre principal décrivant un milieu poreux est la porosité définie par :

$$\beta = V_p/V$$

$$V = V_p + V_g$$

$V_p$  : volume total des pores ou des vides

$V_g$  : volume total des grains

$V$  : volume total apparent du milieu poreux

Qui varie donc de 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide). Ce paramètre de porosité est complémentaire de la fraction volumique  $\phi$  telle que :  $\phi + \beta = 1$



En mécanique des sols, on utilise fréquemment la notion d'indice des vides défini par :  $\Theta = V_p/V_g$

$$\Theta = \beta/(1-\beta)$$

Par la suite, nous serons amenés à distinguer deux porosités différentes : la porosité géométrique (définie ci-dessus) et la porosité effective, dont la valeur est plus faible. En effet, il arrive que la saturation d'un terrain ne soit pas complète. La porosité effective correspond alors, au produit de la porosité géométrique et du degré de saturation.

- Porosité effective :  $\varepsilon = \beta \sigma$
- Degré de saturation :  $\sigma = V_l/V_p$

Où  $V_l$  : volume total occupé par le liquide

### 2.3- La transparence

La définition de la porosité est une définition tridimensionnelle. Elle peut être transposée à un rapport de surface. En effet, une coupe d'un échantillon poreux (un exemple est donné sur la fig. 1.5) montre une surface composée de deux phases.



Figure 1.5- Exemple de coupe d'un poreux (grès).

On définit alors la porosité surfacique (à deux dimensions) :  $\beta' = S_p/S$

En se basant sur des considérations d'ordre géométriques, CH. Slichter déduit la formule de la porosité de la roche fictive :

$$\beta = 1 - [\pi/[6(1-\cos\alpha)(1+2\cos\alpha)^{1/2}]]$$

Où  $\alpha$  est l'angle du losange représentant la face d'un rhomboèdre d'entassement. Cet angle caractérise la disposition de 8 sphères dont l'élément de base varie de  $60^\circ$  (entassement le plus compact), voir fig. 1.6a à  $90^\circ$  (entassement le moins compact), voir fig. 1.6b.

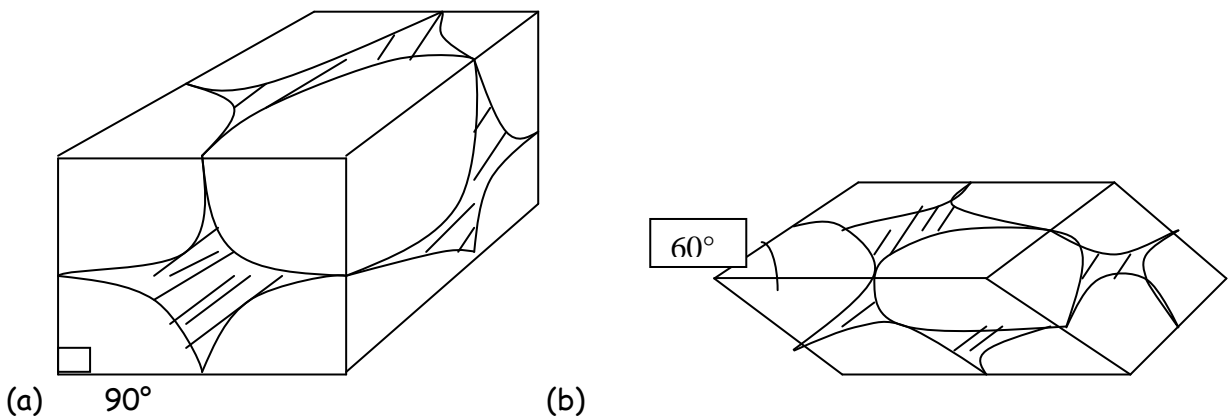


Fig. 1.6- Représentation d'un échantillon de terrain suite à l'entassement  
a) le moins compact  $90^\circ$  et b) le plus compact  $60^\circ$ .

La transparence de la face du rhomboèdre de base de la roche fictive est donné par :

$$\beta' = 1 - [\pi/(4 \sin\alpha)]$$

Les deux formules précédentes montrent que la porosité et la transparence de la roche fictive ne dépend du diamètre des sphères constituant cette roche. Elles sont en fonction du degré de compacité de l'entassement déterminé par l'angle  $\alpha$ .

## 2.4- Aire spécifique

La grande surface de la matrice solide est une caractéristique des milieux poreux. A partir d'un échantillon de volume  $V$ , on peut définir par  $S_i$  la surface interne des pores. L'aire spécifique d'un poreux est définie comme une dimension de l'inverse d'une longueur :

$$A_s = S_i/V$$

Les méthodes classiques de mesure d'aire spécifique sont :

- Adsorption d'un gaz
- Analyse de coupes.

## 2.5- Autres paramètres

La porosité et l'aire spécifique sont des propriétés macroscopiques pour le matériau poreux. Mais, d'autres paramètres peuvent être importants au niveau microscopique, en particulier quand un fluide circule dans l'espace des pores.

On peut citer la connectivité, qui caractérise le nombre de voisins pour un pore, la présence de bras morts (pores bouchés), ou encore la topologie du volume des pores. Le désordre géométrique est un caractère essentiel des milieux poreux. Cela empêche toute trajectoire en ligne droite incluse dans le volume des pores. On peut alors définir une tortuosité, qui représente le caractère non rectiligne des trajectoires.

## 2.6- Notion d'homogénéité - isotropie et anisotropie

Quelques réflexions sur l'application de cette notion au milieu terre, montre qu'elle est étroitement liée à l'échelle du plus petit volume élémentaire considéré. Ainsi par exemple, un massif de sable dont les grains les plus gros ont un diamètre de l'ordre du millimètre ne pourra certainement pas être homogène à l'échelle du millimètre cube. Par contre, il le sera à l'échelle du décimètre cube.

Dire d'un terrain perméable est homogène équivaut à dire qu'il présente en tous points dans une direction donnée la même résistance hydraulique à la filtration. Si de plus, cette résistance est la même quelque soit la direction, le terrain est dit isotrope. Dans le cas contraire, il est anisotrope. Dans son comportement par rapport à l'écoulement souterrain, un terrain a donc des propriétés géométriques qui se traduisent par les notions d'isotrope et anisotropie.

## 2.7- Passage de la roche fictive à la roche réelle

Pour que les formules trouvées pour la roche fictive soient applicables aux roches réelles, il faut choisir une dimension correspondant à la sphère du modèle de la roche fictive, et qui remplira la condition suivante : la résistance hydraulique à l'écoulement filtrant par la roche fictive doit être la même que la résistance hydraulique opposée par la roche réelle.

Le diamètre des sphères constitutives de la roche fictive satisfaisant à cette condition sera appelé diamètre effectif «  $d_{ef}$  ». Le passage de la roche fictive à la roche réelle consiste dans la détermination du diamètre effectif.

On détermine le diamètre effectif, en effectuant une analyse mécanique qui donne les caractéristiques par groupes de composition de la roche et indique le pourcentage de chaque fraction (courbe granulométrique).

Il existe plusieurs procédés pour déterminer le diamètre effectif, mais nous n'exposerons que deux :

- Procédé du poids de la particule moyenne où l'on emploie la formule suivante :

$$d_{ef} = \left[ \frac{\sum n_i d_i^3}{\sum n_i} \right]^{1/3}$$

Avec  $d_i$  : diamètre moyen des particules de n'importe quelle fraction et  $n_i$  : nombre de grains de n'importe quelle fraction.

- Procédé d'Allan Gassen, où le diamètre effectif correspond à la fraction en poids de 10%. Dans ce cas le coefficient d'homogénéité ( $d_o/d_{ef}$ ) ne doit pas être supérieur à 5 et  $d_o$  correspond au diamètre de la fraction en poids de 60%.

Le Procédé d'Allan Gassen est assez répandu. On suppose que  $0,01 \text{ cm} \leq d_{ef} \leq 0,3 \text{ cm}$ . Plus la forme des grains de la roche réelle s'approche de la sphère et plus on a l'homogénéité des particules et le modèle de la roche fictive acquiert une importance dans la détermination de  $d_{ef}$ .

En réalité les milieux poreux naturels sont très irréguliers. Les études théoriques et expérimentales de l'influence des dimensions de grain des matériaux poreux sur les dimensions des pores ont montré que les roches réelles sont constituées de grains dont la forme est parfois loin d'être sphérique.

Finalement il n'y a pas de procédé parfait de présentation du milieu poreux naturel sous la forme d'un système de sphère bien régulier (modèle de roche fictive). D'autre part, il est difficile de résoudre avec précision des problèmes de l'écoulement du fluide dans les milieux poreux à structure irrégulière.

## Chapitre 2

# Phénomènes de capillarité

---

### 1- Tension superficielle

On peut dire que sur la surface d'un liquide en équilibre s'exerce des forces dites : tension superficielles, d'origine moléculaire. La force tension superficielle est perpendiculaire à l'élément de longueur  $dL$ . Elle ne dépend donc que du liquide et de la longueur de l'élément d'où la loi de force tension superficielle est :

$$dF = \sigma dL$$

Où  $\sigma$  [N/m] est appelée tension superficielle dans le cas d'une interface liquide/gaz et tension interfaciale dans le cas d'une interface entre deux liquides non miscibles.

L'expérience montre que pour augmenter la surface d'une interface entre deux fluides d'une quantité  $dS$ , il faut fournir une énergie proportionnelle à  $dS$ .

$$dW = \sigma dS$$

L'exemple classique est un cadre dont l'un des côtés est mobile, trempé dans une solution savonneuse. On obtient alors un film liquide supporté par le cadre.

Si on relâche le côté mobile, on observe que les forces tensions superficielles rappellent le barreau de manière à diminuer la surface du film. Pour déplacer le barreau d'une quantité  $dL$ , il faut alors exercer une force  $F$  tel que le travail de cette force soit :

$$dW = F dL$$

qui soit égale au travail nécessaire pour augmenter les deux surfaces du film d'une quantité  $dS = L dL$  où  $L$  est la longueur du barreau.

$$dW = 2 \sigma L dL$$

Des deux relations précédentes, on en déduit la tension superficielle :  $\sigma = F/2L$

La tension superficielle dépend de la nature des deux fluides en contact et de la température (elle diminue presque linéairement lorsque la température augmente).

### 2- Notion de mouillabilité

L'expérience montre que le phénomène de mouillage peut être clarifié en considérant une goutte de liquide sur une lame de verre propre sèche et horizontale, voir fig. 2.

On observe que les interfaces liquide-solide, liquide-gaz et solide-gaz se réarrangent jusqu'à l'équilibre des trois tensions superficielles en jeu,  $dF_1$ ,  $dF_2$  et  $dF_3$ . La goutte prend alors une forme qui dépend de la nature des 2 fluides et du solide.

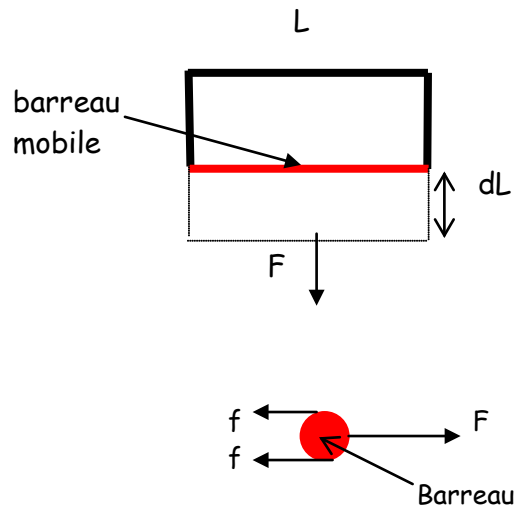


Figure 2.1- Expérience mettant en évidence les tensions de surfaces.

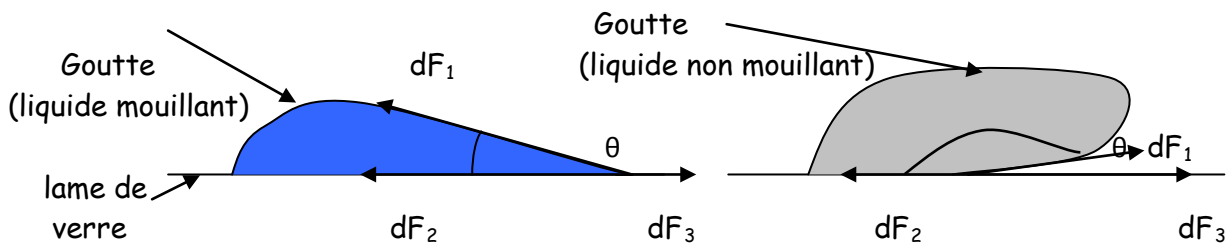


Figure 2.2- Comportement d'une goutte de liquide sur une lame de verre.

Déterminons l'angle  $\theta$  défini par les interfaces liquide-gaz et liquide-solide, en écrivant l'équilibre de la molécule de liquide soit :

$$\vec{dF}_1 + \vec{dF}_2 + \vec{dF}_3 = \vec{0}$$

La projection suivant l'horizontale donne :

$$dF_1 \cos \theta + dF_2 - dF_3 = 0$$

$$\cos \theta = (dF_3 - dF_2)/dF_1 = (\sigma_3 - \sigma_2)/\sigma_1$$

NB :

- pour  $0^\circ < \theta < 90^\circ \rightarrow$  les liquides sont mouillants
- pour  $90^\circ < \theta < 180^\circ \rightarrow$  les liquides sont non mouillants
- pour  $\theta = 0^\circ \rightarrow$  mouillement parfait
- pour  $\theta = 180^\circ \rightarrow$  mouillement imparfait.
- Pour  $\theta = 90^\circ \rightarrow$  neutre

### 3- Applications

#### 3.1- Notion de pression complémentaire

Dans les tubes capillaires, la déformation de la surface libre des liquides due aux forces de tension superficielles peut se traduire par l'apparition d'une pression complémentaire  $P_c$  sous ces surfaces. Cette pression dépend du liquide considéré, du gaz avec lequel il est en contact et du rayon de courbure moyen  $R_{moy}$  de la surface de séparation liquide – gaz.

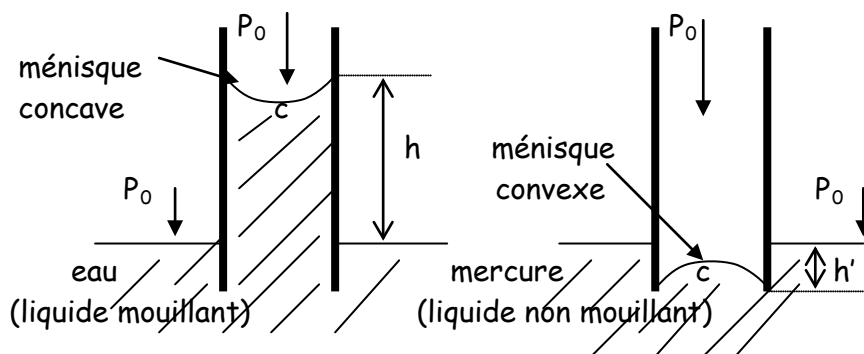


Figure 2.3- Expérience mettant en évidence la pression complémentaire

En équilibrant les forces de tension superficielles et de pression on aura sur la surface de forme sphérique :

$$P_c \pi R_{moy}^2 = 2\pi R_{moy} \sigma$$

$$P_c = 2 \sigma / R_{moy}$$

**Remarque:** Si le gaz n'est pas l'air atmosphérique on aura

$$P_c - P_{\text{gaz}} = P_c - P_o = + 2 \sigma / R_{\text{moy}} \text{ pour un ménisque convexe}$$

$$P_c - P_{\text{gaz}} = P_c - P_o = - 2 \sigma / R_{\text{moy}} \text{ pour un ménisque concave}$$

### 3.2- Loi de JURIN

Lorsque le rayon intérieur  $r$  d'un tube capillaire est inférieur à 1 mm environ, l'expérience montre que le liquide monte ou descend dans le tube quand il est partiellement plongé dans un liquide.

L'équilibre de la colonne liquide  $h$  est :

$$F_1 + F_2 + F_{\text{ts}} + Mg = 0$$

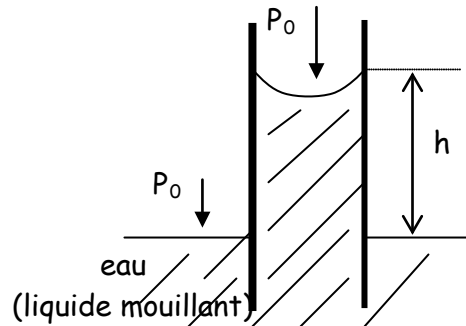
$$F_1 = F_2 = P_o \pi r^2$$

$$Mg = \pi r^2 \rho g h$$

$$F_{\text{ts}} = 2\pi r \sigma \cos \theta$$

En faisant la projection sur un axe vertical, on aura :

$$h = 2 \sigma \cos \theta / \rho g r$$



**Remarque:**

La valeur positive de  $h$  correspond à une ascension liquide

La valeur négative de  $h$  correspond à une descente liquide

La loi de Jurin permet de déterminer les tensions superficielles des liquides, leurs mouillabilités et les diamètres des tubes capillaires.

### 3.3- Loi de Laplace

Considérons une goutte de liquide de forme sphérique et de rayon  $r$  relié à un réservoir qui permet de maintenir l'intérieur de la goutte en surpression par rapport à l'extérieur. Supposons que l'on augmente la pression de manière à accroître le rayon de la goutte de  $dr$ . Soient  $P_i$  et  $P_e$  les pressions l'intérieur et l'extérieur de la goutte.

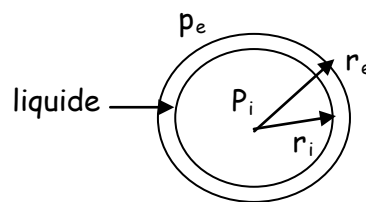


Figure 2.4- Formation d'une goutte

Le travail des forces de pression s'écrit alors :

$$dW = (P_i - P_e) dV = (P_i - P_e) 4\pi r^2 dr$$

Ce travail va aussi servir à accroître la surface de l'interface d'une quantité  $dS$  tel que :

$$dW = \sigma dS = \sigma 8\pi r dr$$

On obtient alors une relation :

$$P_i - P_e = 2 \sigma / r$$

Cette relation est une forme particulière de la loi de Laplace qui pour une surface de séparation quelconque entre deux fluides s'écrit :

$$P_i - P_e = \sigma (1/r_i + 1/r_e)$$

$r_i$  et  $r_e$  sont les rayons de courbures intérieur et extérieur de la goutte

Remarque :

Pour une bulle d'air (bulle de savon), elle présente deux interfaces liquide-gaz. Ainsi, on aura un facteur 4 qui apparaîtra dans la loi de Laplace :

$$P_i - P_e = 4 \sigma / r$$

## Chapitre 3

# Application des principes généraux de la mécanique à la mécanique des fluides en milieux poreux

Un problème de mécanique de fluide est résolu si l'on connaît en tout points de l'espace intéressé et à chaque instant la pression  $P$  dans le fluide, la masse volumique  $\rho$  et les composantes de sa vitesse  $u, v, w$  dans le système de variable Eulérien.

Pour les connaître nous allons écrire sous la forme propre au milieu poreux un certain nombre d'équations traduisant les principes fondamentaux de la mécanique.

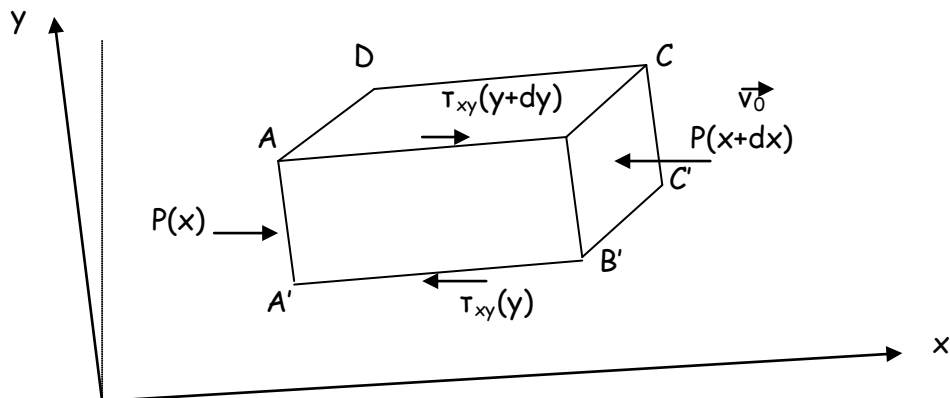
Nous retrouverons ainsi:

- Le principe de la conservation de masse.
- Le principe de la conservation du mouvement.
- L'équation d'état du fluide sujet au mouvement.
- La loi thermodynamique d'évolution du fluide.

### 1- Le principe de la conservation de la masse et l'équation de continuité

Soit un milieu poreux, dans le fluide en mouvement de forme parallélépipède  $dx, dy, dz$ .

Soit  $dm$  la variation masse de fluide contenue dans le parallélépipède. Au cours d'intervalle de temps  $dt$ , nous exprimons  $dm$  comme la somme algébrique des entrées et sorties du fluide à travers les différentes faces.



Taux de variation de la  
masse contenue dans le  
volume  $dx dy dz$

= Débit massique entrant  
dans le volume  $dx dy dz$

- Débit massique sortant  
du volume  $dx dy dz$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) = [(\rho u)_x - (\rho u)_{x+dx}] dy dz + [(\rho v)_y - (\rho v)_{y+dy}] dx dz + [(\rho w)_z - (\rho w)_{z+dz}] dx dy$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy dz - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dx dy dz$$

On divise par  $dx dy dz$

$$\text{D'où } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0$$

$$\text{Ou encore } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0$$



## 2- Le principe de la conservation du mouvement

En effectuant un bilan de forces sur un élément de volume, en considérant :

- Ecoulement de fluide Newtonien entre 2 plaques // planes dans le plan xz distante de h inclinée par rapport à l'horizontale.
- La plaque inférieure (y=0) fixe et la plaque supérieure (y=h) animée d'une vitesse cte  $u_0$  // à ox.
- On suppose le fluide ayant les propriétés physiques constantes.
- L'écoulement est unidirectionnel ayant le mouvement établi, c'est-à-dire que le profile de vitesse est invariant suivant ox.

Le bilan des forces suivant ox sur un élément de volume dx dy dz fait apparaître :

- Les forces de pression s'exerçant sur la face AA'DD' :  $P(x) dydz$
- Les forces de pression s'exerçant sur la face BB'CC' :  $-P(x+dx) dydz$
- Les forces de viscosité s'exerçant sur la face A'B'C'D' :  $-\tau(y) dx dz = -\mu \partial v / \partial y dx dz$
- Les forces de visc. s'exerçant sur ABCD:  $\tau(y+dy) dx dz = \mu \partial v / \partial y dx dz + \mu \partial^2 v / \partial y^2 dx dz dy$
- Les forces de gravité s'exerçant au centre du volume :  $-pg_x dx dz dy$

En appliquant la loi fondamentale de la mécanique (loi de Newton) à l'élément de fluide dx dy dz :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

$$\rho dx dy dz \partial v / \partial t = -\partial P / \partial x dx dy dz + \mu \partial^2 v / \partial y^2 dx dz dy - pg_x dx dz dy$$

$$\text{ou encore } \rho \partial v / \partial t = -\partial P / \partial x + \mu \partial^2 v / \partial y^2 - pg_x \quad (*)$$

La généralisation de cette équation aux écoulement tridimensionnels est obtenue d'une part en remplaçant la dérivée de v par rapport à la coordonnée de l'espace par le Laplacien de v et d'autre part, en écrivant l'équation (\*) pour chacune des coordonnées des composantes du vecteur vitesse.

On retrouve ainsi les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } P + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

$\rho \frac{dv}{dt} = \rho (\partial v / \partial t + v \text{ grad } v)$  : représente les forces d'inertie

grad P : représente les forces de pression

$\mu \Delta v$  : représente les forces de viscosité

$\rho g$  : représente les forces de pesanteur

La résolution d'un problème de mécanique des fluides nécessite outre l'intégration des équations du mouvement, la connaissance des conditions initiales et aux limites.

Les conditions initiales se résument à la connaissance du champ des fonctions  $v_i$ , P,  $\rho$  à l'instant  $t=0$ .

Les conditions aux limites sont de deux types :

- Liquide-solide (paroi d'une conduite par exemple) :

$$v_{\text{fluide}} = v_{\text{solide}} \text{ (adhérence du fluide à la paroi)}$$

- Liquide-liquide (écoulement diphasique par exemple) : Il faut exprimer la continuité à l'interface des vitesses et contraintes de cisaillement.

$$v_{\text{fluide1}} = v_{\text{fluide2}}$$

$$[\mu \partial u / \partial y]_{\text{fluide1}} = [\mu \partial u / \partial y]_{\text{fluide2}}$$

### 3- L'équation d'état du fluide et la loi thermodynamique d'évolution.

L'équation d'état du fluide est de la forme :

$$f(P, \rho, T) = 0$$

L'introduction de la nouvelle inconnue qui est la température  $T$  nécessite une loi thermodynamique d'évolution de fluide qui peut être adiabatique, isotherme, ou poly tropique mais se traduit de toute manière par :

$$g(P, T) = 0$$

Les deux équations ci-dessus représentent une équation à l'égard de nos 5 inconnues pour 5 équations.

Nous adoptons une équation d'état restreinte à l'isothermie de la forme:

- Pour les liquides :

$$\rho = \rho_0 \exp\{C_t (P - P_0)\}$$

Susceptible d'être remplacé par :  $\rho = \rho_0 \{1 + C_t (P - P_0)\}$  dans le cas de petites variations de pression.

- Pour les gaz on aura :

$$\rho = bP$$

Avec  $b = M/ZRT$

$M$  étant la masse moléculaire,  $Z$  est le facteur de compressibilité et  $R = 8,315 \cdot 10^7$  dans C.G.S

### 4- La loi d'évolution thermodynamique dans un milieu poreux et l'équation de continuité

L'extrême division du milieu poreux et son énorme capacité calorifique font que les écoulements sont pratiquement toujours isothermes, prouvé d'ailleurs par les mesures de température effectuées dans les sondages au cours de l'exploitation de certains gisements. Par contre, l'écriture de l'équation de continuité subira quelques modifications.

Reprenons le parallélépipède  $dx \, dy \, dz$ , mais cette fois-ci non plus dans le fluide, mais dans le milieu poreux.

Si les dimensions  $dx, dy, dz$  sont d'un ordre de grandeur supérieur à celui de la dimension des pores, nous concevons l'existence d'une vitesse moyenne sous réserve que le milieu poreux soit macroscopiquement homogène et isotrope, et nous aurons :

$$\partial/\partial x (\beta \rho u) + \partial/\partial y (\beta \rho v) + \partial/\partial z (\beta \rho w) = - \partial/\partial t (\beta \rho)$$

$\beta$  désignant la porosité du milieu poreux considéré comme constante dans le parallélépipède et sur ces faces.

- dans le 1<sup>er</sup> membre de l'équation : il apparaît comme coefficient de réduction de la surface pour le calcul du flux.

- dans le 2<sup>ém</sup> membre : il apparaît comme coefficient de réduction du volume occupé par le fluide.

L'équation précédente sous la forme vectorielle s'écrira :  $\text{div} (\beta \rho \vec{v}) = - \partial/\partial t (\beta \rho)$

### 5- Application des équations de Navier et Poisson à quelques cas particuliers

- But : adapter les équations de Navier et Poisson au milieu poreux.
- Hypothèses: en raison de la faiblesse des vitesses, les forces d'inerties sont négligeables. Les vitesses étant très faibles, alors leurs variations dans l'espace et dans le temps est également très faibles.

et donc :  $du/dt = 0$ ,  $dv/dt = 0$  et  $dw/dt = 0$

Ainsi la divergence :  $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$

Les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$1/\rho (\partial P/\partial x) = X + \mu/\rho \Delta u$$

$$1/\rho (\partial P/\partial y) = Y + \mu/\rho \Delta v$$

$$1/\rho (\partial P/\partial z) = Z + \mu/\rho \Delta w$$

Malgré les simplifications, le problème reste analytiquement impossible à résoudre. Certains cas simples peuvent cependant être étudiés, ce qui nous éclairera sur ce qui arrive dans les cas les plus complexes.

Etudions en particulier le mouvement parallèle isotherme et permanent d'un fluide visqueux incompressible sans action des forces extérieures.

L'équation d'état se réduit ici à  $\varphi(\rho, T) = 0$ .

La loi thermodynamique donne  $T = \text{cte}$ .

On a  $\rho = \text{cte}$  et nous n'avons donc que 4 inconnues ( $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ).

Comme le mouvement est permanent et parallèle à l'axe  $OX$ , l'équation de continuité devient alors :  $\partial u/\partial x = 0$

Les équations de Navier et Stokes se réduisent alors :

$$1/\rho (\partial P/\partial x) = \mu/\rho (\partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2)$$

$$1/\rho (\partial P/\partial y) = 0$$

$$1/\rho (\partial P/\partial z) = 0$$

La pression est fonction de la seule abscisse  $x$  et on peut écrire:  $dP/dx = \mu (d^2u/dy^2 + d^2u/dz^2)$

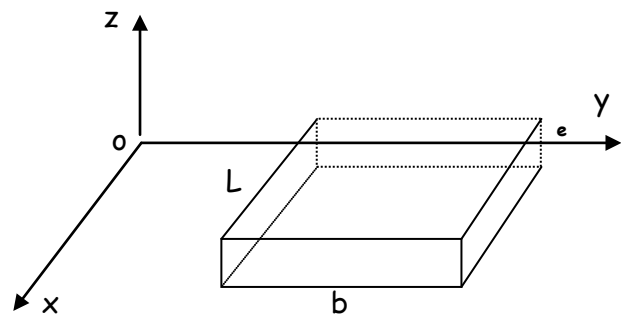
Précisons les conditions aux limites :

- a- Supposons que l'écoulement dans une fissure d'épaisseur  $e$  (suivant  $Oz$ ), indéfiniment étendu suivant l'axe  $oy$ , et sur une longueur  $L$  de l'axe  $ox$ .

Les pressions étant :

$$\text{Pour } x = 0 \rightarrow p = p_1$$

$$x = L \rightarrow p = p_2 \quad (p_2 < p_1)$$



Dans ce cas la vitesse ne dépend que de  $z$ , d'où l'équation est remplacée par :

$$dp/dx = \mu (d^2u/dz^2)$$

Comme  $x$  et  $z$  sont deux variables indépendantes, et pour s'assurer de l'égalité, il faudra que les 2 termes soient égaux à la même constante :

$$dp/dx = A \quad \text{et} \quad \mu (d^2u/dz^2) = A$$

- La première équation s'intègre en donnant :  $P(x) = Ax + B$

$$x = 0 \rightarrow P = P_1 \quad \text{et} \quad x = L \rightarrow P = P_2$$

D'où  $P(x) = P_1 - [(P_1 - P_2)/L] \cdot x$

- La deuxième équation s'intègre en donnant :  $u(z) = (1/2\mu) A z^2 + Cz + D$

Comme pour  $z = \pm e/2 \rightarrow u = 0$

Ceci revient à  $u = - (1/2\mu) A (e^2/4 - z^2)$

D'où  $u(z) = (1/2\mu) (P_1 - P_2)/L (e^2/4 - z^2)$

Calculons le débit à travers la fissure pour une largeur  $b$  :

$$q = 2 \int_0^{e/2} b u(z) dz$$

$$q = b e e^2 / (12 \mu) (P_1 - P_2) / L$$

- Si n fissures existe sur une hauteur  $h$  de terrain par ailleurs compact.

La porosité est donc :  $\beta = n e b / (h b) = ne/h$

Avec  $S = b h$  section totale du terrain

$Q = nq$  étant le débit.

Alors  $Q = S \beta e^2 / (12 \mu) (P_1 - P_2) / L$

Les équations de Navier et Stokes conduisent alors à :

- Le débit  $Q$  est proportionnel à la section  $S$  et à  $(P_1 - P_2)/L$
- Le débit  $Q$  est inversement proportionnel à la viscosité.
- Le coefficient de proportionnalité est :  $\beta e^2 / 12$

**b** – Supposons que l'écoulement se fait dans un tube circulaire de rayon  $r$ .

Alors nous transformerons que le deuxième membre en coordonnées polaires. La symétrie de révolution fait disparaître l'angle polaire pour ne conserver que la distance radiale  $r$ , on aura donc :

$$dP/dx = \mu ( du^2/dr^2 + 1/r du/dr )$$

L'intégration conduit à l'équation de Poiseuille :  $q = \pi r^4 / (8 \mu) (P_1 - P_2) / L$

Pour le cas de notre milieu poreux formé par  $n$  canaux circulaires de rayon  $r$  tous parallèle à une porosité :  $\beta = n \pi r^2 / S$

Et un débit  $Q = n q$

D'où  $Q = S \beta r^2 / (8 \mu) (P_1 - P_2) / L$

Même conclusion que précédemment sauf que le coefficient de proportionnalité est  $\beta r^2 / 8$  au lieu de  $\beta e^2 / 12$ .

Ces résultats suggèrent que pour une tranche de milieu poreux quelconque de section  $S$  traversée normalement à la section par un fluide incompressible de viscosité  $\mu$  sous l'effet d'un gradient de pression  $dP/dx$  aura un débit  $q$  tel que :

$$q = S k / \mu (dP/dx) \dots\dots\dots(*)$$

Ce résultat n'est autre que celui auquel ont conduit les expériences de Darcy.

## Chapitre 4

# Loi de filtration linéaire : loi de Darcy

---

### 1- Expérience du perméamètre

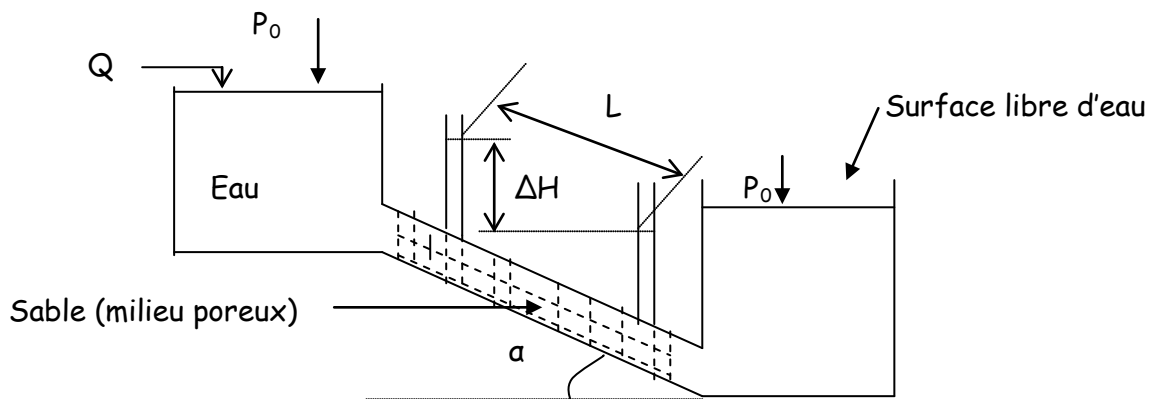


Fig. 4.1- Expérience du perméamètre

La vitesse apparente de filtration définie par  $v = Q/S$ , ne représente pas la véritable vitesse de l'eau dans les petits tubes capillaires entre les particules de sable.

Dans la figure 4.1, nous avons l'écoulement d'un liquide (eau) à travers un milieu poreux (sable) du réservoir supérieur vers le réservoir inférieur par gravitation. Le liquide remonte dans les tubes manométriques à des niveaux décroissants qui s'alignent sur une droite (ligne piézométrique). Si la sable est assez fin, l'expérience montre que le débit de l'appareil (perméamètre) est proportionnel à la pente de cette droite, tant que celle-ci ne soit pas trop forte.

$$Q = a \Delta H/L$$

L'inclinaison du tube ne modifie en rien la relation précédente.

Si nous utilisons des tubes de sections différentes, mais contenant du sable identique, les débits correspondants à une même pente des niveaux piézométriques sont proportionnels à la section  $S$  du perméamètre.

$$Q = b S$$

La forme de cette section est sans influence.

On peut résumer les constantes précédentes à la formule empirique :

$$Q/S = (a/S) \Delta H/L$$

Où

$$v = K_f J$$

C'est la loi du perméamètre ou la loi de Darcy.

$J$  : pente hydraulique

$K_f$  : Constante qui dépend du milieu poreux et le liquide filtrant. Elle est définie par Porchet (1935) comme une vitesse de filtration par unité de pente hydraulique et souvent désignée par le coefficient de filtration.

$\Delta H$  : perte de charge linéaire donnée par :  $\Delta H = H_1 - H_2$

$$H_1 = P_1/\rho g + z_1$$

$$H_2 = P_2/\rho g + z_2$$

En négligeant les termes de vitesses ( $v^2/2g$ ) à cause de la très faible vitesse d'écoulement. Dans le cas d'une couche horizontale, ( $\Delta z = 0$ ), la loi de Darcy s'écrit :

$$v = (K_f / \rho g) \Delta P / L$$

La loi Darcy ou loi de filtration linéaire, traduit la proportionnalité entre la vitesse de filtration, le gradient de pression sous les conditions suivantes :

- Le milieu poreux est constitué de grains fins ou que les canalicules soient assez étroites.
- Le gradient de vitesse ou le gradient de pression soit faible

## 2- Perméabilité du milieu poreux

Des travaux analytiques ont été entrepris pour confirmer la validité de la loi de Darcy établit expérimentalement. En effet, Slichter étudia le mouvement des filets de fluide élémentaires entre les sphères de la roche fictive et déduit la formule suivante :

$$v = \frac{\beta^{12}}{96(1-\beta)} \frac{d_{ef}^2}{\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

Où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide

D'autres formules ont été proposées, elle ne diffèrent que par le terme :

$$\gamma = \frac{\beta^{12}}{96(1-\beta)} = f(\beta)$$

Ainsi par la généralisation des différentes formules exprimant la proportionnalité entre la vitesse de filtration et la grandeur  $\Delta P/L$  on aura :

$$v = \gamma(\beta, \varepsilon) \frac{d_{ef}^2}{\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

Où  $\gamma$  est un facteur qui dépend du milieu poreux (particules constitutives) et de la rugosité de la surface des milieux poreux et  $\varepsilon$  la rugosité du milieu poreux.

En 1929, Nutting introduit la notion du coefficient de perméabilité qui représente la propriété du milieu poreux d'être traversé par un fluide:

$$K = d_{ef}^2 \gamma(\beta, \varepsilon)$$

En partant de la notation précédente, la vitesse de filtration sera :  $v = \frac{K \Delta P}{\mu L}$

Nous pouvons obtenir la relation existante entre les coefficients de filtration et de perméabilité, en égalant les équations telles que :

$$\frac{K}{\mu} = \frac{K_f}{\rho g}$$

En multipliant l'équation de la vitesse de filtration par la section transversale de l'échantillon d'un milieu poreux, nous obtenons l'expression de la perméabilité.

$$K = \frac{Q\mu}{S} \frac{L}{\Delta P}$$

Elle représente la perméabilité d'un échantillon de 1cm de longueur et de 1 cm<sup>2</sup> de section par laquelle on fait passer un débit de 1 cm<sup>3</sup>/s de fluide de viscosité dynamique en (cp<sub>o</sub>) sous un gradient de pression ΔP en (atm).

**Remarque :** Dans le système C.G.S, la perméabilité est exprimée en Darcy, alors que dans le système M.K.S.A ou (S.I) la perméabilité est exprimée en m<sup>2</sup>.

### 3- Equation de Darcy

Reprenant les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement isotherme et permanent d'un fluide incompressible suivant la direction Oz. En conservant la pesanteur, nous aurons :

$$1/\rho (\partial P/\partial x) = 0$$

$$1/\rho (\partial P/\partial y) = 0$$

$$1/\rho (\partial P/\partial z) = -g + \mu/\rho \Delta w$$

On voit que la force joue le même rôle que le gradient de pression. L'équation ( dP/dz = μ Δw) est transformée en équation (dP/dz + ρg = μ Δw ).

Si on intègre à partir de dP/dz + ρg = A on aura P = (Az - ρgz) + B ou alors P + ρgz = Az + B

Or P + ρgz = φ donc φ = Az + B sous la forme précédente.

Le rôle de la pression est joué par le potentiel φ.

Pour un écoulement à travers un milieu poreux de coefficient de perméabilité constant K, on aura d'après l'équation (\*)

$$q = S k/\mu (\varphi_1 - \varphi_2)/L$$

C'est-à-dire

$$q = S k/\mu [(P_1 + \rho g z_1) - (P_2 + \rho g z_2)]/L$$

Comme P<sub>1</sub> = ρgh<sub>1</sub> et P<sub>2</sub> = ρgh<sub>2</sub>

On voit bien que

$$\varphi_1 = \rho g h_1 + \rho g z_1 = \rho g H_1$$

$$\text{et } \varphi_2 = \rho g h_2 + \rho g z_2 = \rho g H_2$$

et par conséquent

$$q = S k/\mu \Delta P/L = S k/\mu (\rho g \Delta H)/L = S k_f \Delta H/L$$

Conformément à la conclusion de Darcy, le débit est proportionnel à la différence de charge hydrostatique entre l'entrée et la sortie.

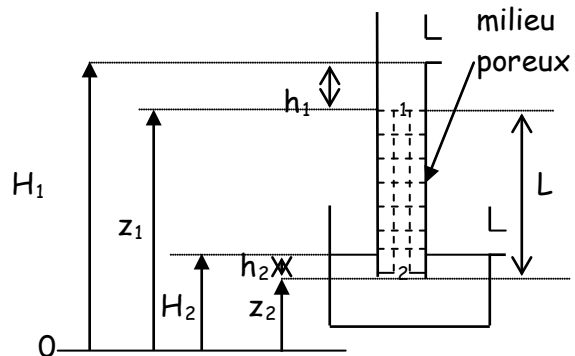


Figure 4.2- Illustration de milieu poreux

#### 4- Conductivité hydraulique d'un milieu poreux stratifié

La conductivité hydraulique est équivalente à la perméabilité géométrique. Soit un système stratifié composé de n couches de matériaux différents. Soit  $b_i$  l'épaisseur de chaque couche  $i$ , et  $K_i$  sa conductivité hydraulique :

1- Quand, l'écoulement s'effectue suivant la verticale fig. 4.3a :

Le débit par unité de surface traverse en série les différentes couches. Soit  $\Delta h_i$ , la perte de charge dans la couche  $i$ . D'après la loi Darcy, on aura :

$$Q_i = K_i \Delta h_i / b_i \quad \text{or} \quad Q_i = Q$$

$$\text{D'où} \quad Q = K_i \Delta h_i / b_i \quad \text{ou alors} \quad \Delta h_i = Q b_i / K_i$$

$$\text{Donc} \quad \Delta h = \sum \Delta h_i = \sum Q b_i / K_i = Q \sum b_i / K_i$$

Il est possible de définir pour tous le système, un coefficient équivalent de conductivité hydraulique verticale  $K_v$  tel que :

$$Q = K_v \Delta h / L = K_v \Delta h / b$$

En égalant les deux valeurs de  $\Delta h$  et compte tenu de  $L = b = \sum b_i$  on aura alors :

$$1/K_v = 1/b \sum b_i / K_i \quad \text{ou} \quad K_v = b / [\sum b_i / K_i]$$

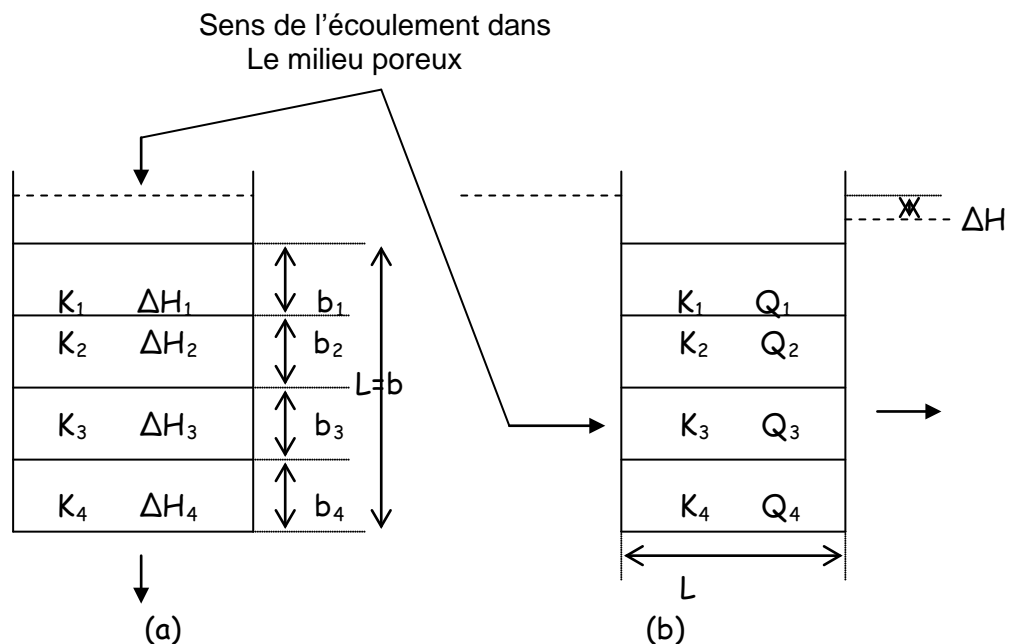


Fig. 4.3- Conductivité hydraulique équivalente dans un milieu poreux

2- Quand, l'écoulement s'effectue dans le sens horizontal voir fig. 4.3b :

Dans chaque couche passe un débit par unité de largeur  $Q_i = b_i K_i \Delta h / L$

Le débit total sera :  $Q = \sum Q_i = \sum b_i K_i \Delta h / L$

Définissons pour l'ensemble un coefficient équivalent de conductivité hydraulique tel que :

$$Q = K_h b \Delta h / L \quad \text{ou alors} \quad K_h = 1/b (\sum b_i K_i)$$

**Remarque :**  $K_h > K_v$  sauf dans les roches fracturées.



## 5- Transmissivité

Dans une nappe aquifère d'épaisseur  $b$  et de longueur  $L$ , le débit écoulé suivant la loi Darcy est :  
 $Q = K b I \Delta h/L = K b I J$ .

On appelle transmissivité  $T$ , le produit  $K b$  ; tel que

$$T = K b \quad [m^2/s]$$

Si la conductivité hydraulique  $K$  varie le long de l'épaisseur  $b$  de la nappe aquifère, la transmissivité sera :  $T = \int_0^b K dz$

## 6- Limites d'application de la loi de DARCY

En transformant la formule du nombre de Reynolds définie pour l'écoulement dans une conduite cylindrique pour l'adapter aux conditions de filtration à travers la roche parfaite, ensuite passa à la roche réelle, Pavlovsky proposa la formule du Reynolds.

$$R_e = 1 / (0,75 \beta + 0,23) v d_{ef} / \nu$$

Où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

D'après l'expérience, le nombre de Reynolds limite dans ce cas est d'environ,  $R_e = 7,5$  à  $9$ . Ainsi, si  $R_e$  est inférieur à la valeur limite, la loi de Darcy est respectée, par contre, si  $R_e$  est supérieur à la valeur limite, la loi de Darcy n'est pas respectée.

D'autres auteurs proposeront des formules tenant compte de la dépendance entre le coefficient de frottement unitaire  $\lambda$  et le nombre de Reynolds  $R_e$ .

$$\lambda = d_{ef} / (2 \rho v^2) (\Delta P/L)$$

$$R_e = v d_{ef} / \nu$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du fluide.

Mais, vu les divers procédés de calculs du  $d_{ef}$  cela a entraîné la non commodité de la formule pour le calcul de  $R_e$ .

Stchelkatchev fut le premier à proposer une formule de  $R_e$  commode à utiliser dans les travaux de prospection et d'exploitation des gisements de pétrole et de gaz en supposant que  $(\beta, \varepsilon)$  ne dépendent que de la porosité  $\beta$  et introduira la valeur de  $d_{ef}$  dans la formule de Pavlovsky, ce qui donne :

$$R_e = 1/(0,75 \beta + 0,23) (v/\mu \beta') \{ 96 (1- \beta) k \}^{1/2}$$

Et ensuite établit l'égalité suivante :

$$\{ 96 (1- \beta) \}^{1/2} / [\beta' (0,75 \beta + 0,23)] \approx 10/\beta^{2,3}$$

D'où l'équation devient :

$$R_e = (10/\beta^{2,3}) (v k^{1/2} / \nu)$$

Plutard, Minsky trouvera une relation liant le coefficient de frottement unitaire et le nombre de Reynolds de la forme :

$$\lambda = d_{ef}^2 / (2k R_e) + (c_1/\beta) \{ d_{ef}/k \}^{1/2}{}^3$$

Où  $c_1 = 5 \cdot 10^{-5}$  à  $6 \cdot 10^{-5}$

Alors que  $R_e$  et  $\lambda$  sont donnés par les équations

En portant les valeurs de  $\lambda$  et  $R_e$ , on obtient :

$$\Delta P/L = (\mu/k) v + (2\rho d_{ef}^2 c_1)/(\beta (\sqrt{k})^3) v^2$$

**Remarque:** Si on néglige le 2<sup>ème</sup> terme dans l'équation précédente, on retrouve la loi de Darcy.

La cause de la non validité de la loi de Darcy au-delà d'un certain nombre de Reynolds a été très discutée. La question que l'on se pose est la suivante: est ce que la violation de la loi de Darcy dans le milieu poreux est accompagnée d'une perturbation de l'écoulement laminaire ?

En 1933, Les expériences de Lindquist dans le domaine des écoulements de filtration montrent l'effet des forces d'inertie. En effet, l'écoulement de filtration à travers un milieu poreux formé de sphères de verre de 27 mm de diamètre permettant d'observer directement la turbulence.

Les lignes de courant observées étant très nettes et stables jusqu'à un nombre de Reynolds critique de l'ordre de 60, alors que la loi de Darcy se trouvait en défaut à partir du Reynolds limite  $R_e = 5$ . Le même essai réalisé sur un milieu poreux formé de grains anguleux (fig. 4.6) on montrés que la turbulence apparaissait à peu près à la même valeur de  $R_e$ , mais que la déviation par rapport à la loi linéaire était plus marquée et se manifestait dès que le Reynolds limite était supérieur à 2. Ceci correspond donc à une importance plus grande des effets d'inertie.

L'explication théorique de l'action des forces d'inertie est la suivante: les forces de frottements visqueux qui agissent sur le fluide dépend, ainsi de la répartition des vitesses ( $\tau = \mu \text{ du/dy}$ ). Or, il est évident que cette répartition est modifiée par l'inertie lorsque la vitesse augmente. Cette modification correspond à une augmentation des efforts visqueux et partant à un accroissement de l'énergie dissipée, L'effet d'inertie se fait sentir graduellement, ce qui explique l'absence de toute singularité dans la courbe des pertes de charge (fig. 4.4a).

Finalement, il n'y a pas proprement parlé de limite de validité de la loi de Darcy. Cette loi est une excellente approximation pour les faibles nombres de Reynolds pour lesquelles, l'effet de force d'inertie est négligeable. Mais, lorsque la vitesse augmente, cette approximation devient de moins en moins bonne. Le nombre de Reynolds limite est donc mal défini. Il faut le considérer comme la limite au-delà de laquelle, on commet une erreur supérieure ou égale à un % donné en admettant la loi de Darcy.

## 7- Lois non linéaires de la filtration

Si la loi de Darcy n'est pas applicable, on utilise des lois non linéaires de filtration. On a parfois estimé que celle-ci devait être remplacée par des lois non linéaires à un terme ou deux termes de la forme:

$$J = a v + b v^2 \quad \text{ou}$$

$$J = a v^n \quad \text{avec } 1 < n < 2$$

Ce qui revient à admettre en somme, que le régime cesse d'être laminaire. Il est donc normal que la validité de la formule de Darcy dépende essentiellement du nombre de Reynolds de l'écoulement considéré. En particulier, la loi de l'écoulement va dépendre de la vitesse réelle du liquide dans les interstices capillaires entre les particules du sol (donc de la vitesse apparente et de la porosité), de la dimension des pores (structure du sol) et de la viscosité (Nature du liquide et sa température).

Pour les valeurs supérieures de Reynolds, le régime d'écoulement tend à devenir turbulent et correspond à des lois de type puissance ou polynomiale. La transition entre le régime laminaire de la loi de Darcy et le régime en pleine turbulence correspondant à une loi de la forme  $J = a v^2$  s'effectue progressivement.

Des études expérimentales ont montré en effet, que dans la zone de transition comprise approximativement entre  $4 \leq Re \leq 60$ , les forces d'inertie et les forces de viscosité interviennent simultanément. On n'observe pas la brusque discontinuité sur les courbes  $f(Re)=\lambda$  (fig. 4.4b), caractéristique du changement de régime que l'on observe par exemple dans les conduites. Ceci provient du fait que dans le sol ou dans le milieu poreux homogène, l'écoulement est sans doute uniforme dans l'ensemble, mais ne l'est pas du tout au niveau des canalicules entre les particules: les espaces entre les grains constituent en effet, une succession d'élargissement et de rétrécissement brusques. L'écoulement n'est donc pas semblable à celui d'un tube de section rectiligne.

En définitive, la loi de Darcy peut être considérée comme valable en première approximation; mais il ne faut pas perdre de vue, les hypothèses sur lesquelles elle est fondée : Ecoulement laminaire, unicité du fluide, uniformité, continuité et isotropie du milieu.

(a)

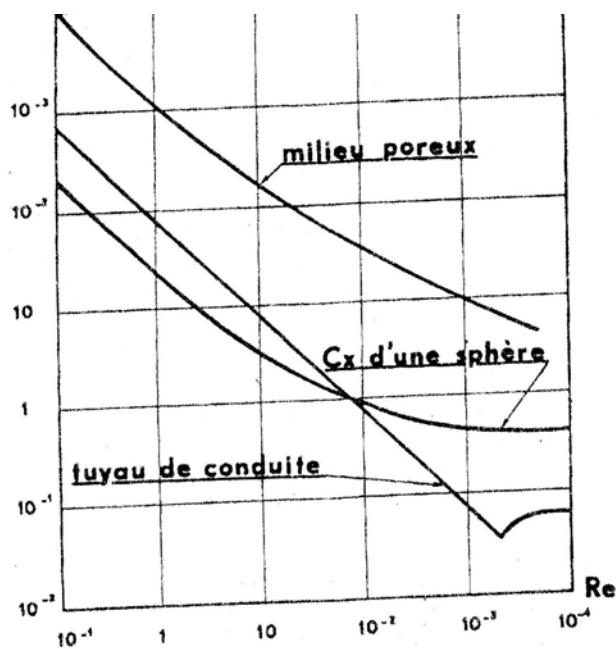


FIG. 4

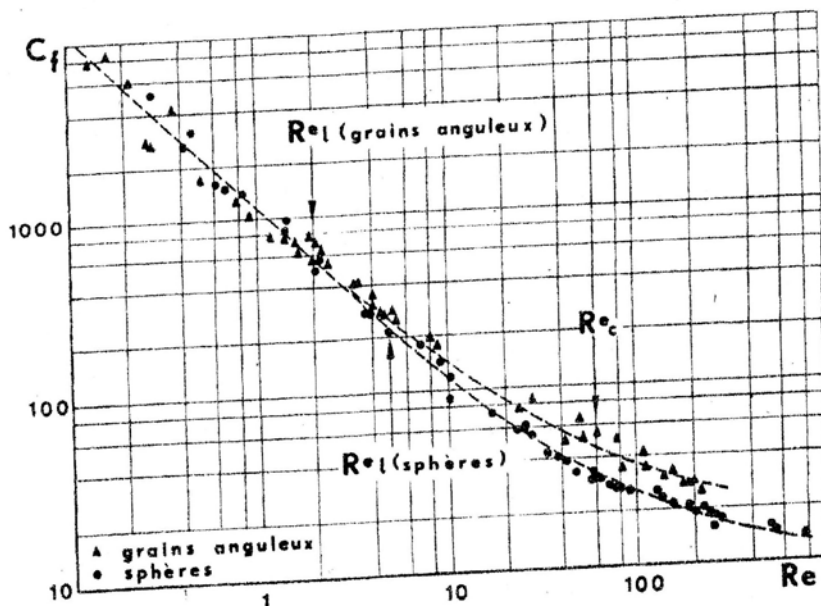


FIG. 5

(b)

Figure 4.4- Evolution du coefficient de frottement en fonction du Reynolds. (a) entre conduite et milieu poreux. (b) : dans un milieu poreux artificiel anguleux et sphérique.

## 8- Effet d'inertie

La loi Darcy à l'échelle de l'échantillon a été formulée empiriquement à partir d'expériences à faibles débits en milieux poreux. Cette loi est mise en défaut dans le cas des écoulements rapides à cause des effets d'inertie. Dans cette partie, nous présentons l'extension de la loi Darcy pour prendre en compte ces effets.

Nous allons tout d'abord montrer comment les effets d'inertie se traduisent en terme de relation pression débit et expliquer ensuite l'origine de ces effets en examinant la physique des écoulements à l'intérieur des pores.

### 8.1- Manifestation des effets d'inertie à l'échelle de l'échantillon

Pour illustrer la limite de validité de la loi Darcy à cause des effets d'inertie, nous considérons les résultats de mesures des pertes de pression en fonction des vitesses présentés sur la figure 4.5.

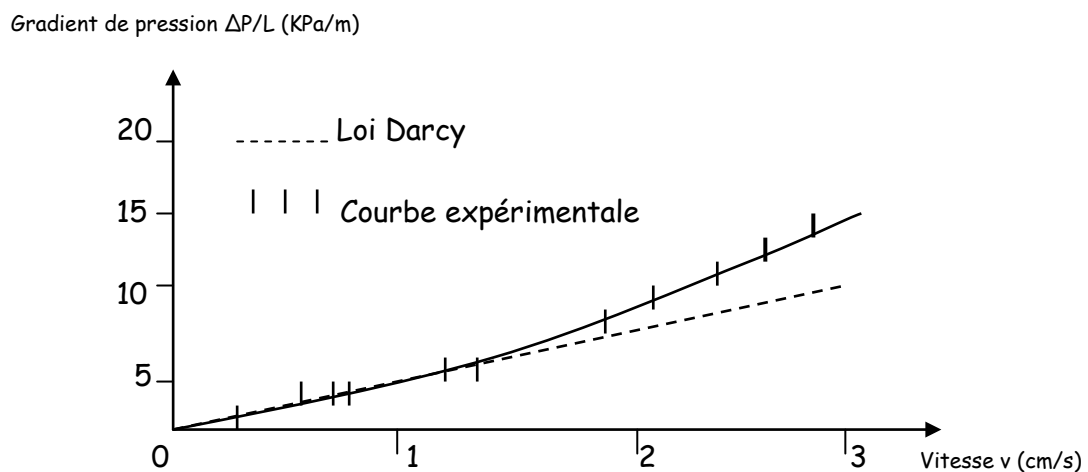


Figure 4.5- Manifestation des effets d'inertie à l'échelle de l'échantillon

Ces résultats ont été obtenus à partir d'expériences de l'écoulement horizontal d'eau (pas d'effets de gravité) à travers un milieu poreux de forme cylindrique de longueur 30 cm et de diamètre 5 cm, constitué de sable quartz de 3 mm de diamètre environ.

Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec la loi Darcy. En revanche, au fur et à mesure que la vitesse augmente, on observe un écart par rapport à cette dernière.

La relation la plus couramment utilisée pour décrire les écoulements rapides en milieu poreux est celle formulée empiriquement par Forchheimer en 1914.

$$\Delta P/L = \mu/K v + \alpha \rho v^2$$

$\alpha$  représente le coefficient d'inertie ayant la dimension de l'inverse de la longueur.

La relation de Forchheimer stipule que la perte de pression occasionnée par un écoulement à fort débit en milieu poreux est le résultat de la contribution d'un terme en  $v$  dus aux effets de viscosités et d'un terme en  $v^2$  dus aux effets d'inertie.

Remarque : Pour les faibles vitesses, le terme d'inertie est négligeable devant le terme de viscosité et la loi de Forchheimer se réduit à celle Darcy.

## 8.2- Equation locale avec effet inertiel

La forme locale de la loi Forchheimer s'écrit :  $-\partial P/\partial x = \mu/k v + \alpha \rho v^2$

Cette équation peut aussi se mettre sous une forme adimensionnelle en utilisant le nombre de Reynolds :

$$R_e = \rho d/\mu v$$

En milieu poreux, la vitesse utilisée dans le Reynolds représente la vitesse interstitielle telle que :

$$v = Q/(\beta S)$$

La dimension caractéristique de l'échelle des pores nécessaire du Reynolds est :

$$d = K_d^{1/2}$$

Où  $K_d$  est la perméabilité du milieu dans le régime de Darcy, c'est-à-dire le régime où la perte de pression est proportionnelle à la vitesse de filtration.

En effet, on aura

$$R_e = \rho K_d^{1/2}/\mu Q/(\beta S)$$

Finalement, l'équation de Forchheimer s'écrit :

$$-\partial P/\partial x = \mu/k_d v [ 1 + B R_e ]$$

avec  $B = \alpha K_d^{1/2}$

## 8.3- Analyse des effets d'inertie à l'échelle des pores

Pour examiner les effets d'inertie sur les écoulements dans les milieux poreux à l'échelle des pores. Nous considérons un volume élémentaire de milieu poreux sous une différence de pression entre l'entrée et la sortie. Les champs de vitesse, de pression et de force sont déterminés en chaque point du milieu poreux avec le logiciel (Femlab 2003). En faisant varier le nombre de Reynolds défini avec comme dimension caractéristique du diamètre des grains, on met en évidence trois phases d'écoulement.

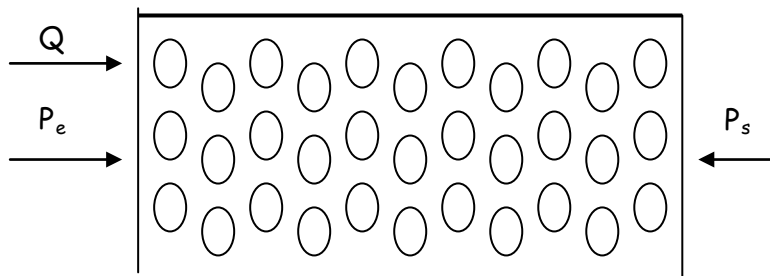


Figure 4.6- Géométrie et notations pour la simulation numérique de l'écoulement dans un volume élémentaire de milieu poreux.

- Pour les très faibles nombres de Reynolds, les lignes de courants sont parfaitement symétriques entre l'amont et l'aval des grains (figure 4.7a).
- Lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, on observe un décollement des lignes de courant en aval des grains (figure 4.7b)

- Aux fortes valeurs du nombre de Reynolds, on observe la création de deux cellules de recirculation contrarotatives en aval de chaque grain dont la taille dépend de la vitesse (figure 4.7c)

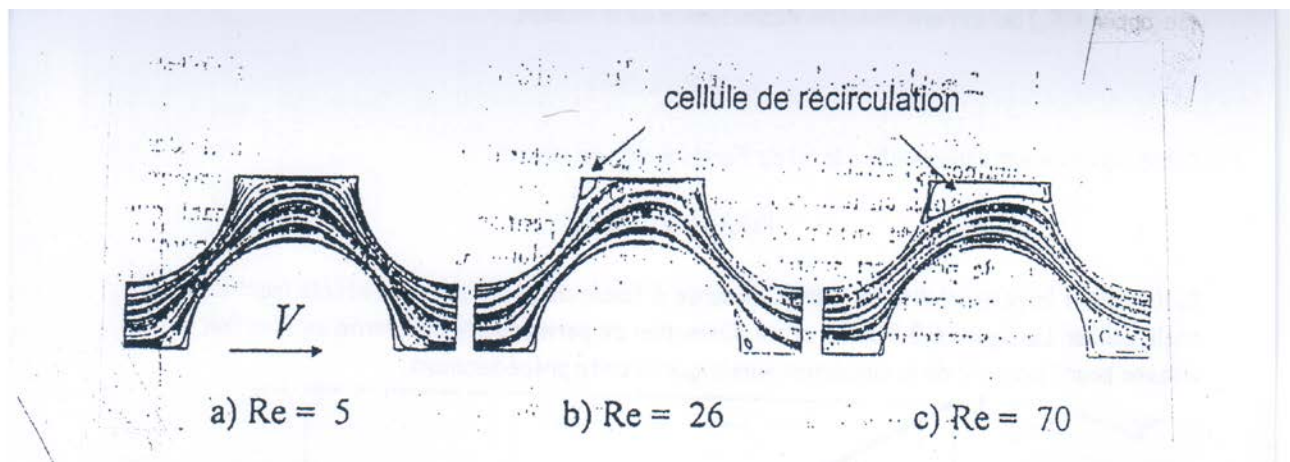


Figure 4.7- Déformation des lignes de courant dans les pores lorsque le Reynolds augmente. A Reynolds élevé, la présence de rouleaux de recirculation réduit la section de passage du fluide injecté, ce qui augmente la perte de charge.

Les observations effectuées dans cette simulation sont comparables à celle effectuée pour l'écoulement autour d'un cylindre. Dans ce cas, l'expérience montre que dans les trois phases décrites ci-dessus, chaque ligne de courante est bien individualisée et la vitesse en un point ne dépend pas du temps. Le régime d'écoulement correspondant est donc laminaire. A partir d'une certaine valeur critique du nombre de Reynolds, les cellules de recirculation se détachent, l'écoulement cesse d'être permanent et la vitesse en un point varie en fonction du temps. Il s'agit de la transition vers la turbulence. En milieu poreux, le régime turbulent n'est observé que dans les réacteurs utilisés en génie chimiques ou la taille des grains est centimétrique mais jamais dans les milieux naturels sédimentaires.

Examinons maintenant les forces en jeu lors de cet écoulement. Une particule de fluide en écoulement dans le milieu poreux est soumise aux forces de pression qui s'exercent à sa surface, aux forces de frottement visqueux créés par le gradient de vitesse dans la direction perpendiculaire à l'écoulement, aux forces d'inertie et aux forces de gravité que nous considérons négligeables dans cette analyse.

Aux faibles nombres de Reynolds, les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de frottement visqueux. La forme de l'écoulement est telle que les frottements visqueux est minimal pour un débit donné (principe du minimum d'énergie). Elle est alors entièrement déterminée par la forme géométrique du milieu et des conditions aux limites. Dans ce cas, la loi de perte de pression est linéaire.

En augmentant le nombre de Reynolds, l'inertie agit sur les lignes de courant et provoque un décollement en aval des grains. Il s'ensuit alors la création d'une zone de recirculation et donc la diminution de la section de passage du milieu (figure 4.7b et 4.7c). Les lignes de courant sont plus resserrées, ce qui implique une augmentation du gradient de vitesse dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. Dans ce cas, la relation entre la perte de pression et la vitesse n'est plus linéaire.

Il est important de souligner que l'inertie n'introduit pas de terme supplémentaires de dissipation d'énergie mais qu'elle modifie les lignes de courant en les resserrant, ce qui provoque une diminution de la perméabilité apparente du milieu. Comme nous l'avons vu dans ce paragraphe consacré à la présentation du bilan des forces dans un volume élémentaire, la loi Darcy peut s'écrire sous la même forme en présence d'effets inertiels, mais avec une perméabilité apparente  $K(R_e)$  qui est une fonction décroissante de la vitesse.

$$v = K(R_e)/\mu \partial P/\partial x$$

Cette équation est équivalente à la loi de Forchheimer en posant :  $K(R_e) = k_d / [1 + B R_e]$

$K_d$  désignant la perméabilité de Darcy, mesurée à faible débit, lorsque les effets inertiels sont négligeables. La figure 4.8 illustre cette diminution de perméabilité apparente en fonction de la vitesse pour l'exemple de la simulation numérique décrite précédemment.

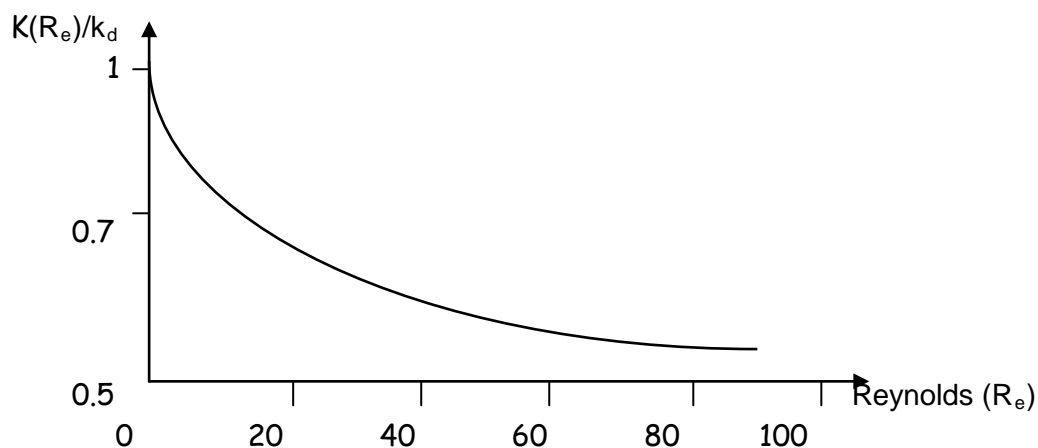


Figure 4.8- Réduction de la perméabilité apparente en fonction du nombre de Reynolds.

## Chapitre 5

# Propriétés fondamentales de l'écoulement monophasique à travers un milieu poreux

---

### 1- Combinaison de l'équation de continuité et les équations de Darcy généralisés

L'équation de continuité dans le milieu poreux est :

$$\operatorname{div}(\rho\beta v) = -\partial/\partial t(\rho\beta) \quad (5.1)$$

Les équations de Darcy généralisés sont :

$$v = -k/(\beta\mu) \operatorname{grad} \varphi \quad (5.2)$$

On tire  $\beta v$  de cette dernière équation puis on l'injectera dans l'équation de continuité. On obtient :

$$\operatorname{div}(\rho(k/\mu) \operatorname{grad} \varphi) = \partial/\partial t(\rho\beta) \quad (5.3)$$

- Dans le cas d'un milieu homogène :  $k$ ,  $\beta$  sont constantes dans l'espace
- Si le milieu est isotrope,  $k$  peut être considéré comme indépendant de la direction
- Comme  $\mu$  varie peu avec la pression, on peut la considérer comme constante.

D'où l'équation du mouvement devient alors :

$$\operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} \varphi) = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t \quad (5.4)$$

C'est l'équation combinée valable pour les milieux homogènes. On constate que cette équation aux dérivées partielles contient encore les inconnues  $\rho$  et  $P$ , puisqu'on passe de  $P$  à  $\varphi$  par :  $\varphi = P + \rho gz$

Il faudra donc éliminer  $\rho$  ou  $\varphi$  à l'aide de l'équation d'état du fluide, suivant qu'il soit incompressible, peu compressible ou très compressible.

### 2- Les équations aux dérivées partielles du mouvement

#### 2.1- Cas de fluides incompressibles

Pour de tels fluides l'équation d'état restreinte s'écrit :  $\rho = \text{cte}$  ou  $\rho = \rho_0$

L'équation (5.4) devient :  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$  ou  $\Delta\varphi = 0$

$$\text{Et sous forme développée : } \partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0 \quad (5.5)$$

La fonction inconnue  $\varphi(x,y,z)$  est donc par définition une fonction harmonique qui a été étudiée particulièrement dans le domaine de la physique.

On remarquera que les fluides incompressibles ne peuvent connaître que les mouvements permanents.



L'équation (5.5) est en effet celle que nous aurions écrit en supposant d'abord :

- Le mouvement est permanent ( $\partial\rho/\partial t = 0$ )
- Le fluide est incompressible ( $\rho = \rho_0$ )
- Les forces d'inertie sont négligeables dans l'équation de Darcy généralisée (faiblesse absolue des vitesses dans les milieux poreux).

## 2.2- Cas de fluides peu compressibles

Nous trouvons parmi les liquides, l'équation d'état restreinte de la forme :

$$\rho = \rho_0 \exp\{C_t (P-P_0)\}$$

En effet, la compressibilité d'un matériau est définie par le changement relatif du volume de ce matériau par unité de variation de pression à température constante.

$$C_t = -1/V (\partial V/\partial P)_T \quad \text{ou} \quad C_t = 1/\rho (\partial\rho/\partial P)_T$$

$$\text{L'équation (5.6) devient : } \partial\rho/\rho = c_t \partial P \quad (5.6)$$

L'intégration de cette équation avec la condition à  $P=P_0$ ,  $\rho = \rho_0$

$$\text{Nous amène à } \rho = \rho_0 \exp\{C_t (P-P_0)\} \quad (5.7)$$

Or on a  $\phi = p + \rho g z$

$$\text{Et donc } \partial\phi/\partial x = \partial P/\partial x + g z \partial\rho/\partial x$$

$$\partial\phi/\partial y = \partial P/\partial y + g z \partial\rho/\partial y$$

$$\partial\phi/\partial z = \partial P/\partial z + g z \partial\rho/\partial z + \rho g$$

Dans le cas de petites variations de pression, l'équation (7) est susceptible d'être remplacée par

$$\rho = \rho_0 \{1 + C_t (P-P_0)\}$$

Nous observons aussi que l'équation (6) peut se mettre sous forme :

$$\partial\rho/\partial z = \rho c_t \partial P/\partial z$$

L'équation (5.4) peut s'écrire :

$$\text{div} [ \rho \text{ grad } ( P + \rho g z ) ] = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t$$

$$\text{div} [ \rho ( \partial P/\partial z + g z \partial\rho/\partial z + \rho g ) ] = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t$$

$$\text{div} [ \rho \partial P/\partial z + \rho g z \partial\rho/\partial z + \rho^2 g ] = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t$$

$$\text{div} [ 1/c_t \partial\rho/\partial z + \rho g z \partial\rho/\partial z + \rho^2 g ] = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t$$

$$\text{div} [ 1/c_t + \rho g z ] \text{ grad } \rho + \partial/\partial z(\rho^2 g) = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t \quad (5.10)$$

et comme en unité C.G.S

$1/c_t$  est de l'ordre  $10^{10}$

$\rho g z \ll 1/c_t$

$\rho$  est de l'ordre 1

$g$  est de l'ordre  $10^3$   
 $z$  pour une couche 100 m d'épaisseur est négligeable devant  $1/c_t$   
 L'équation (5.10) se réduira à

$$\text{div } 1/c_t \text{ grad } \rho + \partial/\partial z(\rho^2 g) = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t \quad (5.11)$$

On peut remplacer  $\partial/\partial z(\rho^2 g) = \text{div}(\rho^2 g \text{ grad } z)$

Aussi l'équation (5.11) devient :

$$\text{div} [ 1/c_t \text{ grad } \rho + \rho^2 g \text{ grad } z ] = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t$$

$$\text{div} [ \rho \text{ grad } P + \rho^2 g \text{ grad } z ] = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t \quad (5.12)$$

Soit  $\text{div} \rho^2 [ 1/\rho \text{ grad } P + g \text{ grad } z ] = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t$

- L'équation (5.12) est une équation qui n'est pas linéaire dans le cas où les forces de pesanteur sont appréciables devant les forces de pression.
- Si les forces de pesanteur sont négligeables, alors l'équation (5.12) devient :

$$\text{div } \rho \text{ grad } P = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t \quad (5.13)$$

$$\text{div } \rho 1/(\rho c_t) \text{ grad } \rho = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t$$

$$1/c_t \text{ div grad } \rho = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t$$

$$\text{C'est-à-dire } \Delta\rho = 1/K' \partial\rho/\partial t \quad (5.14)$$

où  $K' = k/(\beta \mu c_t)$  est la diffusivité hydraulique

L'équation (5.14) peut être considérée comme résolvant le problème. Cependant, sous réserve d'une faible variation de pression, on pourra écrire l'équation sous forme :  $\rho = \rho_0 \{1 + C_t (P - P_0)\}$ .  
 Ce qui permettra d'écrire l'équation de diffusivité, compte tenu de la relation linéaire de  $\rho$  et de  $P$  comme suite :

$$\Delta P = 1/K' \partial P/\partial t$$

### 2.3- Cas de fluides compressibles

Dans la mesure où la loi de Darcy s'applique à de tels fluides, on aura compte tenu de l'équation d'état qui s'écrit sous forme :

$$\rho = b P$$

L'équation (5.4) s'écrit :

$$\text{div } bP \text{ grad } P = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t \quad (5.15)$$

( $\rho g z = 0$ , car c'est un gaz), les forces de pesanteur sont négligeables devant les forces de pression

Si  $b$  peut être considéré constant dans l'intervalle de pression considérée alors, l'équation (5.15) s'écrit :

$$\Delta\rho^2 = (b\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t \quad (5.16)$$

Cette équation n'est pas linéaire et présente des difficultés de résolution analytique insurmontable.

On observera toutefois que l'équation (5.16) peut être traitée de manière différente en considérant que dans la gamme limite de pression à l'intérieur de laquelle se situe l'écoulement, on peut écrire :

$$\rho = b (P_0 - W) \quad (5.17)$$

avec  $W = P_0 - P$ , étant une différence de pression entre une pression de référence voisine des pressions rencontrées dans l'écoulement et la pression réelle.

L'équation (5.17) devient :  $\rho = bP_0 (1 - W/P_0)$

Soit encore, à peu près

$$\rho = bP_0 \exp(-W/P_0) \quad (5.18)$$

Ce qui revient à prendre le gaz tangent au liquide aux alentours de la pression  $P_0$ .  
On voit qu'on est amené à introduire comme compressibilité du gaz la quantité  $1/P_0 = c_t$   
En effet, l'équation (5.18) s'écrit :

$$\rho = bP_0 \exp(-W/P_0)$$

$$bP_0 \exp(-1/P_0(P_0 - P)) = bP_0 \exp(c_t(P - P_0))$$

L'équation (5.15) devient alors :

$$\text{div } \rho \text{ grad } P = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t$$

De la même forme que l'équation (5.13) qui s'écrira :

$$1/c_t \text{ div grad } \rho = (\beta\mu/k) \partial\rho/\partial t$$

$$\Delta\rho = \beta\mu/(kP_0) \partial\rho/\partial t$$

Et compte tenu de la relation linéaire entre  $\rho$  et  $P$  ( $\rho = bP$ ), on aura

$$\Delta P = \beta\mu/(kP_0) \partial P/\partial t$$

Et compte tenu de la relation linéaire entre  $W$  et  $P$  ( $W = P_0 - P$ ), on aura

$$\Delta W = \beta\mu/(kP_0) \partial W/\partial t$$

On peut donc utiliser une équation aux dérivées partielles analogues à celles des liquides si les gaz s'écoulent suivant la loi de Darcy et avec des variations de pression faibles.

On verra plus loin, dans les chapitres consacrés aux écoulements gazeux dans les milieux poreux, que précisément ces faibles variations sont nécessaires pour que les gaz s'écoulent suivant la loi de Darcy.

Par ailleurs l'équation (5.16) peut s'écrire sous la forme :  $\Delta p^2 = (b\beta\mu/k) \partial p/\partial t$

$$\Delta P^2 = \beta\mu/(2kP) \partial P^2/\partial t$$

Si la pression est faiblement variable, on est alors fondé à considérer la quantité  $\beta\mu/(2kP)$  comme une constante ;  $1/P$  jouant le rôle de la compressibilité du gaz.

On constate que l'équation s'écrit alors:

$$\Delta P^2 = 1/K' \partial P^2 / \partial t$$

Si l'on pose  $P^2 = \gamma$  alors  $\Delta \gamma = 1/K' \partial \gamma / \partial t$

C'est alors le carré de la pression qui joue le rôle de fonction inconnue dans une équation encore de la forme de l'équation de diffusivité.

### 3- Différentes types de l'écoulement filtrant à une dimension

L'écoulement filtrant stationnaire ayant lieu à l'intérieur d'une couche, où la pression peut être exprimée en fonction d'une seule coordonnée linéaire est un écoulement à une dimension.

Examinons les différents types d'écoulements à une dimension qui ont une importance primordiale lors de la résolution d'un grand nombre de problèmes pratiques liés à l'exploitation des gisements de pétrole.

#### 3.1- Ecoulement rectiligne parallèle

Un tel écoulement de fluide s'effectue de telle façon que les vecteurs vitesse de filtration en tout points de la couche considérée soient parallèles entre eux.

Admettant que la couche pétrolifère – aquifère vue en plan à la forme d'un bande (voir fig. 5a). L'épaisseur de la couche varie peu en direction et on peut la considérer comme étant partout la même. Le contour ABCDE de la couche est imperméable et passe suivant la ligne d'étranglement ou de l'accident tectonique (faille). Le toit et la semelle de la couche sont imperméables. Une batterie de puits de production est disposée parallèlement au contour initial BD de la zone à l'huile. A une certaine distance de la batterie de puit, l'écoulement du fluide dans la couche sera pratiquement un écoulement rectiligne parallèle.

Pour résoudre un tel écoulement ayant lieu dans la couche, il est commode de s'imaginer celle-ci sous la forme d'un parallélépipède d'épaisseur  $b$  où la filtration du fluide se produit sur toute cette dernière (voir fig. 5a).

#### 3.2- Ecoulement radial circulaire

En examinant une couche infinie en direction, dont celle-ci est ouverte par un seul puit à pénétration totale (EDF) voir fig. 5b. La communication entre la couche productive et le puit s'effectue par la surface latérale de celui-ci ouvert à l'écoulement du fluide.

Si le puit (EDF) est un puit de production, la surface latérale du puit DF sert à l'évacuation du fluide, et par conséquent, l'écoulement est radial convergent.

Si le puit (EDF) est un puit d'injection, la surface latérale de la paroi DF sert d'alimentation à la couche (source), on aura alors un écoulement radical divergent.

Finalement, un tel écoulement peut être appelé radical circulaire, à condition que le mouvement du fluide s'effectue sur toute l'épaisseur de la couche.

#### 3.3- Ecoulement radial sphérique

Dans ce cas, les vecteurs vitesses de filtration du fluide sont dirigés suivant des lignes concourantes dans un puit de la zone (voir fig. 5c).

Ainsi les surfaces d'égales pression (isobares) et surface d'égales vitesse (iso vitesses) sont les surfaces sphériques.

Le puit communique avec la couche par l'intermédiaire d'un fond semi – sphérique (BEC).

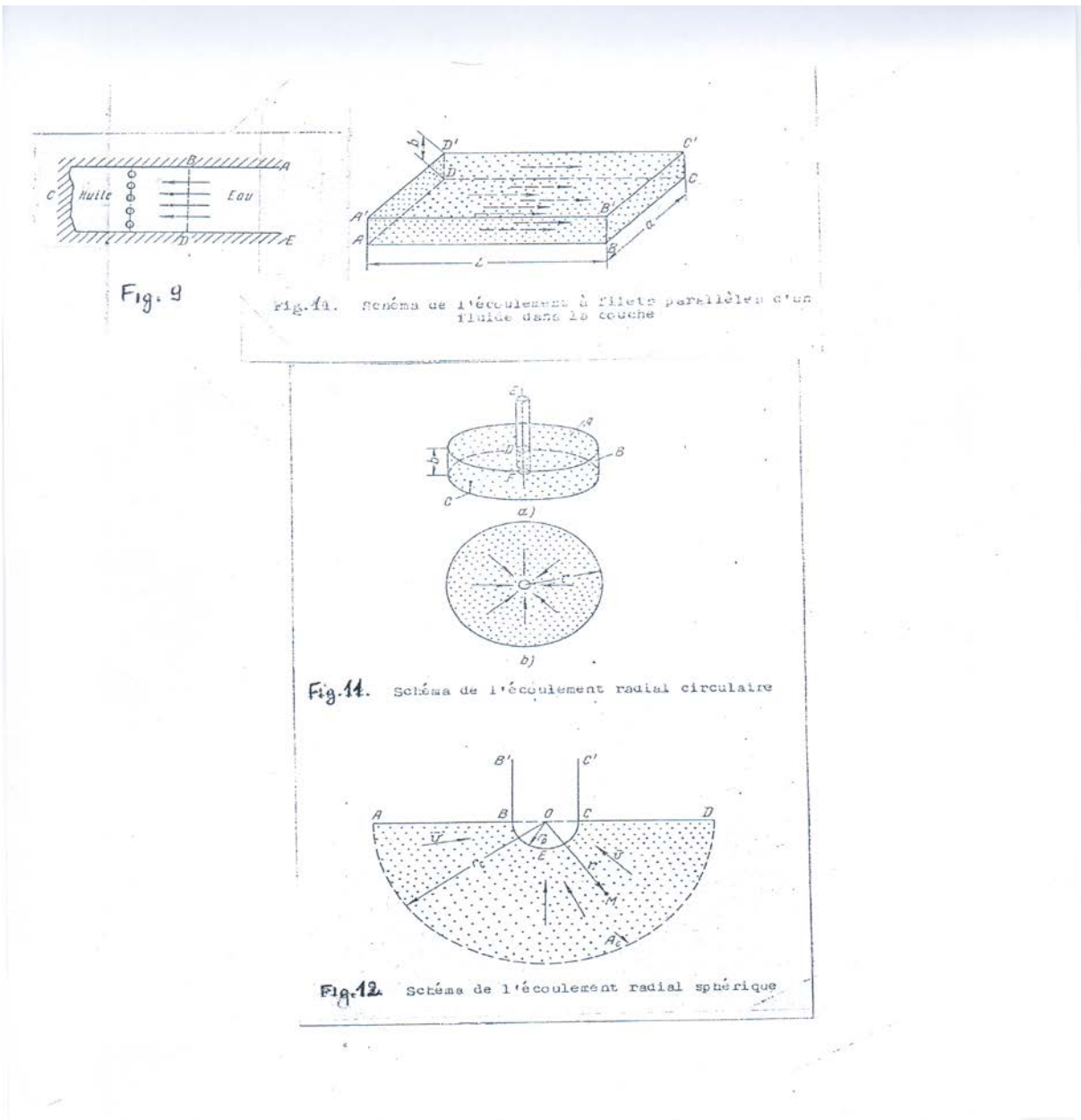


Figure 5-Différents types d'écoulement. (a) écoulement rectiligne parallèle (b) écoulement radial circulaire (c) écoulement radial sphérique.

#### 4- Les propriétés générales des solutions

On a vu dans la partie précédente que la pression du fluide dans le milieu poreux répondant à une équation aux dérivées partielles du second ordre. Cette équation ne définit pas la solution, il faut lui adjoindre des conditions aux limites spatiales et temporelles du domaine d'étude. Le système ainsi obtenu n'a généralement pas de solutions analytiques simples. Nous donnerons donc quelques propriétés générales qui permettent d'avoir une vue qualitative de l'évolution des pressions dans le cas de l'exploitation à débit constant.

Compte tenu de la variété des conditions aux limites que l'on peut rencontrer, ces systèmes peuvent se présenter sous de nombreuses formes différentes. Nous nous limitons dans la suite à l'étude des réservoirs produisant à débit constant. Le réservoir étant supposé limité et alimenté à pression constante.

Pour le problème envisagé, la pression  $P(x,y,z,t)$  devra vérifiée :

- L'équation indéfinie du mouvement (équation de diffusivité) dans le domaine :

$$\Delta P = 1/K \partial P / \partial t$$

- La condition initiale : à l'époque de la découverte, la pression est uniforme dans tous le gisement quelque soit  $(x,y,z)$  :

$$P(x,y,z,t) = P_G$$

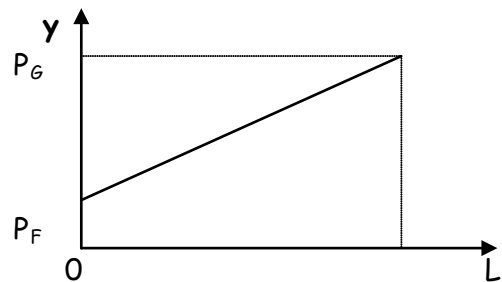
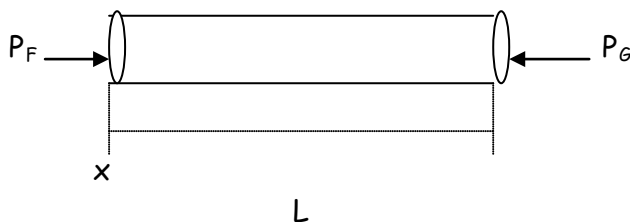
Il n'existe pas de méthodes systématiques de construction analytiques des solutions de l'équation de diffusivité répondant aux conditions. Cette recherche ne peut se faire que pour des géométries très simples et lorsque la perméabilité est uniforme dans le domaine ou répond à des lois de variation très particulière.

#### 4.1- Réservoir limité alimenté – notion de mouvement permanent

Nous donnons ci-après deux exemples d'écoulement permanent. Dans le cas des écoulements unidimensionnels, la solution est déduite facilement de l'équation de Laplace régissant l'écoulement.

L'équation de diffusivité devient :  $\Delta P = 0$

- Ecoulement parallèle



Le Laplacien de la pression se réduit à  $d^2P/dx^2 = 0$

Résolution :

Une doubles intégration donnera :  $dP/dx = A$  et  $P(x) = Ax + B$

Conditions aux limites :

à  $x=L$  ,  $P=P_G$

à  $x=0$  ,  $Q$  (débit) est imposé

$$P_G = AL + B$$

D'après la loi de Darcy :  $dP/dx = \mu v/K$  ou  $dP/dx = \mu Q/(SK) = A$

Sachant que  $Q = SK/\mu dP/dx$

En éliminant B, on aura :

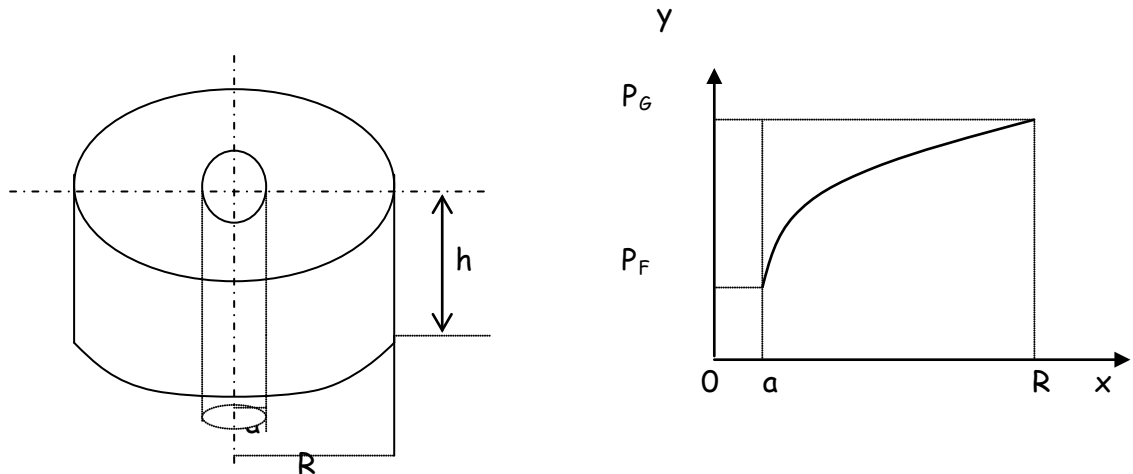
$$P_G - P = A (L-x) \text{ ou } P_G - P = \mu Q/(SK) (L-x)$$

La pression varie linéairement avec la distance comme le montre la figure. La pression à la section de soutirage se déduit en faisant  $x=0$  dans la formule précédente.

A  $x=0$ ,  $P = P_F$

D'où  $P_G - P_F = \mu Q / (SK) L$

- **Ecoulement radial circulaire**



Soit un cylindre de milieu poreux de perméabilité  $K$ , dont la surface latérale de rayon  $R$  est maintenue à la pression  $P_G$ , tandis que par le trou central de rayon  $a$ , on extrait le débit  $Q$ . En utilisant les coordonnées polaires, le Laplacien s'écrit :

$$d^2P/dr^2 + 1/r dP/dr = 0$$

$$\text{Soit } 1/r d/dr [r dP/dr] = 0$$

Résolution :

Une double intégration :  $dP/dr = A/r$  et  $P(r) = A \ln r + B$

Conditions aux limites :

à  $r = R$ ,  $P = P_G$

D'après la loi de Darcy :  $dP/dr = \mu v/K$  ou  $dP/dr = \mu Q / (SK) = \mu Q / (2\pi r h K) = A/r$

D'où  $A = \mu Q / (2\pi h K)$  et  $B = P_G - \mu Q / (2\pi h K) \ln R$

La pression varie logarithmiquement avec la distance radiale. On calcule la pression au puits, en faisant  $r=a$  d'où

$$P_G - P = \mu Q / (2\pi h K) \ln(R/r)$$

$$P_G - P_F = \mu Q / (2\pi h K) \ln(R/a)$$

Par conséquent

$$Q = (2\pi h K) / \mu [P_G - P_F] / \ln(R/a)$$

Dans les deux types d'écoulement étudiés, le débit est proportionnel à la différence des pressions imposées aux extrémités du domaine.

## Chapitre 6

# Écoulement des gaz en milieux poreux

---

### 1- Généralités

Pour les liquides, nous avons admis l'approximation de Darcy d'une part et nous avons supposé d'autre part, la compressibilité du liquide constante dans la plage de variation de pression. Ces deux hypothèses réalistes pour l'étude de l'écoulement des liquides sont généralement trop restrictives pour l'étude du mouvement des gaz. Leur emploi n'étant raisonnable que dans quelques cas particuliers.

#### 1.1- Loi quadratique des pertes de charge

Nous pouvons considérer que la loi Darcy pouvait être considérée comme une approximation d'une loi plus générale de la forme :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu v}{K}(1 + a v) \quad (6.1)$$

Si le terme en  $v^2$  du second membre est petit devant le premier terme, on retrouve la loi de proportionnalité entre le gradient de la charge au débit qu'elle a été énoncée par Darcy.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu v}{K} \quad (6.2)$$

Considérons le débit massique  $Q_m$  et  $\delta$  caractéristique du milieu poreux ayant la dimension d'une longueur. L'équation (6.1) devient :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\mu Q_m}{\rho S K} \left(1 + \frac{\delta Q_m}{\mu S}\right) \quad (6.3)$$

Des mesures précises faites au laboratoire ont apporté la preuve expérimentale de l'exactitude pratique de l'équation (6.3). Ces mesures concernant les écoulements de gaz et liquides dans les milieux poreux naturels et artificiels ont montré que  $\delta$  spécifique du milieu, appelé aussi un paramètre de forme est en général de l'ordre de  $10^{-3}$  cm. Cette faible valeur permet de négliger le second terme de l'équation (6.3) pour les puits à huile, pour lesquels les valeurs de  $(Q_m/\mu S)$  sont relativement petites. Il n'en est généralement pas de même des puits à gaz, surtout du fait de la viscosité du gaz, environ 100 fois plus petites que pour les huiles.

#### 1.2- Equation d'état des gaz

Il est commode de rapporter le comportement des gaz naturels à celui des gaz parfaits, en introduisant dans leur équation une fonction correctrice  $Z=Z(P,T)$ , appelé facteur de compressibilité.

$$\rho = \frac{M P}{Z R T}$$



Les écoulements en milieux poreux étant pratiquement isotherme, le facteur Z de compressibilité n'est en fonction que de la pression pour un problème donné. Les courbes Z(P) étant régulières (voir le diagramme de Katz et Standing). On peut toujours les approcher d'aussi près que l'on veut dans un intervalle donné de précision par un polynôme en P.

La masse spécifique peut être mise sous la forme :

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} b_i P^i \quad (6.4)$$

Si le facteur de compressibilité Z varie peu dans l'intervalle considéré, la valeur de la série ci-dessus est partout très proche de la valeur du premier terme et la masse spécifique est à peu près représentée par :

$$\rho = b P \quad (6.5)$$

Dans la mesure où l'équation (6.5) représente le comportement du gaz en mouvement, on pourra ainsi ramener l'étude de l'écoulement d'un gaz naturel à celui d'un gaz parfait équivalent tel que  $b = (M/Z_0RT)$ , où  $Z_0$  est la valeur moyenne ou facteur de compressibilité pour les pressions rencontrées dans le domaine d'écoulement.

## 2- Intégration de la loi quadratique

L'emploi de la loi quadratique de perte de charge (Eq. 6.1) et de l'équation d'état la plus générale (Eq. 6.4), dans l'équation de continuité conduit à un système d'équation aux dérivées partielles inextricables et dont la résolution numérique ne permet pas de dégager les lois générales gouvernant l'évolution de pression. A cette fin, nous étudierons les mouvements permanents simples.

Le milieu poreux est supposé isotrope homogène, sa compressibilité est négligeable devant celle du gaz. D'autre part, on ne tiendra pas en compte des variations de la viscosité du gaz en fonction de la pression qui sont de l'ordre de 1 à 2% relatif dans les cas pratiques.

Nous nous contenterons d'étudier les cas linéaire et le radial circulaire.

### 2.1- Mouvement permanent linéaire

Soit  $Q_m$  le débit massique traversant les sections droites d'abscisse  $0 \leq x \leq L$  d'un échantillon de milieu poreux,  $P_1$  la pression imposée à la face  $x=0$ .

L'équation (6.3) s'écrit:

$$\rho \partial P = - \frac{\mu Q_m}{SK} \left(1 + \frac{\delta Q_m}{\mu S}\right) dx$$

Compte tenu de l'équation (6.4) :

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i P^i dP = - \frac{\mu Q_m}{SK} \left(1 + \frac{\delta Q_m}{\mu S}\right) dx$$

La pression P(x) s'obtient par intégration précédente

$$\sum_i \int_{P_1}^{P(x)} b_i P^i dP = - \int_0^x \frac{\mu Q_m}{SK} \left(1 + \frac{\delta Q_m}{\mu S}\right) dx$$

$$\text{Où } \sum_i \frac{b_i}{i+1} (P_i^{i+1}(x) - P_1^{i+1}) = - \frac{\mu Q_m}{SK} \left(1 + \frac{\delta Q_m}{\mu S}\right) x \quad (6.6)$$

En particulier à la face  $x=L$ , la pression  $P_2$  est donnée par :

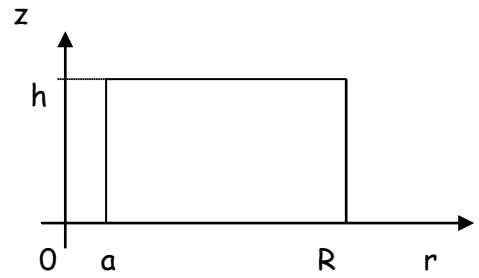
$$\sum_i \frac{b_i}{i+1} (P_2^{i+1} - P_1^{i+1}) = -\frac{\mu Q_m L}{SK} \left(1 + \frac{\delta Q_m}{\mu S}\right) \quad (6.7)$$

Si l'approximation (6.5) peut être utilisée, la formule précédente se réduit à:

$$P_2^2 - P_1^2 = -\frac{2\mu Q_m L}{SKb} \left(1 + \frac{\delta Q_m}{\mu S}\right) \quad (6.8)$$

## 2.2- Mouvement permanent radial circulaire (axisymétrique)

Soit un milieu poreux sous forme d'anneau cylindrique de rayons  $a$  et  $R$  et de hauteur  $h$ . Le débit est maintenu constant à la valeur  $Q_m$ , la pression étant égale à  $P_F$  à la face intérieure du cylindre.



Appliquée entre les cylindres de rayon  $r$  et  $r+dr$ , la loi élémentaire (6.3) s'écrit :

$$\rho \delta P = -\frac{\mu Q_m}{2\pi r h K} \left(1 + \frac{\delta Q_m}{\mu 2\pi r h}\right) dr$$

La pression  $P(r)$  s'obtient par intégration, soit compte tenu de l'équation (6.4) :

$$\sum_i \int_{P_F}^{P(r)} b_i P^i dP = -\int_a^r \frac{\mu Q_m}{2\pi r h K} \left(1 + \frac{\delta Q_m}{2\pi r h \mu}\right) dr$$

$$\text{Où } \sum_i \frac{b_i}{i+1} (P_i^{i+1}(r) - P_F^{i+1}) = -\frac{\mu Q_m \text{Ln}(r/a)}{2\pi h K} \left[1 + \frac{\delta Q_m}{2\pi h \mu \text{Ln}(r/a)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)\right] \quad (6.9)$$

En particulier à la face latérale extérieure du cylindre, on aura

$$\sum_i \frac{b_i}{i+1} (P_i^{i+1}(R) - P_F^{i+1}) = -\frac{\mu Q_m \text{Ln}(R/a)}{2\pi h K} \left[1 + \frac{\delta Q_m}{2\pi h \mu \text{Ln}(R/a)} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)\right] \quad (6.10)$$

Dans la mesure où  $(1/R)$  est négligeable devant  $(1/a)$ , le second membre s'écrit :

$$-\frac{\mu Q_m \text{Ln}(R/a)}{2\pi h K} \left[1 - \frac{\delta Q_m}{S(a) \mu \text{Ln}(R/a)}\right] \quad (6.11)$$

Où  $s(a) = 2\pi a h$  est la surface intérieure du cylindre.

Si l'écoulement suivait la loi Darcy, le second membre de l'équation (6.10) se réduirait au premier

$$\text{terme : } -\frac{\mu Q_m}{2\pi h K} \text{Ln}(R/a)$$

On voit qu'en écoulement radial circulaire, l'effet du terme convectif traduisant l'écart à la loi Darcy est globalement plus faible qu'en écoulement parallèle, puisque divisé par  $(\ln(R/a))$ . Ceci traduit le fait que les vitesses des gaz diminuent lorsqu'on s'éloigne de la face intérieure. En pratique, bien que la déviation par rapport à la loi Darcy soit finalement moins importante en écoulement radial qu'en écoulement parallèle, elle n'est pas systématiquement négligeable.

Si l'approximation (6.5) est utilisable dans le domaine des pressions rencontrées, l'équation (6.10) se réduit à :

$$P^2(R) - P_F^2 = -\frac{\mu Q_m \ln(R/a)}{b\pi h K} \left[ 1 + \frac{\delta Q_m}{2\pi h a \mu \ln(R/a)} \left( \frac{a}{R} - 1 \right) \right] \quad (6.12)$$

Par la suite, nous écrirons sous la forme :  $P^2(R) - P_F^2 = A Q_m + B Q_m^2$

Avec  $A = -\frac{\mu \ln(R/a)}{b\pi h K}$  et  $B = -\frac{\delta}{2\pi^2 h^2 K b} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)$

Le tracé de  $[P^2(R) - P_F^2] / Q_m$  en fonction de  $Q_m$  donne une droite, la courbe indicatrice, qui permet de déterminer A et B. De A, on tire  $hK$ .

## Chapitre 7

# Écoulement polyphasiques en milieux poreux

---

### 1- Introduction

Les lois physiques qui régissent l'équilibre et l'écoulement de plusieurs fluides dans un milieu poreux, sont au point de vue microscopiques, simples et bien connues. Mais seule est intéressante en pratique l'allure d'ensemble du phénomène, dans un bloc de milieu poreux (aspect macroscopique). Malheureusement, à cause de la géométrie complexe du milieu poreux, il est très difficile de la déduire de l'aspect microscopique. Il est cependant utile de commencer à examiner celui-ci, d'une part pour bien comprendre la nature des phénomènes en jeu, d'autre part, parce qu'on pourra en déduire du moins des indications qualitatives appréciables à l'aspect macroscopique.

### 2- Position du problème

Lorsque deux fluides non miscibles sont simultanément présents dans un milieu poreux, l'équilibre ou l'écoulement de ces deux fluides est commandé par les phénomènes suivants :

1. Chacun des deux fluides est en écoulement visqueux. Pratiquement toujours, il s'agit d'écoulement laminaire (sauf au voisinage des puits, dans certaines roches fissurées). Si on suppose l'écoulement isotherme (ce qui est justifié vu la capacité calorifique importante du solide poreux) et les fluides Newtoniens, ces écoulements sont décrits par les équations de Navier :

$$\text{grad } P = \rho \vec{g} - \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \mu \Delta \vec{v}$$

Les conditions aux limites sont:

2. Sur la surface du solide :  $\vec{v} = 0$
3. Sur l'interface séparant les deux fluides :  $\vec{v}_{\text{fluide1}} = \vec{v}_{\text{fluide2}}$

La première condition exprime la continuité de vitesse, la seconde exprime le fait que la différence entre les forces exercées par chacun des fluides de part et d'autre de l'interface est équilibrée par les forces capillaires.

4. Enfin, sur la ligne de contact triple entre les fluides 1 et 2 et le solide, l'angle d'interface avec la surface du solide doit avoir une valeur  $\theta$ , appelé angle de mouillage ; qui dépend à la fois des propriétés des deux fluides et celle du solide. Il traduit la plus ou moins grande affinité de l'un des fluides pour le solide considéré. Celui des fluides pour lequel, l'angle de contact de l'interface avec la surface du solide (mesuré à l'intérieur du fluide) est aigu est dit le fluide mouillant. L'autre est le fluide non mouillant.

Finalement, les équations ci-dessus avec les équations d'état des deux fluides et les équations de continuité suffisent pour poser complètement le problème. Les écoulements en milieu poreux ne mettant en jeu que les phénomènes physiques bien connus tels que l'écoulement visqueux et les phénomènes capillaires.

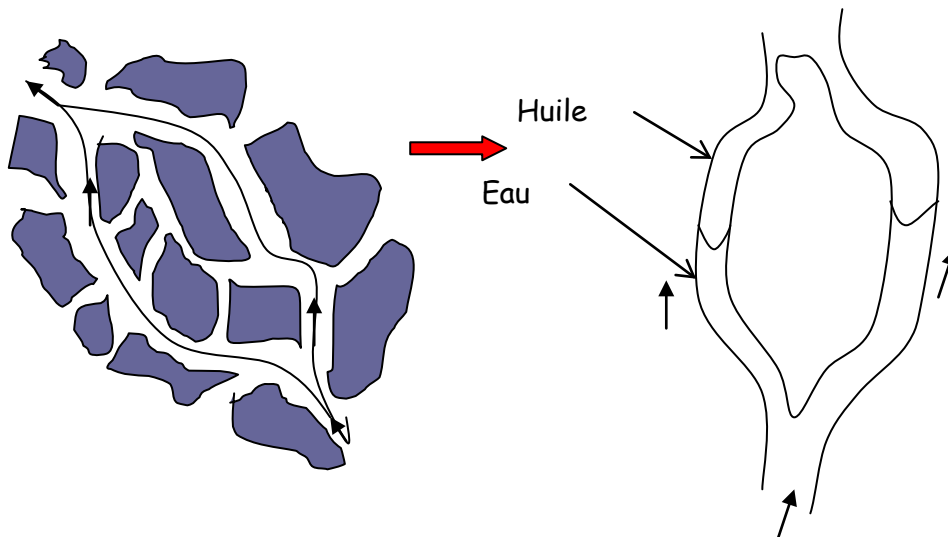
### 3- Forces agissant sur une particule fluide

Les forces mises en jeu sont :

- Les forces de pression que la particule fluide reçoit du fluide environnant,
- Les forces de frottement visqueux exercées par le fluide environnant et par le solide
- Les forces de pesanteur
- Les forces d'inertie,
- Les forces superficielles qui agissent sur l'interface entre les deux fluides et sur la ligne de raccordement de celle-ci avec le solide.

En général, les forces d'inertie sont négligeables, vu les faibles vitesses d'écoulement, sauf au voisinage du puits et dans les roches fissurées. Les forces de pression et les forces de frottement visqueux sont en gros proportionnelles à la vitesse d'écoulement des fluides. Au contraire, les forces capillaires et les forces de pesanteur n'en dépendent pas. Aussi, leur importance sera d'autant plus grande que les écoulements sont plus lents.

On peut dégager l'importance relative de ces forces suivant le schéma ci-dessous, en considérant le système de deux capillaires initialement rempli d'huile (fluide supposé non mouillant). De l'eau arrive par l'une des extrémités. Lorsque le ménisque atteint l'embranchement, il se sépare en deux nouveaux ménisques, chacun avançant dans un des tubes.



On supposera que, lorsque l'eau atteint l'autre embranchement par un des tubes, l'huile qui reste encore dans l'autre tube se trouve définitivement piégée. Cela peut se faire si par exemple, juste à l'endroit de leur raccordement, les deux tubes ont un léger étranglement. On supposera aussi que la différence de pression entre les deux embranchements est maintenue constante.

On voit qu'à cette différence de pression, il faudra, pour obtenir la différence de pression motrice dans chaque tube ajouter :

- $2\sigma \cos\theta_1/R_1$  pour le premier tube
- $2\sigma \cos\theta_2/R_2$  pour le deuxième tube

Où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons des tubes,  $\sigma$  la tension interfaciale et  $(\theta_1=\theta_2)$  angle de mouillement.

On voit donc que lorsque la différence de pression imposée est très petite, le tube le plus fin, à cause de ce terme supplémentaire va se trouver relativement avantagé par rapport au plus gros.

Cet avantage du tube le plus fin devient relativement moins important si la différence de pression imposée augmente. Par conséquent, le rapport des vitesses des ménisques dans ces deux tubes dépend de la pression imposée.

On conçoit donc que, lorsque le ménisque a atteint par l'un des tubes, l'embranchement aval, la quantité d'huile qui reste piégée dans l'autre tube peut dépendre de la grandeur de la différence de pression imposée. On a là un exemple d'effet de l'importance relative des forces de viscosité et des forces capillaires.

Cet exemple permet de comprendre pourquoi la saturation en huile résiduelle dans un bloc de milieu poreux, après balayage par l'eau peut dépendre de la vitesse de balayage.

#### 4- Equilibre diphasique non miscible dans un milieu poreux

##### 4.1- La pression capillaire

Supposons que le massif considéré soit en équilibre dans le champ de pesanteur à une température déterminée. D'après les lois de l'hydrostatique, la pression dans chacun des fluides ne dépend que de la cote  $z$  et nous avons :

$$dP_1/dz = \rho_1 g \quad (7.1)$$

$$dP_2/dz = \rho_2 g \quad (7.2)$$

Puisque à température fixe,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont des fonctions bien déterminées respectivement de  $P_1$  et  $P_2$ , il est donc facile de prolonger la définition des pressions  $P_1$  et  $P_2$  dans tout l'espace (bien qu'une partie seulement de l'espace soit occupée par chacun des deux fluides).

Dans le cas d'un milieu poreux en équilibre, il est donc permis pour les pressions de raisonner comme si le milieu était continu.

La pression capillaire sera donc définie en tous points du milieu poreux.

$$P_c = P_2 - P_1 \quad (7.3)$$

D'après les équations (7.1) et (7.2), la pression capillaire est une fonction bien déterminée de la cote  $z$ .

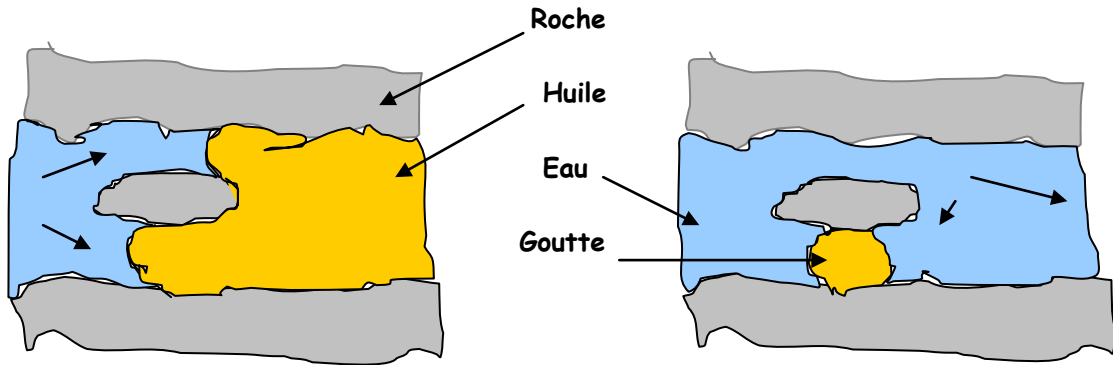
$$P_c(z) = P_c(z_0) + g \int_{z_0}^z (\rho_2 - \rho_1) dz \quad (7.4)$$

##### 4.2- Doublet capillaire: Genèse des bulles. Effet Jamin

Soit un doublet capillaire constitué de deux pores, l'un fin l'autre plus gros en parallèle. Soit un écoulement diphasique huile et eau à travers ce milieu poreux d'une roche mouillable à l'eau.

L'eau injectée lentement déplace l'huile contenue dans les pores d'autant plus facilement que ceux-ci sont plus fins, car l'effet de la capillarité vient s'ajouter aux forces extérieures.

L'interface huile/eau (le ménisque) prend de l'avance dans le pore le plus fin et atteint le premier la sortie du doublet qui se trouve ainsi baigné par l'eau sur deux extrémités. Une deuxième interface apparaît donc dans le gros pore formant ainsi une goutte d'huile qui au cours de son cheminement, pourra finir par être bloquée dans le réseau poreux comme nous allons le voir.

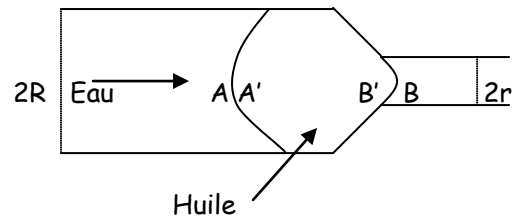


**Effet Jamin :** Cette goutte d'huile va tôt ou tard rencontrer un étranglement et en fonction du gradient de pression lié à l'écoulement, obturer le seuil ou passer l'étranglement. En effet, la pression étant la même dans la goutte suivant l'horizontale, on écrit alors :

$$P_{A'} = P_{B'}$$

$$P_{A'} - P_A = 2\sigma \cos \theta / R$$

$$P_{B'} - P_B = 2\sigma \cos \theta / r$$



$$\text{D'où } P_A - P_B = 2\sigma (1/r - 1/R) \cos \theta \quad (7.5)$$

Ceci étant la différence de pression nécessaire pour que la goutte d'huile passe le seuil.

#### 4.3- Notion de perméabilité relative

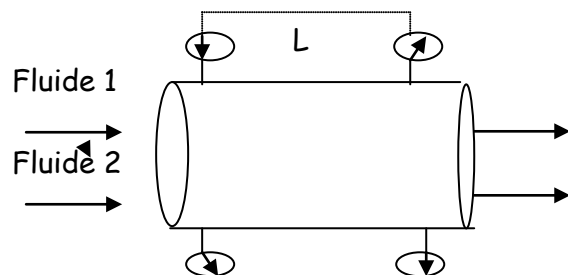
Si deux fluides circulent simultanément dans un échantillon, on constate que ceci a pour conséquence de réduire la perméabilité de chaque fluide.

Considérons deux fluides non miscibles injectés à l'aide des pompes dans un échantillon poreux cylindrique de section  $S$  et de longueur  $L$ .

L'expérience montre que l'on peut écrire deux relations de type Darcy.

$$Q_1 = \frac{K_1 S \Delta P_1}{\mu_1 L}$$

$$\text{et } Q_2 = \frac{K_2 S \Delta P_2}{\mu_2 L}$$



Où  $S$  est la section du massif poreux,  $K_1$  et  $K_2$  sont les perméabilités effectives des fluides. Elles dépendent de la perméabilité spécifique du milieu et de la saturation.

Si l'on modifie le débit d'injection de l'un des deux fluides, donc la saturation moyenne en chacun des deux fluides (obtenue après un certain temps d'injection donnant l'équilibre),

l'expérience montre également que les coefficients  $K_1$  et  $K_2$  sont modifiés et sont fonctions croissantes des saturations 1 et 2.

On introduit de façon générale les perméabilités relatives  $K_{r1}$  et  $K_{r2}$  qui dépendent seulement de la saturation :

$$K_r = K_i/K$$

Avec  $K$  perméabilité absolue (écoulement monophasique)

Les valeurs de perméabilité relatives sont comprises entre 0 et 1.

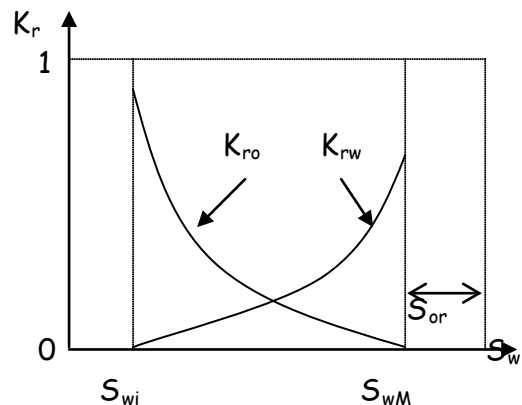
#### 4.4- Variation de la perméabilité relative en fonction de la saturation

Considérons un échantillon saturé en huile avec de l'eau interstitielle ( $S_w = S_{wi}$ ), injectons lentement de l'eau (fluide mouillant). On constate que :

- La perméabilité à l'huile décroît constamment. Elle n'est pas trop affectée par la présence d'eau, alors que celle à l'eau l'est plus par la présence d'huile. Ceci peut s'expliquer en remarquant que l'eau tapisse les parois des pores et remplit les petits pores laissant passer l'huile surtout par les centres des gros pores.
- L'huile s'arrête de circuler pour une saturation minimale qui est la saturation en huile résiduelle ( $S_{Or}$ ).
- L'eau ne circule qu'à partir de la saturation interstitielle ( $S_{wi}$ ), ensuite la perméabilité à l'eau croît constamment jusqu'à la saturation maximale en eau :  $S_{wM} = 1 - S_{Or}$
- $K_{ro} + K_{rw} < 1$ , ce qui montre que les deux fluides se gênent mutuellement pendant leur déplacement simultané : la capacité d'écoulement est réduite.

#### Remarque :

L'huile ne circulant plus pour  $S_{wM} = 1 - S_{Or}$ , on peut considérer que l'état atteint est celui d'un gisement d'huile balayé par l'eau, et étudier maintenant, le déplacement de l'eau par l'huile, appelé « drainage ». La saturation en eau va varier entre  $S_{wM}$  et  $S_{wi}$  et les courbes de perméabilités relatives ne seront pas exactement les précédentes : Il y a hystérésis notamment pour  $K_{ro}$ .



**Commentaires** Cette notion de perméabilité relative a pour but d'étendre le concept de perméabilité à l'écoulement diphasique d'une manière simple. Ainsi, la loi Darcy est directement utilisable, pour chacun des fluides. Il existe une relation simple :

$$Q_1 = \frac{K_{r1}(S_1)}{\mu_1} KS \frac{dP_1}{dl}$$

Cette notion implique en fait l'idée de saturation moyenne à une échelle du domaine où s'écoulent les fluides. Cette saturation moyenne évolue en fonction du temps. Les perméabilités relatives ne donnent qu'une description globale du phénomène ignorant les mécanismes physiques fins qui les gouvernent. Mais, on voit qu'elles permettent une formulation quantitative des écoulements diphasiques. On notera que la tendance actuelle est de les utiliser comme paramètres de callage dans les modèles mathématiques, car ces courbes issues de quelques mesures, peuvent ne pas bien représenter le milieu.

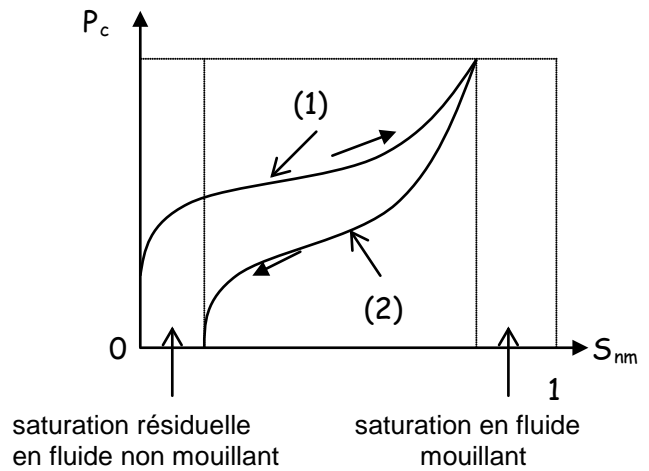


#### 4.5- Variation de la pression capillaire en fonction de la saturation

Supposons qu'on parte initialement d'un échantillon complètement saturé en fluide mouillant, qu'on remplace très lentement par un fluide non mouillant. Cette expérience réalise une succession d'états d'équilibre, pour des valeurs de la saturation en fluide non mouillant très proche les unes des autres, allant en croissant. La courbe (1) représente la relation pression capillaire – saturation en fluide non mouillant  $S_{nm}$  pour ce processus appelé généralement « drainage ». On voit qu'il y a une certaine quantité de fluide mouillant qui reste dans l'échantillon, même aux pressions les plus élevées : c'est la saturation irréductible en fluide mouillant.

Si maintenant, partant de l'échantillon à la saturation irréductible en fluide mouillant, on déplace lentement le fluide non mouillant par du fluide mouillant, on obtient la courbe (2). Ce processus est appelé « imbibition ».

On remarque que pour une pression capillaire nulle, il reste une certaine saturation en fluide non mouillant, c'est la saturation résiduelle en ce fluide.

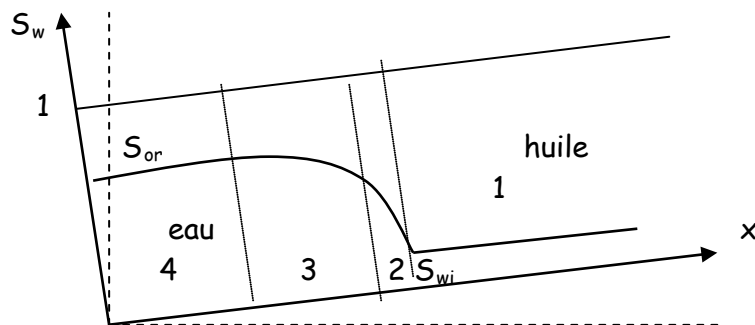


#### 5- Théorie du déplacement frontal

##### 5.1- Notion du front

Considérons le déplacement d'un fluide 2 (de l'huile par exemple) par un fluide 1 (de l'eau par exemple). Le profil des saturations en fluide 1 à un moment donné aura l'allure représentée sur la figure ci dessous en fonction de la direction du déplacement  $x$ .

On peut distinguer quatre zones :



- zone 1: qui n'a pas été atteinte par le fluide déplaçant. Seule l'huile se déplace.
- zone 2 : dans laquelle  $S_w$  croit brusquement. C'est le front.
- zone 3 : où  $S_w$  varie progressivement, derrière le front.
- zone 4 : envoyée par l'eau et où il reste une saturation en huile résiduelle  $S_{or}$ . Seule l'eau se déplace. Ce profil se déplace en fonction du temps ( $x$  croissant) en se déformant vers le puits de production.

### 5.3- Théorie de Buckley – Levrett

On peut calculer de façon assez simple l'avancée du front et l'évaluation du pourcentage d'eau par exemple dans une section, si l'on est en mouvement permanent en négligeant les forces capillaires et de gravité dans le cas d'un déplacement unidirectionnel. C'est le cas par exemple d'un écoulement horizontal.

1°- Reprenons les équations de Darcy pour l'eau et l'huile et définissons le débit fractionnaire (water-cut) «  $f_w$  ».

$$f_w = \frac{q_w}{q_w + q_o}$$

$$q_w = \frac{K_w}{\mu_w} S \frac{\Delta P}{L} = \frac{K_{rw} K}{\mu_w} S \frac{\Delta P}{L}$$

Or

$$q_o = \frac{K_o}{\mu_o} S \frac{\Delta P}{L} = \frac{K_{ro} K}{\mu_o} S \frac{\Delta P}{L}$$

$$\Delta P_w = \Delta P_o = \Delta P$$

$$f_w = \frac{\frac{K_{rw}}{\mu_w}}{\frac{K_{rw}}{\mu_w} + \frac{K_{ro}}{\mu_o}} \quad \text{ou} \quad f_w = \frac{1}{1 + \frac{K_{ro} \mu_w}{K_{rw} \mu_o}}$$

$f_w$  est donc uniquement en fonction de la saturation  $S_w$  par l'intermédiaire des perméabilités relatives,  $\mu_o$  et  $\mu_w$  ont une valeur donnée pour la pression moyenne considérée.

**Remarques :**  $q_w$ ,  $q_o$  et  $f_w$  sont exprimés en condition de fond.

En conditions standards : (T= 15°C = 60°F et P=1 atm = 14,69 Psia)

$$f_w = \frac{\frac{q_w}{B_w}}{\frac{q_w}{B_w} + \frac{q_o}{B_o}}$$

Avec B, facteur volumétrique de fond défini par :  $B = \frac{\text{volume condition de fond}}{\text{volume condition standard}}$

avec  $Q_w = q_w/B_w$  et  $Q_o = q_o/B_o$

En prenant en compte aussi les forces de gravité, on montre qu'on obtient alors pour un écoulement non horizontal:

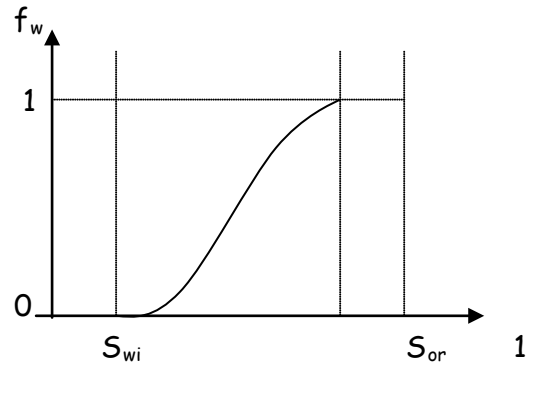
$$f_w = \frac{\frac{\mu_o}{K_{ro}} - \frac{SK}{Q_T} (\rho_w - \rho_o) g \sin \alpha}{\frac{\mu_o}{K_{ro}} + \frac{\mu_w}{K_{rw}}} \quad \text{ou encore} \quad f_w = \frac{1 - 8,4 \cdot 10^{-4} \frac{K_{ro}}{\mu_o} \frac{SK}{Q_T} (\rho_w - \rho_o) g \sin \alpha}{1 + \frac{K_{ro} \mu_w}{K_{rw} \mu_o}}$$

en unité pratique (centimètre carré, millidarcys, grammes/cm<sup>3</sup> ; m<sup>3</sup>/jour ; centipoises)

avec  $Q_T = q_w + q_o$  (débit total constant par hypothèse)

$S$  : section de passage de fluide  
 $\rho_w$  et  $\rho_o$  : masses volumiques des fluides  
 $\alpha$  : angle de l'écoulement avec l'horizontal

$f_w$  est alors en fonction de  $S_w$ , mais aussi du débit, de  $K_{ro}$  de la pente de l'écoulement. On remarquera que la gravité a pour effet de diminuer  $f_w$ . cet effet est maximal pour les déplacements d'interfaces car  $\sin \alpha = 1$ .



2°- Calcul du déplacement d'une tranche  $S_w$  (vitesse).

Calculons la vitesse du déplacement d'une tranche de fluide de saturation  $S_w$ . Pour cela appliquons la loi de conservation de la masse à l'eau contenue dans un volume de section  $S$  suivant une tranche  $\Delta x$  pendant le temps  $\Delta t$ . On admet que l'eau est incompressible pour les conditions considérées, d'où la variation du volume d'eau pendant  $\Delta t$  est égale à la variation du débit  $\Delta Q_w$ .

$$\frac{(\Delta x S \beta) \Delta S_w}{\Delta t} = Q_T \Delta f_w$$

$$\text{soit } \frac{\Delta x}{\Delta t} = v(S_w) = \frac{Q_i}{S \beta} \frac{df_w}{dS_w}$$

$$\text{avec } v = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{S_w}$$

et  $df_w/dS_w$  dérivée de la fonction  $f_w$  pour la valeur de  $S_w$

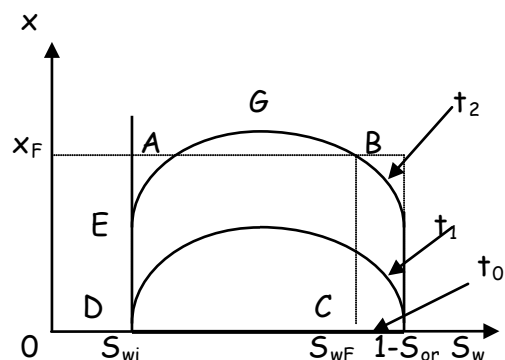
La vitesse d'une tranche de saturation donnée est constante puisque elle est uniquement en fonction de la saturation envisagée. L'équation s'intègre:

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_{S_w} = \frac{Q_i}{S \beta} \frac{df_w}{dS_w} \Rightarrow \int_i^x dx = \frac{Q_i}{S \beta} \frac{df_w}{dS_w} \int_{t_i}^t dt$$

$$x(S_w) - x_i(S_w) = \frac{Q_i}{S \beta} \frac{df_w}{dS_w} (t - t_i)$$

Tous les profils  $S_w(x,t)$  sont affines (si l'on suppose la saturation initiale uniforme) et s'allongent proportionnellement au temps.

On voit qu'une partie des courbes obtenues sur la figure ci-contre n'a pas de significations physiques : En effet, pour une même position  $x$ , on aurait trois valeurs de saturation. On suppose alors (l'hypothèse de Buckley-Levrett) que le déplacement est frontal et présente une discontinuité de saturation : le front est défini comme la limite de la zone dans laquelle l'eau injectée n'a pas pénétrée. Toute l'eau injectée est donc située en arrière du front. C'est à dire le bilan de l'eau située en arrière du front est



égale au bilan de l'eau injectée.

3°- Valeur de discontinuité de saturation ( $S_{wF} - S_{wi}$ ) :

Pour cela, on utilise la méthode de Welge :

$$\text{Soit } x_F (S_{wF} - S_{wi}) = \int_{S_{wi}}^{S_{wF}} x dS_w$$

$$\text{Or } x_F = v(S_w)t = \frac{Q_t}{S\beta} \left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_{S_{wF}} t$$

$$\text{On obtient finalement : } \frac{Q_t}{S\beta} \left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_{S_{wF}} (S_{wF} - S_{wi})t = \frac{Q_t}{S\beta} ((f_w(S_{wF}) - f_w(S_{wi})))t$$

$$\text{Avec } \frac{f_w(S_{wF}) - f_w(S_{wi})}{S_{wF} - S_{wi}} = \left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_{S_{wF}}$$

D'où une construction simple pour obtenir la saturation en eau derrière le front, voir fig. ci-dessous. A partir du point initial (on s'est placé dans le cas où la saturation initiale uniforme est égale à  $S_{wi}$ , on porte la tangente à la courbe  $f(S_w)$  le point de contact fournit la valeur  $S_{wF}$  cherché, car la pente de la tangente, dite de Welge est égale à la pente de la corde menée du point initial. Le front est matérialisé par la discontinuité des saturations,  $S_{wi}$  passant brutalement à  $S_{wF}$ .

$S_{wi}$  : saturation en eau interstitielle (zone huile)

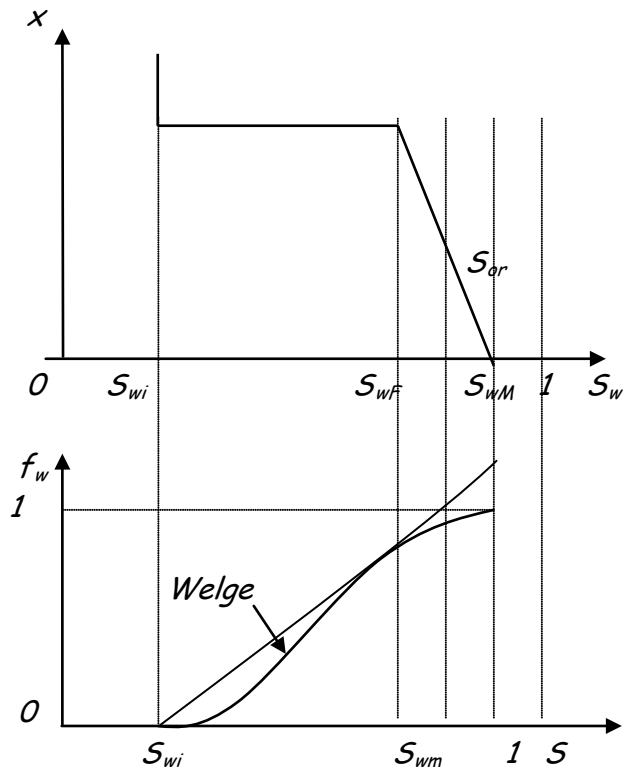
$S_{wF}$  : saturation en eau au front

$S_{wM}$  : saturation en eau maximale =  $1 - S_{or}$

$S_{wm}$  : saturation en eau moyenne derrière le front

La vitesse d'avancement du front s'obtient, en calculant  $df_w/dS_w$  à partir de  $f_w$ . Le calcul de la pente de la tangente de Welge donne :

$$\left( \frac{df_w}{dS_w} \right)_{S_{wF}} = \frac{1}{S_{wm} - S_{wi}}$$



On montre que  $S_{wm}$  est la valeur moyenne derrière le front.

D'où la deuxième application de la tangente de Welge : la valeur de la saturation moyenne derrière le front  $S_{wm}$  s'obtient par l'intersection de la tangente avec  $f_w = 1$ , d'où la relation :

$$v_F = \frac{Q_t}{S\beta(S_{wm} - S_{wi})}$$

Avec  $v_F$  vitesse du front.

Cette relation était prévisible puisque  $v_F = dx/dt$

et  $Q_t dt = S dx \beta (S_{wm} - S_{wi})$

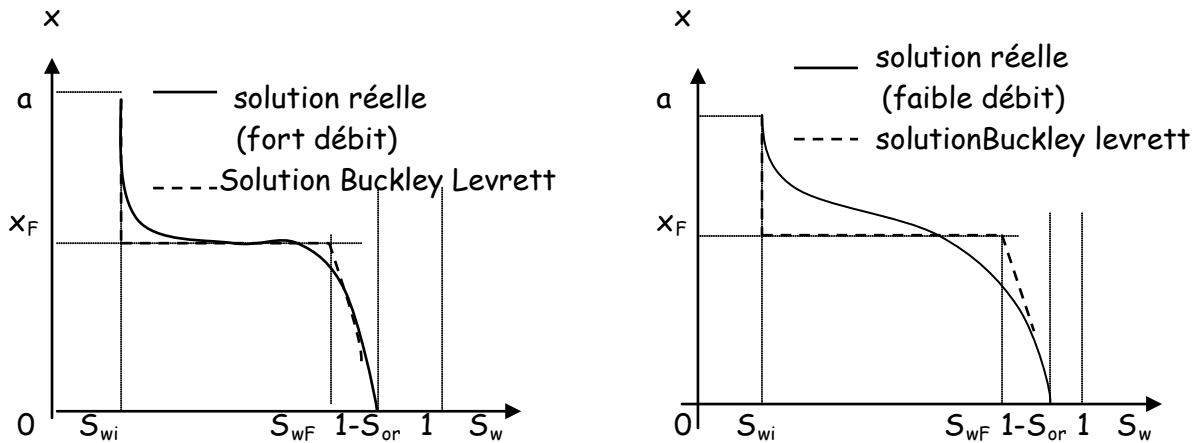
Le volume d'eau injectée ( $Q_t dt$ ) a modifié la saturation en eau dans le volume poreux ( $S dx \beta$ ), de la valeur initiale  $S_{wi}$  à la valeur moyenne derrière le front  $S_{wm}$ .

Conclusion : Le déplacement unidirectionnel de l'huile par de l'eau sous l'effet des forces de viscosité et de gravité peut être schématisé comme suite : le débit d'entrée d'eau est constant, on voit apparaître un front de saturation en avant duquel, il y a seulement écoulement d'huile et en arrière duquel, il y a écoulement simultané d'huile et d'eau. La vitesse d'une tranche de saturation donnée est constante. Les profils de saturation au cours du temps se déduisent les uns des autres par affinité.

4°- Intervention des forces capillaires et influence du débit

Au cours du balayage de l'huile par l'eau dans le milieu poreux. Ce dernier est le siège de brutales variations de saturations, notamment au front, c'est-à-dire à la discontinuité de saturation  $S_{wF}/S_{wi}$  (en réalité, il n'y a pas de discontinuité, mais forte variation).

L'approximation que nous venons de décrire, dite de Buckley-Levrett, est insuffisante chaque fois que l'on doit prendre en considération ces brutales variations donc de saturations, voir figures ci-dessous :



Au front, les forces capillaires ont pour effet de remplacer le profil abrupt théorique par un profil plus arrondi. Le profil obtenu par la théorie de déplacement frontal est d'autant plus proche du profil exact que le débit total est grand, ce qui laissait prévoir l'analyse des forces en présence.

# Exercices Corrigés

---

## Exercice 1

On demande la granulométrie d'un échantillon de milieu poreux formé de particules homogènes, en utilisant la formule de Stokes. Sachant que la particule de forme sphérique et de poids spécifique  $5,5 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$  se déplace en régime permanent, sous l'effet de son poids dans un tube de longueur 1 m et contenant un liquide ayant une densité 0,95 et une viscosité de  $1,4 \cdot 10^{-2} \text{ cp}$ , durant 90 s.

Réponse :  $d = 7,86 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

## Exercice 2

Soit un échantillon de roche de diamètre 24 mm et de longueur 32 mm. L'échantillon sec pèse 41,250 g, on le sature avec de l'eau de masse spécifique égale à 1. On pèse l'échantillon et on trouve une masse de 43,165 g.

Calculer la porosité de l'échantillon ?

Réponse :  $\beta = 13,23 \%$

## Exercice 3

Calculer la transparence et la porosité d'un échantillon de terrain fictif dans le cas d'un arrangement cubique.

Que peut-on conclure ?

Réponses :  $\beta' = 1 - \pi/4$  ;  $\beta = 1 - \pi/6$

## Exercice 4

Déterminer la transparence et la porosité de la roche fictive dans les cas :

- a- l'échantillon ayant un entassement le plus compact
- b- l'échantillon ayant un entassement le moins compact

Que peut-on conclure ?

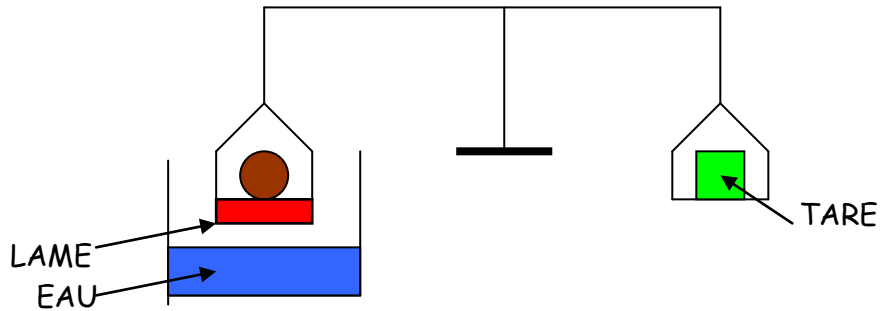
Réponses : a)  $\beta' = 0,093$  ;  $\beta = 0,259$  ; b)  $\beta' = 0,215$  ;  $\beta = 0,476$

## Exercice 5

Une lame de verre, d'épaisseur négligeable et de longueur 5 cm est collée sur la partie inférieure d'un plateau d'une balance. Au moyen de la tare M et d'une masse m on a réalisé l'équilibre de la balance.

Dans la position d'équilibre de la balance, on a plongé partiellement la lame dans un bac d'eau puis on l'avait retirée lentement, au moment de son extraction de l'eau, la balance s'est déséquilibrée sous l'action des forces de tensions superficielles. Pour rétablir l'équilibre de la balance, il a fallu rajouter une masse de 0,32 g à la tare M.

1. Quelle est l'intensité de la résultante des forces de tension superficielle qu'il s'exerçait sur la lame.
2. La constante de tension superficielle de l'eau à la température de l'expérience est de  $2,72 \cdot 10^{-1} \text{ N/m}$ . Quelle est la valeur du mouillement de l'eau envers de verre (prendre  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).



Réponses :  $F_{TS} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ N}$  ;  $\alpha = 76,39^\circ$

### Exercice 6

Un tube en U transparent et dont l'une des branches est un tube capillaire, contient un liquide X. Les caractéristiques de ce liquide à la température de l'expérience sont : masse volumique  $1,15 \text{ g/cm}^3$ , constante de tension superficielle  $70 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$  et mouillabilité envers le verre est  $30^\circ$  (prendre  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

1°- Calculer la dénivellation  $h$  entre les surfaces libres du liquide, sachant que le rayon de la branche du capillaire vaut  $0,5 \text{ mm}$ .

2°- Quand on pose sur la partie supérieure du capillaire une bulle supposée sphérique et de rayon  $2 \text{ mm}$  d'un second liquide, la dénivellation entre les deux niveaux du liquide X s'annule. Déterminer la constante de tension superficielle du second liquide.

Réponses :  $h = 2,1 \text{ cm}$  ;  $\sigma = 0,105 \text{ N/m}$

### Exercice 7

Un cadre métallique carré de  $5 \text{ cm}$  de côté est déposé dans un bain de mazout. Pour séparer le cadre du liquide, il faut exercer une force de  $7,32 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ . Calculer la tension superficielle du mazout.

Réponse :  $\sigma = 1,83 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$

### Exercice 8

Déterminer les coefficients de perméabilité et de filtration d'un échantillon cylindrique de sable quartzéux. La longueur de l'échantillon est  $40 \text{ cm}$ , le diamètre de la section transversale est  $2,5 \text{ cm}$ , le débit volumique d'écoulement est  $4,3 \text{ cm}^3/\text{min}$ , les pressions aux extrémités de l'échantillon sont  $P_1 = 1,68 \text{ atm}$ ,  $P_2 = 1 \text{ atm}$ , le coefficient de viscosité dynamique du fluide est  $3,45 \text{ cpo}$  et le poids volumique du fluide est  $860 \text{ Kg/m}^3$ . Le fluide est filtré suivant la loi de DARCY.

Réponses :  $K = 2,96 \text{ darcy}$  ;  $K_f = 2,65 \text{ cm/h}$

### Exercice 9

Déterminer la perméabilité d'un milieu poreux ayant une filtration linéaire de  $0,3 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}$  et traversé par l'eau de viscosité cinématique  $1 \text{ stokes}$ .

Réponse :  $K = 0.03 \text{ darcy}$

### Exercice 10

Calculer le nombre de Reynolds aux parois d'un puits débouchant sur une couche composée de dix trous de forme circulaire de rayon 1 cm. La porosité de la couche étant 20%, la perméabilité est 100 mdcy, la viscosité du fluide est 10 cp, la densité est de 0,8g/cm<sup>3</sup> et le débit du puits est 100 m<sup>3</sup>/jour.

Réponses :  $v = 0.36 \text{ m/s}$  ;  $R_e = 3.68$

### Exercice 11

On filtre de l'eau à 20°C de viscosité dynamique 1 cpo à travers le sable dont la porosité est 0,2 et la perméabilité est 1,38 darcy. La vitesse de filtration est 1,68 m/jour, le diamètre effectif est 0,055 cm.

Calculer le nombre de Reynolds par les différentes expressions.

Réponses : Formule standard :  $R_e = 0.0107$  ; formule Stchelkatchev :  $R_e = 0.0091$

### Exercice 12

Une nappe aquifère est composée de trois couches stratifiées ainsi définies : la première couche est constituée du sable fin d'une épaisseur 10 m et de conductivité hydraulique 10<sup>-3</sup> m/s, la seconde couche est constituée par la pierraille d'épaisseur 2 m et de conductivité hydraulique 10<sup>-2</sup> m/s et enfin la troisième couche limoneuse est d'épaisseur 10 m et de conductivité hydraulique 5.10<sup>-5</sup> m/s.

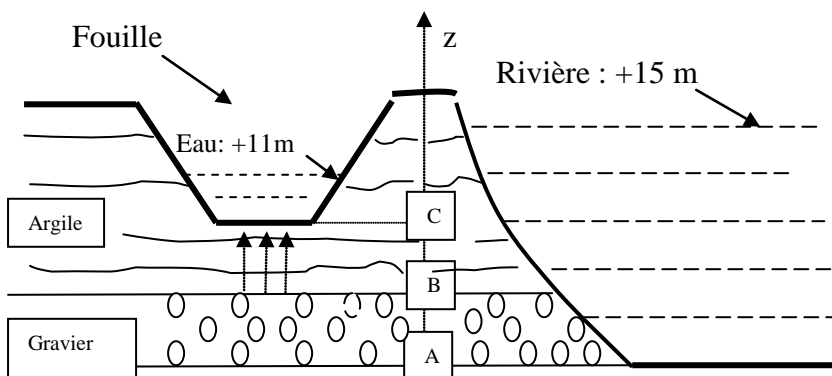
- 1- Déterminer l'expression du débit quand l'écoulement s'effectue suivant la verticale vers le bas
- 2- Déterminer l'expression du débit quand l'écoulement s'effectue suivant l'horizontale
- 3- Calculer la conductivité hydraulique verticale équivalente
- 4- Calculer la conductivité hydraulique horizontale équivalente

Réponses:  $K_v = 1.04 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$  ;  $K_H = 1.38 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$

### Exercice 13

On demande de calculer la perte de charge par unité de longueur engendrée par l'écoulement d'eau de rivière descendant à travers un milieu poreux constitué d'argile vers une fouille avec pompage, voir figure ci-dessous.

On donne les côtes : A= 0 m, B=5 m et C=10 m.



Réponse :  $J = \Delta H/L = 0.8$



#### Exercice 14

Soit un écoulement radial circulaire dirigé vers le puit. La dépression est de la forme :

$$\frac{dP}{dr} = A_1 v + A_2 v^2$$

Où  $v$  étant la vitesse apparente d'écoulement à travers le milieu poreux.

$$A_1 = \mu/K, \quad A_2 = 2 \rho d_{ef}^2 C_1 / (\beta K^{3/2}) \quad \text{et} \quad C_1 = 6.10^{-5}$$

Calculer la dépression ( $P_c - P_p$ ) qui va s'établir dans un puits produisant un débit de  $100 \text{ m}^3/\text{jour}$ . La loi de filtration n'est pas linéaire. Les rayons du contour de la zone d'alimentation et du puit sont respectivement  $R_c = 500 \text{ m}$  et  $R_p = 0,05 \text{ m}$  avec une épaisseur de la couche  $b = 10 \text{ m}$ .

On donne : le diamètre effectif des grains ( $d_{ef}$ )  $0,2 \text{ mm}$ , la porosité de la couche ( $\beta$ )  $20\%$ , la masse volumique du fluide ( $\rho$ )  $0,85 \text{ g/cm}^3$ , la viscosité du fluide ( $\mu$ )  $2,5 \text{ cp}_o$  et la perméabilité de la couche ( $K$ )  $1 \text{ darcy}$ .

Réponse :  $\Delta P = 4.2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

#### Exercice 15

Déterminer l'indice de productivité, si la perméabilité de la couche productive circulaire est  $0.55 \text{ darcy}$ , l'épaisseur est  $20 \text{ m}$ , le rayon du contour d'alimentation est  $10 \text{ km}$  à la pression  $70 \text{ atm}$ , le rayon du puit est  $10 \text{ cm}$  à la pression de fond  $50 \text{ atm}$  et la viscosité du fluide incompressible est de  $3.14 \text{ cpo}$ , suit une loi de filtration linéaire.

Réponse :  $I = Q / \Delta P = 0.68 \text{ m}^3/\text{h} \cdot \text{atm}$

#### Exercice 16

Un écoulement radial circulaire d'un fluide de  $200 \text{ tonnes/jour}$ , de viscosité  $4 \text{ cpo}$  et de masse volumique  $870 \text{ kg/m}^3$ , s'effectue suivant la loi de filtration linéaire à travers une couche productive d'épaisseur  $10 \text{ m}$  et de perméabilité  $0.5 \text{ darcy}$ . Le rayon du puit est  $12.4 \text{ cm}$ , sa pression de fond est  $80 \text{ atm}$ . On demande de calculer les pressions aux distances  $r_1 = 10 \text{ m}$  et  $r_2 = 100 \text{ m}$ .

Réponses :  $P(r_1=10 \text{ m}) = 94.38 \text{ atm}$  ;  $P(r_2=100 \text{ m}) = 102.14 \text{ atm}$

#### Exercice 17

Déterminer la perméabilité de milieu poreux formé d'une conduite circulaire de diamètre  $20 \text{ cm}$ , de longueur  $100 \text{ m}$  et contenant du sable, par lequel traverse dans les conditions normales, un débit de gaz  $200 \text{ cm}^3/\text{s}$  et de viscosité  $10^{-4} \text{ cpo}$ . La pression de la couche et celle du puit sont respectivement  $3 \text{ atm}$  et  $1 \text{ atm}$ .

Réponse :  $K = 0.159 \text{ darcy}$

#### Exercice 18

Déterminer la pression  $P_1$  à la distance  $r_1 = 100 \text{ m}$ , d'un puit à gaz de rayon  $0.1 \text{ m}$ , à la pression  $50 \text{ atm}$  sachant que la filtration de ce gaz parfait obéit à la loi de Darcy et s'effectue dans une couche circulaire de rayon  $1000 \text{ m}$ , à la pression  $100 \text{ atm}$ .

Réponse :  $P(r=100 \text{ m}) = 90.13 \text{ atm}$

**Exercice 19**

Soit un gisement monoclin fermé sur failles: une couche de sable d'épaisseur 5 m, limitée sur les côtés par deux failles parallèles à la ligne de pente et distantes de 1000 m.

De l'eau est injectée par une ligne de puits injecteurs distants de 500 m d'une ligne de puits producteurs à un débit constant égale 200 m<sup>3</sup>/j (condition de fond).

La perméabilité et la porosité du sable sont respectivement 500 mDarcy et 20 %.

Dans les conditions de fond, les masses spécifiques de l'huile et l'eau ainsi que leurs viscosités sont respectivement :

$$\rho_o = 0.80 \text{ g/cm}^3, \quad \rho_w = 1.05 \text{ g/cm}^3, \quad \mu_w = 0.5 \text{ cP} \quad \text{et} \quad \mu_o = 5 \text{ cP}$$

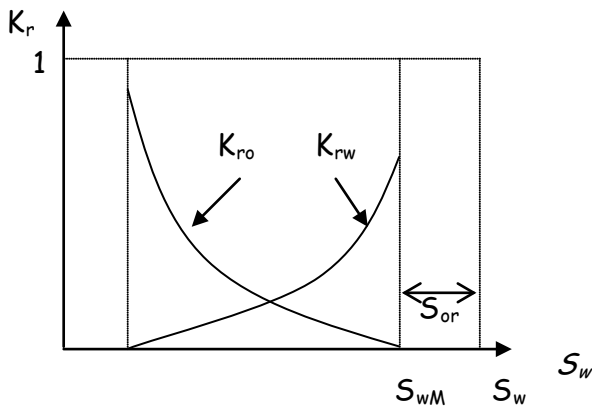
Les perméabilités relatives à l'eau et à l'huile sont données dans le tableau suivant :

Sw	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
K <sub>ro</sub>	0.96	0.69	0.49	0.33	0.2	0.11	0.05	0
K <sub>rw</sub>	0	0.005	0.03	0.07	0.13	0.19	0.26	0.35

- Tracer les courbes de perméabilités relatives de l'eau et l'huile en fonction de la saturation en eau, en justifiant votre réponse.
- Pour quelle valeur de la saturation en eau, les perméabilités relatives de l'eau et l'huile sont égales.
- En déduire les saturations en eau interstitielle et en huile résiduelle
- Déterminer les saturations en eau au front et en eau moyenne derrière le front
- Calculer le temps mit par le front pour arriver à un puits producteur

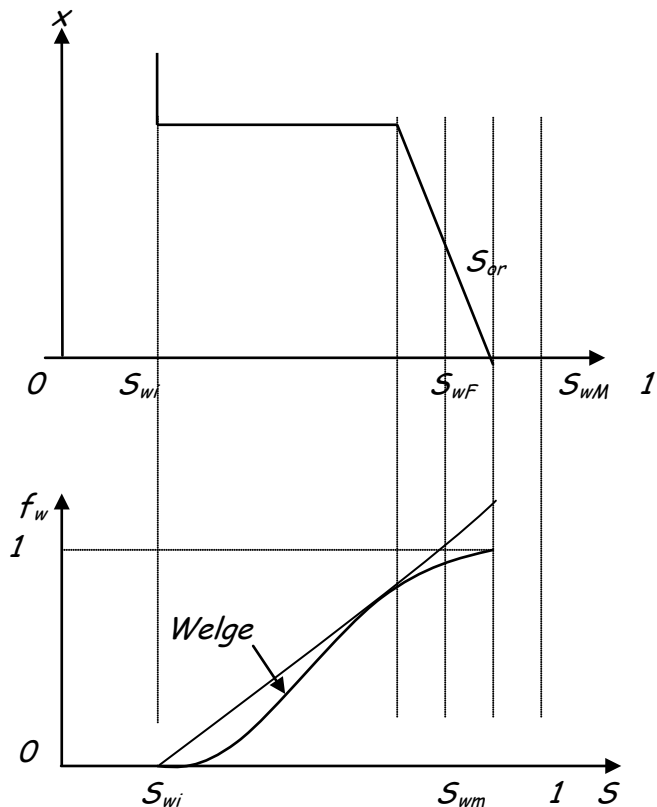
**Réponses**

1.



$$f_w = \frac{\frac{K_{rw}}{\mu_w}}{\frac{K_{rw}}{\mu_w} + \frac{K_{ro}}{\mu_o}} \quad \text{ou} \quad f_w = \frac{1}{1 + \frac{K_{ro}\mu_w}{K_{rw}\mu_o}}$$

4.



2. Pour  $K_{ro} = K_{rw}$  obtenu du graphe, on détermine la valeur de la saturation en eau  $S_w$

3.  $S_{wi} = 0.15$  et  $S_{or} = 0.2$

4.  $S_{wF} = 0.52$  et  $S_{wm} = 0.52$

5.  $v_F = \frac{Q_t}{S\beta(S_{wm} - S_{wi})}$  avec  $t = x/v_f = 1049$  jours (approximativement 3 ans)

# Références Bibliographiques

- H. Darcy, 1856. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Victor Dalmont Editeur-Paris.
- M. Nicolas, 2003. Ecoulement dans les milieux poreux. Cours de DEA mécanique et énergétique. Université de Provence, Marseille.
- R. Lenormand, M. Fourar et C. Zarcone, 2004. Ecoulement en milieux poreux réels. Modélisation et application. Notes de Cours.
- R. Cossé, 1988. Techniques d'exploitation pétrolière – le gisement. Editions Technip.
- D. Tiab, 1993. Petrophysics-Theory and practise of mesuring resvoir rock and fluid transport properties.
- G. Schneebeli, 1987. Hydraulique souterraine. ISSN 0399-4198, Editions Eyrolles.
- R. Lefebvre, 2010. Ecoulement multiphase en milieux poreux. Notes de Cours, Université Laval / INRS, Centre - Eau Terre Environnement.
- Houpeurt, 1974. Mécanique des fluides dans les milieux poreux. Critiques et recherches. ISBN 2-7108-0243-0, Editions Technip.
- Houpeurt, 1975. Eléments de Mécanique des fluides dans les milieux poreux. ISBN 2-7108-0260-0, Editions Technip.
- P. Chaumet, 1965. Ecoulement monophasique des fluides dans les milieux poreux. Cours de production-tome III. Société des Editions Technip.
- Marle, 1965. Les écoulements polyphasiques en milieux poreux. Cours de production-tome IV. Société des Editions Technip.
- R. Monicard, 1965. Caractéristiques des roches réservoirs- analys des carottes. Cours de production-tome I. Société des Editions Technip.